

66419

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ANİZOTROP CİSİMLERDE
YER DEĞİŞTİRME SÜREKSİZLİĞİ YÖNTEMİ**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Bahattin KİMENÇE

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
KOORDİNASYON MERKEZİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 Aralık 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. M. Ertan ERGÜVEN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan BODUROĞLU

Prof. Dr. Aykut BARKA

Prof. Dr. Gülay AŞKAR

Prof. Dr. Tuncer ÇELİK

[Signature] 23.06.1997

[Signature] 23.06.1997

[Signature] 25/06/1997

[Signature] 23.6.1997

[Signature] 24.6.1997

HAZİRAN 1997

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında, yardımlarını hiç bir zaman esirgemeyen ve olumlu eleştirileriyle beni teşvik eden Sayın Hocam Prof. Dr. M. Ertay ERGÜVEN'e en içten duygularıyla teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Yaptığım çalışmayı anlayıp, benimseyip bana ve çalışmama inanarak çeşitli şekillerde destek veren Sayın Arş. Gör. Dr. Abdullah GEDİKLİ'ye teşekkür ederim.

Ayrıca anlayış ve sabırla gerekli çalışma ortamının oluşturulmasında yoğun çaba gösteren ailemin bütün fertlerine şükranlarımı sunarım.

27 Aralık 1996

Bahattin KİMENÇE



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER	4
2.1. Genelleştirilmiş Hooke Kanunları	4
2.2. Düzlem Gerilme ve Düzlem Şekil Değiştirme Hali	6
2.2.1. Düzlem gerilme hali	7
2.2.2. Düzlem şekil değiştirme hali	8
2.3. Enine İzotrop ve İzotrop Malzeme	9
2.4. Yer Değiştirme Potansiyelleri	11
2.5. Temel Çözümler	15
2.5.1. Sonsuz düzlem izotrop ortamda temel çözümler	15
2.5.2. Yarı-sonsuz düzlem izotrop ortamda temel çözümler	18
2.5.3. Sonsuz düzlem anizotrop ortamda temel çözümler	20
2.5.4. Yarı-sonsuz düzlem anizotrop ortamda temel çözümler	21
BÖLÜM 3. SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ	24
3.1. İndirekt Sınır Eleman Yöntem	24
3.1.1. Fiktif gerilme yöntemi	25
3.1.2. Yer değiştirme süreksizlikleri yöntemi	28
3.1.2.1. Normal doğrultudaki yer değiştirme süreksizliği	30
3.1.2.2. Kayma yer değiştirme süreksizliği	32
3.2. Sayısal Hesap Yöntemi	34
3.3. Sayısal Örnekler	39
3.3.1. Sonsuz düzlemde dairesel boşluk	39
3.3.2. Yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluk	41

BÖLÜM 4. İNDİREKT SINIR ELEMANLARDA ÖZEL UYGULAMALAR	43
4.1. İki Malzemeli Bölge	43
4.2. Değme Elemanı	45
4.3. Mohr Coulomb Elemanı	48
4.4. Sayısal Örnekler	51
4.4.1. Sonsuz düzlemde iki malzemeli bölge	51
4.4.2. Yarı-sonsuz düzlemde iki malzemeli bölge	53
4.4.3. Yarı-sonsuz düzlemde çatlak fay etkileşimi	55
4.4.4. Sonsuz düzlemde boşluk fay etkileşimi	56
BÖLÜM 5. ANİZOTROP ORTAMDA İNDİREKT SINIR ELEMAN YÖNTEMİ	58
5.1. Fiktif Gerilme Yöntemi	58
5.2. Yer Değiştirme Süreksizliği Yöntemi	61
5.2.1. Normal doğrultudaki yer değiştirme süreksizliği	68
5.2.2. Kayma yer değiştirme süreksizliği	70
5.3. Sayısal Örnekler	73
5.3.1. Sonsuz düzlemde dairesel boşluk	73
5.3.2. Sonsuz düzlemde kare boşluk	75
5.3.3. Yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluk	77
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR	82
ÖZGEÇMİŞ	90

SEMBOL LİSTESİ

a	: Doğrusal sınır eleman yarı uzunluğu
c	: Mohr-Coulomb elemanında kohezyon katsayısı
C_{ijkl}	: Cauchy elastisite tansörü
c_{ij}	: Voigt elastik sabitleri
D_x, D_y	: Yerdeğiştirme süreksizlikleri
E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}	: Elastisite modülleri
E	: İzotrop malzemede elastisite modülü
E_o	: Değme elemanda elastisite modülü
F_x, F_y	: Tekil kuvvetler
G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}	: Kayma modülleri
G	: İzotrop malzemede kayma modülü
G_o	: Değme elemanda kayma modülü
h	: Değme elemanda eleman kalınlığı
K_s, K_n	: Değme elemanda yay katsayıları
P_x, P_y	: Üniform yayılı yük
S_{ijk}	: Gerilme tesir fonksiyonları
s, n	: Elemanın teğetsel ve normal koordinatları
s_{ij}	: Elastik katsayılar.
T_{ik}	: Yüzey gerilmeleri için tesir fonksiyonları
t_i	: Yüzey gerilmeleri
u_x, u_y	: Yer değiştirme bileşenleri

U_{ij}	: Yer değiştirme tesir fonksiyonlar
$\mathbf{x}$	: Alan noktası
x, y	: Global koordinatlar
$\bar{x}, \bar{y}$	: Lokal koordinatlar
β	: Global koordinatlar ile lokal koordinatlar arasındaki açı
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}$	: Şekil değiştirme bileşenleri
ϕ_x, ϕ_y	: Fiktif değerler
θ	: Kaynak noktası ile alan noktası arasındaki doğrunun açısı
σ_{ij}	: Gerilme bileşenleri
μ	:Mohr-Coulomb elemanında sşrtşnme açısı
$\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{zx}$	: Poisson oranları
ν	:İzotrop malzemede Poisson oranı
ξ	: Kaynak noktası
ψ_i	:Birim hacimdeki kştle kuvveti

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1. Enine izotrop malzeme.	10
Şekil 2.2. Sonsuz düzlemde tekil kuvvetler.	16
Şekil 2.3. Yarı-sonsuz düzlemde tekil kuvvetler.	18
Şekil 3.1. Kelvin çözümünün integrali.	27
Şekil 3.2. Bir elemanın uç noktalarındaki açılar.	27
Şekil 3.3. Yer değiştirme süreksizlikleri.	28
Şekil 3.4. Zıt yönlü iki kuvvet etkisindeki eleman.	29
Şekil 3.5. Düşey doğrultuda eksenel şekil değiştirme için gerilme durumu.	30
Şekil 3.6. Kayma şekil değiştirmesi için gerilme durumu.	32
Şekil 3.7. Sonsuz düzlemde kapalı bölge.	35
Şekil 3.8. Sonsuz düzlemde dairesel boşluk.	39
Şekil 3.9. Boşluk sınırında teğetsel ve normal doğrultudaki yer değiştirmeler.	39
Şekil 3.10. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	39
Şekil 3.11. y ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	40
Şekil 3.12. x ekseninde u_x ve u_y yer değiştirmeler.	40
Şekil 3.13. $\sigma_n=100\text{MPa}$ iç basınç etkisi altındaki sonsuz düzlemde dairesel boşluk.	40
Şekil 3.14. x ekseninde σ_{xx} gerilmesi.	40
Şekil 3.15. x ekseninde u_x yer değiştirmesi.	41
Şekil 3.16. Yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluk.	41
Şekil 3.17. x ekseninde σ_{xx} gerilmeleri.	41
Şekil 3.18. Boşluk sınırında yer değiştirmeleri.	42
Şekil 4.1. İki malzemeli bölge.	43

Şekil 4.2. İki malzemeli bölgede sınır koşulları.	44
Şekil 4.3. Değme elemanı.	45
Şekil 4.4. Sonsuz düzlemde boşluk ve fayın şematik gösterimi.	47
Şekil 4.5. Farklı gerilme durumları için Mohr-Coulomb elemanının davranışı	49
Şekil 4.6. İç basınç etkisi altında iki malzemeli bölge.	52
Şekil 4.7. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	52
Şekil 4.8. x ekseninde u_x yer değiştirmeleri.	53
Şekil 4.9. Yarı-sonsuz düzlemde, iç basınç etkisi altında iki malzemeli bölge.	53
Şekil 4.10. x ekseninde u_x ve u_y yer değiştirmeleri.	54
Şekil 4.11. x ekseninde σ_{xx} gerilmeleri.	54
Şekil 4.12. Yarı-sonsuz düzlemde çatlak ve fayın şematik görünümü.	55
Şekil 4.13. Çatlağın pozitif ve negatif taraflarındaki u_n yer değiştirmeleri.	55
Şekil 4.14. Yüzeydeki σ_{xx} gerilmeleri.	56
Şekil 4.15. Fay hattı boyunca u_s ve u_n yer değiştirmeleri.	56
Şekil 4.16. Mohr-Coulomb elemanı ve dairesel boşluk.	57
Şekil 4.17. Mohr-Coulomb elemanında gerilmeler ve u_y yer değiştirmesi.	57
Şekil 5.1. $ \bar{x} \leq a$, $\bar{y} = 0$ doğrusu üzerinde sabit gerilmeler.	58
Şekil 5.2. $\bar{x}, \bar{y}$ doğrultusunda yönelmiş eleman.	62
Şekil 5.3. Normal doğrultudaki yer değiştirme için gerilme durumu	69
Şekil 5.4. Kayma yer değiştirmesi için gerilme durumu.	71
Şekil 5.5. İki boyutlu sonsuz anizotrop ortamda dairesel boşluk.	74
Şekil 5.6. Boşluk sınırında yer değiştirmeler.	74
Şekil 5.7. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	74

Şekil 5.8. y ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	74
Şekil 5.9. Sonsuz düzlemde kare boşluk.	75
Şekil 5.10. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	75
Şekil 5.11. y ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.	76
Şekil 5.12. x ve y eksenleri üzerinde yer değiştirmeleri.	76
Şekil 5.13. Yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluk.	77
Şekil 5.14. a) aksenal kuvvet etkisinde, b) hidrostatik basınç altında x ekseninde σ_{xx} gerilmeleri.	77
Şekil 5.15. a) aksenal kuvvet etkisinde, b) hidrostatik basınç altında boşluk sınırındaki u_s yer değiştirmeleri.	77
Şekil 5.16. a) aksenal kuvvet etkisinde, b) hidrostatik iç basınç altında boşluk sınırındaki u_n yer değiştirmeleri.	78

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1. Voigt elastik sabitleri.

5



ÖZET

Bir çok mühendislik probleminin çözümünde, sayısal hesap yöntemlerinden olan sınır eleman yöntemi (BEM) kullanılmaktadır. Sınır eleman yönteminde sınırdaki ayrıklaştırma direkt veya indirekt olarak iki ayrı yaklaşımla yapılmaktadır. Direkt sınır eleman yönteminde sınırdaki bilinmeyenler doğrudan elde edilir. İndirekt yöntemde ise önce sınırda fiktif değerler elde edilir daha sonra bu fiktif değerler yardımıyla diğer bilinmeyenler hesaplanır. Sınırdaki bu fiktif değerler ise seçilen temel bilinmeyenler bakımından iki kısımda incelenebilir. Buna göre eğer sınırdaki bilinmeyenler fiktif gerilmeler ise fiktif değerler olarak fiktif gerilmeler alınır, eğer bilinmeyenler yer değiştirme süreksizlikleri ise fiktif değerler yerine, yer değiştirme süreksizlikleri alınır.

Bu çalışmada, izotrop ve anizotrop ortamlar için, indirekt sınır eleman yöntemlerinden olan, fiktif gerilme yöntemi (FSM) ve yerdeğiştirme süreksizliği yöntemi (DDM) kullanılmıştır. Her iki yöntemde de Kelvin ve Melan temel çözümleri kullanılarak, sınır integralleri sabit ve doğrusal olan elemanlar üzerinde kapalı olarak elde edilmiştir. Bu çalışmanın bir özelliğide, Kelvin temel çözümleri kullanılarak, sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemlerde izotrop-anizotrop ortamlar için tekil yüklerden dipoller oluşturulmuş ve bu dipoller yardımıyla DDM'deki temel çözümler elde edilmiştir. Ayrıca izotrop ortamdan farklı olarak, anizotrop ortamlarda, elastik sabitler doğrultusundaki eksenlerden her hangi bir açı yapacak şekilde bir eleman gözönüne alınmış olup, türevler ve integraller bu doğrultuda alınarak elemanlardaki bilinmeyen yer değiştirme süreksizlikleri için lineer denklem sistemi elde edilmiştir.

Sayısal uygulama olarak sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemlerde, çeşitli boşluk ve çatlak problemleri incelenmiştir. Bunlardan, değişik sınır koşulları altında sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemlerde, dairesel kesitli bir boşluk için seçilen noktalarda meydana gelen gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri hesaplanmıştır. İkinci örnek olarak, iki malzemeli dairesel kesitli boşluk problemi DDM ile incelenmiştir. DDM için özel uygulama olması açısından, yarı sonsuz düzlemde, yüzeyden itibaren derinlikle doğru orantılı değişen yükleme altında çatlak ve fay problemi ve ayrıca Mohr-Coulomb hipotezi kullanılarak, sonsuz düzlemde dairesel boşluk ve fay etkileşim problemi çözülmüştür. Son olarak anizotrop malzeme için, eksenel yük etkisi altında sonsuz düzlemde dairesel ve kare kesitli boşluk ile hidrostatik iç basınç ve eksenel yük etkisi altında yarı sonsuz düzlemde dairesel boşluk problemleri çözülmüştür.

Geliştirilen yöntemle çözülmüş olan tüm örnek problemlerde anizotropinin sonuçları önemli ölçüde etkilediği ve gözönünde tutulması gerekli bir malzeme özelliği olduğu sonucuna varılmıştır.

SUMMARY

DISPLACEMENT DISCONTINUITY METHOD IN ANISOTROPIC BODIES

Realistic problems of engineering mechanics, usually formulated in terms of a set of governing differential equations together with appropriate boundary and initial conditions, are characterized by great complexities in geometry and material constitution. As a result of that, analytical solutions of these problem are practically impossible to obtain and resort has to be made to numerical methods for the determination of an approximate solution. Numerical solutions of very complicated problems are feasible today due to the availability of powerful digital computers. A numerical method is of the differential or the integral type depending on whether the numerical analysis precedes or follows the integration of the governing equations.

The general problem two-dimensional elastostatics is that of determining the stresses, σ_{ij} ($i, j = 1, 2$), and displacements, u_i , in a body of known shape subject to prescribed boundary conditions (traction, displacements). In a additions to these may be body forces which act throughout the interior of the body. The two-dimensional elastostatics problems considered here are those of plane strain and plane stress. The conditions to be satisfied by any solution for a particular problem geometry and loading condition are the differential equations of equilibrium, the constitutive equations, the equations of compatibility and the boundary conditions for the problem. The treatment of problems two-dimensional elastostatics simplifies somewhat when the body forces do not appear in differential equations. Since the equations for continuos, homogeneous form by finding one of the infinitely many particular integrals.

The boundary element method has been used widely in geotechnical analysis and has performed well for elastic analysis of excavations in semi-infinite or infinite bodies. In this method, the problem is solved in terms of the conditions imposed at the surfaces of openings the problem domain. However, there are situations in geotechnical engineering for which it is difficult to use the boundary element method, especially those practical problems involving sequential excavation or construction, inhomogeneous materials, material non-linearities, and the presence of joints.

Natural rock masses are usually composed of blocks of intact material separated by joints or discontinuities. The behavior of these rock masses is complex as it is governed not only by the properties of the discontinuities. In general, the overall behavior of a jointed rock mass will be anisotropic.

Most boundary element analyses carried out in geotechnical engineering assume that the rock mass can be modeled as an isotropic elastic material. There have been a few reported attempts to account for the structure of the rock mass in analyses, and examples of boundary element treatments of rock with distinct joints have been presented by Hocking and Brady et al however, when the spacing between the joint is small in comparison with the length scale of interest (such as tunnel width or foundation size), a simulation incorporating the jointing explicitly is very difficult and costly to implement. The problem of dealing with the structure of the rock mass explicitly can be avoided in cases where the jointing is closely spaced and regular, because it is convenient in such problems to idealize the rock mass and anisotropic elastic medium ; that is, the effects of the discontinuities is implicit in the choice of the stress-strain model adopted for the equivalent rock mass continuum. Some of the boundary element treatments of anisotropic materials relevant to jointed rock masses are reviewed briefly in this work.

Increasing structural use is being made of materials with anisotropic elastic material properties. In recent years, various kinds of composite materials have been developed and used for structural components. The major reasons for their success are to be found in the fact that they can fulfill all the requirements for a given application. Originally, structural composites were developed for the aerospace industry as they offered attractive properties of stiffness and strength compared to their weight. Further advantages such as high corrosion resistance and design flexibility made composite materials the ideal replacement to the aluminum alloys previously used.

Rizzo and Shippy and Crouch and Starfield have assumed that in some cases rock masses may be represented as transversely anisotropic materials, and they have implemented into boundary element formulations the fundamental solutions due to Green for a point force in an infinite sheet of transversely anisotropic elastic material. Brebbia has also suggested an iterative perturbation boundary element analysis for general anisotropic materials, and Dumir and Mehté have analyzed orthotropic half-plane problems using boundary element techniques using appropriate Airy stress functions. A boundary element formulation for general anisotropic materials has also been presented by Carter and Alehossein, using the fundamental solutions derived by Lekhnitskii.

The most widely known and used numerical methods of solution are the Finite Difference Method (FDM) and the Finite Element Method (FEM), both of the differential type. The FDM replaces the differential equations by algebraic ones, valid at a set of nodes within the domain, through the approximation of derivatives by finite differences, while the FEM replaces the domain itself by a set of finite sub domains or elements connected through their nodes and approximately reproducing the behavior of the sub domain that represent. The FEM presents some very distinct advantages over the FDM such as better conformity to the domain geometry, much easier handling of the boundary conditions and easier construction of variable-size meshes. These advantages have made the FEM the most popular numerical method among scientists and engineers. Even the FEM, however, presents some disadvantages such as rather high costs for the preparation and input of data and time-consuming solutions of three-dimensional problems, especially those with distant boundaries.

The Boundary Element Method (BEM), which is based on an integral formulation of the problem, has emerged during the last 15 years as a new powerful computational tool. This method usually requires only a surface discretization and not a discretization of both the interior and the surfaces of the domain of interest as it is the case with “domain-type” techniques, such as the FDM and the FEM. This fact makes the BEM more efficient than the FEM for quite a number of classes of problems. For some other problems the BEM might be equally good or inferior to the FEM, while in certain cases a combination of the two methods usually creates the optimum numerical scheme. The BEM has been successfully used to a great variety of problems in engineering science, such as potential theory, elastostatics, elastodynamics, elastoplasticity, viscoelasticity, viscoplasticity, fracture analysis, fluid mechanics, acoustics, heat conduction, electromagnetism, soil-structure interaction and fluid-structure interaction.

There are basically two kinds of BEMs, the indirect and the direct ones. In the indirect approach the discretized integral equations are first solved for the density of the singular solutions over the boundary surface and then the remaining boundary quantities are computed in terms of these densities which have no physical significance. In the direct approach the discretized integral equations are formulated with the help of certain fundamental integral theorems and connect directly the unknown with the known boundary quantities. Even though it has been shown by Brebbia and Butterfield in 1978 that the indirect and direct BEMs are formally equivalent, more emphasis is usually given to direct BEMs because they are more appealing to scientists and engineers. In addition, direct BEMs appear to be, at least so far, more easily amenable to improvements of the FEM type for the development of advanced BEMs than indirect ones. The term semi-direct BEM has also been used for some time in the past to indicate the treatment of some potential and elastostatic problems by a direct formulation with unknowns functions analogous to stream or stress function from which the physical quantities of the problem can be obtained by differentiation after the solution of the integral equations. This BEM category, however, is very limited and of a special character to be an independent one and for this it is usually considered as part of either the direct or, more frequently, the indirect BEM.

In the direct boundary element formulation based on the point-force fundamental solution, considerable difficulties arise since the displacement discontinuities across the fracture surfaces are not explicitly accounted for. One approach to tackle this problem is partition the medium (which must be finite) into sub-regions. However, this approach becomes inefficient when there are two or more cracks, or even for a single crack which propagates out-of-plane in mixed mode loading.

In the indirect boundary element (or fictitious) formulation, difficulties similar to that of the direct boundary element method arise because continuous displacements are implicitly assumed.

The indirect boundary element method (IBEM) makes use of “fictitious forces” distributed along the boundary of the region of interest. By means of the principle of superposition, an integral equation for these fictitious forces is derived. By representing the boundary by a set of elements and assuming some variation of fictitious forces over each element, a system of simultaneous equations approximating to the integral equation is obtained. Once these fictitious forces have been obtained by solving the equations, the stresses and displacements anywhere within the region and on the boundary can be calculated by integration. For the sake of simplicity, represent a two-dimensional continuous, homogeneous, isotropic, linear and elastic region V' bounded by the surface S' , acted upon by a surface traction $t_i'(x)$. We now want to find the stresses and displacements in the region V' and on the boundary S' . However, it often is easier to find the solution to the relevant partial differential equations in an infinite region, because we do have the Kelvin solution which gives the displacements at the point x (referred to as the field point), $U_i(x)$, due to a concentrated unit force, $F_i(\xi)$, acting at the point ξ (referred to as the load point) in an elastic body of infinite extent.

The displacement discontinuity method (DDM), as a means of solving boundary value problems in elasticity, has become a popular numerical method in the field of geomechanics. The most significant characteristic is its ability of handling rock discontinuities and fractures. The successful application of the DDM, however, relies on the derivation of the fundamental solution for a displacement discontinuity singularity, or mathematically a point dislocation in the infinite space.

The displacement discontinuity method is particularly well suited to model fractures which have relative displacements across their surface (hence a displacement discontinuity results). In addition, it can also be used to model an ordinary boundary of a 2 or 3 dimensional body. However, as will be shown later strong stress singularities at the ends of the displacement elements make it undesirable to model boundaries with finite and smoothly distributed applied loads.

The formulation of the displacement discontinuity method is identical to that of the fictitious stress method except that displacement discontinuities (or “fictitious cracks”) are used instead of fictitious stresses. (Naturally, the fundamental solution is also be different.) Hybridizing these two methods so that the advantages of both can be utilized seems to be very promising. In addition, the boundary element methods have further advantages over the finite element method when some special types of boundaries are present. For example, for a semi-infinite medium with a circular cavity.

In this study investigated the indirect boundary element solution for isotropic and anisotropic problems. The complete fundamental solutions due to unit loads within the infinite and semi-infinite plane are given. Expressions for stresses and displacements at internal points are also given. This formulation is applied and compared to some classical problems. This solution procedure is highly accurate and computationally more efficient than the boundary element formulation using the Kelvin fundamental solution for orthotropic problems. Throughout this work the so-called Cartesian tensor notation is used. This notation is not only a time-saver in

writing long expressions, but is also extremely useful in derivation and in the proof of theorems. Such notation makes use of subscript indices (1,2,3) to represent (x,y,z).

The general problems two dimensional elastostatics are explained in chapter 2. This chapter is partly devoted to introducing some basic concepts of the theory of elasticity needed for developing boundary element models. The chapter starts by reviewing the small strain theory of elasticity. The complete Kelvin fundamental solutions are given in this chapter. The indirect boundary element method and numerical procedure are given in chapter 3. The fundamental solutions for a two-dimensional displacement discontinuity are also given in this chapter. The DDM is used to model joints and faults filled with weak material in chapter 4. In this case the displacement discontinuity element surfaces are connected by springs which have shear stiffness K_s and normal stiffness K_n . The other special application is to use DDM for inhomogeneous bodies in this chapter. In the last chapter anisotropic elasticity problems are investigated in the indirect boundary element method. Kelvin fundamental solutions for any direction are used and singular solutions found in the DDM.



BÖLÜM 1. GİRİŞ

İki veya üç boyutlu elastostatikte genel problem, her hangi bir cismde, bilinen sınır koşulları altında cismdeki gerilmeler ve yer değiştirmelerin hesabıdır. Bu büyüklüklerin hesaplanması için, cismin diferansiyel denge denkleminin, sınır koşullarını ve uygunluk koşullarını sağlayacak şekilde çözülmesiyle mümkündür. Bazı durumlarda analitik çözümler bulmak oldukça zordur. Buna karşın sayısal hesap yöntemleri gelişmiştir. Bunlardan bazıları ise, Sonlu farklar yöntemi, Sonlu elemanlar yöntemi ve Sınır elemanlar yöntemi olarak sıralanabilir. Son yıllarda ise sınır eleman yönteminin kullanılmasının yaygınlaştığı gözlenmiştir. Pratikte bir çok mühendislik problemlerinin çözümünde, sınır eleman yöntemi kullanılmaktadır [1-20]. Bunlardan bazıları, zemin mühendisliği, kaya mekaniği, kırılma mekaniği, akışkanlar mekaniği v.s. olarak sayılabilir.

Bütün bu yöntemlerde yaklaşık yöntemlerdir. Düzenli bölgelerde analitik (kapalı) çözümler bulmak mümkündür. Eğer bölge düzensiz ise sayısal çözüm yapmak daha uygun olabilir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemlerinde, ayrıklaştırma bölgelerde yapılmakta, sınır eleman yönteminde ise ayrıklaştırma bölgenin sınırlarında yapılmaktadır. Bu nedenle sınır elemanlar yönteminde, problemin çözüm bölgesi bir mertebe azalır, yani üç boyutlu problemler için bölgenin yüzeyinde, iki boyutlu problemler için ise bölgenin sınırındaki kapalı eğride ayrıklaştırma yapılarak problemin çözümü elde edilmektedir.

Sınır eleman denklemlerinin elde edilmesi açısından genelde iki farklı sınır eleman tekniği kullanılmaktadır [16]. Bunlardan birincisi direkt sınır eleman yöntemi, bu yöntem de Betti karşılık teoremi kullanılarak sınırdaki gerilmeler ve yer değiştirmeler direkt olarak hesaplanır, ikincisi ise indirekt sınır eleman yöntemidir.

İndirekt yöntemde ise verilen sınır koşulları altında önce sınırda fiktif değerler hesaplanır, daha sonra bu fiktif değerler kullanılarak sınırdaki ve bölgedeki bilinmeyenler hesaplanır. Bu yöntem de kendi içinde, fiktif gerilme yöntemi (FSM) ve yer değiştirme süreksizliği yöntemi (DDM) olmak üzere iki kısımda incelenebilir [21-40]. Burada fiktif gerilme yönteminde temel bilinmeyenler olarak, fiktif

gerilmeler iken yer değiştirme süreksizliği yönteminde temel bilinmeyenler yer değiştirme sreksizlikleridir. Her iki yntemdede Kelvin temel czmleri kullanılarak sonsuz veya yarı-sonsuz düzlemdeki sınır eleman denklemleri elde edilebilmektedir.

