

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ

**NÜKLEER SİSTEMLERİN SINIR ELEMANLARI
YÖNTEMİ İLE ISIL-HİDROLİK ANALİZİ**

142608

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fiz. Lis. Kenan ŞENTÜRK

304991013

**YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DANIŞMANLIK MERKEZİ**

**Anabilim Dalı: Nükleer Araştırmalar
Programı: Nükleer Enerji**

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Murat AYDIN

OCAK 2003

**NÜKLEER SİSTEMLERİN SINIR ELEMANLARI
YÖNTEMİ İLE ISIL-HİDROLİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Kenan ŞENTÜRK
304991013

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Ocak 2003

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Murat AYDIN

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Hasan SAYGIN (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Taner DERBENTLİ (İ.T.Ü.)

OCAK 2003

BABAMA



ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca benden yardımlarını esirgemeyen ve yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Murat Aydın'a, çalışmamda yardımlarından ve önemli kaynaklar sağlamalarından dolayı Yeditepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü öğretim elemanlarına ve her zaman desteğini yanımda hissettiğim aileme teşekkür ederim.

Ocak 2003

Kenan ŞENTÜRK



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL DENKLEMLER	4
2.1. Akım Fonksiyonu Formülasyonu	5
2.2. Kanallarda Eksenel Akış	7
2.3. Enerjinin Korunumu Denklemi	8
3. SINIR ELEMANI YÖNTEMİ	10
3.1. Giriş	10
3.2. Yöntem	11
3.3. Temel Çözümler	12
3.4. Sınır İntegrali Denklemi	15
3.5. Sınır Elemanları	16
3.6. İç Noktalarda Çözüm	19
3.7. İntegrasyon	19
4. HACİM İNTEGRALİ TERİMİ	21
4.1. Nokta Kaynaklar	21
4.2. Hücre (Cell) İntegrasyonu Yöntemi	22
4.3. Monte Carlo Yöntemi	23
4.4. Özel Çözüm	23
5. UYGULAMALAR VE İRDELEME	24
5.1. Nükleer Kanalda Silindirik Bir Çubuğun Oluşturduğu Kısmi Blokaj Problemi	24
5.1.1. Problemin Tanıtılması	24
5.1.2. Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması	26
5.2. Bir Nükleer Yakıt Zarfındaki Sıcaklık Dağılımı Problemi	32
5.2.1. Problemin Tanıtılması	32
5.2.2. Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması	33
5.3. Dikdörtgen Bir Kanalda Eksenel Akış Problemi	37
5.3.1. Problemin Tanıtılması	37
5.3.2. Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması	38

5.4. İçinde Enerji Üretimi Olan Kare Şeklindeki Bir Nükleer Yakıttaki Sıcaklık Dağılımı Problemi	40
5.4.1. Problemin Tanıtılması	40
5.4.2. Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması	41
5.5. Silindirik Bir Kanal İçinden Eksenel Akışın Hız Dağılımı Problemi	43
5.5.1. Problemin Tanıtılması	43
5.5.2. Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması	44
5.6. Silindirik Bir Kanalda Yakıt Demeti İçindeki Eksenel Akışın Hız Dağılımı Problemi	48
5.6.1. Problemin Tanıtılması	48
5.6.2. Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması	49
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	52
KAYNAKLAR	53
EKLER	55
EK A Bilgisayar Programının Tanıtılması	55
EK B Bilgisayar Programı	56
EK C 5.6 Uygulaması için giriş verileri	60
EK D 5.6 Uygulaması için çıktı verileri	63
EK E 5.6 Uygulaması için hız değerleri tablosu	65
ÖZGEÇMİŞ	69

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 5.1. Zarf içi sıcaklıklar ve hata değerleri	36
Tablo 5.2. Kanal içi eksenel hız ve hata değerleri.....	40
Tablo 5.3. İçinde enerji üretimi olan kare şeklindeki bir nükleer yakıt için sıcaklıklar ve hata değerleri	42
Tablo 5.4.A Silindirik bir kanalda eksenel akış için hız ve hata değerleri.....	46
Tablo 5.4.B Silindirik bir kanalda eksenel akış için hız ve hata değerleri.....	47
Tablo 5.5 5.6 Uygulaması için hız değerleri tablosu.....	65



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Problem geometrisi ve sınır koşulları.....	4
Şekil 2.2 : Keyfi Bir Kesite Sahip Kanalda Eksenel Akış.....	8
Şekil 3.1 : Dirac delta fonksiyonu şekli.....	13
Şekil 3.2 : Kaynak ve alan noktalarının (geometrisi) gösterimi.....	14
Şekil 3.3 : $c(p)$ 'nin farklı geometrilere aldığı değerler.....	15
Şekil 3.4 : Problem alanının sınır elemanlarına ayrılmış hali.....	16
Şekil 3.5 : Sınır elemanları topluluğu.....	17
Şekil 5.1 : Blokaj probleminin şematik görünümü.....	25
Şekil 5.2 : Akışın silindir etrafındaki akış çizgileri.....	25
Şekil 5.3 : Blokaj problemi için çözüm bölgesi ve uygun sınır şartları.....	27
Şekil 5.4 : Blokaj probleminin 34 Elemanlı Ağı.....	28
Şekil 5.5 : Blokaj probleminin 94 Elemanlı Ağı.....	29
Şekil 5.6 : Radyal hızın $r=0.30$ ve $h=0.6$ durumunda x e göre değişimi.....	30
Şekil 5.7 : Radyal hızın $r=0.16$ ve $h=1.2$ durumunda x e göre değişimi.....	30
Şekil 5.8 : Silindir duvarındaki hızın x e göre değişimi ($r=0.30$ ve $h=0.6$)..	31
Şekil 5.9 : Silindir duvarındaki hızın x ye göre değişimi ($r=0.16$ ve $h=1.2$)..	31
Şekil 5.10 : Silindir şeklindeki bir nükleer yakıtı çevreleyen zarf malzemesi ve seçilen çözüm bölgesi	32 33
Şekil 5.11 : Silindirik yakıt zarfı problem geometrisi ve sınır şartları.....	33
Şekil 5.12 : Silindirik yakıt zarfı problemine ait ağ ve iç noktalar	34
Şekil 5.13 : Silindir şeklindeki bir nükleer yakıtı çevreleyen zarf malzemesi içinde alınan farklı yarıçaplardaki sıcaklık değerleri	35 35
Şekil 5.14 : Dikdörtgensel kanal	37
Şekil 5.15 : Dikdörtgensel kanal için çözüm bölgesi ve sınır şartları.....	38
Şekil 5.16 : Dikdörtgen kanal için çözüm bölgesine ait ağ ve iç noktalar.....	39
Şekil 5.17 : Kare şeklindeki bir nükleer yakıtın şekli ve seçilen çözüm bölgesi	40 40
Şekil 5.18 : İçinde enerji üretimi olan kare şeklindeki bir nükleer yakıt için çözüm bölgesi ve sınır şartları.....	41 41
Şekil 5.19 : İçinde enerji üretimi olan kare şeklindeki bir nükleer yakıt problemine ait ağ ve iç noktalar	41 41
Şekil 5.20 : Silindirik bir kanalda eksenel akışa ait geometri ve seçilen çözüm bölgesi	43 43
Şekil 5.21 : Silindirik bir kanalda eksenel akış için çözüm bölgesi ve sınır şartları.....	44 44
Şekil 5.22 : Silindirik bir kanalda eksenel akış problemine ait ağ ve iç noktalar.....	45 45
Şekil 5.23 : Yakıt demeti içeren silindirik kanal.....	48
Şekil 5.24 : Silindirik bir kanalda yakıt demeti için gerçek ve homojen probleme ait sınır koşulları	49 49

Şekil 5.25 : Silindirik bir kanalda yakıt demeti probleminin ağı ve iç noktaları.....	50
Şekil 5.26 : Silindirik bir kanalda yakıtlar arasındaki akışın eşhız (isovels) eğrileri.....	51
Şekil 5.27 : Silindirik bir kanalda yakıtlar arasındaki akış için Khader'in elde ettiği eşhız (isovels) eğrileri.....	51



SEMBOL LİSTESİ

S	: Problem bölgesinin yüzeyi
S_1, S_2, S_3, S_4	: Problem bölgesi üzerinde alınan yüzey parçaları
V	: Hacim
u	: Potansiyel ifadesi (Sıcaklık veya hızı ifade eder)
u^*	: Potansiyel için temel çözüm
q	: Akı
q^*	: Akı için temel çözüm
x, y, z	: Kartezyen koordinat bileşenleri
b	: Poisson denkleminde kaynak terimi
h	: Isı transfer katsayısı veya film katsayısı
p	: Basınç
ρ	: Yoğunluk
k	: Isı iletim katsayısı
A	: Yüzey alanı
ψ	: Akım fonksiyonu
μ	: Dinamik viskozite katsayısı
m	: Kütle
c_p	: Sabit basınç altındaki özgül ısı sabiti
T	: Sıcaklık
q'''	: Birim zamanda birim hacimde üretilen enerji
t	: Zaman
$\Delta(p, y)$	: Dirac Delta fonksiyonu
$c(p)$	: Sınır geometri fonksiyonu
$u(p)$	: Kaynak noktasındaki potansiyelin değeri
u_r	: Radyal hız
u_θ	: Teğetsel hız
u_z	: Hızın z bileşeni
$T(r)$	: r noktasındaki sıcaklık değeri
$T(i)$	: İç yüzeydeki sıcaklık değeri
$T(e)$	: Dış yüzeydeki sıcaklık değeri
r_e	: Dış yarıçap
r_i	: İç yarıçap
a	: Silindir yarıçapı
$\vec{n}$	: Yüzeye dik birim vektör
p	: Kaynak noktası
ϕ	: İnterpolasyon fonksiyonları

h_{ij}	: H kare matrisinin elemanları
g_{ij}	: G kare matrisinin elemanları
w_k	: Ağırlık fonksiyonu
r_k	: Gauss noktasının kaynak noktasına uzaklığı
Q_n	: Kaynak şiddeti
M	: Kaynak noktası sayısı
u_L	: Homojen çözüm
u_P	: Özel çözüm



NÜKLEER SİSTEMLERİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ İLE ISIL-HİDROLİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada, sınır elemanı yöntemi ile nükleer sistemlerin ısıl-hidrolik analizi yapılmıştır. Sabit eleman formülasyonu kullanılarak ayrıklaştırılmış sınır denklemleri, analitik özel çözüm fonksiyonları ile birleştirilmiştir. Bu yöntem ile altı farklı problem çözülmüştür. Bunlar sırasıyla nükleer kanalda silindirik bir çubuğun oluşturduğu kısmi blokaj problemi, bir nükleer yakıt zarfındaki sıcaklık dağılımı problemi, dikdörtgen bir kanalda aksel akış problemi, içinde enerji üretimi olan kare şeklindeki bir nükleer yakıttaki sıcaklık dağılımı problemi, silindirik bir kanal içinden aksel akışın hız dağılımı problemi, silindirik bir kanalda yakıt demeti içindeki aksel akışın hız dağılımı problemleridir. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ile karşılaştırılmış ve sonuçların mühendislikte kabul edilebilir hata aralıklarında oldukları görülmüştür.

THERMAL-HYDRAULIC ANALYSIS OF NUCLEAR SYSTEMS BY USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

SUMMARY

In this work, thermal-hydraulic analysis of nuclear systems is done by using the boundary element method. Constant boundary element formulation together with particular solution technique is used to discretise the boundary integral equations. This approach is applied to solve six different test cases. These include partial blokage of an infinite cylinder in a rectangular duct, temperature distribution problem for a cylindirical nuclear cladding, axial flow in a rectangular duct, temperature distribution problem for a square fuel with heat generation, axial flow for cylindirical duct and axial flow in a circular duct containing rod clusters. Obtained results are compared with the corresponding analytical solutions. It is seen that the results are found to be falling well below of acceptable error bounds in engineering.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sınır elemanı yöntemi günümüzde yeterince hassasiyete sahip çözümler üreten güçlü bir sayısal analiz yöntemi olarak bir çok problemin çözümünde karşımıza çıkmaktadır.

Fizikte ve mühendislikte kullanılan sayısal yöntemlerin en önemlileri sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleridir. Bunlardan sonlu farklar yönteminde 1, 2 veya 3 boyutlu uzaysal bir bölge bir çok kontrol hacminden oluşmuş ızgaraya bölünür. Herbir kontrol hacmi içine yerleştirilen bir nokta ile betimlenir. Her bir ızgara noktası için fiziksel olayı belirleyen diferansiyel denkleme sonlu fark yaklaşımı uygulanır. Sonuçta sınır koşulları da uygulandıktan sonra tek bir çözüm verecek bir lineer cebirsel denklem sistemi (genellikle bant matris halinde) elde edilir. Bu yöntem diğer iki yöntemle kıyaslandığında, matematiksel olarak en basiti ve bilgisayarda programlaması en kolay olanıdır. Temel dezavantajı, düzenli olmayan geometrilere uygulanmasında karşılaşılan zorluklardır [1].

Eğer ele alınan problem iki boyutlu olarak incelenecek ise, sonlu elemanlar yönteminde iki boyutlu bir problem bölgesi üçgen veya dikdörtgenlerden oluşmuş ve sonlu elemanlar olarak adlandırılan küçük alt bölgelere bölünür. Üç boyutlu bir problemde, incelenen bölge için elemanlar tetrahedral (dört tane üçgen dış yüzeyi olan cisim) ya da dikdörtgenler prizması şeklinde bir geometri arzederler. Her bir elemanda değişkenin davranışı bir şekil fonksiyonu tarafından belirlenir. Olayı karakterize eden diferansiyel denklem her bir eleman için yazılır. Bütün elemanlar komşu elemanlar arasında yazılan süreklilik koşulları kullanılarak birleştirilir ve sınır koşulları uygulanarak lineer bir denklem sistemi (seyrek elemanlı matrisli) elde edilir. Çözümün hassasiyetini artırmak için genelde ya eleman sayısı ya da şekil fonksiyonun derecesi artırılır [2].

Sınır elemanları yönteminde diferansiyel denklemler, sınır integrali denklemlerine dönüştürülür. Bu denklemler sınırdaki bölünmüş küçük elemanlar üzerinden, sayısal

olarak integre edilirler. Diğer yöntemlerde olduğu gibi, sınır koşulları uygulanarak lineer bir denklem sistemi elde edilir ve çözülür. Sınır elemanları yöntemi karmaşık geometrilere uygulamada bir problem oluşturmaz. Bir lineer diferansiyel denklemin uygulamasında ise bütün terimler sınır integralleri olarak elde edildiğinden problemin geometrisi bir boyut azalır.

Sınır değer problemlerinde integral denklem tekniklerinin kullanımı, uzun zaman öncesine dayanmaktadır. 1903'te Fredholm, sınır elemanları yöntemine temel teşkil eden ayrıklaştırılmış integral denklemleri potansiyel problemlerin çözümünde kullanmıştır [1]. Bu yaklaşım literatürde fiziksel anlamı olmayan yoğunluk fonksiyonlarını ve kaynakları içerdiğinden, doğrudan olmayan (dolaylı) sınır elemanları yöntemi olarak adlandırılır. Geçtiğimiz yüzyılın ilk yarısında integral denklemlerin potansiyel ve elastisite uygulamaları olmasına rağmen, bunlar basit problemlerle sınırlı kalmıştır. 1960'larda yüksek hızda dijital bilgisayarların gelişmesi sonucunda, sınır elemanları yöntemiyle sayısal uygulamalar yapılmaya başlanmıştır.

Sınır integrali çözümlerinde ilk önemli gelişme 1963 yılında Jaswon ve Symm tarafından yazılan makalede görülmüştür. Bu çalışma integral denklemlerinin, Laplace denklemine dayanan, 2 boyutlu potansiyel denklemlerinin düzgün, çizgisel ve üzerlerinde potansiyel fonksiyonlarının sabit olduğu elemanlara ayrıklaştırılması fikrine dayandırılmıştır. Bu çalışmada tekil integraller analitik olarak alınmış, diğer integraller ise Simpson yöntemiyle hesaplanmıştır [1,2].

