46321.

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR METODU İLE DOĞRU AKIM MOTORUNUN MAGNETİK ALAN İNCELEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elk.Müh. YUSUF ÖZOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 HAZİRAN 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 HAZİRAN 1995

Tez Danışmanı : PROF.DR.Nurdan GÜZELBEYOĞLU

Diğer Jürü Üyeleri : PROF.DR.Nejat TUNCAY

: DOÇ.DR.Özcan KALENDERLİ

HAZİRAN 1995

ÖNSÖZ

Bu tezin konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında değerli fikirleri ve önerileri ile bana destek olan hocam Prof.Dr.Nurdan GÜZELBEYOĞLU'na çok değerli yardım ve ilgilerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Makina Fakültesinde ANSYS programı ile çalışmama imkan verdiği için Doç.Dr.Cem PARMAKSIZOĞLU'na da teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca ANSYS programını verdiği için ve çalışmamdaki çok değerli katkılarından dolayı, ANSYS'in Türkiye Genel Distribütörü olan FİGES LTD.ŞTİ.'nin genel müdürü Dr.Tarık ÖĞÜT'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca Tezin hazırlanması sırasında fedekarlıklarından dolayı eşim Refika ÖZOĞLU'na da en içten teşekkürlerimi sunarım.

HAZİRAN 1995 Yusuf ÖZOĞLU

İÇİNDEKİLER

		SAYFA
ÖZET		vii
SUMMARY		
STUDY OF MAGNETIC FIELD DISTRIBUTION OF DC MOTOR WITH FINITE ELEMENTS METHOD		viii
	BÖLÜM 1	
GİRİŞ		
1.1	Modeldeki Metod ve Amaç	2
	BÖLÜM 2	
SONLU ELEMANLAR METODUNUN TEMELLERİ		
2.1	Fiziksel Matematik Denklemlerinin Temelleri	5
2.1.1	Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Tanımı	5
2.1.2	Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Tanımı	6
2.1.3	Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Tanımı	6
2.2	Sınır Değer Problemlerin Çözümü	7
2.2.1	Ritz Metodu	8
2.2.1.1	Varyasyonel İlkesi	8
2.2.2	Galerkin Metodu	10
	BÖLÜM 3	
SONLU ELEMANLAR METODUNUN İKİ BOYUTLU ELEKTROMAGNETİK ALANLARA UYGULANIŞI		
3.1	Enerjinin Minimumlaştırılma İlkesi	12
3.2	Sonlu Elemanlar Metodunun Temelleri	14

3.2.1 Birinci Dereceden Elemanlar 14
3.3 İki Boyutlu Elektromagnetik Alan Analiz 17
3.3.1 Genel ve Yerel Numaralandırma 18
3.3.2 İnterpolasyon (Yaklaşım) Fonksiyonu 19
3.3.3 Fonksiyonelin Elde Edilmesi 21
3.3.4 Fonksiyonelin Minimumlaştırılması 25

BÖLÜM 4

STATİK MAGNETİK ALANIN TEMELLERİ

4.1 Statik Magnetik Alan 27
4.1.1 Kabuller 28
4.2 Ana Denklemler 28
4.3 İki Boyutlu Vektör Potansiyel 29
4.4 İki Boyutlu Vektör Potansiyel için Sonlu Elemanlar Formülasyonu 31
4.5 Magnetik Kuvvetler 33
4.5.1 Akım Taşıyan Bölgelerdeki Kuvvetler 33
4.5.2 Maxwell Kuvvetleri 34

BÖLÜM 5

ANSYS SONLU ELEMANLAR ANALİZİNİN PROBLEMLERE UYGULANIŞI

5.1 ANSYS Sonlu Elemanlar Analizi 35
5.1.1 ANSYS Sonlu Elemanlar Analiz ile Tasarım ve Maliyet 36
5.2 ANSYS'de Kullanılan İki Boyutlu Modeller 37
5.2.1 İki Boyutlu Düzlemsel Modeller 37
5.2.2 İki Boyutlu Eksenel Simetrili Modeller 38
5.3 ANSYS Programının Uygulanışı 38
5.3.1 Modelleme 38
5.3.1.1 Eleman Tipini Seçmek 39
1. PLANE53 ElemanTipi 39
2. PLANE13 Eleman Tipi 40
5.3.1.2 Malzeme Özelliklerini Tanımlamak 44
1. Doymalı Bölgeler 45

2. İletkenler 46
3. Kalıcı Mıknatıslar 46
4. Hava 46
5.3.2 Çözüm Elde Etmek 46
5.3.2.1 Analiz Seçenekleri 47
5.3.2.2 Yükler 47
5.3.2.3 Yük Adım Seçeneği 47
5.3.2.4 Çöz 48
5.3.3 Sonuçları Gözlemek 48

BÖLÜM 6

ANSYS SONLU ELEMANLAR ANALİZİNDE NONLİNEER PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

6.1 Nonlineerlik 49
6.1.1 Nonlineer Davranış Nedir ? 50
6.1.2 Nonlineer Davranışa Neler Sebep Olur ? 52
6.1.2.1 Geometri Nonlineerlikleri 52
6.1.2.2 Malzeme Nonlineerlikleri 52
6.1.2.3 Temas Nonlineerlikleri 53
6.1.3 Nonlineer Sonlu Elemanlar Analiz Niçin Farklıdır ? 54
6.1.3.1 Lineer Bir Çözücü ile Nonlineer Analiz 54
6.1.3.2 Newton-Raphson Metodu 54
6.1.3.3 Newton-Raphson Denklemi 55
6.1.3.4 Newton-Raphson Eğrisi 55
6.1.3.5 Yakınsama Yarıçapı 56
6.1.4 Nonlineer Sonlu Elemanlar Analizin Sorunları 58
6.1.4.1 Yakınsamanın Sorunlarını Aşma 58
6.2 Nonlineer Analizin Aşamaları 59
6.2.1 Modelleme 59
6.2.1.1 Nonlineer ve Lineer Model Arasındaki Farklar 60
6.2.2 Çözüm Elde Etmek 60
6.2.2.1 Nonlineer Çözüm Akış Diagramı 61
6.2.2.2 Nonlineer Çözüm Tablosu 62

6.2.2.3 Nonlineer ve Lineer Çözüm Arasındaki Farklar 64
6.2.2.4 Nonlineer Çözüm Organizasyonu 64
6.2.2.5 ANSYS'de "Time" Nedir? 65

BÖLÜM 7

BİR DA MOTORUNUN ANSYS İLE MAGNETİK ALAN ANALİZİ

7.1 Doğru Akım Motorunun Modellenmesi 67
7.1.1 Motor Malzeme Özelliklerinin Tanımlanması 67
7.1.2 Modelde Kullanılan Eleman Tipinin Tanımlanması 72
7.1.3 Motorun Katı Modellemesi (Solid Modeling) 72
7.1.4 Modelde Ağın oluşturulması (Mesh Generation) 77
7.2 Motor Modelinin Magnetik Analiz Çözümü 81
7.2.1 Modele Sınır Koşullarının Uygulanması 81
7.2.2 Modele Yüklerin Uygulanması 82
7.3 Modelin Magnetik Analiz Sonuçlarının Değerlendirilmesi 82
7.3.1 Motorun Uyarma Alan Eğrisi 82
7.3.1.1 Diş Endüksiyonu 87
7.3.2 Motorun Endüvi Alan Eğrisi 87
7.3.3 Motorun Yardımcı Kutup Alan Eğrisi 92

BÖLÜM 8

SONUÇLAR 97

KAYNAKLAR 99

EK-A

PROGRAM ÇIKTI ÖRNEKLERİ 100

ÖZGEÇMİŞ 104

ÖZET

Bu çalışmada, 30 kW, 440 V ve 1500 d/dak'lık bir doğru akım şönt motorunun nonlineer koşullar altındaki elektromagnetik alan dağılımı sayısal bir metodla incelenmiştir. ANSYS isimli sonlu elemanlar metodunu kullanan bir analiz programı bu sayısal çözüm için kullanılmıştır.

Burada motorun magnetik alan davranışı incelenirken başlıca şu aşamalar gerçekleştirilmiştir:

1. Bilgisayar destekli geometrisini oluşturmak.
2. Sonlu elemanlar modelini oluşturmak
3. Yük ve sınır koşullarını uygulamak.
4. Magnetik alan analizini yapmak.
5. Sonuçları grafik olarak alıp değerlendirmek.

Sonuçta motorun hava aralığı uyarma alan şekli, endüvi alan şekli ve yardımcı kutup alan şekli tespit edilmiştir. Bu inceleme öncelikle doğru akım motorunun uyarma alanı ve endüvi alanı için yapılmış olup toplam alan çıkartılarak endüvi reaksiyonu gösterilmiştir.

Daha sonra yardımcı kutup alanı bulunarak, bu alanın magnetik nötr bölgenin geometrik nötr bölge ile çakışmasını sağladığı ve endüvi reaksiyonunu ortadan kaldırdığı gösterilmiştir.

Ayrıca doğru akım motorunun uyarma alanının endüvideki dağılımı incelenirken akı yığılmasının hangi bölgelerde arttığı ve bu yığılmanın geleneksel hesaplarda öngörülen sınırları aşıp aşmadığı araştırılmıştır.

Ayrıca geleneksel hesapla bulunan diş dibi endüksiyonu ile ANSYS sonlu elemanlar analiz programı kullanılarak bulunan diş dibi endüksiyonu karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar analizi ile tesbit edilen diş dibi endüksiyonu % 1-2'lik bir farkla geleneksel hesapla bulunan değere yaklaşık eşit çıkmıştır.

Sonuçta bu metod ile yapılan alan dağılımı incelemelerinin geleneksel metodlarla yapılmış alan hesaplarını doğruladığı görülmüştür. Ayrıca hava aralığındaki alan eğrileri örneğinde olduğu gibi geleneksel hesapla tesbit edilememiş ayrıntılarda görülebilmiştir. Sonuçlar bölümünde açıklanan nedenleri de gözöüne alırsak sonlu elemanlar metodu tasarımcılara elektrik makinalarının tasarımı ve üretiminde büyük avantajlar sağladığı anlaşılmıştır.

SUMMARY

STUDY OF MAGNETIC FIELD DISTRIBUTION OF DC MOTOR WITH THE FINITE ELEMENTS METHOD

In this study, electromagnetic field of a DC shunt motor of 30 kW, 440 V, 1500 rpm, has been examined by numerical method [1]. A finite elements analysis program named ANSYS has been used for the numerical solution [2-5].

The following major steps have been achieved during examination of the magnetic field distribution of the motor :

1. Forming computer-aided geometry of the motor.
2. Forming model of finite elements.
3. Application of load and boundary conditions.
4. Analysis of magnetic field.
5. Obtaining the results in the form of graphics and evaluation thereof.

A brief description of each of the above mentioned steps have been given thereunder:

Geometry of the motor has been drawn in ANSYS program. As the motor has the property of symmetry, a model of finite elements for only 1/4 of the has been formed. Thus complexity in one hand and overloading of the computer memory in the other hand has been avoided.

For finite elements model, μ_{rx} relative permeability of various materials used in the motor or characteristic values there of as per B-H magnetization curves have been entered as data inputs [1]. The following material regions are present in the model:

1. Air (free space)
2. Conductors (motor windings)
3. Permeable regions (laminated steels)
4. Permeable regions (iron)

Material properties have been given in Figure 1.

Plane13 has been selected from the ANSYS elements library as the type of element to be used [4]. The said PLANE13 element has been linear property for four-node quadrilateral (triangular form also exists) used for two dimensional models.

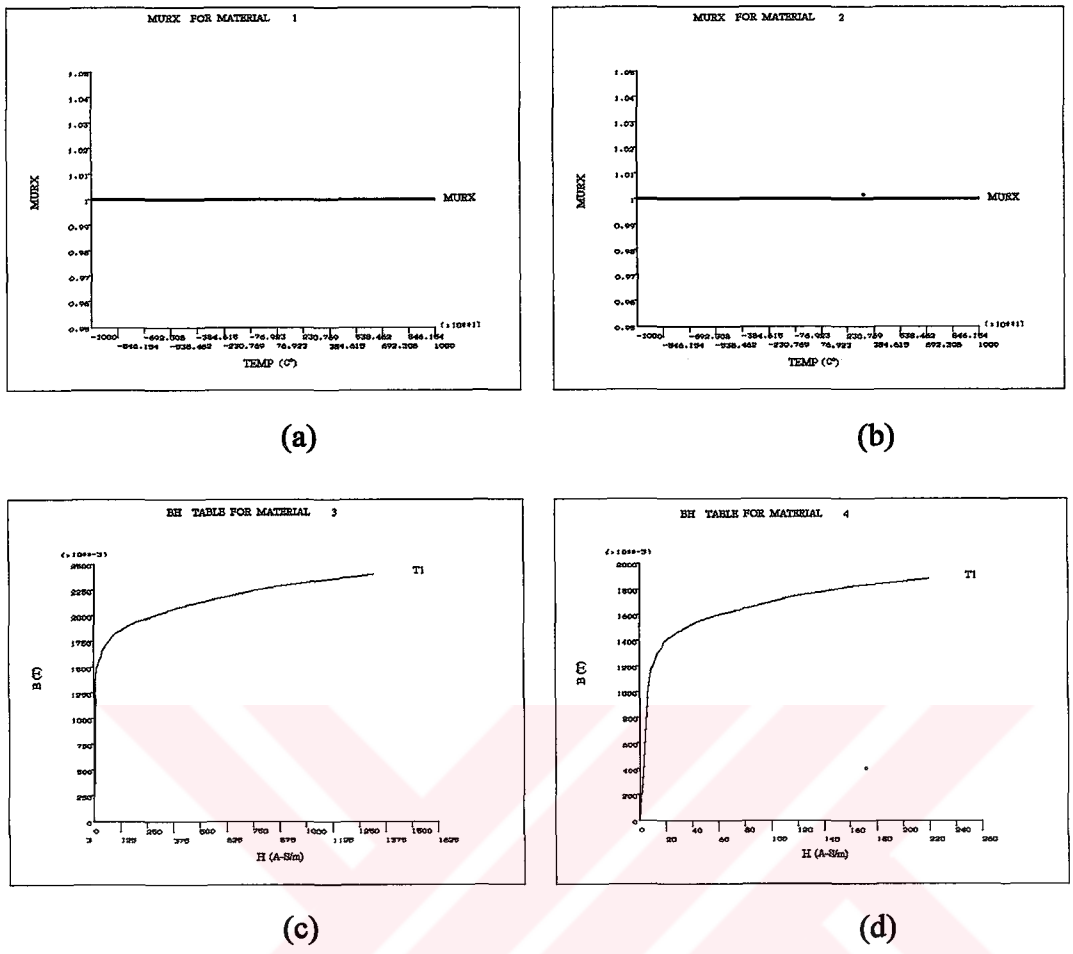


Figure 1. Material properties (a) for air (b) for windings (c) for laminated steels (d) for iron

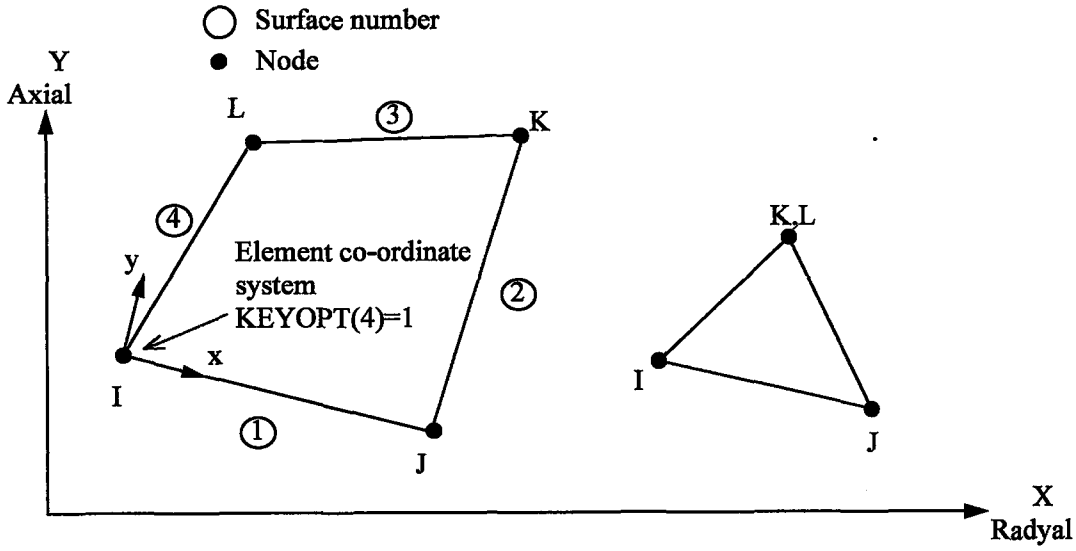


Figure 2. PLANE13 element properties

Quadrilateral form has linear shape functions, i.e., can account for linear variation of the potential field. Property of Plane13 have been given in Figure 2.

Special care has been exerted to select the air-gap and the elements in the teeth in small in small dimensions. Thus, increase the number of nodes in the high precision regions.

The method of finite elements divides the region into sub-regions called "elements" and estimates a vector potential approximation function for the end points of the elements, named as "nodes" and computes the vector potential values for each of these nodes.

The next step is apply load and boundary conditions to the model of finite elements. Vector potential value, A for the boundary conditions has been given as zero at such conditions where the flux lines are in parallel to the boundary.

The same value has been given unconditional in cases where the flux lines are in perpendicular to the boundary. The application of load has been made by entering the current densities in the motor windings by taking the current directions into account.

In the fourth step, the model has been analyzed for the following three conditions:

1. Current exists in the motor excitation windings.

2. Current exists in the motor armature windings.

3. Current exists in the motor commutating windings.

Excitation field curve for the air gap of the motor has been given in Figure 3. As can be seen, B magnetic flux density is maximum at the bottom of the pole, whereas it is zero at geometric neutral region.

It has been determined that B_{dmax}, maximum magnetic flux density in the motor teeth under excitation conditions is 2.4150 [T] which is lower than the maximum permissible value of 2.5 [T]. On the other hand, the bottom of the teeth, B_d is 2.3 [T] is which is approximately equal to the value obtained through conventional methods.

The armature field curve for the air-gap is given in Figure 4. The field value equals zero in the mids of the poles whereas it is maximum at the geometric neutral region. The axis of the armature field is fixed at 45° electrical degrees from the main field (excitation field) axis.

The effect of armature field is seen to be that of creating flux sweeping across the pole faces; thus its path in the pole shoes crosses the path of main field flux. For this reason, this phenomena is called armature reaction. It evidently causes a decrease in the resultant air gap flux density under one half of the pole and an increase under the other.

When current exists in both excitation and armature windings, is observed that these two fields overlap each other and consequently the field is not equal to zero at the geometric neutral region; instead, it slips by the angle of β.

The field curve of commutating pole the air gap when current exists in the commutating pole winding is given in Figure 5. As seen, Magnetic flux density, B takes the maximum value at the geometric neutral region in the reverse direction of

the armature field, whereas it equals zero before reaching the poles. Thus, the effect of the armature field which is the cause of the armature reaction is estimated. The interpole field must be sufficient to neutralize the armature reaction in the interpolar region.

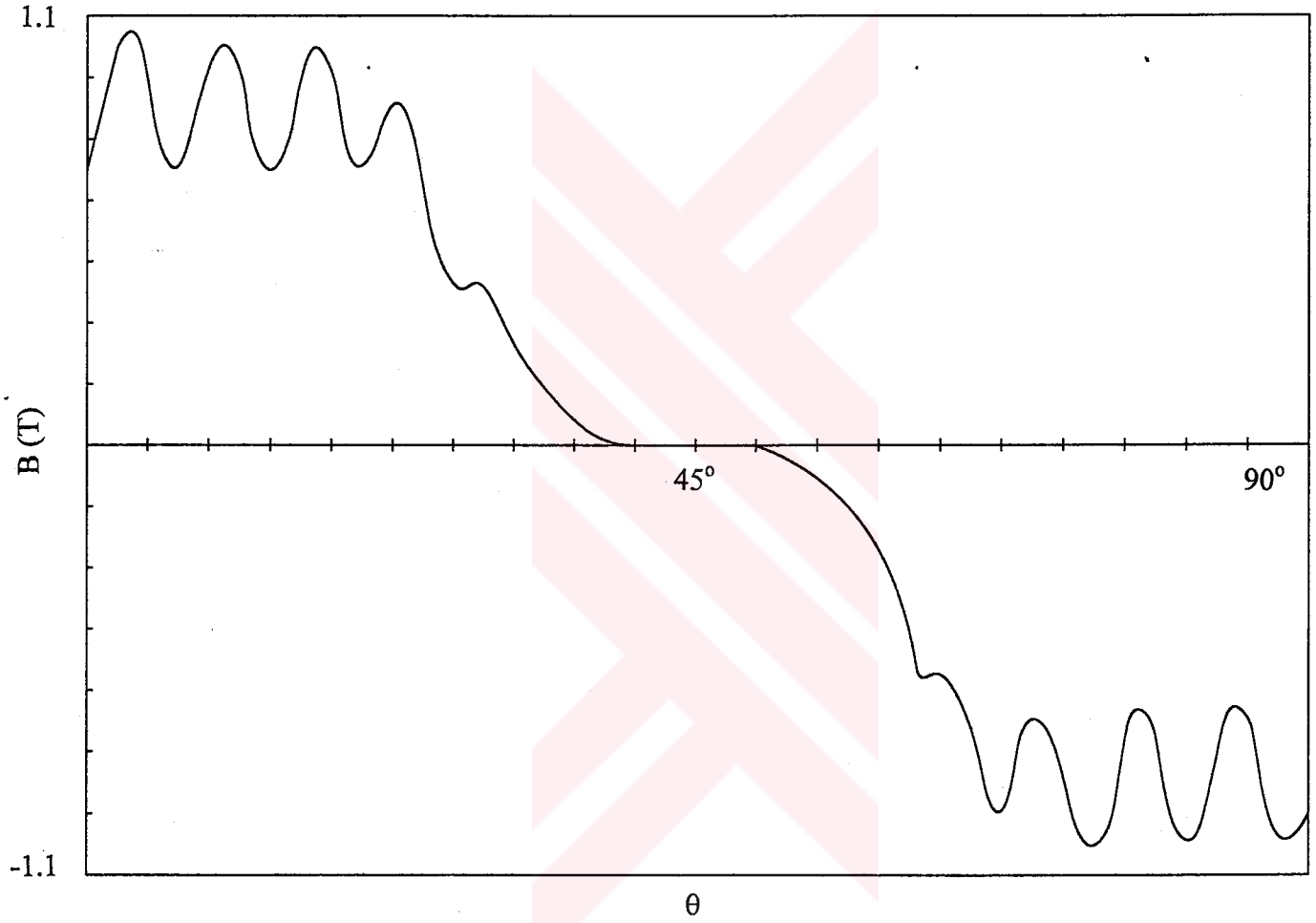


Figure 3. Air-gap excitation field curve.

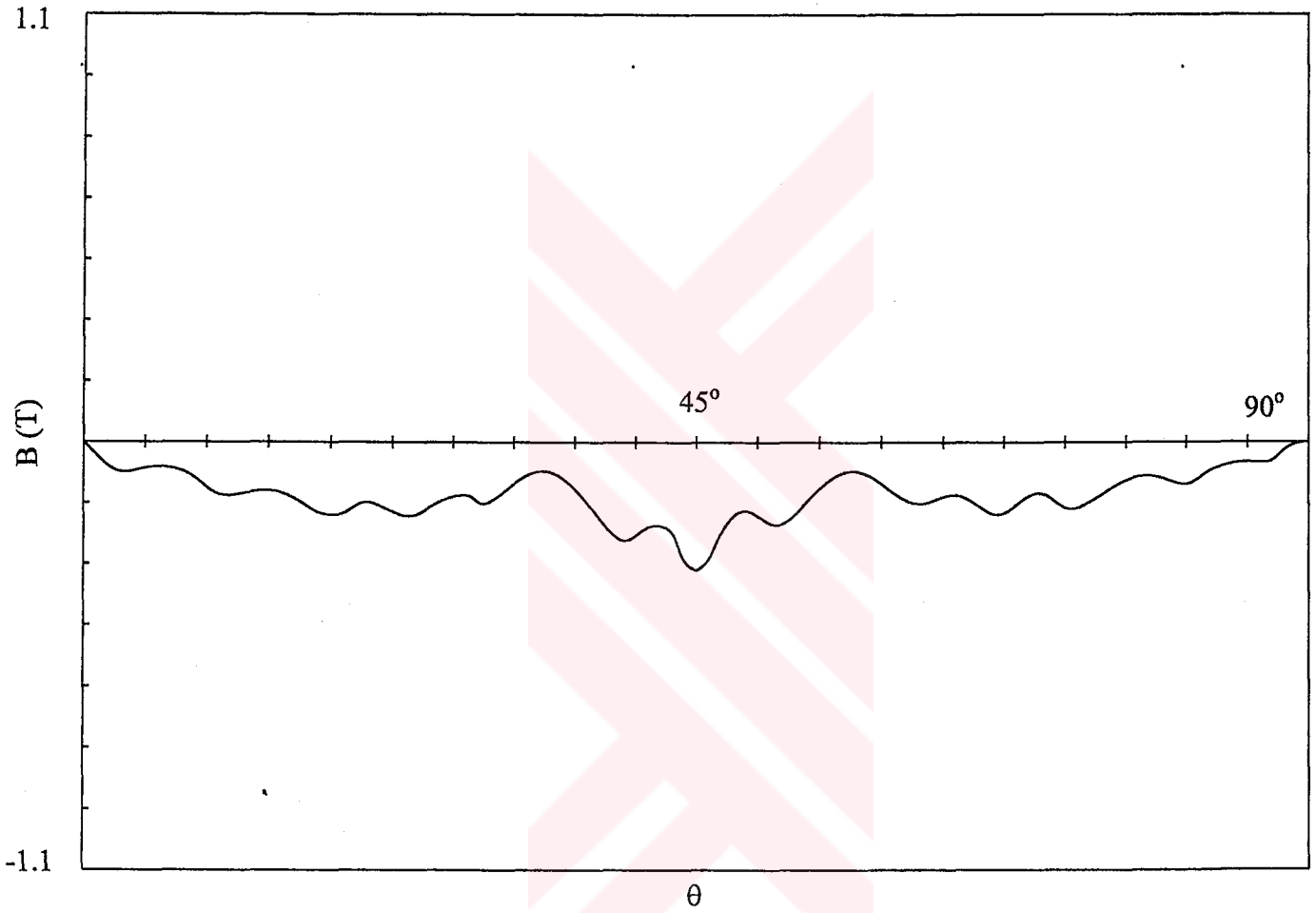


Figure 4. Air-gap armature field curve.

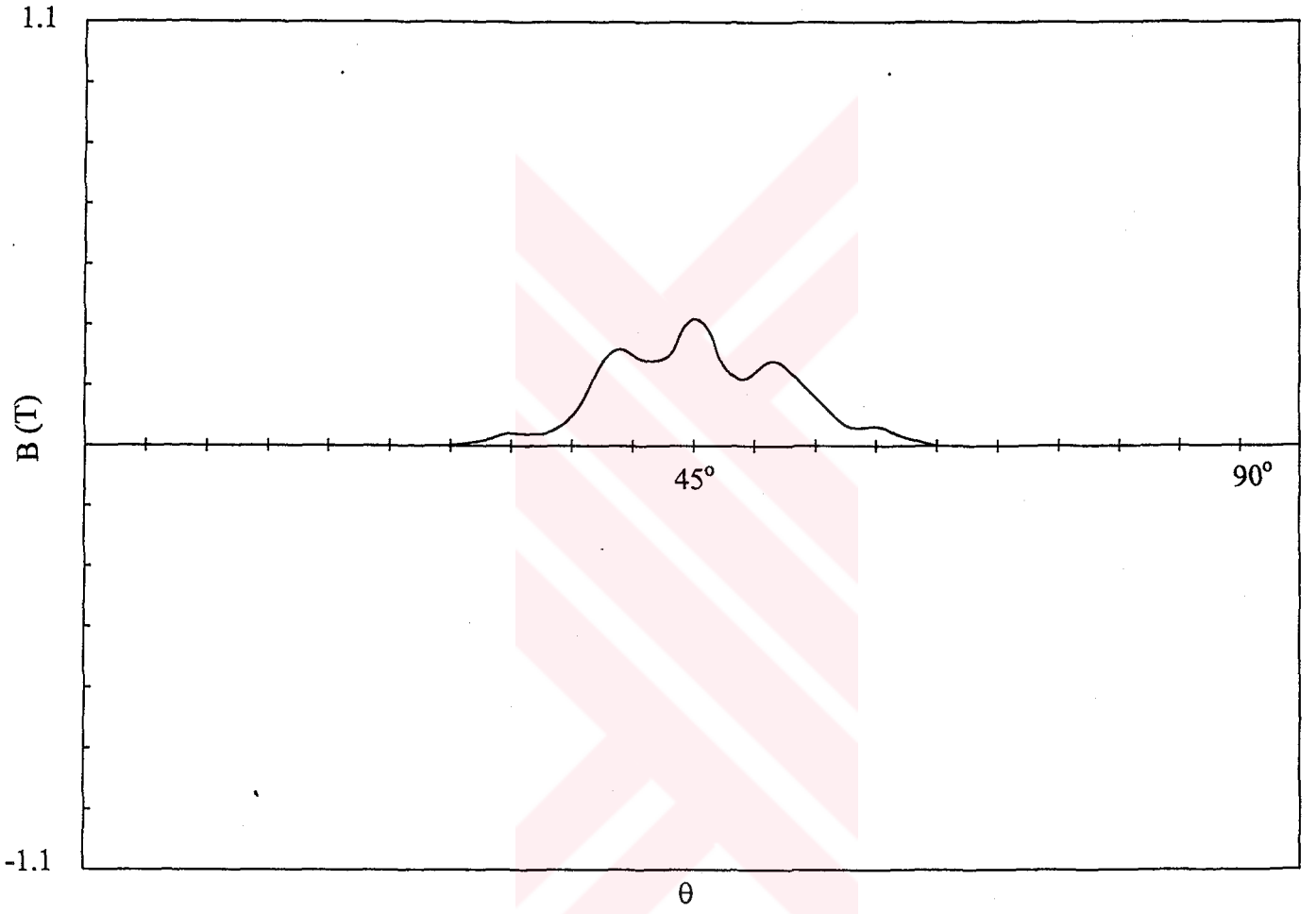


Figure 5. Air-gap commutating field curve.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Büyük ölçüde doğru akım motorlarının ve generatörlerin modern endüstriyel uygulamalarda kullanımı, tahrik makinaları, değişken gerilimli güç kaynakları gibi onların magnetik devrelerindeki doymalı demir kısımların performanslarının hatasız şekilde analizini yapmayı gerektirmektedir.

Bazı performans göstergeleri yük karakteristikleri, moment-hız eğrileri, değişen yükteki komutasyon cevap oranı ve diğerleri gibi. Bunlar, nonlineer koşullar altında makinalardaki magnetik alan dağılımının belirlenmesiyle ancak hatasız olarak hesaplanabilir.

Daha önceleri, çeşitli analitik yaklaşım metodları belli ölçülerde kullanılmıştır. Bununla beraber, bu metodlar homojenlikle yada sıkçada lineer ortamlarla ve basit geometrik şekillerle sınırlıydı. Makinaların artan karmaşıklıkları ve magnetik kısımların doymaya girmesinden kaynaklanan nonlineerlikle birlikte sayısal metodlar için duyulan ihtiyaç çok çabuk başlamıştır.