Çatlak problemleri DDM ile daha kolay modellenebildiği için, son yıllarda bu model üzerine clışmaların arttığı gözlenmiştir [41-47]. Buna ilaveten boşluk ve ctlaklı problemlerde, FSM ile boşluğın sınırını, DDM ile de ctlağı modelleyerek iki yöntemin beraber kullanılması da mümkündür. Yer değiştirme süreksizliği denklemlerinin elde edilmesinde Crouch [1]'de Papkovitch fonksiyonları kullanılmış ve cşitli sınır koşullarını sağlayacak şekilde harmonik fonksiyonlar seçilmiştir. Brady [48,49] izotrop ortamda dipol gerilmelerinden dolayı oluşan tekil czmleri elde edilmesi için, temel czmlerin tekil yük doğrultusundaki türevleri kullanılmıştır.

Anizotrop ortamda elastisite denklemleri genel olarak Green ve Zerna [50] ve Lekhnitskii [51] tarafından verilmiş olup bir ck araştırıcı tarafından sınır elemanlar ve sonlu elemanlar yöntemleriyle incelenmiştir [52-73]. Bunlardan Lekhnitskii tarafından verilen temel czmler kullanılarak direkt sınır eleman yöntemiyle ve sonlu elemanlar yöntemiyle Carter ve Xiao [60,61] tarafından incelenmiştir. Crouch ve Starfield tarafından anizotrop ortam ve sonsuz düzlemde fiktif gerilme yöntemiyle incelenmiştir. Ayrıca Crouch [23] tarafından sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemde elastisite katsayılarının eleman doğrultusuna paralel olması durumunda yer değiştirme süreksizliği yöntemiyle incelenmiştir. Schlar [73]  boyutlu anizotrop ortam için, izotrop ve anizotrop temel czmler kullanarak direkt sınır eleman denklemleri elde etmişlerdir.

Bu clışmanın amacı yer değiştirme süreksizliği yöntemini izotrop ve anizotrop ortamlarda kaya mekaniği, kırılma mekaniği, tünel fay etkileşimi gibi cşitli mühendislik problemlerine uygulamaktır [74-81]. Ayrıca bu clışmada, diğer araştırıcılar tarafından elde edilen DDM denklemlerinin elde edilmesinde farklı yol izlenmiştir. Buna göre yer değiştirme süreksizlikleri, Brady [48,49] de verilen yöntem kullanılarak izotrop ve anizotrop ortamlar ve ayrıca sonsuz ve yarı sonsuz düzlemlerde yer değiştirme süreksizliği ile ilgili tekil czmler elde edilmiş olup, bir doğrusal eleman üzerinde integraller alınarak sınır eleman denklemler elde edilmiştir. Tüm integraller kapalı olarak alınmış olup bu nedenle de bilgisayar programlarında tek incelikle clışmak yeterli olmuştur.

Bölüm 2. de elastisite teorisinden izotrop ve anizotrop ortamlar için iki boyutlu elastostatik problemlerde temel denklemler incelenmiştir. Anizotrop ortamda yer

değiştirme potansiyellerinin elde edilmesi incelenmiş ve buna bağlı olarak, sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemlerde elastostatik problemler için temel çözümler verilmiştir.

Bölüm 3. de izotrop ortamda indirekt sınır eleman yöntemlerinden Fiktif gerilme yöntemi (FSM) ve Yer değiştirme süreksizlik yöntemleri (DDM) genel olarak incelenmiş olup temel çözümler kullanılarak sınır eleman denklemleri elde edilmiştir. DDM denklemlerinin elde edilmesinde temel çözümlerin tekil yük doğrultusundaki türevleri alınarak dipol gerilmeleri elde edilmiş ve bu dipol gerilmeler kullanılarak yer değiştirme süreksizliğinden oluşan tekil çözümler elde edilmiştir. Elde edilen bu tekil çözümlerin sonlu bir doğru üzerindeki integrasyonu alınıp süperpozisyonu yapılarak DDM'de lineer denklem takımı elde edilmiştir. Bu bölüme ait sayısal örnek olarak, sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemlerde dairesel boşluk problemleri incelenerek analitik çözümler ile FSM ve DDM sonuçları karşılaştırılmıştır.

Bölüm 3. de elde edilen DDM çözümlerinin uygulama alanını genişletmek amacıyla çeşitli özel uygulamalar Bölüm 4. de incelenmiştir. Buna göre DDM kullanılarak iki malzemeli bölge, değme eleman ve Mohr-Coulomb elemanı problemleri incelenmiş olup her birine sayısal uygulama teşkil etmesi açısından boşluk ve fay etkileşim örnekleri çözülmüştür [82-88].

Bölüm 5. de anizotrop bir ortamda indirekt sınır eleman yöntemi incelenmiştir. Burada FSM denklemler sonsuz bölge için [1]'dan alınmış olup DDM denklemleri sonsuz ve yarı-sonsuz ortamlar için bu çalışmada elde edilmiştir. Anizotrop ortamda elemanlar her zaman elastik katsayılarla paralel olmadığından, elemanın elastik sabitler doğrultusundaki eksenlerden bir β açısı yapacak şekilde bir eksen takımında gözönüne alınmış olup, türevler ve integraller bu doğrultuda alınmıştır. Bölüm 3. de ki sayısal hesap yöntemi izlenerek lineer denklem takımı oluşturulmuştur. Sayısal örnek olarak sonsuz ve yarı-sonsuz düzlemlerde dairesel ve kare boşluk örnekleri gözönüne alınarak FSM ve DDM sonuçları karşılaştırılmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER

2.1. GENELLEŞTİRİLMİŞ HOOKE KANUNLARI

Elastik bir cisimde şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri arasındaki ilişkiyi elde etmek için cismin elastik özelliklerini ifade eden bir model seçmek gereklidir. Bu bağlamda gerilme bileşenlerinin, şekil değiştirme bileşenlerinin lineer fonksiyonları olarak ifade etmek mümkündür. Başka bir deyişle sürekli cismin genelleştirilmiş Hooke yasasını gerçeklediği varsayılacaktır. Hiç bir elastik simetrisi olmayan homogen anizotrop bir cisimde kartezyen koordinatlardaki genelleştirilmiş Hooke yasaları

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada C_{ijkl} , dördüncü dereceden elastik sabitler tansörü olup malzemenin fizik ve mekanik özelliklerine bağlıdır. Bu sabitlerin sayısı en genel halde $3^4=81$ adet sabitten oluşmaktadır. Eğer C_{ijkl} cisimde noktadan noktaya değişken ise bu cisim non-homojen, sabit ise homojen olarak adlandırılır. Her iki durumda da cisim lineer elastiktir. Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin simetriklik koşulları $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ ve $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ uygulanırsa C_{ijkl} sabitleri 36 adete düşer. Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunun, birim şekil değiştirme bileşenlerinin homojen ve ikinci mertebeden bir fonksiyon olduğu kabul edilirse $C_{ijkl} = C_{klij}$ simetrikliğinden sabitlerin sayısı 21'e düşer. Bu 21 adet sabitle gerilme-şekil değiştirme arasındaki bağıntılara *Genelleştirilmiş Hooke Yasaları* adı verilir ve 4 adet indisi olan bu sabitleri Tablo 2.1. deki gibi iki indisli Voigt elastik sabitleri olarak gösterilebilir

Tablo 2.1. Voigt elastik sabitleri

ij	kl					
	11	22	33	23	31	12
11	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}
22	c_{12}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}
33	c_{13}	c_{23}	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}
23	c_{14}	c_{24}	c_{34}	c_{44}	c_{45}	c_{46}
31	c_{15}	c_{25}	c_{35}	c_{45}	c_{55}	c_{56}
12	c_{16}	c_{26}	c_{36}	c_{46}	c_{56}	c_{66}

Genelleştirilmiş Hooke Yasaları matris formunda ise

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Mühendislikte kullanılan bir çok malzeme belirli yapısal simetri özelliklerine sahiptir. Bu şekilde elde edilen anizotropinin en basit iki biçimi ortotropi ve enine izotropi olarak bilinir. Bir düzleme göre elastik simetriye sahip cisimlerde elastisite matrisinin bağımsız sabitlerinin sayısı 13'e indirgenir. Üç ortogonal düzleme göre elastik simetriye sahip cisimlerde bağımsız elastik sabitlerin sayısı 9 adettir. Enine izotrop malzemede iki doğrultuda elastisite modülleri eşit, üçüncü doğrultuda farklıdır. Bu durumda 5 elastik sabit vardır. İzotrop malzemede ise malzeme sabitleri doğrultudan bağımsız olduğundan, üç yönde de elastik sabitleri eşit olup 2 malzeme sabiti vardır.

(2.1) eşitliğindeki genelleştirilmiş Hooke yasası c_{ij} matrisinin tersi alınarak şekil değiştirmeler gerilmeler cinsinden ortotrop malzeme de 9 adet sabite bağlı olarak matris formunda

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerdeki elastik sabitler E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} (Young modülleri), G_{xy} , G_{xz} , G_{yz} (kayma modülleri) ve ν_{xy} , ν_{xz} , ν_{yz} , ν_{yx} , ν_{zx} , ve ν_{zy} (Poisson Oranları) olarak bilinen mühendislik sabitleri cinsinden [1].

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{E_{xx}} & s_{12} &= -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} & s_{13} &= -\frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} \\ s_{22} &= \frac{1}{E_{yy}} & s_{23} &= -\frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} & s_{33} &= \frac{1}{E_{zz}} \\ s_{44} &= \frac{1}{G_{yz}} & s_{55} &= \frac{1}{G_{xz}} & s_{66} &= \frac{1}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

olarak elde edilirler. Genel olarak Poisson oranları $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$ olup buna karşın $\nu_{ij}/E_{ii} = \nu_{ji}/E_{jj}$, ($i \neq j$) bağlantısı geçerlidir.

2.2. DÜZLEM GERİLME VE DÜZLEM ŞEKİL DEĞİŞTİRME HALİ

Bir çok mühendislik probleminin çözümünde, problemin fiziksel ve geometrik özelliklerinden dolayı bazı kabüller yapılması gerekir. Bu kabüllerden *Düzlem Gerilme Durumu* ve *Düzlem Şekil Değiştirme Durumu* olarak iki farklı durum gözönüne alınarak Hooke yasaları bakımından gerilme-şekil değiştirme arasındaki ilişkiler anizotrop cisim için aşağıda kısaca açıklanmıştır.

2.2.1. Düzlem Gerilme Hali

Genellikle düzlem gerilme durumu, iki boyutlu düzlem problemlerinde (levha problemi gibi) ortaya çıkar. Bu nedenle z eksenine doğrultusundaki σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} gerilme bileşenleri sıfırdır. Bu durumda diferansiyel denge denklemleri,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \psi_x = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \psi_y = 0$$

şeklinde yazılabilir. Genelleştirilmiş Hooke kanunlarındaki (2.2) eşitlikleri ise düzlem gerilme hali için

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= s_{11}\sigma_{xx} + s_{12}\sigma_{yy} \\ \varepsilon_{yy} &= s_{12}\sigma_{xx} + s_{22}\sigma_{yy} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{zz} = s_{13}\sigma_{xx} + s_{23}\sigma_{yy} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}s_{66}\sigma_{xy}$$

şeklinde yazılabilir. Gerilme bileşenleri ise

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{yy} = c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} \quad \sigma_{xy} = 2c_{66}\varepsilon_{xy}$$

şeklinde dört adet elastik sabite bağlı olarak elde edilirler. Bu elastik sabitler mühendislik sabitlerine bağlı olan s_{ij} elemanları cinsinden

$$c_{11} = s_{22} / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2)$$

$$c_{12} = -s_{12} / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2) \quad (2.8)$$

$$c_{22} = s_{11} / (s_{11}s_{22} - s_{12}^2)$$

$$c_{66} = 1 / s_{66}$$

olarak elde edilirler.

2.2.2. Düzlem Şekil Değiştirme Hali

Düzlem şekil değiştirme halinde yine düzlem gerilme halindeki benzer şekilde (x,y) düzlemindeki şekil değiştirmeler sıfırdan farklı ve z ekseninde u_z yer değiştirme bileşeni sıfır olduğundan ε_{xz} , ε_{yz} , ε_{zz} şekil değiştirme bileşenleri sıfırdır. Bu durumda (2.2) Genelleştirilmiş Hooke bağıntılarından $\varepsilon_{zz} = 0$ kullanılarak σ_{zz} gerilmesi

$$\sigma_{zz} = -(s_{13}\sigma_{xx} + s_{23}\sigma_{yy}) / s_{33} \quad (2.9)$$

bağıntısıyla σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri cinsinden hesaplanabilir. Şekil değiştirmeler ise (2.3) ve (2.9) kullanılarak tekrar

$$\varepsilon_{xx} = (s_{11} - s_{13}^2 / s_{33})\sigma_{xx} + (s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33})\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = (s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33})\sigma_{xx} + (s_{22} - s_{23}^2 / s_{33})\sigma_{yy} \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} s_{66} \sigma_{xy}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikler kullanılarak gerilme bileşenleri şekil değiştirme bileşenlerine bağlı olarak

$$\sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{yy} = c_{12}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} \quad \sigma_{xy} = 2c_{66}\varepsilon_{xy}$$

eşitlikleriyle hesaplanabilir. Burada c_{ij} değerleri altı adet mühendislik sabitlerine bağlı olarak

$$c_{11} = (s_{22} - s_{23}^2 / s_{33}) / (s_0 s_{33})$$

$$c_{12} = -(s_{12} - s_{13}s_{23} / s_{33}) / (s_0 s_{33}) \quad (2.12)$$

$$c_{22} = (s_{11} - s_{13}^2 / s_{33}) / (s_0 s_{33}) \quad c_{66} = 1 / s_{66}$$

$$s_0^2 = s_{11}s_{12} - s_{12}^2 + (2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2) / s_{33} \quad (2.13)$$

bağıntılarıyla hesaplanabilirler.

2.3. ENİNE İZOTROP VE İZOTROP MALZEME

Ortotrop malzemenin özel bir hali olarak, simetri düzlemlerinden her hangi ikisinde aynı malzeme özelliklerinin geçerli olması halinde enine izotrop malzeme söz konusu edilir ve bu durumda malzeme sabitleri ikisi Young Modülü ikisi Poisson Oranı ve biri de kayma modülü olmak üzere 5'e indirgenir. Bu durumda (x,z) düzlemi aynı malzeme özelliklerine sahip oldukları varsayılırsa Şekil 2.1. de görüldüğü gibi, genelleştirilmiş Hooke yasası

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{13}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(s_{11} - s_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

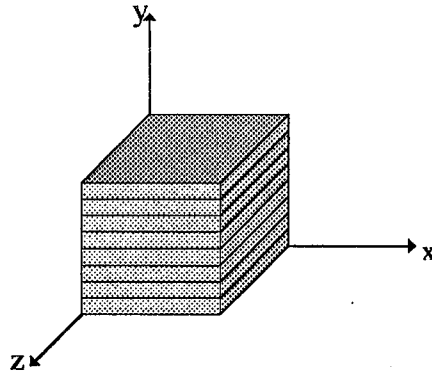
olarak yazılabilir. Anılan 5 sabit arasındaki ilişkiler, mühendislik sabitleri cinsinden

$$E_{xx} = E_{zz} \quad \nu_{yx} = \nu_{yz} \quad (2.15)$$

şeklinde göz önüne alınarak, s_{ij} matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{E_{xx}} & s_{22} &= \frac{1}{E_{yy}} & s_{33} &= \frac{1}{E_{xx}} \\ s_{12} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} & s_{13} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_{xx}} & s_{23} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_{xx}} \\ s_{66} &= \frac{1}{G_{xy}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

olarak elde edilirler.



Şekil 2.1. Enine izotrop malzeme

Düzlem şekil değiştirme halinde her üç doğrultuda malzeme sabitleri eşit olarak gözönüne alınırsa ($E_{xx}=E_{yy}=E_{zz}=E$, $\nu_{xy}=\nu_{xz}=\nu_{yz}=\nu_{yx}=\nu_{zx}=\nu_{zy}=\nu$ ve $G_{xy}=G_{xz}=G_{yz}=G$) (2.14) genelleştirilmiş Hooke bağıntılarındaki s_{ij} matrisinin elemanları izotrop malzeme için

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 1 / E$$

$$s_{12} = s_{13} = s_{23} = -\nu / E \quad (2.17)$$

$$s_{44} = s_{55} = s_{66} = 1 / G = 2(1 + \nu) / E$$

şeklinde iki malzeme sabitine bağlı olarak elde edilirler.

2.4. YER DEĞİŞTİRME POTANSİYELLERİ

Üç boyutlu sürekli ve elastik bir ortamda iki tür dış kuvvet vardır, bunlardan birincisi; cismin yüzeyine gelen dış kuvvetler iken, ikincisi ise; yer çekim kuvvetleri, manyetik kuvvetler veya hareket halindeki cismin atalet kuvvetleri gibi cismin içinde yayılı kuvvetler olup kütle kuvvetleri adını alırlar. Bu durumda göz önüne alman, kütle ve yüzey kuvvetleri etkisindeki prizmatik diferansiyel bir elemanda denge denklemleri

$$\sigma_{ij,j} + \psi_i = 0 \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır. Burada σ_{ij} , gerilme tansörü bileşenlerini, ψ_i ise birim hacimdeki kütle kuvvetlerini gösterir. (2.18) denkelemindeki virgöl, türev anlamında olup $\sigma_{ij,j} = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ şeklindedir. Küçük yer değiştirmeler varsayımı altında yer değiştirme ve şekil değiştirmeler arasındaki kinematik bağıntılar

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.19)$$

ile ifade edilir. Hooke kanunları, izotrop elastik cisimde, gerilme-şekil değiştirme bileşenleri cinsinden indis notasyonu ile

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemleri (2.18) denge denklemlerinde yerlerine konulup ve (2.19) daki şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntılarında gözönüne alınarak

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \quad (2.21)$$

şeklinde Navier denklemi elde edilir. Bu denklemlerin çözümüyle u_i yer değiştirmeler elde edilir.

Ortotrop bir ortamda ise benzer düşünce ile, düzlem şekil değiştirme için (2.11) gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları ve (2.19) yer değiştirme şekil değiştirme denklemleri, kütle kuvvetleri sıfır olarak gözönüne alınarak (2.18) denge denklemlerinde yerlerine konursa

$$c_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + c_{66} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.22)$$

$$c_{66} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + c_{22} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x \partial y} = 0$$

yer değiştirme bileşenlerine bağlı diferansiyel denkelemleri elde edilir. Burada q bir sabit ve φ , x ve y ye bağlı bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad u_y = q \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.23)$$

şeklinde bir çözümün bulunabileceği kabul edilerek, (2.22) eşitlikleri φ fonksiyonu cinsinden

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{[c_{66} + (c_{12} + c_{66})q]}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{c_{22}q}{(c_{12} + c_{66}) + c_{66}q} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin uygun bir üç boyutlu sıfır olmayan çözümü, denklemler birbirine özdeşse bulunabilir ve bu özdeşlik eğer

$$\frac{c_{66} + (c_{12} + c_{66})q}{c_{11}} = \gamma^2 \quad (2.25)$$

$$\frac{c_{22}q}{(c_{12} + c_{66}) + c_{66}q} = \gamma^2$$

ise vardır. Burada γ^2 için, kökleri γ_1^2, γ_2^2 olan kuadratik bir denklem verir.

$$c_{11}c_{66}\gamma^4 + [c_{12}(2(c_{66} + c_{12})) - c_{11}c_{22}]\gamma^2 + c_{22}c_{66} = 0 \quad (2.26)$$

Burada köklerin çarpımları ve toplamaları sırasıyla

$$k_1 = \gamma_1 \gamma_2 \quad \text{ve} \quad k_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \quad (2.27)$$

olarak gözönüne alınırsa, k_1 ve k_2 sabitleri daima gerçeldir. Buna karşın eğer

$$\begin{aligned} k_2 > k_1 & \text{ ise } \gamma_1, \gamma_2 \text{ gerçeldir} \\ k_2 = k_1 & \text{ ise } \gamma_1 = \gamma_2 \text{ gerçeldir} \\ k_2 < k_1 & \text{ ise } \gamma_1, \gamma_2 \text{ karmaşıktır.} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ayrıca $\gamma_1=\gamma_2=1$ ise çözüm izotrop çözüme karşı gelmektedir. Genellikle mühendislik problemlerinde köklerin reel olduğu bilindiğinden, bu çalışmada reel kökler gözönüne alınacaktır. (2.24) denklemleri, (2.26) denkleminin kökleri cinsinden

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \gamma_i^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = 0 \quad i=1,2 \text{ (i toplanmıyor)} \quad (2.29)$$

şeklinde yazılarak bu denklemin çözümünde φ_1 ve φ_2 gibi iki tane çözüm fonksiyonu elde edilir. φ_i düzlem şekil değiştirme durumunda, ortotrop cisimde potansiyellerdir. Laplace eşitliğine benzediğinden Quasi-harmonik olarak isimlendirilirler.

(2.25) denklemlerinden q sabiti

$$q_i = \frac{(c_{11}\gamma_i^2 - c_{66})}{(c_{12} + c_{66})} \quad (2.30)$$

şeklinde elde edilir. (2.26) ifadesinin köklerine bağlı olarak

$$q_1 = \frac{(c_{11}\gamma_1^2 - c_{66})}{(c_{12} + c_{66})} \quad q_2 = \frac{(c_{11}\gamma_2^2 - c_{66})}{(c_{12} + c_{66})} \quad (2.31)$$

şeklinde yazılabilir. q_1 ve q_2 hesaplandıktan sonra (2.23) ifadesindeki yer değiştirmeler

$$u_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad u_y = q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (2.32)$$

şeklinde φ_1 ve φ_2 fonksiyonları cinsinden yazılabilir.

2.5. TEMEL ÇÖZÜMLER

Sınır elemanlar yöntemi, genel anlamda, sınır integral denklem sisteminin bölgenin sınırında ayrıştırılmasından (sınır elemanlar kullanarak) elde edilen denklem sisteminin çözümünden ibarettir. Burada problemin differansiyel denkleminin homogen çözümüne karşı gelen ve *temel çözüm* olarak adlandırılan bir çözüme gereksinim vardır. Bu çözüm üç boyutlu cisimlerde *Kelvin* çözümü, yarım uzay problemlerinde *Kelvin* ya da *Mindlin* çözümü olabilir. İki boyutlu problemlerde ise *Flamant* çözümü, *Kelvin* çözümü veya *Melan* çözümü kullanılabilir.

2.5.1 Sonsuz Düzlem İzotrop Ortamda Temel Çözümler

Sonsuz düzlemde bir ξ noktasına etkiyen F kuvvetinin sebep olduğu herhangi bir x noktasındaki yer değiştirme bileşenleri

$$u_i(x) = U_{ij}(x, \xi) F_j(\xi) \quad (2.33)$$

bağıntısıyla elde edilebilir Şekil 2.2. Burada $U_{ij}(x, \xi)$, j yönünde, ξ noktasındaki birim yükten dolayı, i yönünde x noktasındaki yer değiştirme olmak üzere, düzlem şekil değiştirme için *Kelvin* tarafından [10]

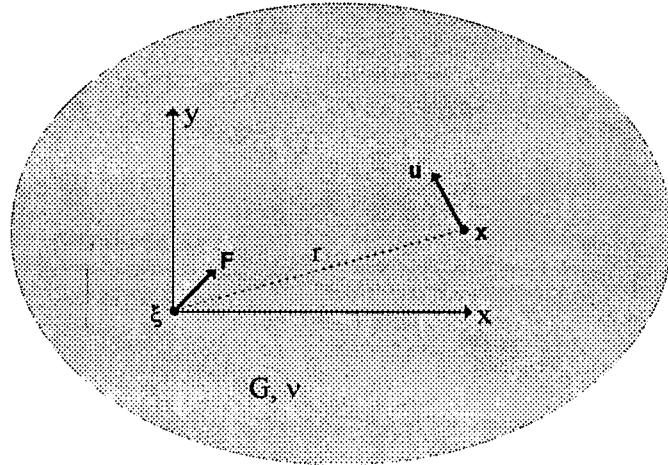
$$U_{ij}(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_i r_j \right] \quad (2.34)$$

bağıntısıyla verilmiştir. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{Kronecker deltası} \quad (2.35)$$

$$r_i = x_i / r \quad r_i = x_i - \xi_i \quad (2.37)$$

dir.



Şekil 2.2. Sonsuz düzlemde tekil kuvvetler

(2.34) denklemler (x, y) dik kartezyen koordinatlarda açık olarak

$$U_{xx} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{x^2}{r^2} \right]$$

$$U_{xy} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[-\frac{xy}{r^2} \right] \quad U_{yx} = U_{xy} \quad (2.38)$$

$$U_{yy} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln r - \frac{y^2}{r^2} \right]$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde herhangi bir x noktasındaki gerilme bileşenleri için, (2.33), (2.18) ve (2.19) bağıntıları kullanılarak

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) F_k(\xi) \quad (2.39)$$

şeklinde elde edilirler. Cismin sınırında x noktasının dış normal $n_j(x)$ olmak üzere yüzey gerilmeleri

$$t_i(\mathbf{x}) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) \quad (2.40)$$

veya başka bir gösterimle

$$t_i(\mathbf{x}) = T_{ik}(\mathbf{x}, \xi) F_k(\xi) \quad (2.41)$$

şeklinde elde edilir. Burada $T_{ik}(\mathbf{x}, \xi) = S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x})$ olup, $S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi)$ tesir fonksiyonları ise $U_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$ tesir fonksiyonları kullanılarak

$$S_{ijk}(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[(1-2\nu)(r_j \delta_{ki} + r_i \delta_{kj} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k \right] \quad (2.42)$$

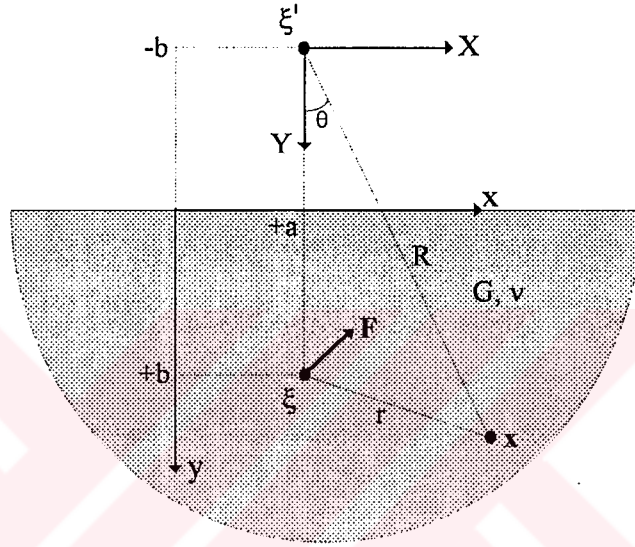
şeklinde elde edilirler. Bu fonksiyonlar (x, y) kartezyen koordinatlarda açık olarak

$$\begin{aligned} S_{xxx} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{x}{r^2} + \frac{x(x^2 - y^2)}{r^4} \right] \\ S_{xxy} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2\nu \frac{y}{r^2} + \frac{y(x^2 - y^2)}{r^4} \right] \\ S_{yyx} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2\nu \frac{x}{r^2} - \frac{x(x^2 - y^2)}{r^4} \right] \\ S_{yyy} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \frac{y}{r^2} - \frac{y(x^2 - y^2)}{r^4} \right] \\ S_{xyx} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{y}{r^2} + \frac{2x^2 y}{r^4} \right] \\ S_{xyy} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{x}{r^2} + \frac{2xy^2}{r^4} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir.