Daha sonra, sınır integral denklem teknikleri, 1963 yılında Jaswon ve Ponter [3] tarafından farklı kesitlere sahip şaftların dönmesi problemine, 1967 yılında Hess ve Smith [4] tarafından gelişigüzel kesitlere sahip cisimlerin etrafındaki potansiyel akışa uygulanmıştır.

1967 yılında Rizzo [5] potansiyel teori ile klasik elastisite arasındaki güçlü benzerliği ortaya koymuş ve probleme sayısal yaklaşım getirmiştir. Bu çalışmada sabit elemanlar kullanılarak ve bazı tekil integraller haricinde, integraller Simpson yöntemi ile hesaplanmıştır.

1969 yılında Cruse [6] sınır integral tekniğini boyutunu 3 boyutlu elastisite problemlerine uygulamıştır. Yüzeyi üçgen elemanlara bölmüş ve Rizzo'nun

alışmasına benzer bir formülasyon kullanmıştır. Daha sonra Cruse lineer elemanlar kullanarak bulduğu sonuçları sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırmıştır [7].

Gelişen bilgisayar teknolojisiyle, 1970'li yılların başından itibaren sınır integrali tekniği, sürekli ortamlar mekaniğinde lineer olmayan uygulamaları da içererek geniş bir uygulama alanına sahip olmuştur [8].

Sınır Elemanı Yönteminin Bazı Avantajları:

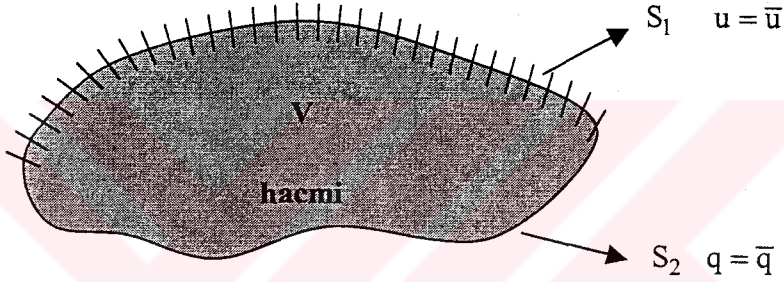
- 1- Lineer problemlerde problem boyutu bir boyut azaldığından model hazırlanması için daha az zamana gereksinim duyar.
- 2- Aynı hassasiyette sonuç elde etmek için diğer yöntemlere göre daha az sayıda elemana ve dolayısıyla daha az bilgisayar zamanına ve bilgi depolanmasına gereksinim duyar.
- 3- Çoğu mühendislik problemlerinde en istenmeyen durumlar (rneğin ısıl şoklarda, stres hesaplarında) yüzeylerde olur. Çoğu dizayn programları ve mühendislik uygulamaları genelde en istenmeyen durumda ne olacağı ile ilgilidir. Sınır elemanlar yönteminde çözüm, sınır değişkenlerini içerir, istenirse i noktalarda da çözüm bulunur. Böyle olunca, gereksiz zaman ve işlem kaybı nlenmiş olur.

Sınır Elemanı Yönteminin Bazı Dezavantajları:

- 1- Sınır elemanlar yönteminde kullanılan matematik, diğer sayısal yöntemlere göre biraz karmaşıktır. Ancak sonlu elemanlar yönteminde kullanılan sayısal prosedürler, şekil fonksiyonları ve sayısal integrasyonlar temelde aynıdır.
- 2- Lineer olmayan problemlerin çözümünde problemin boyutu bir boyut azalmaz ve i kısımları da gözönüne alacak şekilde model hazırlanır ve çözülür.
- 3- İnce kabuk analizinde, çözüm noktalarının birbirine yakınlığı sorun yaratır. Bu ise çözüm hassasiyetini kötü yönde etkiler.
- 4- zm matrisi, sıfır olmayan elemanlarla tamamen doludur ve simetrik değildir.

BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER

Potansiyel akış problemleri, Laplace veya Poisson denklemleri ile ifade edilen fiziksel ya da mühendislik problemlerinin genel adıdır. Bu denklemler akışkanlar mekaniğinde, ısı transferinde ve elektrostatik problemlerinde uygulama alanı bulmaktadır [6-8].



Şekil 2.1. Problem Geometrisi ve Sınır Koşulları

u potansiyeli, ısı transferi problemlerinde sıcaklığı, sıkıştırılamaz akışkanlar mekaniğinde ise akışkanın hızını göstermektedir. Burada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

Laplace denklemi olarak adlandırılır. Bu ifade ayrıca

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer seçilen kontrol hacminin içerisinde kaynak terimi varsa, yazılan son eşitlik Poisson denklemine dönüşür ve

$$\nabla^2 u = b \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir.

Sınır koşulları ise 4 grup altında toplanır. Dirichlet sınır koşulunda fonksiyonun değerinin sınırdaki değerinin yani $u = \bar{u}$ ifadesinin, Neumann sınır koşulunda akının yani $q = \bar{q}$ ifadesinin sınırdaki değerinin bilinmesi söz konusudur. Robin sınır koşulunda akı ile potansiyel arasında lineer bağımlılık vardır. Konvektif (taşınım) sınır koşulu $q = h(u_a - u)$ buna örnek teşkil eder. Burada h taşınım ile ısı transferinde ısı transferi katsayısı veya yüzey film katsayısı olarak adlandırılır. Son sınır koşulu olarak ışıma ile ısı transferinde karşılaşılan potansiyel ve akı arasında nonlineer ilişki örnek verilebilir.

2.1 AKIM FONKSİYONU FORMÜLASYONU

Bu incelemede ideal bir akış gözönüne alınmıştır. Bu ideal akış homojen, sıkıştırılamaz, sürtünmesiz ve yönden bağımsız olarak kabul edilebilir. Akışkanın akışını basınç ve atalet kuvvetleri sağlıyor olsun. X-Y yüzeyinde iki boyutlu tamamen gelişmiş bir akış için, denge koşulları hacim kuvvetleri ihmal edilmek suretiyle

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

ifadelerine sadeleştirilebilirler. Bu eşitliklerde yer alan

u : x doğrultusundaki hızı,

v : y doğrultusundaki hızı,

ρ : yoğunluğu,

p : basıncı temsil etmektedir.

İki boyutta süreklilik

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.6)$$

ifadesi ile verilmektedir. Sürekliliği sağlayan ψ akım fonksiyonu,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır [7]. Denklem (2.4)-(2.5) birlikte düzenlenirse

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu denklemleri sağlayan koşul

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.11)$$

şeklindedir. Bu koşul viskozite etkisinin gözönüne alınmaması ve neticesinde akışkanda dönme olmadığını ifade etmektedir. Akım fonksiyonu cinsinden hız ifadeleri kullanıldığı takdirde, elde edilen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.12)$$

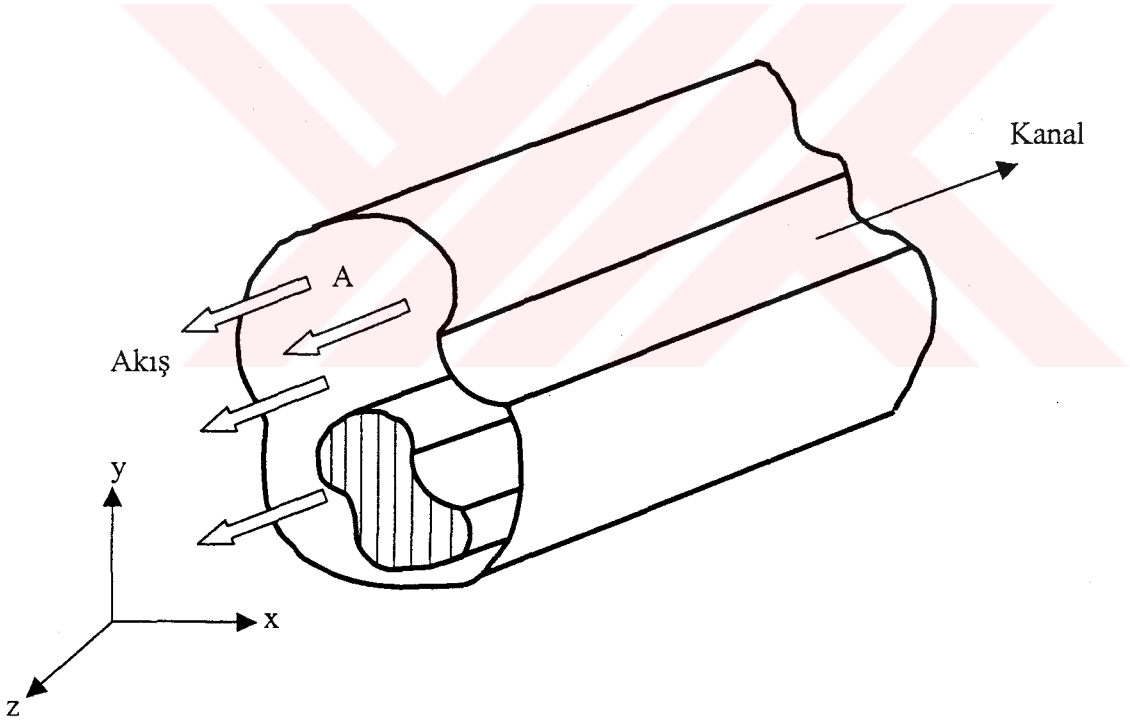
denklemini Laplace denklemidir. Basınç dağılımını da akım fonksiyonu kullanılarak

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} = \text{sabit} \quad (2.13)$$

şeklinde elde edilebilir [8].

2.2 KANALLARDA EKSENEL AKIŞ

Kesit alanı A olan bir kanal içinde, akış profili tamamen oluşmuş, sürekli rejimde, laminar ve sıkıştırılamaz bir akış gözönüne alınsın (Şekil 2.2). Bu akışın meydana gelmesini sağlayan, basınç gradyenidir. Girişten yeterince uzakta akış profili tamamen oluşur. Burada akışın hız bileşenleri $u = v = 0$ ve $w = f(x,y)$ şeklinde olur [7].



Şekil 2.2. Keyfi Bir Kesite Sahip Kanalda Eksenel Akış

Momentum dengesi denklemi

$$0 = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.14)$$

şeklinde yazıldıktan sonra düzenlenirse

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \text{sabit} \quad (2.15)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, bu eşitliklerde yer alan w kanal yüzeyinde 0 değerine sahiptir.

2.3 ENERJİNİN KORUNUMU DENKLEMİ

Bir katı içinde zamana bağlı, enerjinin korunumu denklemi, malzeme özellikleri sabit alındığı takdirde,

$$\rho c_p \left(\frac{dT}{dt} \right) = k \nabla^2 T + q''' \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir [9]. Burada q''' ısı kaynağından birim zamanda birim hacimde açığa çıkan ısı enerjisi, k ortamın ısı iletim katsayısını, ρ yoğunluğu ve c_p sabit basınçta özgül ısı katsayısını gösterir. İki boyutta, zamandan bağımsız enerjinin korunumu denklemi

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q''' = 0 \quad (2.17)$$

halini alır.

Ayrıca içerisinde ısı enerji kaynağı olmayan sistem için, aynı denklem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.18)$$

formunda sadeleştirilebilir.



BÖLÜM 3. SINIR ELEMANI YÖNTEMİ

3.1 GİRİŞ

Bir sayısal analiz yöntemi olan Sınır Elemanı Metodu 1960 li yıllarda geliştirilmeye başlanmıştır. Günümüzde yazılım desteği sayesinde birçok mühendislik probleminde kullanılmaktadır. Diğer yöntemlere göre en önemli avantajı mesh modellerinin oluşturulmasının oldukça kolay ve zaman kaybına sebep olmamasıdır. Modellerin değiştirilmesinin de oldukça kolay olması sebebiyle gene zamandan tasarruf sağlanmasına sebep olmaktadır. Ayrıca yüksek doğrulukta sayısal sonuçlar elde ediliyor olması nedeniyle de tercih nedenidir. Diğer sayısal yöntemlerle kıyaslandığında boşluklu veya delikli yapıların analizinde üstünlük sağlar [6].

Bu yöntem ilk olarak Sınır Integrali Denklemi Yöntemi (Boundary Integral Equation Method) olarak 1960 lı yılların başında kullanılmıştır. Yöntem mühendislikçe sık kullanılmayan farklı matematiksel formülasyonlara dayanır. Gözönüne alınan diferansiyel denklemin birim kaynak için temel çözümleri bulunur. Green'in birinci ve ikinci özdeşlikleri kullanılarak diferansiyel denklem, sınır integrallere dönüştürülür. Sınırlar sınır elemanlara bölünür ve elemanlar üzerinden integraller sayısal olarak hesaplanır. Çözümler nod denen çözüm noktaları için bulunurlar.

Lineer bir problem ele alındığında, fiziksel olayı ifade eden diferansiyel denklemler sınır integrallerine çevirilir ve hacimsel integrallerden kurtulunur. 3 boyutlu problemlerde cisimlerin yüzeyleri ile ilgilenilir. Cisimlerin yüzeyleri üçgenler veya dörtgen elemanlarla kaplanır, çözüm hassasiyetini artırabilmek için de ağdaki üçgen veya dörtgen elemanlar daha küçük seçilip, sayıları artırılır. Sonuçta elde edilen lineer denklem sistemi çözülür ve mesh nodlarında aranan çözüm elde edilir.

Sınır Elemanı Metodu; havacılık ve uzay mühendisliğinde, otomotiv sektöründe, elektrik mühendisliğinde, denizaltı mühendisliğine kadar mühendisliğin bir çok alanında uygulanmaktadır.

3.2 YÖNTEM

V hacmi üzerindeki her noktada sürekli ve konuma bağımlı iki keyfi fonksiyon seçilmiş olsun. Seçilen u ve u^* fonksiyonları arasında

$$\vec{F} = u \vec{\nabla} u^* \quad (3.1)$$

gibi bir ilişki tanımlanır. Zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad (3.2)$$

yazılabilir. $\vec{F}$ fonksiyonunun diverjansı

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = u \nabla^2 u^* + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u^* \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Diverjans teoremi $u \vec{\nabla} u^*$ ifadesine uygulanırsa,

$$\int_V \left[u \nabla^2 u^* + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u^* \right] dV = \int_S u \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} dS \quad (3.4)$$

denklemini elde edilir [10].

Diverjans Teoremi $u^* \vec{\nabla} u$ ifadesine de uygulanırsa

$$\int_V \left[u^* \nabla^2 u + \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{\nabla} u \right] dV = \int_S u^* \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} dS \quad (3.5)$$

denklemini elde edilir.

(3.5) denkleminin (3.4) denklemini çıkarılırsa

$$\int_V \left[u^* \nabla^2 u - u \nabla^2 u^* \right] dV = \int_S \left[u^* \vec{\nabla} u - u \vec{\nabla} u^* \right] \cdot \vec{n} dS \quad (3.6)$$

denklemini bulunur. Bulunan bu ifadeye Green'in ikinci özdeşliği denir [1].

Burada u gerçekte hesaplanacak değişkendir. Keyfi fonksiyonların uygun seçimi karmaşık denklemlerin basitleşmesine sebep olur. Denklem (3.6) yı daha sade bir şekilde yazabilmek için normal doğrultuda ve sınırı geçen net akı ifadesi

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanabilir. Benzer ifade, keyfi u^* fonksiyonu içinde

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \vec{\nabla} u^* \cdot \vec{n} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir. Son yapılan tanımlar kullanılarak, Green ifadesi yazılırsa

$$\int_V u^* \nabla^2 u dV - \int_V u \nabla^2 u^* dV = \int_S u^* q dS - \int_S q^* u dS \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir ve bu potansiyel ve akı arasındaki karşılıklı ilişkiyi (reciprocal relationship) verir.

3.3 TEMEL ÇÖZÜMLER

Denklemin (3.9)' un sol tarafındaki hacim integralini gözönüne alınmış olsun. Eğer (2.3) denklemi (3.9) denkleminde yerine konulursa,

$$\int_V u^* b dV - \int_V u \nabla^2 u^* dV = \int_S u^* q dS - \int_S q^* u dS \quad (3.10)$$

ifadesi elde edilir.