Elektromagnetik alan incelemelerinde farklı sayısal metodlardan yaralanılır. Bunlardan bazıları; Sonlu Farklar Metodu, Sonlu Elemanlar Metodu, Monte Carlo Metodu, Sınır Elemanlar Metodu ve Yük Benzetim Metodu dur. Bu metodlardan hangisi ile çalışmanın uygun olacağına karar vermede, metodların temel özellikleri biliniyor kabul edilirse, söz konusu problem için en kısa sürede en doğru sonucu verecek, kolay programlanabilir ve kolay kullanılabilir metodun seçilmesine dikkat edilir.

Bir elektrik aygıtının tasarımında aygıtın kullanılacağı elektrik, magnetik, ısıl, mekanik gibi koşullara uygun özelliklere sahip olması gerektiği göz önünde

bulundurulur. Bu aşamada tasarlanan aygıta ilişkin elektromagnetik alan incelemelerinin yapılması, koşullara uygun boyutlandırma, biçimlendirme yanında, aygıtın özelliklerini ve davranışını belirleme bakımından yararlı ve gerekli bilgilerin elde edilmesi olanağını verir. Uygulama alanlarının çeşitliliği nedeniyle elektriksel aygıtlarla ilgili problemler de birbirinden farklılıklar gösterir.

Mühendislerin bu aygıtları tasarlar, geliştirir ve denetlerken sayısal yöntemlerden faydalanmaları beklenir. Zaman ve ekonomiklik bakımından uzun ve pahalı deneysel çalışmalar yerine sayısal benzetimler üzerinde çalışmak daha uygundur. Ancak sayısal çalışmalar, karmaşık yapılarda elektromagnetik alan hesabı yapmayı, bunun için de matematiksel temelleri ve bilgisayar tekniklerini (bilgisayar kullanmayı, proglamlamayı ve sayısal çözümlemeyi) bilmeyi gerektirir.

Bir problemin matematiksel tanımı Maxwell denklemlerinden faydalanılarak yapılabilir. Genellikle problemlere ilişkin ortaya çıkan kısmi türevli denklemlerin analitik çözümü, çok basit durumlar dışında, zor, zaman alıcı veya olanaksız olabilir. Bu gibi durumlarda sayısal yöntemlerle çalışmak kaçınılmaz olur.

1.1 Çalışmadaki Metod ve Amaç

Bu çalışmada, daha önce hesabı geleneksel metodla yapılmış olan 30 kW, 440 V ve 1500 d/dak'lık bir doğru akım şönt motorun elektromagnetik alan incelemesi sayısal bir metodla yapılmıştır [1]. ANSYS isimli sonlu elemanlar metodunu kullanan bir analiz programı bu sayısal çözüm için kullanılmıştır [2-5].

Burada motorun magnetik alan davranışı incelenirken başlıca şu aşamalar gerçekleştirilmiştir:

1. Bilgisayar destekli geometrisini oluşturmak.

2. Sonlu elemanlar modelini oluşturmak

3. Yük ve sınır koşullarını uygulamak.

4. Magnetik alan analizini yapmak.

5. Sonuçları grafik olarak alıp değerlendirmek.

Sonuçta motorun hava aralığı uyarma alan şekli, endüvi alan şekli, yardımcı kutup alan şekli ve toplam alan şekli tespit edilmiştir. Ayrıca geleneksel hesapla bulunan diş dibi endüksiyonu ile ANSYS sonlu elemanlar analiz programı kullanılarak bulunan diş dibi endüksiyonu karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada ayrıca motorda yardımcı kutup alanının şeklide tesbit edildiğinden, yardımcı kutbun endüvi reaksiyonuna olan etkiside ANSYS sonlu elemanlar analizi ile açık bir şekilde görülmüştür.

Modelin oldukça büyük olduğu ve sonlu elemanlar modeli oluştuğunda çok fazla bilgisayar hafızası ve zamanı gerektireceği için motor geometrisi simetriden faydalanarak tüm modelin dörtte biri modellenmiştir.

BÖLÜM 2

SONLU ELEMANLAR METODUNUN TEMELLERİ

Sonlu elemanlar metodu, fiziksel matematiğin sınır değer problemlerine yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılan bir sayısal metottur. Metod yaklaşık kırk yıllık bir geçmişe sahiptir. Metod ilk olarak 1940'lı yıllarda önerilmiş 1950'li yıllarda uçak tasarımında kullanılmaya başlanmıştır. Bundan sonra, metod geliştirilmiş ve yapı analizi ile ilgili problemlerde çok yaygın olarak, diğer alanlardaki problemlerde de giderek artan ancak daha az yaygın olarak uygulanmıştır.

Günümüzde, sonlu elemanlar metodu mühendislik ve matematik problemlerin çözümünde geniş uygulama alanına sahip genel bir metod olarak tanınmaktadır. Bu konuda pek çok kitap yazılmıştır. Bu bölümde, öncelikle sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan ve sonlu elemanlar metodunun da temelini oluşturan iki klasik metod açıklanarak sonlu elemanlar metoduna giriş yapılacaktır.

Sonlu elemanlar metodu (SEM), ilk olarak makina mühendisliğinde, ayrık yada yarı-ayrık mekanik yapıların çözümünde bir araç olarak kullanıldı. SEM, bugün fiziksel matematiğin kısmi difarensiyel denklemleri ile tanımlanan problemlerin çözümü için gerekli bir araçtır.

Hernekadar SEM, mekanik, elektromagnetik ve ısı transferi gibi çeşitli alanlardaki problemlerin modellenmesi için bir araç olsa da bu bölümde biz sadece elektromagnetik problemlere SEM'nin uygulanışını göstereceğiz. Öncelikle genel olarak denklemlerin ve sınır koşullarının temelleri üzerinde durulacak ve problemin hangi ifade ile tanımlanacağı ortaya konacaktır [6].

2.1 Fiziksel Matematik Denklemlerinin Temelleri

Pekçok fiziksel ve matematiksel problemin çözümünde karşımıza diferansiyel denklemler çıkar. Özellikle mühendislik problemlerinde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çoğu ikinci dereceden diferansiyel denklemlerdir. Bağımsız değişkenleri x ve y, bağımlı değişkeni Φ olan ikinci dereceden bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak şu şekilde yazılır:

$$a\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x}+b\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+c\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y}+d\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x}+e\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y}+f\Phi+g=0 \qquad (2.1)$$

Bu tür kısmi diferansiyel denklemlerde a,b,c,d,e,f ve g katsayıları x ve y'nin bir fonksiyonu olduklarında ise diferansiyel denklemler "lineer" (doğrusal) diferansiyel denklemler, x, y ve Φ 'nin fonksiyonu olduklarında ise "lineer olmayan (nonlineer)" diferansiyel denklemler olarak adlandırılır. Sonlu elemanlar metodu aşağıda verilen türdeki diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılabilecek bir sayısal metottur.

Fiziksel olayları tanımlayan kısmi diferansiyal denklemler grubu, çok sayıda özel durum içerir. Bunları kapsamlı bir şekilde tanımlamak epeyce bir zaman gerektirir. Buna rağmen, bu denklemleri herbiri özel bir durum tanımlayacak şekilde başlıca üç grupta toplayabiliriz [7].

2.1.1 Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemin Tanımı

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad \text{Poisson denklemi} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \qquad \text{Laplace denklemi} \qquad (2.3)$$

Eliptik tipteki denklemler, bir potansiyel ile tanımlanan pekçok problemi temsil eder. Örneğin elektrik mühendisliğinde, elektrostatik ve magnetostatik alanlar, mekanikte malzemelerin şekil değiştirmesi, akışkanlar ve ısı transferi. Laplacė denklemi lineer, Poisson denklemi nonlineer bir eliptik kısmi diferansiyel denklemdir. Ayrıca problemlerin büyük çoğunluğu eliptik kısmi diferansiyel denklem özelliği gösterir.

Eliptik denklemlerde sınır koşulları şu şekilde ifade edilir:

$$\Phi(s) = \Phi_0 = f_0(s) \qquad \text{Dirichlet Sınır Koşulu} \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n} = f_0(s) \qquad \text{Neuman Sınır Koşulu} \qquad (2.5)$$

$$\Phi(s) + \frac{\partial\Phi(s)}{\partial n} = f_0(s) \qquad \text{Karma Sınır Koşulu} \qquad (2.6)$$

2.1.2 Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemın Tanımı

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{Difüzyon denklemi} \qquad (2.7)$$

Parabolik denklemler difüzyon problemlerini temsil ederler. Sıkıştırılamaz bir gövdedeki ısı difüzyon problemi buna tipik bir örnektir. Aynı denklem iletken bir gövde içinden endüklenerek oluşan akımın problemlerinide tanımlar.

Parabolik denklemlerde sınır koşulları şöyle ifade edilir:

1. Dirichlet,Neuman yada karma sınır koşullar (alan sınırlarına uygulanır.).
2. Başlangıç koşulları ,t=0 (tüm alana uygulanır.).

2.1.3 Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemın Tanımı

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Bir boyutlu dalga denklemi} \qquad (2.8)$$

Hiperbolik denklemler ise dalga yayılması olaylarını temsil eder. Bunlar hem mekanik vibrasyon dalgaları hem de elektromagnetik dalgalar olabilir. Kaynak periyodik olduğunda bu denklemler eliptik tipe çevrilebilir. Bu denklemlerle öncelikle bir katıdaki vibrasyonun doğal frekansları ya da elekromagnetik dalgaların yayılma modları bulunabilir.

Hiperbolik denklemlerde sınır koşulları bilinmeyen fonksiyonların ya da onun türevinin sınırdaki değerleri t=0 da başlangıç değer koşulları ile ifade edilir. Şöyle gösterilir:

$$u(t=0)=x_0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0)=\overline{x_0} \tag{2.9}$$

2.2 Sınır Değer Problemlerinin Çözümü

Bu bölümde ilk olarak sınır değer problemleri tanıtılacak, daha sonra bunların çözümünde kullanılan iki klasik metodla ilgili bilgiler verilecektir. Bilgi verilecek metodlardan bir Ritz varyasyonel metodu, diğeri Galerkin metodudur. Bu iki metod günümüz sonlu elemanlar metodunun temelini oluşturmaktadır. Bu nedenle sonlu elemanlar metodunun kolay anlaşılabilmesi için öncelikle bu iki metodun açıklaması yapılacaktır.

Sınır değer problemleri, fiziksel sistemlerin matematiksel modellenmesinde ortaya çıkmakta ve bunların çözümü fiziksel matematiğin önemli bir konusunu oluşturmaktadır. Tipik bir sınır değer problemi, bir Ω bölgesinde, bölgeyi kuşatan S sınırı üzerindeki sınır koşulları ile birlikte

$$L\Phi=f \tag{2.10}$$

temel diferansiyel eşitliği ile tanımlanabilir. Bu eşitlikte L bir diferansiyel operatör, f uyarıcı veya kaynak fonksiyonu ve Φ ise bilinmeyen büyüklüktür. Elektromagnetikte, böyle bir diferansiyel eşitlik, basit bir Laplace veya Poisson eşitliği veya karmaşık dalga eşitlikleri veya daha da karmaşık vektörel dalga eşitliklerinden biri olabilir. Bunun yanında sınır koşulları da, basit Dirichlet ve Neumann koşullarından karmaşık empedans ve radyasyon koşullarına kadar hatta daha karmaşık yüksek dereceden koşullara kadar değişebilir.

Sınır değer problemlerinin mümkün olduğu kadar analitik yoldan çözülmesi arzu edilir. Bununla beraber, genellikle analitik çözüm çok az durumda elde edilir. Mühendislik alanında, pratik öneme sahip diğer bir çok problemin analitik çözümü zordur veya yoktur. Bu zorluğu aşmak için, çeşitli yaklaşım metodları geliştirilmiştir. Bunlar arasında Ritz ve Galerkin metodları en yaygın olarak kullanılanlardır.

2.2.1 Ritz Metodu

Rayleigh-Ritz metodu olarakta bilinen Ritz metodu, verilen sınır koşulları altında temel diferansiyel denklemi minimum yapan, sınır değer probleminin fonksiyonel olarak adlandırılan varyasyonel bir bağıntı ile verilen bir metottur.

2.2.2.1 Varyasyonel İlkesi

Verilen sınır koşulları altında (2.10) denklemin varyasyonel ilkesine göre çözümü, fonksiyonel olarak adlandırılan varyasyonel bir bağıntının değişkenlerine göre en küçük değere indirgenmesi ile elde edilir. Metodu geliştirmek için önce, açısal parantezle gösterilen iç çarpım tanımını verelim:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Phi \cdot \Psi^* \cdot d\Omega \qquad (2.11)$$

Burada Ψ,Φ ile aynı sınır koşullarına uyan keyfi bir fonksiyonu, yıldız işareti de kompleks eşlenik işlemi göstermektedir. Bu tanımla, eğer (2.10)'daki L operatörü özeşlenik (self adjoint) ise:

$$\langle L\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, L\Psi \rangle \qquad (2.12)$$

olduğu ve pozitif tanımlı ise:

$$\langle L\Phi, \Phi \rangle = \begin{cases} >0 & \Phi \neq 0 \\ =0 & \Phi = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

olduğu gösterilebilir. (2.10)'un çözümü, fonksiyonelin Φ ile gösterilen yaklaşım (interpolation) fonksiyonuna göre en küçük değere indirgenmesi ile elde edilir.

$$F(\Phi) = \frac{1}{2}\langle L\Phi, \Phi \rangle - \frac{1}{2}\langle \Phi, f \rangle - \frac{1}{2}\langle f, \Phi \rangle \qquad (2.14)$$

Burada (2.14)'in ispatı ve elektromagnetikteki genel durumlarla ilgili uygulamaları verilmemiştir.

Varyasyonel metoda göre öncelikle fonksiyonel bulunur, çözüm aşağıda açıklanan yolla elde edilebilir. Basitleştirmek bakımından, problemin gerçel (reel) değerli bir problem olduğunu kabul edelim. Kompleks değerli problemler için formülasyon ayrıca çıkarılabilir. (2.14)'deki Φ için aşağıdaki gibi bir yaklaşım bağıntısının bulunduğunu varsayalım.

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot v_j = \{k\}^T \{v\} = \{v\}^T \{k\} \qquad (2.15)$$

Burada v_j bütün bölgede tanımlanmış seçilen açılım fonksiyonları ve k_j'de belirlenecek sabit katsayılardır. {} simgesi sütun matrisi (vektörü), T üst simgesi de vektörün (sütun matrisinin) devriğini (transpozesini) göstermektedir. (2.15), (2.14)'de yerine konularak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$F = \frac{1}{2}\{k\}^T \int_\Omega \{v\} \cdot L \cdot \{v\}^T d\Omega \cdot \{k\} - \{k\}^T \int_\Omega \{v\} \cdot f \cdot d\Omega \qquad (2.16)$$

$F(\Phi)$ yi minimize etmek için onun k_i'lere göre kısmi türevlerini alalım. Bu işlemle bir lineer cebirsel denklem takımı elde edilir:

$$\frac{\partial F}{\partial k_i} = \frac{1}{2}\int_\Omega v_i \cdot L \cdot \{v\}^T d\Omega \cdot \{k\} + \frac{1}{2}\{k\}^T \int_\Omega \{v\} \cdot L \cdot v_i \, d\Omega - \int_\Omega v_i \cdot f \cdot d\Omega \qquad (2.17)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j \cdot \int_\Omega \left(v_i L v_j + v_j L v_i\right) \cdot d\Omega - \int_\Omega v_i f \cdot d\Omega = 0 \qquad (2.18)$$

(i=1,2,3,4,....,n)

Bu bağıntı aşağıdaki gibi matrisel biçimde yazılabilir.

$$[s]\{k\} = \{b\} \qquad (2.19)$$

Burada [s] matrisinin terimleri:

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(v_i L v_j + v_j L v_i\right) \cdot d\Omega \qquad (2.20)$$

ve {b}matrisinin terimleri ise:

$$b_i = \int_{\Omega} v_i f \cdot d\Omega \qquad (2.21)$$

şeklinde verilir. [s] matrisi simetrik bir matristir. L operatörünün özeşlenik olması durumunda s_{ij} terimleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$s_{ij} = \int_{\Omega} v_i L v_j \cdot d\Omega \qquad (2.22)$$

2.2.2 Galerkin Metodu

Galerkin metodu ağırlıklı kalan (fark) metodlar ailesindendir, adından da anlaşılacağı gibi diferansiyel denklemin kalanının (farkının) küçülmesi ile çözüm aranır. $\overline{\Phi}$'nin (2.10)'un yaklaşık çözümü olduğunu varsayalım. (2.10)'deki Φ yerine $\overline{\Phi}$'nin yerleştirilmesi ile sıfırdan farklı bir kalan (fark) ortaya çıkar.

$$r = L\overline{\Phi} - f \neq 0 \qquad (2.23)$$

$\overline{\Phi}$ için en iyi yaklaşım, Ω bölgesindeki her noktada r kalanının (farkının) en küçük değerde olmasını sağlayan yaklaşımdır. Ağırlıklı kalan metodları, w_i seçilen ağırlık fonksiyonunu, R_i'de ağırlıklı kalan integralini göstermek üzere,

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r \cdot d\Omega = 0 \qquad (2.24)$$

koşulunu sağlamaktadır.

Galerkin metodunda, ağırlık fonksiyonu, yaklaşık çözüm için kullanılan interpolasyon fonksiyonuna benzer olarak seçilir. Bu seçim genellikle en doğru çözüme götürür ve bu nedenle, sonlu elemanlar eşitliklerinin çözümünde en yaygın kullanılan yaklaşımdır. Metodu daha açık olarak anlatmak için, çözümün (2.16)'daki gibi gösterildiğini varsayalım. Bu durumda, ağırlık fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilir.

$$w_i = v_i \qquad ; \qquad i=1,2,3,...,n \tag{2.25}$$

Buna göre (2.24)

$$R_i = \int_{\Omega} \left(v_i L\{v\}^T \{k\} - v_i f \right) \cdot d\Omega = 0 \qquad ; \qquad i=1,2,3,....,n \tag{2.26}$$

Bu işlemlerle yeniden (2.19)'da verilen matris sistemi elde edilir. Ancak bu durumda [s] matrisi, L operatörü özeşlenik olmadıkça simetrik olmak zorunda değildir. Bu durumda, Galerkin metodu da Ritz metodundaki ile aynı denklem sistemini verir.

BÖLÜM 3

SONLU ELEMANLAR METODUNUN İKİ BOYUTLU MAGNETOSTATİK ALANLARA UYGULANIŞI

Günümüzde kullanılan sayısal metodların çokluğu SEM'unu çok popüler yapmaktadır. Bu programlamanın kolaylığı ve belki de fiziksel olayla doğrudan bağlantı kurulabilmenin getirdiği bir avantajdır. Burada SEM'nun İki boyutlu magnetostatik alan problemlerine uygulanışı, birinci dereceden lineer elemanlar kullanılarak ele alınacaktır. Bu temeller basit örnekler ele alınarak gösterilecektir.

Elektrik mühendisliğinde sonlu elemanlar metodu (SEM), elektrik veya magnetik alanı incelenecek bölge içindeki enerjinin en küçük değere indirgenmesi (minimum-laştırılması) ilkesine dayanır. Bölge içindeki alan Laplace veya Poisson tipinde bir elektrik veya magnetik alan olabilir.

Sonlu elemanlar metodunda da diğer metodlarda olduğu gibi bir sistemin sonlu sayıdaki bilinmeyen büyüklüğünün sistemin bilinen büyüklükleri cinsinden bulunması metodu izlenir.

Elektromagnetik alan problemlerinin çoğu ya kısmi türevli ya da integralli denklemleri içerir. Kısmi türevli denklemler sonlu farklar yada sonlu elemanlar metodu ile çözülebilir [8].

3.1 Enerjinin Minimumlaştırılması İlkesi

Enerji bağıntısından faydalanarak enerjiyi minimum yapan vektör potansiyel değerlerini bulabilmek için öncelikle katsayıları henüz bilinmeyen ve basit fonksiyonların toplamından oluşmuş bir A(x,y) vektör potansiyel, yaklaşım fonksiyonunun tanımlanmış olması gerekir.

Tanımlanacak bu vektör potansiyel fonksiyonunun bölge içinde sürekli olduğu ve sonlu sayıda türevi bulunacağı göz önünde bulundurulmalıdır.

Magnetik alan içindeki kaynaklar J ile ve magnetik relüktivite ν ile gösterilirse, böyle bir Poisson alanında kartezyen koordinatlar sisteminde enerji fonksiyoneli şu şekilde ifade edilir [9].

$$W = \iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\nu|\nabla A|^2 - JA\right]\cdot dxdy \qquad |\nabla A|^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 \qquad (3.1)$$

Yukarıdaki W (enerji) bağıntısında $\frac{1}{2}\nu|\nabla A|^2 - JA$ terimi, dΩ=dxdy yüzeyindeki enerji yoğunluğunu göstermektedir.

Bir çözüm bölgesi içinde sınır koşullarını sağlayan birden fazla vektör potansiyel fonksiyonu elde etme olasıdır, ancak bunlardan bir tanesi;

$$\nabla^2 A = \Delta A = \frac{1}{\nu}J = \mu J \qquad (3.2)$$

Poisson denklemini sağlar ve bu fonksiyon tektir. Poisson denklemini sağlayan bu çözüm aynı zamanda bölge içindeki vektör potansiyel enerjiyi minimum yapan çözümdür. Bunun tersi de söylenebilir, bölge içinde enerjiyi minimum yapan vektör potansiyel çözümü, Poisson denlemini sağlayan vektör potansiyel çözümdür.

Bu nedenle sonlu elemanlar metodunda Poisson denklemini çözmek yerine, enerji denklemini minimum yapan bir vektör potansiyel çözümünü bulmak yoluna gidilir.

Bunu şu şekilde ifade etmek mümkündür:

Minimum enerji koşulunu sağlayan vektör potansiyel fonksiyonu $\longleftrightarrow$ Poisson denklemini sağlayan vektör potansiyel fonksiyonu

3.2 Sonlu Elemanlar Metodunun Temelleri

Kapalı bir bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi, boyutları, konumları ve şekilleri isteğe bağlı olarak seçilen elemanlarla yapılabilir. Bu elemanlar, bir boyutlu problemlerde doğru parçaları şeklinde, iki boyutlu problemlerde üçgen, dörtgen veya çokgen gibi şekillerde, üç boyutlu problemlerde ise küp, prizma, dörtyüzlü gibi şekillerde olabilir.

Bölge içinde eleman sayısı ve dağılımı çözümün doğruluğuna etki eden faktörlerdendir. Bir bölge içinde elemanların nerelerde yoğunlaştırılacağı kolayca kestirilebilir. Bu sayede gereksiz elemanlar nedeniyle doğrusal denklem sisteminin ve çözüm süresinin gereksiz büyümesi önlenmiş olur.

3.2.1 Birinci Dereceden Elemanlar

Sonlu elemanlar metodu ile bir vektör potansiyel problemini çözümlemede vektör potansiyel için yaklaşık bir çözüm elde etmek için, bölge elemanlara ayrıldıktan sonra her eleman içinde vektör potansiyelinin belirli bir bağıntı ile değiştiği kabul edilir ve bu şekilde, vektör potansiyelin sürekli olarak değiştiği bir bölgede, bölgenin tümü için yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. Bir elemandaki vektör potansiyelin değişimi olarak alınan böyle bir vektör potansiyel fonksiyonuna yaklaşım fonksiyonu veya interpolasyon fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyon genellikle bir polinom şeklinde seçilir. Birinci dereceden (lineer) yaklaşım fonksiyonları (interpolasyon polinomları) şu sekilde gösterilirler:

$$A(x)=a+bx \qquad \text{(Bir boyutlu)} \qquad (3.3)$$

$$A(x,y)=a+bx+cy \qquad \text{(İki boyutlu)} \qquad (3.4)$$

$$A(x,y,z)=a+bx+cy+dz \qquad \text{(Üç boyutlu)} \qquad (3.5)$$

Seçilen polinomların derecesi ne kadar yüksek ise doğru çözüme o kadar iyi yaklaşılır. Polinom şeklindeki fonksiyonlar karmaşık durumların daha iyi tanımlanmasını sağlarken, türev alma işlemlerini de kolaylaştırırlar. Yüksek dereceli polinomlarda doğruluk artarsa da hesap süresi, bellek ihtiyacı ve karışıklıkta o ölçüde artar.

Bir polinomun katsayıları, eleman üzerinde ve içinde seçilmiş düğümlerin koordinatları ve vektör potansiyelleri cinsinden bulunabilir. Polinomun derecesinin yüksek olması, daha fazla düğüm tanımlama olanağını verir. Basitleştirmek bakımından algoritmaların çoğunda birinci dereceden yaklaşım fonksiyonları kullanılır. Üçgen elemanlarla böyle bir yaklaşımda çokterimlinin üç katsayısı vardır. Bu tür bir birinci dereceden iki boyutlu polinom şu şekilde yazılabilir:

$$A(x,y)=a+bx+cy \tag{3.6}$$

Burada a,b ve c sabit birer katsayı, x ve y'de kartezyen koordinatlardır. Bu polinomda katsayıları belirleyebilmek için üçgen elemanların üç köşe (düğüm) noktasına ilişkin koordinatların ve vektör potansiyel değerinin bilinmesi gerekir.

Birinci dereceden bir yaklaşımda, A(x,y)'nin eleman içinde ve kenarlarında doğrusal olarak değiştiği kabul edilir. Bu vektör potansiyelin konuma göre değeri, eleman içinde sıfırdan farklı, eleman dışında ise sıfırdır. Eleman içinde vektör potansiyelin doğrusal olarak değişmesi, vektör potansiyel bağıntısından x'e ve y'ye göre türevler alarak bulunan alan yoğunluğunun eleman içinde sabit olması anlamını taşır. Sonuç olarak, bu durumda bir eleman içinde:

1.Vektör potansiyel lineer olarak değişir.

2.Alan yoğunluğu sabittir.

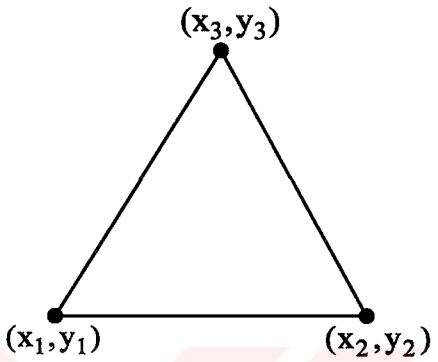
Görüldüğü gibi gerçek çözümün yerini parça-parça lineer (doğrusal) bir fonksiyon almaktadır. Eğer tanımlanan bölgedeki elemanların köşe noktaları ortak ise, vektör potansiyel değişimi iki elemanın arasındaki sınırda da sürekli olacaktır. Bu sınırlar arasında aralık olmadığından çözüm olarak bulunan A(x,y), parça-parça fakat tüm bölge içinde sürekli olan bir çözümdür[10].

Bir çözüm bölgesinin bölündüğü eleman sayısı N_e olmak üzere çözüm bölgesine ilişkin vektör potansiyel bağıntısı şu şekilde yazılabilir:

$$A(x,y)=\sum_{e=1}^{N_e} A^e(x,y) \tag{3.7}$$

Burada $A^e(x,y)$ bir eleman içindeki vektör potansiyel fonksiyonudur.

SEM'nun uygulamasında temel işlem çalışma bölgesinin basit sonlu boyutta alt bölgelere ayrılmasıdır. Sonlu elemanlar denilen bu bölgelerin herbiri için, bilinmeyen bir yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Üçgen ya da dörtgen, düzkenarlı yada eğrikenarlı olan bu elemanlar, çalışma bölgesini bölümlere ayırmalıdır. Genellikle "ağ" diye isimlendirilen bu bölümler, heaplamanın iyi sonuçlar vermesi için belirli kurallara uymalıdır. Şekil 3.1'de üç düğümlü bir eleman verilmiştir.



Şekil 3.1 Birinci dereceden bir sonlu eleman.

$$A_1 = A(x_1,y_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 \tag{3.8}$$

$$A_2 = A(x_2,y_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 \tag{3.9}$$

$$A_3 = A(x_3,y_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 \tag{3.10}$$

Problemin varyasyonel şekli bilindiğine göre:

$$A^{\min}\left\{F(A) = \iint_{\Omega}\left[A, A_x', A_y', x, y\right]\cdot dx\cdot dy\right\} \tag{3.11}$$

Şimdi bölge içinde sonlu elemanların F'nin katlı integralinin yerine toplam şekliyle ifade edilecektir. Burada N_e ağ içindeki elemanların sayısını ve F_e ise, e elemanına ilişkin fonksiyoneli gösterir.

$$F(A) = \sum_{e=1}^{N_e} F_e(A) \tag{3.12}$$

Herbir eleman için, A, e elemanının sadece $A_A{}^e, A_B{}^e, A_C{}^e$ parametrelerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilen bir F(A), $A = P\left(A_A{}^e, A_B{}^e, A_B{}^e, x, y\right)$ yaklaşım fonksiyonu ile değiştirilir.

$$F_e(A) = F_e\left(A_A{}^e, A_B{}^e, A_C{}^e\right) \tag{3.13}$$

Toplama işlemini gerçekleştirirsek ve birçok elemanın paylaştığı 1,2,...,N_d adet düğümü hesaba katarız. Her elemanın katılması o düğümlerdeki bilinmeyen $A_1, A_2, ..., A_{N_d}$ fonksiyonların bütün değerlerini içeren fonksiyonel tarafından gözönünde bulundurulur.

Bütün bölge üzerinde F'nin en küçük değerleri aranır. Bunun için fonksiyonelin $A_1, A_2, ..., A_{N_d}$ değerlerine göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$F(A) = \sum_{e=1}^{N_e} F_e\left(A_A{}^e, A_B{}^e, A_C{}^e\right) = F\left(A_1, A_2, ..., A_{N_d}\right) \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial A_2} = 0, \qquad ....., \qquad \frac{\partial F}{\partial A_{N_d}} = 0 \tag{3.15}$$

Bu işlemler ağın düğümlerinde $A_1, A_2, ..., A_{N_d}$ ile tanımlanan N_d adet bilinmeyen için N_d sayıda denklem sistemi oluşturmamızı sağlar. Bu denklemlerin ikinci terimi hem kaynak terimleri (magnetostatik problemde akım) içeren fonksiyonelin bir bölümünden, hem de sınır koşullarında değeri bilinen A ifadesinden elde edilir.

3.3 İki Boyutlu Elekromagnetik Analiz

İki Boyutlu magnetostatik problemin denklem sistemi aşağıda görüldüğü gibi olup sınır koşullarıda verilmiştir:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - J = 0 \tag{3.16}$$

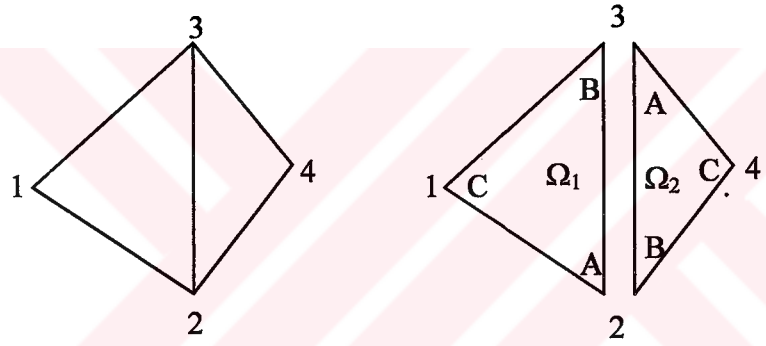
Sınır koşulları:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \qquad \partial\Omega_1 \text{ üzerinde} \;, \qquad A=0 \qquad \partial\Omega_2 \text{ üzerinde}$$

olup, Şekil 3.2'de görüldüğü gibi bölgenin 1,2,3,4 kenarlarından oluşan bir dörtgen olduğu ve Ω_1 ve Ω_2 gibi iki üçgen elemana bölündüğü kabul edilecektir.