2.5.2. Yarı-Sonsuz Düzlem İzotrop Ortamda Temel Çözümler

Yarı-sonsuz düzlemde temel çözümler, homojen izotrop ortam için *Melan* tarafından verilmiştir Şekil 2.3.



Şekil 2.3. Yarı-sonsuz düzlemde tekil kuvvetler.

Melan çözümü, *Kelvin* çözümü + Tamamlayıcı çözüm olmak üzere iki temel çözümün toplamı şeklinde gözönüne alınabilir. Kelvin çözümü sonsuz düzlemdeki çözümdür (Şekil 2.3 de kuvvetin ξ noktasında olması durumunda sonsuz düzlem çözümüdür). Tamamlayıcı çözüm ise kuvvetin ξ noktası yerine, bu noktanın görüntüsü olan ξ' noktasında olması durumundaki çözümdür. Bu nedenle yarı-sonsuz düzlem çözümleri

$$u = u^k + u^e \quad \sigma = \sigma^k + \sigma^e \quad (2.44)$$

olarak yazılabilir. Burada u^k , σ^k sonsuz düzlemde Kelvin çözümleri, u^e , σ^e yarı-sonsuz düzlem için tamamlayıcı çözümlerdir. Tamamlayıcı çözümler, $y=0$ serbest

yüzeyinde $\sigma_{xy}=0$ ve $\sigma_{yy}=0$ koşullarını gerçekleyecek şekilde sonsuz düzlem temel çözümlerine ilave edilen çözümler olup (x,y) dik kartezyen koordinatlarda [10]

$$U_{yy}^e = K_u \left\{ -[8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)] \ln R + \frac{[(3-4\nu)Y^2 - 2by]}{R^2} + \frac{4byY^2}{R^4} \right\}$$

$$U_{yx}^e = K_u \left\{ \frac{(3-4\nu)(y-b)X}{R^2} + \frac{4byXY}{R^4} - 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right\} \quad (2.45)$$

$$U_{xy}^e = K_u \left\{ \frac{(3-4\nu)(y-b)X}{R^2} - \frac{4byXY}{R^4} + 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right\}$$

$$U_{xx}^e = K_u \left\{ -(8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)) \ln R + \frac{[(3-4\nu)X^2 + 2by]}{R^2} - \frac{4byX^2}{R^4} \right\}$$

$$S_{yyy}^e = -K_s \left\{ \frac{(3y+b)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[Y(Y^2 + 2by) - 2yX^2(1-2\nu)]}{R^4} - \frac{16byX^2Y}{R^6} \right\}$$

$$S_{yyx}^e = -K_s X \left\{ -\frac{(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[y^2 - 2by - b^2 + 2yY(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16byY^2}{R^6} \right\}$$

$$S_{xxy}^e = -K_s \left\{ \frac{(y+3b)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[Y(X^2 + 2b^2) - 2bX^2 + 2yX^2(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16byX^2Y}{R^6} \right\}$$

$$S_{xxy}^e = -K_s X \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R^2} - \frac{2[c^2 - y^2 + 6cy - 2yY(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16cyX^2}{R^6} \right\} \quad (2.46)$$

$$S_{yxx}^e = -K_s \left\{ \frac{(3y+b)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[(2by + X^2)Y - 2yY^2(1-2\nu)]}{R^4} - \frac{16byX^2Y}{R^6} \right\}$$

$$S_{xxx}^e = -K_s X \left\{ \frac{3(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[X^2 - 4by - 2b^2 - 2yY(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16byY^2}{R^6} \right\}$$

şeklindedir. Burada

$$K_u = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \quad K_s = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (2.47)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X}{Y}\right) \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (2.48)$$

dir.

2.5.3. Sonsuz Düzlem Anizotrop Ortamda Temel Çözümler

Anizotrop ortamda, iki boyutlu lineer elastisite ve düzlem şekil değiştirme için, *Kelvin* temel çözümleri, sonsuz düzlemde Şekil 2.2. deki yükleme durumu gözönüne alınarak elastisite modülleri x, y global eksenlerine paralel olması halinde meydana gelen yer değiştirmeler [15]:

$$U_{xx} = K(\gamma_1 \kappa_2^2 \ln r_1 - \gamma_2 \kappa_1^2 \ln r_2)$$

$$U_{xy} = U_{yx} = -K\kappa_1 \kappa_2 (\theta_1 - \theta_2) \quad (2.50)$$

$$U_{yy} = -K\left(\frac{1}{\gamma_1} \kappa_1^2 \ln r_1 - \frac{1}{\gamma_2} \kappa_2^2 \ln r_2\right)$$

ve gerilmeler

$$S_{xx} = Kx \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_2 r_2^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_1 r_1^2} \right) \quad S_{xy} = Ky \left(\frac{\kappa_2}{\gamma_2^3 r_2^2} - \frac{\kappa_1}{\gamma_1^3 r_1^2} \right)$$

$$S_{xyx} = Ky \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_2 r_2^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_1 r_1^2} \right) \quad S_{xyy} = Kx \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_1 r_1^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_2 r_2^2} \right) \quad (2.51)$$

$$S_{yyx} = Kx \left(\frac{\gamma_1 \kappa_2}{r_1^2} - \frac{\gamma_2 \kappa_1}{r_2^2} \right) \quad S_{yyy} = Ky \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_1 r_1^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_2 r_2^2} \right)$$

şeklinde verilmiştir. Burada

$$\kappa_i = s_{12} - \gamma_i^2 s_{22} \quad r_i = \sqrt{(x^2 + y_i^2)} \quad (2.55)$$

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{y_i}{x}\right) \quad i=1,2 \quad (2.56)$$

$$y_1 = \frac{y}{\gamma_1} \quad \text{ve} \quad y_2 = \frac{y}{\gamma_2} \quad (2.57)$$

$$K = \frac{1}{2\pi(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)s_{22}} \quad (2.58)$$

dir. Bu çözümlerde $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ limit durum için çözümlerin sonsuz düzlem izotrop ortamda *Kelvin* temel çözümlerine karşı gelmektedir.

2.5.4. Yarı-Sonsuz Düzlem Anizotrop Ortamda Temel Çözümler

Yarı sonsuz düzlemde anizotropide ki temel çözümü izotrop çözümdekine benzer şekilde sonsuz düzlemdeki temel çözümler ve tamamlayıcı çözümlerin toplamı şeklinde gözönüne alınabilir. Fakat bu çözümde φ fonksiyonun dört farklı durumu söz konusudur. Bunun nedeni olarakta kaynak noktası ile alan noktası arasındaki Y koordinatının γ ya bağlı olarak $Y_1 = (y+b)/\gamma_1$, $Y_2 = (y+b)/\gamma_2$, $Y_3 = y/\gamma_1 + b/\gamma_2$ ve $Y_4 = y/\gamma_2 + b/\gamma_1$ şeklinde dört farklı değer almasıdır. Yükleme durumu Şekil 2.3. deki durum gözönüne alınarak tamamlayıcı kısımda elastisite modüllerinin global x, y

eksenlerine paralel olması durumunda birim tekil kuvvetin ξ' noktasında iken meydana gelecek yer değiştirme bileşenleri [15]:

$$U_{xx}^c = K \left[-c_1(\gamma_1 \kappa_2^2 \ln R_1 + \gamma_2 \kappa_1^2 \ln R_2) + c_2 \kappa_1 \kappa_2 (\ln R_3 + \ln R_4) \right]$$

$$U_{xy}^c = K \left[-c_1 \kappa_1 \kappa_2 (\theta_1 + \theta_2) + c_3 (\gamma_2 \kappa_1^2 \theta_3 + \gamma_1 \kappa_2^2 \theta_4) \right]$$
(2.59)

$$U_{yx}^c = K \left[c_1 \kappa_1 \kappa_2 (\theta_1 + \theta_2) - c_3 (\gamma_1 \kappa_2^2 \theta_3 + \gamma_2 \kappa_1^2 \theta_4) \right]$$

$$U_{yy}^c = K \left[-c_1 \left(\frac{\kappa_1^2}{\gamma_1} \ln R_1 + \frac{\kappa_2^2}{\gamma_2} \ln R_2 \right) + c_3 \kappa_1 \kappa_2 (\ln R_3 + \ln R_4) \right]$$

ve gerilme bileşenleri

$$S_{xxx}^c = KX \left[c_1 \left(\frac{\kappa_2}{\gamma_1 R_1^2} + \frac{\kappa_1}{\gamma_2 R_2^2} \right) - c_3 \left(\frac{\gamma_2 \kappa_1}{\gamma_1 R_3^2} + \frac{\gamma_1 \kappa_2}{\gamma_2 R_4^2} \right) \right]$$

$$S_{xyx}^c = K \left[c_1 \left(\frac{\kappa_2 Y_1}{R_1^2} + \frac{\kappa_1 Y_2}{R_2^2} \right) - c_3 \left(\gamma_2 \frac{\kappa_1 Y_3}{R_3^2} + \gamma_1 \frac{\kappa_2 Y_4}{R_4^2} \right) \right]$$

$$S_{yyx}^c = KX \left[-c_1 \left(\frac{\gamma_1 \kappa_2}{R_1^2} + \frac{\gamma_2 \kappa_1}{R_2^2} \right) + c_2 \left(\frac{\kappa_1}{R_3^2} + \frac{\kappa_2}{R_4^2} \right) \right]$$

(2.60)

$$S_{xxy}^c = K \left[-c_1 \left(\frac{\kappa_1 Y_1}{\gamma_1^2 R_1^2} + \frac{\kappa_2 Y_2}{\gamma_2^2 R_2^2} \right) + c_3 \left(\frac{Y_3 \kappa_2}{\gamma_1 R_3^2} + \frac{Y_4 \kappa_1}{\gamma_2 R_4^2} \right) \right]$$

$$S_{xyy}^c = KX \left[c_1 \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_1 R_2^2} + \frac{\kappa_2}{\gamma_2 R_1^2} \right) - c_3 \left(\frac{\kappa_2}{R_3^2} + \frac{\kappa_1}{R_4^2} \right) \right]$$

$$S_{yyy}^e = K \left[c_1 \left(\frac{\kappa_1 Y_1}{R_1^2} + \frac{\kappa_2 Y_2}{R_2^2} \right) - c_3 \left(\gamma_1 \frac{\kappa_2 Y_3}{R_3^2} + \gamma_2 \frac{\kappa_1 Y_4}{R_4^2} \right) \right]$$

şeklinde yazılabilirler. Burada

$$c_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad c_2 = \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad c_3 = \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad (2.61)$$

$$R_i = \sqrt{(X^2 + Y_i^2)} \quad \theta_i = \arctan\left(\frac{X}{Y_i}\right) \quad (2.62)$$

dir.

BÖLÜM 3. SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ

Sınır eleman denklemleri, ikinci Green teoremi kullanılarak veya mekaniğin temel ilkelerinden örneğin virtüel iş ilkesini kullanarak direkt veya indirekt formülasyonlarla elde edilebilir. Bu ilkelerin yardımıyla ve temel çözümlerin de göz önünde tutulmasıyla bölgede tam olarak gerçekleşen, sınırda ise integral denklem anlamında gerçekleşen bir sınır integral denklemi elde edilir. Problemin çözümünde integrasyon formülasyonu temel alınmış olduğundan bu yöntemde, problemin çözüm bölgesi bir mertebe azalır, yani üç boyutlu problemler için bölgenin yüzeyinde, iki boyutlu problemler için ise bölgenin sınırındaki kapalı eğride ayrıklaştırma yapılarak problemin çözümü elde edilmektedir. Ayrıklaştırma işleminde kullanılan sınırdaki elemanlar sabit, lineer, parabolik, kübik, v.b. seçilebilir. Eğer hesaplanacak iç nokta sayısı fazla ise Sınır Eleman Yöntemi yerine Sonlu elemanlar veya sonlu farklar yöntemi daha uygun olabilir. Bazı durumlar için Sınır elemanlar yöntemiyle Sonlu elemanlar yöntemi beraber kullanılabilir. Bu çalışmada iki boyutlu problemler için sınır elemanlar yöntemlerinden olan indirekt sınır eleman yöntemi aşağıda incelenmiştir.

3.1. İNDİREKT SINIR ELEMAN YÖNTEMİ

İndirekt sınır elemanlar yönteminde, verilen sınır koşulları altında, sınırda fiktif değerler hesaplanır, daha sonra sınırdaki ve bölgedeki bilinmeyenler bu fiktif değerler yardımıyla hesaplanırlar. Buna göre (2.33) ve (2.41) sınırdaki yer değiştirme ve gerilme bağıntıları matris formunda tekrar

$$(u) = (\phi)[U] \quad (3.1)$$

$$(t) = (\phi)[T] \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ϕ sınırdaki fiktif değerler olmak üzere, eğer sınırdaki u yerdeğiştirmeler biliniyor ise (3.1) eşitliğinden ϕ fiktif değerler hesaplanır, daha sonra bu fiktif değerler kullanılarak (3.2) eşitliğinden sınırdaki t gerilmeleri hesaplanır.

Bu çalışmada iki indirekt sınır eleman yöntemi incelenmiş olup, bunlardan birincisi fiktif gerilme yöntemi, ikincisi ise yer değiştirme süreksizliği yöntemidir. Her iki yöntemde de malzeme homojen, izotrop- anizotrop ve lineer elastik malzeme olarak gözönüne alınacaktır. İndirekt sınır elemanlar yönteminde, tesir fonksiyonları kapalı formda kesin olarak elde edilmişlerdir. Nümerik integrasyona göre avantajları; analitik tesir fonksiyonları kesindir, sayısal integrasyondaki tesir fonksiyonları yaklaşıktır, bu nedenle bilgisayar programında tek incelik kullanılması yeterlidir. Bu çalışmada integraller sınırdaki doğrusal elemanlar üzerinde alınmıştır. Fiktif gerilme yönteminde gerilme tekilliği çok düşük olduğundan cismin dış sınırını fiktif gerilme tesir fonksiyonları ile modellemek uygundur. Buna karşın yer değiştirme süreksizlikleri ile çatlak modellemeleri için çok uygundur.

3.1.1. Fiktif Gerilme Yöntemi

Fiktif gerilme yönteminde, bölgenin sınırlarına fiktif kuvvetler uygulanarak problemin çözümü elde edilmektedir. Sınırdaki integrallerin süperpozisyonuyla elde edilen lineer denklem takımının çözülmesiyle fiktif kuvvetler elde edilir. Daha sonra bu fiktif kuvvetler kullanılarak, bölgede ve sınırlardaki gerilmeler ve yer değiştirmeler hesaplanır. Buna göre (2.33) ve (2.39) yer değiştirme ve gerilme eşitlikleri açık olarak

$$u_x = F_x U_{xx} + F_y U_{xy} \quad (3.3)$$

$$u_y = F_x U_{yx} + F_y U_{yy}$$

$$\sigma_{xx} = F_x S_{xxx} + F_y S_{xxy}$$

$$\sigma_{yy} = F_x S_{yyx} + F_y S_{yyy} \quad (3.4)$$

$$\sigma_{xy} = F_x S_{xyx} + F_y S_{xyy}$$

şeklinde yazılarak, bu tekil çözümlerin sabit kuvveler için gerilmeler ve yer değiştirmeler $(-a, a)$ aralığındaki integrasyonu (Şekil 3.1.) sınırdaki her hangi bir doğrusal elemanın üzerindeki üniform yayılı yükten dolayı bölgede (x, y) noktasındaki yer değiştirme ve gerilme bileşenleri sırasıyla,

$$u_x = P_x g_{xx} + P_y g_{xy} \quad (3.5)$$

$$u_y = P_x g_{yx} + P_y g_{yy}$$

$$\sigma_{xx} = P_x f_{xxx} + P_y f_{xxy}$$

$$\sigma_{yy} = P_x f_{yyx} + P_y f_{yyy} \quad (3.6)$$

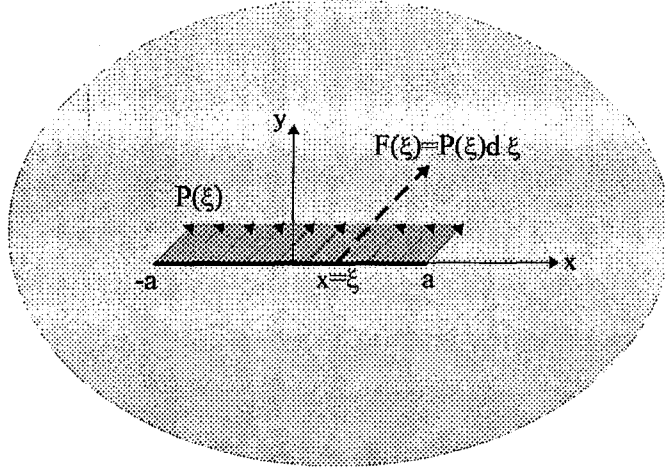
$$\sigma_{xy} = P_x f_{xyx} + P_y f_{xyy}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $g_{xx}, g_{xy}, \dots, f_{xxx}, f_{xxy}, \dots$ v.b. temel çözümlerin $(-a, a)$ aralığındaki integralleri olarak

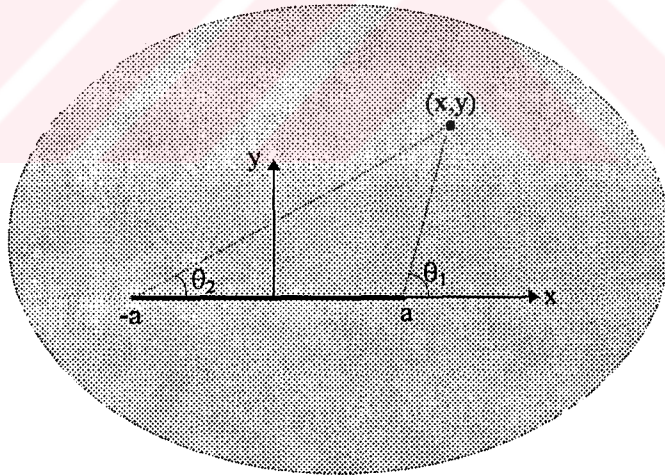
$$g_{ij}(x, y) = \int_{-a}^a U_{ij}(x - \xi, y) d\xi \quad (3.7)$$

$$f_{ijk}(x, y) = \int_{-a}^a S_{ijk}(x - \xi, y) d\xi$$

şeklinde elde edilirler. Ayrıca, bu çözümlerde $x=0$ ve $y=0$ noktasında, integral sonuçları sonlu değerlerdir.



Şekil. 3.1. Kelvin çözümünün integrali.



Şekil 3.2. Bir elemanın uç noktalarındaki açılar.

θ açısı kaynak noktası ile alan noktası arasındaki doğrunun açısı olmak üzere Şekil 3.2 için

$$\theta_1 = \arctan \frac{y}{x-a} \quad \theta_2 = \arctan \frac{y}{x+a} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılarak, elemana $y=0_-$ ve $y=0_+$ yönünde yaklaşıldığı durumda θ_1 ve θ_2 açılarının alacağı değerler

$$\lim_{y \rightarrow 0}(\theta_1 - \theta_2) = \begin{cases} -\pi, & y = 0_- \\ 0, & y = 0 \\ \pi, & y = 0_+ \end{cases} \quad (3.9)$$

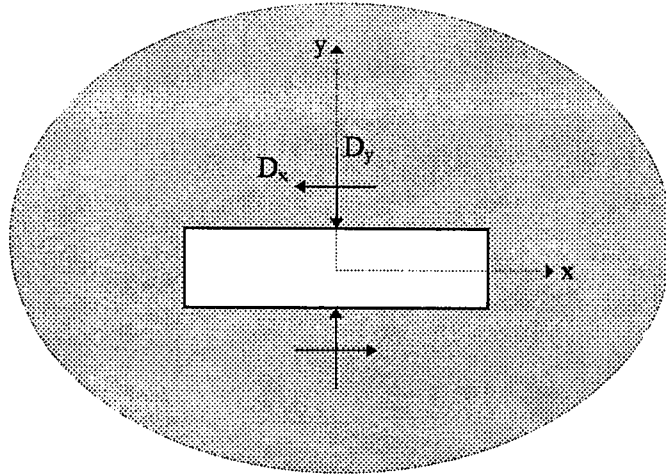
şeklinde olacaktır.

3.1.2. Yer Değiştirme Süreksizlikleri Yöntemi

Yer değiştirme süreksizliği yönteminde çözüm yöntemi, indirekt sınır eleman yöntemiyle tamamen aynıdır, farkı bir yüzey yerine (her hangi bir elemanda) karşılıklı iki yüzey göz önüne alınmasıdır. Buna göre yüzeyler bir eleman olarak kabul edilebilir. Ayrıca fiktif kuvvetler yerine yer değiştirme süreksizlikleri hesaplanır ve bunlar her iki yüzeydeki yer değiştirme farkları olarak

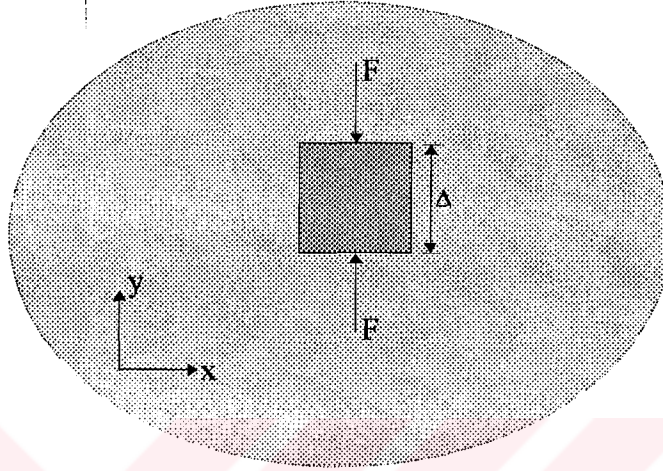
$$D_i = u_i(x, 0_-) - u_i(x, 0_+) \quad (3.10)$$

şeklinde hesaplanabilirler.



Şekil 3.3. Yer değiştirme süreksizlikleri.

Yer değiştirme süreksizliğinin tesir fonksiyonları, sonsuz düzlemdeki tekil kuvvet temel çözümü kullanılarak elde edilir. Bunun için Şekil 3.4'deki gibi tekil kuvvetler bir elemanda karşılıklı yönde uygulanarak, söz konusu elemandaki yer değiştirmeler hesaplanmaktadır.



Şekil 3.4. Zıt yönlü iki kuvvet etkisindeki eleman.

Sonsuz düzlemde bir nokta göz önüne alınsın., burada her hangi bir tekil kuvvetten oluşan tesir fonksiyonu $U_{ij}(x,y)$, alan fonksiyonu $u_i(x,y)$ ve tekil kuvvet F_j olmak üzere (2.33) bağıntısı tekrar

$$u_i(x,y) = F_j U_{ij}(x,y) \quad (3.11)$$

şeklinde yazılarak, sonsuz bölgede kalınlığı Δ olan bir elemanda karşılıklı iki yönde tekil kuvvetler uygulandığında, yerdeğiştirme alan fonksiyonu

$$u_i(x,y) = F_j \left\{ \left(U_{ij} - \frac{\Delta}{2} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y} \right) - \left(U_{ij} + \frac{\Delta}{2} \frac{\partial U_{ij}}{\partial y} \right) \right\} \quad (3.12)$$

olur. Sadeleştirme işlemi yapılarak

$$u_i(x, y) = -\frac{\partial U_{ij}}{\partial y} F_j \Delta \quad (3.13)$$

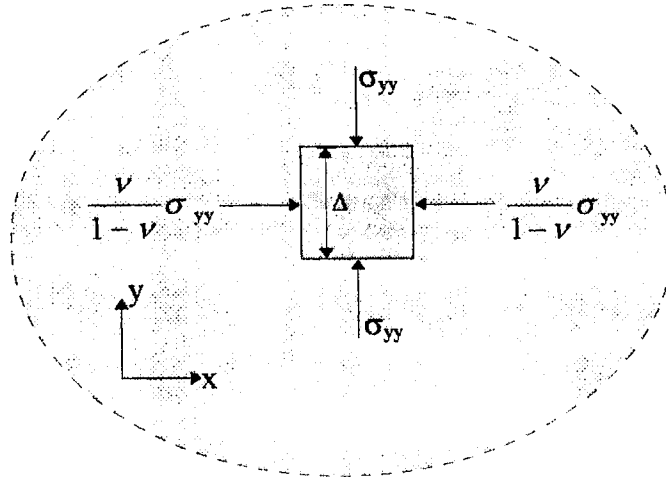
şeklinde temel çözümlerin kuvvet yönündeki türevleri cinsinden elde edilir. Burada $F_j \Delta$ dipol gerilmesi olarak isimlendirilebilir [48].

3.1.2.1. Normal Doğrultudaki Yer Değiştirme Süreksizliği

Elastik, izotrop bir cisim için (2.3) Hooke denklemleri kullanılarak, sadece eksenel şekil değiştirme halinde ($\varepsilon_{yy} \neq 0$, diğer şekil değiştirmeler sıfır), gerilme ifadeleri arasındaki bağıntılar

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{yy} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntı kullanılarak Şekil 3.5'de gösterilen elemandaki yükleme durumunda sadece düşey şekil değiştirme oluşacaktır.



Şekil 3.5. Düşey doğrultuda eksenel şekil değiştirme için gerilme durumu.