$b = 0$ olduğu durumda veya Laplace denklemi çözüldüğünde denklem (3.10),

$$\int_V u \nabla^2 u^* dV = \int_S q^* u dS - \int_S u^* q dS \quad (3.11)$$

şeklinde sadeleşir.

Artık bu noktada u^* keyfi fonksiyonu,

$$\nabla^2 u^* = -\Delta(p, y) \quad (3.12)$$

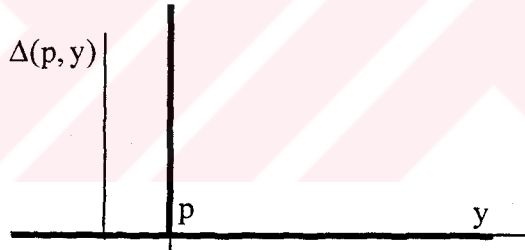
çözümünden elde edilir. Burada $\Delta(p, y)$ Dirac delta fonksiyonunu, p noktası **kaynak noktasını** ve y de **alan noktasını** göstermektedir. Dirac delta fonksiyonu (Şekil 3.1),

$$\Delta(p, y) = \begin{cases} 0, y \neq p \\ \infty, y = p \end{cases} \quad (3.13)$$

olarak ifade edilir. p konumuna yakın olunması durumunda keyfi fonksiyon u^* büyük değer alırken, p konumundan uzaklaşılması durumunda da keyfi fonksiyon çok küçük olacaktır. Dirac delta fonksiyonun çevrelediği V hacmi üzerinden integrali,

$$\int \Delta(p, y) dV = 1 \quad (3.14)$$

değerini verir.



Şekil 3.1. Dirac delta fonksiyonu şekli

$\nabla^2 u^*$ fonksiyonunun bu seçimi temel denklemi basitleştirir,

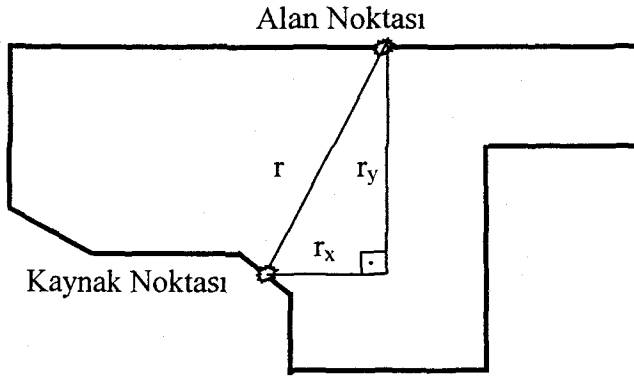
$$\int_V u \Delta(p, y) dV = u(p) \quad (3.15)$$

hacim integralini ortadan kaldırır. Bu ifade yerine konulduğunda denklem (3.11) son olarak,

$$u(p) + \int_S q^* u dS = \int_S u^* q dS \quad (3.16)$$

şeklini alır. Artık sadece bir terim hacimdeki p noktasına bağlıdır. Bu da ilk terim olan $u(p)$ 'dir. $u(p)$ kaynak noktasındaki potansiyelin değeridir

u^* ve q^* fonksiyonları geometrik fonksiyonlar olup, sadece r nin birer fonksiyonudurlar. r da kaynak noktası olan p ile kaynağın etkisinin hesaplandığı alan noktası arasındaki mesafedir. Bu tanım Şekil (3.2) de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Kaynak ve alan noktalarının (geometrisi) gösterimi

Yönden bağımsız (izotrop) ortamda 2 boyutta da temel çözüm

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (3.17)$$

olarak verilmiştir [2]. q^* normal akıyı gösterdiğinden, bu potansiyelin normal doğrultudaki türevi olarak

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{-1}{2\pi r^2} (r_x n_x + r_y n_y) \quad (3.18)$$

yazılabilir [2].

Denklem (3.18) de r_x ve r_y , r 'nin x ve y doğrultularındaki bileşenleridir. Benzer olarak n_x ve n_y yüzeydeki normalin x ve y doğrultusundaki bileşenleridir.

3.4 SINIR İNTEGRALİ DENKLEMİ

Kaynak noktası p keyfi olarak, istenen herhangi bir yerde seçilebilir. Sadece sınıra bağlı integral denklem oluşturmak için p sınır yüzeyine taşınabilir. Bu yapıldığında, $u(p)$ 'e sadece kaynak noktasının geometrisine bağlılık arzeden bir fonksiyon olan $c(p)$ ile çarpıldığında

$$c(p)u(p) + \int_S q^* u dS = \int_S u^* q dS \quad (3.19)$$

elde edilir. Denklem (3.19) sadece sınır terimleri içerir. Bulunan bu ifade **sınır integrali denklemi** olarak adlandırılır. Bu denklem modeldeki tüm noktaları birbirleriyle ilişkilendirir. Eğer p noktası V hacmi içinde ise $c(p)$ nin aldığı değer 1 dir. Eğer p noktası V hacmi dışında ise o zaman da $c(p)$ 0 değerini almaktadır. Düzgün bir sınır da $c(p)$ 0.5 değerini alır. Aslında $c(p)$ kaynak tarafından üretilen akının V hacmine giren miktarı olarak düşünülebilir (Şekil 3.3). Keskin köşeler için

$$c(p) = \frac{\theta}{2\pi} \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilebilir ve burada θ kaynak noktasının madde içerisinde kalan kısmı ile ilgili açıdır.



$$c(p) = \frac{1}{4}$$



$$c(p) = \frac{1}{2}$$



$$c(p) = \frac{3}{4}$$

Şekil 3.3. $c(p)$ 'nin farklı geometrilerde aldığı değerler

Eğer $b = 0$ değilse, Denklem (3.19),

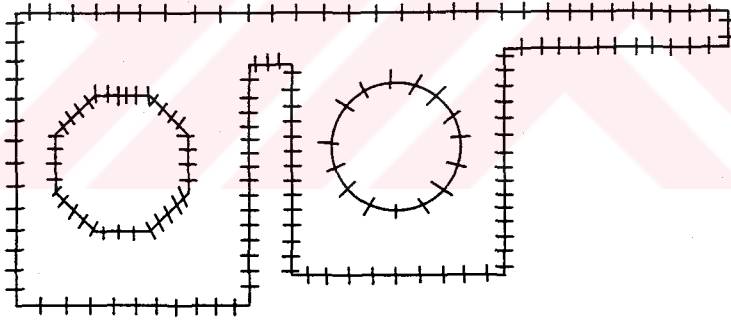
$$c(p)u(p) + \int_S q^* u dS = \int_S u^* q dS - \int_V u^* b dV \quad (3.21)$$

formunu alır [10].

3.5 SINIR ELEMANLARI

Bir önceki bölümde de gösterildiği üzere sınır integrali denklemi (3.19) tamamen sınır üzerindeki potansiyel ve akı dağılımlarını S sınır yüzeyi üzerinden alınan integraller halinde vermektedir.

u^* ve q^* nin sayısal olarak integrale edilebilmesi için S yüzeyinin birçok küçük parçacığa bölünmesi gerekir (Şekil 3.4). Bu parçacıklara **sınır elemanları** denir. Integrasyon bu küçük yüzeyler üzerinden alınıp, bunların herbirinin katkıları birarada toplanarak, S yüzeyi için sınır integrali oluşturulur.



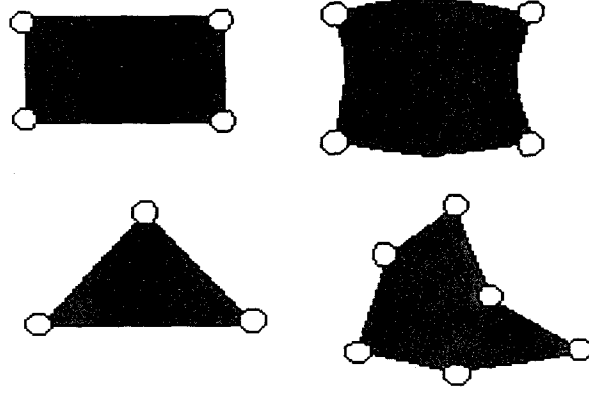
Şekil 3.4. Problem alanının sınır elemanlarına ayrılmış hali

Bu ayrık durum için sınır integrali ifadesi

$$c(p)u(p) + \sum_S \int q^* u dS_{\text{elem}} = \sum_S \int u^* q dS_{\text{elem}} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir yaklaşım yapılmadığından, Denklem (3.22) deki integrasyonlar doğru hesaplanabilirse, sonuç tam doğru olur.

Çözümün bulunacağı noktalara **node** denir. Her bir noktada potansiyel ve akı olmak üzere iki bilinmeyen sözkonusudur. Sınır üzerindeki herhangi bir noktadaki, akı nodlardaki akı interpolasyonu şeklinde bulunabilir.



Şekil 3.5. Sınır elemanları topluluğu

Eğer bir sınır elemanının n tane nodu varsa, herhangi bir noktadaki potansiyel olan u değeri diğer nodlardaki potansiyeller kullanılarak $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \dots + \phi_n u_n \quad (3.23)$$

hesaplanabilir. Denklem (3.23) deki ϕ terimleri interpolasyon (şekil) fonksiyonları olarak adlandırılırlar. Matris gösterimi ile (3.23) denklemi,

$$u = \Phi^T \mathbf{u} \quad (3.24)$$

olarak gösterilebilir. Denklem (3.24) de $\Phi^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ ve $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ vektörleridir. Benzer bir şekilde akı yoğunluğu da

$$q = \Phi^T \mathbf{q} \quad (3.25)$$

ifade edilebilir.

Bu çalışmada tek nodlu sabit sınır elemanları kullanıldığından, interpolasyon fonksiyonları 1'e eşittir. $\mathbf{q}$ vektörü n tane noda sahip bir elemanın akı bileşenlerinden

oluşan bir vektördür. Burada u ve q vektörleri sabit olmaları sebebiyle integralin dışına alınabilirler. Bu işlemler yapılnca Denklem (3.22),

$$c(p)u(p) + \sum_S \int q^* \Phi^T dS_{\text{elem}} u = \sum_S \int u^* \Phi^T dS_{\text{elem}} q \quad (3.26)$$

formunda yazılabilir. Denklem (3.26) de bütün integrallerin içindeki terimler biliniyor durumdadır. Mesela düzgün bir sınırdaki bulunan 1 numaralı nod için Denklem (3.26):

$$\frac{1}{2}u_1 + \hat{h}_{11}u_1 + \hat{h}_{12}u_2 + \dots + \hat{h}_{1n}u_n = g_{11}q_1 + g_{12}q_2 + \dots + g_{1n}q_n \quad (3.27)$$

haline gelir. Kaynağı 2 sonra da 3, 4, 5 vs. numaralı nodlara kaydırmak suretiyle benzer denklemler elde edilir. Bu işlemi her bir nod için tekrar ederek, her bir nod için ayrı bir denklem yazılır. i kaynak noktasının bulunduğu nodun numarasını, j ise alan noktasındaki nodun numarasını vermek üzere,

$$h_{ij} = \begin{cases} \hat{h}_{ij} + c(p), i = j \\ \hat{h}_{ij}, i \neq j \end{cases} \quad (3.28)$$

tanımlanabilir. Neticede tüm denklemlerden oluşan sistem

$$H u = G q \quad (3.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. $n \times n$ kare matris, H , h_{ij} katsayılarını ve diğer $n \times n$ kare matris olan, G de g_{ij} katsayılarından oluşur. Bu matrisler etki matrisleri ve içlerindeki terimler de etki katsayıları olarak adlandırılırlar. u ve q sırasıyla potansiyel ve akı vektörleridir. Eğer n tane nod ve n tane denklem varsa, toplam bilinmeyen sayısı $2n$ dir. Çözümüne ancak bilinmeyenlerden n tanesinin sınır şartlarıyla verilerek, bilinmeyenlerin sayısını n taneye indirmekle varılır. Sınır şartlarının uygulanması sonucunda u ve q vektörlerinde bazı terimler artık biliniyor olacaklardır. Yapılan yer değiştirmeler neticesinde geri kalan tüm bilinmeyenler sol tarafta toplanarak,

$$A x = B y \quad (3.30)$$

$\mathbf{x}$ vektörünü oluştururlar. Bilinen $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{y}$ nin çarpımı sağ tarafta $\mathbf{z}$ vektörünü oluşturur, denklem (3.30)

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{z} \quad (3.31)$$

haline gelir. Burada $\mathbf{x}$ bilinmeyenlerden oluşan vektörü, $\mathbf{A}$ sistem matrisini ve $\mathbf{z}$ bilinen sağ taraf vektörünü gösterir. Bu lineer denklem sistemi çözüldüğünde bilinmeyen potansiyel ve akı değerleri bulunur. Sonlu elemanlar metodunda simetrik ve band matris oluşmasına karşın, burada tek bölgeli bir model için, kare matris $\mathbf{A}$ tamamen doludur ve hiç bir terimi 0 değildir. Ayrıca simetrik de değildir.

3.6 İÇ NOKTALARDA ÇÖZÜM

Sınırdaki nodlar için potansiyel ve akı değerleri bulunduktan sonra artık hacim içindeki noktalar için de çözüm bulmak mümkündür. Gözönüne alınan hacim içindeki herhangi bir nokta için,

$$u(p) + \int_S q^* u dS = \int_S u^* q dS \quad (3.32)$$

yazılabilir. Burada sınırdaki potansiyel ve akı terimleri olan u ve q bilinmektedir.

3.7 İNTEGRASYON

Denklem (3.26) sınır integral denkleminin en genel ayrık halini vermektedir. Düzgün bir sınır da $c(p)$ 0.5 değerini aldığından, $h_{ij} = 0.5$ ve g_{ij} ise analitik olarak

$$g_{ij} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{L}{2} \right) \left[1 - \ln \left(\frac{L}{2} \right) \right] \quad (3.33)$$

hesaplanır [2]. Burada L eleman boyudur. $i \neq j$ için 4 noktalı düzeltilmiş Gauss kareleme yöntemi kullanılarak,

$$g_{i,j} = \sum_{k=1}^4 w_k u_k^* L \quad (3.34)$$

ve

$$h_{i,j} = \sum_{k=1}^4 w_k q_k^* L \quad (3.35)$$

hesaplanır, burada

$$u_k^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r_k) \quad (3.36)$$

ve

$$q_k^* = -\frac{1}{2\pi r_k} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \quad (3.37)$$

yazılabilir [2]. Burada w_k ağırlık fonksiyonu ve r_k ise alan elemanındaki Gauss noktasının, kaynak noktasına olan uzaklığını göstermektedir.

BÖLÜM 4. HACİM İNTEGRALİ TERİMİ

Poisson denklemi $\nabla^2 u = b$ çözülmeye çalışıldığında sınır integrali denklemi

$$c(p)u(p) + \int_S q^* u dS = \int_S u^* q dS - \int_V u^* b dV \quad (4.1)$$

şeklindeydi. Hacim integrali ifadesi de hesaplandığında Denklem (3.21) matris halinde,

$$H u = G q + b \quad (4.2)$$

elde edilmiş olur. b vektörünü hesaplamak için birkaç yol takip edilebilir.

4.1 NOKTA KAYNAKLAR

Bu yöntem için en iyi örnek nokta kaynak veya nokta kuvvet yaklaşımıdır. Bu durum için herbir kaynak noktası Dirac Delta fonksiyonu ile ifade edilir, böylece

$$Q = Q_n \Delta_n \quad (4.3)$$

yazılabilir [11]. Burada Δ_n n. kaynak noktası üzerindeki Dirac Delta fonksiyonu Q_n de n. kaynağın şiddetidir. Eğer her node kaynak noktası olarak düşünülürse

$$\int_V u^* b dV = -(u_1^* Q_1 + u_2^* Q_2 + \dots + u_n^* Q_n) \quad (4.4)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. M adet kaynak noktası için

$$\int_V u^* b dV = -\sum_{n=1}^M u_n^* Q_n \quad (4.5)$$

şeklinde bir çözüm elde edilir [11].