3.3.1 Genel ve Yerel Numaralandırma

Herbir elemanın numaralandırması içine yani üçgen köşelerine harfler yerleştirilerek gerçekleştirilmiştir. Düğümlerin genel ve yerel numaralandırmaları arasındaki ilişki matris olarak şu şekildedir:



Şekil 3.2 Genel ve yerel numaralandırma.

$$M_A^1 = M_2 \qquad M_B^1 = M_3 \qquad M_C^1 = M_1 \tag{3.17}$$

$$M_A^2 = M_3 \qquad M_B^2 = M_2 \qquad M_C^2 = M_4 \tag{3.18}$$

$$\Delta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

$$M^1 = \Delta^1 \cdot M \qquad M^2 = \Delta^2 \cdot M \tag{3.20}$$

$$M^1 = \begin{bmatrix} M_A^1 \\ M_B^1 \\ M_C^1 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} M_A^2 \\ M_B^2 \\ M_C^2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

3.3.2 İnterpolasyon (Yaklaşım) Fonksiyonu

Bir üçgen eleman için lineer yaklaşım fonksiyonu seçilmiş ise bunu şöyle gösterebiliriz:

$$A^e = \alpha_0^e + \alpha_1^e \cdot x + \alpha_2^e \cdot y \tag{3.22}$$

$$A^e = \begin{bmatrix} A_A^e \\ A_B^e \\ A_C^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0^e + \alpha_1^e \cdot x_A + \alpha_2^e \cdot y_A \\ \alpha_0^e + \alpha_1^e \cdot x_B + \alpha_2^e \cdot y_B \\ \alpha_0^e + \alpha_1^e \cdot x_C + \alpha_2^e \cdot y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_A^e \\ A_B^e \\ A_C^e \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_B y_C - x_C y_B & x_C y_A - x_A y_C & x_A y_B - x_B y_A \\ y_B - y_C & y_C - y_A & y_A - y_B \\ x_C - x_B & x_A - x_C & x_B - x_A \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

Matrisin determinantı Δ, üçgenin alanının iki katıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_A^e \\ A_B^e \\ A_C^e \end{bmatrix} = \Phi_A^e \cdot A_A^e + \Phi_B^e \cdot A_B^e + \Phi_C^e \cdot A_C^e \tag{3.26}$$

Burada $\Phi_A^e, \Phi_B^e, \Phi_C^e$ lineer şekil fonksiyonlarını tanımlar.

$$\Phi_N^e = a_N^e + b_N^e \cdot x + c_N^e \cdot y \tag{3.27}$$

$$a_A = \frac{1}{2\Delta}(x_B y_C - x_C y_B) \qquad a_B = \frac{1}{2\Delta}(y_B - y_C) \qquad a_C = \frac{1}{2\Delta}(x_C - x_B) \tag{3.28}$$

$$b_A = \frac{1}{2\Delta}(x_C y_A - x_A y_C) \quad b_B = \frac{1}{2\Delta}(y_C - y_A) \quad b_C = \frac{1}{2\Delta}(x_A - x_C) \tag{3.29}$$

$$c_A = \frac{1}{2\Delta}(x_A y_B - x_B y_A) \quad c_B = \frac{1}{2\Delta}(y_A - y_B) \quad c_C = \frac{1}{2\Delta}(x_B - x_A) \tag{3.30}$$

$$\Phi_A^e = a_A^e + b_A^e \cdot x + c_A^e \cdot y \tag{3.31}$$

$$\Phi_B^e = a_B^e + b_B^e \cdot x + c_B^e \cdot y \tag{3.32}$$

$$\Phi_C^e = a_C^e + b_C^e \cdot x + c_C^e \cdot y \tag{3.33}$$

Sonuçta aşağıda verilen denklem elde edilir.

$$A^e(x,y) = \Phi^{e^T} A = A^{e^T} \Phi^e \tag{3.34}$$

$$\Phi^e = \begin{bmatrix} a_A^e & b_A^e & c_A^e \\ a_B^e & b_B^e & c_B^e \\ a_C^e & a_C^e & a_C^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

$$A(x,y) = \sum_{e=1}^{N_e} A^e(x,y) = \sum_{e=1}^{N_e} \Phi^{e^T} A^e = \sum_{i=1}^{N_d} \Phi_i A_i = \Phi^T A \tag{3.36}$$

Φ vektörünü hesaplayabilmek için Δ^e bağlantı matrisini kullanırız.

$$A^e = \Delta^e A \Rightarrow \Phi^T A = \sum_{e=1}^{N_e} \Phi^{e^T} \Delta^e A = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\Delta^{e^T} \Phi^e\right)_A^T = \sum_{e=1}^{N_e} \Phi^{e^T} \Delta^e A \tag{3.37}$$

$$\Phi^T = \sum_{e=1}^{N_e} \Phi^{e^T} \Delta^e = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\Delta^{e^T} \Phi^e\right)^T \tag{3.38}$$

$$\Phi = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \Phi^e \tag{3.39}$$

Herbir eleman için bu şekil fonksiyonları oluşturulur.

(x,y) koordinatları ile tanımlanan nokta K olarak adlandırıldığından, $\Phi_i^e\left(K_j\right)=\delta_{ij}$

$$\Phi_A^e(x_A,y_A)=1 \qquad \Phi_A^e(x_B,y_B)=0 \qquad \Phi_A^e(x_C,y_C)=0 \tag{3.40}$$

$$\Phi_B^e(x_A,y_A)=0 \qquad \Phi_B^e(x_B,y_B)=1 \qquad \Phi_B^e(x_C,y_C)=0 \tag{3.41}$$

$$\Phi_C^e(x_A,y_A)=0 \qquad \Phi_C^e(x_B,y_B)=0 \qquad \Phi_C^e(x_C,y_C)=1 \tag{3.42}$$

3.3.3 Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Şimdi $A(x,y)=\Phi_1A_1+\Phi_2A_2+\Phi_3A_3+\Phi_4A_4$ denklemine sahibiz.

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Phi_A^1\\ \Phi_B^1\\ \Phi_C^1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Phi_A^2\\ \Phi_B^2\\ \Phi_C^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_C^1\\ \Phi_A^1+\Phi_A^2\\ \Phi_B^1+\Phi_C^2\\ \Phi_B^2\end{bmatrix} \tag{3.43}$$

$$A(x,y)=\Phi_C^1A_1+\left(\Phi_A^1+\Phi_A^2\right)A_2+\left(\Phi_B^1+\Phi_C^2\right)A_3+\Phi_B^2A_4 \tag{3.44}$$

$$A(x,y)=\Phi^TA=A^T\Phi \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^TA=A^T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial A}{\partial y}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^TA=A^T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \tag{3.46}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2=A^T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^T}{\partial x}\right)A \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2=A^T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi^T}{\partial y}\right)A \tag{3.47}$$

$$fA=f\Phi^TA \tag{3.48}$$

$$F(A)=\iint\frac{1}{2}\left[A^T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^T}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi^T}{\partial y}\right)A\right]\cdot dxdy-\iint f\Phi^TA\cdot dxdy \tag{3.49}$$

$$=\frac{1}{2}A^T\left[\iint\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^T}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi^T}{\partial y}\right)\cdot dxdy\right]\cdot A-\left(\iint f\Phi^Tdxdy\right)\cdot A \tag{3.50}$$

$$F(A) = \frac{1}{2} A^T K A - F^T A \tag{3.51}$$

$$K = \iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \right) \cdot dxdy \tag{3.52}$$

$$F = \iint \Phi f dxdy \tag{3.53}$$

Elemanlar için tanımlanan fonksiyona dönersek:

$$\Phi = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \Phi^e \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \frac{\partial \Phi^e}{\partial y} \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right) \cdot \left(\sum_{e'=1}^{N_e} \Delta^{e'^T} \frac{\partial \Phi^{e'}}{\partial x} \right) = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{e^T}}{\partial x} \right) \cdot \Delta^e \tag{3.55}$$

fakat

$$\forall e' \neq e \Rightarrow \Phi^{e'} \cdot \Phi^e = 0$$

olduğu için:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi^{e^T}}{\partial y} \right) \cdot \Delta^e \tag{3.56}$$

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} \left(\iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{e^T}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^e}{\partial y} \frac{\partial \Phi^{e^T}}{\partial y} \right) \cdot d\Omega_e \right) \cdot \Delta^e \tag{3.57}$$

$$F = \iint_{\Omega} f \Phi^T \cdot d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\iint_{\Omega_e} f \Phi^{e^T} \cdot d\Omega_e \right) \cdot \Delta^e \tag{3.58}$$

$$K = \sum_{e=1}^{N_e} \Delta^{e^T} K^e \Delta^e \qquad K^e = \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi^T}{\partial y} \right) \cdot d\Omega_e \tag{3.59}$$

$$F = \sum_{e=1}^{N_e} F^e \Delta^e \qquad F^e = \iint_{\Omega_e} \left(f\Phi^{e^T} \right) \cdot d\Omega_e \tag{3.60}$$

$\nabla\vec{\Phi} = \Phi$ nin gradyenti ile vektör olarak gösterirsek:

$$K^e = \iint_{\Omega_e} \nabla\vec{\Phi}^e \nabla\vec{\Phi}^{e^T} \cdot d\Omega_e \tag{3.61}$$

$$F^e = \iint_{\Omega_e} f\Phi^{e^T} d\Omega_e \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial \Phi_1^1}{\partial x} = b_A^1 \qquad \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial x} = b_B^1 \qquad \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial x} = b_C^1 \tag{3.63}$$

$$\frac{\partial \Phi_1^1}{\partial y} = c_A^1 \qquad \frac{\partial \Phi_2^1}{\partial y} = c_B^1 \qquad \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y} = c_C^1 \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_A^1 \\ b_B^1 \\ b_C^1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Phi^2}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_A^2 \\ b_B^2 \\ b_C^2 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

$$\frac{\partial \Phi^1}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_A^1 \\ c_B^1 \\ c_C^1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \Phi^2}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_A^2 \\ c_B^2 \\ c_C^2 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

$$K^e_{e=1,2} = \iint \left\{ \begin{bmatrix} b_A^{e^2} & b_A^e b_B^e & b_A^e b_C^e \\ b_B^e b_A^e & b_B^{e^2} & b_B^e b_C^e \\ b_C^e b_A^e & b_C^e b_B^e & b_C^{e^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_A^{e^2} & c_A^e c_B^e & c_A^e c_C^e \\ c_B^e c_A^e & c_B^{e^2} & c_B^e c_C^e \\ c_C^e c_A^e & c_C^e c_B^e & c_C^{e^2} \end{bmatrix} \right\} \cdot d\Omega \tag{3.67}$$

$$F^e_{e=1,2} = \left\{ \iint \left(a_A^e + b_A^e \cdot x + c_A^e \cdot y \right) d\Omega \quad \iint \left(a_B^e + b_B^e \cdot x + c_B^e \cdot y \right) d\Omega \quad \iint \left(a_C^e + b_C^e \cdot x + c_C^e \cdot y \right) d\Omega \right\}$$

$$F^e_{e=1,2} = \begin{bmatrix} F_1^e & F_2^e & F_3^e \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Böylece iki matris elde ederiz:

$$K^1=\begin{bmatrix} K^1_{AA} & K^1_{AB} & K^1_{AC} \\ K^1_{BA} & K^1_{BB} & K^1_{BC} \\ K^1_{CA} & K^1_{CB} & K^1_{CC} \end{bmatrix} \qquad K^2=\begin{bmatrix} K^2_{AA} & K^2_{AB} & K^2_{AC} \\ K^2_{BA} & K^2_{BB} & K^2_{BC} \\ K^2_{CA} & K^2_{CB} & K^2_{CC} \end{bmatrix} . \tag{3.69}$$

$$K^e_{MN}=\left(b^e_M b^e_N + c^e_M c^e_N\right)\times \text{Elemanın Alanı(e)} \tag{3.70}$$

$$F^e=\iint\left(a^e_N + b^e_N\cdot x + c^e_N\cdot y\right)\cdot d\Omega \tag{3.71}$$

Matris çarpımı ile $\sum_e \Delta^{e^T} M^e \Delta^e$ 'den K'nın yapısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} K^1_{AA} & K^1_{AB} & K^1_{AC} \\ K^1_{BA} & K^1_{BB} & K^1_{BC} \\ K^1_{CA} & K^1_{CB} & K^1_{CC} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K^1_{CA} & K^1_{CB} & K^1_{CC} \\ K^1_{AA} & K^1_{AB} & K^1_{AC} \\ K^1_{BA} & K^1_{BB} & K^1_{BC} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{3.72}$$

$$\begin{bmatrix} K^1_{CA} & K^1_{CB} & K^1_{CC} \\ K^1_{AA} & K^1_{AB} & K^1_{AC} \\ K^1_{BA} & K^1_{BB} & K^1_{BC} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K^1_{CC} & K^1_{CA} & K^1_{CB} & 0 \\ K^1_{AC} & K^1_{AA} & K^1_{AB} & 0 \\ K^1_{BC} & K^1_{BA} & K^1_{BB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} K^2_{AA} & K^2_{AB} & K^2_{AC} \\ K^2_{BA} & K^2_{BB} & K^2_{BC} \\ K^2_{CA} & K^2_{CB} & K^2_{CC} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K^2_{BA} & K^2_{BB} & K^2_{BC} \\ K^2_{AA} & K^2_{AB} & K^2_{AC} \\ K^2_{CA} & K^2_{CB} & K^2_{CC} \end{bmatrix} . \tag{3.74}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K^2_{BA} & K^2_{BB} & K^2_{BC} \\ K^2_{AA} & K^2_{AB} & K^2_{AC} \\ K^2_{CA} & K^2_{CB} & K^2_{CC} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K^2_{BB} & K^2_{BA} & K^2_{BC} \\ 0 & K^2_{AB} & K^2_{AA} & K^2_{AC} \\ 0 & K^2_{CB} & K^2_{CA} & K^2_{CC} \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

K=

No:	1	2	3	4
1	$K^1_{CC}+0$	$K^1_{CA}+0$	$K^1_{CB}+0$	0+0
2	$K^1_{CA}+0$	$K^1_{AA}+K^2_{BB}$	$K^1_{AB}+K^2_{BA}$	$0+K^2_{BC}$
3	$K^1_{BC}+0$	$K^1_{BA}+K^2_{AB}$	$K^1_{BB}+K^2_{AA}$	$0+K^2_{AC}$
4	0+0	$0+K^2_{CB}$	$0+K^2_{CA}$	$0+K^2_{CC}$

$$F=\begin{bmatrix}F^1_A & F^1_B & F^1_C\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F^2_A & F^2_B & F^2_C\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$F=\begin{bmatrix}F^1_C & F^1_A & F^1_B & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & F^2_B & F^2_A & F^2_C\end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$F=\begin{bmatrix}F^1_C & F^1_A+F^2_B & F^1_B+F^2_A & F^2_C\end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Bu matris, bir elemana ilişkin katsayılar (katılık, stiffness) matrisi olarak adlandırılır. Simetrik ve kare matrisi olan katsayılar matrisinin K^e_{ij} terimleri, i ve j düğümleri arasında bağıntıları gösteren terimlerdir.

3.3.4 Fonksiyonelin Minimumlaştırılması

F(A)'yı A vektörünün ve K matrisinin bir fonksiyonu olarak ifade ettik

$$F(A)=\frac{1}{2}A^TKA-F^TA \quad (3.78)$$

Bu fonksiyonelin A vektör potansiyelinin A_1, A_2, ...A_i, ...A_{N_d} değerlerine göre türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial A_1}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial A_i}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial A_{N_d}}=0 \quad (3.79)$$

F(A) ifadesini tekrar yazarsak

$$F(A) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_d}\cdot\sum_{j=1}^{N_d} K_{kj}A_k A_j - \sum_{k=1}^{N_d} F_k A_k \tag{3.80}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_d} K_{ij}A_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_d} K_{ki}A_k - F_i \tag{3.81}$$

Burada indislerde gerekli düzenlemeler yapılırsa:

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \sum_{j=1}^{N_d} K_{ij}A_j - F_i \tag{3.82}$$

$$\forall i = 1,2,\ldots,N_d$$

Böylece lineer denklem sistemi elde edilir.

$$KA=F \tag{3.83}$$

Her düğümde A için bu denklem sistemi çözülür daha sonra bütün bölge için A değerleri elde edilir.

BÖLÜM 4

STATİK MAGNETİK ALANIN TEMELLERİ

4.1 Statik Magnetik Analiz

Magnetik alan problemlerinin çözümü, çoğunlukla potansiyel fonksiyonlar kullanılarak sağlanır. İki çeşit potansiyel fonksiyon vardır; vektör magnetik potansiyel ve hem iki boyutlu hem de üç-boyutlu alan problemlerinde kullanılan indirgenmiş skaler magnetik potansiyel. Maxwell denklemleri, elektromagnetik alanların genel bir tanımını oluşturur.

Elekromagnetik alanlar için dört maxwell denklemi:

$$\nabla \times \{H\} = \{J\} + \left\{\frac{\partial D}{\partial t}\right\} = \{J_s\} + \{J_e\} + \left\{\frac{\partial D}{\partial t}\right\} \tag{4.1}$$

$$\nabla \times \{E\} = -\left\{\frac{\partial B}{\partial t}\right\} \tag{4.2}$$

$$\nabla \cdot \{B\} = 0 \tag{4.3}$$

$$\nabla \cdot \{D\} = \rho \tag{4.4}$$

$\nabla \times$=Rotasyonel operatörü

$\nabla \cdot$=Diverjans operatörü

$\{H\}$ =Magnetik alan şiddeti vektörü

$\{J\}$=Akım yoğunluğu vektörü

$\{J_s\}$ =Sabit kaynak akım yoğunluğu vektörü

$\{J_e\}$=Endüklenen girdap akım yoğunluğu vektörü

$\{D\}$ =Elektrik akı yoğunluğu vektörü

$\{E\}$ =Elektrik alan şiddeti vektörü

$\{B\}$=Magnetik akı yoğunluğu vektörü

ρ=Elektrik yük yoğunluğu

t=Zaman

4.1.1 Kabuller

1.Statik magnetik alanlar dikkate alınmıştır. (Zamana göre değişim ve elektrik alanları ihmal edilmiştir.)

2.Magnetik malzeme özellikleri nonlineer olabilir.

Birinci kabul, denklemdeki $\{J_e\}$ ve $\left\{\frac{\partial D}{\partial t}\right\}$ vektörlerini yok eder. Ayrıca (4.2) ve (4.4) ihmal edilir. Böylece Maxwell denklemleri şu hali alır:

$$\nabla \times \{H\} = \{J_s\} \tag{4.5}$$

$$\nabla \cdot \{B\} = 0 \tag{4.6}$$

4.2 Ana Denklemler

Ana potansiyel alan denklemlerinin türetilmesi, (4.5) ve (4.6) Maxwell denklemlerinden çıkarılmıştır. Kalıcı mıknatıslar olmaksızın doymalı malzemeler gözönüne alınacak şekilde magnetostatik problemler için esas bağıntı:

$$\{B\} = [\mu] \cdot \{H\} \tag{4.7}$$

$[\mu]$=Magnetik geçirgenlik matrisi, genelde H'nin bir fonksiyonudur.

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Magnetik geçirgenlik şu şekilde yazılabilir:

$$[\mu] = \mu_o[\mu_r] \tag{4.9}$$

μ_o=Mutlak magnetik geçirgenlik (boşluğun magnetik geçirgenliği)

$[\mu_r]$=Bağıl magnetik geçirgenlik matrisi

Kalıcı mıknatıslar dikkate alındığında, (4.7) bağıntısı şu şekli alır:

$$\{B\} = \mu_o\left([\mu_r]\cdot\{H\} + \{M_o\}\right) \tag{4.10}$$

$\{M_o\}$=Artık (kalıcı) mıknatıslanma

Diğer ana denklemler ise:

$$\{J\} = [\sigma]\cdot\{E\} \tag{4.11}$$

$$\{D\} = [\varepsilon]\cdot\{E\} \tag{4.12}$$

$[\sigma]$=Elektriksel iletkenlik matrisi

$[\varepsilon]$=Dielektrik matrisi

4.3 İki Boyutlu Vektör Potansiyel

PLANE13 eleman tipi seçildiğinde statik 2-boyutlu düzlemsel veya eksenel simetri magnetik alan analizinde vektör potansiyel ifadeleri aşağıdaki gibidir. Bir vektör potansiyel fonksiyon {A} şu şekilde gösterilir:

$$\{B\} = \nabla \times \{A\} \tag{4.13}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \{A\} \equiv 0 \tag{4.14}$$

Magnetik geçirgenlik izotropik olarak sınırlandırıldığından $[\mu]$ ve $[\mu_r]$ matrisleri μ ve μ_r skaler değerlere indirgenecektir.

$$\nu = \frac{1}{\mu} \tag{4.15}$$

$$\nu_o = \frac{1}{\mu_o} \tag{4.16}$$

$$\nu_r = \frac{1}{\mu_r} \tag{4.17}$$

ν=Magnetik relüktivite(özgül magnetik direnç), B'nin bir fonksiyonudur.

ν_o=Mutlak magnetik relüktivite(boşluk için)

ν_r=Bağıl relüktivite

(4.10) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\{H\} = \nu \cdot \{B\} - \frac{\nu}{\nu_o}\{M_o\} \tag{4.18}$$

(4.13) denklemi (4.18) denkleminde yerine konulursa:

$$\{H\} = \nu \cdot \nabla \times \{A\} - \frac{\nu}{\nu_o} \cdot \{M_o\} \tag{4.19}$$

Bu denklem de (4.5)'de yerine konulursa:

$$\nabla \times \{H\} = \nabla \times (\nu \cdot \nabla \times \{A\}) - \nabla \times \left(\frac{\nu}{\nu_o}\{M_o\}\right) = \{J_s\} \tag{4.20}$$

(4.20) denklemi, statik magnetik alanlar için genel vektör Poisson denklemi olarak tanımlanır [11].

2-Boyutlu analiz için $\{A\}$ ve $\{J_s\}$vektörleri, düzlemde dışarıya yönelmiş tek bir bileşene indirgenir. x,y,z ile tanımlı kartezyen koordinatları için $\{A\}$ ve $\{J_s\}$ vektörleri şu şekilde tanımlanır:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

$$\{J_s\} = \begin{Bmatrix} J_{s_x} \\ J_{s_y} \\ J_{s_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_s \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

r,θ,z ile tanımlı silindirsel koordinatları için {A} ve $\{J_s\}$ vektörleri şu şekilde tanımlanır:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

$$\{J_s\} = \begin{Bmatrix} J_{s_r} \\ J_{s_\theta} \\ J_{s_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ J_s \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

Bu nedenle birazdan geliştirilecek sonlu elemanlar metodu konusunda A ve J_s terimleri, sırasıyla vektör magnetik potansiyel ve akım kaynağı yoğunluğunun z bileşeninin düzlemsel ve θ bileşeninin silindirsel olarak tanımlanmış olduğu kabul edilecektir.

4.4 İki Boyutlu Vektör Potansiyel için Sonlu Elemanlar Formülasyonu

2-boyutlu problemler, kalıcı mıknatıs etkileri ve silindirik formülasyon için Newton-Raphson iterasyon aşamaları içeren vektör potansiyellerde, sonlu eleman denklemlerini elde etmekte kullanılan çeşitli metodlar mevcuttur. Problemin nonlineerliğinden dolayı, Newton-Raphson metodu belirli (yakınsak) çözümü elde etmede kullanılır. Nonlineerlik B alan değeri ile bağlantılı olarak ν değerinede bağlı olarak değişir.

Sistem denklemleri, matris şeklinde aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$[K]_n \cdot \{\nabla \cdot A\}_n = \{F\}_n - \{R\}_n \tag{4.25}$$

$$\{A\}_{n+1} = \{A\}_n + \{\nabla \cdot A\}_n \tag{4.26}$$

$[K]$=Katsayılar matrisi $=\sum_{m=1}^{N_e}[K_e]$

$[F]$=Yük vektörü $=\sum_{m=1}^{N_e}\{F_e\}$

$\{R\}$=Artık yük vektörü $=\sum_{m=1}^{N_e}\{R_e\}$

$\{A\}$ =Düğüm noktasının magnetik vektör potansiyelinin z (silindirik ise θ) bileşeni

$\{\Delta A\}$= $\{A\}$değerindeki artış

N_e=eleman sayısı

n=iterasyon sayısı

Eleman terimleri şöyle tanımlanır:

$[K_e]$=Eleman katsayılar matrisi

$$[K_e]=[K_e{}^L]+[K_e{}^N] \tag{4.27}$$

$[K_e{}^L]$=Eleman katsayılar matrisinin lineer kısmı

$$[K_e{}^L]=\int_V \nu\cdot\left(\nabla\times\{N\}^T\right)^T\cdot\left(\nabla\times\{N\}^T\right)\cdot d(V) \tag{4.28}$$

$[K_e{}^N]$=Eleman katsayılar matrisinin non-lineer kısmı

$$[K_e{}^N]=2\cdot\int_V\frac{d\nu}{d\left(|B|^2\right)}\cdot\left(\nabla\times\{N\}^T\right)^T\cdot\left(\left(\nabla\times\{N\}^T\right)\cdot\{A_e\}\right)$$

$$\left(\left(\nabla\times\{N\}^T\right)\cdot\{A_e\}\right)^T\cdot\left(\nabla\times\{N\}^T\right)\cdot d(V) \tag{4.29}$$

$$\{F_e\} = \int_V J_s \cdot \{N\} \cdot d(V) + \int_V \left[\nabla \times \{N\}^T\right]^T \cdot \{H_c\} \cdot d(V) \quad (4.30)$$

$$\{R_e\} = \left[K_e{}^L\right] \cdot \{A_e\} \quad (4.31)$$

$\{A_e\}$=Bir elemanın düğümleri için A matrisi

$\{N\}$=Eleman şekil fonksiyonu vektörü (sütun matrisi)

J_s=Akım yoğunluğu

V=Eleman hacmi

$\{H_c\}$=Koersif (Ters mıknatıslanma) kuvvet vektörü

ν_0=Mutlak magnetik relüktivite

ν =İzotropik magnetik relüktivite

$\frac{d\nu}{d(|B|^2)}$=Relüktivitenin magnetik akının karesine göre türevi

Ters mıknatıslanma kuvvet vektörü, artık mıknatıslanma vektörü ile ilişkilendirilirse:

$$\{H_c\} = \frac{\nu}{\nu_o} \cdot \{M_o\} \quad (4.32)$$

Malzeme özellikleri eğrisi, B değerine karşı H değeri gelecek şekilde girilir.

4.5 Magnetik Kuvvetler

Elemanlar seviyesinde magnetik kuvvetleri hesaplamada üç değişik metod kullanılır. Biz burada en yaygın olarak kullanılan ilk ikisine ait denklem sistemlerini vereceğiz.

4.5.1 Akım Taşıyan Bölgelerdeki Kuvvetler

Magnetik kuvvetler akım taşıyan iletkenlerdeki hem vektör potansiyel hem de skaler potansiyel metodlar için hesaplanır.

$$\{F\} = \int_V \{J\} \times \{B\} \cdot dV \quad (4.33)$$

4.5.2 Maxwell Kuvvetleri

Magnetik gerilme tensörü, PLANE13 kullanılarak ferromagnetik bölgelerdeki kuvvetleri belirlemede kullanılır. Bu kuvvet hesabı sıfırdan farklı bir yüzey yükü ile belirlenmiş hava malzeme elemanların yüzeyleri üzerinde oluşturulur. PLANE13'de 2-boyutlu uygulamalar için, bu metod şu yüzeysel integral ifadesi ile belirtilir:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \int_S \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} \cdot dS \tag{4.34}$$

kartezyen koordinatlar için;

$$T_{11} = B_x{}^2 - \frac{1}{2} \cdot |B|^2 \tag{4.35}$$

$$T_{12} = B_x \cdot B_y \tag{4.36}$$

$$T_{21} = B_x \cdot B_y \tag{4.37}$$

$$T_{22} = B_y{}^2 - \frac{1}{2} \cdot |B|^2 \tag{4.38}$$

n_1=x doğrultusundaki birim normal vektörü

n_2=y doğrultusundaki birim normal vektörü

dS=elemanın yüzey alanı

$|B|^2 = B_x{}^2 + B_y{}^2$

BÖLÜM 5

ANSYS SONLU ELEMANLAR ANALİZİNİN PROBLEMLERE UYGULANIŞI

5.1 ANSYS Sonlu Elemanlar Analizi

1960'lı yılların sonu sayısal metodların magnetik alan problemlerine uygulandığı yıllara tekabül etmektedir. ANSYS Sonlu Elemanlar Analiz (SEA) programı da, Swanson Analysis Systems, Inc, (SASI) firması tarafından mühendislik analizlerine yönelik program olarak 1970 yılında yapıldı.

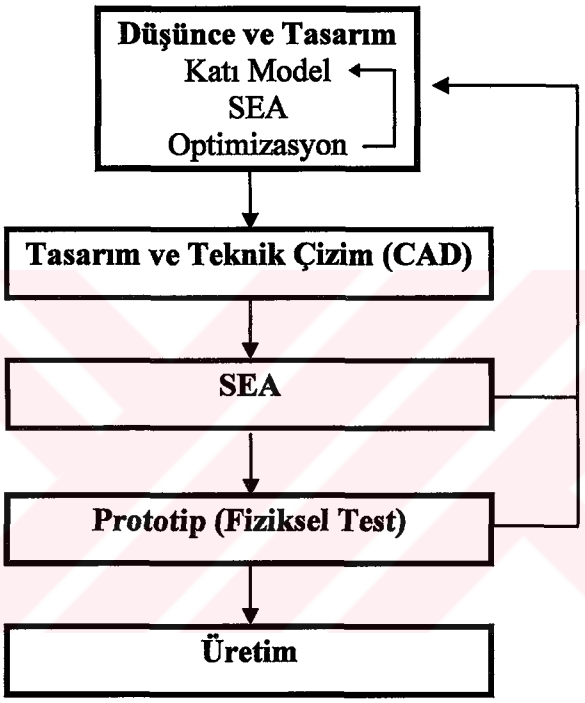
Bu program otomotiv ve elektronikten, havacılık ve kimyaya kadar çok geniş bir alanda analiz imkanı sunmaktadır. Öncelikle ısı transferi ve lineer yapı analizleri yapabilirken gelişen teknolojilerle birlikte nonlineer sistemlerin analizinde yapabilecek şekilde eleman kütüphanesi geliştirilmiştir. Ayrıca program, bilgisayar destekli tasarım ve analiz için oldukça güçlü özellikler içermektedir.[12].

Program adım adım analiz işlemlerini gerçekleştirirken bazı teknikler kullanmaktadır. Bunları özetle sıralamak gerekirse, adaptif ağ oluşturma, tasarım optimizasyonu, parametrik modelleme ve vizkoplastik eleman tipleri sayılabilir.

Grafik temelli menü sistemi ile etkileşimli olarak bilgi girişi ve bilgi çıkışı gerçekleştirilir. Katı modelleme (solid modeling) özelliği NURBS temelli geometrik özellik taşır, geometrik şekiller ve bunların cebirsel işlemlere uygulanmasına imkan verir. ANSYS veritabanı dosyaları diğer yazılımlarda kullanıldığı gibi, diğer yazılımlarda oluşturulan katı model veya eleman modeli ANSYS programına aktarılabilir.

5.1.1 ANSYS Sonlu Elemanlar Analizi ile Tasarım ve Maliyet

ANSYS programı bir yapı ya da bir makinanın modelini bilgisayarda oluşturmaya, onlara etkiyen yükleri uygulamaya ve gerilme seviyeleri ya da sıcaklık dağılımları gibi fiziksel cevapları incelemeye imkan verir. Bu işlemler, tasarım mühendislerine çok sayıda prototip yapmak, test etmek ve bu döngüyü tekrar işletmek için alternatifler sunar. Bazı ortamlarda, prototip testi sakıncalı ya da mümkün değildir. ANSYS bu tip durumlarda da analiz imkanları sunar.