Dipol gerilmesi ve Hooke kanunları kullanılarak y yönündeki yer değiştirme süreksizliği

$$D_y = \frac{\Delta F (1-2\nu)(1+\nu)}{E (1-\nu)} \quad (3.15)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre düşey doğrultuda eksenel şekil değiştirme durumunda, (3.13) ve (3.15) eşitliklerini kullanmak suretiyle düzlem içinde bir (x,y) noktasındaki y yönünde yer değiştirme süreksizliğinden dolayı oluşan temel çözümlerde gerilme ve yer değiştirme bileşenleri

$$\sigma_{ij} = -2GD_y \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ \sigma_{ij,b}^y + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{ij,a}^x \right\} \quad (3.16)$$

$$u_j = -2GD_y \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ u_{i,b}^y + \frac{\nu}{1-\nu} u_{i,a}^x \right\}$$

şeklinde elde edilir. Burada x ve y üst indisleri, x ve y yönündeki tekil kuvvetten oluşan alan fonksiyonunu gösterirken, a ve b alt indisleri ise, bu alan fonksiyonlarının a ve b doğrultularındaki türevlerini göstermektedir. Buna göre kartezyen koordinatlarda bu denklemlerden birim yer değiştirme süreksizliğinden dolayı gerilme bileşenleri

$$S_{xy} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} \frac{1}{r^2} \left\{ 1 - \frac{8y^2}{r^2} + \frac{8y^4}{r^4} \right\}$$

$$S_{yy} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} \frac{1}{r^2} \left\{ 1 - \frac{4y^2}{r^2} - \frac{8y^4}{r^4} \right\} \quad (3.17)$$

$$S_{xyy} = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} \frac{2xy}{r^2} \left\{ 1 - \frac{4y^2}{r^2} \right\}$$

ve yer değiştirme bileşenleri

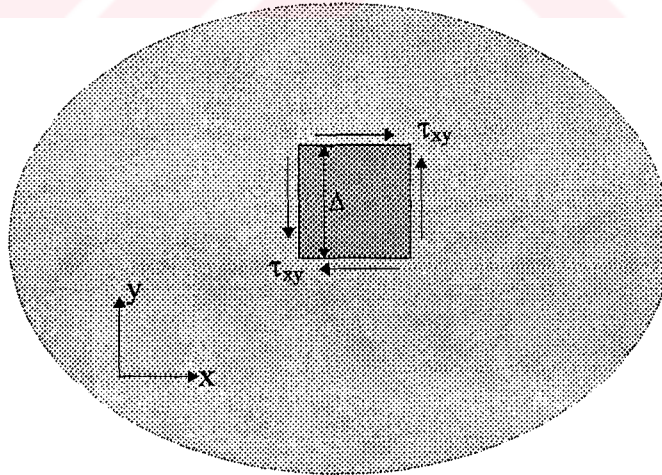
$$U_{xy} = \frac{(1-2\nu)}{8G\pi(1-\nu)^2} \cdot \frac{x}{r^2} \left\{ 1-2\nu - \frac{2y^2}{r^2} \right\}$$

$$U_{yy} = \frac{-(1-2\nu)}{8G\pi(1-\nu)^2} \cdot \frac{y}{r^2} \left\{ 1-2\nu + \frac{2y^2}{r^2} \right\}$$
(3.18)

şeklinde açık olarak elde edilir.

3.1.2.2. Kayma Yer Değiştirme Süreksizliği

Kayma yer değiştirmesi süreksizliği durumunda, şekil değiştirme bileşenlerinden sadece $\varepsilon_{xy} \neq 0$, diğer tüm şekil değiştirme bileşenleri sıfır olacak şekilde yükleme yapılarak elde edilebilir. Homojen, izotrop ortamdaki bir elemanter cisimde kayma yer değiştirmesi süreksizliği meydana getiren gerilme durumunun x - y düzlemindeki bileşenleri Şekil 3.6'de görüldüğü gibidir.



Şekil 3.6. Kayma şekil değiştirmesi için gerilme durumu.

Dipol gerilmesi ve Hooke kanunları kullanılarak x yönündeki yer değiştirme süreksizliği

$$D_x = \frac{\Delta F}{G} \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir. Buna göre, yatay doğrultuda yer değiştirme süreksizliğinden dolayı her hangi bir (x,y) noktasında oluşan temel çözümlerde gerilme ve yer değiştirme bileşenleri

$$\sigma_{ij} = -GD_x \left\{ \sigma_{ij,b}^x + \sigma_{ij,a}^y \right\} \quad (3.20)$$

$$u_i = -GD_x \left\{ u_{i,b}^x + u_{i,a}^y \right\}$$

şeklinde elde edilirler. Bu denklemler kullanılarak, birim kayma yer değiştirme süreksizliğinden dolayı (x,y) kartezyen koordinatlarda gerilme ve yer değiştirme bileşenleri sırayla

$$S_{xxx} = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{2xy}{r^4} \left\{ -3 + \frac{4y^2}{r^2} \right\}$$

$$S_{yyx} = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{2xy}{r^4} \left\{ 1 - \frac{4y^2}{r^2} \right\} \quad (3.21)$$

$$S_{xyx} = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{r^2} \left\{ 1 - \frac{8y^2}{r^2} + \frac{8y^4}{r^4} \right\}$$

$$U_{xx} = \frac{1}{4G\pi(1-\nu)} \cdot \frac{y}{r^2} \left\{ -3 - 2\nu + \frac{2y^2}{r^2} \right\} \quad (3.22)$$

$$U_{yx} = -\frac{1}{4G\pi(1-\nu)} \cdot \frac{x}{r^2} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{2y^2}{r^2} \right\}$$

olarak elde edilir. Buna göre her iki yöndeki sabit yer değiştirme süreksizliği için, bu

tekil çözümlerin $(-a, a)$ aralığındaki integrasyonu ile sınırdaki her hangi bir doğrusal elemandan dolayı bölgede (x, y) noktasındaki gerilme ve yer değiştirme bileşenleri

$$u_x = D_x g_{xx} + D_y g_{xy} \quad (3.23)$$

$$u_y = D_x g_{yx} + D_y g_{yy}$$

$$\sigma_{xx} = D_x f_{xxx} + D_y f_{xxy}$$

$$\sigma_{yy} = D_x f_{yyx} + D_y f_{yyy} \quad (3.24)$$

$$\sigma_{xy} = D_x f_{xyx} + D_y f_{xyy}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $g_{xx}, g_{xy}, \dots, f_{xxx}, f_{xxy}, \dots$ v.b. fonksiyonları (3.17), (3.18), (3.21) ve (3.22) tekil çözümlerin $(-a, a)$ aralığındaki integralleri olup

$$g_{ij}(x, y) = \int_{-a}^a U_{ij}(x - \xi, y) d\xi \quad (3.25)$$

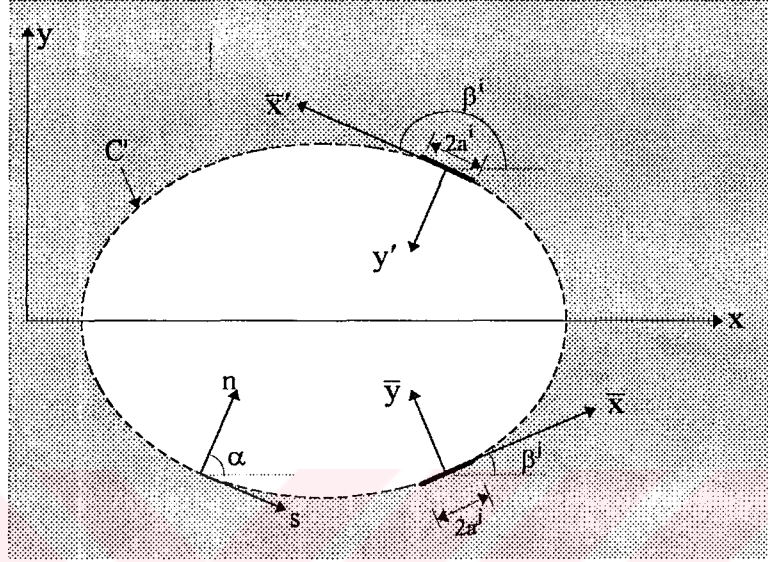
$$f_{ijk}(x, y) = \int_{-a}^a S_{ijk}(x - \xi, y) d\xi$$

eşitlikleriyle elde edilirler.

3.2. SAYISAL HESAP YÖNTEMİ

Şekil 3.7'de görüldüğü gibi sonsuz düzlemde kapalı bir boşluk gözönüne alınsın. Burada sınırlar $2a$ uzunluğunda doğrusal elemanlara bölünerek, j elemanındaki yüklemenden dolayı i elemanın orta noktasındaki gerilme ve yer değiştirmeler hesaplanacaktır. Bunun için her hangi bir doğrultuda bir eleman gözönüne alarak tesir fonksiyonlarının o doğrultu üzerindeki integrasyonundan elde edilmesi gerekir.

İzotrop ortam için direk integrasyon sonuçlarını her hangi bir doğrultuda yazmak sonucu değiştirmemektedir. Buna göre (x,y) global koordinatlar olmak üzere koordinat dönüşümleri



Şekil 3.7. Sonsuz düzlemde kapalı bölge.

$$\bar{x} = (x^i - x^j) \cos \beta + (y^i - y^j) \sin \beta \quad (3.26)$$

$$\bar{y} = -(x^i - x^j) \sin \beta + (y^i - y^j) \cos \beta$$

şeklinde yazılabilir. Bu doğrultudaki yer değiştirme ve gerilme bileşenleri ise

$$\bar{u}_x = \bar{\phi}_x \bar{g}_{xx} + \bar{\phi}_y \bar{g}_{xy} \quad (3.27)$$

$$\bar{u}_y = \bar{\phi}_x \bar{g}_{yx} + \bar{\phi}_y \bar{g}_{yy}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= \bar{\phi}_x \bar{f}_{xxx} + \bar{\phi}_y \bar{f}_{xxy} \\
\bar{\sigma}_{yy} &= \bar{\phi}_x \bar{f}_{yyx} + \bar{\phi}_y \bar{f}_{yyy} \\
\bar{\sigma}_{xy} &= \bar{\phi}_x \bar{f}_{xyx} + \bar{\phi}_y \bar{f}_{xyy}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde lokal koordinatlar cinsinden yazılabilir. Lokal koordinatlardaki yer değiştirme ve gerilme bileşenleri ise global koordinatlar cinsinden

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x &= u_x \cos \beta + u_y \sin \beta \\
\bar{u}_y &= -u_x \sin \beta + u_y \cos \beta
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= \sigma_{xx} \cos^2 \beta + 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \sin^2 \beta \\
\bar{\sigma}_{yy} &= \sigma_{xx} \sin^2 \beta - 2\sigma_{xy} \sin \beta \cos \beta + \sigma_{yy} \cos^2 \beta \\
\bar{\sigma}_{xy} &= -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \beta \cos \beta + \sigma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

şeklinde yazılabilir. Her hangi bir lokal koordinatlardaki $(\bar{x}', \bar{y}')$ (Şekil 3.7.) yer değiştirme ve gerilme bileşenleri $(\bar{x}, \bar{y})$ lokal koordinat sistemindeki değerleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\bar{u}'_x &= \bar{u}_x \cos \alpha + \bar{u}_y \sin \alpha \\
\bar{u}'_y &= -\bar{u}_x \sin \alpha + \bar{u}_y \cos \alpha
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}'_{xx} &= \bar{\sigma}_{xx} \cos^2 \alpha - 2\bar{\sigma}_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \bar{\sigma}_{yy} \sin^2 \alpha \\
\bar{\sigma}'_{yy} &= \bar{\sigma}_{xx} \sin^2 \alpha + 2\bar{\sigma}_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \bar{\sigma}_{yy} \cos^2 \alpha \\
\bar{\sigma}'_{xy} &= (\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \bar{\sigma}_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

olarak elde edilir. Burada $\alpha = \beta^i - \beta^j$ ve (s,n) her hangi bir lokal koordinat sistemi olmak üzere, $\bar{u}'_x = u^i_s$, $\bar{u}'_y = u^i_n$, $\bar{\sigma}'_{xy} = \sigma^i_s$, $\bar{\sigma}'_{yy} = \sigma^i_n$, $\bar{\phi}_x = \phi^i_s$ ve $\bar{\phi}_y = \phi^i_n$ tanımları yapılırsa her hangi bir i noktasında lokal koordinatlarda yer değiştirme ve gerilme bileşenleri

$$u^i_s = \phi^j_s B^{ij}_{ss} + \phi^j_n B^{ij}_{sn} \tag{3.33}$$

$$u^i_n = \phi^j_s B^{ij}_{ns} + \phi^j_n B^{ij}_{nn}$$

$$\sigma^i_s = \phi^j_s A^{ij}_{ss} + \phi^j_n A^{ij}_{sn} \tag{3.34}$$

$$\sigma^i_n = \phi^j_s A^{ij}_{ns} + \phi^j_n A^{ij}_{nn}$$

şeklinde elde edilirler. Burada s ve n lokal koordinatlar olmak üzere, A^{ij}_{ss} ve B^{ij}_{ss} vs. tesir fonksiyonları fiktif gerilme yönteminde (3.7) eşitliklerinin, yer değiştirme süreksizliği yönteminde (3.25) eşitliklerinin lokal koordinatlarda $(-a,a)$ aralığındaki integrasyon sonuçları olup her iki yöntem için genel olarak

$$\begin{aligned}
A^{ij}_{ss} &= (\bar{f}_{xxx} - \bar{f}_{yyx}) \sin \alpha \cos \alpha - \bar{f}_{xyx} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\
A^{ij}_{sn} &= (\bar{f}_{xxy} - \bar{f}_{yyy}) \sin \alpha \cos \alpha - \bar{f}_{xyy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\
A^{ij}_{ns} &= \bar{f}_{xxx} \cos^2 \alpha + 2\bar{f}_{xyx} \sin \alpha \cos \alpha + \bar{f}_{yyx} \sin^2 \alpha \\
A^{ij}_{nn} &= \bar{f}_{xxy} \cos^2 \alpha + 2\bar{f}_{xyy} \sin \alpha \cos \alpha + \bar{f}_{yyy} \sin^2 \alpha
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
B_{ss}^{ij} &= \bar{g}_{xx} \cos \alpha + \bar{g}_{yx} \sin \alpha \\
B_{sn}^{ij} &= \bar{g}_{xy} \cos \alpha + \bar{g}_{yy} \sin \alpha \\
B_{ns}^{ij} &= -\bar{g}_{xx} \sin \alpha + \bar{g}_{yx} \cos \alpha \\
B_{nn}^{ij} &= -\bar{g}_{xy} \sin \alpha + \bar{g}_{yy} \cos \alpha
\end{aligned} \tag{3.36}$$

bağıntılarından elde edilirler. (3.33) ve (3.34) eşitlikleri $j=1, \dots, N$ elemanları için hesaplanarak süperpozisyon yapılırsa

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} \phi_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} \phi_n^j \tag{3.37}$$

$$\sigma_n^i = \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} \phi_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} \phi_n^j$$

$$u_s^i = \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} \phi_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} \phi_n^j$$

(3.38)

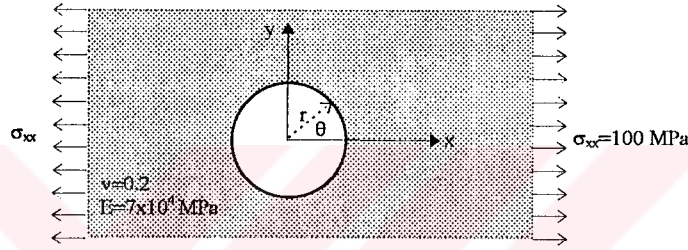
$$u_n^i = \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} \phi_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} \phi_n^j$$

şeklinde $2N$ tane lineer denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımlarının verilen sınır koşulları altında çözülmesiyle sınırdaki fiktif değerler elde edilir. Daha sonra bu fiktif değerler kullanılarak, bölgede ve sınırlardaki gerilmeler ve yer değiştirmeler hesaplanır. Buradaki fiktif değerler; fiktif gerilme yöntemi için fiktif kuvvetler iken yer değiştirme süreksizliği yöntemi için yer değiştirme süreksizlikleridir.

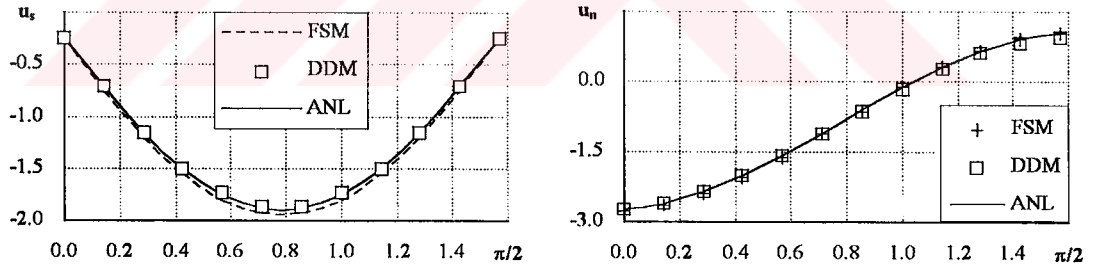
3.3. SAYISAL ÖRNEKLER

3.3.1. Sonsuz Düzlemde Dairesel Boşluk

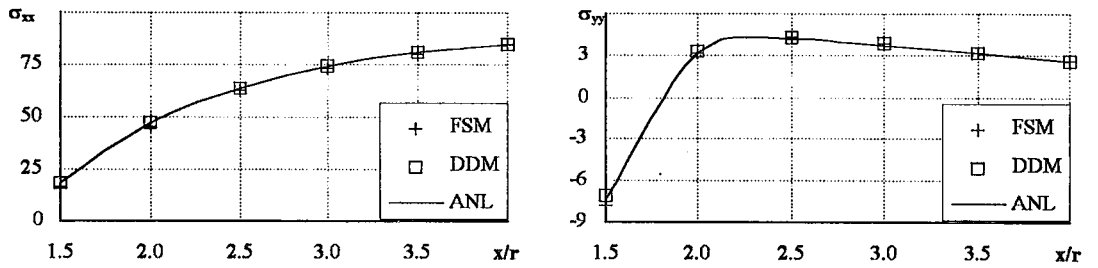
Bu örnekte sonsuzda eksenel yük (Şekil 3.8) ve hidrostatik iç basınç (Şekil 3.13) etkisinde sonsuz düzlem içinde dairesel boşluk problemi incelenmiştir. Her iki örnek te de $1/4$ daire parçası gözönüne alınarak sınır 12 eşit ve doğrusal elemanlara bölünmüştür. Burada FSM: Fiktif gerilme yöntemi ile DDM: Yer değiştirme süreksizliği yöntemiyle ANL: Analitik olarak hesaplanan değerlerdir.



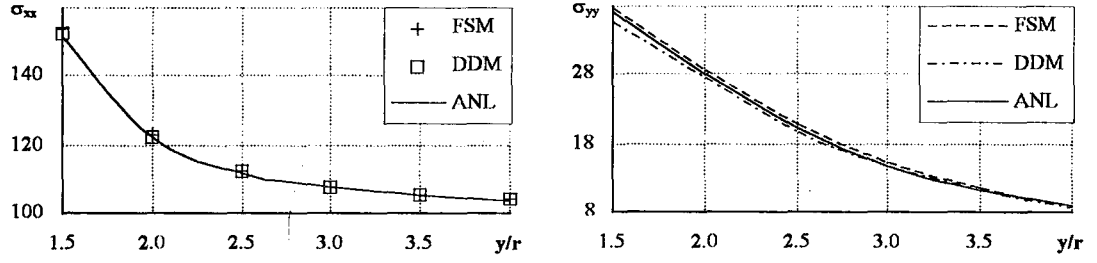
Şekil 3.8. Sonsuz düzlemde dairesel boşluk.



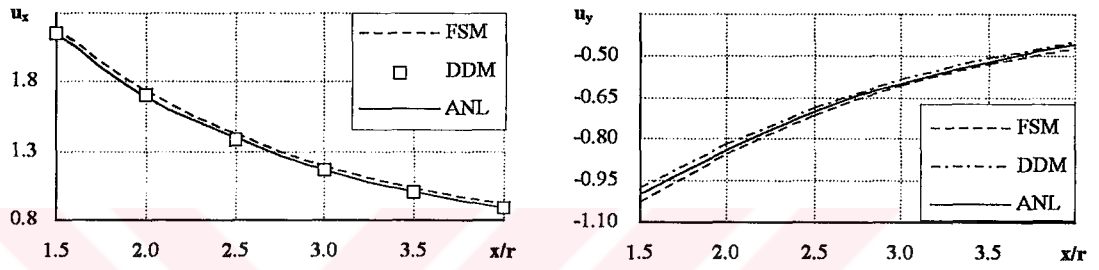
Şekil 3.9. Boşluk sınırında teğetsel ve normal doğrultudaki yer değiştirmeler.



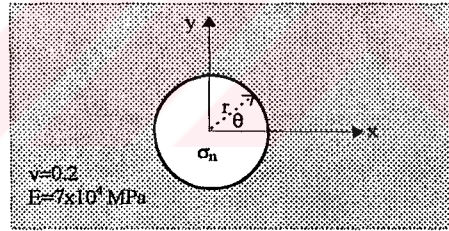
Şekil 3.10. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.



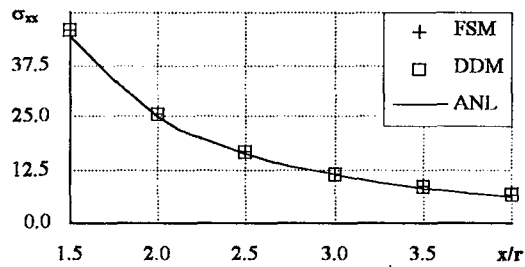
Şekil 3.11. y ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.



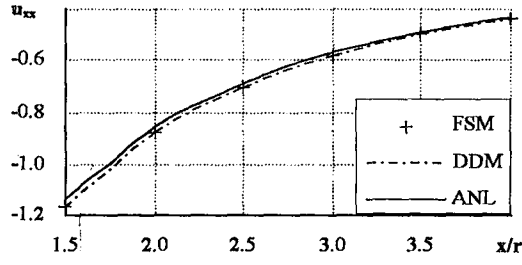
Şekil 3.12. x ekseninde u_x ve u_y yer değiştirmeler.



Şekil 3.13. $\sigma_n=100 \text{ MPa}$ iç basınç etkisi altındaki sonsuz düzlemde dairesel boşluk.



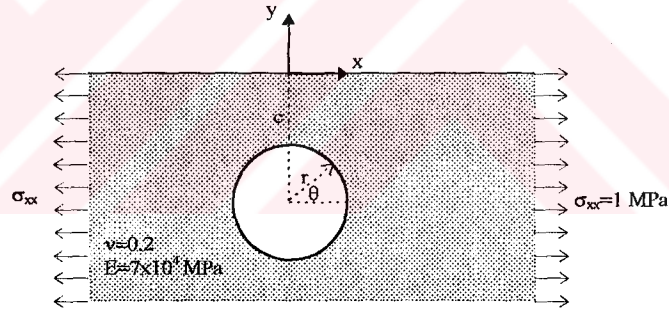
Şekil 3.14. x ekseninde σ_{xx} gerilmesi.



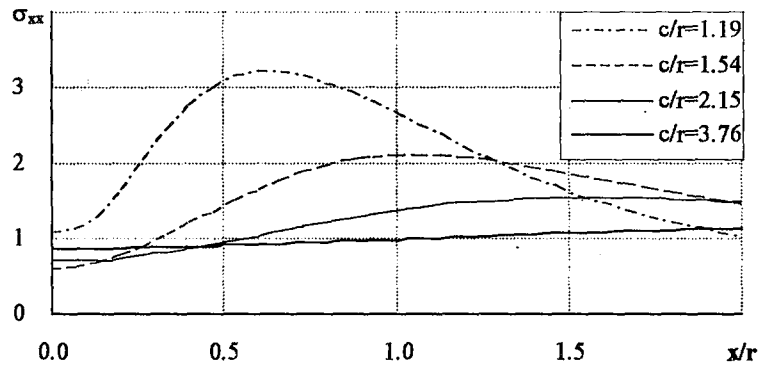
Şekil 3.15. x ekseninde u_x yer değiştirmesi.

3.3.2. Yarı -Sonsuz Düzlemde Dairesel Boşluk

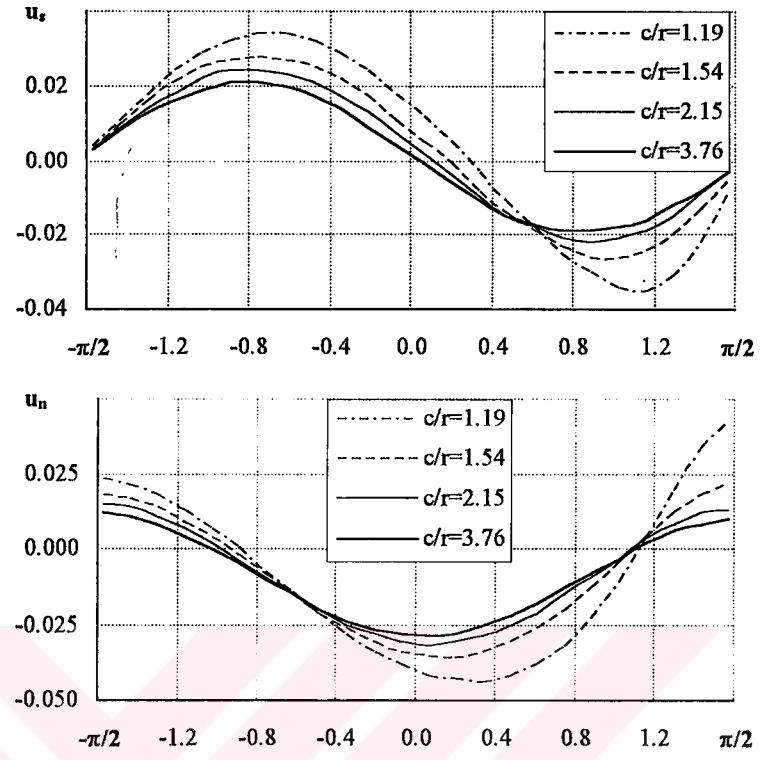
Şekil 3.16'da görülen yarı-sonsuz düzlemde yükleme durumu verilen dairesel boşlukta, dairenin $1/2$ parçası alınarak 24 eşit elemana bölünmüş olup c/r oranları için yüzeydeki σ_{xx} değerleri ve boşluğun yüzeyindeki yer değiştirmeler DDM ile incelenmiştir.



Şekil 3.16. Yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluk.



Şekil 3.17. x ekseninde σ_{xx} gerilmeleri.

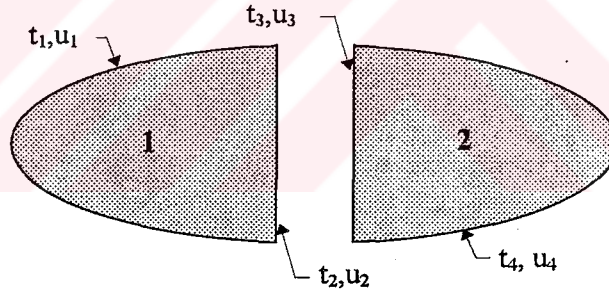


Şekil 3.18. Boşluk sınırında yer değiştirmeler.