4.2 HÜCRE (CELL) İNTEGRASYON YÖNTEMİ

Çözüm bölgesini üçgenler veya dörtgenlerden oluşmuş küçük hücrelere bölmeye dayanan bir yöntemdir. Bu hücreler üzerinden, Gauss kareleme tekniği kullanılarak integraller,

$$c(p)u(p) + \int_S q^* u dS = \int_S u^* q dS - \sum_{cell=1}^N \int_{V_{cell}} u^* b dV \quad (4.6)$$

hesaplanır [2]. Denklem (4.6) N adet hücre için yazılmıştır. Bu yöntem kolay uygulanabilir ancak hücre sayısı arttıkça, model hazırlama ve işlemci zamanı nedeniyle, zaman kaybı artar.

4.3 MONTE CARLO YÖNTEMİ

Bu yöntemde V hacmi içinde rastgele N adet farklı noktada f fonksiyonun değerleri hesaplanır. Aranılan X integral değeri

$$X = \int_V f dV \quad (4.7)$$

ise denklem (4.7)

$$X = \frac{V}{N} \sum_{i=1}^N f_i \quad (4.8)$$

şeklinde yaklaşık olarak hesaplanabilir [11]. Burada f_i i. noktadaki fonksiyonun değeridir.

4.4 ÖZEL ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Kolay ve doğru bir tekniktir. Gerçek çözüm, homojen ve özel olmak üzere iki farklı çözümün toplamı olarak

$$u = u_L + u_p \quad (4.9)$$

ifade edilebilir [10]. u_L Laplace denkleminin çözümünü (homojen çözüm) ifade ederken, u_p de Poisson denklemini sağlayan herhangi bir özel çözümü göstermektedir. u ise aranan gerçek çözümdür. Bu yöntemde sınır şartları homojen çözüm için doğru seçilmelidir. Bu çalışmada özel çözüm tekniği kullanılmıştır. Bunların dışında Galerkin vektör yaklaşımı ve ikili karşılık verme (dual reciprocity) yöntemi gibi farklı teknikler de literatürde kullanılmaktadır [11].



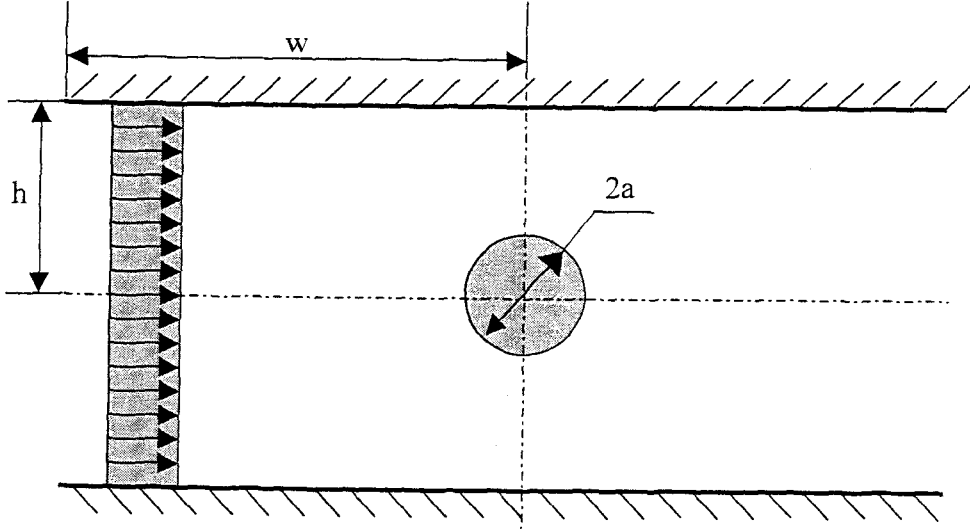
BÖLÜM 5. UYGULAMALAR VE İRDELEME

Bu bölümde anlatılan formülasyon nükleer reaktörlerde ve yakıtlar etrafında görülen çeşitli ısı ve hidrolik problemlere uygulanmıştır. Sırasıyla dikdörtgen bir kanalda silindirik bir çubuğun oluşturduğu kısmi blokaj problemi, bir nükleer yakıt zarfında sıcaklık dağılımı, dikdörtgen bir kanalda aksel akış, içinde enerji üretimi olan kare şeklindeki bir yakıtta sıcaklık dağılımı, dairesel kesitli bir kanalda aksel akış ve son olarak, yakıt demetleri etrafında aksel akış problemleri incelenmiştir. Bulunan sonuçlar analitik ya da literatürde önerilmiş diğer sayısal yöntemlerin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

5.1 NÜKLEER KANALDA SİLİNDİRİK BİR ÇUBUĞUN OLUŞTURDUĞU KISMİ BLOKAJ PROBLEMİ

5.1.1 Problemin Tanıtılması

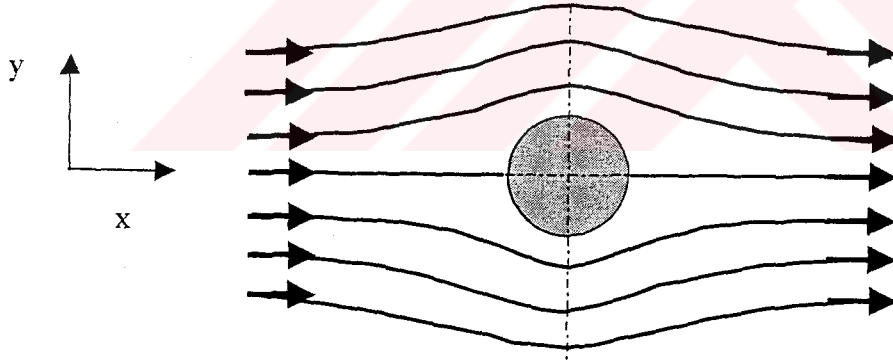
Dikdörtgen bir kanalda akışın ortasına uzun bir silindir yerleştirilmiş ve akışı kısmen bloke ediyor olsun. Böyle bir durum nükleer reaktörde kaza ya da deprem sırasında olası bir durumdur. Şekil 5.1 de ilgili durum gösterilmiştir. Akış kanalın girişinde sabit bir hız profiline sahip, sıkıştırılamaz, dönmesiz (irrotational) ve sürtünmesiz (inviscid) olarak kabul edilsin.



Şekil 5.1. Blokaj probleminin şematik görünümü

Silindir etrafında akışta dönme olmadığı düşünülürse, şekilde görülen silindirin her dört çeyrek daireye ayrılmış parçaları için akış simetrik olur. Silindirin ön ve arka taraflarının orta noktalarında akışın durma noktaları vardır.

Bu kabuller neticesinde silindir etrafında akış çizgileri Şekil 5.2 de gösterildiği gibi olur..



Şekil 5 .2. Akışın silindir etrafındaki akış çizgileri

Bu şekilde bir akış için hız denklemlerinin analitik ifadeleri

$$u_r = U_i \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] \cos\theta \quad (5.1)$$

$$u_{\theta} = -U_i \left[1 + \frac{a^2}{r^2} \right] \sin\theta \quad (5.2)$$

$$u_z = 0 \quad (5.3)$$

olarak verilmektedir [12]. Bu ifadelerde

a = Silindirin yarıçapı,

r = Silindirin merkezinden radyal uzaklık,

θ = X eksenine ile yapılan açı,

U_i = Kanala giriş hızı,

u_r = r deki radyal hız,

u_{θ} = r deki teğetsel hızı göstermektedir.

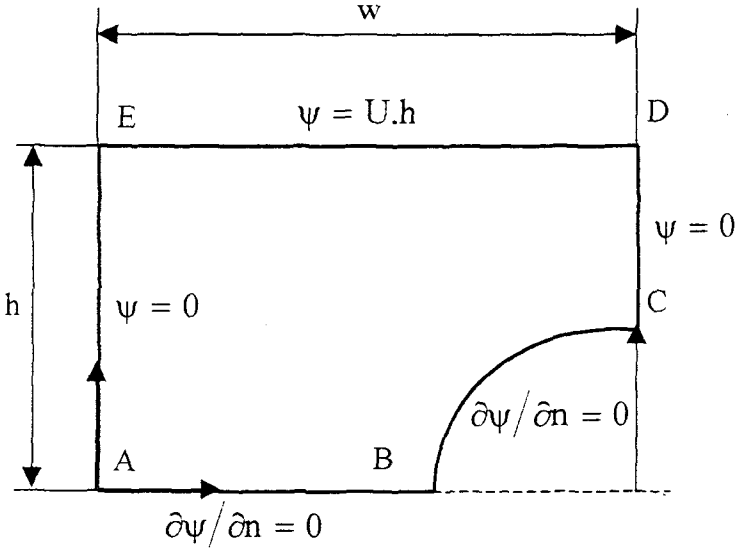
Silindir yüzeyindeki teğetsel hız $r = a$ da

$$u_{\theta} = -2U_i \sin\theta \quad (5.4)$$

olur.

5.1.2 Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması

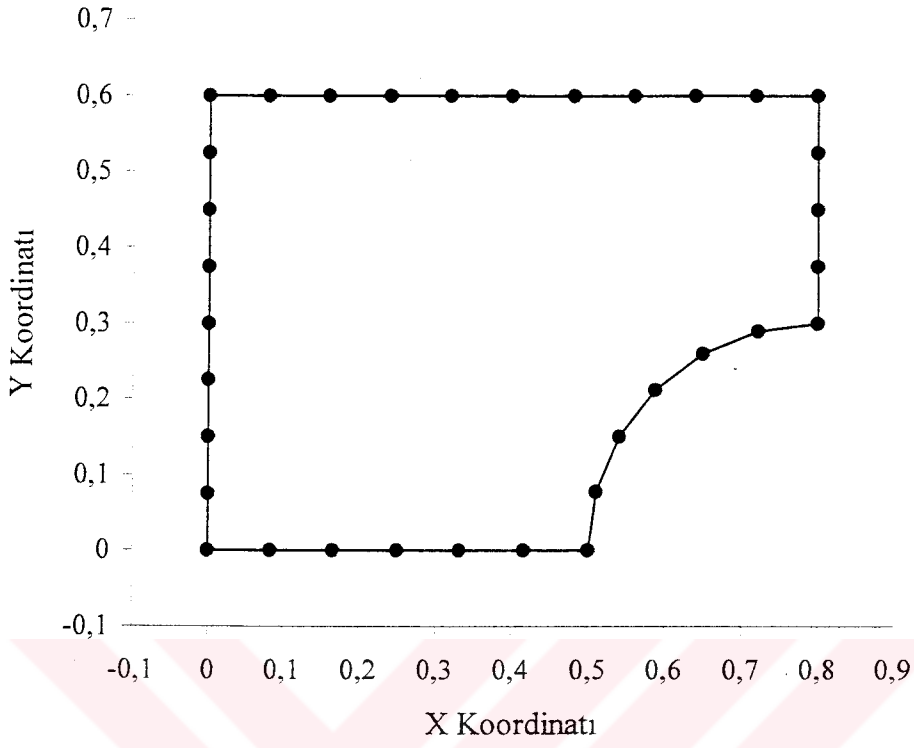
Silindir etrafında akışın simetrik olduğu kabuluyla çözüm bölgesi aşağıdaki gibi seçilmiştir. Çözüm bölgesi ve uygun sınır şartları Şekil 5.3 de gösterilmiştir



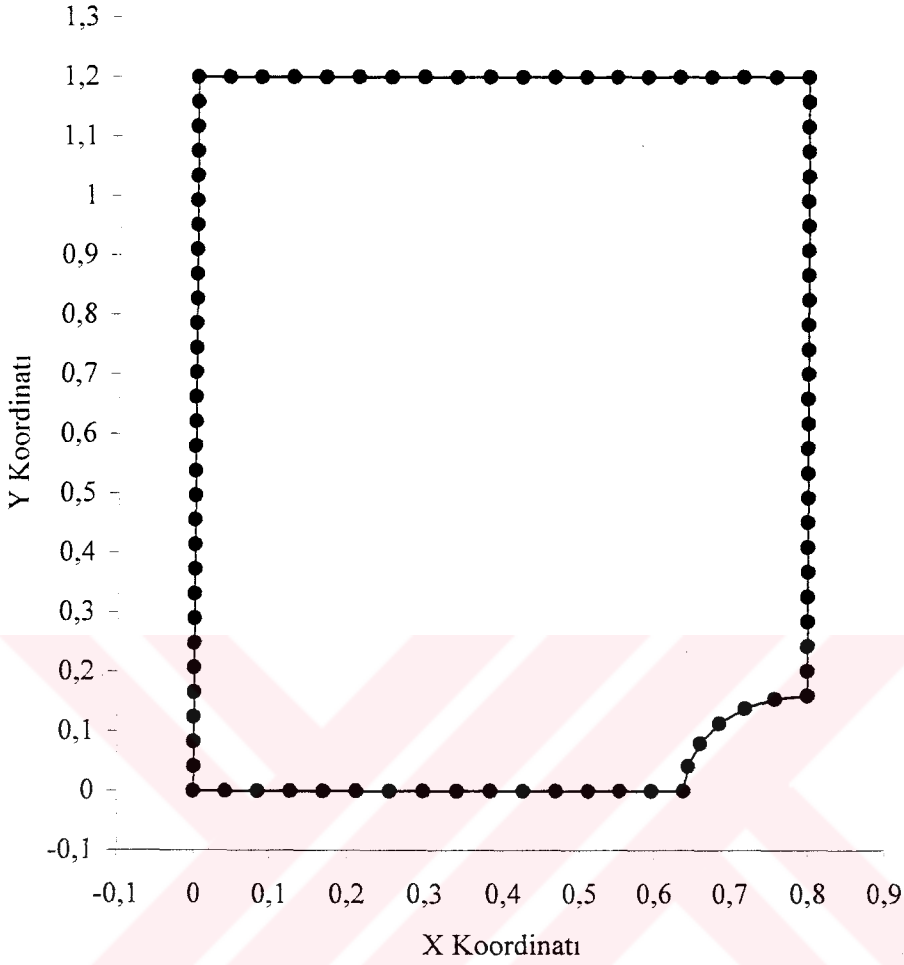
Şekil 5.3. Blokaj problemi için çözüm bölgesi ve uygun sınır şartları

Akım fonksiyonu kanal cidarı boyunca sabit alınmıştır. Benzer olarak alt kenar ve silindir duvarında da fonksiyona sabit değer atanmıştır. Bu değerler keyfi olarak sıfıra eşitlenebilirler [13].