Şekil 5.1 Sonlu elemanlar analizinin tasarım-üretim aşamasında kullanımı.

ANSYS ile, mühendisler tasarımda mevcut bir hatayı ya da daha optimum bir geometriyi cihaz henüz tasarım aşamasındayken gerçekleştirirler. Ayrıca bazı modeller parametrik olarak gerçekleştirilirse, geometri ve malzemedeki değişiklikler kolayca yapılır ve herbiri için çözümler elde edilerek en optimum çözüme ulaşmak mümkün olur.

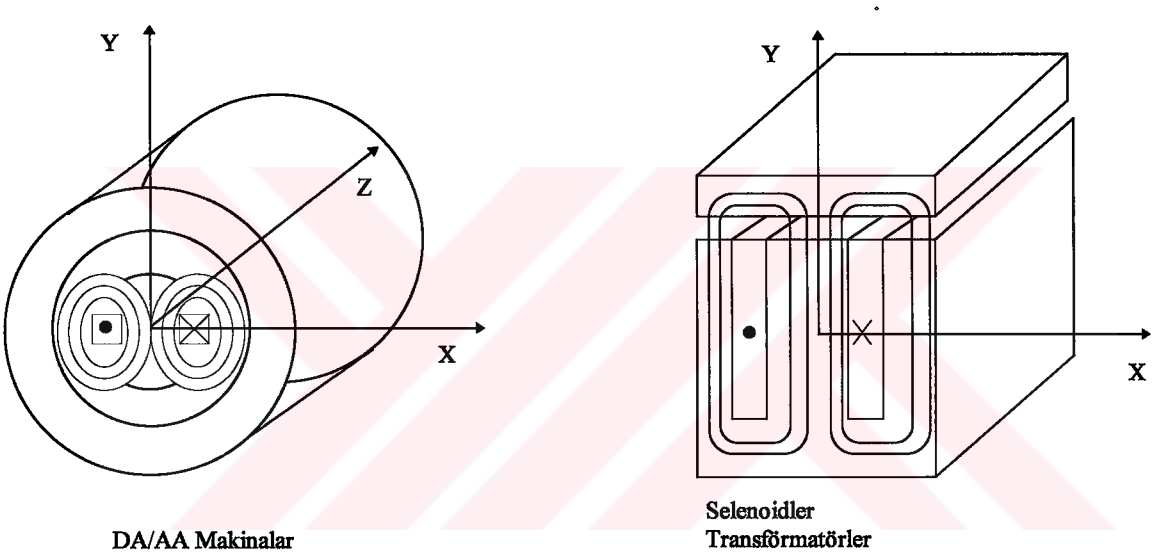
Mühenlislikteki rekabet onları, en kaliteli ürünü en düşük maliyetle nasıl gerçekleştirebileceklerini araştırmaya iter. ANSYS Sonlu Eleman Analizi, hem tasarım hem de üretim maliyetini azaltarak ve tasarlanan ürünlerin güvenilirliğini artırır.

Şekil 5.1'de görüldüğü gibi prototipi oluşturmadan önce son tasarımı kontrol etmek için daha sonra üretim işlemine geçmeden sonlu elemanlar analizi çok etkin bir rol oynar.

5.2 ANSYS'de Kullanılan İki Boyutlu Modeller

5.2.1 İki Boyutlu Düzlemsel Modeller

Yüzeyin dışına doğru olan z doğrultusundaki geometrinin ve yükün sabit (ya da hemen hemen sabit) olduğu problemler için kullanılır. Bunun en tipik uygulama alanları, Şekil 5.2'de ki DA ve AA makinalar, selenoidler ve transformatörlerdir.



Şekil 5.2 İki boyutlu düzlemsel modeller.

2-boyutlu düzlem x-y düzlemi olup z=0'dır. Bu modele ait bazı kabuller şunlardır:

1. z-doğrultusunda geometri ve yük sabittir.
2. Akım yönü z-doğrultusunda olup süreklidir.
3. Modelin z-doğrultusu uçlarındaki alanlar ihmal edilir. Böylece uçlardaki kaçak akılar ihmal edilmiş olur.

Bunun anlamı kuvvet, moment, emf, endüktans vb. değerlerin hesaplanarak bulunan değerleri, onların 3-boyutlu modellerinden elde edilen değerlerinden daha büyük olabileceğidir.

Bu çalışmada iki boyutlu düzlemsel modeller seçilmiştir. Bundan dolayı yukarıda verilmiş olan kabuller doğrultusunda modelimiz oluşturulmuştur.

5.2.2 İki Boyutlu Eksenel Simetrili Modeller

Geometri ve yük değerlerinin bir eksene göre simetrik olduğu modeller için kullanılır. Eğer 3-boyutlu bir model oluşturup, bir eksene göre 2-boyutlu bir düzlemi döndürerek onu yüklersek analiz için eksenel bir simetri kullanılır hale gelir. Bununla ilgili en yaygın uygulamalar selenoidler, asenkron makinalar, senkron generatörler ve transformatörlerdir.

Eksenel simetrili bir model x-y düzlemiyle tanımlanır. Burada y ekseni simetri eksenidir. Ayrıca negatif x koordinatlarına müsade edilmez. Bu modele ait bazı kabuller şunlardır:

1. Geometri ve yük dairesel doğrultuda sabittir.
2. Akım yönü z doğrultusunda olup süreklidir.
3. Eksenel simetrili problemin karakterinden dolayı uçlardaki etkiler, düzlemsel modellere göre daha iyidir.

5.3 ANSYS Programının Uygulanışı

Magnetik statik analiz için uygulama adımları: Bir magnetik statik analiz uygulamasında üç esas bölümden oluşan vektör potansiyel formülleri kullanılır.

1. Model oluşturma (Modelleme)
2. Çözüm elde etme (Çözüm)
3. Sonuçları gözleme (Sonuç)

5.3.1 Modelleme

Bir magnetik statik analiz için model oluşturma aşaması: Bir magnetik statik analizde bir model oluşturmak için şu temel adımlar izlenir:

1. İşadını ve başlığını belirleyiniz.
2. PREP7'ye giriniz.
3. Eleman tipini belirleyiniz.
4. Eleman gerçel sabitini belirleyiniz.
5. Malzeme özelliklerini belirleyiniz.

6. Model geometrisini tanımlayınız.
7. PREP7'den çıkınız.

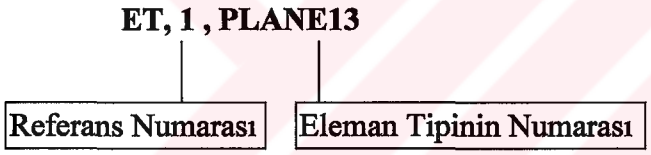
5.3.1.1 Eleman Tipini Seçmek

Eleman tipinin seçiminde modelin hassaslık durumu dikkate alınır. 2-boyutlu magnetostatik için kullanılabilen başlıca iki eleman tipi vardır:

PLANE53 8-düğümlü dörtgen eleman
PLANE13 4-düğümlü dörtgen eleman

Hem PLANE53 hem de PLANE13 vektör potansiyel formülasyonu kullanır. Genellikle PLANE53 yüksek, PLANE13 ise düşük hassaslıktaki uygulamalarda kullanılır. Her düğüm için bir DOF (serbestlik derecesi) vardır ki bu AZ'dir (AZ, z doğrultusundaki vektör potansiyeldir). Koordinatlar düzlemsel veya eksenel olabilir.

ET komutu, eleman tiplerini seçmek için kullanılır.



1. PLANE53 Elemen Tipi

Bu eleman tipinin dörtgen şekli dörtgen şekil fonksiyonuna sahiptir. Potansiyel alanın dörtgen değişimini açıklar. Üçgen şekli ise bilineer şekil fonksiyonuna sahiptir. Yüksek hassasiyetli bölgeler için tavsiye edilir.

Bir eleman için bilinmeyen değişkenler düğüm potansiyelleri AZ'dir. Eleman davranışı, o eleman içindeki potansiyelin nasıl değiştiğini tanımlayan şekil fonksiyonları ile karakterize edilir. Bir elemanın düğümleri arttıkça doğru alan değerlerine daha fazla yaklaşılır.

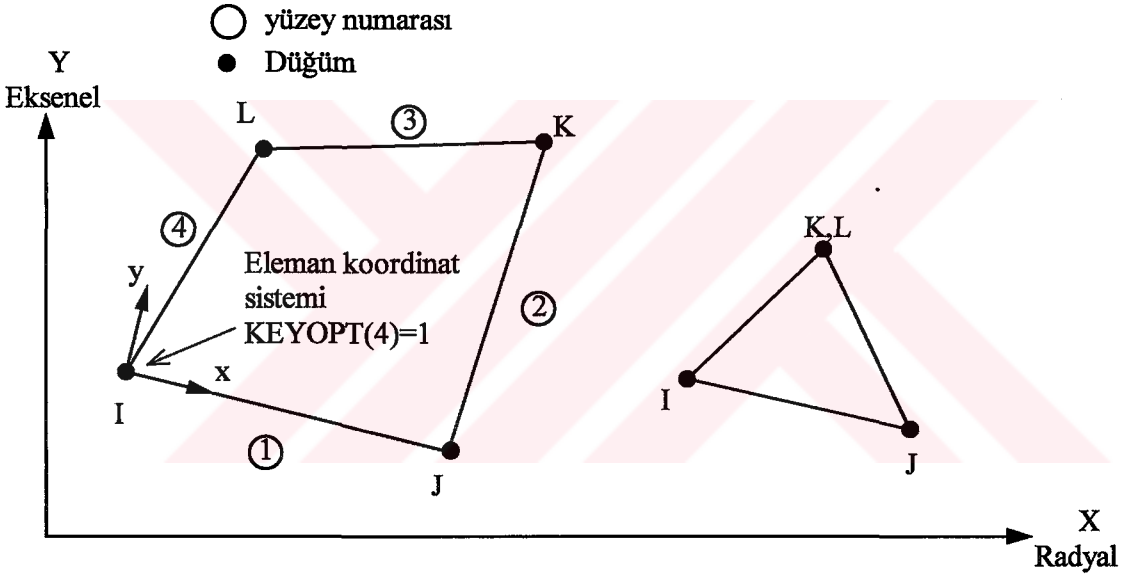
B akı yoğunluğunu tanımlayan polinom şekli şu şekilde ifade edilir:

PLANE53	DÖRTGEN	ÜÇGEN
	$Bx=a+bx+cxy+dx^2+ey$	$Bx=a+bx+cy$
	$By=f+gy+hxy+iy^2+jx$	$By=d+ex+fy$

PLANE53 Eleman seçenekleri:

KEYOPT(3)=0	Düzlemsel analiz
KEYOPT(3)=1	Eksenel simetri analizi
KEYOPT(4)=0	Eleman koordinat sistemi genel kartezyen'e paralel
KEYOPT(4)=1	Eleman x ekseni I-J kenarına paralel

2. PLANE13 Eleman Tipi

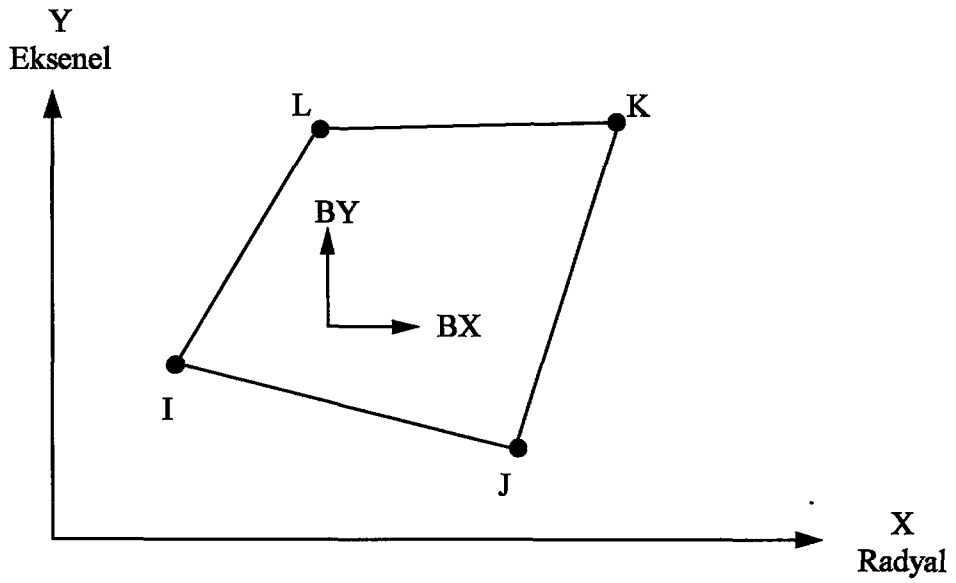


Şekil 5.3 İki boyutlu PLANE13 eleman giriş şekli.

PLANE13, bir iki boyutlu elemandır (düzlemsel veya simetrik). Magnetik, ısı, elektrik ve yapısal özellikli alanlar arasında birlikte kullanılma limitini aşmayacak şekilde çok alanlı analiz gerçekleşir. PLANE13, B-H eğrisi ya da kalıcı mıknatıslık (demagnetizasyon) eğrisi nonlineer magnetik özelliğe sahiptir.

B akı yoğunluğunu tanımlayan polinom şekli şu şekilde ifade edilir:

PLANE13	DÖRTGEN	ÜÇGEN
	$Bx=a+bx$	$Bx=a$
	$By=c+dy$	$By=c$



Şekil 5.4 İki boyutlu PLANE13 eleman çıkış şekli.

Dörtgen şekli lineer şekil fonksiyona sahiptir ve potansiyel alanın lineer değişimini açıklar. Orta hassasiyetli bölgeler için tercih edilir. Üçgen formu ise sabit bir şekil fonksiyonuna sahiptir. Ve yaklaşık değişmez olan düşük hassasiyetli bölgeler için kullanılır. Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'de PLANE13'e ait özellikler verilmiştir.

Tablo 5.1'de PLANE13 eleman tipine ait giriş bilgileri tablo halinde verilmiştir. Burada elemanın elektromagnetik alan analizine ait özelliklerinin yanısıra yapı ve ısı analizleri içinde gerekli olan giriş özellikleride verilmiştir. Çünkü PLANE13 elemanı birden fazla analizi beraber yapabilme özelliğine sahiptir.

Burada en önemli özellikler serbestlik derecesinin doğru olarak seçilmesi, uygun malzeme özelliklerine ait değerlerin girilmesi ve analiz çeşidimize göre analiz opsiyonlarının belirlenmesidir.

Tablo 5.1 PLANE13 elemanı giriş özellikler

Eleman İsmi		PLANE13
Düğüm sayısı	4	I,J,K,L
Serbestlik derecesi	1	MAG (KEYOPT(1)=0)
	1	TEMP (KEYOPT(1)=2)
	2	UX,UY (KEYOPT(1)=3)

	4	UX,UY,MAG,TEMP (KEYOPT(1)=4)
	2	VOLT,MAG (KEYOPT(1)=6)
Gerçel Sabit	0	Yok
Malzeme özellikleri	12+	EX,EY,EZ,NUXY,NUYZ,ALPX,ALPY,ALPZ,DENS,GX YC,MAGNETİK,ISI
Eleman Yüzleri	4	(IJ,JK,KL,LI) yüzleri şu yükler için kullanılabilir. Magnetik (KEYOPT(1)=0,4,6) P komutunu kullan Magnetik (KEYOPT(1)=0,4) CV komutunu kullan Konveksiyon (KEYOPT(1)=2,4 CV komutunu kullan Basınç (KEYOPT(1)=3) P komutunu kullan
Eleman yükleri	2	HGEN;CDEN
İlave özellikler		
KEYOPT(1)		Alan tanımlamada kullanılır.
	0	Statik, geçici yada zaman-harmonik magnetik,
	2	Sürekli hal ya da geçici ısı
	3	Statik yada dinamik yapı
	4	Statik magnetik-yapı, geçici magnetik- yapı statik ısı-yapı, geçici ısı-yapı
	6	Harmonik yada geçici magnetik-elektrik
KEYOPT(2)	0	İlave şekiller içerir.
	1	İlave şekiller içermez.
KEYOPT(3)	0	Düzlemsel
	1	Eksenel simetrili
	2	Düzlemsel
KEYOPT(4)	0	Eleman koordinat ekseni genel sisteme paralel.
	1	Eleman koordinat ekseni I-J doğrultusunda
KEYOPT(5)	0	Basit eleman çıkışı
	2	Düğüm çıkışı
KEYOPT(6)		Şayet elastik stiffness matrisi EX,EY,EZ yerine NL komutu ile girilmişse kullanılır.
	0	Giriş stiffness matrisi gösterir.
	1	Giriş copliance matrisi gösterir.

Tablo 5.2'de ise analiz seçimine göre hangi değerleri elde edeceğimiz gösterilmiştir. Sonuçları hem düğümlere göre hemde düğümlerin oluşturduğu elemanlara göre alabiliriz. Örneğin biz, magnetik analizin sonunda radyal doğrultudaki B değerlerini alarak hava aralığı alan eğrilerini çıkarmayı amaçladık.

Tablo 5.2 PLANE13 elemanı çıkış özellikleri

LABEL	SABİT SAYISI	AÇIKLAMA
EL	1	Eleman numarası
NODES	4	Düğümler-I,J,K,L
MAT	1	Malzeme numarası
VOL	1	Hacim
XC,YC	2	Genel X,Y koordinatları
ELEMAN ÇÖZÜMÜ		
SX,SY,SXY,SZ,	4	SX,SY,SXY ve SZ
SIG1,SIG2,SIG3	3	Ana gerilmeler
S.I.	1	Gerilme şiddeti
SIGE	1	Eşit gerilme
B	3	Magnetik akı yoğunluğu (B) bileşenleri ve vektör toplam BX, BY ve BSUM
A	1	Magnetik vektör potansiyel (A) z bileşeni -AZ
F	2	Magnetik kuvvet (F) bileşenleri -FX,FY
JS,JE,JT	3	Kaynak, fuko ve toplam akım yoğunluğu
TG	3	Isı gradyent (TG) bileşenleri ve vektörel toplam-TGX,TGY,TGSUM
TF	3	Isı akı (TF) bileşenleri ve vektörel toplam-TFX,TFY,TFSUM

DÜĞÜM ÇÖZÜMÜ

SX,SY,SZ,SXY,SIG1,SIG2,SIG3,S.I.,SIGE,BX,BY,BSUM değerlerini her düğümde verir.

NOT:Eksenel simetri kullanıldığında BX ve BY radyal ve açısal doğrultulara karşılık gelir

5.3.1.2 Malzeme Özelliklerini Tanımlamak

Malzeme özellikleri lineer ya da nonlineer olabilir. Lineer özellikler: Bağıl geçirgenlik (MURX,MURY,MURZ) ve magnetik koersif kuvvet (MGXX,MGYY,MGZZ) izotropik ya da othotropik, sabit yada sıcaklığa bağlı olabilir ve doyma ihmal edilir.

Nonlineer özellikler: B-H eğrisi malzeme davranışını gösterir. Çoğu doymalı bölgelerde ve sabit geçirgenliğin geçerli olmadığı kalıcı mıknatıs bölgelerinde kullanılır.

Malzeme özelliklerini tanımlamak için ilk adım birim sistemini belirlemektir.

EMUNIT,MKS	MKS birimi
EMUNIT,CGS	CGS birimi

EMUNIT ayrıca μ_0 , boşluğun geçirgenliğini otomatikmen ayarlar.

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m	MKS birimi için
$\mu_0=1$	CGS birimi için

Burada kullanılan birim sistemi, geometri ve yükler için kullanılan sistemle aynı olmalıdır. Aşağıda MKS ve CGS birim sisteminden bazı değerler gösterilmiştir.

TANIM	MKS	CGS
Uzunluk	m	cm
Alan	m^2	cm^2
Akım	A	abA
Akım yoğunluğu	A/ m^2	abA/ cm^2
Elektrik yükü	C	abC
Endüktans	H	abH
İletkenlik	S/m	abmho/cm
Magnetik akı	Wb	Mx
Magnetik akı yoğunluğu	T	G
Magnetik alan şiddeti	A-t/m	Oe
Kuvvet	N	Dyn

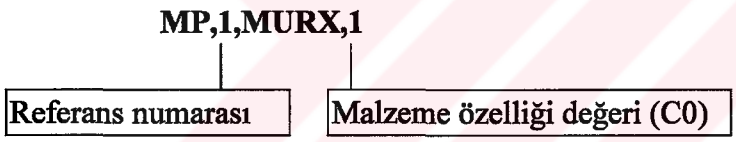
Enerji	J	Erg
Skaler potansiyel	A-t	Gi
Vektör potansiyel	Wb/m	G-cm
Magnetik geçirgenlik	H/m	birim değer

Bir model içinde şu malzeme bölgeleri seçilebilir:

1. Doymalı bölgeler.
2. İletkenler
3. Kalıcı mıknatıslar
4. Hava

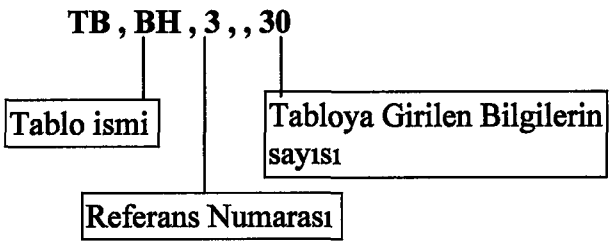
1. Doymalı Bölgeler

Doymalı bölgeler geçirgenliğe yada doyma oranına bağlı olarak lineer ya da nonlineer özelliklerle tanımlanır. Doyma oranının düşük yada geçirgenliğin sabit kabul edildiği ortamlar için lineer özellikler esas alınır. Bu durumda sadece bağıl geçirgenlik değeri MURX, MURY ve MURZ ile MP komutunda tanımlanır.



MURX x yönündeki bağıl magnetik geçirgenliktir. Eğer MURY ve MURZ belirtilmezse, özelliklerin izotropik olduğu kabul edilir. Özellikler sıcaklığın bir fonksiyonu değildir. Eğer lineer özellikler sıcaklığın bir fonksiyonu ise MPTEMP komutu kullanılır.

Eğer doyma oranı ya da nonlineerlik önemli ise doymalı bölgeler için nonlineer özellikler tanımlanmalıdır. Nonlineer malzeme davranışı B-H eğrisi ile gösterilir. B-H eğrisini tanımlamak için TB komut ailesi kullanılır.



TBPT , DEFI ,400 ,1

H alan değeri (x) | B alan değeri (y)

2. İletkenler

Genellikle lineer malzeme özellikleri ile tanımlanır. Sadece bağıl geçirgenlik değeri tanımlanır.

3. Kalıcı Mıknatıslar

Kalıcı mıknatıslar, artık akı yoğunluğu (B_r) , koersif kuvvet (H_c) ve normal B-H eğrisi ile karakterize edilir. Mıknatıslanma eğrisi ikinci bölgede alınır. Mıknatıslanma eğrisi, farklı mıknatıs malzemeleri için farklı farklıdır. Mıknatıslanma eğrisi "sert" magnetik malzemeler için yaklaşık lineer, "yumuşak" magnetik malzemeler için nonlineer özelliktedir. Lineer bir kalıcı mıknatıs için iki özellik gereklidir: Birisi bağıl geçirgenlik ve koersif kuvvet (H_c) değeri.

4. Hava

Havaya ait malzeme özellikleride sadece bağıl geçirgenlik değeri tanımlanarak verilir

5.3.2 Çözüm Elde Etmek

Bir magnetik statik analiz vektör potansiyel kullanır. Modellemeden sonra , analizin çözüm aşaması başlar.Vektör potansiyel formülleri kullanan bir magnetik statik analizin çözüm aşamasındaki temel adımları şunlardır.

1. SOLUTION'a giriniz.
2. Analiz tipini belirleyiniz.
3. Analiz seçeneklerini belirleyiniz.
4. Yükleri uygulayınız.
5. Yük adım seçeneklerini belirleyiniz.

6. Çözümü başlatınız.
7. SOLUTION'dan çıkınız.

Bir magnetik analiz de çoklu yük durumunda adımlarda gerçekleştirilebilir.

5.3.2.1 Analiz Seçenekleri

	Komutlar
1. SOLUTION'a giriniz.	/SOLU
2. Analiz tipini belirleyiniz.	ANTYPE,STATIC
3. Analiz seçeneklerini belirleyiniz.	
Newton-Raphson seçeneği:	NROPT
Denklem çözümü seçenegi:	ESLV

5.3.2.2 Yükler

4. Yükleri uygulayınız.

Magnetik potansiyel	D;DSYM;DK;DL;DA
Akım bölgesi	F;FK
Maxwell yüzeyi	SF;SFE;SFL;SFA
Akım kaynağı yoğunluğu	
ya da görünür yer değiştirme	BF;BFE;BFK

Bir magnetik statik analiz için yük değeri, modelde sınırlamalar, akım bölgeleri, yüzey yükleri ve gövde yüklerine karşılık bu temel komutları kullanmakla belirlenebilir.

5.3.2.3 Yük Adım Seçeneği

5. Yük adım seçeneklerinin belirlenmesi

Alt adımların sayısının belirlenmesi:	NSUBST
Adım sürelerinin belirlenmesi:	DELTIM
Otomatik adım süresi seçeneği:	AUTOTS
Yük adımının bitiş zamanının belirlenmesi:	TIME
Uygulanan yük seçeneği adımı:	KBC
Çıkış kontrol seçenekleri:	OUTPR

Toplayan extrapolasyon seçeneği:	ERESX
Yakınsama kriteri:	CNVTOL
Dengeleme iterasyonunun belirlenmesi:	NEQIT
Tahmini düzeltme seçeneği:	PRED
Çözüm sonu seçenekleri:	NCNV

5.3.2.4 Çöz

6. Çözümü başlat:	SOLVE
7. SOLUTION'dan çık:	FINISH

SOLVE komutunu çalıştırmadan önce SAVE komutu ile modelinizi kaydetmelisiniz.

5.3.3 Sonuçları Gözlemek

Bir magnetik statik analizin sonuçlarının gözlenmesi. Bir magnetik analizin sonuçları şunları içerir:

Magnetik potansiyel
Magnetik akı yoğunluğu
Magnetik alan şiddeti
Magnetik kuvvet
Ters akım bölgesi
Bu sonuçlar POST1 (General postprocessor) kullanılarak gözlenebilir.

BÖLÜM 6

ANSYS SONLU ELEMANLAR ANALİZİNDE NONLİNEER PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Daha önceki bölümde, ANSYS'nin genel olarak problemlerin analizi için nasıl uygulandığı ve hangi aşamalarla sonucun elde edildiği anlatılmıştı. Bu bölümde ise nonlineer problemlerin ANSYS ile analizi yapılırken lineer analizden farklı veya ona ilave olarak hangi işlemlerin gerektiği üzerinde durulmuştur [13].

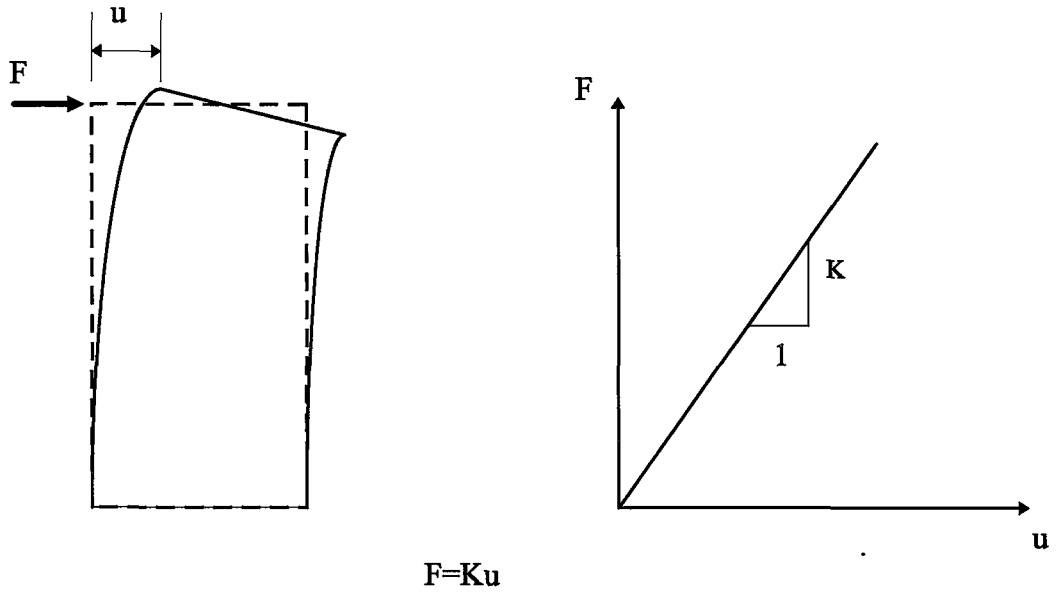
Bunun için öncelikle nonlineer bir yapı analiz notasyonları kullanılarak nonlineerliğin tanımı gerçekleştirişmiştir. Ayrıca nonlineer sistemlerin lineer sistemlerden farkı ortaya konmuştur. Nonlineerlik her nekadar yapı analizleri için tanımlanmış olsa da, biz burada bazı ifadelerin genel ilkeler oluşturmasından dolayı nonlineerlik yaklaşımının elektromagnetik problemlerdeki karşılıklarına da zaman zaman dikkat çektik.

6.1 Nonlineerlik

Bu bölümde öncelikle nonlineerliğin yapısı hakkında temel bazı sorular sorulmuş olup başlıklar halinde bu sorulara cevaplar verilmiştir.

1. "Nonlineer" bir yapı nedir?
2. Nonlineer analiz ne tip uygulamalar gerektirir?
3. Nonlineer davranışa ne sebep olur?
4. Nonlineer sonlu elemanalar analizin farkı nedir?
5. Nonlineer sonlu elemanlar analizi için bazı temel sorunlar nedir?

6.1.1 Nonlineer Davranış Nedir?



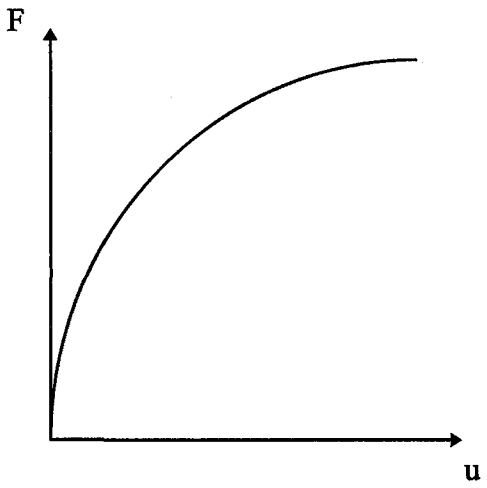
Şekil 6.1 Lineer davranış eğrisi.

Bir sisteme bir F kuvveti uygulandığında sistem yüke bağlı olarak u kadar yerdeğiştirir. F ile u arasındaki ilişkinin kestirilebilmesi, bir dizi yükün uygulandığında yapının cevabını hesaplamaya imkan verir. Çoğu mühendislik uygulamalarında, F ile u arasındaki ilişki HOOKE kanunu olarak bilinen lineer bir denklemle ifade edilir:

$$F=Ku \qquad (6.1)$$

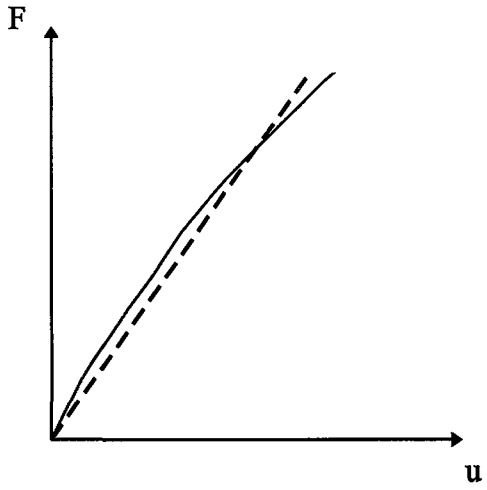
Bu denklemde, K katsayısı sistemin yapısal büyüklüklerine bağlı bir katsayıdır. Bir yapının K katsayısı sabit kaldığı sürece o yapı lineerdir denir, çünkü onun davranışı lineer denklemler kullanılarak analiz edilebilir.