BÖLÜM 4. İNDİREKT SINIR ELEMANLARDA ÖZEL UYGULAMALAR

4.1. İKİ MALZEMELİ BÖLGE

Bu bölümde iki malzemeli bölgede indirekt sınır eleman yöntemi çözümleri incelenecektir. Bu amaçla Şekil. 4.1'de görüldüğü gibi iki alt bölgeden oluşan bir cisim gözönüne alınarak, malzeme her iki bölgede de homojen, izotrop ve lineer elastik olarak kabul edilmiştir. Genel olarak sınırdaki yazılan sınır eleman denklemlerine ek olarak ara yüzeydeki süreklilik koşulları kullanılarak sınır eleman denklemleri elde edilmektedir.



Şekil 4.1. İki malzemeli bölge

Ara yüzeydeki süreklilik koşulları

i) uygunluk koşulu

$$u_2 - u_3 = 0 \quad (4.1)$$

ii) ve denge koşulu

$$t_2 + t_3 = 0 \quad (4.2)$$

olmak üzere iki denkelmden ibarettir. Sınır eleman denklemleri ise "1" indisi birinci bölge ve "2" indisi ikinci bölge olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & 0 & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & U_{43} & U_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

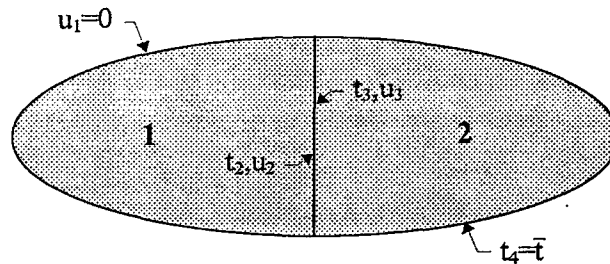
şeklinde yazılabilirler. (4.1) ve (4.2) koşulları uygulandıktan sonra (4.3) eşitliği :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & T_{33} & T_{34} \\ 0 & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 \\ 0 & -U_{33} & U_{34} \\ 0 & -U_{43} & U_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_4 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

şekline dönüşür. Örnek olarak, sınır koşulları Şekil 4.2'de tanımlandığı gibi bir problem göz önüne alındığı taktirde, bilinmeyenler u_2 , u_4 , t_1 ve t_2 olmak üzere (4.4) denklemi

$$\begin{bmatrix} T_{12} & -U_{12} & 0 & -U_{11} \\ T_{22} & -U_{22} & 0 & -U_{21} \\ T_{33} & U_{33} & T_{34} & 0 \\ T_{43} & U_{43} & T_{44} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ t_2 \\ u_4 \\ t_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{34} \\ U_{44} \end{bmatrix} \{t_4\} \quad (4.5)$$

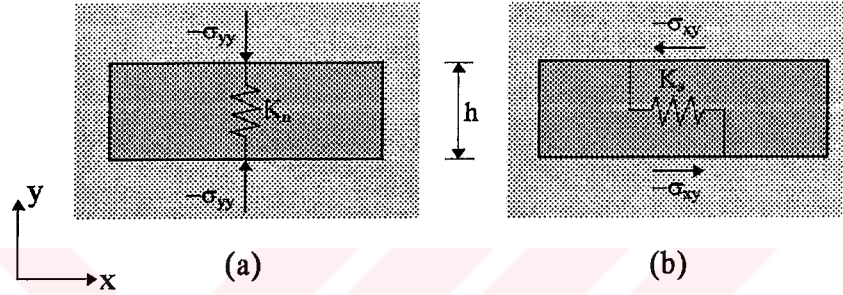
şeklinde yazılabilir. Bu lineer denklem sisteminin çözülmesiyle sınırdaki ve ara yüzeydeki bilinmeyenler elde edilir.



Şekil 4.2. İki malzemeli bölgede sınır koşulları

4.2. DEĞME ELEMAN

Bir değme eleman, sıkışabilir elastik malzeme ile dolu olan uzun bir çatlak olarak düşünülebilir. Ayrıca değme eleman, karşılıklı iki yüzey arasında yay katsayıları K_n ve K_s olan, yer değiştirme süreksizlikleriyle modellenebilirler. Şekil 4.3.



Şekil 4.3. Değme elemanı.

Bunun için küçük yer değiştirmeler varsayımı ile (2.19) yer değiştirme şekil değiştirme bağıntısı bir değme eleman için

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır. Burada x yönündeki sıkışmanın sabit olduğu ($\partial u_y / \partial x = 0$) kabul edilirse bu eşitlikler, sonlu fark şeklinde ise

$$\varepsilon_{yy} = \frac{u_y(x, h/2) - u_y(x, -h/2)}{h} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{u_x(x, h/2) - u_x(x, -h/2)}{2h}$$

olarak yazılabilir. Değme elemandaki yer değiştirme süreksizlikleri

$$D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+) \quad (4.8)$$

$$D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+)$$

olarak yazılabildiği için (4.7) ifadeleri yer değiştirme süreksizlikleri cinsinden

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{D_y}{h} \quad \varepsilon_{xy} = -\frac{D_x}{2h} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada değme elemanın malzemesinin elastisite modülü E_0 kayma modülü G_0 olmak üzere gerilme bileşenleri

$$\sigma_{yy} = E_0 \varepsilon_{yy} = -E_0 \frac{D_y}{h} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{xy} = 2G_0 \varepsilon_{xy} = -G_0 \frac{D_x}{h}$$

şeklinde yer değiştirme süreksizlikleri cinsinden elde edilirler. Değme elemanın yay katsayıları

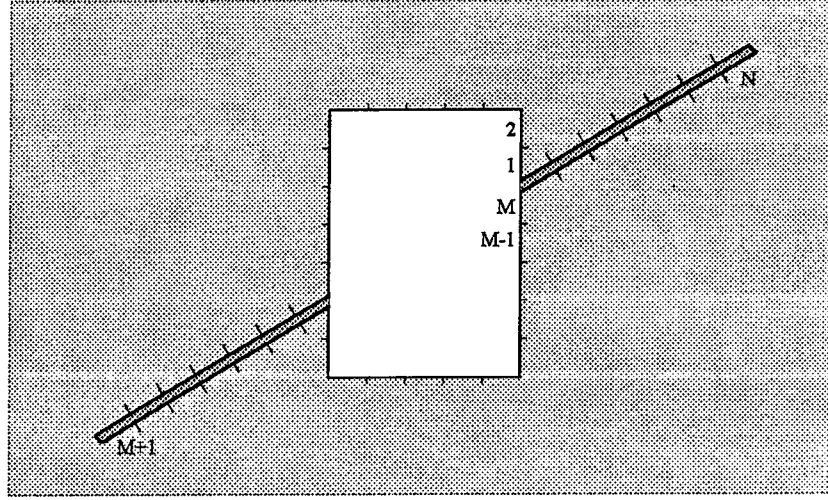
$$K_n = \frac{E_0}{h} \quad K_s = \frac{G_0}{h} \quad (4.11)$$

olarak kabul edilirse (4.10) ifadesindeki gerilme bileşenleri, (s, n) lokal koordinat sisteminde

$$\sigma_n = -K_n D_n \quad \sigma_s = -K_s D_s \quad (4.12)$$

şeklinde değme elemandaki gerilmeler elde edilir.

Sayısal Hesap Yöntemi: Şekil 4.4'de görüldüğü gibi bir boşluk ve fayın şematik gösteriminden oluşan bir sistem bu çalışmada incelenmiştir.



Şekil 4.4. Sonsuz düzlemde boşluk ve fayın şematik gösterimi

Burada M adet fiktif gerilme elemanı boşluk yüzeyinde, $N-M$ adet değme eleman çatlaklarda olmak üzere sınır eleman denklemleri aşağıda verilmiştir. Boşluk serbest yüzeylerinde her hangi bir elemanda $(\sigma_s^i)_0$ ve $(\sigma_n^i)_0$ sınır koşulları olmak üzere

$$-(\sigma_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N (A_{ss}^{ij} \phi_s^j + A_{sn}^{ij} \phi_n^j) \quad 1 \leq i \leq M \quad (4.13)$$

$$-(\sigma_n^i)_0 = \sum_{j=1}^N (A_{ns}^{ij} \phi_s^j + A_{nn}^{ij} \phi_n^j) \quad 1 \leq i \leq M$$

$2M$ adet denklem sistemi elde edilir. Çatlak serbest yüzeylerinde ise

$$0 = K_s^i \phi_s^i + \sum_{j=1}^N (A_{ss}^{ij} \phi_s^j + A_{sn}^{ij} \phi_n^j) \quad M+1 \leq i \leq N \quad (4.14)$$

$$0 = K_n^i \phi_n^i + \sum_{j=1}^N (A_{ns}^{ij} \phi_s^j + A_{nn}^{ij} \phi_n^j) \quad M+1 \leq i \leq N$$

$2(N-M)$ adet denklem sistemi elde edilir. Bu iki denklem sistemi çözülerek ϕ_s^i ve ϕ_n^i bilinmeyenleri hesaplanır. Burada A_{ss}^{ij} vs. katsayıları $1 \leq j \leq M$ durumunda fiktif gerilme (yer değiştirme süreksizliği) yönteminden, $M+1 \leq j \leq N$ durumunda yer değiştirme süreksizlikleri yönteminden elde edilirler. Ayrıca fiktif gerilme bilinmeyenleri $1 \leq j \leq M$ için $\phi_s^j = P_s^j$ ve $\phi_n^j = P_n^j$ olur. Yer değiştirme süreksizliği bilinmeyenleri ise $M+1 \leq j \leq N$ için $\phi_s^j = D_s^j$ ve $\phi_n^j = D_n^j$ olur.

4.3. MOHR-COULOMB ELEMANI

Değme elemanda elemanın içi lineer elastik malzemeyle dolu olduğu düşünülmüştü. Bu bölümde ise inelastik şekil değiştirme yapan malzeme ile dolu olduğu düşünülerek kayma gerilmesi ile normal gerilme arasında Mohr-Coulomb hipotezi

$$|\sigma_s| \leq c + (-\sigma_n) \tan \mu \quad (4.15)$$

olarak gözönüne alınmıştır. Burada c , değme elemanın içindeki malzemenin kohezyon katsayısı ve μ sürtünme açısıdır.

Bu bölümde başlangıçta sınırdaki gerilmeler sıfır alınarak yük artımı yöntemi kullanılmıştır. Bunun için k adım numarası ve K adım sayısı olmak üzere Mohr-Coulomb elemanında hesaplanan yüzey gerilmesi

$$t'_i = -k\Delta(t_i)_0 = -k(t_i)_0 / K \quad (4.16)$$

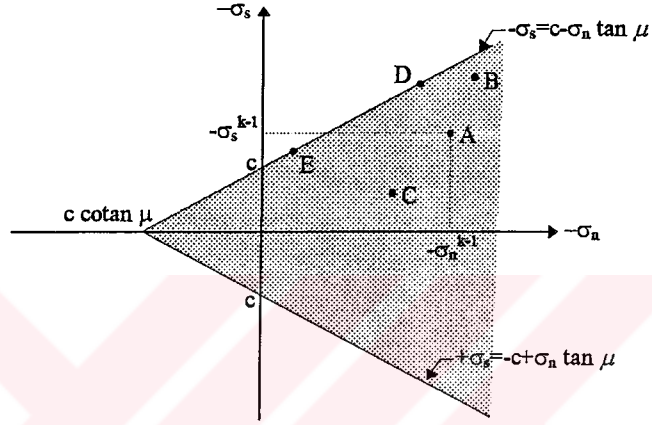
ve toplam gerilme

$$t_i = (t_i)_0 + t'_i = (t_i)_0 (1 - k / K) \quad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Son adım için $k=K$ olması durumunda $t_i=0$ olur. Buna göre (4.13) eşitlikleri k adımda tünel serbest yüzeyindeki elemanlar için

$$\left. \begin{aligned} \frac{-k}{K}(\sigma_s^i)_0 &= \sum_{j=1}^N \left(A_{ss}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{sn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \\ \frac{-k}{K}(\sigma_n^i)_0 &= \sum_{j=1}^N \left(A_{ns}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{nn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq j \leq M \quad (4.18)$$

denklem sistemi, değme elemandaki denklemlerde ise (4.14) eşitlikleri kullanılır.



Şekil 4.5. Farklı gerilme durumları için Mohr-Coulomb elemanın davranışı

Değme elemandaki kayma durumu Şekil 4.5. de görüldüğü gibi, eğer $k-1$. ve önceki adımlarda her hangi bir inelastik durum yoksa gerilme durumu A noktasındadır. Bir sonraki yük adımında yükün artması veya azaltılması durumunda gerilme durumu B ve C noktalarına gelir. D ve E noktalarında göçme ve kayma gibi iki durum söz konusu olup; D noktasında hesaplanan basınç gerilmesi bir önceki adımdan büyüktür ve göçme vardır, E noktasında ise basınç gerilmesi bir önceki adıma göre azalmasıyla kayma oluşmaktadır.

Mohr-Coulomb elemanında her hangi bir k . adımdaki normal ve kayma gerilmeleri

$$\sigma_n^{i(k)} = (\sigma_n^i)_0 + \sum_{j=1}^N \left(A_{ns}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{nn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \quad (4.19)$$

$$\sigma_s^{i(k)} = (\sigma_s^i)_0 + \sum_{j=1}^N \left(A_{ss}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{sn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right)$$

şeklinde olup (4.15) eşitliğinden bu adımdaki Mohr-Coulomb hipotezi

$$\sigma_s^{*i(k)} = c^i - \sigma_n^{i(k)} \tan \mu^i \quad (4.20)$$

şeklinde yazılarak hesaplanan kayma gerilmesi $|\sigma_s^{i(k)}| \leq \sigma_s^{*i(k)}$ koşulunu sağlamalıdır.

Bunun için gerilmelere

$$\sigma_s^{i(k)} = \sigma_s^{i(k-1)} + \Delta \sigma_s^{i(k)} \quad (4.21)$$

şeklinde yükleme veya boşaltma yapılır. Burada söz konusu adımdaki gerilme farkı yer değiştirme süreksizliğine bağlı olarak

$$\Delta \sigma_s^{i(k)} = -K_s^i \left(\phi_s^{i(k)} - \phi_s^{i(k-1)} \right) \quad (4.22)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buna göre (4.19), (4.21) ve (4.22) bağıntıları kullanılarak sınır koşulu bir önceki adım cinsinden (4.14) denklemlerinden birincisi

$$\sigma_s^{i(k-1)} + K_s^i \phi_s^{i(k-1)} - (\sigma_s^i)_0 = K_s^i \phi_s^{i(k)} + \sum_{j=1}^N \left(A_{ss}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{sn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \quad (4.23)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $|\sigma_s^{i(k)}| > \sigma_s^{*i(k)}$ ise bu denklem yerine

$$\pm \sigma_s^{*i(k)} - (\sigma_s^i)_0 = \sum_{j=1}^N \left(A_{ss}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{sn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \quad (4.24)$$

denklemleri kullanılır. Mohr-Coulomb elemanlarında her hangi bir k . yükleme durumunda normal gerilmeler (4.14) eşitliğinden

$$0 = K_n^i \phi_n^{i(k)} + \sum_{j=1}^N \left(A_{ns}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{nn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \quad (4.25)$$

olarak kullanılır.

Eğer bir Mohr-Coulomb elemanında hesaplanan normal gerilmeler $\sigma_n^i > c^i \cot \alpha \mu^i$ ise çekme çatlağı vardır ve bu durumda (4.23), (4.24) ve (4.25) denklemleri yerine

$$\begin{aligned} -(\sigma_s^i)_0 &= \sum_{j=1}^N \left(A_{ss}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{sn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \\ -(\sigma_n^i)_0 &= \sum_{j=1}^N \left(A_{ns}^{ij} \phi_s^{j(k)} + A_{nn}^{ij} \phi_n^{j(k)} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

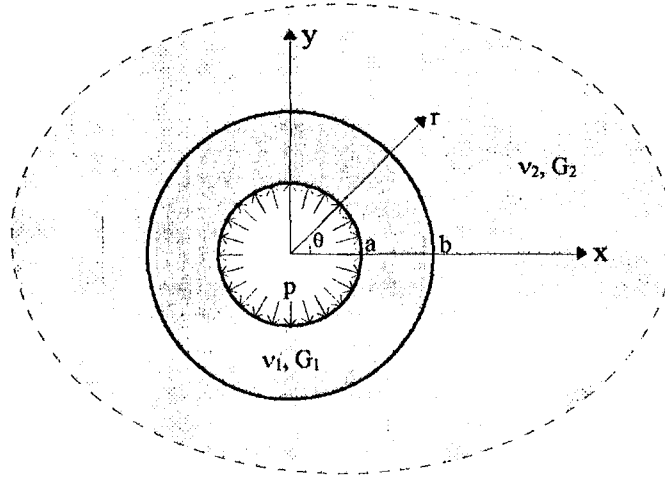
denklemleri kullanılır.

4.4. SAYISAL ÖRNEKLER

4.4.1. Sonsuz Düzlemde İki Malzemeli Bölge

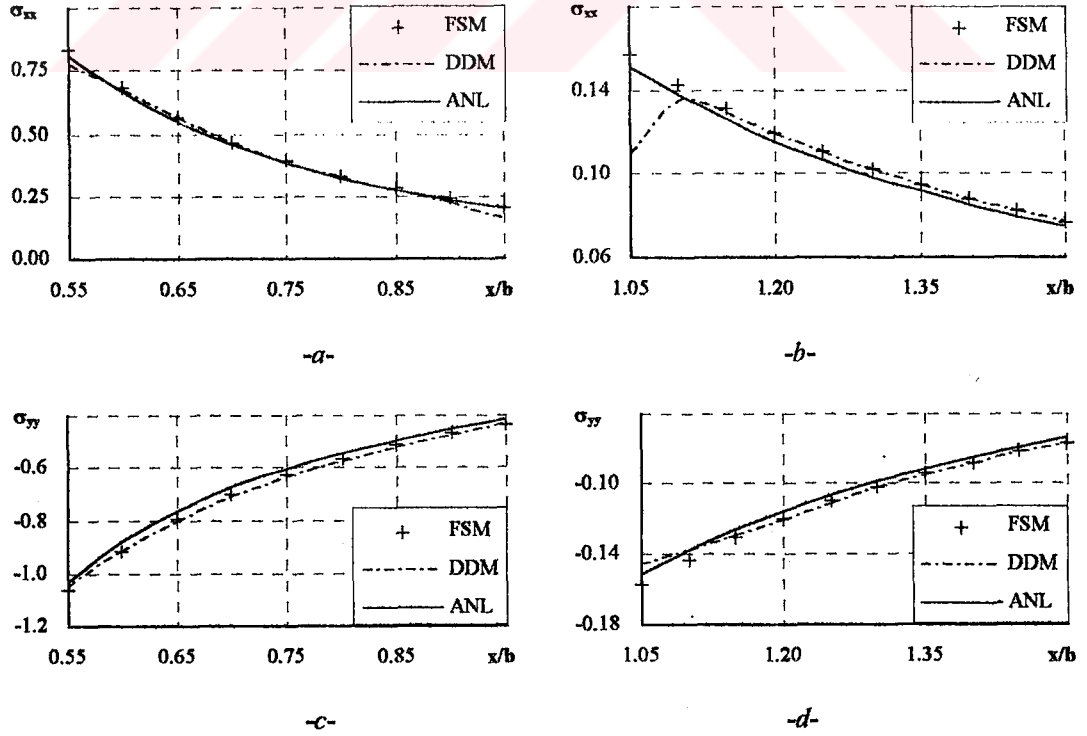
Homojen olmayan elastik bir cisim için bir sınır değer problemine basit bir örnek olarak bir düzlem cismin içinde farklı malzemeden yapılmış, iç basınç etkisindeki bir cisim göz önüne alınacaktır (Şekil 4.6). Burada sayısal değerler $a/b=1/2$, $\nu_1=\nu_2=0.25$, $G_1/G_2=2$ ve $P/G_1=10^{-3}$ olmak üzere kaynak [1]'den alınmıştır.

Bu problemin çözümü $r = b$ ara yüzeyinde yer değiştirme ve radyal gerilmelerin sürekliliğini gerçekleyen biçimde kalın silindirlere için geçerli olan analitik formüller yardımıyla ve FSM ile kaynak [1]'de çözülmüştür.

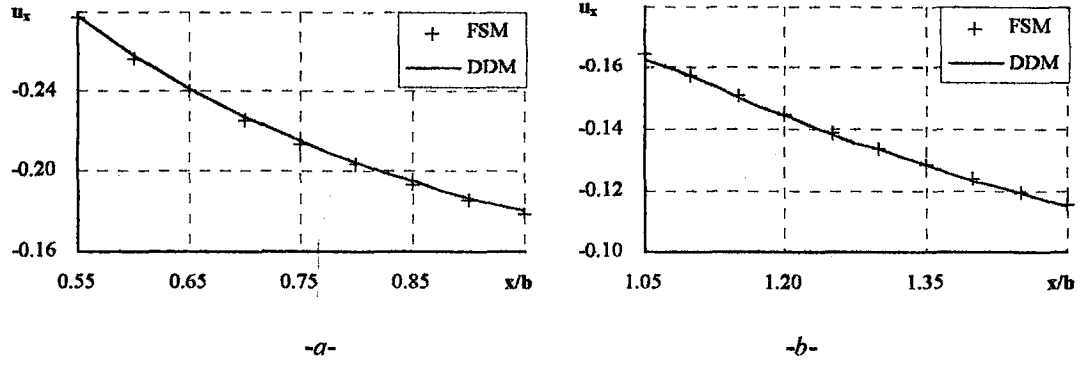


Şekil 4.6. İç basınç etkisi altında iki malzemeli bölge.

Bu çalışmada ise aynı problem yer değiştirme süreksizliği yöntemiyle çözülmüştür. (4.4) bağıntıları kullanılarak $1/4$ daire üzerinde, $r=a$ dairesel sınırında 12 eleman ve $r=b$ sınırında 24 eleman alınarak sonuçlar elde edilmiştir. [1]'de verilen sonuçlar, analitik sonuçlar ve bu çalışmadaki sonuçlar Şekil 4.7-8'de karşılaştırılmıştır.



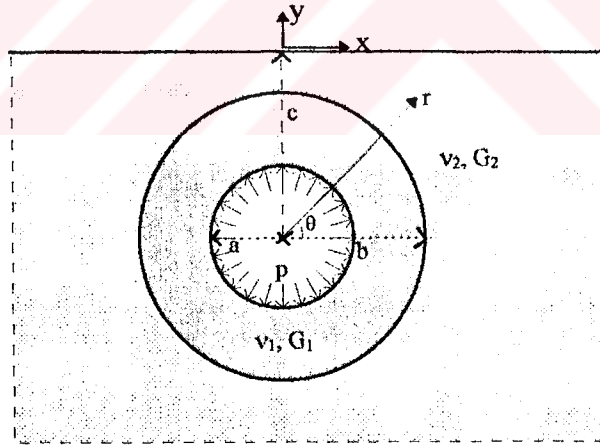
Şekil 4.7. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.



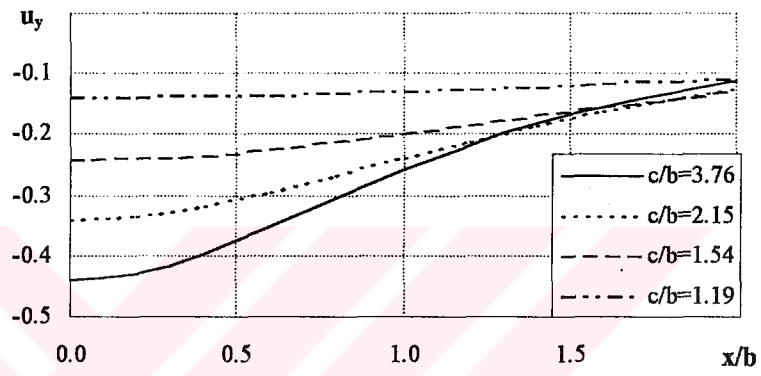
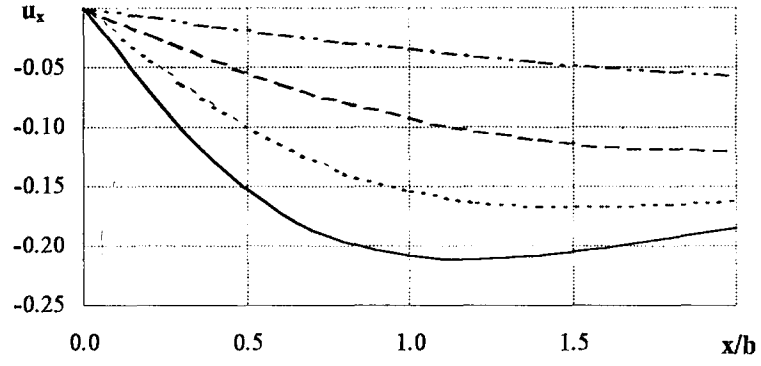
Şekil 4.8. x ekseninde u_x yer değiştirmeleri.

4.4.2. Yarı-Sonsuz Düzlemde İki Malzemeli Bölge

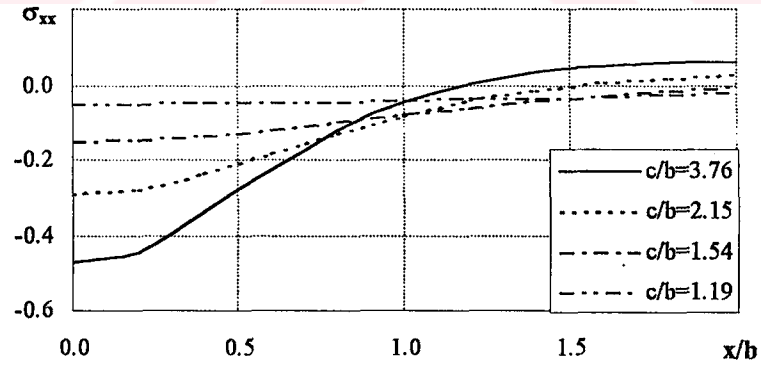
Bölüm 4.4.1. deki sayısal örnek, yarı sonsuz düzlemde çeşitli c/b oranları için DDM ile aşağıda incelenmiştir. Sistem, yükleme ve geometri bakımından y eksenine göre simetrik olduğundan $1/2$ daire parçası üzerinde, $r=a$ sınırında 24 eleman ve $r=b$ sınırında 48 eleman alınarak hesap yapılmış ve sonuçlar Şekil 4.10-11'de verilmiştir.



