

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇUBUK ELEMANLARIN BURKULMASINDA YAKLAŞIK TAŞIMA
MATRİSİ VE BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Seyit İsmail ULUSOY**

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

OCAK 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÇUBUK ELEMANLARIN BURKULMASINDA YAKLAŞIK TAŞIMA
MATRİSİ VE BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Seyit İsmail ULUSOY
(501071106)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 23 Aralık 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Ocak 2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Ünal ALDEMİR (İTÜ)
Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)**

OCAK 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanışında başından sonuna kadar desteğini ve bilgisini benden eksik etmeyen değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Reha ARTAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca bana her alanda destek olan annem Hanım ULUSOY, babam Bayram ULUSOY ve ablam Sibel ULUSOY'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca gerek lisans gerekse yüksek lisans boyunca beraber çalıştığım değerli arkadaşım İnş. Müh. Ali ŞAHİN'e teşekkür ederim.

Ocak 2010

Seyit İsmail Ulusoy

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	v
SEMBOLLER	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	1
1.2 Çubukların Burkulmasıyla İlgili Yapılan Çalışmalar.....	1
1.3 Nanoteknoloji Ve Karbon Nanotüpler	4
1.3.1 Karbon nanotüpler.....	5
1.3.1.1 Tek duvarlı karbon nanotüpler	5
1.3.1.2 Çok duvarlı karbon nanotüpler	7
2. YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ.....	9
2.1 Amaç	9
2.2 Yaklaşık Taşıma Matrisinin Açılımı	9
2.3 Yaklaşık Taşıma Matrisiyle Alternatif Çözüm	10
2.4 Yaklaşık Taşıma Matrisiyle Diferansiyel Denklemler Çözümü	11
3. YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ VE BAŞLANGIÇ DEĞERLER	
METODUYLA ÇUBUKLARIN BURKULMASININ İNCELENMESİ.....	17
3.1 Başlangıç Değerler Metoduyla Çubukların Denge Denklemleri	17
3.2 Çubukta Yaklaşık Ve Kesin Taşıma Matrisleri.....	19
3.2.1 İki terimli yaklaşık taşıma matrisi.....	19
3.2.2 Dört terimli yaklaşık taşıma matrisi.....	20
3.2.3 Kesin taşıma matrisi.....	21
3.3 Taşıma Matrisleriyle Sabit Kesitli Çubukta Burkulma Yüklerinin Kesin Ve Yaklaşık Hesabı	22
3.3.1 Basit mesnetli çubuk	22
3.3.2 Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubuk.....	25
3.3.3 İki ucu ankastre mesnetli çubuk.....	26
3.3.4 Bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mesnetli çubuk	27
3.4 Yaklaşık Taşıma Matrisiyle Değişken Kesitli Çubukta Burkulma Yükleri....	28
3.4.1 Değişken kesitli basit mesnetli çubuk	29
3.4.2 Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk	30
3.4.3 Değişken kesitli iki ucu ankastre mesnetli çubuk	31
3.4.4 Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu hareketli mesnetli çubuk.....	32
4. ÇİFT DUVARLI KARBON NANO TÜPLERİN BURKULMA YÜKÜNÜN YAKLAŞIK HESABI.....	33
4.1 Başlangıç Değerler Metoduyla Çok Duvarlı Karbon Nanotüplerin Denge Denklemleri	33

4.2 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Mesnetli Çift Duvarlı Karbon Nanotüpün Burkulmasının İncelenmesi	36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	41
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	47

SEMBOLLER

N	: Eksenel yük
L	: Eksenel yüke maruz kalmış elemanın boyu
M	: Eksenel yük nedeniyle oluşan moment
T	: Eksenel yük nedeniyle oluşan kesme kuvveti
E	: Eleman elastisite modülü
I	: Atalet momenti
v	: Elemanda meydana gelen düşey deplasman
ϕ	: Elemanda meydana gelen açısal deplasman
J	: Birim matris
X_k	: Eleman sayısı k'ya kadar ilerletilmiş yaklaşık taşıma matrisi
y_0	: Denklem başlangıç değeri
I_z	: Değişken atalet momenti
I_0	: Başlangıç atalet momenti
α	: Değişken kesitli çubukta değişim açısı
A_1	: Dış karbon tüpün kesit alanı
A_2	: İç karbon tüpün kesit alanı
N_1	: Dış karbon nanotüpe etkiyen eksenel yük
N_2	: İç karbon nanotüpe etkiyen eksenel yük
v_1	: Dış karbon nanotüpte meydana gelen düşey deplasman
v_2	: İç karbon nanotüpte meydana gelen düşey deplasman
ϕ_1	: Dış karbon nanotüpte meydana gelen açısal deplasman
ϕ_2	: İç karbon nanotüpte meydana gelen açısal deplasman
d	: Karbon nanotüplerin hacimlerinin aritmetik ortalaması
d_1	: Dıştaki karbon nanotüpün hacmi
d_2	: İçteki karbon nanotüpün hacmi
c	: Van Der Waals katsayısı
I_1	: Dıştaki karbon nanotüpün atalet momenti
I_2	: İçteki karbon nanotüpün atalet momenti

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : İki ucundan basit mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri	24
Çizelge 3.2 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri	25
Çizelge 3.3 : İki ucu ankastre mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri	26
Çizelge 3.4 : Bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri	27
Çizelge 3.5 : Değişken kesitli basit mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükü değerleri	30
Çizelge 3.6 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükü değerleri.....	31
Çizelge 3.7 : Değişken kesitli iki ucu ankastre mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükleri	31
Çizelge 3.8 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu hareketli mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükleri	32
Çizelge 4.1 : Bir ucu ankastre serbest mesnetli çift duvarlı karbon nanotüpün yaklaşık burkulma yükü değerleri	40

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Basit mesnetli çubuk	2
Şekil 1.2 : Tek duvarlı karbon nanotüpün yandan görünüşü	6
Şekil 1.3 : Tek duvarlı karbon nanotüpün cepheden görünüşü	6
Şekil 1.4 : Çok duvarlı karbon nanotüpün yandan görünüşü	7
Şekil 1.5 : Çok duvarlı karbon nanotüpün cepheden görünüşü	8
Şekil 2.1 : Hesap sınırlarının aralıklara bölünmesi.....	11
Şekil 3.1 : Eksenel yük etkisindeki çubukta meydana kesit zorları.....	18
Şekil 3.2 : Eksenel yük etkisinde basit mesnetli çubuk	23
Şekil 3.3 : Eksenel yük etkisinde bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubuk...	25
Şekil 3.4 : Eksenel yük etkisinde iki ucu ankastre mesnetli çubuk	26
Şekil 3.5 : Eksenel yük etkisinde bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mesnetli çubuk....	27
Şekil 3.6 : Sabit kesitli çubuk	28
Şekil 3.7 : Değişken kesitli çubuk	29
Şekil 3.8 : Değişken kesitli basit mesnetli çubuk	29
Şekil 3.9 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubuk.....	30
Şekil 3.10 : Değişken kesitli iki ucu ankastre mesnetli çubuk	31
Şekil 3.11 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu hareketli mesnetli çubuk.....	32
Şekil 4.1 : Eksenel yük etkisinde çift duvarlı karbon nanotüp	33
Şekil 5.1 : Yaklaşık burkulma yükü hesabı için akış diyagramı.....	42

ÇUBUK ELEMANLARIN BURKULMASINDA YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ VE BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODU

ÖZET

Yapı mekaniğinde çubukların burkulması çeşitli metotlarla incelenebilir. Bu çubuk elemanlarının kesin burkulma yükleri de bu metotlardan biriyle rahatlıkla hesaplanabilir. Ancak kesin hesap her durumda kolaylıkla yapılamaz. Çubuk kesitinin değişken olması veya birden fazla rijitlik sabitinin söz konusu olduğu durumlarda kesin burkulma yükü hesabı güçleşir. Bu çalışmanın kapsamı içerisinde gerek değişken kesitli çubukların gerekse iki rijitlik sabitinin söz konusu olduğu çift duvarlı karbon nanotüplerin burkulması yaklaşık metotla incelenmiştir. Ayrıca çeşitli sınır koşullarına sahip problemler incelenmiş bunlar için hesaplanan kesin ve yaklaşık burkulma yükleri karşılaştırılmıştır.

Bu çalışma içerisinde yaklaşık taşıma matrisi ve başlangıç değerler metotları kullanılmıştır. Başlangıç değerler metodu, elde edilen denklemlerin yaklaşık taşıma matrisine uygun forma dönüştürmek için kullanılmıştır. Kısaca başlangıç değerler metodu elde edilen denklemlerin tümünün sabit değerler cinsinden ifade edilmesi olarak tanımlanabilir. Bu metotta esas olan değişkenleri olabildiğince az sabitle ifade etmektir. Burada bahsedilen sabit değerler probleme ve denklemlerine göre değişir. Burkulma problemleri için bu sabit değerler rijitlik değerleri ve sabit katsayılarıdır. Bu metot yardımıyla her türlü diferansiyel denklem matrisi forma getirilerek yaklaşık taşıma matrisine uygun hale getirilebilir. Kullanılan diğer yöntem olan yaklaşık taşıma matrisindeki ana fikir ise matris formdaki diferansiyel denklemlerin taşıma matrisini hesaplayıp başlangıç koşuluyla çarparak çözüme ulaşmaktır. Çubuk bir sistem için başlangıç koşulu başlangıçtaki mesnetlenme koşulunu ifade etmektedir. Diğer uçtaki mesnetlenme koşuluna beraber yaklaşık burkulma yükü her türlü durum için rahatlıkla hesaplanabilir.

Yapılan incelemelere göre yaklaşık taşıma matrisi metodu diferansiyel denklemlerin integrasyonunun tek sefer yerine seri şekilde toplanarak hesaplanması esasına dayanmaktadır. Buna göre bu toplama serisi ne kadar ilerletilirse yaklaşık sonuçlar kesin sonuca o kadar yaklaşır. Dolayısıyla yaklaşık burkulma yükü değerleri de kesin burkulma yükü değerlerine yakınsar. Elde edilen bir diğer sonuçta bu yakınsama, seriye katılan değer sayısına göre üstten veya alttan yakınsadığından yaklaşık burkulma yükü değerinin hangi aralıkta olduğunun rahatlıkla bulunmasıdır.

Gerek çift duvarlı karbon nanotüplerde gerekse diğer kesitlerin incelenmesinde belirli bir aralıkta integral hesabı söz konusudur. Yapılan hesaplar neticesinde, kullanılan aralık ne kadar çok parçaya bölünürse yaklaşık burkulma yükü değeri de kesin sonuca o kadar çok yakınsadığı görülmüştür. Çalışmanın kapsamı içerisinde nanoteknolojiyle ilgili olarak, çift duvarlı karbon nanotüplerde tüplerin birbirine olan etkileşiminin burkulma yükü değerini etkilemediği sonucuna varılmıştır.

APPROXIMATE PRINCIPAL MATRIX AND INITIAL VALUES METHOD FOR BUCKLING OF BAR ELEMENTS

SUMMARY

In mechanic of structures, buckling of bars can be examined with various methods. This exact buckling loads of bar staff in either of these methods can be calculated easily. But in each case, exact calculation can't easily done. If we have variable bar with variable cross-section or more than one rigidity constant, calculation of exact buckling load is difficult. Within the scope of this study ; bars with variable cross section and double walled carbon nanotubes which have two rigidity constants examined with approximate method. Problems which have various boundary conditions has also examined for exact and approximate buckling loads; calculated and compared.

In this study, approximate principal matrix an initial values methods are used. Initial values method used for converting the equations to appropriate form to approximate principal matrix. In short, the initial value method for all of the available equations to be expressed in terms of constant value can be defined as. This method is based on the variables as possible is to be expressed with less constant. Here in these constant values change with problem and equation. These constants are rigidity values and constant numbers for buckling problems. With the help of this method, differential equations with of all kinds can be brought about matrix form suitable for approximate matrix can be made. Purpose of other method which name is approximate principal matrix is calculating approximate principal matrix for differential equations and reacing to soluition by multiplyling initial value with approximate principal matrix. For a bar system initial values describes initial support of bar. Approximate buckling load can easily calculate with end support situation of bar.

According the reviews the approximate principal matrix method bases on calculating sum of integrations with series instead of once integration of differential equations. According to this, if sum series how much calculating forward, the result is so much closer the absolute value. Therefore, appoximate buckling load values converges to absolute buckling load values. Another result obtained from this convergence is according to the number for the participating values to sum series from the top or bottom approximate values is closes the ablsolute buckling load values which provides to found range of absolute values easily.