Bu problem için $r = 0.30$ ile $h = 0.6$ ve $r = 0.16$ ile $h = 1.2$ alınarak iki farklı geometri gözönüne alınmıştır. Sırasıyla 34 elemanlı ve 94 elemanlı iki ayrı ağ ile çözüm yapılmıştır. Ağlar Şekil 5.4 ve 5.5 de gösterilmiştir. Her iki ağda da sabit uzunlukta elemanlar kullanılmıştır. Yapılan çalışma neticesinde çözüm bölgesinin farklı yerlerinde elde edilen sonuçlar denklem 3.10 ve 3.11 ile verilen analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

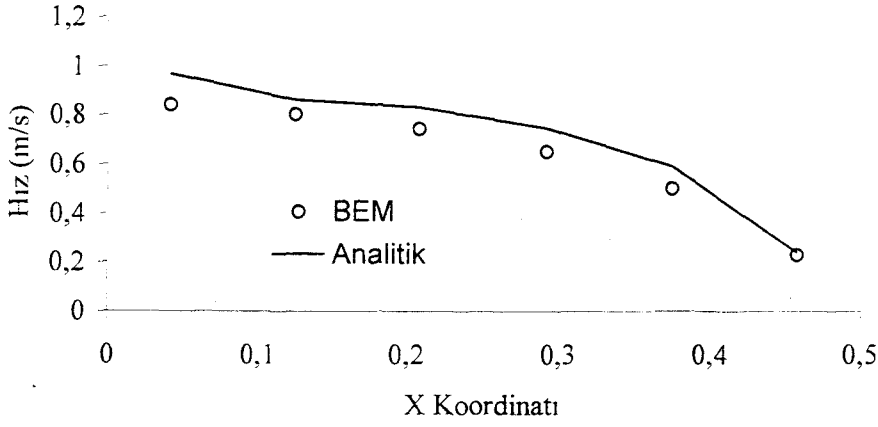


Şekil 5.4 Blokaj probleminin 34 Elemanlı Ağı ($r=0.30$ ve $h=0.6$)

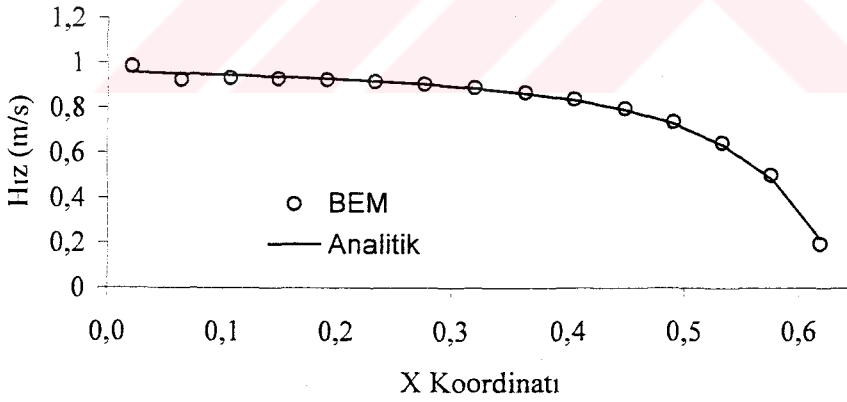


Şekil 5.5 Blokaj probleminin 94 Elemanlı Ağı ($r=0.16$ ve $h=1.2$)

AB boyunca silindire yaklaştıkça radyal hızın düşmesi beklenir. Şekil 5.6 ve 5.7 de bu davranış açıkça gözlenmektedir ve bulunan sonuçlar, analitik çözümle uyum içindedir. Ancak beklenildiği üzere ikinci geometride ($r=0.16$ ve $h=1.2$) 94 elemanlık ağ ile problem daha doğru modellenmektedir. Benzer durum Şekil 5.8 ve 5.9 da da gözlenmektedir. Burada silindir yüzeyindeki teğetsel hızlar BC boyunca çizilmiştir. Analitik sonuçların silindir etrafında serbest akışa ait olduğu ve duvar etkisini içermediği görülmelidir. Bu nedenle, birinci geometrinin analitik sonuçtan daha çok sapması kanal duvarının silindir yüzeyine yakınlığıyla açıklanabilir. Bu sapmanın açının 90° maksimum olması ve B den C ye yaklaştıkça büyümesi beklenen sonuçtur.

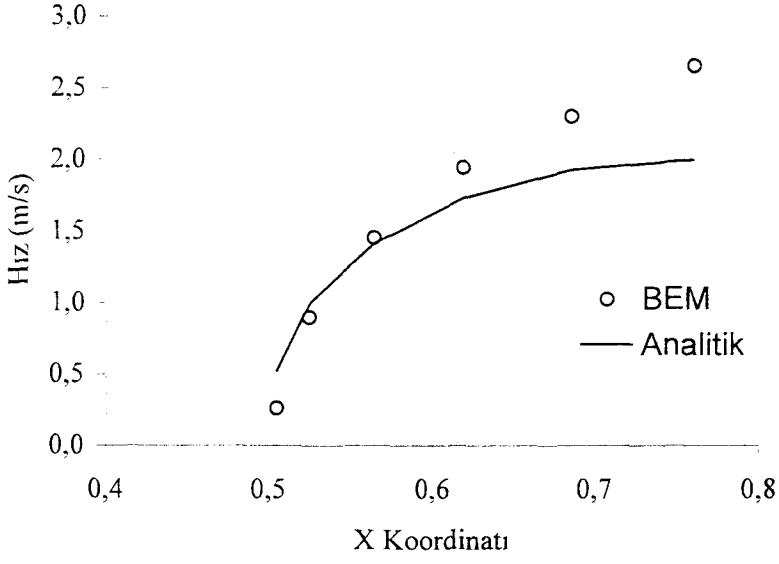


Şekil 5.6 Radyal hızın $r=0.30$ ve $h=0.6$ durumunda x e göre değişimi

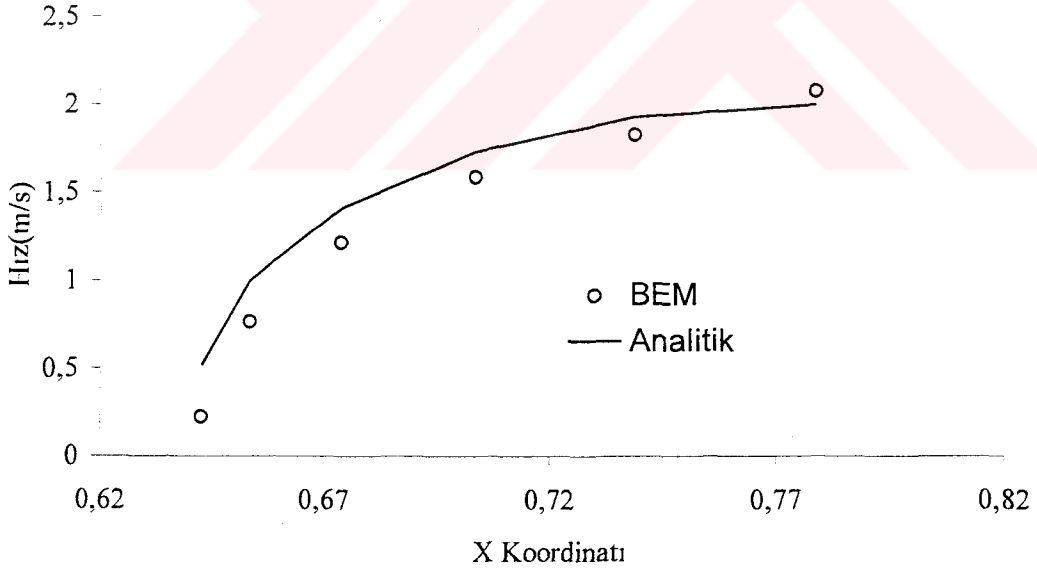


Şekil 5.7 Radyal hızın $r=0.16$ ve $h=1.2$ durumunda x e göre değişimi

BEM = Boundary Element Method = Sınır Elemanı Yöntemi



Şekil 5.8 Silindir duvarındaki hızın x e göre değişimi ($r=0.30$ ve $h=0.6$)



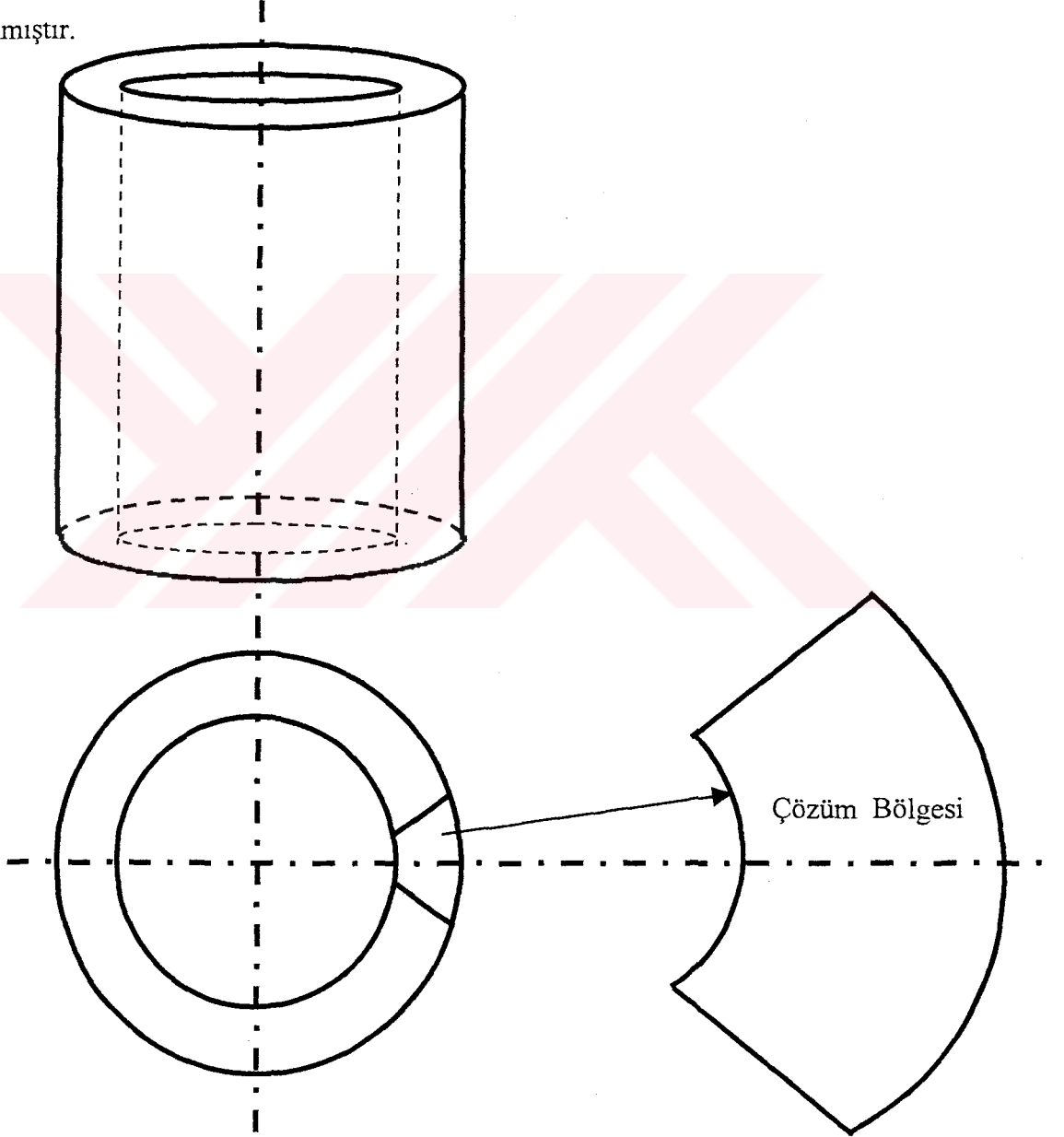
Şekil 5.9 Silindir duvarındaki hızın x e göre değişimi ($r=0.16$ ve $h=1.2$)

BEM = Boundary Element Method = Sınır Elemanı Yöntemi

5.2 BİR NÜKLEER YAKIT ZARFINDAKİ SICAKLIK DAĞILIMI PROBLEMİ

5.2.1 Problemin Tanıtılması

Nükleer yakıt içindeki sıcaklık dağılımının bulunması nükleer reaktör tasarımı ve işletiminde son derece önemlidir [14]. Gözönüne alınan ikinci problemde amaç silindirik bir nükleer yakıtın zarfında sürekli rejimde sıcaklık dağılımının bulunmasıdır. Bu problem Şekil 5.10 de gösterildiği üzere iki boyutlu (r, θ) olarak ele alınmıştır.



Şekil 5.10 Silindir şeklindeki bir nükleer yakıtı çevreleyen zarf malzemesi ve seçilen çözüm bölgesi

Gözönüne alınan bu problem için sıcaklık dağılımının açısal simetrik analitik ifadesi [2],

$$T(r) = T_i + (T_e - T_i) \cdot \frac{\log(r/r_i)}{\log(r_e/r_i)} \quad (5.5)$$

olarak verilir. Burada

$T(r)$: r yarıçapındaki bir noktada sıcaklık değeri ($^{\circ}\text{C}$)

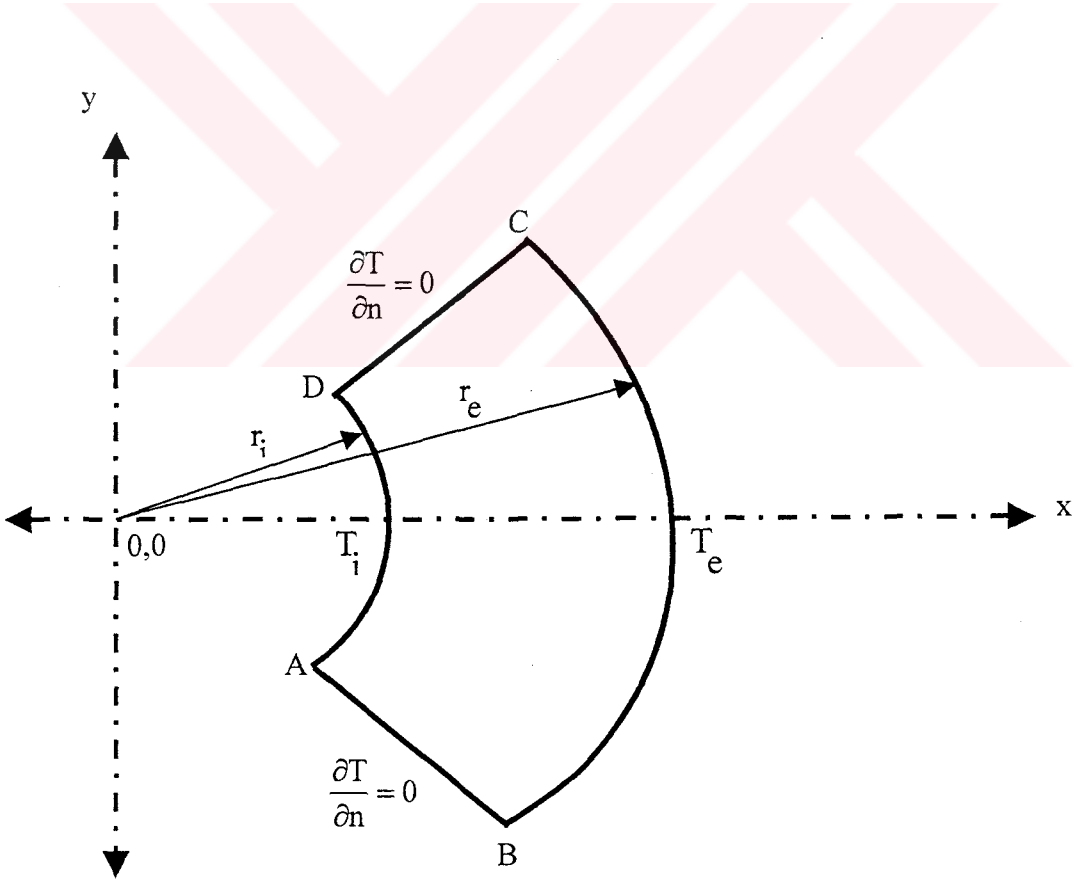
$T(i)$: zarfın iç tarafındaki sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)

$T(e)$: zarfın dış tarafındaki sıcaklık ($^{\circ}\text{C}$)

r_e : zarf malzemesinin dış yarıçapı (mm)

r_i : zarf malzemesinin iç yarıçapı (mm)

5.2.2 Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması

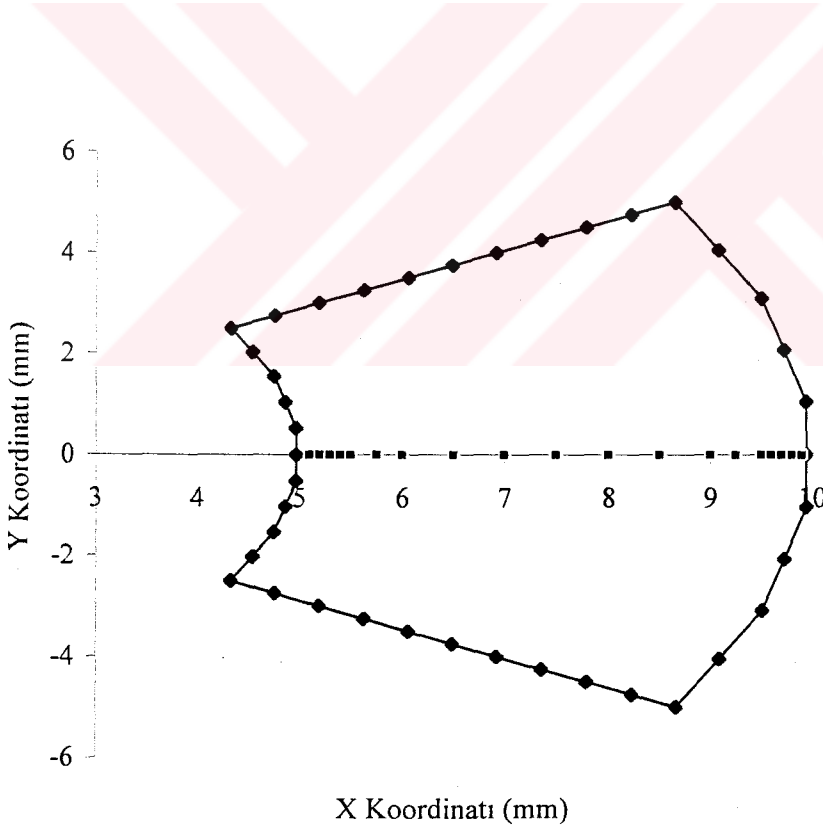


Şekil 5.11 Silindirik yakıt zarfı problem geometrisi ve sınır şartları.