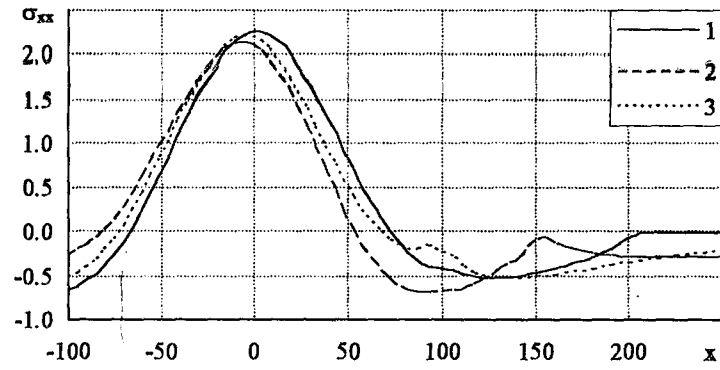
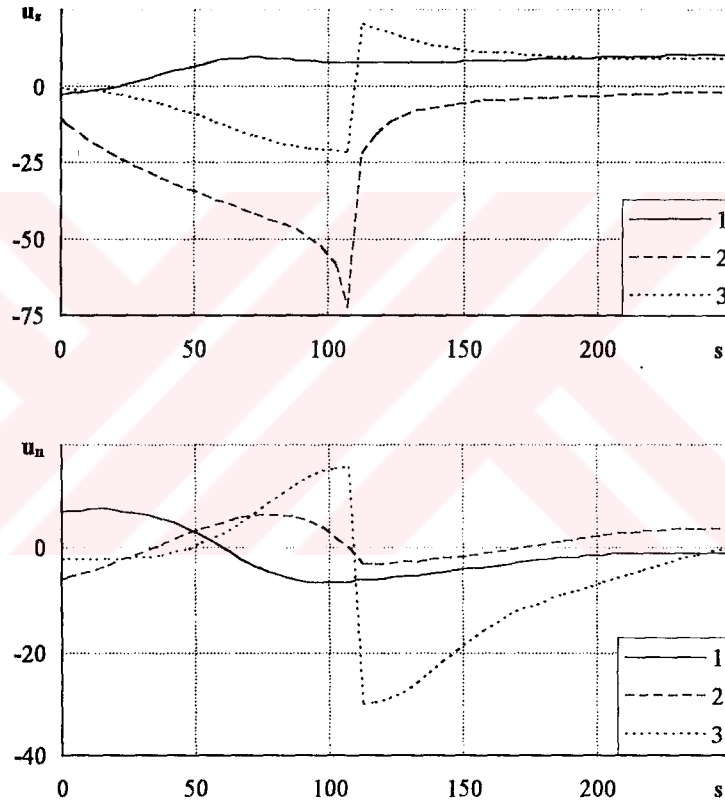
Şekil 4.9. Yarı-sonsuz düzlemde, iç basınç etkisi altında iki malzemeli bölge.



Şekil 4.10. x ekseninde u_x ve u_y yer değiştirmeleri.



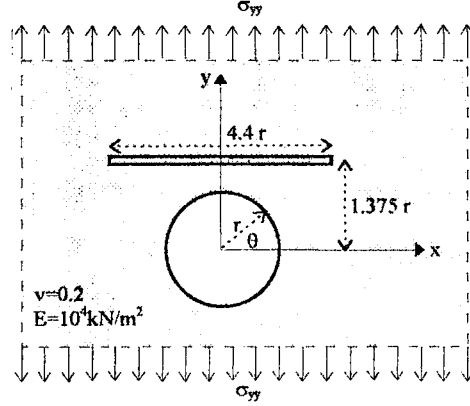
Şekil 4.11 x ekseninde σ_{xx} gerilmeleri.

Şekil 4.14. Yüzeydeki σ_{xx} gerilmeleriŞekil 4.15. Fay hattı boyunca u_s ve u_n yer değiştirmeleri

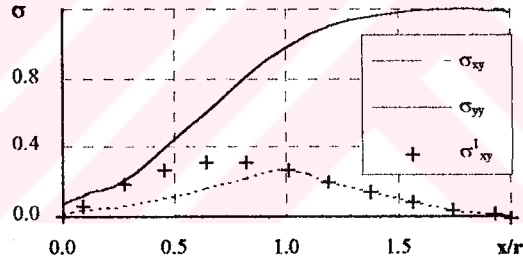
4.4.4. Sonsuz düzlemde Boşluk Fay Etkileşimi

Yükleme durumu ve geometrisi, Şekil 4.16'da görüldüğü gibi sonsuz düzlemde bir dairesel boşluk ve Mohr-Coulomb elemanı gözönüne alınmıştır. Dairesel boşlukta $1/2$ daire parçası alınarak 24 adet eşit eleman, Mohr-Coulomb elemanında ise 12 adet eşit elemanlar alınmıştır. Mohr-Coulomb elemanında, sürtünme açısı 15° kohezyon katsayısı sıfır yay katsayıları $K_s=K_n=10^7$ kNm²/m olmak üzere sayısal değerler kaynak

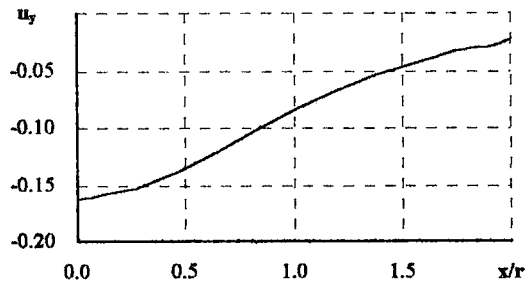
[24] den alınmış olup DDM yöntemi ile çözülmüştür. Şekil 4.17. (a) daki σ_{yy} ve σ_{xy} gerilmeleri yük artımı yöntemi kullanılarak, 12 adım sonucu elde edilen gerilmeler iken, σ_{xy}^I gerilmesi ise Mohr-Coulomb hipotezi kullanılmadan sadece K_s ve K_n olması durumundaki gerilmedir.



Şekil 4.16. Mohr-Coulomb elemanı ve dairesel boşluk



(a)



(b)

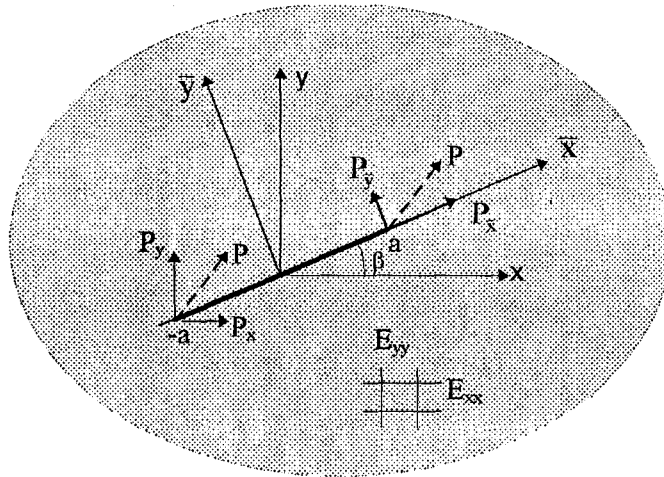
Şekil 4.17. Mohr-Coulomb elemanında gerilmeler ve u_y yer değişirmesi.

BÖLÜM 5. ANİZOTROP ORTAMDA İNDİREKT SINIR ELEMAN YÖNTEMİ

Anizotrop ortamda indirekt sınır eleman yöntemi, izotrop ortamdaki yönteme benzer şekilde temel çözümler kullanılarak elde edilmektedir. Bu bölümde de fiktif gerilme yöntemi ve Yer değiştirme süreksizliği yöntemleri incelenmiş olup, yarı-sonsuz ve sonsuz düzlemlerde yer değiştirme tesir fonksiyonları temel çözümler kullanılarak elde edilmişlerdir.

5.1. FİKTİF GERİLME YÖNTEMİ

Bu bölümde iki boyutlu anizotrop ortamda fiktif gerilme yöntemi kullanılarak, sonsuz bölgede, her hangi bir doğrultudaki bir elemanda üniform yayılı yükten dolayı Kelvin probleminin integrasyonu alınarak çözümler elde edildi Şekil 5.1. Burada elastik sabitler x ve y eksenlerine paralel olarak kabul edilerek, integrasyonlar her hangi bir doğrultu boyunca alındı.



Şekil 5.1. $|\bar{x}| \leq a$, $\bar{y} = 0$ doğrusu üzerinde sabit gerilmeler

Buna göre koordinatların her hangi bir β doğrultusundaki değerleri

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta \\y &= \bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta\end{aligned}\tag{5.1}$$

şeklinde olup eleman üzerindeki yükler ise

$$\begin{aligned}P_x &= \bar{P}_x \cos \beta - \bar{P}_y \sin \beta \\P_y &= \bar{P}_x \sin \beta + \bar{P}_y \cos \beta\end{aligned}\tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda (2.50) deki tekil kuvvetten oluşan yer değiştirme alan fonksiyonlar söz konusu doğrultu için

$$\begin{aligned}\bar{U}_{xx} &= K(\gamma_1 \kappa_2^2 \ln \bar{r}_1 - \gamma_2 \kappa_1^2 \ln \bar{r}_2) \\ \bar{U}_{xy} &= \bar{U}_{yx} = -K\kappa_1 \kappa_2 (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2) \\ \bar{U}_{yy} &= -K\left(\frac{1}{\gamma_1} \kappa_1^2 \ln \bar{r}_1 - \frac{1}{\gamma_2} \kappa_2^2 \ln \bar{r}_2\right)\end{aligned}\tag{5.3}$$

ve (2.51) deki gerilme alan fonksiyonları ise

$$\begin{aligned}\bar{S}_{xxx} &= K(\bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta) \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_2 \bar{r}_2^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_1 \bar{r}_1^2} \right) \\ \bar{S}_{xyx} &= K(\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta) \left(\frac{\kappa_2}{\gamma_2^3 \bar{r}_2^2} - \frac{\kappa_1}{\gamma_1^3 \bar{r}_1^2} \right) \\ \bar{S}_{yyx} &= K(\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta) \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_2 \bar{r}_2^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_1 \bar{r}_1^2} \right)\end{aligned}$$

$$\bar{S}_{xyy} = K(\bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta) \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_1 \bar{r}_1^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_2 \bar{r}_2^2} \right) \quad (5.4)$$

$$\bar{S}_{yyx} = K(\bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta) \left(\frac{\gamma_1 \kappa_2}{\bar{r}_1^2} - \frac{\gamma_2 \kappa_1}{\bar{r}_2^2} \right)$$

$$\bar{S}_{yyy} = K(\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta) \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_1 \bar{r}_1^2} - \frac{\kappa_2}{\gamma_2 \bar{r}_2^2} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\bar{r}_i = \sqrt{[A_i \bar{x}^2 + B_i \bar{x} \bar{y} + C_i \bar{y}^2]} \quad (5.5)$$

$$\bar{\theta}_i = \arctan \frac{\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta}{\gamma_i (\bar{x} \cos \beta - \bar{y} \sin \beta)} \quad (5.6)$$

$$A_i = (\gamma_i^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) / \gamma_i^2$$

$$B_i = (1 - \gamma_i^2) \sin 2\beta / \gamma_i^2 \quad (5.7)$$

$$C_i = (\gamma_i^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) / \gamma_i^2$$

dir. Bu fonksiyonların $\bar{x}$ doğrultusundaki integralleri ise

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-a}^a \bar{U}_{ij}(\bar{x} - \xi, \bar{y}) d\xi \quad (5.8)$$

$$\bar{f}_{ijk}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-a}^a \bar{S}_{ijk}(\bar{x} - \xi, \bar{y}) d\xi$$

olarak hesaplanırsa yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin global koordinatlardaki değerleri, lokal koordinatlar cinsinden:

$$u_x = P_x \bar{g}_{xx} + P_y \bar{g}_{xy} \quad (5.9)$$

$$u_y = P_x \bar{g}_{yx} + P_y \bar{g}_{yy}$$

$$\sigma_{xx} = P_x \bar{f}_{xxx} + P_y \bar{f}_{xxy}$$

$$\sigma_{yy} = P_x \bar{f}_{yyx} + P_y \bar{f}_{yyy} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{xy} = P_x \bar{f}_{xyx} + P_y \bar{f}_{xyy}$$

eşitlikleriyle elde edilirler.

5.2. YER DEĞİŞTİRME SÜREKSİZLİĞİ YÖNTEMİ

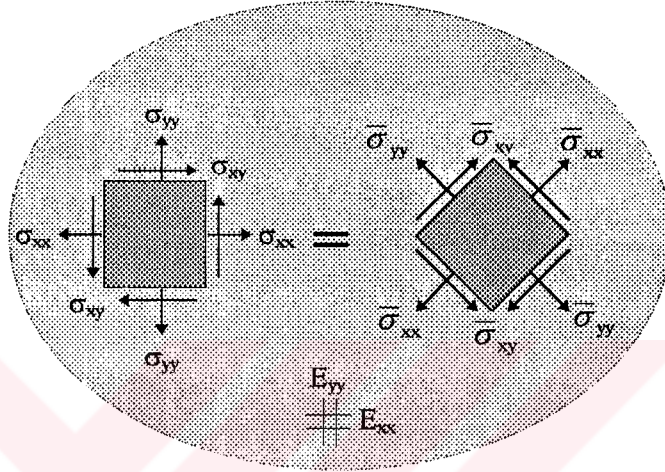
Bu yöntemde yer değiştirme süreksizlik denklemlerinin elde edilmesi, genel olarak izotrop ortamdakine benzer şekildedir. Anizotrop ortamda ise, global eksenlerden farklı doğrultuda eleman alındığı zaman, temel çözümlerin söz konusu doğrultudaki koordinatlar cinsinden yazılıp ve bu koordinatlar doğrultusundaki türevleri alınarak yer değiştirme süreksizliklerinden oluşan tekil çözümler elde edilmiştir. Bunun için (2.7) veya (2.11) deki Genelleştirilmiş Hooke Kanunları lokal koordinatlar $(\bar{x}, \bar{y})$ cinsinden

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \bar{c}_{11} \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{12} \bar{\epsilon}_{yy} + 2\bar{c}_{16} \bar{\epsilon}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \bar{c}_{21} \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{22} \bar{\epsilon}_{yy} + 2\bar{c}_{26} \bar{\epsilon}_{xy} \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \bar{c}_{16} \bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{c}_{26} \bar{\varepsilon}_{yy} + 2\bar{c}_{66} \bar{\varepsilon}_{xy}$$

şeklinde yazılarak elemanter eleman lokal koordinatlar doğrultusunda alınmıştır Şekil

5.2. Burada $\bar{c}_{ij}$ katsayıları, $\bar{s}_{ij}$ lokal koordinatlardaki mühendislik sabitlerinin tersi alınarak elde edilmiş olup, aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.2. $\bar{x}, \bar{y}$ doğrultusunda yönelenmiş eleman

$$\bar{s}_{11} = \frac{\cos^4 \beta}{E_{xx}} + \left[\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_{xx}} \right] \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \frac{\sin^4 \beta}{E_{yy}}$$

$$\bar{s}_{12} = \left[\frac{1}{E_{xx}} + \frac{1}{E_{yy}} + \frac{2\nu_{xy}}{E_{xx}} - \frac{1}{G_{xy}} \right] \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}}$$

$$\bar{s}_{13} = - \left[\frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} \sin^2 \beta + \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \cos^2 \beta \right]$$

$$\bar{s}_{14} = 0$$

$$\bar{s}_{15} = 0$$

$$\bar{s}_{16} = \left[2 \left(\frac{\sin^2 \beta}{E_{yy}} - \frac{\cos^2 \beta}{E_{xx}} \right) + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} \right) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \right] \sin \beta \cos \beta$$

$$\bar{s}_{22} = \frac{\sin^4 \beta}{E_{xx}} + \left[\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_{xx}} \right] \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \frac{\cos^4 \beta}{E_{yy}} \quad (5.12)$$

$$\bar{s}_{23} = - \left[\frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} \cos^2 \beta + \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \sin^2 \beta \right]$$

$$\bar{s}_{24} = 0$$

$$\bar{s}_{25} = 0$$

$$\bar{s}_{26} = \left[2 \left(\frac{\cos^2 \beta}{E_{yy}} - \frac{\sin^2 \beta}{E_{xx}} \right) - \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} \right) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \right] \sin \beta \cos \beta$$

$$\bar{s}_{33} = \frac{1}{E_{zz}}$$

$$\bar{s}_{34} = 0$$

$$\bar{s}_{35} = 0$$

$$\bar{s}_{36} = 2 \left(\frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} - \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} \right) \sin \beta \cos \beta$$

$$\bar{s}_{44} = \left(\frac{\cos^2 \beta}{G_{yz}} - \frac{\sin^2 \beta}{G_{xz}} \right)$$

$$\bar{s}_{45} = \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{1}{G_{xz}} \right) \sin \beta \cos \beta$$

$$\bar{s}_{46} = 0$$

$$\bar{s}_{55} = \frac{\sin^2 \beta}{G_{yz}} + \frac{\cos^2 \beta}{G_{xz}}$$

$$\bar{s}_{56} = 0$$

$$\bar{s}_{66} = \left[\frac{1}{E_{xx}} + \frac{1}{E_{yy}} + \frac{2\nu_{xy}}{E_{xx}} - \frac{1}{G_{xy}} \right] \sin^2 \beta \cos^2 \beta - \frac{1}{G_{xy}}$$

Yer değiştirme süreksizliklerinin elde edilmesi için $\bar{U}_{ij}$ (5.3) deki temel çözümler olmak üzere, yerdeğiştirmeler (2.33) ifadesinden

$$u_x = F_x \bar{U}_{xx} + F_y \bar{U}_{xy} \quad (5.13)$$

$$u_y = F_x \bar{U}_{yx} + F_y \bar{U}_{yy}$$

ve gerilmeler $\bar{S}_{ijk}$ (5.4) deki temel çözümler olmak üzere (2.39) ifadesinden

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F_x \bar{S}_{xxx} + F_y \bar{S}_{xxy} \\ \sigma_{yy} &= F_x \bar{S}_{yyx} + F_y \bar{S}_{yyy} \\ \sigma_{xy} &= F_x \bar{S}_{xyx} + F_y \bar{S}_{xyy} \end{aligned} \quad (5.14)$$

şeklinde yazılabilir. Yarı sonsuz düzlem için anizotrop ortamda temel çözümlerin lokal koordinatlardaki değerler ise (2.59) ve (2.60) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \bar{U}_{xx}^e &= K \left[-c_1 (\gamma_1 \kappa_2^2 \ln \bar{R}_1 + \gamma_2 \kappa_1^2 \ln \bar{R}_2) + c_2 \kappa_1 \kappa_2 (\ln \bar{R}_3 + \ln \bar{R}_4) \right] \\ \bar{U}_{xy}^e &= K \left[-c_1 \kappa_1 \kappa_2 (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) + c_3 (\gamma_2 \kappa_1^2 \bar{\theta}_3 + \gamma_1 \kappa_2^2 \bar{\theta}_4) \right] \\ \bar{U}_{yx}^e &= K \left[c_1 \kappa_1 \kappa_2 (\bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2) - c_3 (\gamma_1 \kappa_2^2 \bar{\theta}_3 + \gamma_2 \kappa_1^2 \bar{\theta}_4) \right] \\ \bar{U}_{yy}^e &= K \left[-c_1 \left(\frac{\kappa_1^2}{\gamma_1} \ln \bar{R}_1 + \frac{\kappa_2^2}{\gamma_2} \ln \bar{R}_2 \right) + c_3 \kappa_1 \kappa_2 (\ln \bar{R}_3 + \ln \bar{R}_4) \right] \\ \bar{S}_{xxx}^e &= K \bar{X} \left[c_1 \left(\frac{\kappa_2}{\gamma_1 \bar{R}_1^2} + \frac{\kappa_1}{\gamma_2 \bar{R}_2^2} \right) - c_3 \left(\frac{\gamma_2 \kappa_1}{\gamma_1 \bar{R}_3^2} + \frac{\gamma_1 \kappa_2}{\gamma_2 \bar{R}_4^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_{yyx}^e &= K \left[c_1 \left(\frac{\kappa_2 \bar{Y}_1}{\bar{R}_1^2} + \frac{\kappa_1 \bar{Y}_2}{\bar{R}_2^2} \right) - c_3 \left(\gamma_2 \frac{\kappa_1 \bar{Y}_3}{\bar{R}_3^2} + \gamma_1 \frac{\kappa_2 \bar{Y}_4}{\bar{R}_4^2} \right) \right] \\ \bar{S}_{yyx}^e &= K \bar{X} \left[-c_1 \left(\frac{\gamma_1 \kappa_2}{\bar{R}_1^2} + \frac{\gamma_2 \kappa_1}{\bar{R}_2^2} \right) + c_2 \left(\frac{\kappa_1}{\bar{R}_3^2} + \frac{\kappa_2}{\bar{R}_4^2} \right) \right]\end{aligned}\quad (5.16)$$

$$\bar{S}_{xxy}^e = K \left[-c_1 \left(\frac{\kappa_1 \bar{Y}_1}{\gamma_1^2 \bar{R}_1^2} + \frac{\kappa_2 \bar{Y}_2}{\gamma_2^2 \bar{R}_2^2} \right) + c_3 \left(\frac{\bar{Y}_3 \kappa_2}{\gamma_1 \bar{R}_3^2} + \frac{\bar{Y}_4 \kappa_1}{\gamma_2 \bar{R}_4^2} \right) \right]$$

$$\bar{S}_{xyy}^e = K \bar{X} \left[c_1 \left(\frac{\kappa_1}{\gamma_1 \bar{R}_2^2} + \frac{\kappa_2}{\gamma_2 \bar{R}_1^2} \right) - c_3 \left(\frac{\kappa_2}{\bar{R}_3^2} + \frac{\kappa_1}{\bar{R}_4^2} \right) \right]$$

$$\bar{S}_{yyy}^e = K \left[c_1 \left(\frac{\kappa_1 \bar{Y}_1}{\bar{R}_1^2} + \frac{\kappa_2 \bar{Y}_2}{\bar{R}_2^2} \right) - c_3 \left(\gamma_1 \frac{\kappa_2 \bar{Y}_3}{\bar{R}_3^2} + \gamma_2 \frac{\kappa_1 \bar{Y}_4}{\bar{R}_4^2} \right) \right]$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\bar{X} = \bar{x} \cos \beta + \bar{y} \sin \beta$$

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\gamma_1} (-\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta)$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{\gamma_2} (-\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta)$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{1}{\gamma_2} (-\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta) + y \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} \right)$$

$$\bar{Y}_4 = \frac{1}{\gamma_1} (-\bar{x} \sin \beta + \bar{y} \cos \beta) + y \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{1}{\gamma_1} \right)$$

(5.17)

$$\bar{\theta}_i = \arctan\left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}_i}\right), \quad \bar{R}_i = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}_i^2} \quad (5.18)$$

dir. Dış kuvvetlerin x ve y eksenlerindeki izdüşümleri ise

$$F_x = \bar{F}_x \cos \beta - \bar{F}_y \sin \beta \quad (5.19)$$

$$F_y = \bar{F}_x \sin \beta + \bar{F}_y \cos \beta$$

şeklinde yazılarak, global koordinatlardaki yer değiştirme bileşenleri lokal koordinatlardaki alan fonksiyonları ve tekil kuvvetler cinsinden

$$u_x = \bar{F}_x (\bar{U}_{xx} \cos \beta + \bar{U}_{xy} \sin \beta) + \bar{F}_y (-\bar{U}_{xx} \sin \beta + \bar{U}_{xy} \cos \beta) \quad (5.20)$$

$$u_y = \bar{F}_x (\bar{U}_{yx} \cos \beta + \bar{U}_{yy} \sin \beta) + \bar{F}_y (-\bar{U}_{yx} \sin \beta + \bar{U}_{yy} \cos \beta)$$

ve gerilme bileşenleri lokal koordinatlar cinsinden

$$\sigma_{xx} = \bar{F}_x (\bar{S}_{xxx} \cos \beta + \bar{S}_{xxy} \sin \beta) + \bar{F}_y (-\bar{S}_{xxx} \sin \beta + \bar{S}_{xxy} \cos \beta)$$

$$\sigma_{yy} = \bar{F}_x (\bar{S}_{yyx} \cos \beta + \bar{S}_{yyy} \sin \beta) + \bar{F}_y (-\bar{S}_{yyx} \sin \beta + \bar{S}_{yyy} \cos \beta) \quad (5.21)$$

$$\sigma_{xy} = \bar{F}_x (\bar{S}_{xyx} \cos \beta + \bar{S}_{xyy} \sin \beta) + \bar{F}_y (-\bar{S}_{xyx} \sin \beta + \bar{S}_{xyy} \cos \beta)$$

şeklinde elde edilirler. Bu eşitlikleri daha kısa bir formda yazmak için yer değiştirme bileşenlerinde

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \bar{U}_{xx} \cos \beta + \bar{U}_{xy} \sin \beta \\
h_{12} &= -\bar{U}_{xx} \sin \beta + \bar{U}_{xy} \cos \beta \\
h_{21} &= \bar{U}_{yx} \cos \beta + \bar{U}_{yy} \sin \beta \\
h_{22} &= -\bar{U}_{yx} \sin \beta + \bar{U}_{yy} \cos \beta
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ve gerilme bileşenlerinde

$$\begin{aligned}
l_{11} &= \bar{S}_{xxx} \cos \beta + \bar{S}_{xxy} \sin \beta \\
l_{12} &= -\bar{S}_{xxx} \sin \beta + \bar{S}_{xxy} \cos \beta \\
l_{21} &= \bar{S}_{yyx} \cos \beta + \bar{S}_{yyy} \sin \beta \\
l_{22} &= -\bar{S}_{yyx} \sin \beta + \bar{S}_{yyy} \cos \beta \\
l_{31} &= \bar{S}_{xyx} \cos \beta + \bar{S}_{xyy} \sin \beta \\
l_{32} &= -\bar{S}_{xyx} \sin \beta + \bar{S}_{xyy} \cos \beta
\end{aligned} \tag{5.23}$$

tanımları yapılarak, yer değiştirme ve gerilme bileşenleri lokal koordinatlar cinsinden sırasıyla

$$\begin{aligned}
u_x &= \bar{F}_x h_{11} + \bar{F}_y h_{12} \\
u_y &= \bar{F}_x h_{21} + \bar{F}_y h_{22}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \bar{F}_x l_{11} + \bar{F}_y l_{12} \\
\sigma_{yy} &= \bar{F}_x l_{21} + \bar{F}_y l_{22} \\
\sigma_{xy} &= \bar{F}_x l_{31} + \bar{F}_y l_{32}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

şeklinde yazılabilirler.