As well as review of double walled carbon nanotubes and the other cross sections are about integral calculus in a specific range. As a result of calculations, used range divides how much more, the approximate buckling load value converges to the absolute one. Within the scope of the study about nanotechnology obtained that; on double-walled carbon nanotubes, to each interaction to the other one of carbon nanotubes do not affects to the buckling load value.

1. GİRİŞ

Bugüne kadar çubukların burkulmasının incelenmesinde çok çeşitli metotlar kullanılmıştır. Bu tezin kapsamı içinde çubukların burkulmaları kesin hesap metotlarıyla değil, yaklaşık hesap metoduyla incelenmiştir. İlerleyen kısımlarda bu hesap metodu çeşitli problemlere uygulanmıştır.

1.1 Tezin Amacı

Sabit kesitli ve çeşitli mesnet koşullarına sahip çubuk elemanların burkulma yükleri birçok metotla ve kesin olarak hesaplanabilmektedir.[1,2] Ancak bu kesin hesap metotlarında, kesitin değişken olması gibi integrasyonu etkileyebilecek durumlar söz konusu olduğunda burkulma yükünü kesin olarak hesaplamak zorlaşır. Bu noktada burkulma yükünün kesin hesabı zor olan çubuklarda, burkulma yükü değeri yaklaşık metotlarla kolaylıkla hesaplanabilir. Bu hesap sonunda kesin değere çok yaklaşık değerler rahatlıkla elde edilebilir.

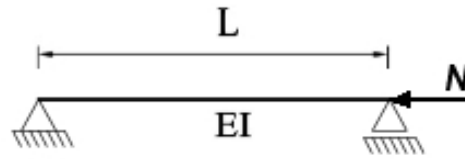
Çok duvarlı karbon nanotüplerin burkulma yüklerinin kesin hesabı değişken kesitli çubuklarda olduğu gibi oldukça güçtür. İşte bu nedenle tezin kapsamı içinde yaklaşık metotlardan biri olan yaklaşık taşıma matrisi metodu incelenecek ve daha sonra değişken kesitli çubuklara ve çok duvarlı karbon nanotüplere uygulanmak suretiyle bunların burkulma yükünün yaklaşık hesabı incelenecektir.

1.2 Çubukların Burkulmasıyla İlgili Yapılan Çalışmalar

Çubukların burkulması ile ilgili literatürde en bilinen çalışmalar Leonhard Euler-Daniel Bernoulli ve Stephen Timoshenko tarafından yapılmıştır. Her ikisinde de öne sürülen teoriler sırasıyla Euler-Bernoulli çubuk teorisi ve Timoshenko çubuk teorisi olarak bilinmektedir. Bu iki teoride de eksenel yükten oluşan momentin sebep olduğu eğilme etkileri göz önüne alınmaktadır. Timoshenko çubuk teorisinde bu etkilere ek olarak çubukta kayma ve dönme etkilerinin oluşturduğu atalet momenti faktörleri de dikkate alınır.[3]

Uzun ve ince çubuklarda her iki teoriden elde edilen sonuçlar birbirine oldukça yakın çıkmaktadır. Ancak çubuk kalınlaştıkça iki teori arasındaki farkta artmaktadır.[3] Bu çalışmanın kapsamı içerisinde yalnızca eksenel yükten oluşan momentin neden olduğu eğilmeler dikkate alınacaktır. Dolayısıyla yaklaşık sonuçlar Euler çubuk teorisinin sonuçlarıyla karşılaştırılacaktır.

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında elde edilecek olan sonuçların daha iyi anlaşılması açısından Şekil 1.1'deki gibi sabit mesnetli bir çubuğun burkulma yükünün Euler-Bernoulli çubuk teorisiyle nasıl hesaplandığına değinilecektir.[1-3]



Şekil 1.1 : Basit mesnetli çubuk

Şekil 1.1'de iki ucu basit mesnetli olan ve N eksenel yüküne maruz kalan bir çubuk görülmektedir. M değeri, z kadar uzaklıktaki moment değerini belirtmektedir. Deplasman değerleri v ve ϕ ise z kadar uzaklıktaki düşey ve açısal deplasmanları temsil etmektedir. Bu değerler arasındaki ilişkiler kısaca yazılırsa;

$$\frac{dv}{dz} = \phi \quad (1.1)$$

ϕ ifadesinin türevini aldığımızda denklem (1.2)'deki değer elde edilir. Burada EI sabit kesitli çubuğun rijitliğidir.

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{-M}{EI} \quad (1.2)$$

Denklem (1.2)'de açısal deplasman değeri ϕ yerine yazılırsa;

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{-M}{EI} \quad (1.3)$$

Denklem (1.1), (1.2) ve (1.3) basit mesnetli çubuklar için temel denklemlerdir. M moment değeri, N eksenel yük cinsinden denklem (1.4)'te yazılmış ve denklem (1.5)'te yerine konmuştur.

$$M = Nv \quad (1.4)$$

Denklem (1.4)'teki ifadeyi denklem (1.3)'te yerine koyarsak;

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{-Nv}{EI} \quad (1.5)$$

Denklemleri çözebilmek için iki ucu basit mesnetli çubuğun sınır koşullarını yazmamız gerekir. Bunlar;

$$v(0) = 0 \quad (1.6)$$

$$v(L) = 0 \quad (1.7)$$

$$M(0) = 0 \quad (1.8)$$

$$M(L) = 0 \quad (1.9)$$

Bu bilinenlerden yola çıkarak diferansiyel denklemi çözümünü yazıp sınır koşullarıyla burkulma yükünü hesaplayalım.

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{Nv}{EI} = 0 \quad (1.10)$$

Denklem (1.10)'daki diferansiyel sistemin çözümü birçok bilgisayar programıyla veya elle rahatlıkla yapılabilir. Burada sadece sonucu yazarsak;

$$v(z) = A\sin[\beta z] + B\cos[\beta z] \quad (1.11)$$

$$\frac{N}{EI} = \beta^2 \quad (1.12)$$

Denklem (1.11)'deki A ve B değerleri bilinmeyen katsayılarıdır. β ise işlem kolaylığı ve anlaşılabilirlik açısından seçilmiş bir terimdir. Çözüme ulaşmak için sınır koşulları kullanılabilir. İşlemler devam ettirilirse;

$$B = 0 \quad (1.13)$$

$$A \neq 0 \quad (1.14)$$

A 'nın değeri sınır koşullarıyla bulunamaz ancak sıfır olamayacağı sınır koşullarıyla ortaya çıkmıştır.

$$v(z) = A\sin[\beta z] \quad (1.15)$$

$$v(L) = A\sin[\beta L] = 0 \quad (1.16)$$

Denklem (1.14) 'te A 'nın sıfır olamayacağı belirtilmişti. Bu nedenle;

$$\sin[\beta z] = 0 \quad (1.17)$$

Denklem (1.18)'de n değeri, açısal olarak π 'nin katlarını belirten bir tamsayıdır.

$$\beta L = n\pi \quad (1.18)$$

$$\sqrt{\frac{N}{EI}} L = n\pi \quad (1.19)$$

$$N = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (1.20)$$

Denklem (1.20)'deki değer iki ucu basit mesnetli sabit kesitli çubuğun burkulma yüküdür. Bu yük değerine literatürde “Euler’s Buckling Load” yani Euler’in burkulma yükü olarak belirtilmektedir[2]. Euler farklı mesnet koşulları içinde aynı işlemleri uygulamak suretiyle, çeşitli şekilde mesnetlenmiş çubukların da burkulma yüklerini hesaplamıştır.[1]

1.3 Nanoteknoloji Ve Karbon Nanotüpler

Nanoteknoloji nano boyutta maddeyle ilgili yapıların her türlü araştırma ve geliştirmeyi kapsar. Boyutsal anlamda nanoteknoloji 100 nanometre ve altındaki boyutları inceler. Bir nanometrenin, metrenin trilyonda biri olduğu düşünülürse oldukça küçük boyutta yapılan çalışmalardan bahsedildiği anlaşılır. Nanoteknoloji birçok alanı kapsayan bir bilim dalıdır. Dolaylı veya doğrudan nanoteknoloji tüm bilim dallarına katkı sağlar. Bilim dallarında ve ilgilendikleri alanların tümünde nanoteknolojiyle geliştirilmiş araçlar kullanılmaktadır.[4]

Malzemeler nano boyuta inildiğinde normal ölçülerindeki hallerine göre farklı özellikler sergilerler. Malzemeler nano boyutta daha dayanıklı olabilmekte, daha esnek ve daha iletken davranabilmektedir. Kısacası nano boyuttaki bir malzeme, normal boyutlarına göre çok daha farklı fiziksel ve kimyasal özellikler sergilemektedir. Bu nedenle nano boyuta inildiğinde malzemelerin genel fiziki teoremlerden ziyade daha özel fiziki kuramlarla incelenmesi gerekir.[5]

Nanoteknolojide malzeme en önemli unsurdur ve bu alanda en çok kullanılan malzeme karbondur. Çünkü karbon altı elektrona sahiptir ve karbon atomunun

elektronlarından ilk ikisinin hiç etkisinin olmaması, ayrıca ilk iki elektron ile diğer elektronlar arasındaki enerji farkının büyük olması karbonun farklı yapılar oluşturabilmesini sağlamaktadır. Nanoteknolojinin en önemli çalışma alanlarından biri de karbon nano yapıları oluşturulmasıdır. Bunlar toplar , tüpler, çubuklar ve halkalar şeklinde sınıflandırılabilen kafesimsi yapılardır. Bu çalışmanın kapsamı içerisinde yapılmış olan hesap ve incelemeler karbon nanotüpleri kapsadığından, sadece karbon nanotüpler incelenmiştir.[4-5]

1.3.1 Karbon nanotüpler

Karbon nanotüpler, önemli yapısal, mekaniksel ve elektronik özellikler gösteren yapılardır. Yüksek elektrokimyasal aktiviteleri, biyosensor ve elektrokimyasal uygulamalar için çok önemlidir. Karbon nanotüplerin, elektronik malzeme olarak manyetik ve optik nanoaygıt yapımında; ayrıca hafıza elemanı, kapasitör, transistör, diyot, mantık devresi ve elektronik anahtar yapımında kullanım alanları bulunmaktadır. Bunların yanında karbon nanotüpler, bilinen en sağlam malzemelerden oluşan yapılardan biridir. Hasarsız bir karbon nanotüp, kendi ağırlığının üçyüz milyon katı kadar bir ağırlığa dayanabilecek sağlamlıktadır.[4]

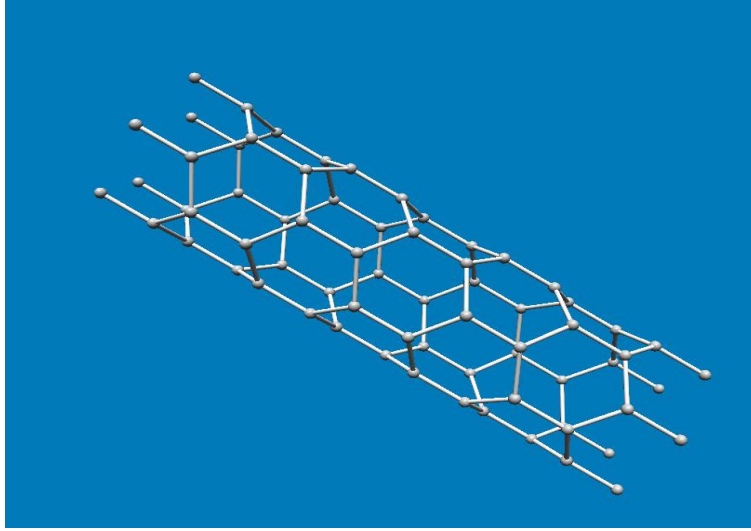
Karbon nanotüpler, geometrilerine bağlı olarak yarı-iletken ve metalik özellik gösterirler. Hiç bir katkı maddesi olmaksızın, nanotüpün, geometrik parametrelerinin değiştirilmesiyle, elektronik özellikleri de değiştirebilir. Tüplerin elektronik uygulamalarda, önemli bir yeri vardır. Küçük çaplı tüplerden oluşturulmuş bir demeti, koparabilmek için uygulanan çekme kuvveti, yaklaşık 36000 megapaskaldır. Çelik sınıflarının akma gerilmeleri 186 ile 355 megapaskal arasındadır. Buna göre nanotüp fiberlerin dayanımı diğer malzemelere oranla oldukça yüksektir.[4]

Geometrilerine ve adetlerine göre karbon nanotüpler ikiye ayrılmaktadır. Eğer tek bir çeper söz konusuysa tek duvarlı karbon nanotüp olarak adlandırılmaktadır. Fakat iç içe geçmiş birden fazla tüp söz konusuysa, çok duvarlı karbon nanotüp adını alır.[4]

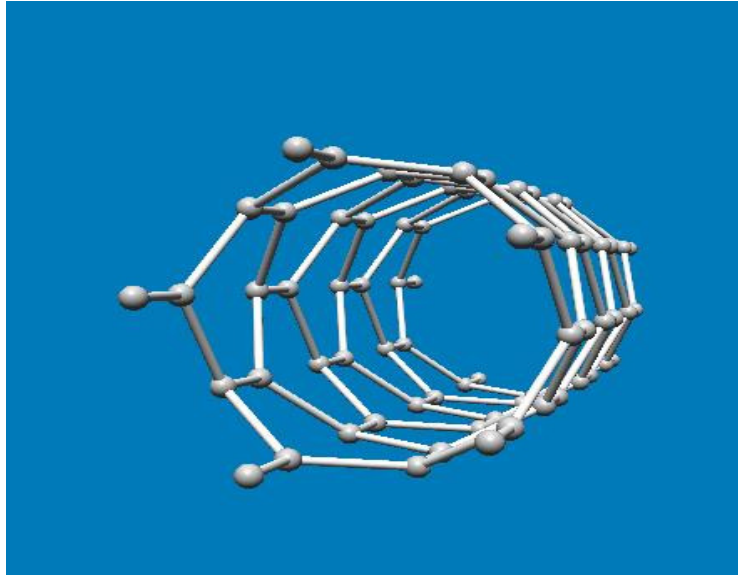
1.3.1.1 Tek duvarlı karbon nanotüpler

Tek duvarlı karbon nanotüplerin yapısı konsept olarak grafit plakasının kıvrılarak silindirik şekline gelmesiyle içi boş bir boru halini alması olarak tanımlanabilir. Büyük çoğunluğu yaklaşık olarak bir nanometre çapa sahiptir ve uzunlukları milyonlarca nanometreyi bulabilir.