Çoğu yapısal sistemler normal yük sınırları içinde lineer olarak kabul edilir. Şekil 6.1'de bir yapıya ilişkin lineer özellikte bir davranışa ait eğri verilmiştir. Standart lineer denklem çözücüleri, ANSYS ve diğer sonlu eleman programlarının kullandığı, karmaşık lineer yapıları analiz etmede mühendisler için öncelikle geliştirilmiştir.



Şekil 6.2 Nonlineer davranış eğrisi.

Bununla beraber, F ve u arasındaki ilişkinin sabit olmadığı mühendislik uygulamalarında elbette vardır. Şekil 6.2'de verildiği gibi, bazı sistemlerde bu doğru düz olmayıp doymalı bir eğri olur. Böyle sistemlerin davranışı bir dizi lineer denklemlerde doğrudan ifade edilemezler. Fakat nonlineerlik derecesi bazen ihmal edilecek kadar küçüktür. Şekil 6.3'de bu lineerleştirmenin nasıl yapıldığı görülmektedir.



Şekil 6.3 ——Nonlineer davranış— — Lineer davranış

6.1.2 Nonlineer Davranişa Neler Sebep Olur?

Nonlineer davranışa sebep olan bazı hususlar vardır. Bunlar üç ana katagoride toplanabilir.

1. Geometri nonlineerlikleri
2. Malzeme nonlineerlikleri
3. Temas nonlineerlikleri

Şimdi bu üç çeşit nonlineerlik özelliklerinin modelleme işlemini nasıl etkilediği incelenecektir.

6.1.2.1 Geometri Nonlineerlikleri

Geometri nonlineerliklerini modellemek için şunlara dikkat edilir.

1. En uygun eleman tipleri kullanılır.
2. Genellikle sınırlayıcı denklemlerden ve eksenel simetriden kaçınılır.
3. Çoğu nonlineer bükülme analizleri için, geometrik kusurlar ihmal edilmez.
4. Ayrıca, aynı modelleme teknikleri lineer bir analiz içinde kullanılır.

Nonlineer etkiler, SOLUTION aşamasında analiz seçenekleri ile ayarlanarak etkin hale getirilir.

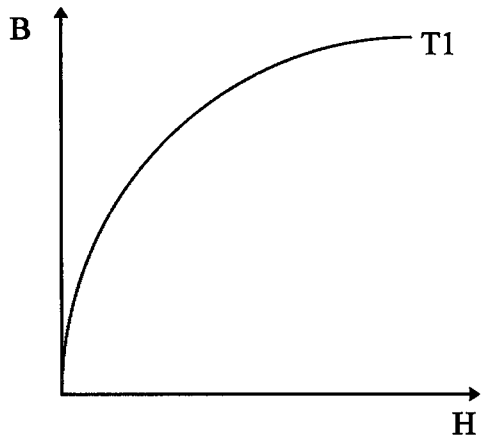
6.1.2.2 Malzeme Nonlineerlikleri

Malzeme nonlineerliklerini modellemek için şunlara dikkat edilir.

1. Çoğu durumlarda, düşük dereceli (1.dereceden orta düğümleri olmayan eleman tipi) kullanılır.
2. TB komut ailesini kullanarak nonlineer malzeme özellikleri tanımlanır.
3. Seçilen eleman tiplerinin malzemelerin nonlineerliğini desteklediğinden emin olunur.
4. Model geometrisi, geniş bozulmalı nonlineer malzeme davranışlarından dolayı oluşabilir potansiyel problemlere hazırlıklı olunur.

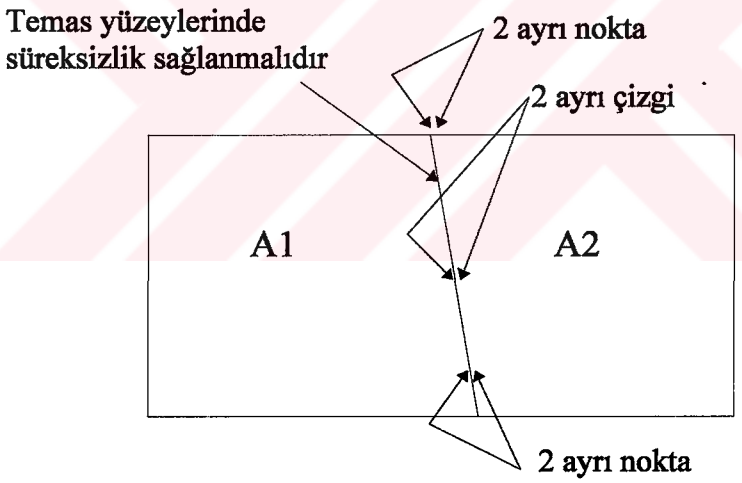
Şekil 6.4'de nonlineer malzemeye ait örnek bir B-H eğrisi verilmiştir.

1 Nolu Malzeme için B-H Eğrisi



Şekil 6.4 Magnetik analizler için B-H eğrisi.

6.1.2.3 Temas Nonlineerlikleri



Şekil 6.5 Temas nonlineerliğinin tanımlanması.

Temas nonlineerliklerini modellemek için şunlara dikkat edilir.

1. Özellikle 3-boyutlu analizlerde olmak üzere, orta düğümlü ikinci dereceden elemanlar kullanmaktan sakınılır.
2. Katı model oluşturulduğunda, gerekli yerlerde temas eden yüzeylerin, birbirine bağlı olmayıp serbest kaldığından emin olunulmalıdır.
3. KEYOPT özelliğini kullanarak uygun temas eleman tipleri seçilir.

4. Bu elemanlar için gerekli olan gerçel sabiti tanımlanır.
5. Temas yüzeylerinde düzlemsel eleman yüzeyleri oluşturulur.
6. Temas yüzeylerini mesh yaptıktan sonra, temas elemanlarını oluşturmak için özel bazı işlemler yapılır.

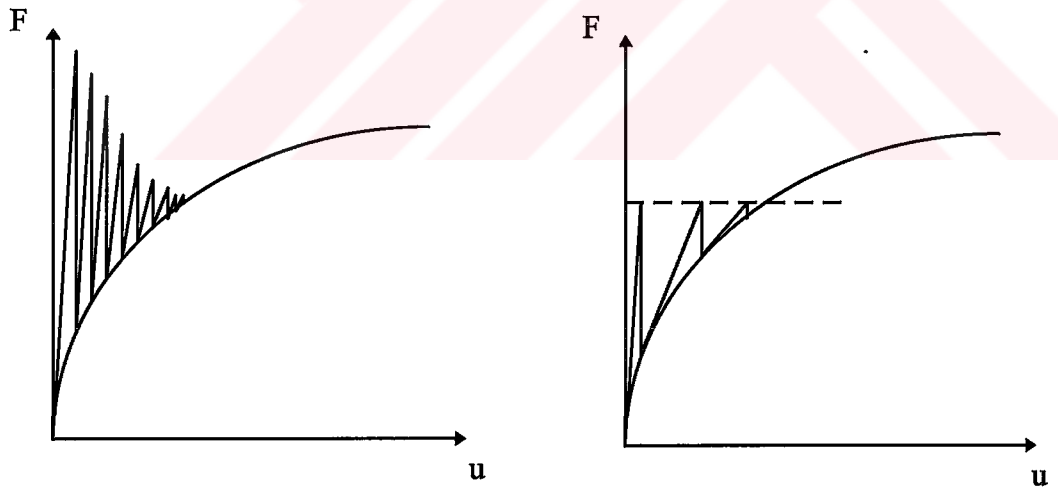
Şekil 6.5 temas nonlineerliğinin nasıl tanımlanması gerektiğini gösteren bir şekildir.

6.1.3 Nonlineer Sonlu Elemanlar Analiz Niçin Farklıdır?

Her lineer yaklaşıklık, programın lineer denklem çözücüsü yardımıyla ayrı bir durum ya da iterasyon gerektirir. Her yeni iterasyon tek bir lineer analiz çözümü kadar pahalıdır.

6.1.3.1 Lineer Bir Çözücü ile Nonlineer Analiz

Nonlineer bir sistem doğrudan lineer bir çözücü ile çözülemez. Bununla birlikte, düzeltmelerle bir dizi lineer yaklaşıklık kullanılarak çözülür. Şekil 6.6'da bunun nasıl gerçekleştirileceği gösterilmiştir.



Şekil 6.6 Lineer çözümleme

6.1.3.2 Newton-Raphson Metodu

ANSYS programının, nonlineer bir problemi çözmek, düzeltmek ve yeniden çözmek için kullandığı iteratif (yinelemeli) işlem, Newton-Raphson (N-R) metodu olarak

adlandırılır. Bu işlemde oluşturulan herbir iterasyon, bir Newton-Raphson iterasyonu ya da dengeleme (equilibrium) iterasyonu olarak bilinir.

6.1.3.3 Newton-Raphson Denklemi

Newton-Raphson metodu kullanılan denklemi iterasyona tabi tutar.

$$\left[K^T\right]\cdot\{\Delta u\}=\left\{F^{app}\right\}-\left\{F^{nr}\right\} \qquad (6.1)$$

$\left[K^T\right]$=Teğet katsayılar matrisi

$\{\Delta u\}$=Yer değiştirmedeki artış

$\left\{F^{app}\right\}$=Uygulanan yük vektörü

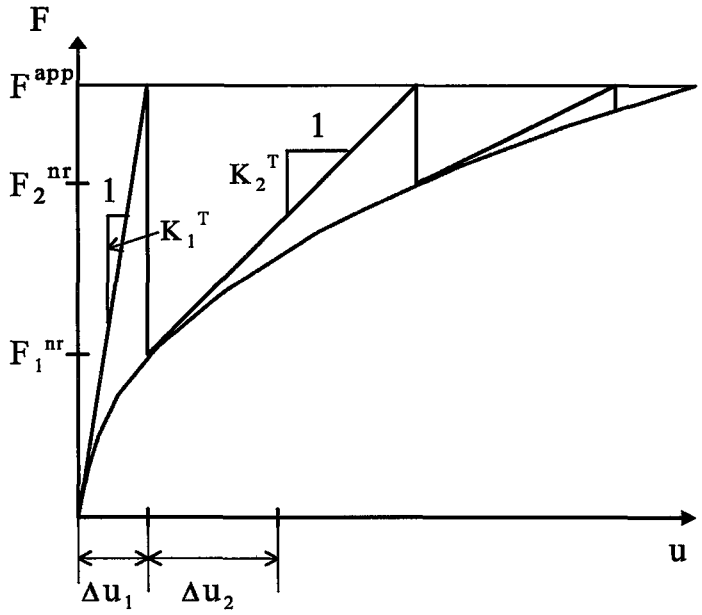
$\left\{F^{nr}\right\}$=Newton-Raphson restore kuvveti (yükler, akım elemanı gerilmelerince oluşturulur)

$\left\{F^{app}\right\}-\left\{F^{nr}\right\}$=Artık yük denir.

Tam Newton-Raphson metodu için, program $\left[K^T\right]$ teğet katsayılar matrisini ve $\left\{F^{app}\right\}-\left\{F^{nr}\right\}$ artık yükü her iterasyonda güncellenir ve daha sonra yukarıda verilen denklem yeniden çözülür. Yakınsama, ($\left\{F^{app}\right\}-\left\{F^{nr}\right\}$)'ye ayarlanan bir yakınsama kriterinden daha az olduğunda gerçekleşir. Fiziksel ifade ile $\left\{F^{app}\right\},\left\{F^{nr}\right\}$'ye eşit değilse sistem dengelemede değildir. Eğer dengesizlik miktarı kabuledilebilir ölçüde küçük ise, çözüm yakınsanmış kabul edilir.

6.1.3.4 Newton-Raphson Eğrisi

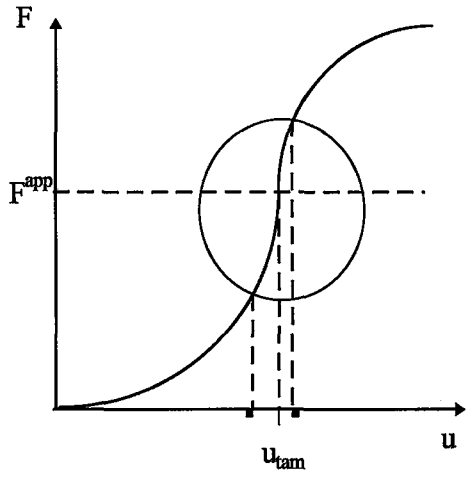
Şekil 6.7'deki kuvvet-yerdeğiştirme eğrisi ile "Serbestlik derecesi" (Degree Of Freedom) bir olan bir sistem için ile Newton-Raphson metodunun nasıl uygulandığı gösterilebilir. Bu eğride ilk iterasyon Δu_1'lik bir yer değiştirme oluşturur. Nonlineer cevap bu yerdeğiştirme için F_1^{nr} değerinde bir kuvvete karşılık gelir.



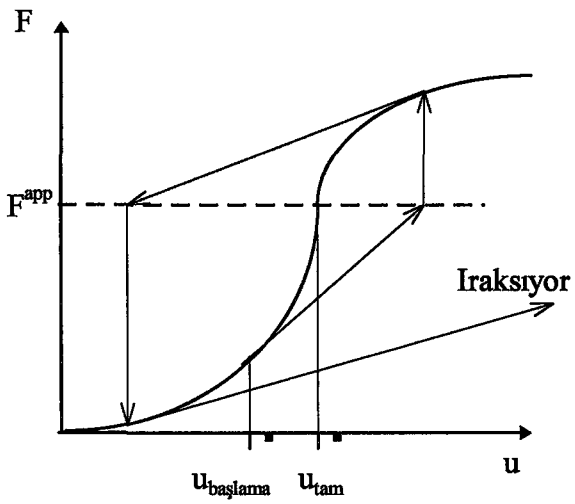
Şekil 6.7 Newton-Raphson eğrisi.

6.1.3.5 Yakınsama Yarıçapı

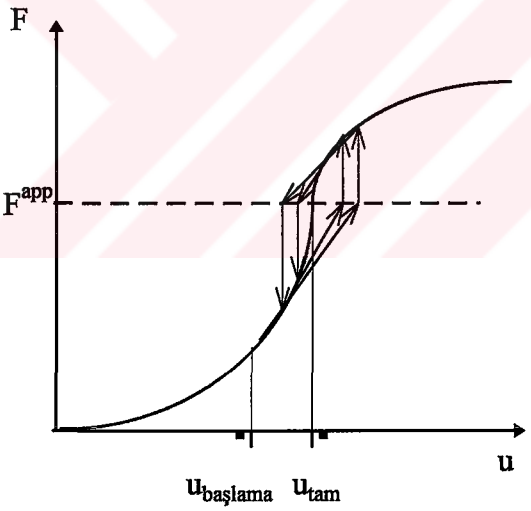
Ne yazıkki, yakınsama Şekil 6.8'de verilen eğride görüldüğü gibi her zaman aynı kolaylıkta elde edilemez. Eğer başlangıç özellikleri tam çözüme yakınsa Newton-Raphson işlemi yakınsamayı garanti eder. Yok başlangıç konfigirasyonu sonuç özelliklerinden çok fazla uzakta ise analiz "yakınsama yarıçapının dışında"dır denir ve çözüm yavaş yavaş, hatalı olarak ya da hiç yakınsamayacaktır.



Şekil 6.8 Yakınsama yarıçapı



Şekil 6.9 Başlangıç u değeri yakınsama yarıçapının dışında.



Şekil 6.10 Başlangıç u değeri yakınsama yarıçapının içinde.

Yukarıda gösterilen kuvvet-yerdeğiştirme eğrileri, bir serbestlik derecesinin yumuşak-sert cevabı için yakınsama yarıçapının etkisini gösterir. Şekil 6.9'daki eğri, başlangıç noktası yakınsama yarıçapının dışında olduğunda, Şekil 6.10'daki eğri de ise başlangıç noktası yakınsama yarıçapının içinde olduğunda iterasyon sürecini gösterir.

6.1.4 Nonlineer Sonlu Elemanlar Analizinin Sorunları

Ne zaman nonlineer bir Sonlu Eleman Analizi yapılmaya çalışılsa üç temel sorunla karşılaşılır.

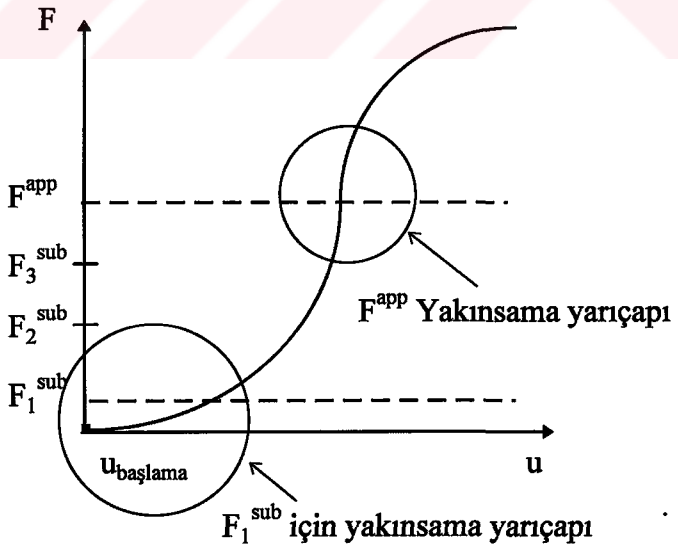
1. Yakınsama
2. Zaman
3. Doğrulama

6.1.4.1 Yakınsamanın Sorunlarını Aşma

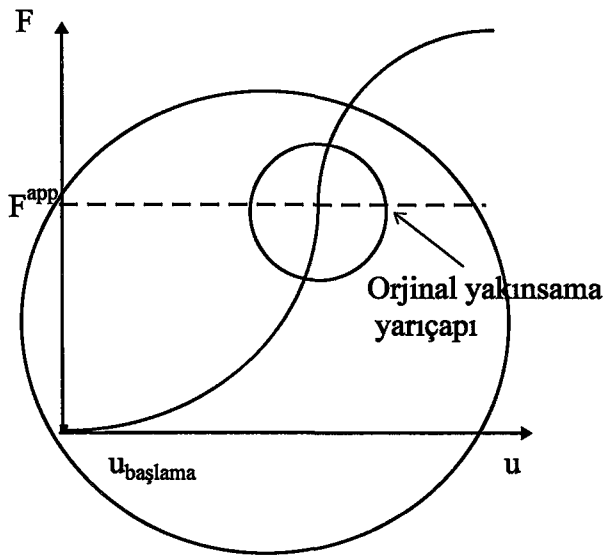
Nonlineer bir analiz yaptığımızda karşılaşılan en büyük avantaj yakınsayan bir çözüm elde etmektir. Eğer analiz zor bir şekilde yakınsıyorsa yani çözüm yakınsama yarıçapının dışından başlarsa yapılacak iki şey vardır:

1. Daha küçük yük adımları kullanarak hedefi daha yakına taşımak.
2. Değişik yakınsama araçları uygulayarak yakınsama yarıçapını genişletmek.

Şekil 6.11'de küçük yük adımları kullanarak, Şekil 6.12'de ise yakınsama yarıçapını genişleterek yakınsamanın nasıl sağlandığı eğrilerle gösterilmiştir. .



Şekil 6.11 Küçük yük adımları kullanma metodu.



Şekil 6.12 Yakınsama araçları ile yakınsama yarıçapını genişletme.

6.2 Nonlineer Analizin Aşamaları

Bu bölümde ve gelecek iki bölümde, ANSYS programı ile nonlineer analiz yapmak için basitçe hangi işlemleri yapmak gerektiği anlatılacaktır. Bu işlemler üç ana adımdan oluşur.

1. Modelleme (PREP7)
2. Çözüm elde etme (SOLUTION)
3. Sonuçları gözleme (POST1 ve POST26)

Bu konular lineer ve nonlineer analizler arasındaki farklara dikkat çeken işlemlerdir. Bu bölümlerde lineer analizin bilindiği kabul edilecektir.

6.2.1 Modelleme

Yeni bir model oluşturulağı zaman şu işlemlerin gerçekleştirilmesi gerekir.

1. Katı model geometrisi tanımlamak.
2. Eleman tipini ve malzeme özelliklerini belirlemek.
3. Sonlu elemanlar modelini oluşturmak için düğüm ve elemanleri tanımlamak.

Bu işleme ağ oluşturma "mesh generation" denir.

Bütün bu işlemler PREP7 aşamasında gerçekleştirilir.

6.2.1.1 Nonlineer ve Lineer Model Arasındaki Farklar

Problemin bağlı olduğu faktörler, lineer ve nonlineer model arasındaki farklılıklara etki eder. Bunlara örnek vermek gerekirse;

1. Bazı durumlarda, aynı model hem lineer hemde nonlinere uygulamalarda kullanılabilir.
2. Diğer bazı durumlarda, nonlineer davranışı yakalamak için modelin, ayrıca bazı nonlineer özelliklerle modellenmesi gerekir.
3. Bütün durmlarda ise nonlineer modeli olabildiğince basitleştirmek için her imkan denenmelidir.

Nonlineer analizin zorluğu, modelde iteratif çözümler ve özel bazı bilgilerle birleştirileceğinden, modelin son hali mümkün olduğunca basit tutulmalıdır. Şayet 3-boyutlu modeli, 2-boyutlu düzlemsel yada eksenel simetrili model olarak gerçekleyebiliyorsa gerçekleştirmek gerekir. Ayrıca modelin boyutları simetri kurallarını uygulararak azaltılabiliyorsa azaltılır. Buna ilave olarak nonlineer bir detayıda modelinizin kritik bölgelerinde sonuçları etkilemiyorsa gözardı edilir.

6.2.2 Çözüm Elde Etmek

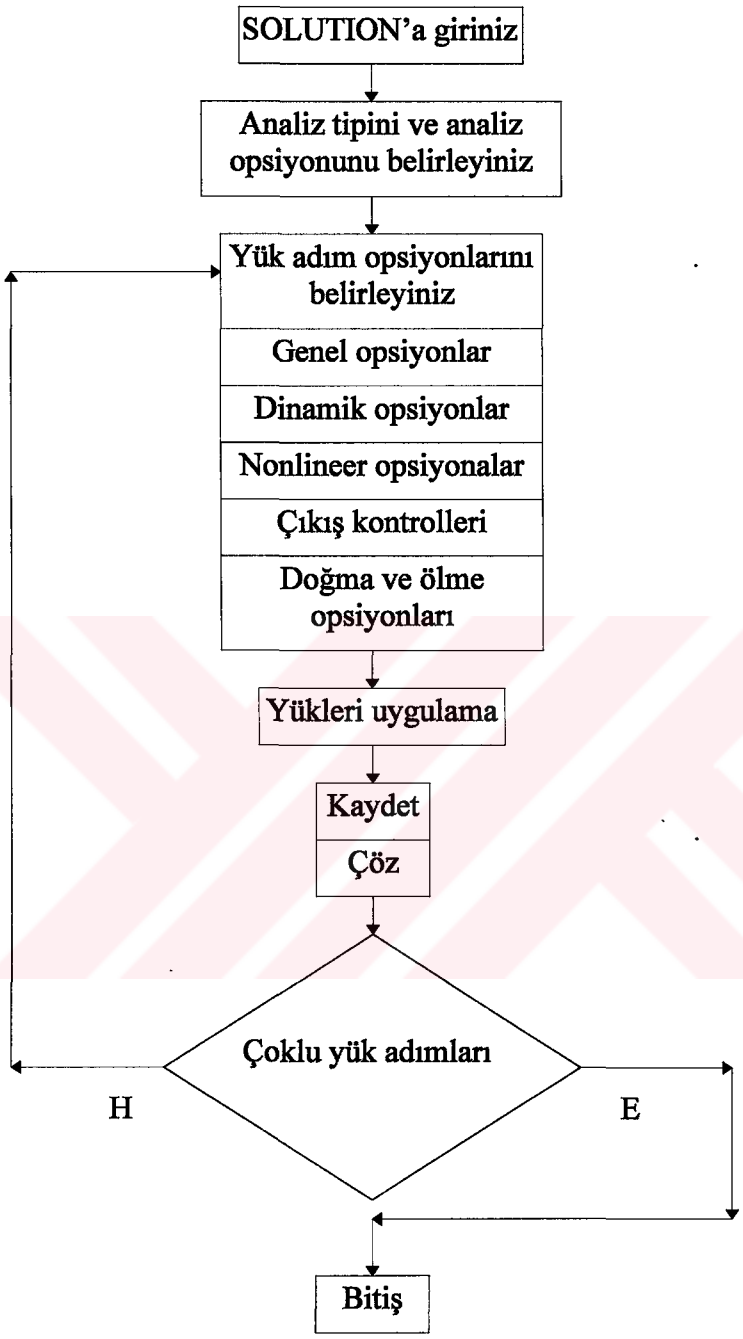
Modelleme gerçekleştirildikten sonra çözüm aşamasına geçilir. Bu bölümde ana hatları ile bir akış diagramı ve bir giriş tablosu içinde, nonlineer bir analiz elde etmek için SOLUTION'da kullanılan işlemler göstermiştir.

SOLUTION'da şu hususları uygulamak gerekir.

1. Analiz tipini ve analiz opsiyonlarını belirlemek.
2. Yük adım opsiyonlarını belirlemek.
3. Modele yükleri uygulamak.
4. Çözümü başlatmak.

Bölümde ayrıca, genel nonlineer çözüm karakteristikleri ve organizasyonlarına, "time"ın anlamı ile statik ve geçici dinamik nonlineer analizler arasındaki farklılıklar gibi konulara değinilmiştir.

6.2.2.1 Nonlineer Çözüm Akış Diagramı



Şekil 6.13 Nonlineer çözüm akış diagramı

Şekil 6.13'deki akış diagramı, nonlineer bir analiz için genel ÇÖZÜM aşamalarını gösterir. Genel olarak, nonlineer bir analizde çalışmanın zorluğu SOLUTION aşamasında ortaya çıkar. SOLUTION'da nonlineer bir analiz için fazlaca bilgisayar zamanı gerekir.

6.2.2.2 Nonlineer Çözüm Tablosu

Statik ya da geçici dinamik nonlineer analizlerde kullanılabilen bütün SOLUTION komutları, aşağıda gösterilen tabloda liste halinde verilmiştir. Bu bölümde detaylı bir şekilde bu komutlardan bazıları ele alınmıştır.

Tablo 6.1 ile ÇÖZÜM aşamasının büyük bir resmini vermek amaçlanmıştır. Böylece komutların hangi aşamada hangi seçeneklerle gerçekleştirdiği anlaşılmaktadır.

Tablo 6.1 Nonlineer çözüm tablosu

1.SOLUTION'a giriş:

/SOLU

2.Analiz tipini ve analiz seçeneklerini belirlemek:

ANTYPE,...
NLGEOM,...
SSTIF,...
NROPT,...
EQSLV,...

3.Yük adım seçeneklerini belirlemek:

Genel seçenekler:

TIME,...
DELTIM,...
NSUBST,...
AUTOTS,...
KBC,...
TREF,...

Dinamik seçenekler:

TIMINT,...
TINTP,...
ALPHAD,...
BETAD,...

Nonlineer seçenekler:

CNVTOL,...

NEQIT,...

NCNV,...

PRED,...

LNSRCH,...

CRPLIM,...

Çıkış kontrolleri:

OUTPR,...

OUTRES,...

ERESX,...

Doğum ve ölüm seçenekleri:

ESTIF,...

EKILL,...

EALIVE,...

MPCHG,...

4.Yükleri uygulama:

F,...

D,...

5.Database'i kaydet ve çöz:

SAVE,...

SOLVE

6.Yük adım seçeneklerini ve yükü değiştir; yeni yük adımlarını çöz:

(Gerekli olduğu takdirde yukarıdaki komutları tekrarla)

...

7.SOLUTION'dan ayrılmadan database'yi kaydet:

SAVE

FINISH

Buraya kadar verilen tabloda çözüm aşamasının bütün aşamaları verilmiş oldu.

6.2.2.3 Nonlineer ve Lineer Çözüm Arasındaki Farklar

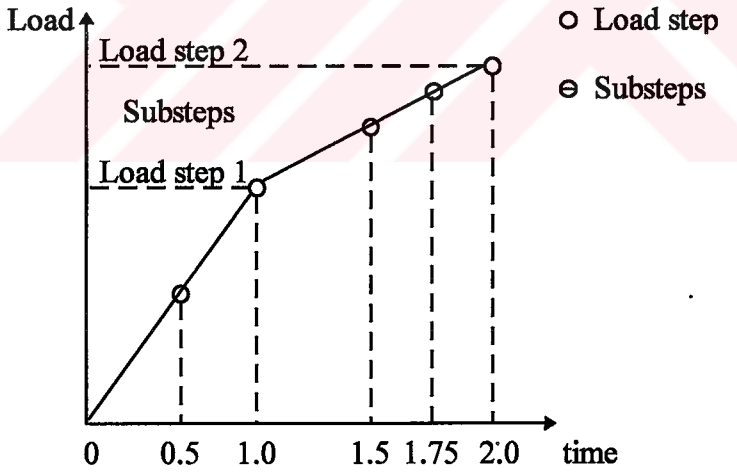
Nonlineer bir çözüm aşağıda sıralanan ilave özelliklerle karakterize edilir.

1. Yüklemeyi daha küçük yük akışlarına böler.
2. Dengeleme iterasyonlarının nasıl çalıştığını kontrol eder.
3. Yakınsanmış bir çözüm elde etmeye yardımcı olur.
4. Yakınsanmamış olaylardaki davranışıda programla kontrol eder.
5. Nonlineer bir çözümün herbir adım süresince oluşturulmuş geniş hacimli bilgileri yönlendirir.

6.2.2.4 Nonlineer Çözüm Organizasyonu

Bir nonlineer çözüm üç aşamalı bir işlemle organize edilir:

1. Yük adımları (load steps).
2. Alt adımlar (substeps).
3. Denegeleme iterasyonları (equilibrium iterations).



Şekil 6.14 Yük ve alt adımlar.

Şekil 6.14'de yük adımları (load steps), zaman (time) eksenindeki değerlere karşılık gelmektedir. Yük adımları arasında yükler lineer olarak değişir. Ayrıca her yük adımı arasına programda ayrıca altadımlar (substeps) yada zaman adımları (time

steps) doğrudan belirlenebilir. Her altadımda program yakınsanmış bir çözüm elde etmek için bir adet dengeleme iterasyonu (equilibrium iterations) oluşturur.

6.2.2.5 ANSYS'de "Time"ın Anlamı

"Time" bir izleme parametresi olarak bütün statik ve geçiçi analizlerde, onların gerçekten zamana bağlı olup olmadığından bağımsız kullanılır. Her yük adımı ve alt adımı "time"ın özel bir değerine karşılık gelir. Ayrıca altadım zaman adımı olarakta bilinir. Dengeleme iterasyonu "time" değerinin değişimi ile ilgili değildir. Her alt adımın dengeleme iterasyonu time'ın tek anında gerçekleşir.

ANSYS de "time" şu özelliklere sahiptir:

1. "time"pozitif ve sıfırdan farklı olmalıdır.
2. "time" devemlı şekilde artar.(saat tıkla ile asla durmaz)
3. "time" herhangi bir uygun birim terimi ile tanımlanabilir. Gerçekten, "time" kronojik bir birim olarak belirtilmek zorunda değildir.