5.2.1. Normal Doğrultudaki Yer değiştirme Süreksizliği

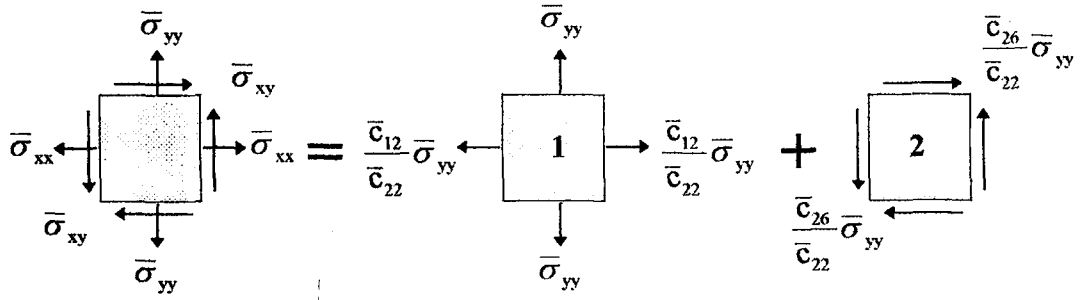
Anizotrop ortamda normal doğrultudaki yer değiştirme süreksizliğini elde etmek için, izotrop ortam için şekil değiştirmeler açısından yapılan kabüller

$$\bar{\epsilon}_{xx} = \bar{\epsilon}_{zz} = \bar{\epsilon}_{xy} = 0, \quad \bar{\epsilon}_{yy} \neq 0 \tag{5.26}$$

şeklinde yazılmış olup (2.3) ve (5.26) eşitlikleri kullanılarak gerilme bileşeneleri arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= \bar{c}_{12} \bar{\epsilon}_{yy}, \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}} \bar{\sigma}_{yy} \\
\bar{\sigma}_{yy} &= \bar{c}_{22} \bar{\epsilon}_{yy} \\
\bar{\sigma}_{xy} &= \bar{c}_{26} \bar{\epsilon}_{yy}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{\bar{c}_{26}}{\bar{c}_{22}} \bar{\sigma}_{yy}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

şeklinde elde edilirler. Bu durumda gerilme durumları Şekil 5.3'de verilen sistem gözönüne alınsın. Sadece düşey yer değiştirme alan fonksiyonlarını elde edebilmek için 1. durumda $\bar{\sigma}_{xx}$ gerilmesinin katkısını, 2. durumda ise $\bar{\sigma}_{xy}$ gerilmesinin katkısı gözönüne alınmıştır.



Şekil 5.3. Normal doğrultudaki yer değiştirme için gerilme durumu

Bunun için (3.16) bağıntıları kullanılarak u_x yer değiştirme fonksiyonu olmak üzere lokal koordinatlar cinsinden 1. gerilme durumundan dolayı

$$u_{x1} = \frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}} \bar{F}_y \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} + \bar{F}_y \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{y}} \quad (5.28)$$

ve 2. gerilme durumundan dolayı

$$u_{x2} = \frac{\bar{c}_{26}}{\bar{c}_{22}} \bar{F}_y \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (5.29)$$

şeklinde elde edilirler. Bu iki fonksiyonların toplamı ise ($u_x = u_{x1} + u_{x2}$)

$$u_x = \bar{F}_y \left(\frac{\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{22}} \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{c}_{26}}{\bar{c}_{22}} \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{x}} \right) \right) \quad (5.30)$$

olarak alan fonksiyonlarının $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ türevleri cinsinden elde edilirler. Düşey yer değiştirmenin düşey tekil kuvvet cinsinden değeri ise (5.27) eşitliğinden

$$\bar{F}_y = \bar{c}_{22} \bar{D}_y \quad (5.31)$$

olarak gözönüne alınırsa, düşey yer değiştirme süreksizliğinden elde edilen yeni $\bar{U}_{xy}$ alan fonksiyonu

$$\bar{U}_{xy} = \bar{c}_{12} \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{22} \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{x}} \quad (5.32)$$

şeklinde elde edilirler. Diğer alan fonksiyonlar benzer şekilde

$$\bar{U}_{yy} = \bar{c}_{12} \frac{\partial h_{21}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{22} \frac{\partial h_{22}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial h_{21}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial h_{22}}{\partial \bar{x}} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xxy} &= \bar{c}_{12} \frac{\partial a_{11}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{22} \frac{\partial a_{12}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{11}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{12}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{S}_{yyy} &= \bar{c}_{12} \frac{\partial a_{21}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{22} \frac{\partial a_{22}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{21}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{22}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{S}_{xyy} &= \bar{c}_{12} \frac{\partial a_{31}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{22} \frac{\partial a_{32}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{31}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{32}}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \quad (5.34)$$

şeklinde elde edilirler. Burada özel hal olarak lokal koordinatlar ile elastik sabitler aynı doğrultuda ise $\bar{c}_{26} = 0$, $\bar{c}_{12} = c_{12}$ ve $\bar{c}_{22} = c_{22}$ olur. Ayrıca malzemenin izotrop olması halinde ise $\bar{c}_{26} = 0$ ve $\bar{c}_{12} / \bar{c}_{22} = \nu / (1 - \nu)$ olur.

5.2.2. Kayma Yer Değiştirme Süreksizliği

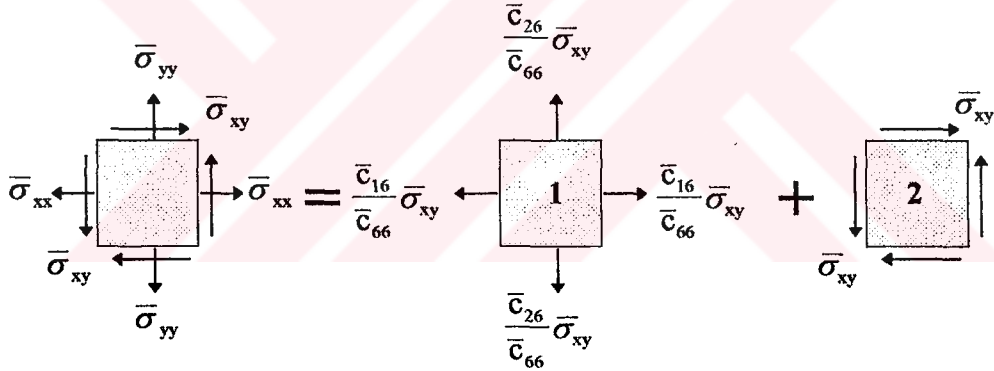
Kayma doğrultusundaki yer değiştirme süreksizliklerini elde etmek için şekil değiştirmelerde

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \bar{\varepsilon}_{yy} = \bar{\varepsilon}_{zz} = 0 \quad , \quad \bar{\varepsilon}_{xy} \neq 0 \quad (5.35)$$

kabülleri yapılarak sadece kayma şekil değiştirmesi sıfırdan farklı olması durumunda, (2.3) ve (5.35) eşitlikleri kullanılarak gerilme bileşenleri arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{xx} &= \bar{c}_{16} \bar{\epsilon}_{xy} \quad , \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\bar{c}_{16}}{\bar{c}_{66}} \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{yy} &= \bar{c}_{26} \bar{\epsilon}_{xy} \quad , \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\bar{c}_{26}}{\bar{c}_{66}} \bar{\sigma}_{xy} \\ \bar{\sigma}_{xy} &= \bar{c}_{66} \bar{\epsilon}_{xy}\end{aligned}\tag{5.36}$$

şeklinde elde edilirler. Bu durumda gerilme durumları Şekil 5.4'de verilen yükleme durumu gözönüne alınsın. Sadece kayma yer değiştirme alan fonksiyonlarını elde edebilmek için 1. durumda $\bar{\sigma}_{xx}$ gerilmesinin katkısını, 2. durumda ise $\bar{\sigma}_{xy}$ gerilmesinin katkısı gözönüne alınmıştır.



Şekil 5.4. Kayma yer değiştirmesi için gerilme durumu.

Bunun için (3.20) bağıntıları kullanılarak u_x yer değiştirme fonksiyonu olmak üzere lokal koordinatlar cinsinden 1. gerilme durumundan dolayı

$$u_{x1} = \frac{\bar{c}_{16}}{\bar{c}_{66}} \bar{F}_x \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{c}_{26}}{\bar{c}_{66}} \bar{F}_x \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{y}}\tag{5.37}$$

ve 2. gerilme durumundan dolayı

$$u_{x2} = \bar{F}_x \left(\frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (5.38)$$

şeklinde elde edilirler. Bu iki fonksiyonların toplamı ise ($u_x = u_{x1} + u_{x2}$)

$$u_x = \bar{F}_x \left(\frac{\bar{c}_{16}}{\bar{c}_{66}} \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{c}_{26}}{\bar{c}_{66}} \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (5.39)$$

olarak alan fonksiyonlarının $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ türevleri cinsinden elde edilirler. Yatay yer değiştirmenin yatay tekil kuvvet cinsinden değeri ise (5.36) eşitliğinden

$$\bar{F}_x = \bar{c}_{66} \bar{D}_x \quad (5.40)$$

olarak gözönüne alınırsa, yatay yer değiştirme süreksizliğinden elde edilen yeni $\bar{U}_{xx}$ alan fonksiyonu

$$\bar{U}_{xx} = \bar{c}_{16} \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial h_{11}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial h_{12}}{\partial \bar{x}} \quad (5.41)$$

şeklinde elde edilir. Diğer alan fonksiyonları benzer şekilde

$$\bar{U}_{yx} = \bar{c}_{16} \frac{\partial h_{21}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial h_{22}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial h_{21}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial h_{22}}{\partial \bar{x}} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xxx} &= \bar{c}_{16} \frac{\partial a_{11}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{12}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial a_{11}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial a_{12}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{S}_{yyx} &= \bar{c}_{16} \frac{\partial a_{21}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial a_{22}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial a_{21}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial a_{22}}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\bar{S}_{xyx} = \bar{c}_{16} \frac{\partial_{31}}{\partial \bar{x}} + \bar{c}_{26} \frac{\partial_{32}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial_{31}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}_{66} \frac{\partial_{32}}{\partial \bar{x}}$$

şeklinde yazılırlar. Burada özel hal olarak lokal koordinatlarla elastik sabitler aynı doğrultuda ise $\bar{c}_{16} = \bar{c}_{26} = 0$ ve $\bar{c}_{66} = c_{66}$ olur. Ayrıca malzemenin izotrop olması durumunda ise $\bar{c}_{16} = \bar{c}_{26} = 0$ ve $\bar{c}_{66} = G_{xy} = G$ olur.

Sayısal hesap yöntemi Bölüm 3'deki gibi sabit elemanlar alınarak sonsuz ve yarı-sonsuz anizotrop ortamda lokal koordinatlardaki yer değiştirme alan fonksiyonlarının $\bar{x}$ doğrultusundaki integralleri

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-a}^a \bar{U}_{ij}(\bar{x} - \xi, \bar{y}) d\xi \quad (5.44)$$

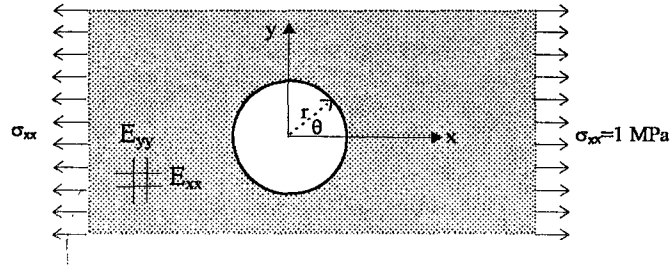
$$\bar{f}_{ijk}(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-a}^a \bar{S}_{ijk}(\bar{x} - \xi, \bar{y}) d\xi$$

şeklinde hesaplanırlar. Buradan elde edilen tesir fonksiyonları (3.35) ve (3.36) denklemlerinde yerlerine konulmasıyla sınır eleman denklemleri elde edilir.

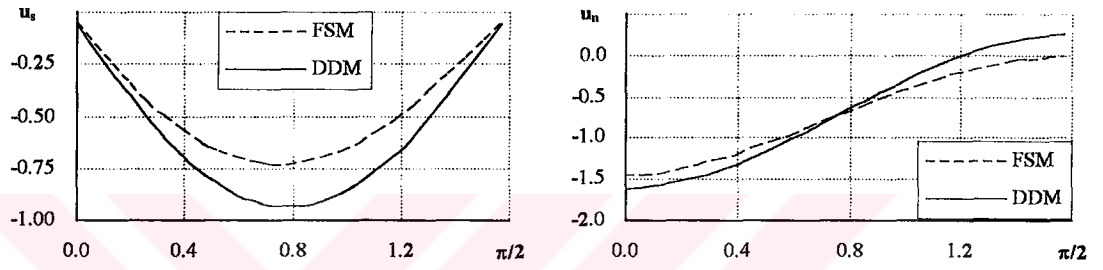
5.3. SAYISAL ÖRNEKLER

5.3.1. Sonsuz Düzlemde Dairesel Boşluk

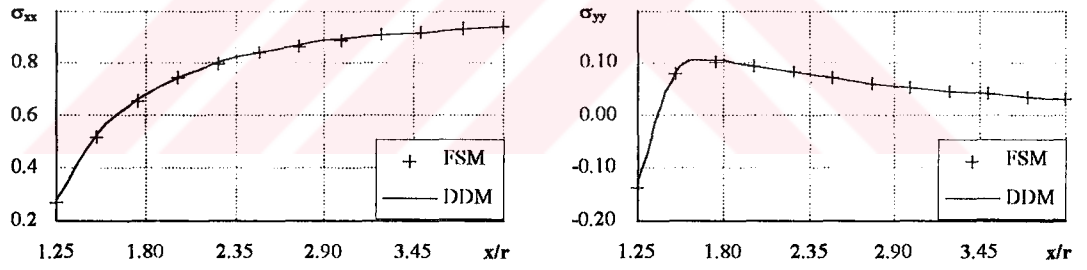
Şekil 5.5'de verilen anizotrop ortamda düzlem gerilme hali için, sonsuz düzlemde dairesel boşluk problemi çözülmüştür. [1]'de verilen fiktif gerilme yöntemi ile bu çalışmada elde edilen yer değiştirme süreksizliği yöntemi sonuçları karşılaştırılmıştır. Anizotrop malzemede mühendislik sabitleri $E_{xx}=645.16kPa$, $E_{yy}=17035.77kPa$, $G_{xy}=869.57kPa$, $\nu_{xy}=0.0213$ olan bir ortamda, Şekil 5.5'de verilen yükleme halinde gerilme ve yer değiştirme sonuçları Şekil 5.6-8'de verilmiştir. Ayrıca sayısal hesap için daire parçasını $1/4$ ü alarak 25 adet sabit elemana bölünmüştür.



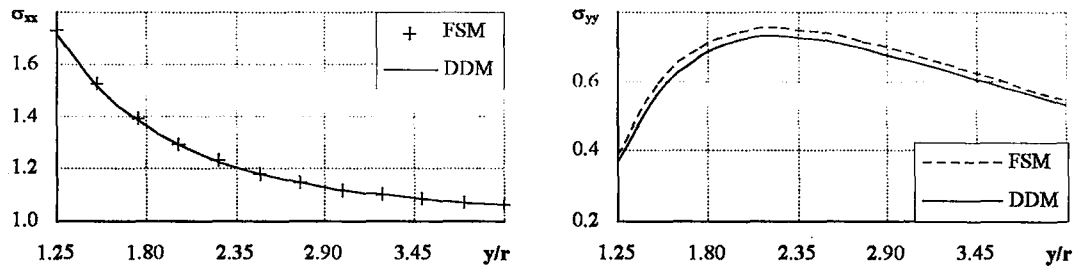
Şekil 5.5. İki boyutlu sonsuz anizotrop ortamda dairesel boşluk



Şekil 5.6. Boşluk sınırında yer değiştirmeler



Şekil 5.7. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.



Şekil 5.8. y ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.

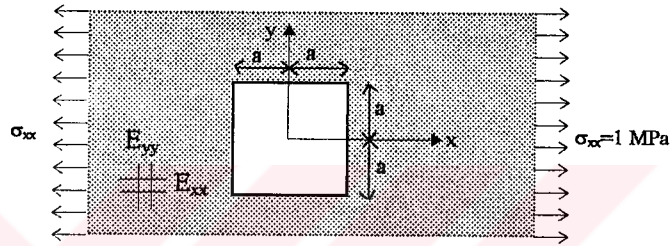
5.3.2. Sonsuz Düzlemde Kare Boşluk

Bu örnekte Şekil 5.9'da görüldüğü gibi sonsuz düzlemde kare boşluk alınmış ve malzeme sabitlerine bağlı olarak 3 durum çözülmüştür.

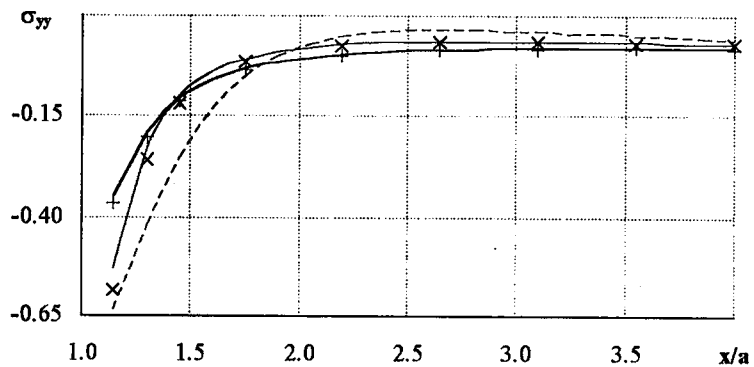
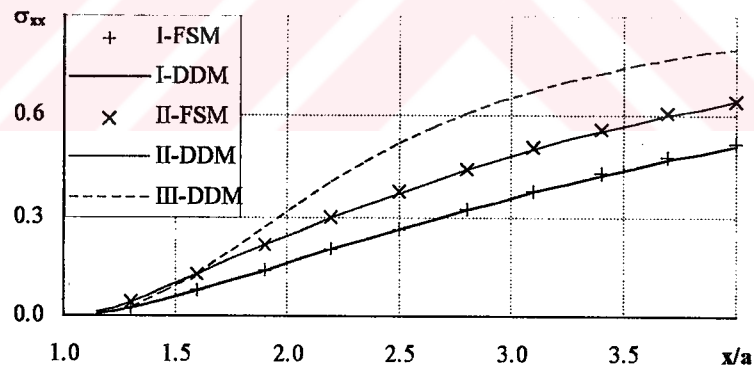
I. durum anizotrop: $E_{xx}=1.2 \times 10^7$, $E_{yy}=0.6 \times 10^7$, $G_{xy}=0.07 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ve $\nu_{xy}=0.071$

II. durum anizotrop: $E_{xx}=0.6 \times 10^7$, $E_{yy}=1.2 \times 10^7$, $G_{xy}=0.07 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ve $\nu_{xy}=0.0355$

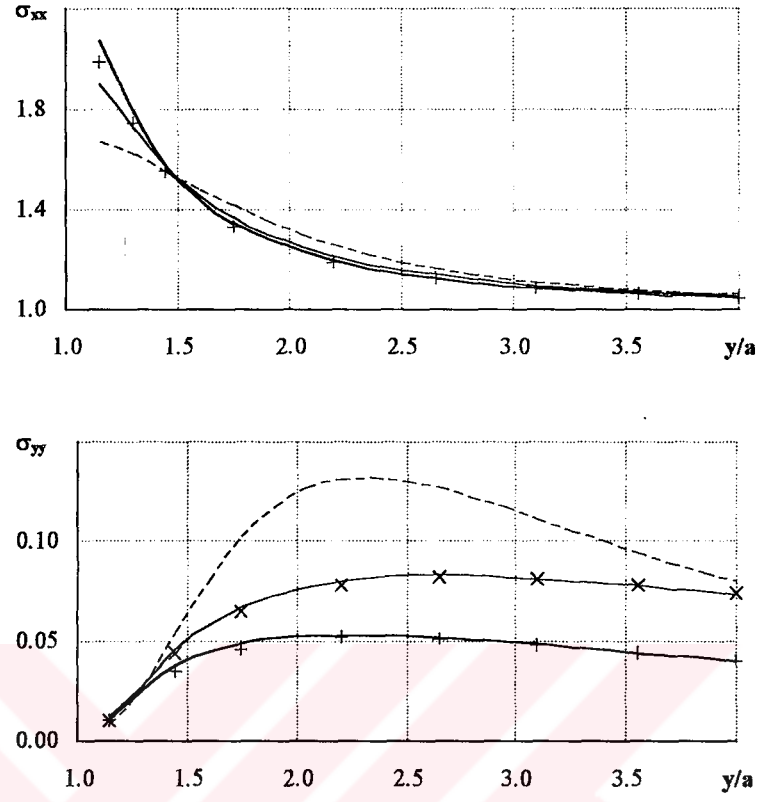
III. durum izotrop: $E_{xx}=E_{yy}=E=3 \times 10^4$, $G_{xy}=G=0.5E/(1+\nu_{xy})$ ve $\nu_{xy}=0.3$



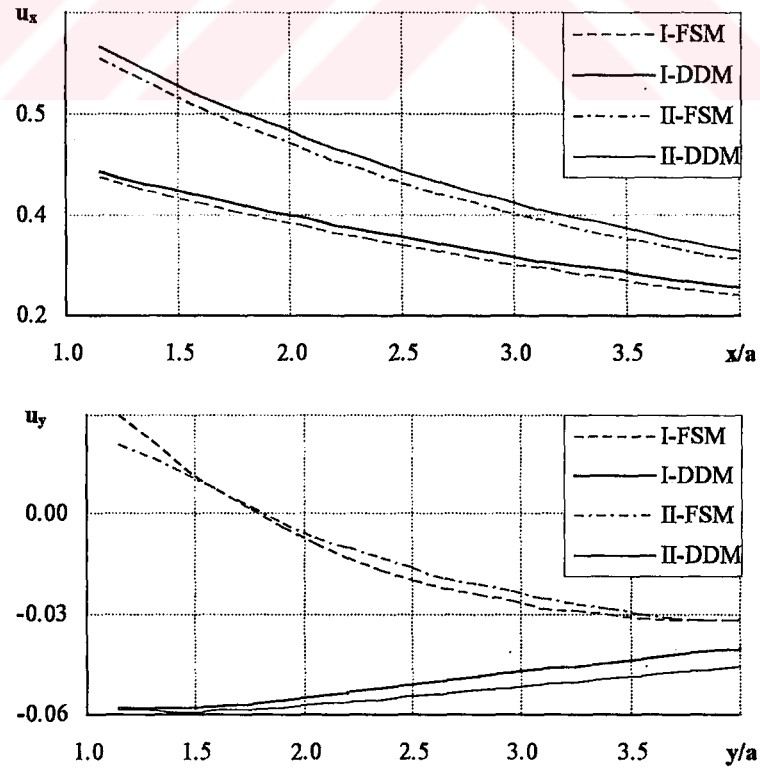
Şekil 5.9. Sonsuz düzlemde kare boşluk



Şekil 5.10. x ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.



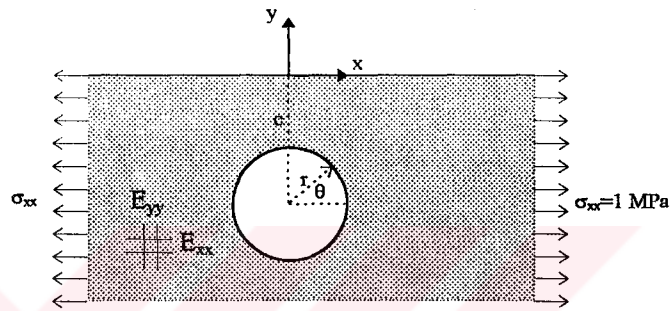
Şekil 5.11. y ekseninde σ_{xx} ve σ_{yy} gerilmeleri.



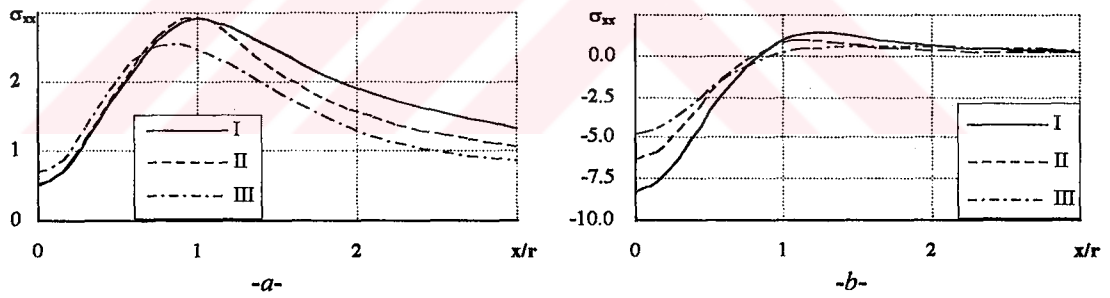
Şekil 5.12. x ve y eksenleri üzerinde yer değiştirmeler.

5.3.3. Yarı-Sonsuz Düzlemde Dairesel Boşluk

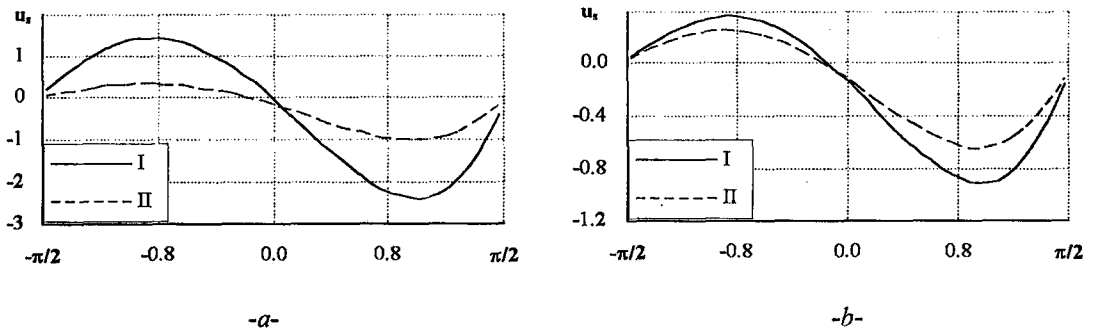
Malzeme özellikleri Bölüm 5.3.2'deki gibi göz önüne alınarak yarı-sonsuzda dairesel boşluk örneği çözülmüştür. $c/r=1.34$ olarak sabit alınmış olup x yönünde aksenal kuvvet ve hidrostatik iç basınç etkisinde x eksenini üzerindeki gerilmeler ve boşluk sınırındaki yer değiştirmeler hesaplanmıştır. Sayısal hesapta $1/2$ daire parçası alınarak 24 eşit ve doğrusal elemana bölünmüştür.



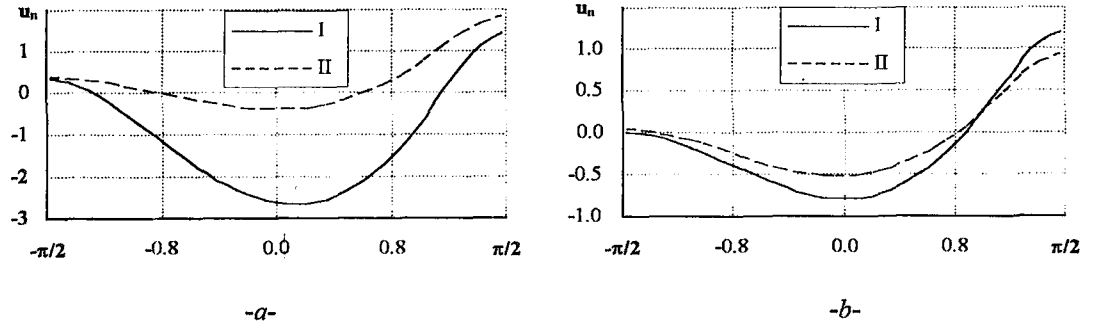
Şekil 5.13. Yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluk



Şekil 5.14. a) aksenal kuvvet etkisinde, b) hidrostatik basınç altında x eksenini üzerinde σ_{xx} gerilmeleri.