Tek duvarlı karbon nanotüpleri çaplarına, boylarına ve geometrik yapılarına bağlı olarak yüksek esneklik ve dayanıklılığa sahip, eksenleri boyunca yüksek gerinimler altında yapısal kararlılıklarını koruyan malzemelerdir. Elektronik özellikleri de geometrik yapılarıyla çok yakından ilgilidir. Bir tek duvarlı karbon nanotüpün iletken veya yarı-iletken özellik gösterebilmesi çapı ve geometrik yapısına bağlıdır.



Şekil 1.2 : Tek duvarlı karbon nanotüpün yandan görünüşü



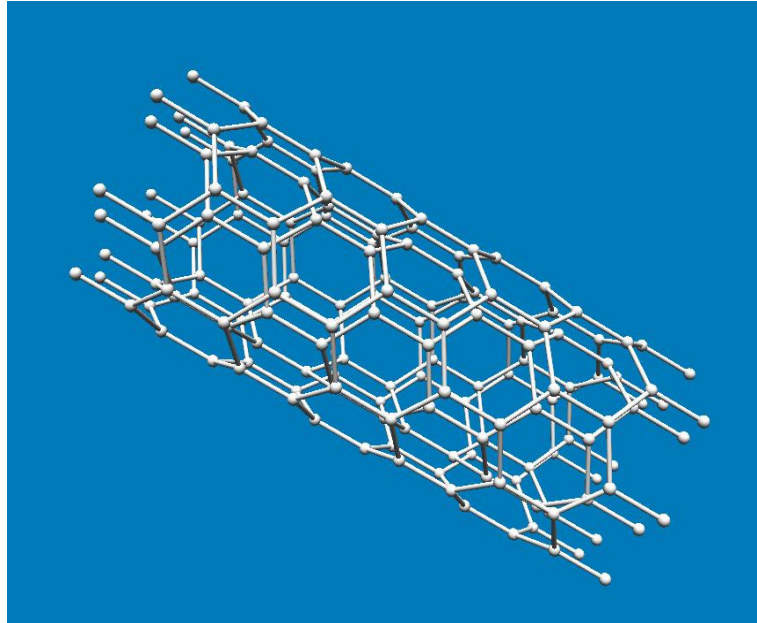
Şekil 1.3 : Tek duvarlı karbon nanotüpün cepheden görünüşü

Şekil 1.2 ve şekil 1.3’de tek duvarlı bir karbon nanotüpün yandan ve perspektiften görünüşleri görülmektedir[6] Daha önce bahsedildiği gibi kafesimsi yapılardan oluşan boru tipinde tüplerden oluşmaktadırlar. Tek duvarlı karbon nanotüplerin burkulması çubuktaki gibi incelenebilir. Belirli bir boydaki ve iki ucundan mesnetli tek duvarlı karbon nano tüpün burkulma yükü, rijitliği sabit bir çubuk gibi hesaplanabilir.

1.3.1.2 Çok duvarlı karbon nanotüpler

Çok duvarlı karbon nanotüpler, birden çok grafit silindirin bir araya gelmesiyle oluşmaktadır. Çok duvarlı karbon nanotüplerin yapısı iki tip model ile tanımlanmaktadır. İlk model, eş merkezli, çapları farklı tek duvarlı karbon nanotüplerin bir araya gelmesi şeklindedir. İkinci model ise bir grafit tabakasının kendi etrafında dönerek meydana getirdiği çok duvarlı karbon nanotüptür.

Çift duvarlı karbon nanotüplere ayrıca değinmek gereklidir. Bu nanotüpler, biçim ve özellikler bakımından tek duvarlı karbon nanotüplere benzese de tek duvarlılara nazaran kimyasal olaylara karşı dirençleri daha yüksektir. Bu durum karbon nanotüplere yeni özellikler tanımlarken oldukça önemlidir. Şekil 1.4' te çok duvarlı bir karbon nanotüpün yandan görünüşü gösterilmiştir.[4-6]

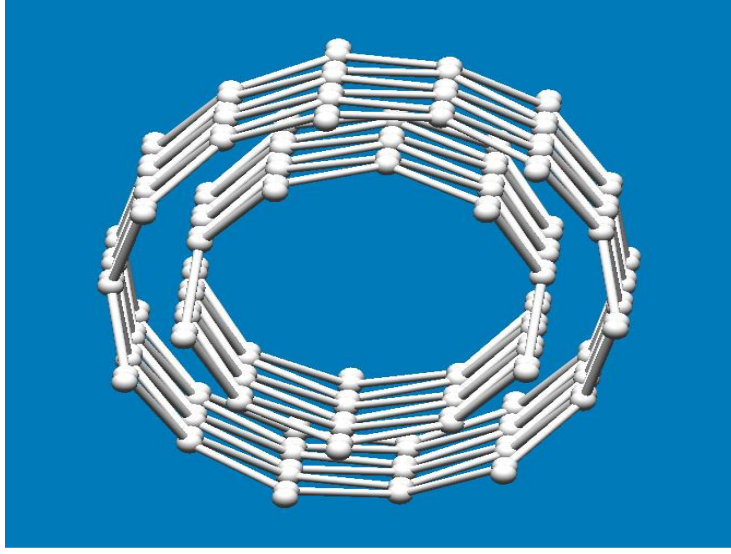


Şekil 1.4 : Çok duvarlı karbon nanotüpün yandan görünüşü

Çok duvarlı karbon nanotüplerin burkulma yükü, tek duvarlı olanlarındaki kadar kolay hesaplanamaz. Çift duvarlı karbon nanotüpler şekil 1.5'de görüldüğü üzere iç içe iki yapıdan meydana geldiğinden iki farklı rijitlik söz konusudur.[4-6] Burkulma yükleri İç içe geçmiş iki çubuğun burkulma yükü hesabı şeklinde hesaplanabilir. Ancak bu şekilde iki farklı rijitliğin söz konusu olduğu durumda kesin hesap yapmak oldukça güçtür. Ancak yaklaşık olarak hesap yapabilmek nispeten çok daha kolaydır.

Şekil 1.5'teki gibi çok duvarlı karbon nanotüpler incelenirken bunlar arasındaki çekimden dolayı oluşan etkilerinde göz önüne alınması gerekmektedir. Bu durum

bölüm 4’te ele alınacak ve tüpler arasındaki çekim kuvvetinin burkulma yüküne etkisi incelenecektir.



Şekil 1.5 : Çok duvarlı karbon nanotüpün cepheden görünüşü

İç içe geçmiş yapı sayısını arttırdıkça çok duvarlı karbon nanotüp bir çubuk halini almaya başlayacaktır. Dolayısıyla duvar sayısı arttıkça çok duvarlı karbon nanotüplerin burkulma yüküde sabit kesitlininkine yaklaşacaktır.

2. YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ

2.1 Amaç

Diferansiyel denklemlerin kesin çözümü birçok yöntem ve bilgisayar programı yardımıyla hesaplanabilmektedir.[1-3,7] Ancak kimi diferansiyel denklemlerin kesin çözümünü elle hesaplamak çok zor olabilir. Bu gibi diferansiyel denklemlerin çözümünün taşıma matrisiyle yaklaşık olarak hesaplanması çok daha kolaydır.

2.2 Yaklaşık Taşıma Matrisinin Açılımı

Denklem (2.1)'deki diferansiyel denklemi ele alalım[8]. Bu denklemde $\frac{dy}{dt}$ ve y sütun matris ve $A[t]$ kare matris olmak üzere;

$$\frac{dy}{dt} = A[t]y \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Denklemde y ifadesi yerine, yaklaşık hesap yapabilmek için X_k ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty$) taşıma matrisini koyarsak denklemin alacağı durum;

$$\frac{dX_k}{dt} = A[t]X_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, \infty) \quad (2.3)$$

Buradan J birim matris olmak üzere;

$$X_k = J + \int_0^t A[\tau]X_{k-1}d\tau \quad (2.4)$$

Taşıma matrisinin birkaç terimi hesaplanırsa;

$$X_0 = J \quad (2.5)$$

$$X_1 = X_0 + \int_0^t A[\tau] d\tau \quad (2.6)$$

$$X_2 = \int_0^t A[\tau] d\tau + \int_0^t A[\tau] \left(\int_0^\tau A[\sigma] d\sigma \right) d\tau \quad (2.7)$$

Yukarıdaki ifadelerde de görüldüğü gibi taşıma matrisinin $(k+1)$ elemanı (k) terime gelen ek ifadelerle oluşmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, iki ve ikiden fazla integral hesabının olduğu ifadelerin değişken dönüşümü yapılarak hesaplandığıdır.[8]

Taşıma matrisinde kaç terim alınıp hesap yapılacağına karar verildikten sonra taşıma matrisi $y(0)$ ile çarpılarak çözüm elde edilir. Taşıma matrisiyle çözüm yapabilmek için denklemin başlangıçtaki değerleri bilinmelidir[8].

$$y = X_k y(0) \quad (2.8)$$

2.3 Yaklaşık Taşıma Matrisiyle Alternatif Çözüm

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü için taşıma matrisi kullanmak çok büyük avantajlar ve çözüm kolaylığı sağlar. Ancak en yakın çözümü bulabilmek için taşıma matrisi serisini olabildiğince ilerletmek gerekir. Daha öncede belirtildiği gibi, belirli bir terim sayısından sonra taşıma matrisini hesaplamak güçleşir. Bu noktada yakın çözümü daha kolay bir şekilde yapabilmek için yaklaşık taşıma matrisi serisi hesaplanabilinen terime kadar hesaplanır. Daha sonraysa çözümün istendiği aralık, daha küçük parçalara bölünerek hesap yapılır. Bu işlem hem hesap kolaylığı sağlar hem de daha yakınsak bir çözüm elde etmemize yardımcı olur.

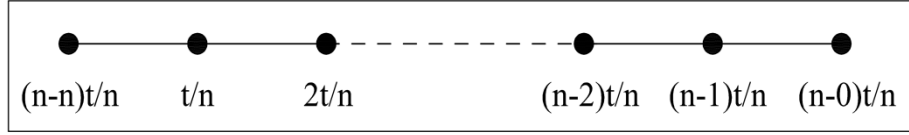
Yaklaşık taşıma matrisiyle alternatif çözüm için taşıma matrisi hesaplanırken integral sınırları $(0, t)$ yerine (u, t) alınır. Bu bilgiler ışığında denklemler ilerletilirse;

$$X_0 = J \quad (2.9)$$

$$X_1 = X_0 + \int_u^t A[\tau] d\tau \quad (2.10)$$

$$X_2 = \int_u^t A[\tau] d\tau + \int_u^t A[\tau] \left(\int_u^\tau A[\sigma] d\sigma \right) d\tau \quad (2.11)$$

Burada yaklaşık taşıma matrisi denklem (2.11)'deki gibi iki elemanda bırakılmıştır. Ancak eleman sayısı istenildiği kadar ilerletilebilir. İşlemler bu noktaya getirildikten sonra yaklaşık taşıma matrisinin kaç aralığa bölünerek hesaplanacağına karar verilir. Şekil 2.1'de $(0-t)$ aralığının n parçaya bölünmüş hali görülmektedir.