Geçiçi bir analizde yada değişken statik analizde, "time" dakika yada saat birminde kronojik bir zamanı gösterir. Her yük adımının sonunda "time" yük eğrisinde belirtilir.

Bununla beraber, değişken olmayan analizlerde, "time" yük adımlarını ve altadımları belirleyen basit bir "sayıcı" dır. Program otomatik olarak 1.yük adımının sonunda time=1.0, 2.yük adımının sonunda time=2.0 olarak alır. Bir yük adımı içindeki bütün altadımlarda ise yaklaşık lineer olarak time değeri atanır.

Hem statik analiz hemde geçici analizler "time" kullanır.

Geçici dinamik: $[M]\cdot\{u\}+[C]\cdot\{u\}+[K]\cdot\{u\}=\{F\}$

Statik: $$[K]\{u\}=\{F\}$$

BÖLÜM 7

BİR DA MOTORUNUN ANSYS İLE MAGNETİK ALAN ANALİZİ

Bu bölümde, P=30 kW, U=440 V ve n=1500 d/dak'lık doğru akım motorunun ANSYS programı ile magnetik alan analizi yapılmıştır. Daha önceki bölümlerde yer alan bilgilerden faydalanarak modelin hangi aşamalarla oluştuğunu bizzat uygulama üzerinde gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar motorun geleneksel metodla bulunmuş sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Motora ait fiziksel ve elektriksel büyüklüklerinden bazıları şunlardır:

Bazı fiziksel büyüklükler:

Motorun dış çapı	:0.8	m
Motorun endüvi çapı	:0.34	m
Motorun boyu	:0.21	m
Motor esas kutup sayısı	:4	
Motor yardımcı kutup sayısı	:4	
Endüvi oluk sayısı	:51	

Bazı elektriksel büyüklükler:

B_{ba}	=1.3035 Tesla	(Endüvi boyunduruğu için)
$B_{d\,max}$	=2.3100 Tesla	(Endüvi dişleri için)
$B_{\delta max}$	=0.7550 Tesla	(Hava aralığı için)
B_p	=1.4550 Tesla	(Kutuplar için)
B_{bs}	=1.3000 Tesla	(Stator boyunduruğu için)
$B_{\delta y}$	=1.6760 Tesla	(Yardımcı kutup hava aralığı için)

Bu girişten sonra doğru akım motorunun modellenmesi, önceki bölümlerde anlatılan analiz safhalarına uygun olacak şekilde anlatılmıştır.

7.1 Doğru Akım Motorunun Modellenmesi

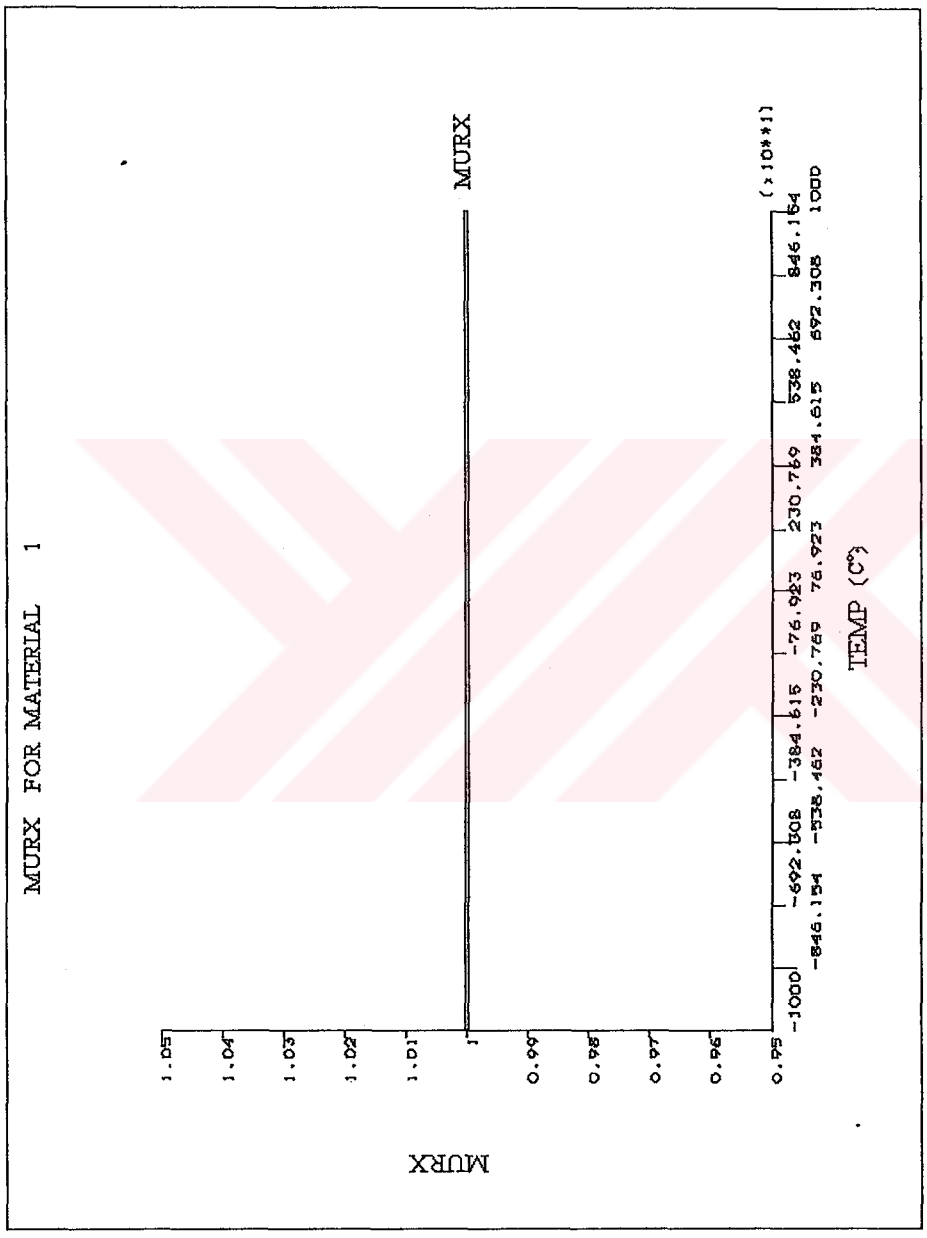
Motorun modellenmesi iki metotla oluşturulabilir. Bunlardan birisi "katı modelleme" (solid modeling) diğeri ise "doğrudan sonlu elemanlar ile modelleme". Bunlardan ikincisi motor geometrisinin doğrudan "düğüm" (node) ve "eleman" (element) ile tanımlanması olup karmaşık modellerde uygulaması oldukça güçtür. Biz bu problemde katı modelleme metodunu uyguladık. Modelimize öncelikle malzeme özelliklerini ve eleman tipini tanımlayarak başladık.

7.1.1 Malzeme Özelliklerinin Tanımlanması

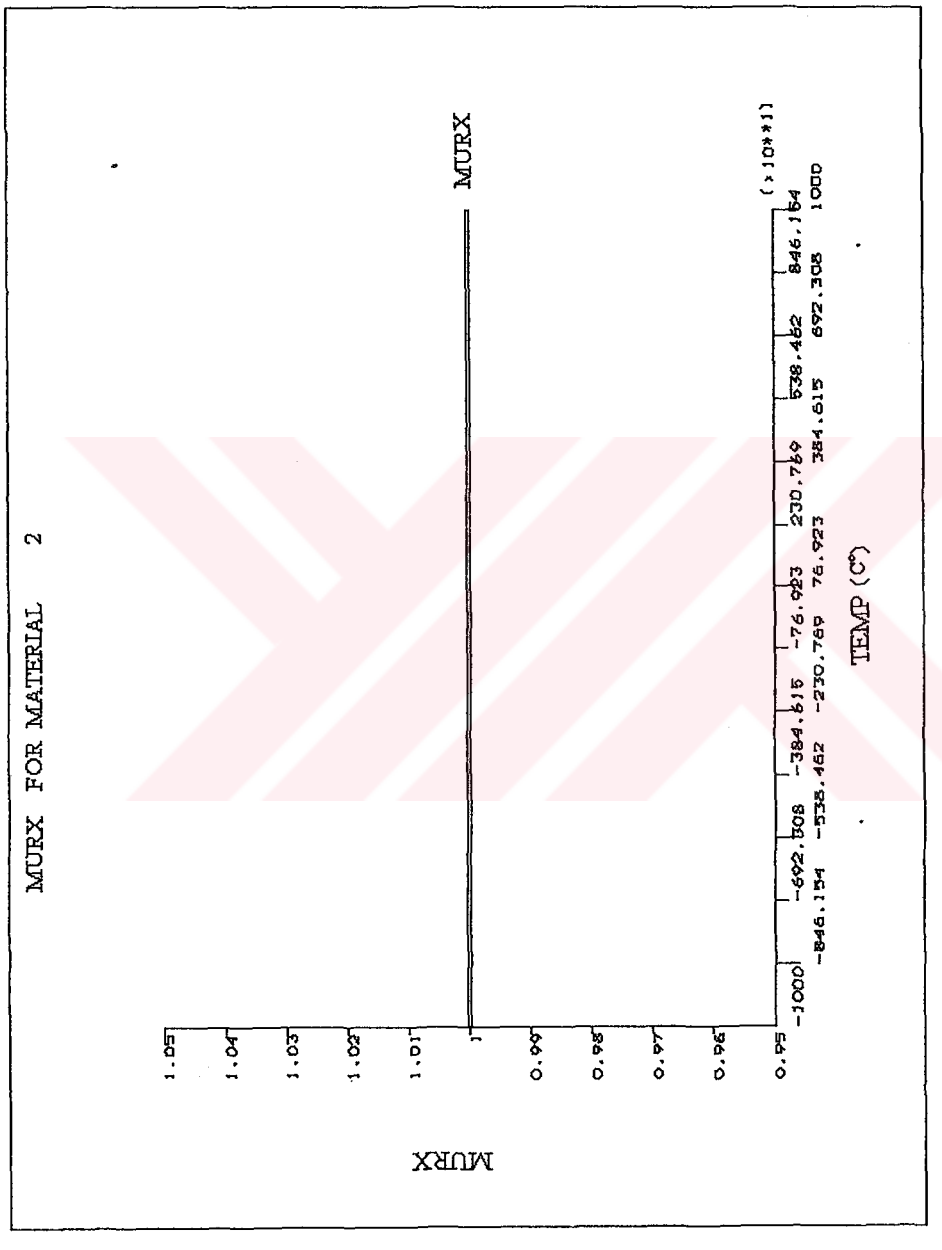
Burada motorun imalatında kullanılan malzemelerin modele uygulanışı açıklanmıştır. Motorun endüvi ve kutuplarında dinamo saçı ve stator boyunduruğunda ise dökme çelik kullanılmıştır. Bunlara ait mıknatıslanma (B-H) eğrileri motorun diğer bilgileri gibi [1]'den alınmıştır. Bunların yanısıra modelde motor sargıları ve hava aralığına ait malzeme özellikleri de gerekmekte olup bunlarda aynı kaynaktan alınmıştır. Bütün bu malzemeler tek tek ANSYS'de tanımlanmştır.

Amacımız motora için elektromagnetik analiz yapmak olduğundan malzeme özelliklerini, B-H eğrileri ve bağıl geçirgenlikleri tanımladık. Bunlara ait bilgiler önceki bölümlerde verilmiştir. Hava için $\mu_{rx}=1$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca sargı malzemeleri içinde $\mu_{rx}=1$ olarak alınır. Görüldüğü gibi malzemeler lineer özellik göstermektedir. Diğer taraftan doymalı bölgelere ait B-H eğrileri tablo halinde noktasal olarak verilir ve çizdirilir. Bu malzemelerde nonlineer özelliklere sahiptirler.

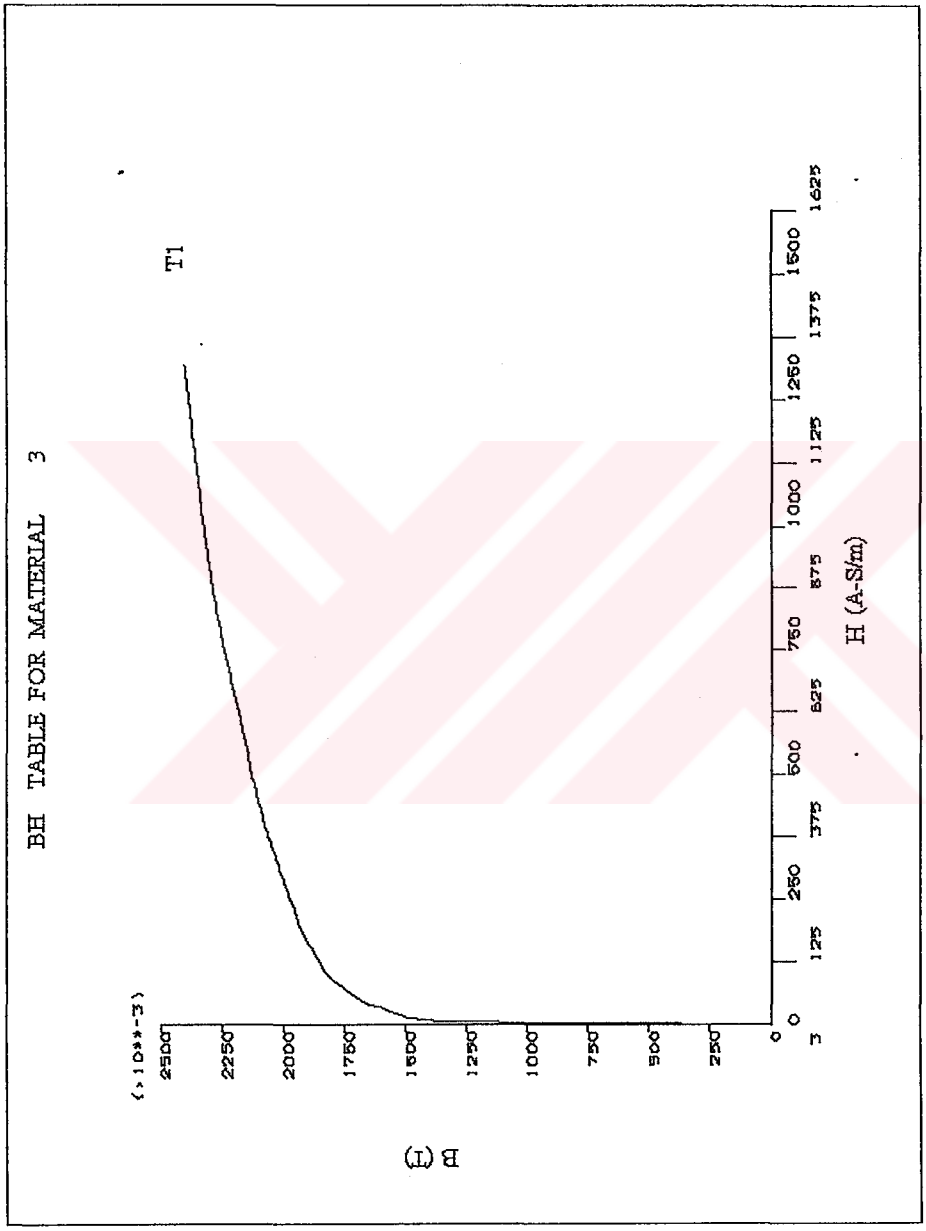
Nonlineer davranışlara ait ayrıntılı bilgi ise Bölüm 6'da verilmiştir. Böylece 4 adet malzeme özelliği modelimiz için tanımlanmış bulunuyor. Aşağıdaki şekillerde bu malzeme özelliklerini gösteren eğriler verilmiştir. Bunlardan Şekil 7.1 ve Şekil 7.2 lineer özellikte, Şekil 7.3 ve Şekil 7.4 ise nonlineer özelliktedir.



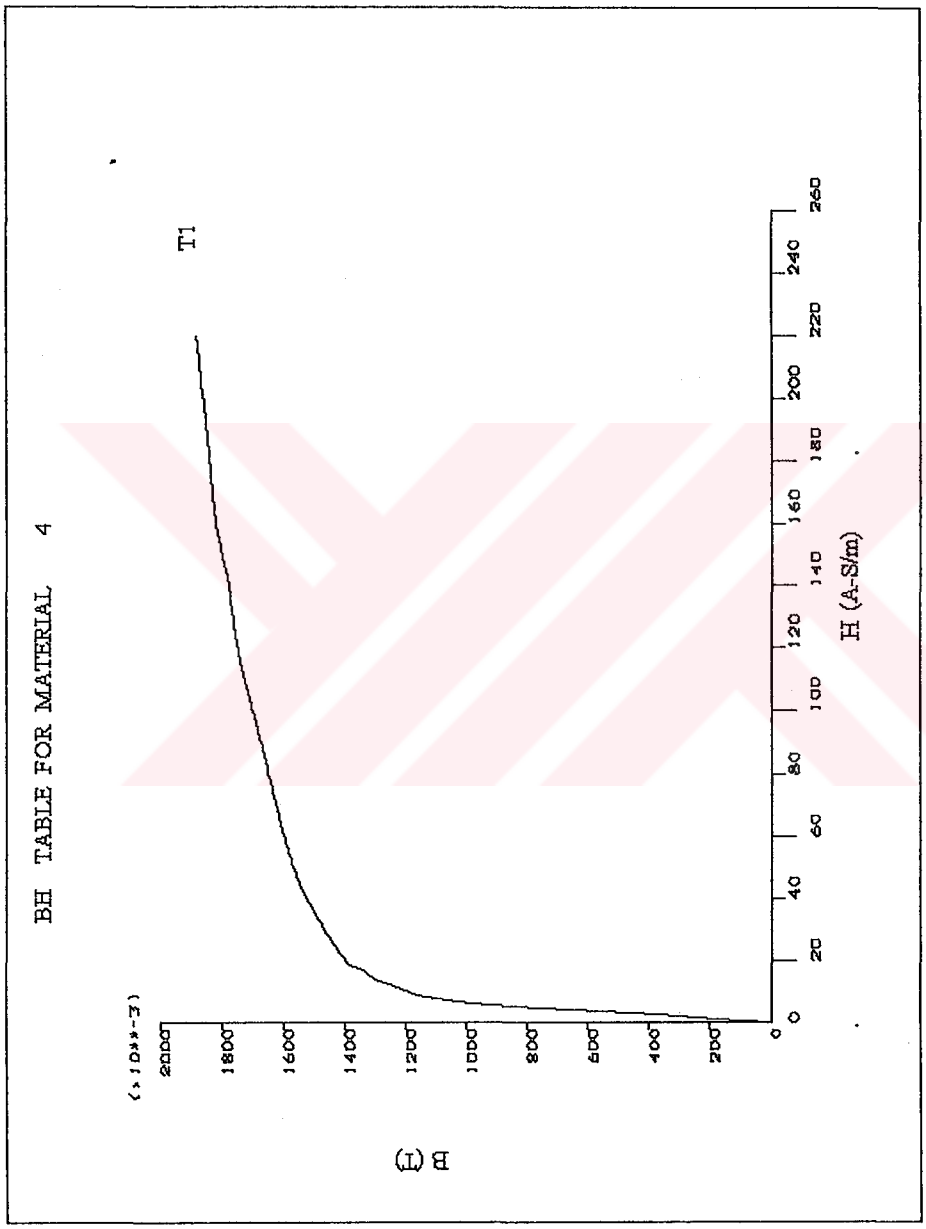
Şekil 7.1 Hava için malzeme özelliği.



Şekil 7.2 Sargılar için malzeme özelliği.



Şekil 7.3 Dinamo saç için malzeme özelliği.



Şekil 7.4 Dinamo demir için malzeme özelliği.

7.1.2 Modelde Kullanılan Eleman Tipinin Tanımlanması

Burada katı modelimizede oluşturacağımız elemanların hangi özellikte olacağını belirleyeceğiz.

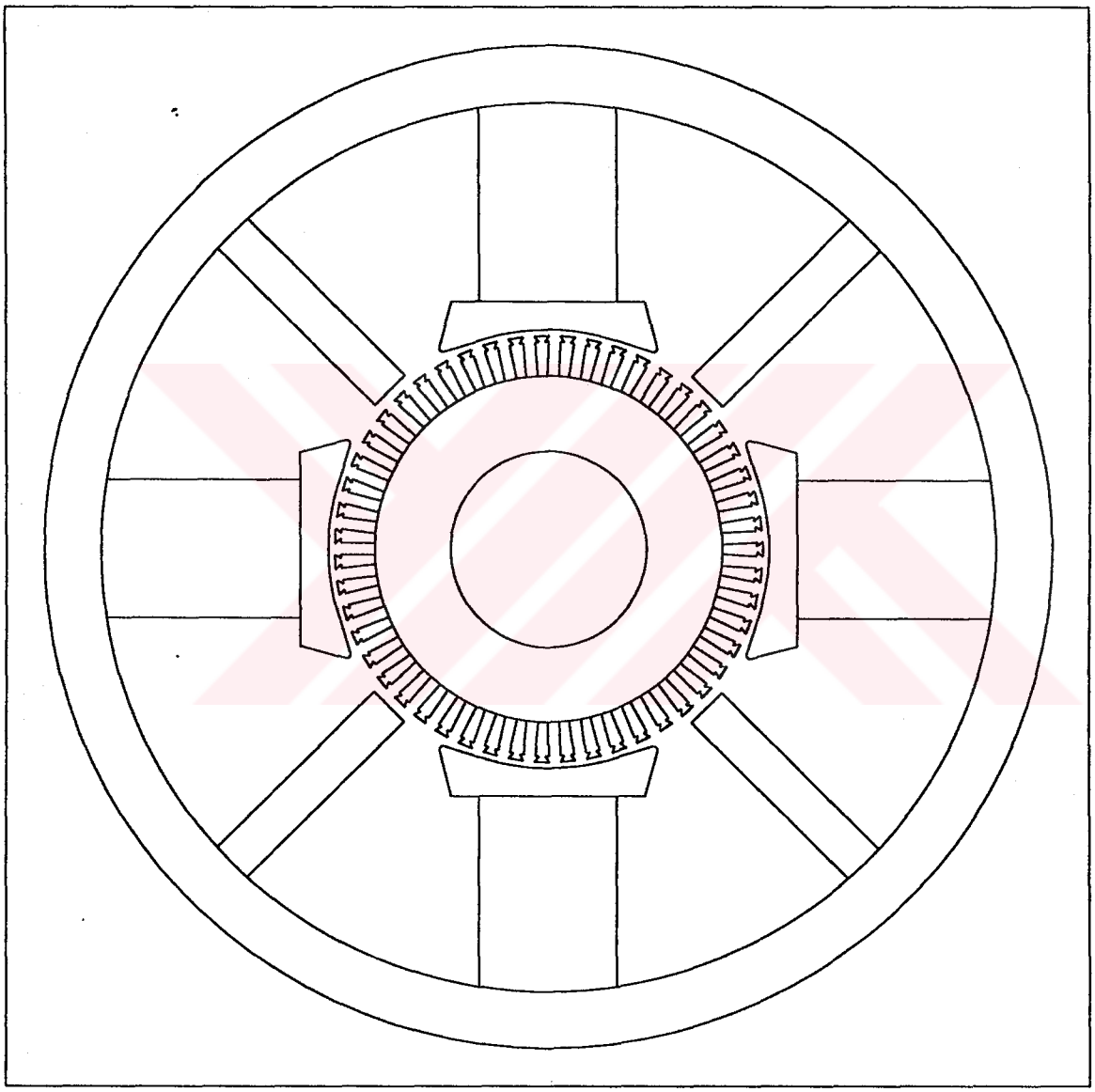
İki boyutlu elektromagnetik analizler için ANSYS'nin eleman kütüphanesinde hangi elemanlar olduğunu ve bunların özelliklerini Bölüm 5'te anlatmıştık. Burada o elemanlar içinden PLANE 13 elemanı seçilmiştir. Bu eleman 4 düğümlü dörtgen (üçgen şeklide mevcut) birinci dereceden bir elemandır.

Analizin çok daha yakınsanmış sonuçlar vermesi için ikinci dereceden, yani dörtgen elemanlar için 8 düğümlü (PLANE 53) olması gerektiği açıktır. Bir modelde düşük hassasiyetli bölgeler için birinci dereceden bir eleman (örneğin 4 düğümlü PLANE 13), yüksek hassasiyetli bölgeler içinde ikinci dereceden bir eleman (örneğin 8 düğümlü PLANE 53) seçilebilir. Fakat bu hem modelimizi daha karmaşık hale getirecektir, hemde düğüm sayısı oldukça artacaktır. Bu sebeple biz modelde sadece tek bir eleman tipi tanımladık.

7.1.3 Motorun Katı Modellemesi (Solid Modeling)

Katı modelleme bahsine geçmeden önce belirmek gerekir ki, motorun geometrisine ait CAD çizimi ACAD programındanda alındı. Biz bu çizim dosyasını IGES formatında aldık ve ANSYS programına transfer ettik. ACAD 12 versiyonu NURBS geometri özelliğini desteklemediği için o ortamda çizilen "spline"ler gerçek spline özellik taşımamaktadır. Bunun içindir ki ACAD çiziminde tek bir çizgi (line) ANSYS ortamında çok sayıda çizgiye karşılık gelmektedir. Çünkü ANSYS, NURBS geometrik özelliği kullanır.

Bundan dolayı transfer edilen dosyadaki çizimin gözden geçirilerek gerekli yerlerde düzeltmeler gerekmektedir. Bu da biraz zaman alıcı olduğu için bu şekildeki bir transfer işleminden daha sonra vazgeçilmiştir. Fakat ACAD 13 ile birlikte NURBS özelliğinin kullanılması, bu tür uyumsuzlukları aşmak için önemli bir katkı sağlayacağını umut ediyoruz. Şekil 7.5'de motorun tamamına ait geometrisi verilmiştir. Bizim problemimiz üç boyutlu analiz gerektirmediği için iki boyutlu model yeterli olmuştur.



Şekil 7.5 Doğru akım motorunun geometrisi.

Geometriyi oluştururken "nokta" (keypoint), "çizgi" (line) ve "alan" (area) 'lardan faydalanılmıştır. Katı modelimiz bunlardan oluşmaktadır. Katı modellemede amaç geometrinin bütün bölgelerini, nokta ve çizgileri kullanarak alanlarla tanımlamaktır. Eğer üç boyutlu bir model amaçlanmış olsaydı, bütün bölgelerin "hacim" (volume) ile tanımlanması gerekecekti.

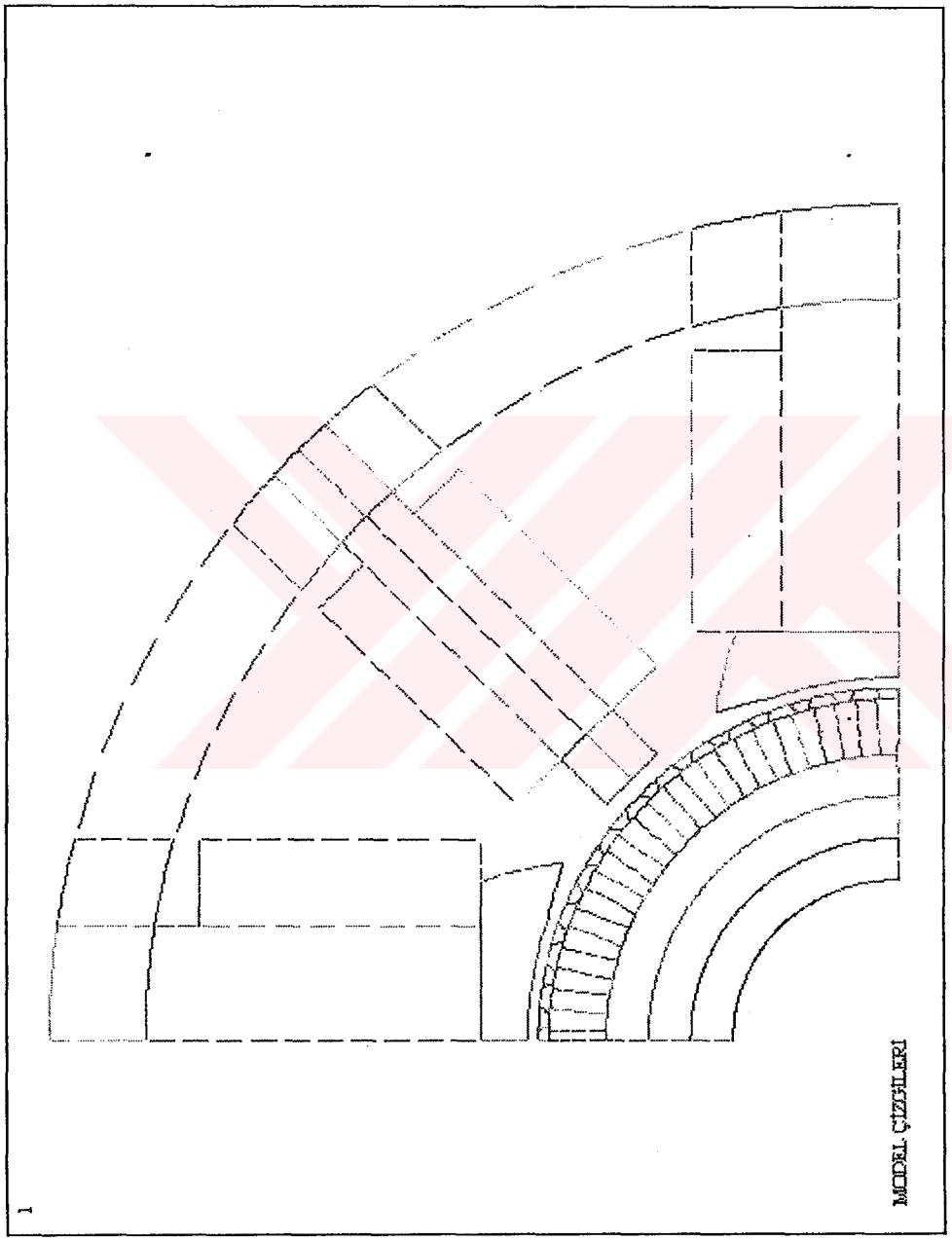
ANSYS'de iyi bir sonlu elemanlar model için, katı modelin çok iyi düşünülerek oluşturulması gerekmektedir. Oluşturulan katı modelden sonlu elemanlar modeline geçileceği için, yüksek hassasiyetli bölgelerin düzgün ve küçük alanlarla ve az hassasiyetli bölgelerin ise yine düzgün ama büyükte olabilecek alanlarla belirlenmesi , bu geçişi başarılı kılacaktır. Aksi takdirde sonlu elemanlar modeline geçildiğinde bir çok bölgedeki bozukluklar bizim tekrar başa dönmemizi zorunlu kılacaktır ki buda bizim için zaman kaybıdır.

Sonlu elemanlar modelindeki en büyük problemlerden birisi eleman ve düğüm sayısının fazla olması bilgisayar hafızasının yetersiz kalmasınına sebep olur. Ayrıca hard disktede büyük bir yer çalışma için ayrılır. Özellikle çözüm aşamasında zaman oldukça artar ve sistem yavaşlar. Bunun için modeli oluştururken belli simetri özellikleri kullanılırki bunlar Bölüm 5'te anlatılmıştır. Böylece motorun geometrisininin dörtte birini modelledik. Şekil 7.6'de modelin çizgilerle nasıl oluşturulduğu görülmektedir.