Şekil 5.15. a) aksenal kuvvet etkisinde, b) hidrostatik basınç altında boşluk sınırında u_s yer değiştirmeleri.



Şekil 5.16. *a)* aksenal kuvvet etkisinde, *b)* hidrostatik basınç altında boşluk sınırında u_n yer değiştirmeleri.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada izotrop ve anizotrop cisimlerde yer değiştirme süreksizliği ve fiktif gerilme yöntemleri kullanılarak iki boyutlu düzlem problemler incelenmiştir. Her iki yöntemde de sabit elemanlar kullanarak, Kelvin temel çözümünün ve yarı-sonsuz düzlem için Melan çözümünün integrasyonu ile sınır eleman denklemleri oluşturulmuştur. İntegraller kapalı olarak elde edildiğinden, bilgisayar programlarında tek incelik ile çalışmak yeterli olmuştur.

Bölüm 3'de indirekt sınır eleman yöntemine örnek olması açısından sonsuz düzlemde dairesel boşluk örnekleri fiktif gerilme (FSM) ve yer değiştirme süreksizliği (DDM) yöntemiyle çözülmüş olup mevcut analitik çözümler ile karşılaştırma yapılmıştır. Sonsuz düzlemde eksenel kuvvet ve dairesel boşlukta hidrostatik iç basınç yüklemelerinden doğan yer değiştirme ve gerilmeler her üç yöntem ile de oldukça yakın bulunmuş olup sonuçlar Şekil 3.9-12 ve Şekil 3.14-15 de verilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü gibi boşluğun yarıçapının yaklaşık iki katına kadarki mesafede, x ekseninde σ_{yy} gerilmeleri, y ekseninde σ_{xx} gerilmeleri hızlı bir şekilde artmakta iken, bu mesafeden sonra boşluğun etkisi azalmıştır.

Ayrıca bu bölümde Şekil 3.16'da verilen eksenel kuvvet etkisindeki yarı-sonsuz düzlemde dairesel boşluğun yüzeyden derinliğinin etkisi DDM ile incelenmiştir. Bu örnekteki sayısal değerler [19]'dan alınmış olup sonuçlar Şekil 3.17-18 de verilmiştir. Bu sonuçlardaki değerlere bakıldığında, boşluğun yüzeye yaklaşmasıyla, boşluğun sınırındaki maksimum ve minimum yer değiştirmeler artmaktadır. Ayrıca yüzeyin daire merkezine uzaklığının, daire yarıçapına oranı (c/r) 3.76 olması halinde çözümlerin sonsuz düzlem çözümlerine yaklaştığı gözlenmiştir. Diğer bir ifadeyle, boşluk yüzeyden uzaklaştıkça yarı sonsuz düzlem çözümlerindeki tamamlayıcı çözümlerin etkisi azalmaktadır. Şekil 3.18 den de görüldüğü gibi eksenel yükleme durumunda teğetsel yer değiştirmeler -90° ve yaklaşık 30° de, normal yer değiştirmeler ise yaklaşık -30° ile 60° noktalarında c/r oranından bağımsız olmaktadır.

Bölüm 4'de indirekt sınır elemanlarda DDM çeşitli özel durumlar için uygulanmıştır. Bunlardan iki malzemeli bölge için Şekil 4.6'da görüldüğü gibi, sonsuz düzlemde hidrostatik iç basınç etkisi altında dairesel boşluk örneği çözülmüş ve [1]'de verilen

analitik ve FSM ile elde edilen sonuçlarla, bu çalışmada DDM ile elde edilen sonuçlar oldukça yakın değerler olarak bulunmuştur. Şekil 4.7-8 de verilen sonuçlara bakıldığında gerek yer değiştirmelerde ve gerekse gerilmelerde ikinci bölgede hızlı bir şekilde azalma gözlenmiştir. Ayrıca bu örnek Şekil 4.9. daki sistem gözönüne alınarak ve aynı sayısal değerler kullanılarak çeşitli c/b oranları için yarı-sonsuz düzlemde DDM ile çözülmüştür. Burada yüzeydeki gerilmeler ile yer değiştirmeler Şekil 4.10-11 de verilmiş olup c/b oranının artmasıyla sonuçların sonsuz düzlem sonuçlarına yaklaştığı görülmüştür. Bununla beraber yaklaşık $x=b$ noktasından sonra yüzeydeki σ_{xx} gerilmeleri ile yer değiştirmeler hızlı bir şekilde azalma eğilimi göstermiştir.

Bölüm 4'te ikinci özel uygulama olarak, yer değiştirme süreksizliğinde değme eleman tanımları yapılarak, Şekil 4.12'deki gibi yarı-sonsuz düzlemde lineer yayılı yük etkisinde çatlak ve fay hattı örneği çözülmüştür. Burada fayın çatlağa uzaklığının etkisi incelenmiş olup sonuçlar Şekil 4.13-15 de verilmiştir. Fayın çatlağa temas ettiği noktada, çatlağın ucundaki açılma miktarı önemli bir derecede artmıştır. Fayın çatlak ile çakıştığı noktalarda ise faydaki yer değiştirmeler de benzer şekilde artmıştır. Bu etkileşimlerde yüzeydeki σ_{xx} gerilmeleri her üç durum içinde $x=0$ noktasında maksimum iken, $x=100m$ ($x=1$) den sonra hızla sifıra yaklaşmaktadır. Üçüncü özel uygulama olarak da değme elemanda Mohr-Coulomb kırılma hipotezi kullanılarak Şekil 4.16'da görüldüğü gibi dairesel boşluk ve fay örneği çözülmüştür. Bu örnekteki sayısal değerler [24]'den alınmış fay hattı Mohr-Coulomb hipotezini içermesi ve içermemesi halleri için DDM ile çözülmüş ve sonuçlar Şekil 4.17'de verilmiştir. Söz konusu elemandaki kayma uzunluğu, yaklaşık boşluğun yarıçapı kadar olarak elde edilmiş ve söz konusu kaynağa verilen elastik teorideki kayma uzunluğuna oldukça yakın olduğu görülmüştür.

Bölüm 5'te anizotrop ortamda bilinen tekil kuvvet çözümleri yardımıyla elde edilen dipol çözümleri ve bunların yer değiştirme süreksizliğine eş olan kombinasyonları kullanılarak yeni elde edilen yer değiştirme süreksizliği yöntemiyle, fiktif gerilme yöntemi karşılaştırılmıştır. İlk örnekte sonsuz düzlemde eksenel yük etkisinde dairesel boşluk problemi [1] de verilen FSM sonuçları ile bu çalışmada elde edilen DDM sonuçları incelendiğinde, bir birine çok yakın gerilmeler elde edilmesine karşın, farklı yer değiştirmeler bulunmuştur (Şekil 5.6-8). Burada boşluğun yüzeyindeki u_s ve u_n yer değiştirmeleri, x ekseninde σ_{xx} gerilmeleri ve y ekseninde σ_{xx} gerilmeleri izotrop ortamdaki sonuçlara benzer şekilde eğilim göstermiştir. Buna karşın x ekseninde maksimum σ_{yy} gerilmeleri, izotrop ortamda yaklaşık $2.1r$ noktasında iken, anizotrop ortamda yaklaşık $1.6r$ noktasında meydana gelmiştir. y eksenindeki σ_{yy} gerilmeleri ise izotrop ortamdakinden tamamen farklılık göstermiştir.

Bölüm 5. ikinci örnekte ise benzer yükleme altında kare boşluk örneği üç farklı malzeme için her iki yöntemle de çözülmüştür. Malzeme II (MII), malzeme I (MI) deki elastisite katsayılarının 90° dönmüş hali ve malzeme III (MIII) ise izotrop olarak gözönüne alınmıştır. Kare boşluğun genişliği dairesel boşluğun çapı kadar alınmış olup, grafiklerdeki eğimler, dairesel boşluk çözümlerindeki grafiklerin eğimlerine benzerlik göstermiştir (Şekil 5.10-12). İlk örneğe benzer şekilde FSM ile elde edilen sonuçlar ile DDM ile elde edilen sonuçlarda, gerilmeler bir birine çok yakın elde edilmiş, buna karşılık yer değiştirmeler de aynı yakınlık elde edilememiştir.

Bölümün son örneği olarak yarı sonsuz düzlemde eksenel yük ve hidrostatik iç basınç etkisi altındaki dairesel boşluk, c/r oranı sabit olmak üzere üç farklı malzeme için DDM ile çözümlenerek sonuçlar Şekil 5.14,15,16'da gösterilmiştir. Anizotrop malzemelerde yüzeydeki maksimum σ_{xx} gerilmeler, izotrop malzemeye oranla daha büyüktür. Ayrıca MI de boşluğun sınırlardaki yer değiştirmeler, bu yüklemeler altında MII'ye göre artmaktadır.

Sonuç olarak bu çalışmanın amacı anizotrop ortamlarda DDM yöntemi, quadripol çözümleri yardımıyla geliştirilmiş olup, yöntemin etkinliği ve anizotropinin etkisi, çeşitli yüklemeler altında boşluk, çatlak ve fay örnekleri çözümlenerek gösterilmeye çalışılmıştır.

Konuyla ilgili gelecekte yapılabilecek çalışmalar:

- 1- Anizotrop ortamda değme eleman tanımlanması,
 - 2- İzotrop ortamdaki değme elemanın sabit aralıklarla paralel olması durumunda enine izotrop benzeşimi yapılarak, anizotrop için elde edilen denklemlerle tabakalı ortam çözümlerinin elde edilmesi,
 - 3- Yüksek mertebeden yer değiştirme süreksizlik elemanlarının elde edilmesi,
 - 4- Anizotrop ortamda Mohr-Coulomb hipotezinin kullanılması,
 - 5- Zemindeki akma ve plastikleşme durumunun gözönüne alınması,
 - 6- Yöntemin kırılma mekaniğinde uygulanması,
- olarak sıralanabilirler.

Sonuçlarda anizotropinin çözümlerde gözönüne alınmasıyla elde edilen sonuçların yorumundan, gerilme ve yer değiştirmeler üzerinde anizotropinin etkisinin gözönünde tutulmasının gerekli bir faktör olduğu anlaşılmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **CROUCH, S. L. and STARFIELD, A. M.**, Boundary Element Methods in Solid Mechanics, London, (1983)
- [2] **BANERJEE, P.K. and BUTTERFIELD, R.**, Boundary Element Methods in Engineering Science, UK, (1981)
- [3] **HARTMANN, F.**, Introduction to Boundary Elements, NewYork (1989)
- [4] **BESCOS, E.D.**, Boundary Element Methods in Mechanics, Patras, (1987)
- [5] **BREBBIA, C.A.**, The Boundary Element Method For Engineers, London, (1978)
- [6] **BEER, G. and WATSON, J.O.**, Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineering, New York, (1992)
- [7] **BREBBIA, C.A.**, Topics in Boundary Element Research, New York, (1984)
- [8] **LOU, Z. W., and ZHANG, M.**, Elastoplastic Boundary Element Analysis with Hetenyi's Fundamental Solution, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 10, pp. 231-339, (1992)
- [9] **KANE, J.H. and SUNIL, S.**, Design- Sensitivity Analysis of Solids Using BEM, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 10, ASCE, (1988)
- [10] **BREEBIA, C.A., TELLES, J.C.F. and WROBEL, L.C.**, Boundary Element Techniques, New York, (1984)
- [11] **RENCIS, J. J. and HUANG, Q.**, Boundary Element Formulation for Generalized Plane Strain, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 9, pp. 263-271, (1992)
- [12] **KARAMI, G.**, BE Analysis of 2D Elastoplastic Contact Problems, Int. J. For Num. Methods in Engineering, Vol. 36, pp. 221-235, (1993)
- [13] **MAIER, G. and NOVATI, G.**, BE Elastic Analaysis of Layered Soils by A Successive Stiffness Method, Int. J. For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.11, pp. 435-447, (1987)

- [14] **PORTELA, A., ALIABADI, M. H. and ROOKE, D. P.,** The Dual Boundary Element Method- Effective Implementation for Crack Problems, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1269-1287, (1992)
- [15] **DUMIR, P.C., and MEHTA, A.K.,** BE Solution for Elastic Orthotropic Half-Plane Problems, *Computer and Structures* Vol. 26, No. 3, pp. 431-438, (1987)
- [16] **BREBBIA, C.A. and BUTTERFIELD, R.,** Formal Equivalence of Direct and Indirect Boundary Element Methods, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 2, pp. 132-134, (1978)
- [17] **CRUSE, T.A.,** *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*, London, (1988)
- [18] **CROUCH, S.L., and SELCUK, S.,** Two-Dimensional Direct Boundary Integral Method for Multilayered Elastic Media, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol. 29, No. 5, pp. 491-500, (1992)
- [19] **MEEK, J. L. and DAI, C.,** The Integration of The Melan Solution Over A Line Segment-Implementation for Boundary Element Modelling of Surface Cavations, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.16, pp. 655-667, (1992)
- [20] **TAKHTEYEV, V. and BREBBIA, C. A.,** Analytical Integrations in Boundary Elements (Technical Note), *Engn. Analysis with Boundary Elements*, Vol.7, No. 2, (1990)
- [21] **HUANG, Q. and CRUSE, T.A.,** On The Non- Singular Traction-BIE in Elasticity, *Int. J. For Num. Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 2041-2072, (1994).
- [22] **XIAOYAN, L., XIUXI, W. and MAOKUANG, H,** A New Boundary Integral Formulation With No Singularity, *ACTA Mechanica Sinica*, Vol.6, No. 4, (1990)
- [23] **CROUCH, S.L.,** Analysis of Stresses and Displacements Around Underground Excavations, *University of Minnesota Geomechanics Report*, (1976)
- [24] **AUSTIN, M.W., BRAY, J.W. and CRAWFORD, A.M.,** A Comparison of Two Indirect Boundary Element Formulations Incorporating Planes of Weaknes (Technical Note), *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol. 19, pp. 339 -344, (1982)

- [25] **JIANG, Y.S. and ZIMMERMANN, T.**, Indirect Boundary Element Algorithm for Slope Stability Analysis, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 9, pp. 209-217, (1992)
- [26] **LU, J. and WATSON, J. O.**, A Quadratic Variation Indirect Boundary Element Methods for Traction Boundary Value Problems of Two-Dimensional Elastostatics, Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 12, pp. 183-196, (1988)
- [27] **CHAN, H.C.M.**, Fracture Mechanics Analysis of The North West Fault Block of The Prudhoe Bay Field, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol. 30, No. 2, pp. 141-149, (1993)
- [28] **CHAN, H.C.M., LI, V. and EINSTEIN, H.H.**, A Hybridized Displacement Discontinuity and Indirect Boundary Element Method to Model Fracture Propagation, Int. Journal of Fracture, Vol. 45, pp. 263-282, (1990)
- [29] **CHAN, H.C.M.**, Analytical Influence Functions for Displacement Discontinuity and Point Force Elements, Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 16, pp. 669-682, (1992)
- [30] **CLEARY, M.P.**, Continuously Distributed Dislocation Model for Shear-Bands in Softening Materials, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 679-702, (1976)
- [31] **CRAWFORD, A.M., and CURRAN, J.H.**, Higher-Order Functional Variation Displacement Discontinuity Elements, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol. 19, pp. 143 -148, (1982)
- [32] **CROUCH, S. L.**, Solution of Plane Elasticity Problems by The displacement Discontinuity method- I. Infinite Body Solution, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 301-318, (1976)
- [33] **CROUCH, S. L.**, Solution of Plane Elasticity Problems by The Displacement Discontinuity Method- II. Semi-Infinite Body Solution, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 319-343, (1976)
- [34] **DUNBAR, W.S., and ANDERSON, D.L.**, The Displacement Discontinuity Method in Three Dimensions, Editor, C.A. Brebbia, In BEM Proceedings of The Third International Seminar Irvine, California July, (1981)
- [35] **KURIYAMA, K. and MIZUTA, Y.**, 3D Elastic Analysis by The DDM With Boundary Division in to Triangular Leaf Elements, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., Vol. 30, No.2, pp. 111-123, (1993)

- [36] **PAN, E.**, Dislocation in An Infinite Poroelastic Medium, *Acta Mechanica* Vol. 87, pp. 105-115, (1991)
- [37] **SHOU, K. J. and CROUCH. S. L.**, A Higher Order DDM. for Analysis of Crack Problems, *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol.32, No:1, pp.49-55, (1995)
- [38] **SHI, G.H. and GOODMAN, R. E.**, Generalization of Two-Dimensional Discontinuous Deformation Analysis for Forward Modelling, *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, pp. 359-380, (1989)
- [39] **WILES, T. D. and CURRAN, J. H.**, A General 3-D Displacement Discontinuity Method, *Proceedings of The 4th. Int.'I Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Canada*, Vol. 1, pp. 103-111, (1982)
- [40] **YIN, H. P. and EHRLACHER. A.**, Variational Approach of DDM and Application to Crack Problems, *Int. J. of Fracture*, Vol. 63, pp. 135-153, (1993)
- [41] **HORII, H., and NEMAT-NASSER, S.**, Elastic Fields of Interacting Inhomogeneities, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 21, No. 7, pp. 731-745, (1985)
- [42] **KURSHIN, L.M. and SUZDAL'NITSKII, I. D.**, *Stresses in A Plane With A Filled Crack*, Plenum Publishing Corporation, (1975)
- [43] **LU, H. and LARDNER, T. J.**, Mechanics of Subinterface Cracks in Layered Material, *Int. Jor. of Solids and Structures*, Vol.29, NO. 6, pp. 669-688, (1991)
- [44] **NISHIMURA, N. and KOBAYASHI, S.**, A Boundry Integral Equation Method for An Inverse Problem Related to Crack Detection, *Int. J. for Num. Methods Engineering*, Vol.32, pp. 1371-1387, (1991)
- [45] **NOWELL, D. and HILLS, D. A.**, Open Cracks At or Near Free Edges, *Journal of Strain Analysis*, Vol. 22, No.3, (1987)
- [46] **SEO, K. and MURA, T.**, The Elastic Field in a Half Space Due to Ellipsoidal Inclusions With Uniform Dilatational Eigenstrains, (1979)
- [47] **VIOLA, E., PIVA, A. and RADI, E.**, Crack Propagation in An Orthotropic Medium Under General Loading, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 5/6, pp. 1155- 1174, (1989)

- [48] **BRADY, B. H. G., BRAY, J. W.,** The Boundary Element Method for Elastic Analysis of Tabular Orebody Extraction, Assuming Complete Plane Strain, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol. 15, pp. 29-37, (1978).
- [49] **BRADY, B. H. G., BRAY, J. W.,** The Boundary Element Method for Determining Stresses and Displacements Around Long Openings in a Triaxial Stress Field, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr.*, Vol. 15, pp. 21-28, (1978)
- [50] **GREEN, A.E. and ZERNA, W.,** Theoretical Elasticity, Oxford, (1968)
- [51] **LEKHNITSKII, S.G.,** Theory of Elasticity of An Anisotropic Elastic Body, San Francisco, (1963)
- [52] **ANAND, S.C. and YALAMANCHILI, K.K.,** A Numerical Procedure to Estimate Failure Loads in Composite Masonry Walls, *Structural Engineering Review*, Vol. 5, No. 1., pp. 53-61, (1993)
- [53] **BINIENDA, W. K.,** Crack Interaction in Anisotropic Materials, *Proc. Int. Symp., Brittle Matrix Composites 4*, (1994)
- [54] **DELALE, F.,** Fracture Analysis of Notched Composites, *ASME, Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 109, pp.22-35, (1982)
- [55] **DOBLARE, M., ESPIGA, F., GRACIA, L. and ALCANTUD, M.,** Study of Crack Propagation in Ortotropic Materials by Using The BEM, *Engineering Fracture Mechanic*, Vol.37, No.5, pp. 953-967, (1990)
- [56] **GDOUTOS, E.E., and ZACHAROPOULOS, D.A.,** Mixed-Mode Crack Growth in Anisotropic Media, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 2, pp. 337-346, (1989)
- [57] **SHAN, F. D. and XING, Z.,** Analy. Variational Meth. of Solution For SIF's About Anisotropic and Isotropic Finite Plates With Double Cracks Emanating From Holes, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 50, No.3, pp. 311-324, (1995)
- [58] **ZHANG, Z. G. and MAI, Y. W.,** Calculation of Stress Intensity Factors for Griffith Cracks in An Orthotropic Elastic Plate Using The Principle of Superposition, *Engineering Fracture Mechanic*, Vol. 34, No.4, pp. 803-814, (1989)

- [59] **ZHANG, S.Q., JANG, B.Z., VALAIRE, B.T. and SUHLING, J.C.,** A New Criterion for Composite Material Mixed Mode Fracture Analysis, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 3, pp. 749-769, (1989)
- [60] **XIAO, B. and CARTER, J.P.,** Boundary Element Analysis of Anisotropic Rock Masses, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.11, pp. 293-303, (1993).
- [61] **CARTER J.P. and XIAO B.,** A 2D Coupled FE and BE Scheme To Simulate The Elastic Behaviour of Jointed Rock, *Int. J. For Num. And Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 18, pp. 49-71, (1994).
- [62] **ALEHOSSEIN, H., CARTER,J.P. and BOOKER, J.R.,** Finite Element Analysis of Rigid Footings on Jointed Rock, *Complas III Barselona*, Spain April, (1992)
- [63] **RIZZO, F.J. and SHIPPY, D.J.,** Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies, *J. Comp. Mat.*, Vol. 4, pp. 36-60, (1970)
- [64] **CHEN, D.H.,** Force and Dislocation in An Anisotropic Semi-Infinite Plate Joined to An Isotropic Semi-Infinite Plate, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52, No.1, pp. 95-106, (1995)
- [65] **CHEN, D.H.,** Force and Dislocation in An Isotropic Semi-Infinite Plate Joined to An Anisotropic Semi-Infinite plate, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 51, No. 4, pp. 603-613, (1995)
- [66] **PI-HUA,W.,** The Solution of A Displacement Discontinuity for An Anisotropic Half-Plane and Its Applications to Fracture Mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 34, No. 5/6, pp. 1145-1154, (1989)
- [67] **BERGER, J.R.,** BE Analysis of Anisotropic Bimetarials With Special Green's Functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.14 pp. 123-131, (1994)
- [68] **DEB, A., and BANERJE, P.K .,** BEM For General Anisotropic 2D Elasticity Using Particular Integrals, *Cominications in Applied Numerical Methods*, Vol. 6, pp. 111-119, (1990)
- [69] **PAN, Y. C. and CHOU, T. W.,** Green's Functions for Two-Phase Transversely Isotropic Materials, (1979)

- [70] **SHI, G. and BEZİNE, G.**, A New Boundary Integral Equation- Finite-Element Method for Clamped Orthotropic Plate Bending Problems, Communications in Applied Numerical Methods, Vol.5, pp. 527-537, (1989)
- [71] **WITTKE, W.**, Rock Mechanics, Berlin, (1990)
- [72] **MANG, Z. K., LI, H. A. and HOFSTETTER G.**, 3D Transversely Isotropic BEM Including Body Force Boundary Integration, (1990)
- [73] **SCHCLAR, N.A.**, Anisotropic Analysis Using Boundary Elements, Great Britain, (1994)
- [74] **BROWN, E.T.**, Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics, London, (1987)
- [75] **PANDE, G.N., BEER, G. and WILLIAMS, J.R.**, Numerical Methods in Rock Mechanics, New York, (1990)
- [76] **GOODMAN, R.E., TAYLOR, R. L. and BREKKE, T. L.**, A Model for The Mechanics of Jointed Rock, Journal of The Soil Mechanics and Foundations Division, Proceedings of The American Society of Civil Engineers, (1968)
- [77] **ZAMAN, M. M. and SHAH, M.**, Bhavior of Underground Tunnels in Jointed Rocks Subjected to Blast Loading, Underground Mining Methods and Techonology, Edited by A.B. Szwilski and M. J. Richards, pp. 373-382, (1987)
- [78] **BRADY, B.H.G. and BROWN, E.T.**, Rock Mechanics for Underground Mining, London, (1985)
- [79] **HOEK, E. and BROWN, E.T.**, Underground Excavations in Rock, England, (1980)
- [80] **POLUS, H.G. and DAVIS, E.H.**, Elastic Solutions For Soil And Rock Mechanics, New York, (1974)
- [81] **HOCKING, G.**, Stress Analysis of Underground Excavations Incorporating Slip and Separation Along Discontinuities, Recent Advances in The BEM, Pentech Press, pp. 195-214, (1978)
- [82] **SAEB, S. and AMADEI, B.**, FE Implementation of A New Model for Rock Joints, Rock Joints, Barton and Stephansson (eds), Balkema, Rotterdam, (1990)

- [83] **SHEN, B. and STEPHANSSON, O.**, Cyclic Loading Characteristics of Joints and Rock Bridges in A Jointed Rock, Rock Joints, Barton and Stephansson (eds), Balkema, Rotterdam, (1990)
- [84] **SNYMAN, M. F., BIRD, W. W. and MARTIN, J. B.**, A Simple Formulation of A Dilatant Joint Element Governed by Coulomb Friction, Engineering Computations, Vol. 8, pp. 215-229, (1991)
- [85] **VASILESCU, M. S .**, A Model for The Mechanics of Jointed Rock, (1969)
- [86] **AMADEI, B. and SAEB S.**, Constitutive Models of Rock Joints Rock Joints, Barton and Stephansson, Balkema, Rotterdam, (1990)
- [87] **BANDIS, S. C.**, Mechanical Properties of Rock Joints, Barton and Stephansson (eds) Balkema, Rotterdam, (1990).
- [88] **AYDAN, Ö., ICHIKAWA, Y., EBISU, S., KOMURA, S. and TANABE, A.**, Studies on Interfaces and Discontinuities and An Incremental Elasto-Plastic Constitutive Law Rock Joints, Barton and Stephansson (eds) Balkema, Rotterdam, (1990)

ÖZGEÇMİŞ

1964 yılında Kars'ın Çıldır ilçesinin Gölbelen Köyünde doğdu. Orta öğrenimini Çıldır Lisesinde tamamladı. 1986 yılında İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden mezun oldu, 1989 yılında da aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansını tamamladı. 1989 yılında İ.T.Ü İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim Dalına araştırma görevlisi olarak girdi. Halen bu görevi yürütmektedir.