Şekil 2.1 : Hesap sınırlarının aralıklara bölünmesi

$$X_k = F[t, 0] = F\left[t, \frac{(n-1)t}{n}\right] F\left[\frac{(n-1)t}{n}, \frac{(n-2)t}{n}\right] \dots F\left[\frac{2t}{n}, \frac{t}{n}\right] F\left[\frac{t}{n}, \frac{(n-n)t}{n}\right] \quad (2.12)$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, aralık n parçaya bölündüğünden yaklaşık taşıma matrisinin n tane terimin çarpımına eşit olduğudur.

Bu yöntemle yaklaşık taşıma matrisi hesaplandıktan sonra $y = X_k y(0)$ hesaplanmak suretiyle denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

2.4 Yaklaşık Taşıma Matrisiyle Diferansiyel Denklem Çözümü

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki denklemin kesin çözümü rahatlıkla bulunabilir. Ancak biz sadece karşılaştırma amaçlı kesin çözümleri yazıp yaklaşık çözümü hesaplayacağız.

Kesin çözümler yazılırsa;

$$\frac{dy_1}{dt} = 2y_1 + y_2$$

$$y_1 = e^t(t + 1)$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2$$

$$y_2 = -e^t$$

Yaklaşık çözüm için taşıma matrisini hesaplırsak;

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = X_0 + \int_0^t A[\tau] \cdot d\tau$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 2t+1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \int_0^t A[\tau] \left(\int_0^\tau A[\sigma] d\sigma \right) d\tau$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2t+1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\tau & \tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} d\tau$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \frac{3t^2}{2} + 2t + 1 & t^2 + t \\ -t^2 - t & -\frac{t^2}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Taşıma matrisimiz X_2 dir. X_1 de taşıma matrisidir ve kullanılabilir. Ancak X_2 daha doğru sonuç verir. Daha yaklaşık sonuç için yukarıdaki hesap istenildiği kadar devam ettirililebilir. Ancak taşıma matrisini hesaplamak giderek güçleşir. Taşıma matrisiyle çözümü hesaplırsak;

$$y = X_k \cdot y(0)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3t^2}{2} + 2t + 1 & t^2 + t \\ -t^2 - t & -\frac{t^2}{2} + 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{3t^2}{2} + 2t + 1$$

$$y_2 = -t^2 - t$$

Bulunan çözümler yapı itibariyle kesin çözümle benzeşmeselerde değer verildiğinde yaklaşık çözüm ile kesin çözümler birbirlerine çok yakın çıkarlar;

$$y_{1yak.}(0.1) = 1.215$$

$$y_{1kesin}(0.1) = 1.21568$$

$$y_{1yak.}(0.2) = 1.46$$

$$y_{1kesin}(0.2) = 1.465$$

$$y_{2yak.}(0.1) = -0.11$$

$$y_{2kesin}(0.1) = -0.1105$$

$$y_{2yak.}(0.2) = -0.24$$

$$y_{2kesin}(0.2) = -0.244$$

Yaklaşık çözümlerde ufak değerler verildiğinde sonuçlar kesin çözüme çok yakın çıkar. Ancak yukarıda da görüldüğü gibi değerler büyüdükçe yaklaşık çözüm kesin çözümden ıraksar. Bunun önlemek için yaklaşık taşıma matrisini belirli bir noktaya kadar ilerlettikten sonra istenilen değer aralığını, daha önce belirtildiği gibi parçalara bölmek gereklidir. Bunun içinde yaklaşık taşıma matrisinin sınırları $(0, t)$ yerine (u, t) alınır. Yaklaşık taşıma matrisi bu şekilde hesaplandıktan sonra aralığın kaç parçaya bölüneceğine karar verilir. İşlemler bu yönde devam ettirilirse;

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = X_0 + \int_u^t A[\tau] d\tau$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_u^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 2t - 2u + 1 & t - u \\ -t + u & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + \int_u^t A[\tau] \left(\int_u^\tau A[\sigma] d\sigma \right) d\tau$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2t - 2u + 1 & t - u \\ -t + u & 1 \end{pmatrix} + \int_u^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\tau - 2u & \tau - u \\ -\tau + u & 0 \end{pmatrix} d\tau$$

$$F[t, u] = \begin{pmatrix} 1 - 2u + \frac{3u^2}{2} + 2t - 3ut + \frac{3t^2}{2} & -u + u^2 + t - 2ut + t^2 \\ u - u^2 - t + 2ut - t^2 & 1 - \frac{u^2}{2} + ut - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki matriste görüldüğü gibi u değerine sıfır verildiğinde daha önce hesaplamış olduğumuz yaklaşık taşıma matrisine ulaşmış oluruz. Ancak aralığı kaç parçaya bölmeye karar verdikten sonra u değerini aralıklar boyunca sıfıra götürmek bize en yaklaşık sonucu verecektir. Bu işlemide her bir aralığın sınır değerleri u ve t yerine konduktan sonra bunları aynı sırayla çarparak gerçekleştiririz.

$y(2)$ değerini hesaplamak için $F[2, 0]$ aralığını sırasıyla 3,6 ve 10 parçaya bölelim;

Üçe bölerek;

$$F[2, 0] = F[2, \frac{4}{3}] \cdot F[\frac{4}{3}, \frac{2}{3}] \cdot F[\frac{2}{3}, 0]$$

$$= \begin{pmatrix} 18.6324 & 11.893 \\ -11.893 & -5.15364 \end{pmatrix}$$

Altıya bölerek;

$$F[2, 0] = F[2, \frac{5}{3}] \cdot F[\frac{5}{3}, \frac{4}{3}] \cdot F[\frac{4}{3}, 1] \cdot F[1, \frac{2}{3}] \cdot F[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}] \cdot F[\frac{1}{3}, 0]$$

$$= \begin{pmatrix} 20.9598 & 13.7818 \\ 13.7818 & -6.60378 \end{pmatrix}$$

Ona bölerek;

$$F[2, 0] = F[2, \frac{9}{5}] \cdot F[\frac{9}{5}, \frac{8}{5}] \cdot F[\frac{8}{5}, 1] \cdot F[\frac{7}{5}, \frac{6}{5}] \cdot F[\frac{6}{5}, 1] \cdot F[1, \frac{4}{5}] \cdot F[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}] \cdot F[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}] \cdot F[\frac{2}{5}, \frac{1}{5}] \cdot F[\frac{1}{5}, 0]$$

$$= \begin{pmatrix} 21.6744 & 14.3698 \\ -14.3698 & -7.06514 \end{pmatrix}$$

$y(2) = F[2, 0] \cdot y(0)$ dır. En doğru sonucu en fazla aralığa bölünmüş olan değer verir.

Burada on aralıktan oluşan değeri alırsak;

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.6744 & 14.3698 \\ -14.3698 & -7.06514 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_{1yak.}(2) = 21.6744$$

$$y_{2yak.}(2) = -14.3698$$

Karşılaştırmak için aralıklara bölünmeden elde edilecek sonucu yazarsak;

$$y_{1yak.}(2) = 11$$

$$y_{2yak.}(2) = -6$$

Denklemin kesin sonucu;

$$y_{1kesin}(2) = 22.167$$

$$y_{2kesin}(2) = -14.778$$

Buradan da açıkça görüldüğü gibi yaklaşık taşıma matrisine değerler doğrudan konulduğu zaman, özellikle değer büyüdükçe kesin ile yaklaşık çözüm arasındaki fark artmaktadır. Ancak aralık ne kadar çok parçaya bölünürse yaklaşık değer yukarıda da görüldüğü gibi kesin değere o kadar yakın çıkmaktadır.

3. YAKLAŞIK TAŞIMA MATRİSİ VE BAŞLANGIÇ DEĞERLER METODUYLA ÇUBUKLARIN BURKULMASININ İNCELENMESİ

Başlangıç değerler metoduyla her türlü mesnet koşulu için çubuk sistemlerin matris halindeki diferansiyel denklemi bulunabilir.[9] Bu bölümde de yaklaşık taşıma matrisi ve kesin taşıma matrisi, çubuk sistemlerin diferansiyel denklemleri için elde edilmiştir. Daha sonraysa çeşitli kesit ve mesnet koşullarındaki çubukların yaklaşık ve kesin burkulma yükleri elde edilmiştir. Elde edilen kesin ve yaklaşık sonuçların yakınsaklığı bölüm içersinde irdelenmiştir.

3.1 Başlangıç Değerler Metoduyla Çubukların Denge Denklemleri

Başlangıç değerler metodu matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biridir. Karmaşık ve bilinmeyen sayısının fazla olduğu problemlerde büyük yarar sağlar. Başlangıç değerler metodunun esas fikri problemde yer alan değişkenleri olabildiğince az sabit ile ifade etmek suretiyle problemi çözüme ulaştırmaktır.[9] Denklemleri az sabitle ifade etmek hem karışıklığın önüne geçer hem de çözümün elde edilmesini kolaylaştırır. Bu bölümde başlangıç değerler metodunun kullanılmasının sebebi problemleri yaklaşık taşıma matrisi metoduna uygun hale getirmektir.

Çubuklara başlangıç değerler metodu uygulandıktan sonra elde edilen denklemler yaklaşık taşıma matrisine uygun hale gelir. Bunu yapabilmek için öncelikle denklemler arasındaki ilişkiler yazılmalıdır[10]. Şekil 3.1'deki gibi bir çubukta v düşey deplasman, φ açisal deplasman, M moment, T kesme kuvveti, N eksenel kuvvet gibi bilinmeyenler mevcuttur. EI rijitlik değeri sabittir. Bilinmeyen değerler arasındaki ilişkiler yazılırsa;

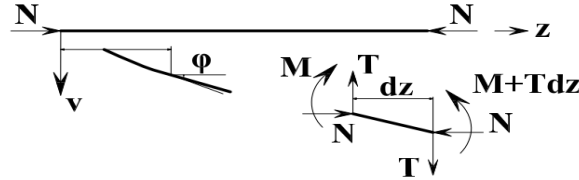
$$\frac{dv}{dz} = \varphi \quad (3.1)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{-M}{EI} \quad (3.2)$$

$$\frac{dM}{dz} = T + N\varphi \quad (3.3)$$

$$\frac{dT}{dz} = 0 \quad (3.4)$$

Belirtilen ilişkiler şekil 3.1’de üzerinde gösterilmiştir[10].



Şekil 3.1 : Eksenel yük etkisindeki çubukta meydana kesit zorları

Çubuk sistem üzerinden yazdığımız denklemleri matris şeklinde yazarsak;

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{EI} & 0 \\ 0 & N & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Buradan denklemin genel hali yazılabilir. y bilinmeyen 4×1 'lik sütun matris, A 4×4 'lük katsayılar matrisi olmak üzere;

$$\frac{dy}{dz} = Ay \quad (3.6)$$

Çubuktaki ilişkiler yazılıp düzenlendikten sonra genel durum denklem (3.6)'daki gibi olur. Denklem (3.5)'teki tüm bilinmeyen değerler, bilinen değerler ve sabit değerler cinsinden ifade edilmiştir. Matrisin içindeki değerlerden sadece N eksenel kuvvet değeri yani burkulma yükünün değeri bilinmemektedir. Daha öncede ifade edildiği gibi başlangıç değerler metodunun amacı problemdeki ilişkileri denklem (3.6)'daki gibi ifade etmektir. Denklemin başlangıçtaki değeri bilinmek suretiyle rahatlıkla çözülebilir. Diğer uçtaki sınır koşuluyla da burkulma yükü bulunabilir.

$$y(0) = y_0 \quad (3.7)$$

Denklem (3.7)'de problemin başlangıçtaki koşulu ifade edilmiştir. Yaklaşık taşıma matrisiyle hesap yapabilmek için problemin denklem (3.6)'daki gibi olması ve denklem (3.7)'deki gibi başlangıç değerinin bilinmesi gerekir. Yaklaşık veya kesin

taşıma matrisi başlangıçtaki sınır koşulu çarpılarak çözüm elde edilebilir. Çubuk bir sistem için diğer uçtaki sınır koşulları burkulma yükünü elde etmek için gereklidir[10].

3.2 Çubukta Yaklaşık Ve Kesin Taşıma Matrisleri

Bu bölümde başlangıç değerler metoduyla elde edilmiş denklem (3.5)'teki matris kullanılarak çubuk sistemlere ait yaklaşık ve kesin taşıma matrisleri gösterilecektir.