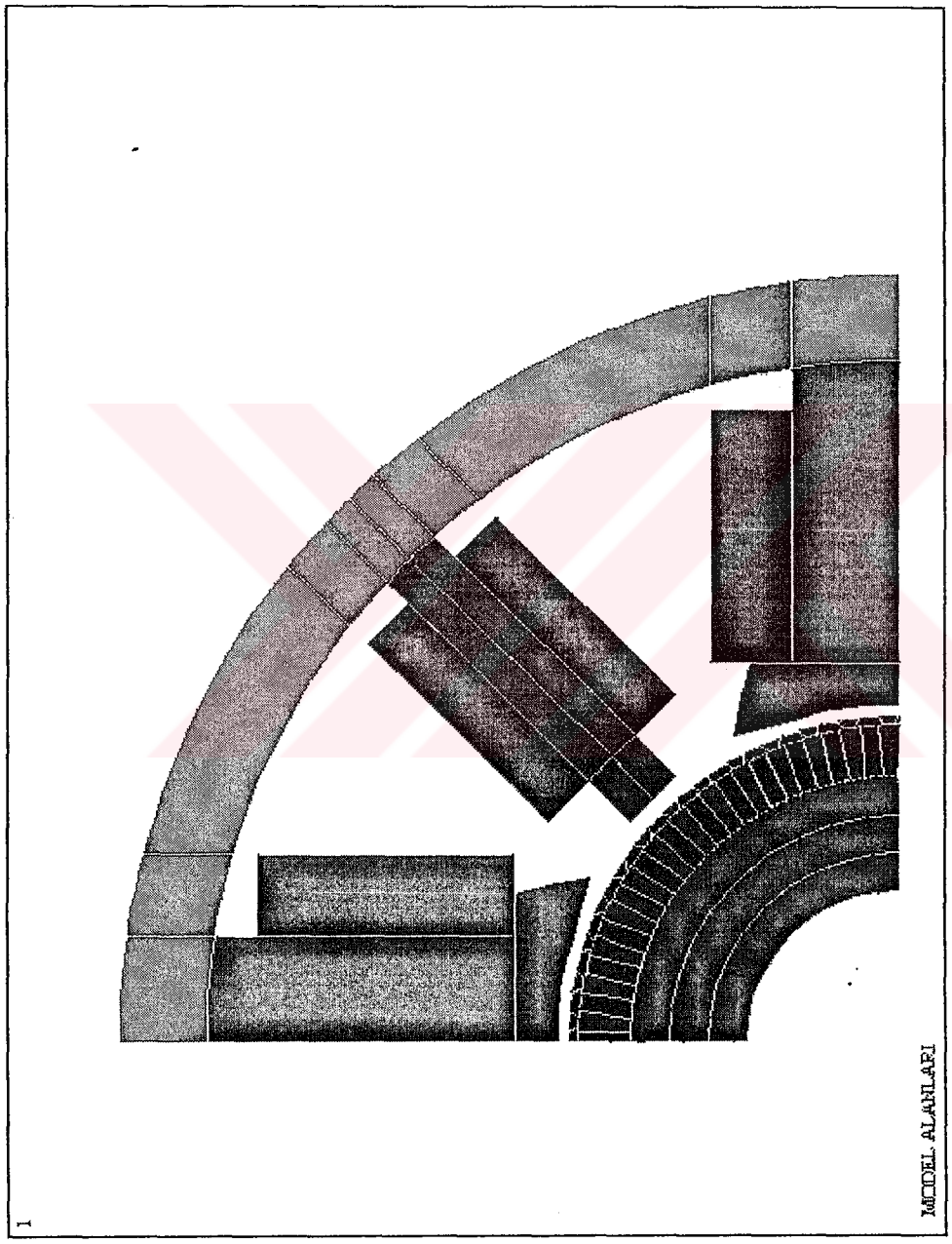
Burada stator, kutup ayağı ve rotorun iç kısımları daha uzun çizgilerle tanımlanırken, özellikle hava aralığı, rotor dişi ve rotor oluğu daha kısa çizgilerle tanımlanmıştır. Böylece alanları oluştururken bu çizgiler bize kolaylık sağlayacaktır.

Katı modelimizde hava aralığı ve ona komşu bölgeler yüksek hassasiyetli bölgeler olduğu için buralarda daha küçük ama düzgün alanlar tanımlanmıştır. Rotorun doymalı demir kısmı aynı malzemeden oluşmasına rağmen bu bölge tek bir alanla tanımlanabilecekken, biz hem oluğu hemde dişi iki alanla tanımladık. Şekil 7.7'de modelin alanlarla nasıl tanımlandığı gösterilmiştir.

Verilen alan şekillerinden de görüleceği gibi alanlar (zorunluluktan kaynaklanan birkaç istisna hariç) dörtgenler şeklindedir. Çünkü sonlu elemanlar modelindeki elemanların dörtgen şeklinde olması isteniyor. Biliyoruz ki, iyi analiz sonuçlarına



Şekil 7.6 Modelin "çizgiler"le gösterimi.



Şekil 7.7 Modelin "alanlar"la gösterimi.

ulaşmak için sonlu elemanlar modelini çok iyi oluşturmak şarttır. Bunun için modelde mümkün olduğunca tek tip ve düzgün elemanlar oluşturulmalıdır. Bu ise yukarıda açıkladığımız şekilde gerçekleşir. Böylece bazı bölgeler çok küçük dörtgen alanlara bölünmüştür. Bir diğer ayrıntı ise dörtgen alanları tanımlarken eğer bir zorunluluk yoksa (ki bu zorunluluk bir alanın bir kenarına iki alanın komşu olmasıdır) sadece dört çizgi kullanmaktır.

Amacımız rotorun değişik pozisyonları için alan dağılımının incelenmesi olmamakla birlikte bir iki hususu belirtmek istiyoruz. Böyle bir amaç için motor geometrisinin tamamını modellememiz gerekirdi. Ayrıca hava aralığını radyal yönde de iki alanla tanımlamamız gerekirdi ki, hava aralığının tam ortasında bu iki alanın temasından bir çizgisel arakesit oluşsun. ANSYS ile oluşturulan böyle bir modelde bazı komutlar rotorun dönüşü ile bağlantılı olarak bu çizgisel arakesit boyunca düğümlerin komşu elemanlarla ilişkilerini korur ve her pozisyon için ayrı bir model oluşturma zahmetinden bizi kurtarır. Böylece rotorun herbir pozisyonu için elde edilen sonuçlar bazı grafik özellikler yardımıyla animasyon oluşturularak gösterilebilmektedir. ANSYS dökümanlarından konuyla ilgili daha ayrıntılı bilgi alınabilir.

Katı modeli oluştururken dikkat edilmesi gereken bir diğer hususta, modelin bütün bölgelerinin süreksizlik olmayacak şekilde alanlarla tanımlanması gerekmektedir. Ayrıca alanlar üstüste çakışık olmamalıdır, aksi takdirde elemanlar oluşturulurken hatalar oluşur. Buradan da anlaşılacağı üzere motorun içinde kalan hava bölgeleri de tanımlanmak zorundadır. Özellikle kutup ile endüvi arasında kalan dar hava aralığında alanların çok iyi yerleştirilmelidir.

7.1.4 Modelde Ağın Oluşturulması (Mesh Generation)

Katı modelden sonlu elemanlar modeline geçmek için bütün işlemler tamamlanmıştır. Katı modeli elemanlara ayırma işlemine "ağ oluşturma" (mesh generation) denmektedir. Ağ oluşturma işlemi, katı modelimizdeki tanımlanmış bölgelerin tek tek ele alınarak elemanlara ayrılmasıdır. Bu aşamada katı modelimizdeki alanların hepsini elemanalara ayırdık.

Ağ oluşturmadaki en önemli husus bu işleme modeldeki en yüksek hassasiyetli bölgelerden başlamaktır. Çünkü komşu alanlarda elemanlara ayrılırken o alanlardaki elemanlar temel alınarak oluşturulur. Bir alandaki elemanları oluşturan düğümler komşu alandaki elemanları oluşturan düğümlerle aynı olmalıdır, yani komşu alanlar farklı alanlar içinde olsalarda aynı düğümü paylaşmalıdır. Aksi halde modelde süreksizlikler oluşacaktır.

Bunu önlemek için üstüste olan veya birbirine çok yakın düğümleri tek bir düğüm yapabilmek için ANSYS içinde kullanılan bazı metodlar var ki bize oldukça kolaylık sağlamaktadır. Yukarıda açıklanan gerekçeden dolayı (komşu elemanların aynı düğümleri paylaşması) geçişler çok sert olamamakta ve çok küçük elemanlarla tanımlanan alanların komşu alanları hemen büyük elemanlardan (ki o alan hassasiyetli bir bölgeyi temsil etse de) oluşturulamamaktadır.

Demekki ağ oluşturmaya en hassas bölgeden başlamak gerekiyor. Bu sebeple biz magnetik olayların yoğun olduğu ince bir şerit halindeki hava aralığı bölgesini öncelikle elemanlara ayırdık. Ve biz burada tanımlanan alana radyal yönde dört sıra eleman yerleştirdikki sonuçlarımız gerçek değerlere uygun çıksın, elbetteki bu alan tek sıra elemanlarla oluşturulabileceği gibi, daha fazla sırada elemanlarlada oluşturulabilir. Özellikle bilgisayar hafıza sorunu olmayanlar buradaki eleman tabakasını artırabilirler ki, ANSYS'nin bu konuda tavsiye ettiği bazı kriterler mevcuttur.

Hava aralığından sonra oluk ve diş alanlarını elemanlara ayırdık. Bu bölgelerde yine yüksek hassasiyetli olduğu için buralarda da oldukça küçük elemanlar oluşturduk. Ayrıca kutup ayağında biraz daha büyük, ama diğer bölgelerde daha büyük elemanlar oluşturuldu. Katı modelleme başlığı altındada belirttiğimiz gibi, alanlarımız iyi düşünülmüş ve dörtgen olarak tanımlanmış olduğundan elemanlarımızda hep dörtgen şeklinde oluşmuştur.

Buraya kadar anlatılanlar ANSYS'de düzgün ağ (mapped mesh) denilen metodla gerçekleştirilmiştir. Yani alanların dörtgen mi yoksa üçgen mi eleman şeklinden oluşacağını biz tesbit ediyoruz. Tabiiki böyle bir map mesh oluşturmak için alanları tek tek alıp onları oluşturan çizgilerin pozisyonlarını dikkate alarak ve bazı teknikler

kullanarak bu çizgileri öncelikle kaça bölüneceğini tesbit ettikten sonra o alan elemanlara ayrılmaktadır. Bu durumda oluşan elemanların hepsi dörtgen (veya üçgen) olmaktadır.

İkinci bir metotta ağ oluşturmak istediğimiz alanı seçip otomatik olarak program tarafından elemanlara ayrılmasıdır. Burada da o alanı oluşturan çizgilerin kaça bölüneceği tesbit edilmesine rağmen o alan içinde oluşacak elemanların şekli rastgele şekillerden ibarettir.

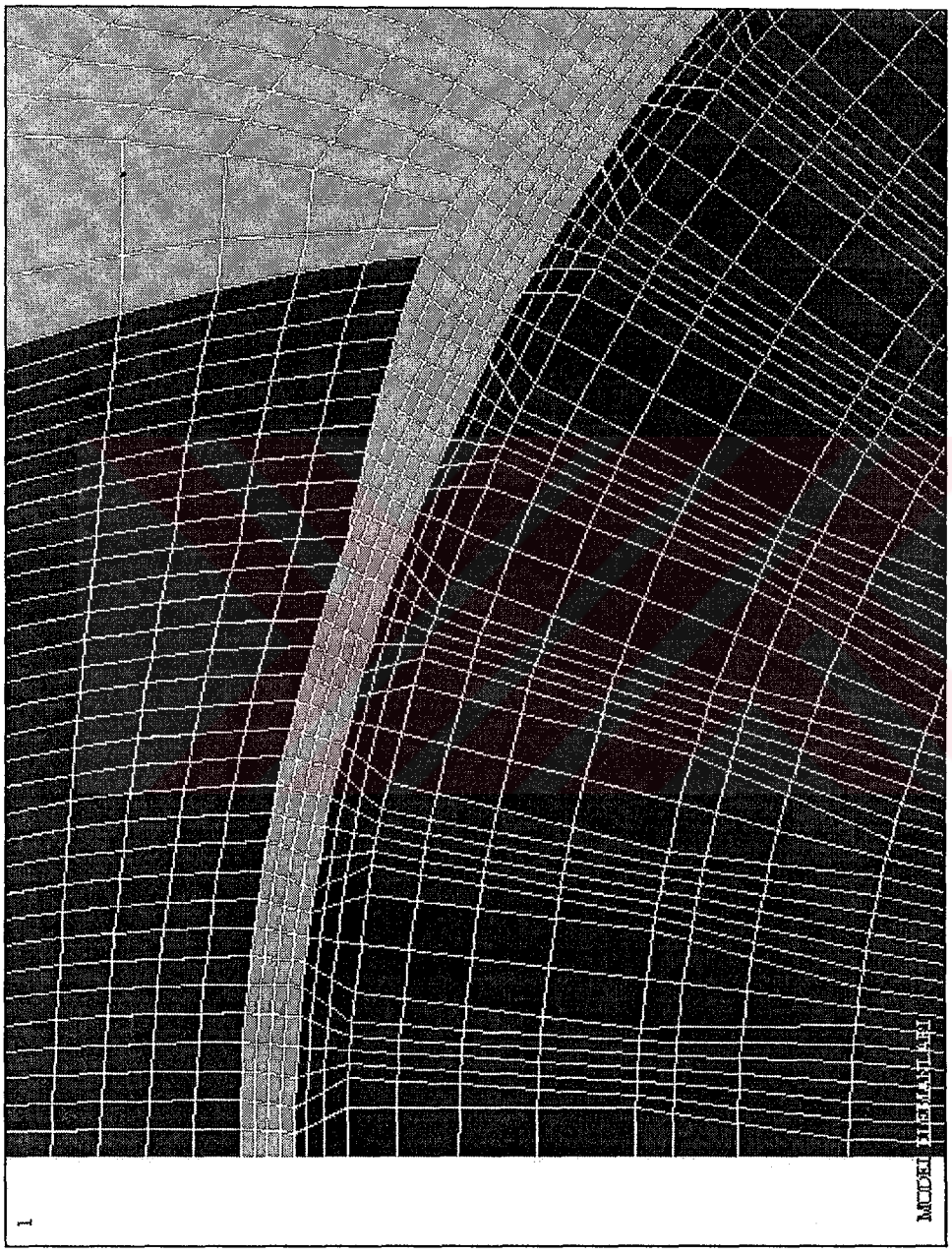
Dolayısıyla sonuçlarımızın güvenilirliği açısından potansiyel bazı problemler oluşabilmektedir. Çünkü bu durumda eleman sayısını ve eleman şeklini belirleyememekteyiz.

Bunlardan birincisi bize gereksiz büyüklükte bir model verirken, ikincisi bazı elemanların şekillerinin standartların dışına çıkmasına sebep olamaktadır. Çünkü sonlu elemanlar modeli içinde oluşan elemanların kener açıları belli değerlerin altında veya üstünde olduğunda sağlıksız sonuçlar vermektedir.

Bunlara karşı tedbir olarak, çözüm elde ettikten sonra ANSYS bize elemanlara ait hataları yüzde birimiyle verebilmektedir. Dolayısıyla o elemanları tekrar daha düzgün olarak oluşturduktan sonra alınacak sonuçlar bizi daha iyi sonuçlara götürecektir. Fakat burada ANSYS biraz daha özelliklerini geliştirmeli düşüncesindeyiz. Çünkü çözüm alındıktan sonra değilde, eleman modelini oluşturduktan sonra elemanlara ait hata yüzdeleri verilirse çok daha iyi olacaktır.

Şekil 7.8'de, tanımlı alanların elemanlara nasıl ayrıldığı göstermektedir. Elbette burada verilen elemanlar sadece bir bölgedeki alanlara aittir. Özellikle diş, oluk ve kutup için bu şekilleri vermeye çalıştık çünkü bu bölgeler daha öncede berirtildiği gibi modelimizin yüksek hassasiyetli bölgeleridir.

Elemanları oluştururken ilgili malzeme özellikleri ve eleman tipi ise her elemana atanmaktadır. Dolayısıyla model içindeki bütün elemanlar tanımlanmaktadır. Böylece sonlu elmanlar modelimiz tanımlanmıştır yani modelleme (PREP7) safhası tanımlanmış olup çözüm (SOLUTION) safhasına geçilecektir.



Şekil 7.8 Modelin "sonlu elemanlar"la gösterimi.

7.2 Motor Modelinin Magnetik Analiz Çözümü

Analizin çözüm safhasında yapılan işlemler başlıca üç aşamadan oluşmaktadır. Bunlar sınır koşullarının ve yüklerin uygulanması ile çözüm stratejisinin belirlenmesidir. Şimdi bunları tek tek ele alarak modelimize uygulayalım.

7.2.1 Modele Sınır Koşullarının Uygulanması

Elektromagnetik analizde düğümlerde aranan yaklaşım fonksiyonu vektör potansiyel olduğu için sınırlarda vektör potansiyele ait değerler belirlenmiştir.

Analizde öncelikle motorun yüksüz durumu incelenip daha sonrada yüklü durumu incelendiği için sınır koşullarıda buna bağlı olarak değişmektedir. Örneğin yüksüz durumda akı çizgileri bir ana kutuptan diğer ana kutba geçip devrini stator boyunduruğu üzerinden tamamlamaktadır. Akı çizgileri sınıra paralel bir yol izlemekte olup Dirichlet koşullarına uygun olarak, sınırlardaki vektör potansiyel değeri A_z=0 alınmıştır.

Halbuki yüklü durumda sadece endüviye akım uygulandığında ise akı çizgileri endüvinin ana kutuplara göre tam ortasından yardımcı kutuplar üzerinden yolunu tamamladığı için endüvinin iç kısmında ve stator boyunduruğunda A_z=0 olup, ana kutbun orta kesitini oluşturan sınırlarda sınır koşulu verilmemiştir. Çünkü akı çizgileri sınıra dik olup Neumann koşullarına uygun olarak sınırlarda koşul verilmemiştir. Bu konu ile ilgili ayrıntılar Bölüm 5'te anlatılmıştır.

7.2.2 Modele Yüklerin Uygulanması

Çözüm safhasında yükün uygulanışı ise sargılara akım yoğunluğu değerleri girilerek gerçekleştirilmiştir. Motorun geometrisinde sargılara ait bölgeler ayrı alanlar olacak şekilde tanımlanarak elemanlara o şekilde ayrılmıştır. Bu elemanlara malzeme özellikleri atanırken iletken sargı malzemesi özellikleri esas alınmıştır. Halbuki biz bilmekteyiz ki sargı bölgelerinde iletkenlerin yanısıra yalıtkan malzemelerde bulunmaktadır. Modelde karmaşılığı önlemek için bu yalıtkan bölgeler gözardı edilmiştir.

7.3 Modelin Magnetik Analiz Sonuçlarının Değerlendirilmesi

ANSYS programı, buraya kadar yapılan bütün işlemleri kendi komut ailesi ile tanımlanmış bir dosyaya kaydetmiştir. Programın hangi aşamasında neler yapıldığını öğrenmek için bu dosyaya bakmak yeterlidir. Fakat buradaki komutlar ANSYS içinde geçerli olup anlamlarını bilmek gerekir. Biz bu dosyanın çok uzun olmasından dolayı sadece bir kısmını (Ek-A)'da verdik. Bu dosya içinde genel olarak önemli safhaları göstermeyi amaç edindik

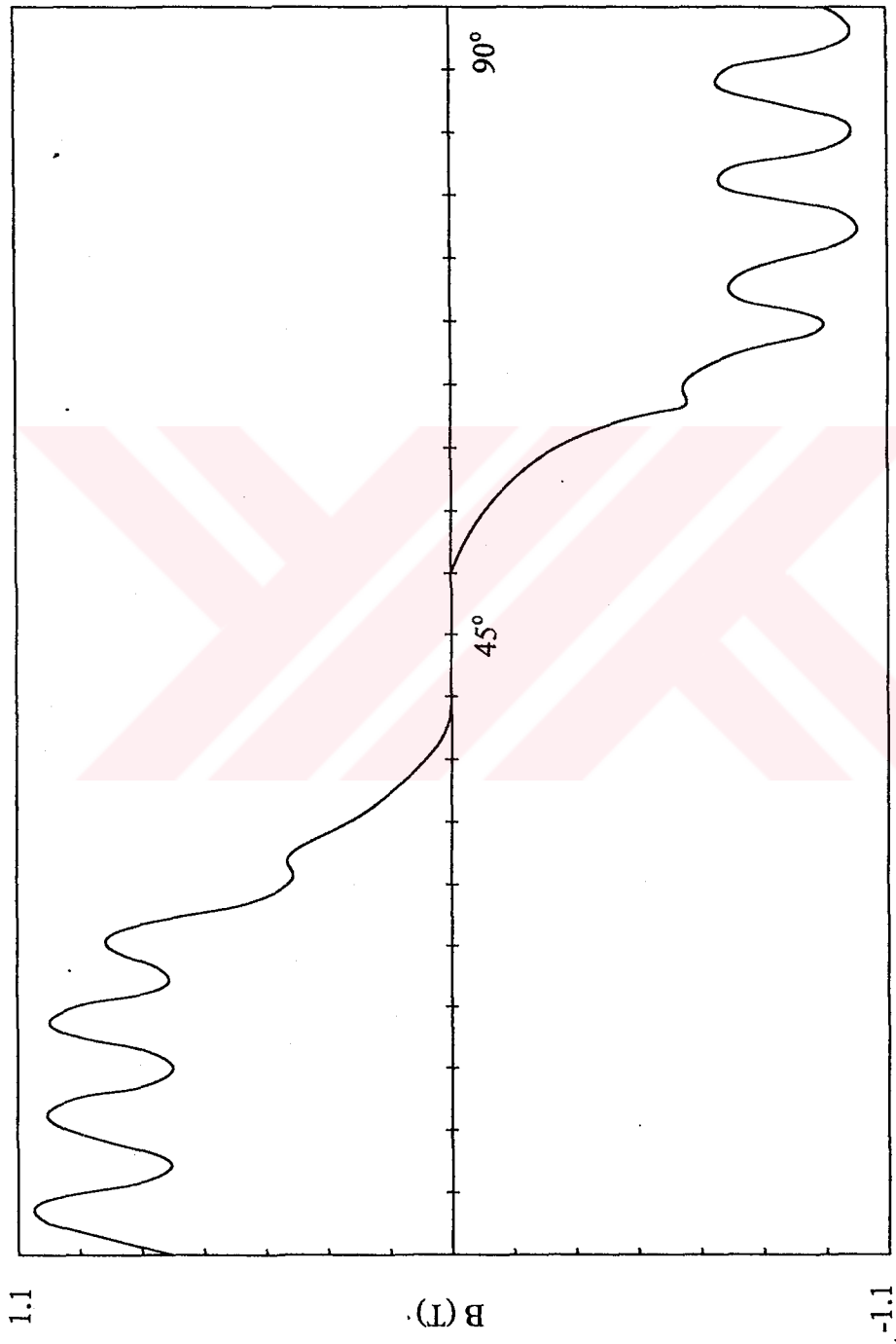
Bu bölümde motorun uyarma alan, endüvi alan ve yardımcı kutup alan eğrileri sırasıyla başlıklar halinde ele alınmış olup, ayrıca ANSYS'de bulunan diş dibi endüksiyonu ile geleneksel metodla bulunan diş dibi endüksiyonunun karşılaştırılması ve yorumu yapılmıştır.

7.3.1 Motorun Uyarma Alan Eğrisi

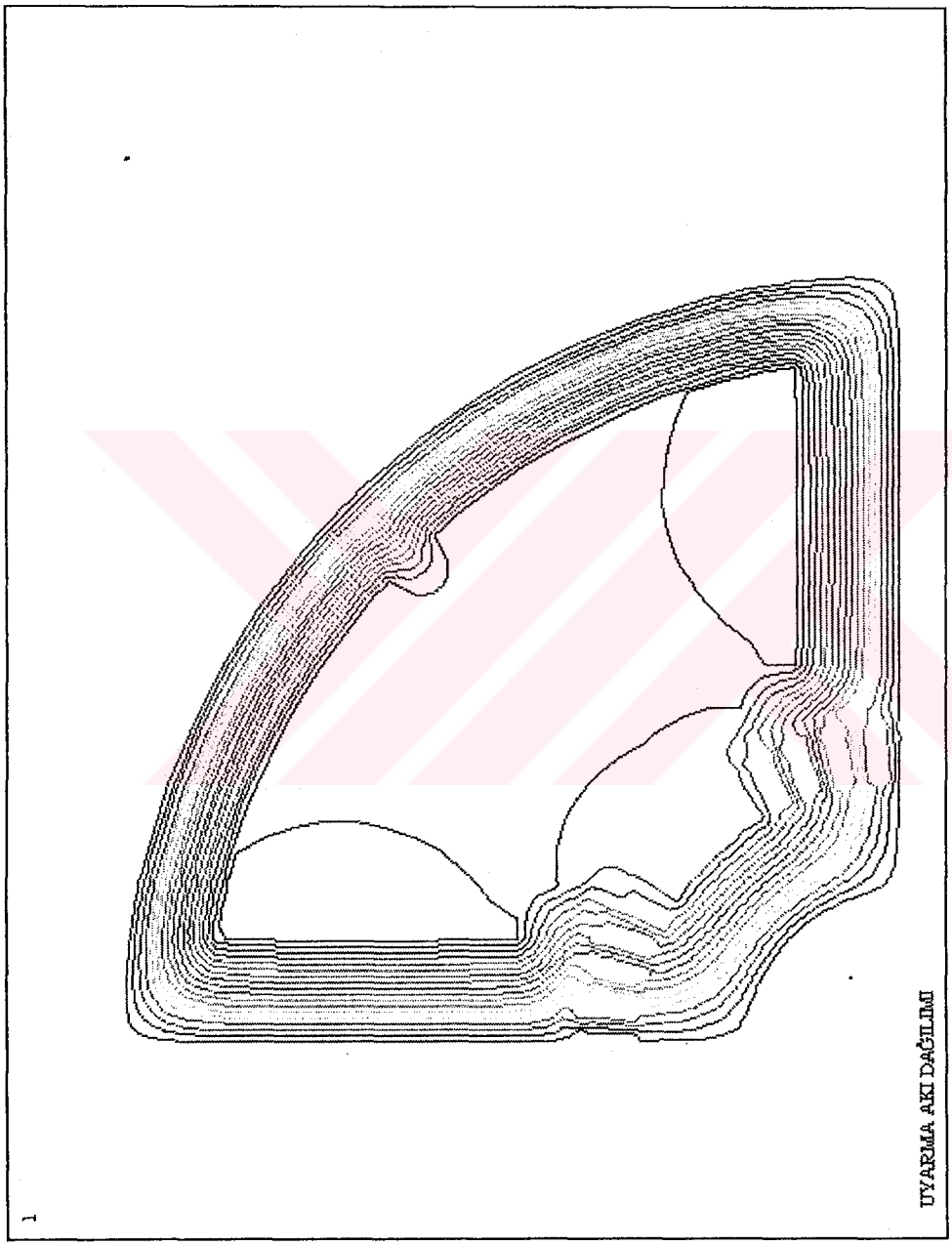
Şekil 7.9'da motorun hava aralığındaki uyarma alan eğrisi verilmiştir. Burada gerçek geometrinin dörtte biri modellendiği için alan eğrileri bir esas kutbun ortasından başlayıp öbür kutbun ortasına kadar devam etmektedir. Yani toplam 90^{o} 'lik bir açısal mesafe mevcuttur. Hava aralığı uyarma alanına esas alanda denilmektedir. Bu alan eğrisi kutup altlarında en büyük değerine ulaşırken geometrik nötr bölgede sıfır olmaktadır.

Bu şekle göre, özellikle kutup altlarına tekabül eden kısımlarda dalgalanmalar görülmektedir. Bunun nedeni kutup ile endüvi dişleri arasındaki relüktansın küçük, kutup ile endüvi olukları arasındaki relüktansın ise büyük olamasıdır. İşte bu sebeple alan şekli dalgalı elde edilmiştir. Geleneksel hesaplamalarla bu durumu tesbit etmek oldukça zordur. Dolayısıyla sonlu elemanlar metoduyla alan şekillerini gerçeğe çok yakın bir şekilde elde etmek mümkün olmuştur.

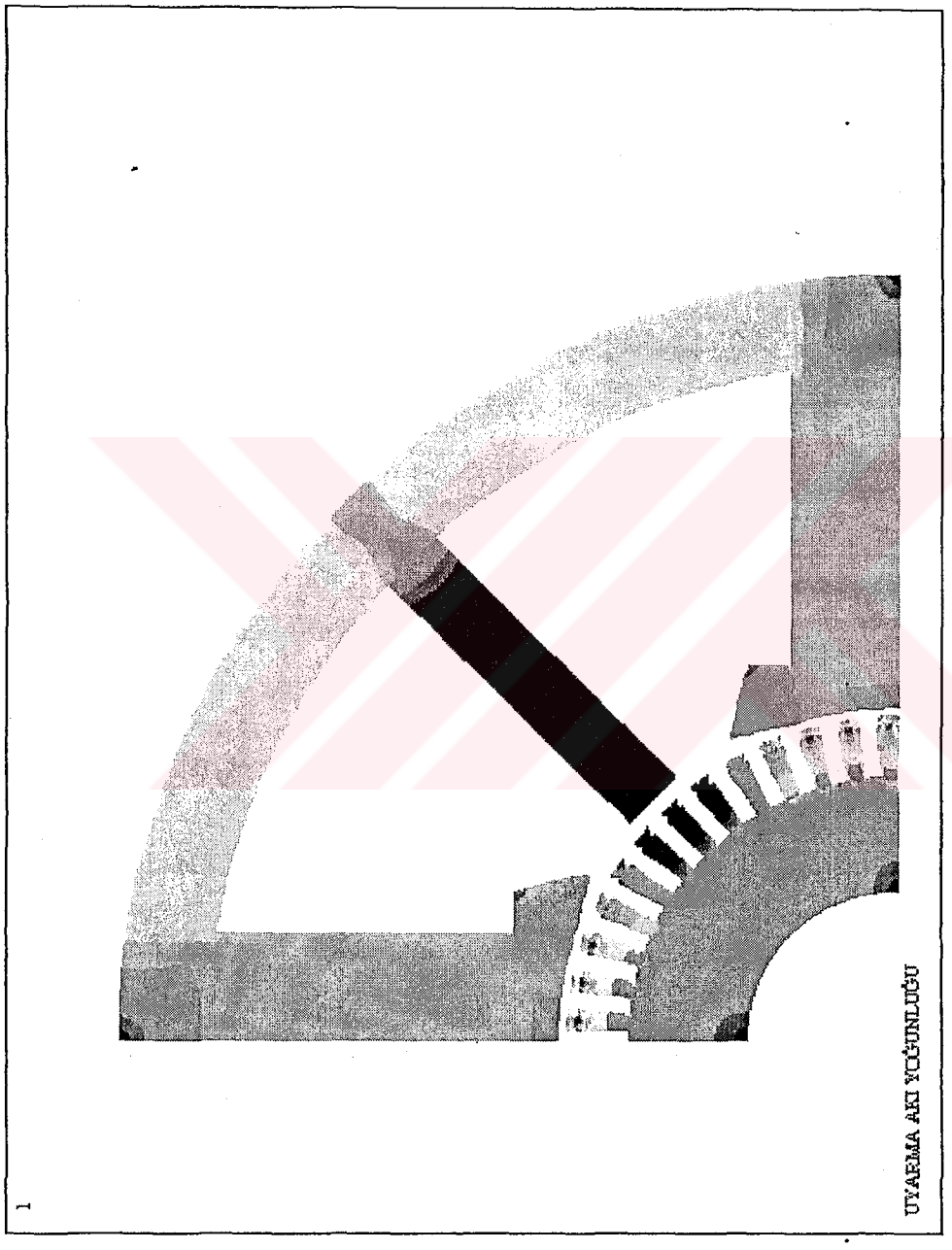
Şekil 7.10'da motorun uyarma durumu için vektör potansiyele ait analiz sonuçları akı çizgileri şeklinde verilmiştir. Buradan görüldüğü gibi akı çizgileri daha dar keside sahip endüvi dişlerinden geçerken sıklaşmaktadır. Bundan dolayı dişlerde akı yığılması gerçekleşmektedir. Bu ise B akı yoğunluğunun artması sonucunu doğuracaktır.