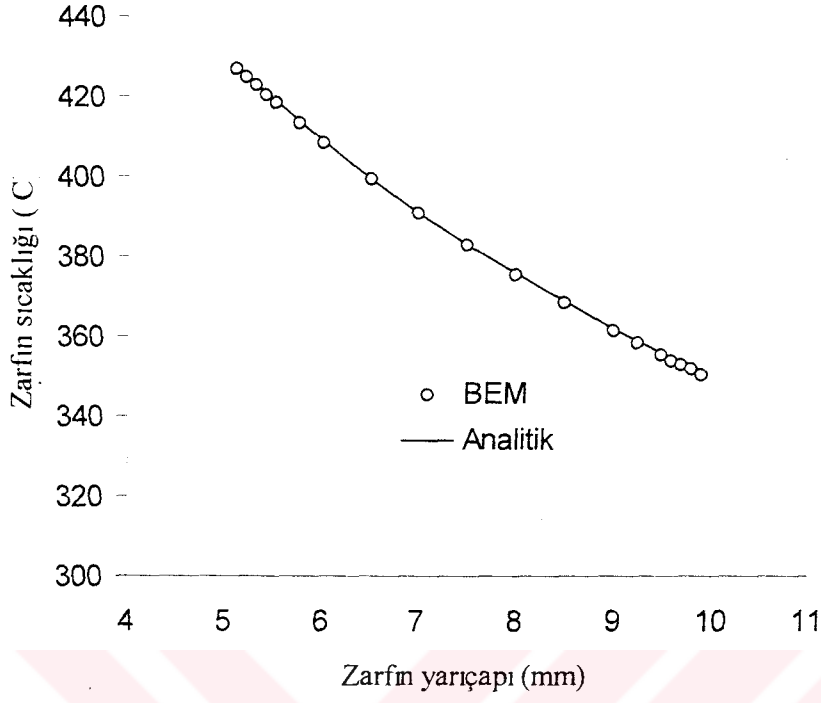
Şekil 5.11 de problem bölgesi ve sınır şartları verilmiştir. $r_i = 5$ mm ve $r_e = 10$ mm, AD boyunca sıcaklık $T_i = 430^{\circ}\text{C}$, BC boyunca sıcaklık $T_e = 350^{\circ}\text{C}$ alınmıştır [14].

AB ve CD boyunca ise simetri koşulu nedeniyle sıcaklık gradyenleri sıfıra eşitlenmiştir.

Problem Şekil 5.12 de gösterilen 40 elemanlı bir ağ ile modellenmiştir. Radyal yönde değişik 19 iç nokta alınmıştır. Bu iç noktalarda elde edilen sonuçlar, analitik değerlerle beraber Şekil 5.13 de çizilmiştir. Sonuçlar birbiriyle uyum içindedir. Aynı sonuçlar Tablo 5.1 de analitik sonuçlarla beraber ve karşılık gelen hata değerleriyle birlikte verilmiştir. Tablodan da görüleceği üzere maksimum hata % 0.15 olarak $r=9.8$ de bulunmuştur. Mühendislikçe kabul edilen hata üst sınırı % 3 düşünülürse bütün hatalar mühendislikçe kabul edilen hata üst sınırlarının çok altındadır. Yüksek hataların sınıra yakın yerlerde geldiği görülebilir. Buralarda integre edilen temel çözüm fonksiyonları, r sıfıra giderken yüksek değerlere ulaşırlar. Bu hataların temel nedenidir. Hataların giderilmesi için integrallerin özel kareleme teknikleriyle hesaplanması gerekir.



Şekil 5.12 Silindirik yakıt zarfı problemine ait ağ ve iç noktalar



Şekil 5.13 Silindir şeklindeki bir nükleer yakıtı çevreleyen zarf malzemesi içinde alınan farklı yarıçaplardaki sıcaklık değerleri.

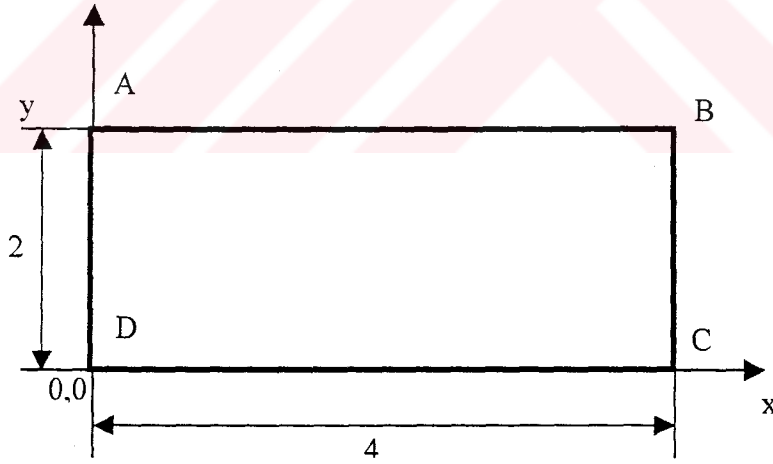
Tablo 5.1 Zarf içi sıcaklıklar ve hata değerleri

Yarıçap(mm)	Analitik sıcaklık (°C)	BEM sıcaklık(°C)	%HATA
5.1	427.71	427.23	0.11
5.2	425.47	425.02	0.11
5.3	423.27	422.85	0.10
5.4	421.12	420.72	0.09
5.5	418.99	418.62	0.09
5.75	413.87	413.52	0.08
6	408.96	408.63	0.08
6.5	399.72	399.41	0.08
7	391.17	390.85	0.08
7.5	383.20	382.87	0.09
8	375.75	375.4	0.09
8.5	368.76	368.38	0.10
9	362.16	361.75	0.11
9.25	358.99	358.57	0.12
9.5	355.92	355.47	0.13
9.6	354.71	354.24	0.13
9.7	353.52	353.02	0.14
9.8	352.33	351.79	0.15
9.9	351.16	350.66	0.14

5.3 DİKDÖRTGEN BİR KANALDA EKSENEL AKIŞ PROBLEMİ

5.3.1 Problemin Tanıtılması

Dairesel olmayan kesitli kanallarda aksel akış yıllardır akışkanlar mekaniğinin ilgi duyduğu ve analitik çözüm aradığı problemler içinde yer alır [14]. Ancak bu tür problemlerin çözümleri matematikçe karmaşık ve seri açılımlarıyla verilen çok da pratik olmayan ifadeler içerir. Dikdörtgen kesitli kanallar ile daha çok nükleer reaktörlerde, plaka tipli yakıt elemanlarının kullanıldığı reaktörlerde karşılaşılır. Gözönüne alınan problemde dikdörtgen kesit için boyut oranı (aspect ratio) 2 olarak seçilmiştir (Şekil 5.14). Koordinat sistemi dikdörtgenin köşe noktasına yerleştirilmiştir.



Şekil 5.14 Dikdörtgensel Kanal

Bu problemin analitik çözümü

$$u(x, y) = \frac{16a^3}{\mu\pi^3} \left(-\frac{dp}{dz} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-2)/2} \left(1 - \frac{\cosh(izy/2a)}{\cosh(i\pi b/2a)} \right) \frac{\cos(i\pi x/2a)}{i^3} \quad (5.6)$$

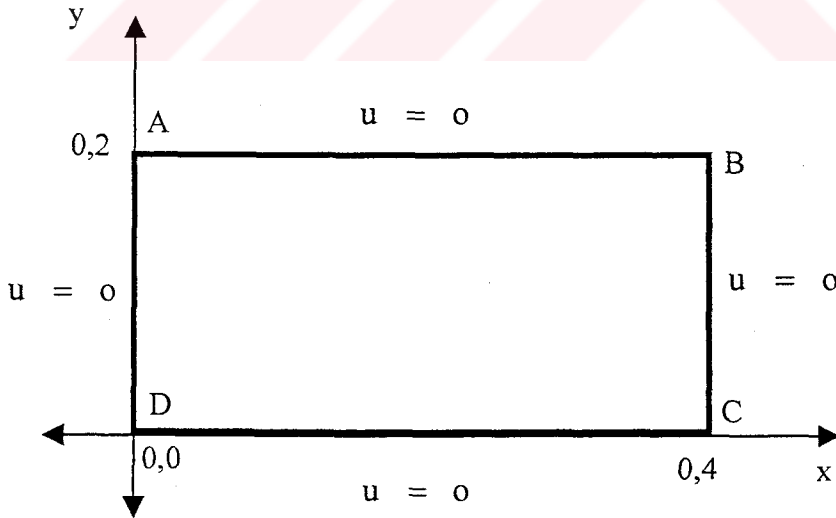
denklemleriyle verilmektedir. [12]. Burada a ve b sırasıyla dikdörtgenin yatay ve düşey yarı genişlikleridir. Basınç gradyeni $\frac{dp}{dz} = 1$, dinamik viskozite $\mu=1$ alınmıştır.

5.3.2 Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması

Dikdörtgen kanal bir bütün olarak modellenmiştir. Bundaki temel sebep dikdörtgenin orta noktasına göre çözümlerin simetrik gelip gelmediğinin kontrolüdür. Sınır koşulu olarak, kanalın bütün yüzeyleri boyunca akışkan hızı sıfıra eşitlenmiştir (Şekil 5.15).

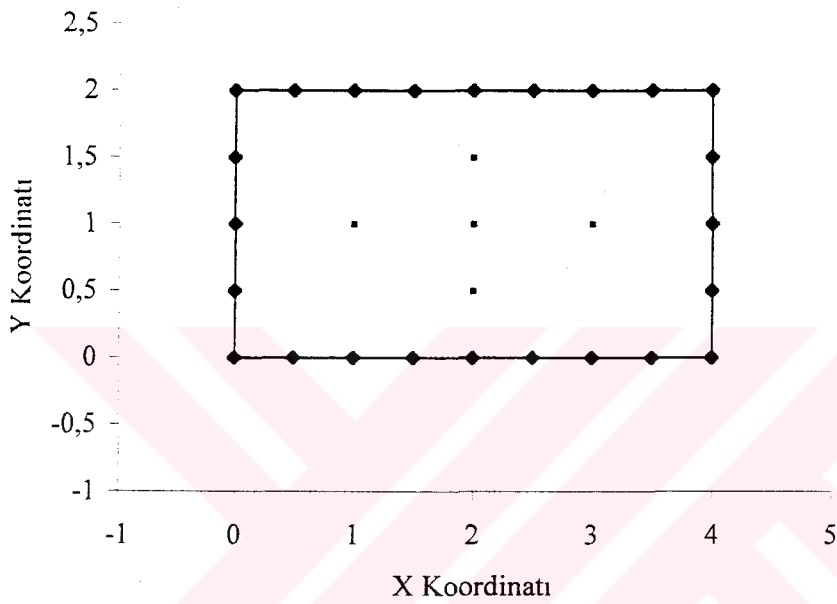
Problem 24 elemanlı, sabit uzunluktan oluşan bir ağ ile modellenmiştir (Şekil 5.16). 4 nokta birbirinin simetriği olacak şekilde ve biri de kanalın tam orta noktasında yer almak üzere, toplam 5 iç nokta seçilmiştir.

Denklem (2.15) ile verilen diferansiyel denklem için özel çözüm $u_p = \frac{1}{2}x^2$ seçilmiştir. Homojen çözüme ait sınır şartları özel çözüme göre düzenlenmiştir. Yani AB, BC ve CD boyunca $u_L = -\frac{1}{2}x^2$ alınmıştır. AD boyunca $u_L = 0$ dir.



Şekil 5.15 Dikdörtgen kanal için çözüm bölgesi ve sınır şartları

İç noktalarda elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlar ile birlikte Tablo 4.2 de verilmiştir. Tablodaki ilk dört analitik hız değeri, analitik sonuçlardan [15], son değer ise ve denklem (5.6) de sadece 2 terim alınarak hesaplanmıştır. Bütün hata değerleri % 3 ün altında gelmiştir. En büyük hata olarak görülen %1.791 değeri, bu noktada analitik sonucun seri açılımında sadece iki terim alınmasından kaynaklanmaktadır. Daha fazla terim açılmasıyla analitik sonuç, bu noktadaki sınır elemanlar yöntemi sonucundan çok farklı olmayacaktır.



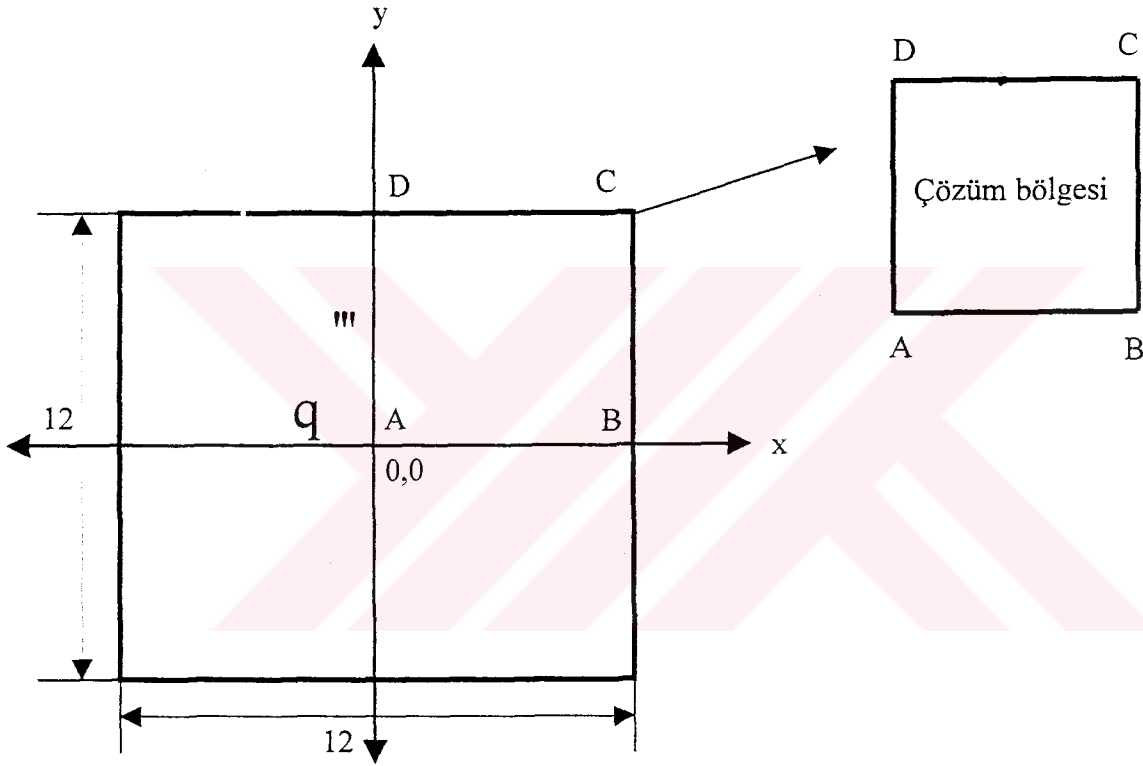
Şekil 5.16 Dikdörtgen kanal problemine ait ağ ve iç noktalar