3.2.1 İki terimli yaklaşık taşıma matrisi

Yaklaşık taşıma matrisinin hesap yöntemleri bölüm 2'de anlatılmıştı. Burada sadece yaklaşık taşıma matrisinin bilgisayar programı yardımıyla bulunan sonuçları gösterilecektir[7-8].

$$Y_{11}(z) = 1 \quad (3.8)$$

$$Y_{12}(z) = z \quad (3.9)$$

$$Y_{13}(z) = \frac{-z^2}{2EI} \quad (3.10)$$

$$Y_{14}(z) = 0 \quad (3.11)$$

$$Y_{21}(z) = 0 \quad (3.12)$$

$$Y_{22}(z) = 1 - \frac{Nz^2}{2EI} \quad (3.13)$$

$$Y_{23}(z) = \frac{-z}{EI} \quad (3.14)$$

$$Y_{24}(z) = \frac{-z^2}{2EI} \quad (3.15)$$

$$Y_{31}(z) = 0 \quad (3.16)$$

$$Y_{32}(z) = Nz \quad (3.17)$$

$$Y_{33}(z) = 1 - \frac{Nz^2}{2EI} \quad (3.18)$$

$$Y_{34}(z) = z \quad (3.19)$$

$$Y_{41}(z) = 0 \quad (3.20)$$

$$Y_{42}(z) = 0 \quad (3.21)$$

$$Y_{43}(z) = 0 \quad (3.22)$$

$$Y_{44}(z) = 1 \quad (3.23)$$

3.2.2 Dört terimli yaklaşık taşıma matrisi

Dört terimli olan yaklaşık taşıma matrisinin sadece elemanları yazılacaktır. Bunlar;

$$Y_{11}(z) = 1 \quad (3.24)$$

$$Y_{12}(z) = z - \frac{Nz^3}{6EI} \quad (3.25)$$

$$Y_{13}(z) = \frac{z^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (3.26)$$

$$Y_{14}(z) = \frac{-z^3}{6EI} \quad (3.27)$$

$$Y_{21}(z) = 0 \quad (3.28)$$

$$Y_{22}(z) = 1 + \frac{Nz^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (3.29)$$

$$Y_{23}(z) = \frac{-z}{EI} + \frac{Nz^3}{6(EI)^2} \quad (3.30)$$

$$Y_{24}(z) = \frac{z^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (3.31)$$

$$Y_{31}(z) = 0 \quad (3.32)$$

$$Y_{32}(z) = Nz - \frac{N^2z^3}{6EI} \quad (3.33)$$

$$Y_{33}(z) = 1 + \frac{Nz^2(-12EI + Nz^2)}{24(EI)^2} \quad (3.34)$$

$$Y_{34}(z) = z - \frac{Nz^3}{6EI} \quad (3.35)$$

$$Y_{41}(z) = 0 \quad (3.36)$$

$$Y_{42}(z) = 0 \quad (3.37)$$

$$Y_{43}(z) = 0 \quad (3.38)$$

$$Y_{44}(z) = 1 \quad (3.39)$$

3.2.3 Kesin taşıma matrisi

Çubuk sistemlerin başlangıç değerler metoduyla denklemleri bulunup matrisi oluşturulduktan sonra kesin taşıma matrisi elde edilebilir[11]. Burada sadece çubuk sistemlerin başlangıç değerleri metodu kullanılarak elde edilen kesin taşıma matrisinin elemanları gösterilmiştir.[7,11] Burada $\beta = 1/EI$ olmak üzere;

$$Y_{11}(z) = 1 \quad (3.40)$$

$$Y_{12}(z) = \frac{\sin[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{\beta}\sqrt{N}} \quad (3.41)$$

$$Y_{13}(z) = \frac{-2\sin[0.5\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]^2}{N} \quad (3.42)$$

$$Y_{14}(z) = \frac{-z}{N} + \frac{\sin[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{\beta}N^{3/2}} \quad (3.43)$$

$$Y_{21}(z) = 0 \quad (3.44)$$

$$Y_{22}(z) = \cos[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z] \quad (3.45)$$

$$Y_{23}(z) = \frac{-\sqrt{\beta}\sin[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{N}} \quad (3.46)$$

$$Y_{24}(z) = \frac{-2\sin[0.5\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]^2}{N} \quad (3.47)$$

$$Y_{31}(z) = 0 \quad (3.48)$$

$$Y_{32}(z) = \frac{\sqrt{N}\sin[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{\beta}} \quad (3.49)$$

$$Y_{33}(z) = \cos[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z] \quad (3.50)$$

$$Y_{34}(z) = \frac{\sin[\sqrt{\beta}\sqrt{N}z]}{\sqrt{\beta}\sqrt{N}} \quad (3.51)$$

$$Y_{41}(z) = 0 \quad (3.52)$$

$$Y_{42}(z) = 0 \quad (3.53)$$

$$Y_{43}(z) = 0 \quad (3.54)$$

$$Y_{44}(z) = 1 \quad (3.55)$$

3.3 Taşıma Matrisleriyle Sabit Kesitli Çubukta Burkulma Yüklerinin Kesin Ve Yaklaşık Hesabı

Bu bölümde yaklaşık ve kesin taşıma matrisleri kullanılarak çeşitli sınır koşullarına ait burkulma problemlerinin yaklaşık ve kesin çözümleri karşılaştırılmıştır.[8] Önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi taşıma matrisi elde edildikten sonra denklemin başlangıç değeriyle çarpılarak, denklem çözümleri elde edilir. Diğer uçtaki sınır koşulunda kullanılarak burkulma yükü değeri bulunur. Mesnet koşulları değişse de izlenen yol değişmez.[8]

3.3.1 Basit mesnetli çubuk

Kesin taşıma matrisiyle iki ve dört terimli yaklaşık taşıma matrisleri bölüm 3.2’de gösterilmiştir. Yaklaşık taşıma matrisleri istenildiği kadar terim alınmak suretiyle hesaplanabilir. Ancak problemlerde sadece üç terimli matris ve onaltı aralığa kadar olan değerler bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır.[7] Bu örneğin kapsamında şekil 3.2’deki gibi iki ucundan basit mesnetli bir çubuk ele alınmıştır.



Şekil 3.2 : Eksenel yük etkisinde basit mesnetli çubuk

Sistemin çözümü için taşıma matrisini başlangıçtaki değeriyle çarparsak [10];

$$\frac{dy}{dz} = Ay \quad (3.56)$$

$$y(0) = y_0 \quad (3.57)$$

$$y = Yy_0 \quad (3.58)$$

Burada y bilinmeyen matris sütununu, Y taşıma matrisini temsil etmektedir. L çubuğun boyu olmak üzere işlemleri daha açık yazarsak;

$$y = \begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

Basit mesnetli çubukta düşey hareket v ve moment değeri M sıfırdır. Açılal deplasman değeri φ ve kesme kuvveti değeri T ise sıfır olmayıp bilinmemektedir.

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Denklem (3.61)'deki değerleri yerine koyarsak;

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

$$\begin{pmatrix} v \\ \varphi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{22} & Y_{24} \\ Y_{32} & Y_{34} \\ Y_{42} & Y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Bu mesnet koşulunda L ucunda düşey deplasman ve moment değerleri sıfırdır. Dolayısıyla birinci ve üçüncü satırlar bu koşuldan yola çıkılarak sıfıra eşitlenebilir. Bu mesnet koşulunu denklemden yerine koyarsak;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{42} & Y_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Burada başlangıç sınır değerinde açılma deplasman ve kesme kuvveti değerleri mesnetlenme koşulu dolayısıyla sıfır olamaz. Bu durumda yapılan işlemler sonucu taşıma matrisi elemanlarından geriye kalmış olanlar sıfıra eşit olmaktadır.

$$\begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{32} & Y_{34} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.65)$$

Denklem (3.65)'teki matrisin sıfıra eşit olması, determinantının sıfıra eşit olması demektir. Matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesiyle yaklaşık ve kesin burkulma yükleri çizelge 3.1'deki gibi hesaplanır.[7]

Çizelge 3.1 : İki ucundan basit mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri

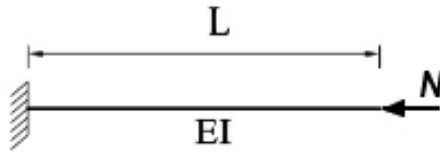
Taşıma Matrisiyle Burkulma Yükü	Kesin Burkulma Yükü	Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
			Alınan Terim Sayısı		
			1	2	3
$\frac{9.869EI}{L^2}$	$\frac{9.869EI}{L^2}$	2	$\frac{0EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L^2}$	$\frac{8EI}{L^2}$
		4	$\frac{16EI}{L^2}$	$\frac{8.574EI}{L^2}$	$\frac{9.648EI}{L^2}$
		8	$\frac{10.980EI}{L^2}$	$\frac{9.423EI}{L^2}$	$\frac{9.85EI}{L^2}$
		16	$\frac{10.128EI}{L^2}$	$\frac{9.746EI}{L^2}$	$\frac{9.868EI}{L^2}$

Çizelge 3.1'de bulunan sonuçlar karşılaştırıldığı takdirde kesin taşıma matrisiyle bulunan burkulma yükünün kesin burkulma yüküyle birebir aynı olduğu görülmektedir.[1,8] Yaklaşık taşıma matrislerine bakıldığında ise ne kadar çok terim

alınırsa ve aralık ne kadar çok parçaya bölünürse sonucun o ölçüde kesin sonuca yakınsayacağı açıkça görülmektedir. Taşıma matrisiyle elde edilen değerde izlenen yolla yaklaşık olarak yapılan hesapta izlenen yol birebir aynıdır. Sadece belirtilen determinant için alınacak elemanlar kesin veya yaklaşık taşıma matrisinden alınır.

3.3.2 Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubuk

Şekil 3.3'teki gibi bir ucu ankastre olarak mesnetlenmiş bir ucu ise serbest çubuğun taşıma matrisleri yardımıyla hesaplanan burkulma yükleri karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.3 : Eksenel yük etkisinde bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubuk

Bu mesnetlenme koşulu için kullanılacak olan determinant, basit mesnetli çubuk için kullanılan yöntemle rahatlıkla bulunur. Her mesnetlenme koşuluna göre burkulma yükünün hesabı için kullanılacak determinant değişmektedir. Bu determinantlar gerek yaklaşık gerekse kesin taşıma matrislerinin her ikisi içinde kullanılabilir.[10]

$$\begin{vmatrix} Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{43} & Y_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.66)$$

Şekil 3.3'deki mesnetlenme koşuluna bağlı olarak kesin ve yaklaşık burkulma yükleri çizelge 3.2'deki gibi bulunur.[7]

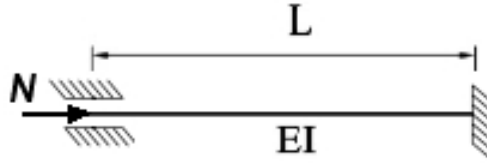
Çizelge 3.2 : Bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri

Taşıma Matrisiyle Burkulma Yükü	Kesin Burkulma Yükü	Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
			Alınan Terim Sayısı		
			1	2	3
$\frac{2.467EI}{L^2}$	$\frac{2.467EI}{L^2}$	2	$\frac{4EI}{L^2}$	$\frac{2.143EI}{L^2}$	$\frac{2.412EI}{L^2}$
		4	$\frac{2.745EI}{L^2}$	$\frac{2.355EI}{L^2}$	$\frac{2.463EI}{L^2}$
		8	$\frac{2.532EI}{L^2}$	$\frac{2.436EI}{L^2}$	$\frac{2.467EI}{L^2}$
		16	$\frac{2.483EI}{L^2}$	$\frac{2.459EI}{L^2}$	$\frac{2.467EI}{L^2}$

Bu örnekte de görüldüğü gibi yaklaşık taşıma matrisinden gelen burkulma yükü değeri giderek kesin sonuca yaklaşmaktadır.[1,7-8]

3.3.3 İki ucu ankastre mesnetli çubuk

Şekil 3.4'te iki ucundan da tüm ötelenmelerin engellendiği yani iki ucundanda ankastre mesnetli çubuk sistem gösterilmiştir.



Şekil 3.4 : Eksenel yük etkisinde iki ucu ankastre mesnetli çubuk

Kullanılacak olan determinant;

$$\begin{vmatrix} Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{23} & Y_{24} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.67)$$

Diğer örneklerde olduğu gibi bu determinant sıfıra eşitlenmek suretiyle burkulma yükü elde edilir. Gerek yaklaşık taşıma matrisi gerekse kesin taşıma matrisi için bu işlem uygulanır. Taşıma matrisleri değişse de sınır koşulları belirli olduğundan bu örnek için daima denklem (3.67)'deki matris sıfıra eşitlenir.[10]

Çizelge 3.3 : İki ucu ankastre mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri

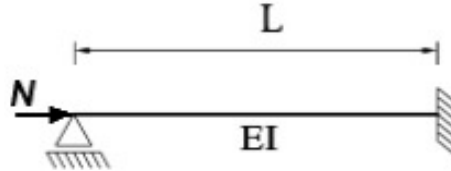
Taşıma Matrisiyle Burkulma Yükü	Kesin Burkulma Yükü	Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
			Alınan Terim Sayısı		
			1	2	3
$\frac{39.478EI}{L^2}$	$\frac{39.478EI}{L^2}$	2	$\frac{0EI}{L^2}$	$\frac{32EI}{L^2}$	$\frac{32EI}{L^2}$
		4	$\frac{64EI}{L^2}$	$\frac{34.296EI}{L^2}$	$\frac{38.592EI}{L^2}$
		8	$\frac{43.92EI}{L^2}$	$\frac{37.692EI}{L^2}$	$\frac{39.416EI}{L^2}$
		16	$\frac{40.512EI}{L^2}$	$\frac{38.984EI}{L^2}$	$\frac{39.472EI}{L^2}$

Çizelge 3.3'te iki ucu ankastre olan çubuğun burkulma yüklerinin yaklaşık ve kesin değerleri görünmektedir. Değerlerin yakınsaklığı çizelge 3.3'ten rahatlıkla gözlemlenebilir. Bu örnek için dikkat edilirse yaklaşık taşıma matrisinden bir terim

alındığında değerler üst değerlerden iki ve üç terim alındığında ise değerler alt değerlerden gerçek burkulma yükü değerine yaklaşmaktadır.[7-8]

3.3.4 Bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mesnetli çubuk

Şekil 3.5’te bir ucunda tüm ötelenmelerin engellendiği diğer ucunda ise sadece düşey hareketin engellendiği çubuk görülmektedir.



Şekil 3.5 : Eksenel yük etkisinde bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mesnetli çubuk

Bu mesnetlenme koşulu için sınır şartlarına bağlı olarak denklem (3.68)’deki determinant kullanılacaktır.

$$\begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{14} \\ Y_{22} & Y_{24} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.68)$$

Bu determinant sıfıra eşitlenmek suretiyle burkulma yükü elde edilir.[7]

Çizelge 3.4 : Bir ucu ankastre bir ucu kayıcı mesnetli çubukta kesin ve yaklaşık burkulma yükü değerleri

Taşıma Matrisiyle Burkulma Yükü	Kesin Burkulma Yükü	Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
			Alınan Terim Sayısı		
			1	2	3
$\frac{20.142EI}{L^2}$	$\frac{20.142EI}{L^2}$	2	$\frac{0EI}{L^2}$	$\frac{24EI}{L^2}$	$\frac{13.021EI}{L^2}$
		4	$\frac{80EI}{L^2}$	$\frac{16.273EI}{L^2}$	$\frac{18.577EI}{L^2}$
		8	$\frac{25.685EI}{L^2}$	$\frac{18.461EI}{L^2}$	$\frac{20.057EI}{L^2}$
		16	$\frac{21.360EI}{L^2}$	$\frac{19.670EI}{L^2}$	$\frac{20.182EI}{L^2}$

Çizelge 3.4’te yine yaklaşık ve kesin sonuçlar gözlenebilir. Bir terimli ve iki aralıklı yaklaşık değerlerin sıfır olmasının nedeni aralık sayısının yeterli olmamasıdır.[7]

Çizelge 3.4’te görüldüğü gibi aralık sayısı dörde çıkarıldığında bir terimli yaklaşık taşıma matrisi için değerler sıfırdan farklı rakamlar almaya başlamıştır.

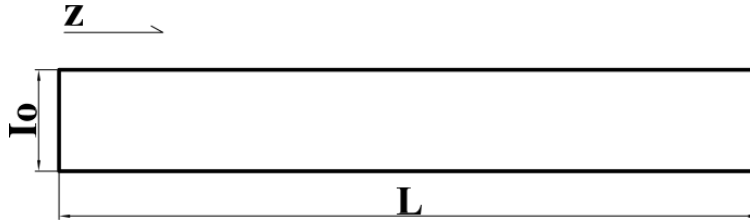
Çözümleri yapılmış olan tüm problemlerde açıkça görüldüğü gibi kesin taşıma matrisleri kesin sonuçla birebir aynı sonucu vermektedir. Yaklaşık taşıma matrisiyle yapılan çözümlerden ise ne kadar çok eleman alınırsa o kadar yakın sonuç alınacağı ve aralık ne kadar çok parçaya bölünürse, sonucun o ölçüde kesin sonuca yakınsayacağı anlaşılmıştır.

3.4 Yaklaşık Taşıma Matrisiyle Değişken Kesitli Çubukta Burkulma Yükleri

Bu bölümde değişken atalet momentine sahip kesitlerin burkulma yükleri yaklaşık olarak hesaplanacaktır. Başlangıç değerler metoduyla sabit kesitli çubuk için taşıma matrisinin elde edilişi daha önceki bölümde gösterilmişti[9].

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} v \\ \phi \\ M \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{EI_z} & 0 \\ 0 & N & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \phi \\ M \\ T \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Denklem (3.69)'da gösterilen matriste sağ tarafta bulunan 4*4'lük matris ile yaklaşık taşıma matrisinin ve oradan da burkulma yükünün nasıl hesaplanacağına değinilmişti[1-3,10].

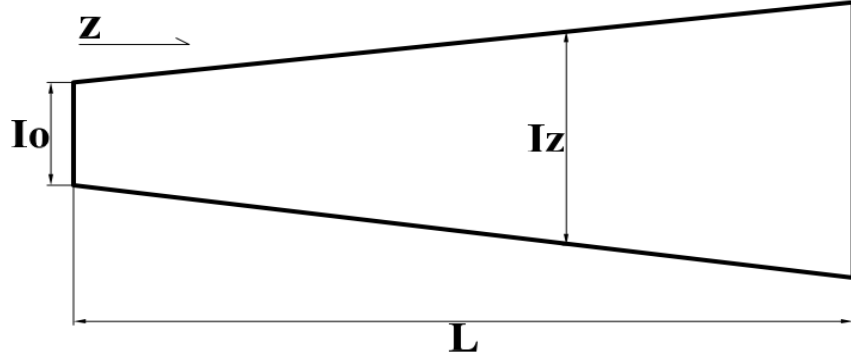


Şekil 3.6 : Sabit kesitli çubuk

Şekil 3.6'daki gibi bir kesitte atalet momenti sabit olup z yönünde gidildikçe değişmez. Bu nedenle de yaklaşık taşıma matrisi ve burkulma yükü hesaplanırken integrasyonu sabitin integrasyonu şeklinde daha önceki bölümlerde anlatıldığı gibi hesaplanabilir[1-3].

$$I_z = I_0 \quad (3.70)$$

Sabit kesitin atalet momentini z 'e bağlı olmadığından integral hesaplarında atalet momentini sabit kabul edilerek çözülür.



Şekil 3.7 : Değişken kesitli çubuk

Ancak şekil 3.7 'deki gibi z 'e bağlı olarak değişen kesitlerde yaklaşık taşıma matrisiyle hesap yapılırken atalet moment sabit alınamaz. Şekil 6.2'deki gibi kesitin atalet momenti z 'e bağlı olarak değişiyorsa integral hesaplarının içine de bu değişkenler girer ve integrasyon hesaplarını etkiler. Şekil 6.2'deki gibi bir kesitin ataletinin aşağıdaki gibi değiştiğini kabul edelim.

$$I_z = I_0 / \cos\left[\frac{\alpha z}{L}\right] \quad (3.71)$$

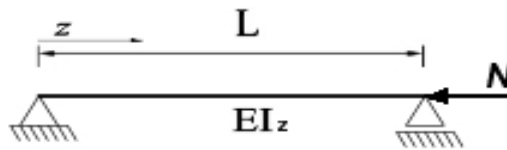
Bu fonksiyonda L çubuğun boyu, α atalet momentinin değişim açısıdır. Çubuğun ataleti z yönünde ilerledikçe artar. Dolayısıyla bu kesit için yaklaşık taşıma matrisi hesaplanırken denklem (3.69)'daki I_z yerine denklem (3.71)'deki ifade konur. Yaklaşık taşıma matriside buradaki değişkenler göz önüne alınarak hesaplanır.

Çalışmanın devamında şekil 3.7'deki gibi değişken kesitli çubuğun burkulma yükünün yaklaşık hesabı yapılacaktır. Hesap kolaylığı açısından değişim açısı α değeri $\pi/4$ alınacaktır. Denklem (3.72)'de kullanılacak olan değer görülmektedir.

$$I_z = I_0 / \cos\left[\frac{\pi z}{4L}\right] \quad (3.72)$$

3.4.1 Değişken kesitli basit mesnetli çubuk

Şekil 3.8'deki gibi basit mesnetlenmiş değişken kesitli bir çubuğun burkulma yükü başlangıç değerler metodu ve yaklaşık taşıma matrisi kullanılarak bulunacaktır.[8-9]



Şekil 3.8 : Değişken kesitli basit mesnetli çubuk

Yaklaşık taşıma matrisleri değişse de mesnetlenme koşulları için kullanılacak olan determinantlar aynı kalır. Çünkü burkulma yükü değeri çubukların mesnetlenme koşuluna bağlıdır. Mesnetlenme koşulları değişmiyorsa kullanılacak olan determinantta değişmez. Çizelge 3.5’de görüldüğü gibi sadece yaklaşık burkulma yükleri hesaplanmıştır.[7] Değişken kesitli bir çubukta kesin burkulma yükünün hesaplanması çok güçtür.

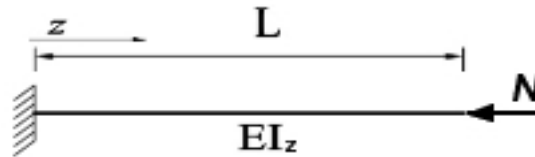
Çizelge 3.5 : Değişken kesitli basit mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükü değerleri

Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yüğü		
	Alınan Terim Sayısı		
	1	2	3
2	$\frac{0EI_0}{L^2}$	$\frac{8.771EI_0}{L^2}$	$\frac{8.752EI_0}{L^2}$
4	$\frac{17.430EI_0}{L^2}$	$\frac{9.379EI_0}{L^2}$	$\frac{10.380EI_0}{L^2}$
8	$\frac{11.987EI_0}{L^2}$	$\frac{10.169EI_0}{L^2}$	$\frac{10.793EI_0}{L^2}$
16	$\frac{11.033EI_0}{L^2}$	$\frac{10.670EI_0}{L^2}$	$\frac{10.819EI_0}{L^2}$

Değişken kesitli ve basit mesnetli çubukta burkulma yükünün belirli bir değere yaklaşımı çizelge 3.5’ten gözlenebilmektedir.

3.4.2 Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest çubuk

Şekil 3.9’da sınır koşulu olarak bir uçta tamamen tutulu diğer uçta serbest, değişken kesitli çubuk bir eleman gösterilmiştir.



Şekil 3.9 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubuk

Bilgisayar programı yardımıyla elde edilen değerler çizelge 3.2’deki gibidir.[7]

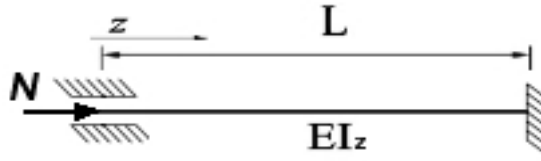
Çizelge 3.6 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükü değerleri

Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
	Alınan Terim Sayısı		
	1	2	3
2	$\frac{4.104EI_0}{L^2}$	$\frac{2.247EI_0}{L^2}$	$\frac{2.515EI_0}{L^2}$
4	$\frac{2.848EI_0}{L^2}$	$\frac{2.458EI_0}{L^2}$	$\frac{2.564EI_0}{L^2}$
8	$\frac{2.634EI_0}{L^2}$	$\frac{2.538EI_0}{L^2}$	$\frac{2.568EI_0}{L^2}$
16	$\frac{2.584EI_0}{L^2}$	$\frac{2.560EI_0}{L^2}$	$\frac{2.568EI_0}{L^2}$

Çizelge 3.6’da elde edilen değerler sabit kesitli çubuklardan elde edilenler ile karşılaştırarak kesitin ataleti arttığında burkulma yükünün arttığı da gözlemlenebilir.

3.4.3 Değişken kesitli iki ucu ankastre mesnetli çubuk

Şekil 3.10’da her iki ucu da ankastre mesnetli çubuk gösterilmiştir.



Şekil 3.10 : Değişken kesitli iki ucu ankastre mesnetli çubuk

Bu örnekte de, diğerler koşullarda belirtilen durumlar çizelge 3.7’den izlenebilir.