Tablo 5.2 Kanal içi eksenel hız ve hata değerleri

X Koordinatı	Y Koordinatı	Hız analitik (m/s)	Hız BEM (m/s)	% Hata
1.0	1.0	0.392	0.393	0.319
3.0	1.0	0.392	0.393	0.383
2.0	0.5	0.345	0.349	1.043
2.0	1.5	0.345	0.349	1.043
2.0	1.0	0.469	0.461	1.791

5.4 İÇİNDE ENERJİ ÜRETİMİ OLAN KARE ŞEKLİNDEKİ BİR NÜKLEER YAKITTAKİ SICAKLIK DAĞILIMI PROBLEMİ

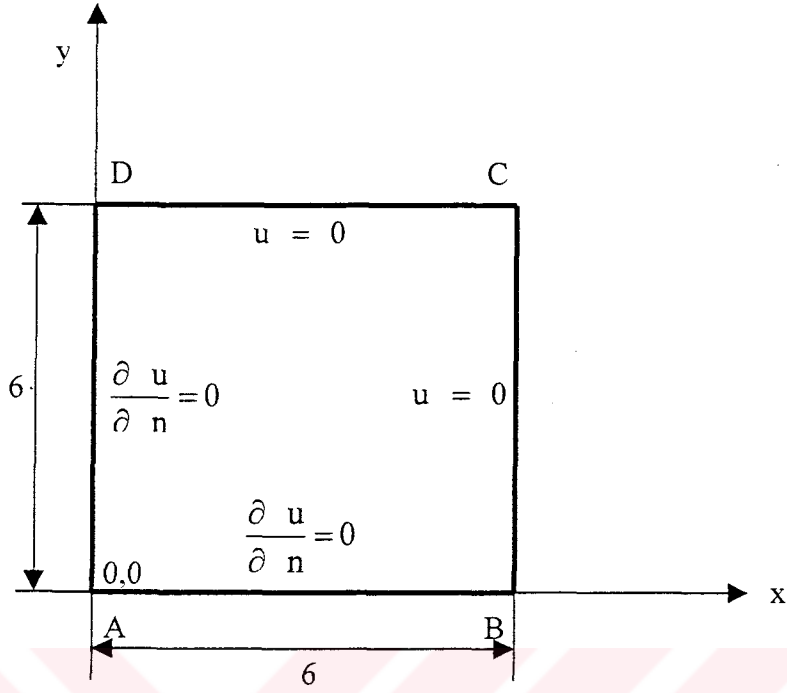
5.4.1 Problemin Tanıtılması



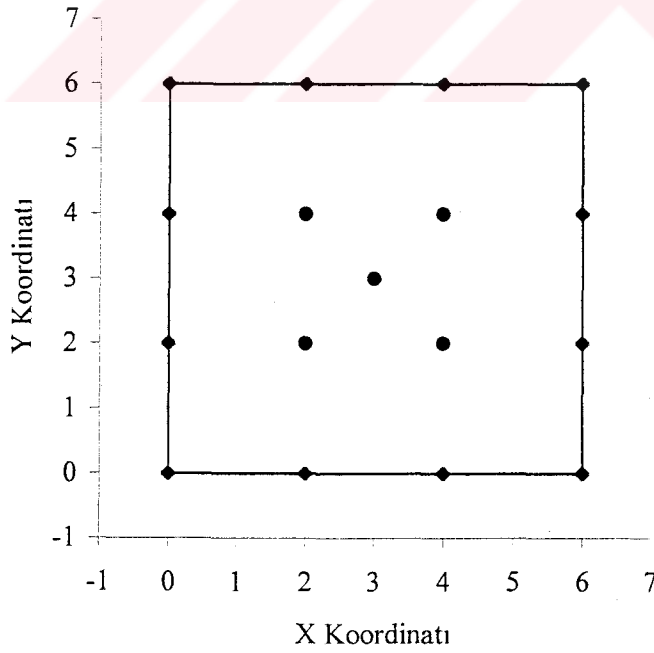
Şekil 5.17 Kare şeklindeki bir nükleer yakıtın şekli ve seçilen çözüm bölgesi

Bu problemde içinde sürekli rejimde enerji üretimi olan kare şeklinde bir nükleer yakıt incelenmiştir. Yakıtın sadece dörtte birlik kısmı ele alınmıştır. Yakıt içinde 5 iç nokta alınmıştır. 12 adet sabit uzunlukta sınır elemanından oluşmuş ağ kullanılmıştır

5.4.2 Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması



Şekil 5.18 İçinde enerji üretimi olan kare şeklindeki bir nükleer yakıt için çözüm bölgesi ve sınır şartları



Şekil 5.19 İçinde enerji üretimi olan kare yakıt problemine ait ağ ve iç noktalar

Tablo 5.3 İçinde enerji üretimi olan kare şeklindeki nükleer yakıt için sıcaklıklar ve hata değerleri

X Koordinatı	Y Koordinatı	Sıcaklık analitik (C)	Sıcaklık BEM (C)	%HATA
2.0	2.0	8.690	8.712	0.253
4.0	2.0	5.748	5.796	0.835
3.0	3.0	6.522	6.554	0.491
2.0	4.0	5.748	5.760	0.214
4.0	4.0	3.928	3.979	1.298
2.0	0.0	9.588	9.617	0.302
4.0	0.0	6.286	6.368	1.304

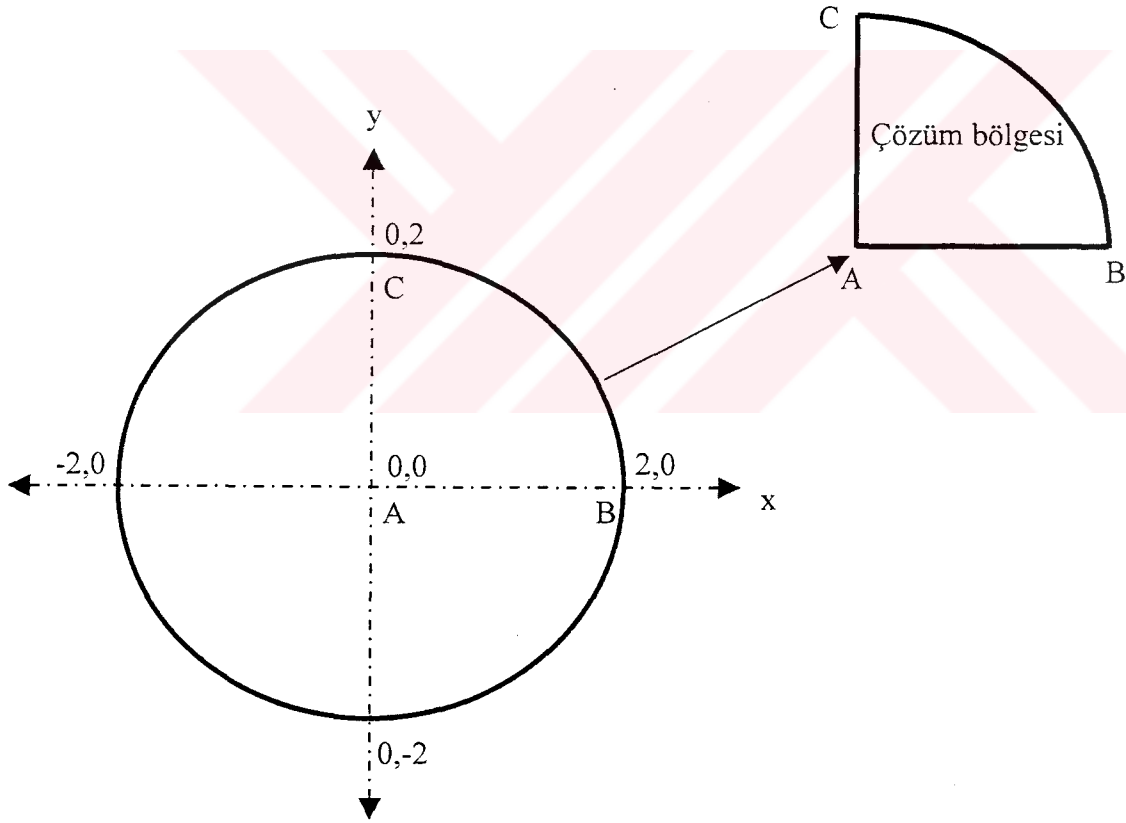
Elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlar ile uyumludur. Hatalar kabul edilebilir seviyededir. En büyük hata %1.304 ile bir sınır noktasında gelmektedir. İç noktaların, sınır noktalara göre hassas çözümler verdiği literatürde bilinmektedir [1].

5.5 SİLİNDİRİK BİR KANAL İÇİNDEKİ EKSENEL AKIŞIN HIZ DAĞILIMI PROBLEMİ

5.5.1 Problemin Tanıtılması

Silindirik bir kanalda oturmuş profile sahip laminar sıvı akışı problemi gözönüne alınmıştır. Böyle bir problem basit boru içindeki akıştan, içinden soğutucu akışkan geçen nükleer yakıta kadar birçok uygulama alanına sahiptir.

Problem geometrisi, boyutları ve gözönüne alınan çözüm bölgesi Şekil 5.20 de verilmiştir.



Şekil 5.20 Silindirik bir kanalda aksenal akışa ait geometri ve seçilen çözüm bölgesi

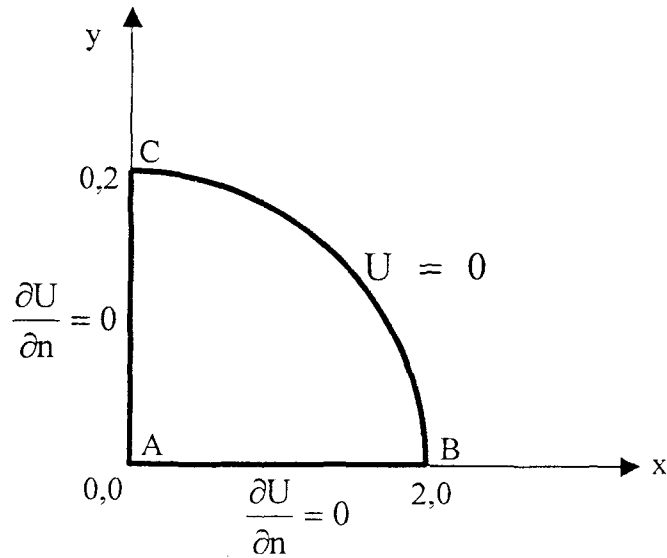
Bu problemin analitik ifadesi

$$u(r) = \frac{-\partial P / \partial z}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \quad (5.7)$$

olarak verilmiştir [12]. Burada r_0 silindirin yarıçapıdır.

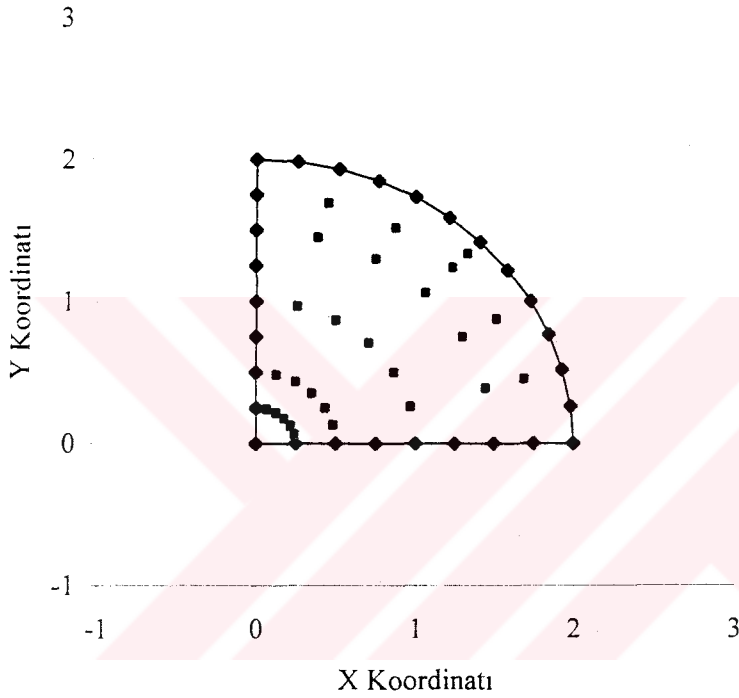
5.5.2 Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması

Problemin açısı simetrisi dolayısıyla, çeyrek bölge gözönüne alınmıştır. Sınır şartları Şekil 5.21 de gösterilmiştir. Denklem (2.15) ile verilen diferansiyel denklem için özel çözüm yine $u_p = \frac{1}{2}x^2$ seçilmiştir. Homojen çözüme ait sınır şartları özel çözüme göre düzenlenmiştir. Yani BC boyunca $u_L = -\frac{1}{2}x^2$, AB boyunca $\frac{\partial u_L}{\partial n} = 0$ ve AC boyunca da $\frac{\partial u_L}{\partial n} = -x$ girilmiştir.



Şekil 5.21 Silindirik bir kanalda eksenel akış için çözüm bölgesi ve sınır şartları

Problem 28 elemandan oluşmuş bir ağ ile çözülmüştür (Şekil 5.22). 26 iç nokta seçilmiştir. Basınç gradyeni $\frac{dp}{dz} = 1$. dinamik vizkozite $\mu=1$ alınmıştır. Elde edilen sonuçlar, analitik hesaplanmış değerlerle birlikte Tablo 5.4A ve 5.4B de gösterilmiştir. Tablolar incelendiğinde, yüksek hata değerleri yine sınıra yakın yerlerde gelmektedir.