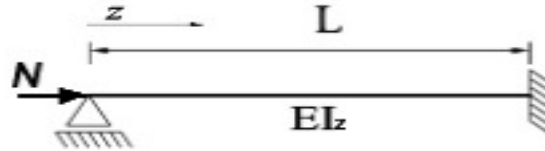
Çizelge 3.7 : Değişken kesitli iki ucu ankastre mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükleri

Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
	Alınan Terim Sayısı		
	1	2	3
2	$\frac{0EI_0}{L^2}$	$\frac{35.084EI_0}{L^2}$	$\frac{35.008EI_0}{L^2}$
4	$\frac{69.720EI_0}{L^2}$	$\frac{37.516EI_0}{L^2}$	$\frac{41.520EI_0}{L^2}$
8	$\frac{47.948EI_0}{L^2}$	$\frac{40.676EI_0}{L^2}$	$\frac{43.172EI_0}{L^2}$
16	$\frac{44.132EI_0}{L^2}$	$\frac{42.68EI_0}{L^2}$	$\frac{43.276EI_0}{L^2}$

Çizelge 3.7’den burkulma yükünün hani aralıklarda değerlerinin değiştiği rahatlıkla gözlemlenebilir.

3.4.4 Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu hareketli mesnetli çubuk

Şekil 3.11’de sınır koşulu olarak bir ucu ankastre diğeri hareketli mesnete sahip çubuk gösterilmiştir.



Şekil 3.11 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu hareketli mesnetli çubuk

Çizelge 3.8’den değişken kesitli çubuğun burkulma yükü değerleri alınarak, sabit kesitli çubuğun burkulma yükü değerleriyle karşılaştırılabilir.[1] Böylece kesit değişimine bağlı olarak burkulma yükünün değişimiyle ilgili fikir edinilebilir.

Çizelge 3.8 : Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu hareketli mesnetli çubukta yaklaşık burkulma yükleri

Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü		
	Alınan Terim Sayısı		
	1	2	3
2	$\frac{0EI_0}{L^2}$	$\frac{26.240EI_0}{L^2}$	$\frac{14.483EI_0}{L^2}$
4	$\frac{89.265EI_0}{L^2}$	$\frac{18.421EI_0}{L^2}$	$\frac{19.013EI_0}{L^2}$
8	$\frac{28.715EI_0}{L^2}$	$\frac{19.055EI_0}{L^2}$	$\frac{19.401EI_0}{L^2}$
16	$\frac{23.715EI_0}{L^2}$	$\frac{19.447EI_0}{L^2}$	$\frac{19.421EI_0}{L^2}$

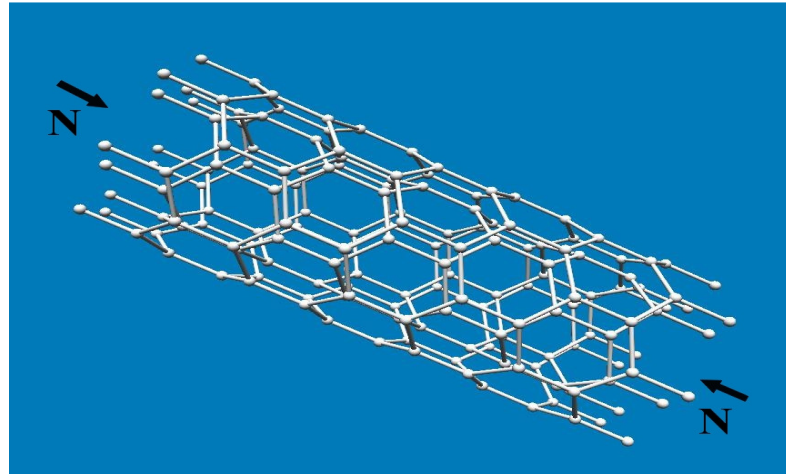
Yapılan tüm örneklerde değişim açısı sıfır alındığında değişken kesitin sabit kesite eşit olduğu ve dolayısıyla burkulma yükünde sabit burkulma yüküne eşit olduğu açıkça görülmektedir.

4. ÇİFT DUVARLI KARBON NANO TÜPLERİN BURKULMA YÜKÜNÜN YAKLAŞIK HESABI

Bu bölümde önceden elde edilen bilgiler yardımıyla çift duvarlı karbon nanotüplerin burkulmaları incelenecek ve bunların burkulma yükü hesabına değinilecektir.

4.1 Başlangıç Değerler Metoduyla Çok Duvarlı Karbon Nanotüplerin Denge Denklemleri

Şekil 4.1’de L boyunda, aksenal yüke maruz kalmış olan çift duvarlı bir karbon nanotüp gösterilmiştir. Burada geçen denklemlerde; A_1 dış tüpün kesit alanı, A_2 iç tüpün kesit alanı olmak üzere, çift duvarlı karbon nanotüpe etkiyen aksenal basınç kuvveti iç ve dış tüplere kesit alanlarının oranları doğrultusunda etkimektedir. Nanotüpün maruz kaldığı aksenal yük değerleri sırasıyla N_1 dış tüpe etki eden aksenal basınç kuvveti ve N_2 iç tüpe etkiden eden aksenal basınç kuvvetidir. Bu iki kuvvetin toplamı, çift duvarlı karbon nanotüpe etkiyen aksenal basınç kuvveti N ’e eşittir. Aksenal basınç kuvvetinin etkisi altında meydana gelen şekil değiştirmelerden, v_1 dış tüpteki düşey deplasmanı, v_2 iç tüpteki düşey deplasmanı, ϕ_1 dış tüpteki açısall deplasmanı ve ϕ_2 iç tüpteki açısall deplasmanı ifade etmektedir.[5]



Şekil 4.1 : Aksenal yük etkisinde çift duvarlı karbon nanotüp

Şekil 1.4 ve 1.5'te çift duvarlı karbon nanotüplerin çeşitli açılardan görünüşleri gözlemlenebilir[6]. İç ve dış tüpün arasındaki mekanik ilişkileri yazarsak;

$$N = N_1 + N_2 \quad (4.1)$$

Dış tüpe etkiyen N_1 kuvveti ile iç tüpe etkiyen N_2 kuvvetinin şiddeti, bu iki tüpün kesit alanlarının oranı ile doğru orantılıdır. Bununla birlikte dıştaki ve içteki tüpün kesitlerindeki yüzey gerilmeleri de birbirine eşitti.[6]

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (4.2)$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A_1} N_1 \quad (4.3)$$

Karbon nanotüplerde denge denklemleri yazılırken iki tüpün arasındaki etkileşiminde göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Tüpler arasındaki çekim kuvvetinden dolayı, düşey deplasman değerinde ve kesme kuvveti değerinde tüpler arasındaki etkileşim dikkate alınmalıdır.[12] Bu nedenle denklem (4.9) ve denklem (4.13) c Van Der Waals katsayısı ile çarpılmalıdır. Denklem (4.5)'teki d_1 ve d_2 değerleri sırasıyla dıştaki ve içteki tüpün çaplarını, C ise karbon elementiyile ilgili bir katsayıyı belirtmektedir.[12-13] Bu değerler arasındaki ilişkiyi yazarsak;

$$c = Cd \quad (4.4)$$

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (4.5)$$

$$C = 10^{20} \text{ s} / m^2$$

Çalışmanın kapsamı burkulma yükleri üzerine olması dolayısıyla c sadece katsayı olarak bırakılacak ve değerler c cinsinden yazılacaktır. Ayrıca denklemlerde belirtilen EI_1 dıştaki tüpün rijitliğini ve EI_2 içteki tüpün rijitliğini belirtmektedir. Bu bilgiler kapsamında sırasıyla dıştaki ve içteki tüplerin denge denklemlerini yazarsak;

$$\frac{dV_1}{dz} = \varphi_1 \quad (4.6)$$

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{M_1}{EI_1} \quad (4.7)$$

$$\frac{dM_1}{dz} = T_1 + N_1 \cdot \varphi_1 \quad (4.8)$$

$$\frac{dT_1}{dz} = c \cdot (v_1 - v_2) \quad (4.9)$$

$$\frac{dV_2}{dz} = \varphi_2 \quad (4.10)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = -\frac{M_2}{EI_2} \quad (4.11)$$

$$\frac{dM_2}{dz} = T_2 + N_2 \cdot \varphi_2 \quad (4.12)$$

$$\frac{dT_2}{dz} = c \cdot (v_2 - v_1) \quad (4.13)$$

İki tüp arasındaki belirtilen tüm bu ilişkiler genel olarak yazılabilir. y denklemde bilinmeyenlerin oluşturduğu 8×1 'lik sütun matris ve A , 8×8 'lik katsayılar matrisi olmak üzere;

$$\frac{dy}{dz} = Ay \quad (4.14)$$

Burada değerlerin açılımı yazılırsa;

$$y = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & -c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Denklem (4.14)'te çift duvarlı sabit kesitli bir karbon nanotüpün denge denklemlerinin başlangıç değerler metoduyla matris forma getirilmiş genel hali görülmektedir. Nanotüp sayısı arttığı takdirde aynı yollar izlenmek suretiyle n duvarlı karbon nano tüpün denge denklemleri rahatlıkla yazılabilir. Daha öncede bahsediliği gibi burkulma yükünün kesin hesabını yapmak oldukça güçtür. Yaklaşık taşıma matrisi metodu burada devreye sokularak çift duvarlı karbon nanotüpün burkulma yükü yaklaşık olarak hesaplanacaktır.[7] Yaklaşık burkulma yükü hesabı yalnızca bir mesnetlenme koşulu için irdelenecektir.

4.2 Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Mesnetli Çift Duvarlı Karbon Nanotüpün Burkulmasının İncelenmesi

Denklem (4.14)'te tüm mesnet koşulları için geçerli olan denge denklemini hesaplanmıştır. Bölüm 2 ve 3'te anlatıldığı gibi yaklaşık taşıma matrisi istenilen terim sayısı kadar hesaplanabilir.[8] El ile hesabın güçlüğünden ve matrisin çok uzun olmasından dolayı burada sadece sonuçlar irdelenecektir. Bir ucu ankastre diğer ucu boş mesnet koşulu için yaklaşık taşıma matrisinden alınması gereken determinant bilinmemektedir. Bu determinantı bulabilmek için mesnet koşulları kullanılmalıdır. Her iki tüpte aynı şekilde mesnetlendiğinden ikisi içinde mesnet koşulları aynıdır. Denklemin genel hali yazılırsa;

$$\frac{dy}{dz} = A[z].y \quad (4.17)$$

$$y(0) = y_0 \quad (4.18)$$

$$y = Yy_0 \quad (4.19)$$

Bu denklemlerde y sütun matris, Y taşıma matrisi ve y_0 başlangıçtaki değeri ifade etmektedir. Başlangıç koşulları üzerinden yola çıkarak değerler yerine yazılırsa;

$$y = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{71} & y_{72} & y_{73} & y_{74} & y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{81} & y_{82} & y_{83} & y_{84} & y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Taşıma matrisin denklem (4.21)' de gösterildiği gibi sadece simgesel olarak yazılmıştır. Çözüme ulaşmak için gerekli olan başlangıç koşulunu da yazarsak;

$$y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{10} \\ M_{20} \\ T_{10} \\ T_{20} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Başlangıç değerlerini temsil eden y_0 sütun matriste M_{10} ve M_{20} sırasıyla dıştaki ve içteki tüpte başlangıçta meydana gelen moment değerlerini, T_{10} ve T_{20} ise başlangıçta meydana gelen kesme kuvvetlerini temsil etmektedir. Sonuca ulaşmak için taşıma matrisiyle problemin başlangıçtaki değerini çarparsak;

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{71} & y_{72} & y_{73} & y_{74} & y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{81} & y_{82} & y_{83} & y_{84} & y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{10} \\ M_{20} \\ T_{10} \\ T_{20} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Problemi çözüme ulaştırabilmek için L ucundaki sınır koşullarınında kullanılması gerekmektedir. L ucunda her iki tüp içinde düşey ve açısal deplasman var olup değerleri bilinmemektedir. Ancak yine her iki tüp içinde kesme kuvveti ve moment değerleri L ucunda sıfırdır. Dolayısıyla L ucundaki mesnet koşullarından dolayı yaklaşık taşıma matrisindeki beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci satırlar sıfıra eşittir. İşlemler devam ettirildiği takdirde;

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \\ y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} \\ y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ T_{10} \\ T_{20} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Denklem (4.24)'de yukarıda belirtilmiş olan L ucundaki mesnet koşullarında yerine konulursa denklemin alacağı hal;