Şekil 5.22 Silindirik bir kanalda aksenal akış problemine ait ağ ve iç noktalar

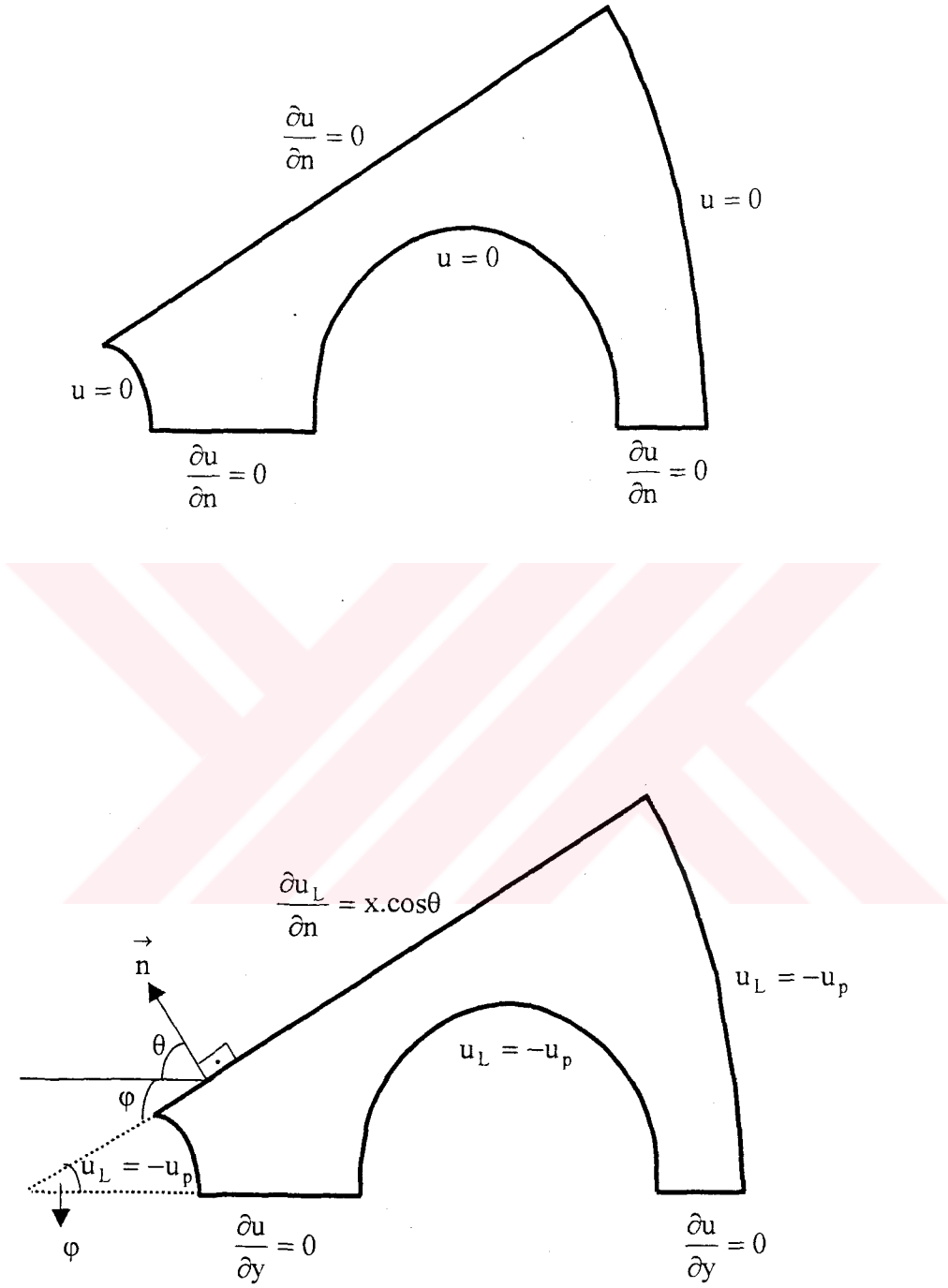
Tablo 5.4.A Silindirik bir kanalda aksenal akış için hız ve hata değerleri

Yarıçap(mm)	x(mm)	y(mm)	Hız(m/s) analitik	Hız(m/s) BEM	% Hata
0.25	0.242	0.0647	0.9844	0.9858	0.1487
0.25	0.217	0.125	0.9844	0.9854	0.1004
0.25	0.177	0.1768	0.9844	0.9853	0.0910
0.25	0.125	0.2165	0.9844	0.9851	0.0744
0.25	0.065	0.2415	0.9844	0.9847	0.0367
0.5	0.483	0.1294	0.9375	0.9389	0.1552
0.5	0.433	0.25	0.9375	0.9386	0.1232
0.5	0.354	0.3536	0.9375	0.9382	0.0729
0.5	0.250	0.433	0.9375	0.9379	0.0405
0.5	0.129	0.483	0.9375	0.9376	0.0093
1	0.707	0.70711	0.75	0.7505	0.0664
1	0.866	0.5	0.75	0.7514	0.1896
1	0.500	0.866	0.75	0.7496	0.0546
1	0.966	0.2588	0.75	0.75231	0.3091
1	0.259	0.9659	0.75	0.7487	0.1665
1.5	1.449	0.3882	0.4375	0.4405	0.6958
1.5	1.299	0.75	0.4375	0.4389	0.3198
1.5	1.061	1.0607	0.4375	0.4377	0.0361
1.5	0.750	1.299	0.4375	0.4366	0.2103
1.5	0.388	1.4489	0.4375	0.4350	0.5622
1.75	1.690	0.4529	0.2344	0.2371	1.1515

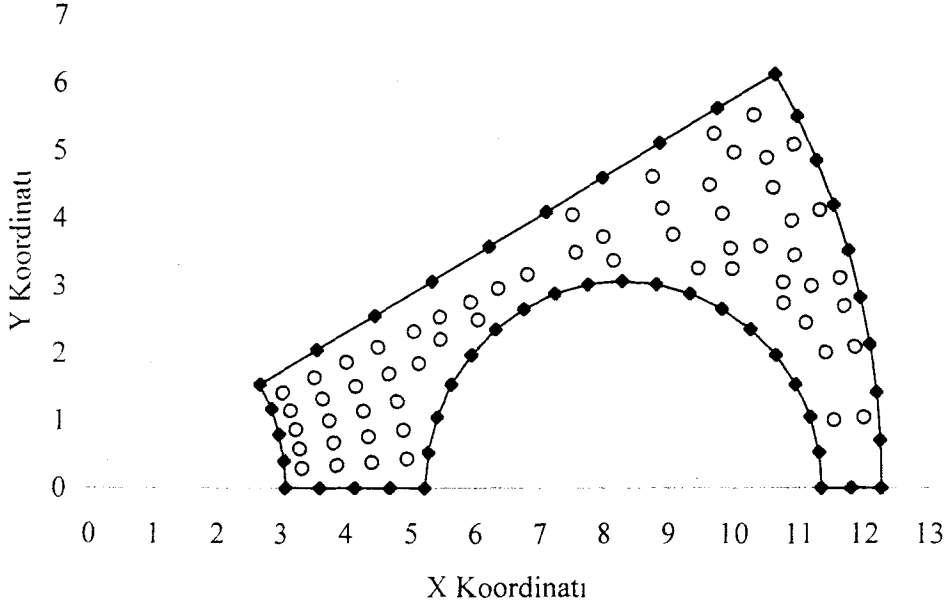
Tablo 5.4.B Silindirik bir kanalda aksenal akış için hız ve hata değerleri

Yarıçap(mm)	x(mm)	y(mm)	Hız(m/s) analitik	Hız(m/s) BEM	% Hata
1.75	1.516	0.875	0.2344	0.2356	0.5354
1.75	1.237	1.2374	0.2344	0.2345	0.06213
1.75	0.875	1.5155	0.2344	0.2334	0.4085
1.75	0.453	1.6904	0.2344	0.2319	1.0386
1.8856	1.333	1.3333	0.1111	0.1112	0.1146

5.6.2 Sınır Şartlarının Belirlenmesi ve Ağın Oluşturulması

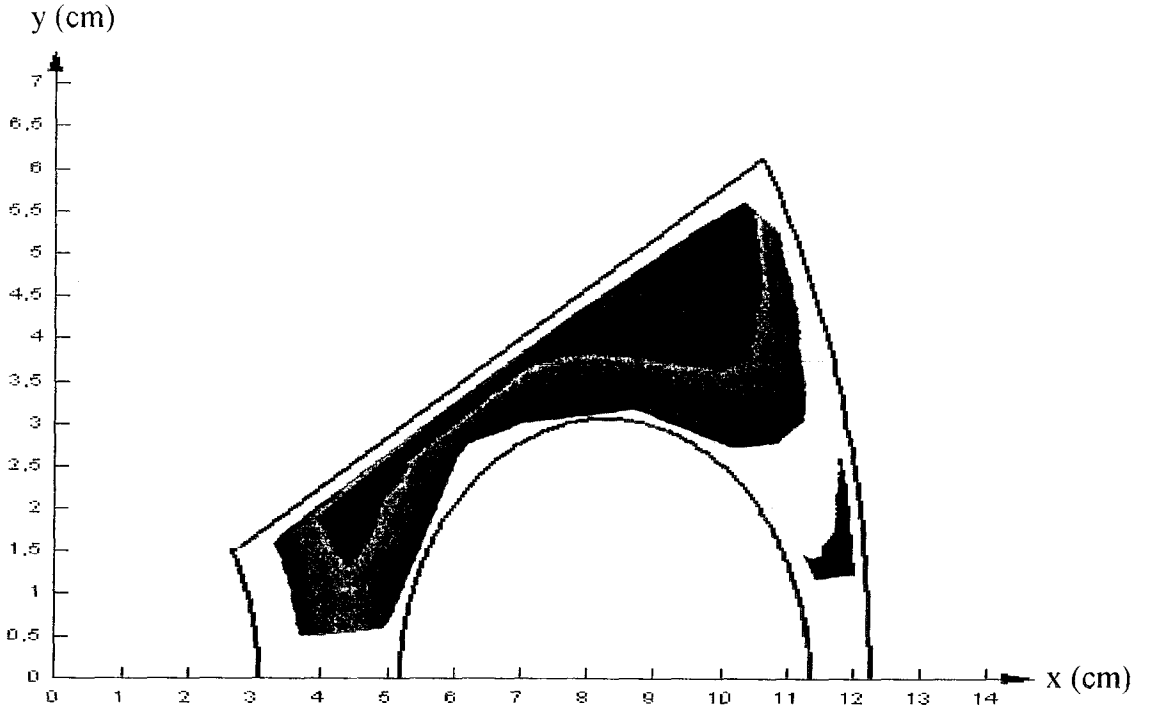


Şekil 5.24 Silindirik bir kanalda yakıt demeti için gerçek ve homojen probleme ait sınır koşulları

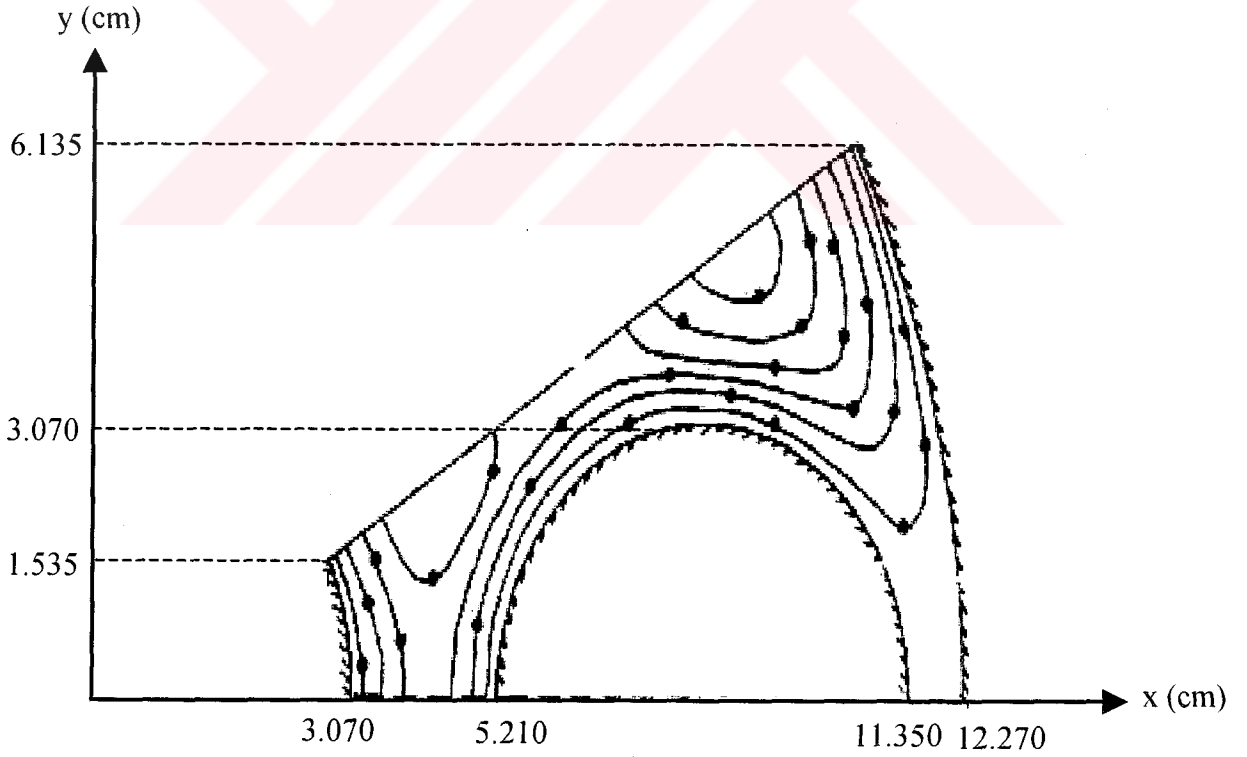


Şekil 5.25 Silindirik bir kanalda yakıt demeti probleminin meshi ve iç noktaları

Problem 46 elemandan oluşmuş bir ağ ile çözülmüştür (Şekil 5.25). 60 iç nokta değişik yerlerde seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar, ekteki tabloda verilmiştir. Ayrıca iç noktalardaki çözüm, eş hız eğrileri halinde Şekil.5.26 da gösterilmiştir. Burada kırmızı renk en düşük hızı, pembe ise en yükseği göstermektedir. Aynı problemin Khader [15] tarafından yüzey integrali yöntemiyle çözümü Şekil 5.27 de verilmiştir. Eş hız eğrileri kalitatif olarak benzerdir.



Şekil 5.26 Silindirik bir kanalda yakıtlar arasındaki akışın eşhız (isovels) eğrileri



Şekil 5.27 Silindirik bir kanalda yakıtlar arasındaki akış için Khader'in elde ettiği eşhız (isovels) eğrileri [15].

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada nükleer mühendislikte sık karşılaşılan ısı ve hidrolik problemlerin sınır elemanlar yöntemi ile çözümleri yapılmıştır. Sabit elemanlar kullanılarak yapılan formülasyonlar, özel çözüm metodu ile birleştirilmiş, ısı iletimi ve akışkanlar mekaniği problemlerine uygulanmıştır.

Kullanılan yöntem halihazırda sadece sınır terimleri içerdiğinden, analitik yöntemlere, sonlu elemanlar ve sonlu farklar gibi sayısal yöntemlere göre önemli avantajlara sahiptir. Bunlar sırasıyla şöyle özetlenebilir:

Transformasyonlar ve sonsuz seri açılımlarıyla ifade edilen karmaşık analitik ifadelere kıyasla çözüm direkt (dönüşüm içermez) ve basittir. Üretilen çözümler, diğer sayısal yöntemleri test etmek için kullanılabilir.

Karmaşık geometrilere uygulanmasında problem teşkil etmez. Yalnızca yöntem geometrinin hızlı değiştiği, ya da değişkenlerin yüksek değişim hızlarına sahip oldukları noktalarda fazla elemanın kullanılmasını gerektirir. Çözüm için bir başka yöntem de eleman üzerinde daha yüksek dereceden şekil fonksiyonları kullanılmasıdır.

Sonlu farklar ya da sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi iç bölgeyi ayrıştırmaya gerek yoktur. Çözüm bölgesi hücrelere bölünmediğinden problem geometrisi bir boyut azalmaktadır. Ağ hazırlama da daha az zaman almaktadır.

Gelecekte bu yöntemi kullanacak araştırmacılara:

Uygun özel çözümün seçilmesine ve sınır koşullarının değiştirilmesine dikkat edilmelidir.

Bu çalışmada b nin sabit olduğu problemler çözülmüştür, b' nin konum bağımlı olduğu problemlere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Becker, A. A.**, 1992. The Boundary Element Method in Engineering, A complete course, Department of Mechanical Engineering, University Of Nottingham
- [2] **El-Zafrany, A.**, 1993. Techniques of the Boundary Element Method , Computational Mechanics Group, Cranfield Institute of Technology, Bedford.
- [3] **Rizzo, F. J.**, 1967. An Integral Equation Approach to Boundary Value Problem of Classical Elastostatics, *Q. Appl. Math.*, **25**, pp. 83-95
- [4] **Cruse, T. A.**, 1969. Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics, *Int. J. Solids and Structures*, **5**, pp. 1259-1274
- [5] **Aydin, M.**, 1996. Boundary Integration Equation Analysis of Slow Viscous Fluid Flows with Applications to Nuclear Engineering, Transfer Report, Imperial College, London.
- [6] **Street, R. L., Watters, G. Z., and Vennard J. K.**, 1996. Elementary Fluid Mechanics, John Wiley & Sons.
- [7] **Anderson, D. A., Tannehill J. C., and Pletcher, R. H.**, 1984. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences.
- [8] **Allen Jr., T., Ditsworth R. L.**, 1972. Fluid Mechanics, Mc Graw-Hill Company.
- [9] **Sprackling, M.**, 1993. Heat and Thermodynamics, Macmillan College Work Out Series, The Macmillan Press Ltd.
- [10] **Travelyan, J.**, 1994. Boundary Element Method for Engineers, Computational Mechanics Inc., Boston, USA.