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \\ y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} \\ y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} \\ y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} \\ y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} \\ y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ T_{10} \\ T_{20} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Denklem (4.25)'te son dört satır sıfıra eşit olduğundan determinant için bu dört satır kullanılacaktır. İlk dört satır sıfıra eşit olmadığından burkulma yükünü hesaplamaya çalıştığımızda L ucundaki düşey ve açısall deplasman değerlerini bilmemiz gerekmektedir. Dolayısıyla ilk dört satır işimize yaramaz. Denklemin son halini yazarsak;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{55} & Y_{56} & Y_{57} & Y_{58} \\ Y_{65} & Y_{66} & Y_{67} & Y_{68} \\ Y_{75} & Y_{76} & Y_{77} & Y_{78} \\ Y_{85} & Y_{86} & Y_{87} & Y_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{10} \\ M_{20} \\ T_{10} \\ T_{20} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Daha öncede belirtildiği gibi denklem (4.26)'nın sıfıra eşit olması demek içerideki 4*4'lük matrisin sıfıra eşit olması demektir.

$$\begin{pmatrix} Y_{55} & Y_{56} & Y_{57} & Y_{58} \\ Y_{65} & Y_{66} & Y_{67} & Y_{68} \\ Y_{75} & Y_{76} & Y_{77} & Y_{78} \\ Y_{85} & Y_{86} & Y_{87} & Y_{88} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.27)$$

Yaklaşık taşıma matrisi elde edildikten sonra denklem (4.27)'deki matris kullanılarak bir ucu ankastre bir ucu serbest çok duvarlı bir karbon nanotüpün burkulma yükü rahatlıkla hesaplanabilir. Çift duvarlı karbon nanotüpte dıştaki ve içteki tüpe etkiyen eksenel yük değerleri daha önce belirtilmişti. İşlem kolaylığı ve anlaşılabilirlik açısından iki tüpe etkiyen eksenel yük değerleri arasındaki oran aşağıdaki gibi kabul edilecektir.

$$N_2 = 0.8N_1$$

Çizelge 4.1'de üç ve dört terime kadar hesaplanmış, aralıklara bölünmüş yaklaşık taşıma matrisinden elde edilen N_1 burkulma yükü değerleri gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 : Bir ucu ankstre serbest mesnetli çift duvarlı karbon nanotüpün yaklaşık burkulma yükü değerleri

Aralık Sayısı	Yaklaşık Burkulma Yükü	
	Alınan Terim Sayısı	
	3	4
3	$\frac{10.2404}{L^2(1.0231K_1 + 1.8487K_2)}$	$\frac{9.1092}{L^2(1.3230K_1 + 2.0957K_2)}$
4	$\frac{9.5049}{L^2(1.2026K_1 + 1.9730K_2)}$	$\frac{8.8162}{L^2(1.3324K_1 + 2.0684K_2)}$
5	$\frac{9.1555}{L^2(1.2666K_1 + 1.9987K_2)}$	$\frac{8.7361}{L^2(1.3296K_1 + 2.0195K_2)}$
6	$\frac{8.9762}{L^2(1.2933K_1 + 2.0072K_2)}$	$\frac{8.7743}{L^2(1.3413K_1 + 2.0186K_2)}$

Çizelge 4.1’de işlem karmaşasını engellemek amacıyla $1/EI_1$ yerine K_1 ve $1/EI_2$ yerine K_2 konmuştur. Çizelge 4.1’den çift duvarlı karbon nano tüpler için yaklaşık burkulma yükü değerleri alınabilir. Daha önceki örneklerden de tespit edildiği üzere en fazla terim sayısı ve aralık en doğru sonucu vermektedir. Burada dört terimli altı aralıklı yaklaşık burkulma yükü bizim için en doğru sonuçtur. Ayrıca çıkarılabilecek sonuçlardan biri de çift duvarlı karbon nanotüplerde burkulma yükünün c Van Der Waals katsayısına bağlı olmadığıdır.[12-13] Sonuçlardan burkulma yükünün sadece rijitliklere ve çubuğun boyuna bağlı olduğu açıkça görülmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın amacı yaklaşık taşıma matrisi metodunun çubuk sistemlere veya karbon nanotüplere nasıl uygulandığını ifade etmektir. Gerek, sabit veya değişken kesitli çubuklar için gerekse çok duvarlı karbon nanotüpler için çeşitli sonuçlara varılmıştır. Ulaşılan sonuçlar aşağıdaki gibi sıralanabilir;

Yaklaşık taşıma matrisi metoduyla her türlü diferansiyel denklem sisteminin çözümü rahatlıkla yapılabilir. Ancak matris forma getirilmiş denklem sisteminde değişken sayısı çoğaldıkça, yaklaşık hesabın yapılması da güçleşir.

Burkulma yükünün yaklaşık hesabında kullanılan taşıma matrisinin eleman sayısı ne kadar ilerletiriliyse yaklaşık sonuçta kesin sonuca o kadar yakınsar. Bu yalnızca çubuk sistemlerin burkulma yükü için değil, tüm diferansiyel denklem takımlarının çözümü geçerlidir.

Burkulma yükü hesaplarında, kesin sonuca yaklaşmak için taşıma matrisinin eleman sayısını arttırmak yerine integral aralığını parçalara bölmek, hesap açısından daha kolaydır. Taşıma matrisinde, eleman sayısını arttırılması gibi hesap aralığını parçalara bölünmesi de yaklaşık sonucun kesin sonuca yakınsamasını sağlar. Dolayısıyla aralık ne kadar çok parçaya bölünürse yaklaşık burkulma yükü değeri kesin burkulma yükü değerine o kadar yakınsar. Bu durum diferansiyel denklemler ve çözüldükleri aralıklar içinde geçerlidir.

Yaklaşık taşıma matrisinin ilerletildiği eleman sayısına göre, yaklaşık burkulma yükü değeri kesin değere, bazen daha büyük değerlerden bazen de daha küçük değerlerden yakınsar. Bu şekilde yaklaşık hesaplarda kesin değer hangi aralıkta olduğu rahatlıkla tespit edilebilir.

Değişken kesitli çubuklarda değişim açısı sıfıra yaklaştıkça burkulma yükü değeri de, sabit kesitli çubuğun burkulma yükü değerine yaklaşmaktadır.

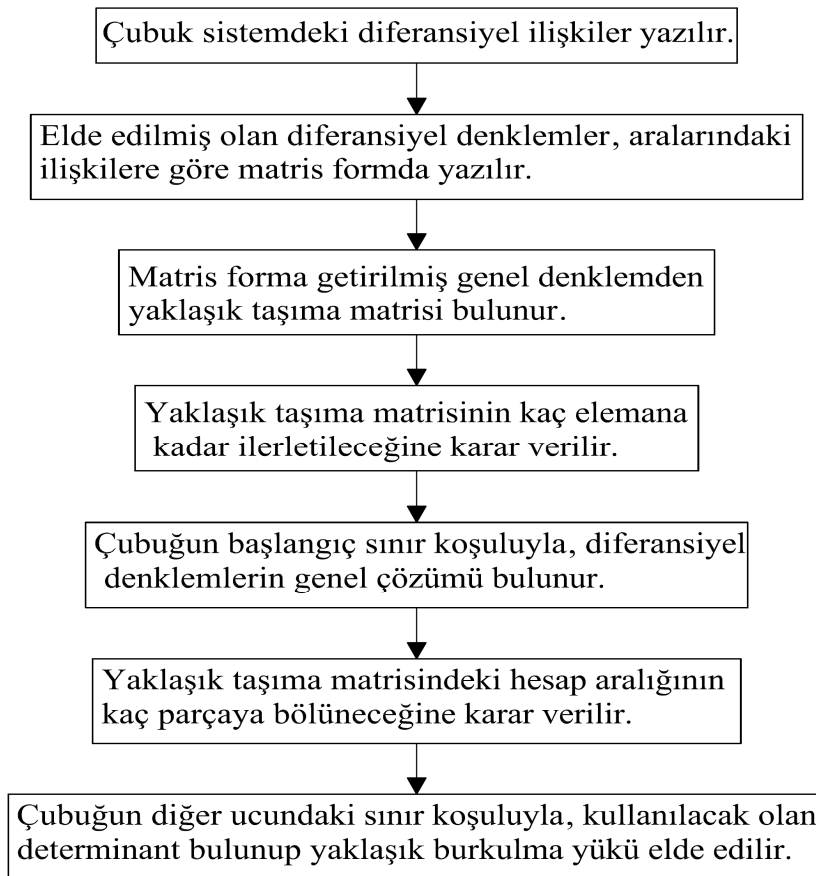
Gerek çubuklarda ve gerekse çift duvarlı karbon nanotüplerde yapılan hesaplarda yalnızca eksenel yükten dolayı oluşan momentin neden olduğu eğilmeler dikkate alınmıştır. Dolayısıyla elde edilen sonuçlarda Euler-Bernoulli kiriş teorisiyle

karşılaştırılmış ve kullanılan diferansiyel denklemler bu teoriden alınmıştır.[3] İlk bölümde bahsedilen ek etkilerde göz önüne alınacaksa, diferansiyel denklemler Timoshenko kiriş teorisinden alınmalı ve elde edilen sonuçlar bu teorinin sonuçlarıyla karşılaştırılmalıdır. Özellikle boyutları çok küçük olması nedeniyle çift duvarlı karbon nanotüplerin burkulma yükü hesaplarında Timoshenko çubuk teorisi kullanılabilir.

Varılan sonuçlardan bir diğeri de çift duvarlı karbon nanotüplerde, tüpler arası etkileşimin burkulma yüküne etkilediğidir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında burkulma yükü değerleri, çubukların rijitlikleri ve boyları cinsindendir.

Yaklaşık taşıma matrisiyle denklem çözümünde denklemin sıfırda almış olduğu değerler mutlaka bilinmelidir. Çünkü denklemler yaklaşık taşıma matrisinin sıfırdaki değerle çarpılması sayesinde çözüme ulaştırılır.

Şekil 5.1’de yaklaşık taşıma matrisi ve başlangıç değerler metoduyla burkulma yükünün yaklaşık hesabı için geçerli akış diyagramı gösterilmiştir. Kabaca bu adımlar uygulanarak burkulma yükü hesapları yaklaşık olarak hesaplanabilir.



Şekil 5.1 : Yaklaşık burkulma yükü hesabı için akış diyagramı

Şekil 5.1'deki akış diyagramı yaklaşık burkulma yükü hesabında kullanılacağı gibi diferansiyel denklem takımlarının yaklaşık çözümlerinde uygulanabilir. Her türlü diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünde dikkat edilmesi gereken en önemli nokta; denklemlerin doğru şekilde yaklaşık taşıma matrisi uygun hale getirebilmektir.

KAYNAKLAR

- [1] **Timoshenko, S. And Gere, J. G.**, 1970. *Theory of Elastic Stability*, Dover Publications
- [2] **Jones, R. J.**, 2006. Euler's Column Equation, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Bull Ridge Publishing, Blacksburg, Virginia, USA.
- [3] **Gürsoy, H.**, 2007. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi <<http://www.bilgiustam.com>>, alındığı tarih 17.10.2009
- [4] **Nalwa, H. S.**, 2000. Carbon Nanotubes, *Hand Book of Nanostructured Materials of Nanotechnology*
- [5] **Tepe, A.**, 2007. Nanoteknolojide nano ölçekteki yapıların yerel olmayan elastisite çerçevesinde incelenmesi, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [6] **NANOTUBE MODELER**, 2009. XYZ coordinates generator for nanotubes and nanocones, JCrystalSoft.
- [7] **MATHEMATICA**, 2007. Computational software program used in engineering and mathematical fields, Wolfram Research, Illinois, USA.
- [8] **Gantmakher, F. P.**, 2000. The Matricant, *The Theory of Matrices*, Vol 2, 125-129, The American Mathematical Society
- [9] **İnan, M.**, 1996. Başlangıç Değerler Metodu, *Cisimlerin Mukavemeti*, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı yayınları ; no : 25, 330-340.
- [10] **Artan, R. And Tepe A.**, 2008. The Initial values method for buckling nonlocal bars with application in nanotechnology, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27 (2008), 469-477.
- [11] **Artan R.**, 2008. *Initial and Boundary Value Problems* Ders Notları, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği Yüksek Lisans Programı, İstanbul
- [12] **Url-1** < http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_equation>, alındığı tarih 09.11.2009.
- [13] **Url-2** < [http:// en.wikipedia.org/wiki/ Van_der_Waals_constants_\(data_page\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waals_constants_(data_page))>, alındığı tarih 09.11.2009.

ÖZGEÇMİŞ

Seyit İsmail Ulusoy 17 Ekim 1985'te İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Mareşal Fevzi Çakmak İlk Öğretim Okulu'nda tamamladı. Lise öğrenimini ise Şehremini Lisesi'nde 2003 yılında tamamladı. Yine 2003 yılında İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünü kazandı. 2007 yılında buradan mezun olduktan sonra aynı tarihte İstanbul Teknik Üniversitesi Yapı Mühendisliği yüksek lisans programını kazandı. Özel bir mimarlık firmasında statik proje mühendisi olarak halen çalışmaktadır.