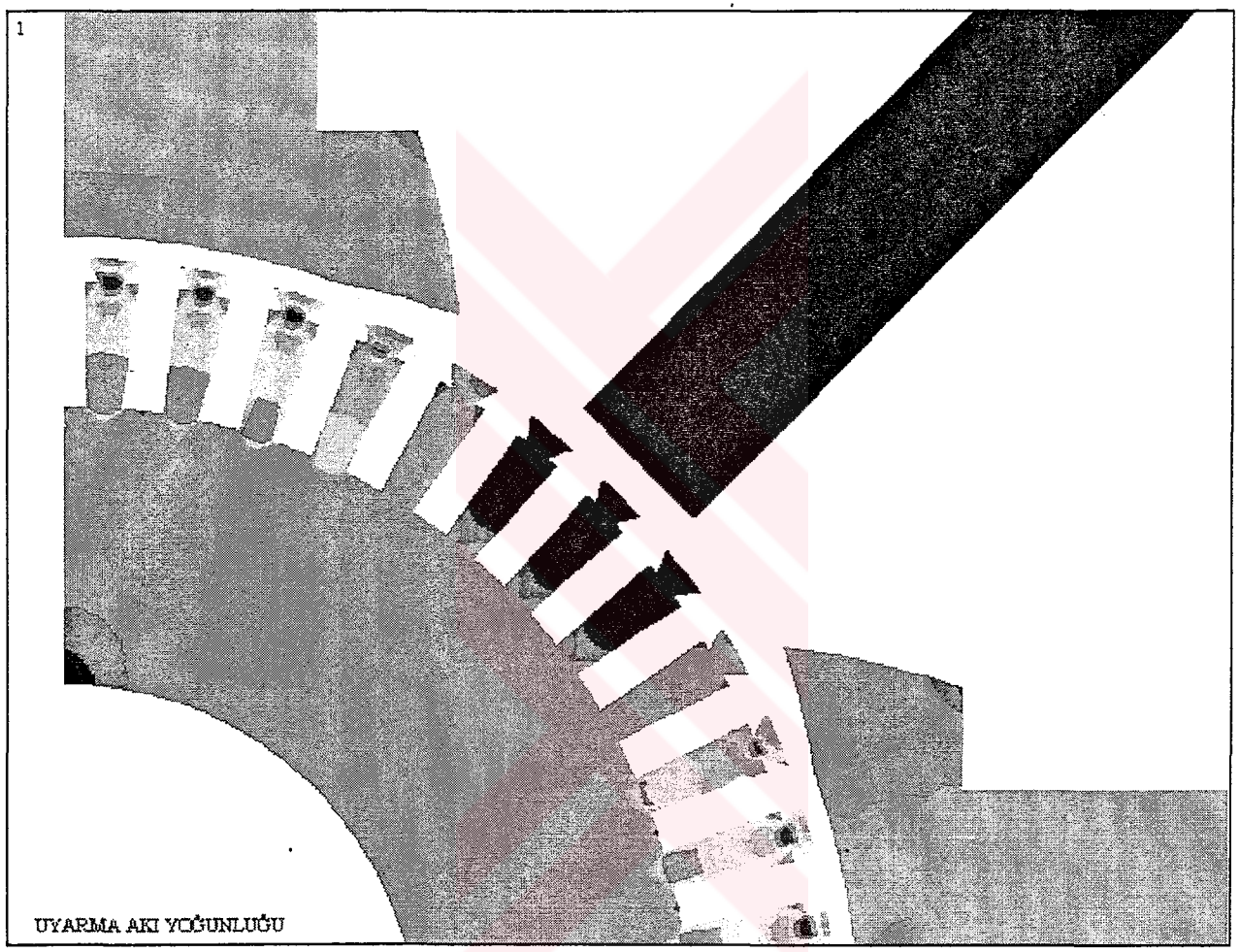
Şekil 7.9 Hava aralığı uyarma alan eğrisi.



Şekil 7.10 Uyarma için akı dağılımı.



Şekil 7.11 Uyarma için B akı yoğunluğu dağılımı.



Şekil 7.12 Uyarma için B akı yoğunluğu dağılımı (dişlerde).

7.3.1.1 Diş Endüksiyonu

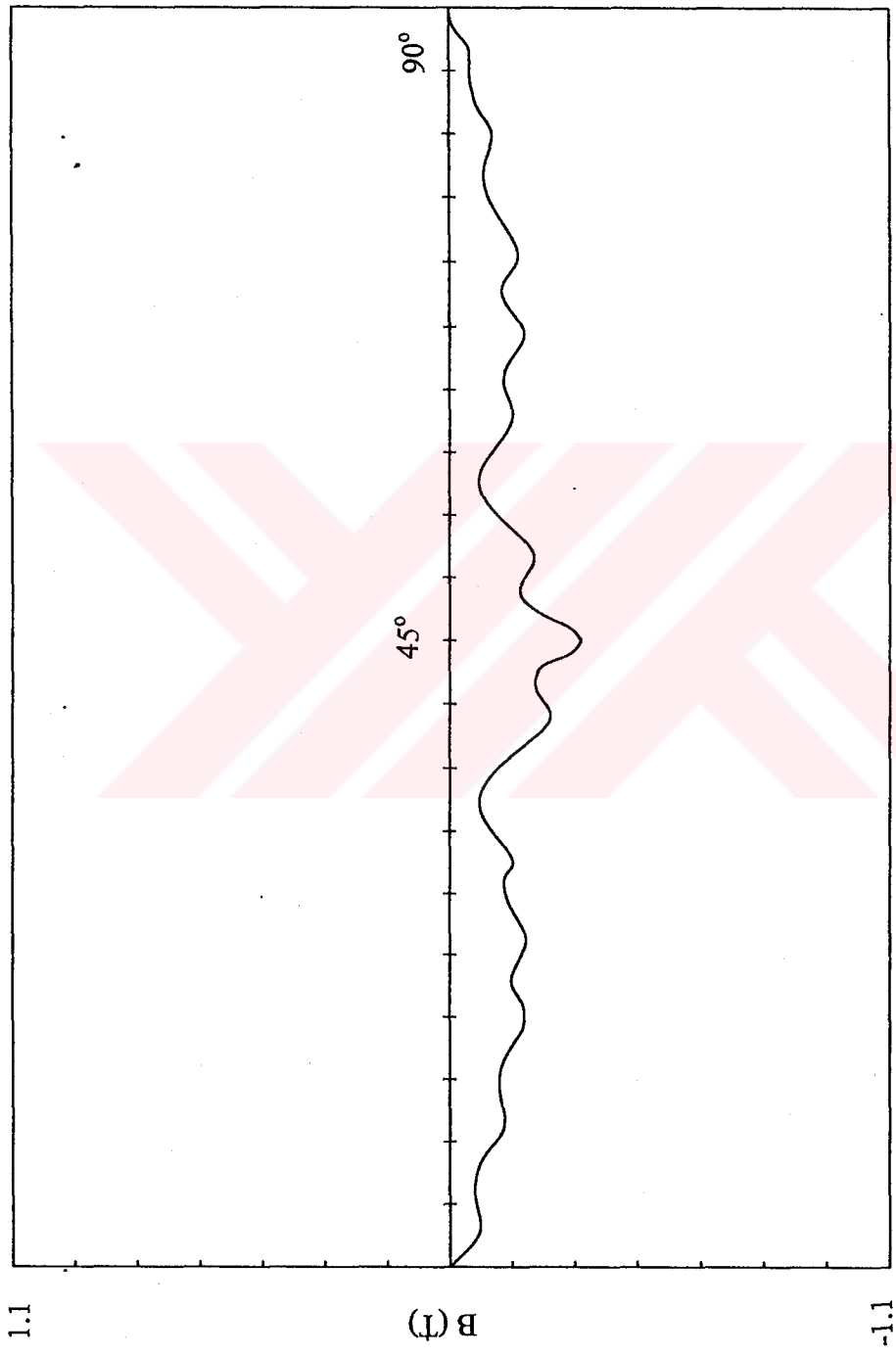
Şekil 7.11 ve Şekil 7.12'de motorun uyarma durumunda B akı yoğunluğuna ait analiz sonuçları verilmiştir. Bu şekillerdende görüldüğü gibi B endüksiyonu dişlerde yoğunlaşmıştır. Örnek alınan motorda diş dibi genişliği kama nedeni ile diş başındaki kama dibi genişliğinden büyüktür. Bu nedenle kama dibindeki endüksiyon akı yığılması nedeni ile en büyük değeri almaktadır.

Geleneksel hesaplarda müsade edilen en büyük diş endüksiyonu 2.5 Tesla olduğundan, burada tesbit edilmiş olan B_{dmax}=2.415 Tesla'lık endüksiyon müsade edilen sınırlar içindedir. Ayrıca bu metodla bulunan diş dibi endüksiyonu B_d=2.32 Tesla değerinde olup, geleneksel hesapla bulunan değere % 1-2'lik farkla hemen hemen eşittir. Buda göstermektedir ki sayısal metodlar magnetik alan analizlerinde tasarımcılara oldukça önemli avantajlar sağlamaktadır.

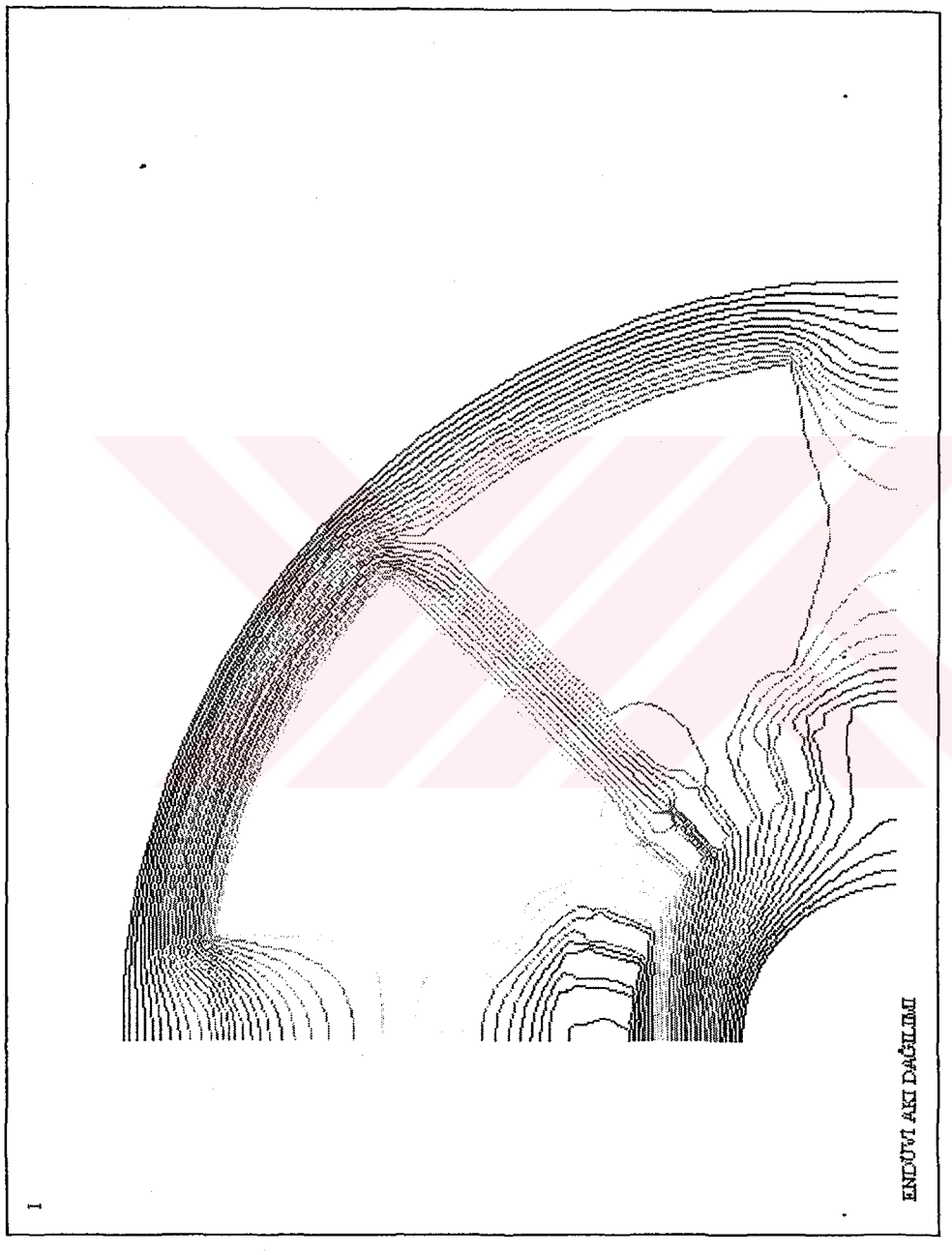
7.3.2 Motorun Endüvi Alan Eğrisi

Şekil 7.13'de motorun endüvisine akım uygulandığında elde edilen hava aralığı endüvi alan eğrisi verilmiştir. Eğriden görüldüğü gibi, esas kutup ortasında endüvi alanı sıfır olurken geometrik nötr bölgesinde en büyük değerini almaktadır. Literatürde verilen [14] ve [15] endüvi alan eğrilerinde geometrik noktada olukların bulunduğu kabulünden dolayı, çökümtüye uğramış olarak gösterilirken, bizim endüvi alan eğrimizde en büyük değerini almaktadır. Bunun nedeni, yardımcı kutup ile endüvi dişi arasındaki relüktansın küçük olmasıdır. Nitekim incelenen makalelerde [16] ve [17], rotorun pozisyonuna göre özellikle bu bölgedeki alan değerinin değiştiği görülmiştir.

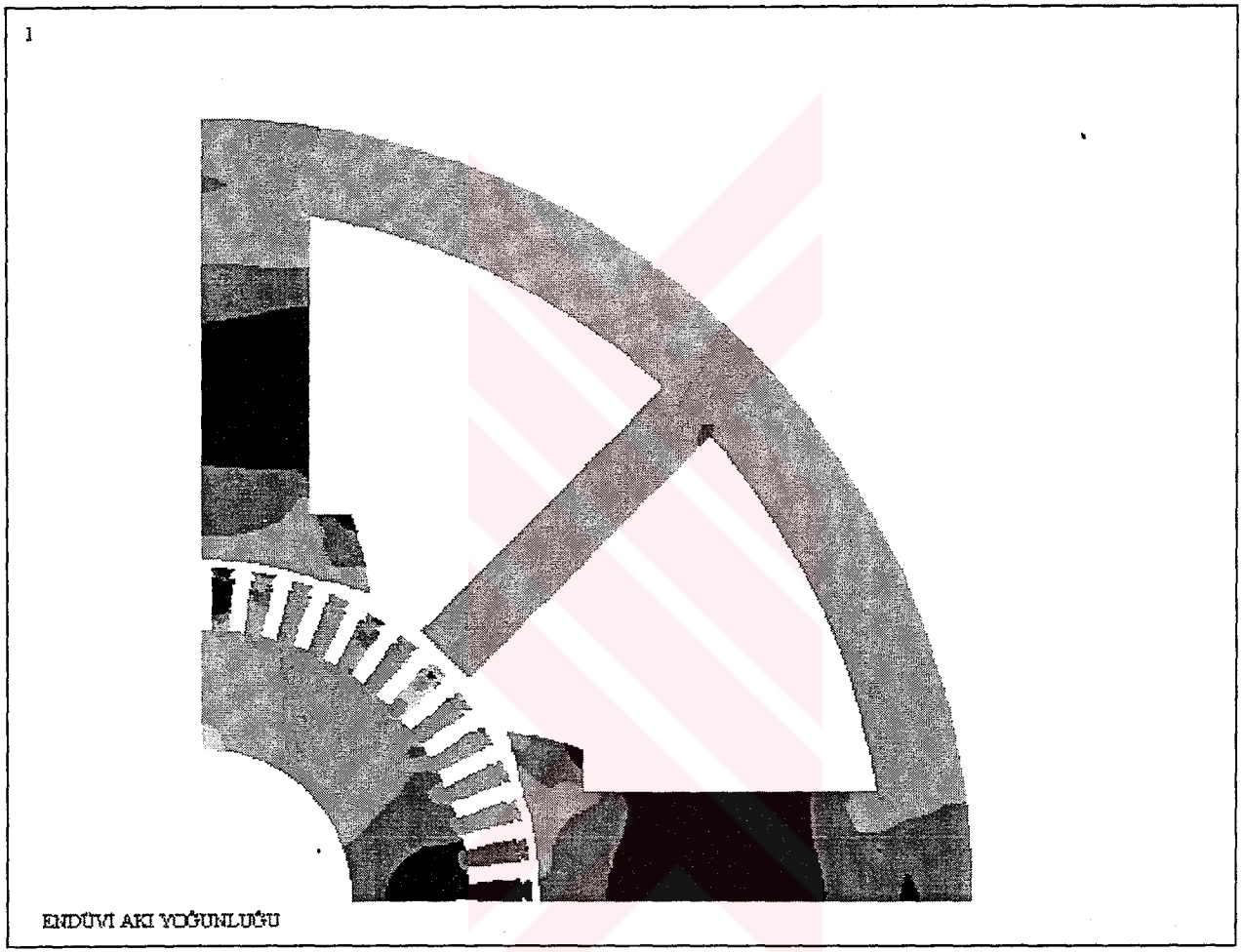
Endüvi alanının uyarma alanı üzerinde etkisi olarak bilinen endüvi reaksiyonu burada açık olarak görülmektedir. Kutup altlarına rastlayan bölgede kutbun bir ucunda uyarma alanını zayıflatırken diğer ucunda ise uyarma alanını güçlendirmektedir. Eğer Şekil 9 ve Şekil 13 üstüste çakıştırılacak olursa ki, bu motorun hem uyarma hemde endüvi sargılarında akım bulunduğu çalışma anına karşılık düşer, yukarıda ifade ettiğimiz olay kolayca görülebilir. Fakat malzemedeki doymadan dolayı toplam alandaki güçlenme zayıflamaya oranla daha azdır [14],[15].



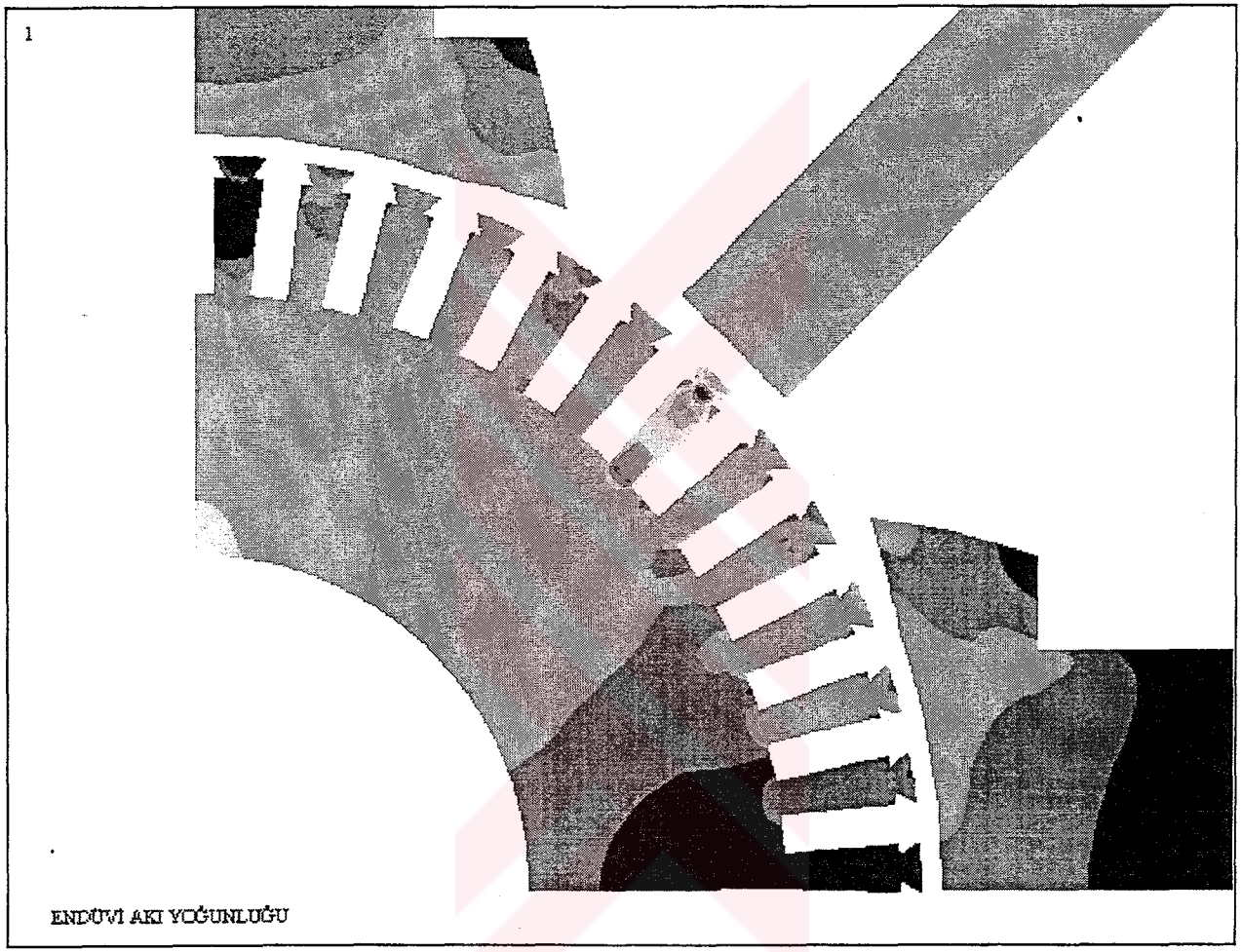
Şekil 7.13 Hava aralığı endüvi alan eğrisi.



Şekil 7.14 Endüvi için akı dağılımı.



Şekil 7.15 Endüvi için B akı yoğunluğu dağılımı.



Şekil 7.16 Endüvi için B akı yoğunluğu dağılımı (dişlerde).

Endüvi reaksiyonunun oluşturduğu en önemli olay toplam alanın geometrik nötr bölgede sıfırlanmasını engelleyerek fırçaların yerinin değiştirilmesine sebep olmasıdır. Burada bu konunun ayrıntısına girilmemekle birlikte geometrik nötr bölgenin magnetik nötr bölge ile çakıştırılmasını sağlamanın yollarından biri olan yardımcı kutup yerleştirmek konusu analiz sonuçlarınıda ele alarak değerlendirdik.

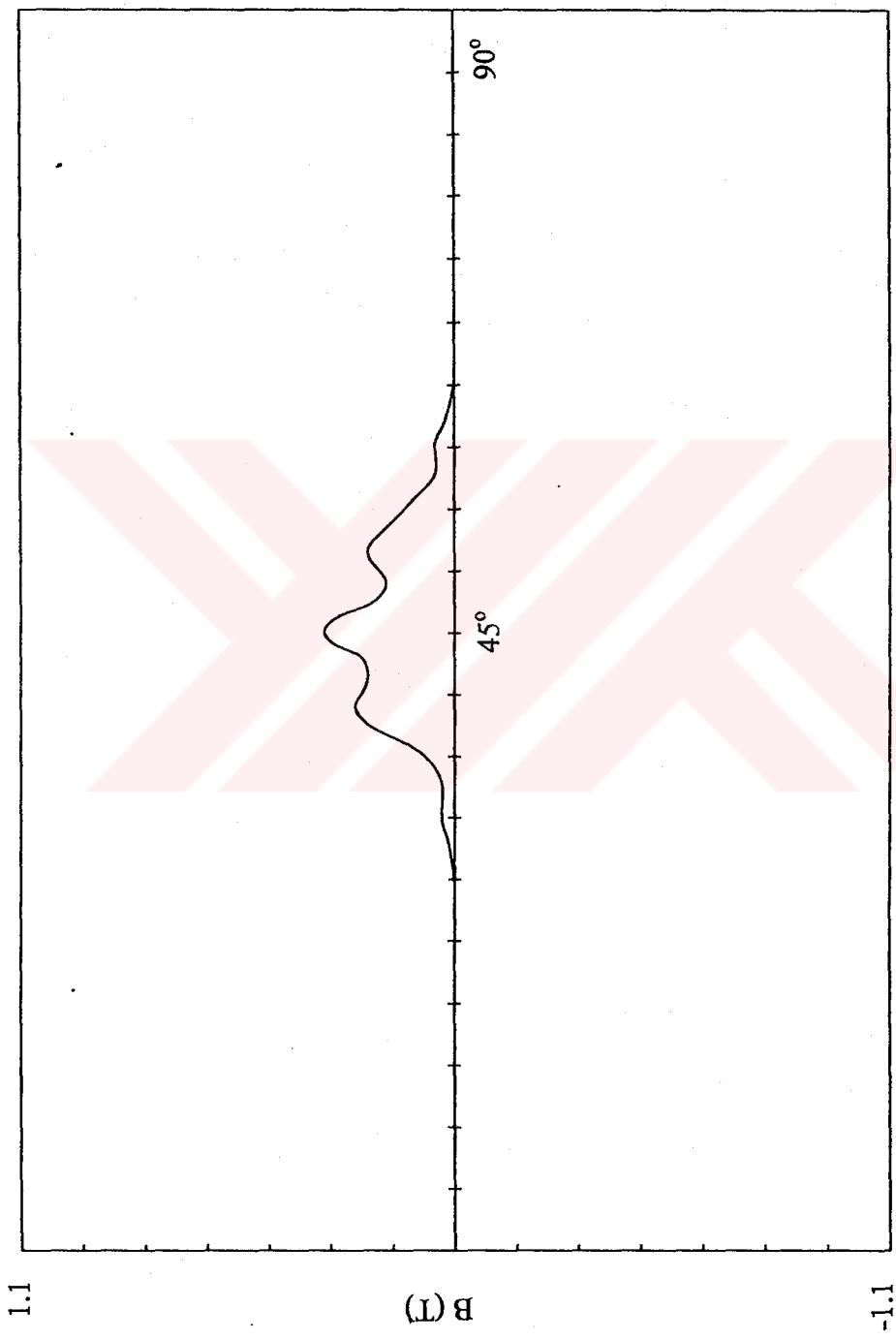
Şekil 7.14'de motorun endüvisi için vektör potansiyele ait analiz sonuçları akı çizgileri şeklinde ve Şekil 7.15 ve Şekil 7.16'da ise B akı yoğunluklarına ait analiz sonuçları verilmiştir.

7.3.3 Motorun Yardımcı Kutup Alan Eğrisi

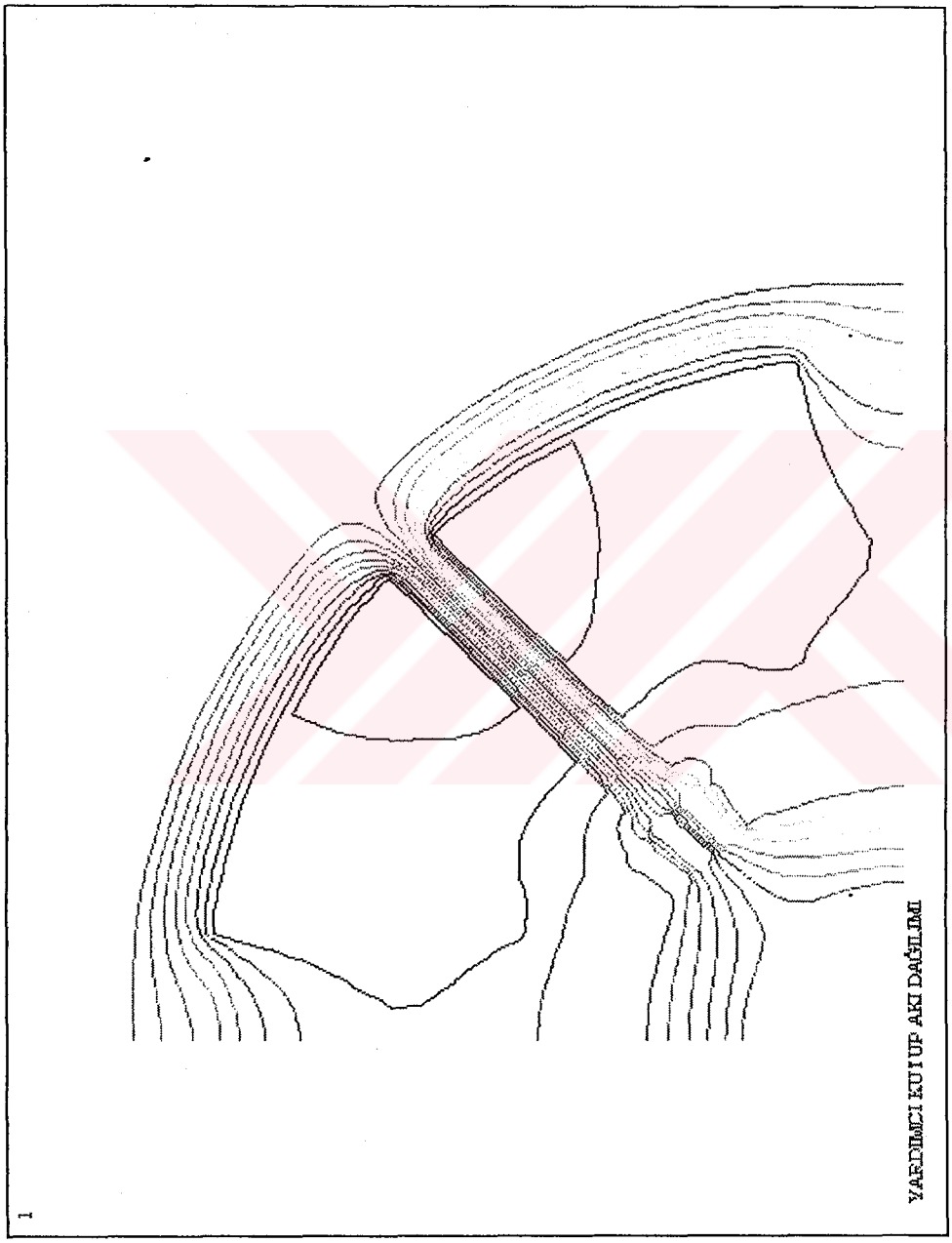
Şekil 7.17'de motorun yardımcı kutubuna akım uygulandığında elde edilen hava aralığı yardımcı kutup alan eğrisi verilmiştir. Buradaki alan eğrisi endüvi alanının ters yönünde oluşan bir alandır. Bunun sebebi endüvi reaksiyonunu ortadan kaldıracak şekilde yardımcı kutubun tasarlanarak oluşan yardımcı kutup alanının endüvi alanını kompanze etmesini sağlamaktır. Böylece geometrik nötr bölgede endüvi alanı yok edilmiştir, fakat esas kutup altlarındaki toplam alan eğrisinin değişmediğide görülmüştür.

Burada yardımcı kutup alanının endüvi alanını kompanze eden bir işlevi olduğu açıkca görülmektedir. Böylece endüvi reaksiyonundan dolayı geometrik nötr bölgenin β açısı kadar motor dönüş yönünde kaymasının ortaya çıkaracağı sakıncalar yardımcı kutup alanı ile ortadan kaldırılmış olur. Artık magnetik nötr bölge, geometrik nötr bölgeye gelmiş olur. Yardımcı kutup sargıları endüvi sargıları ile seri bağlandığı için her yük durumunda değişen endüvi alanı, geometrik nötr bölgede oluşturulan ters yöndeki yardımcı kutup alanı ile kompanze edilir. Bu nedenle modern doğru akım makinalarında daima magnetik nötr bölge geometrik nötr bölgeyle üst üstedir.

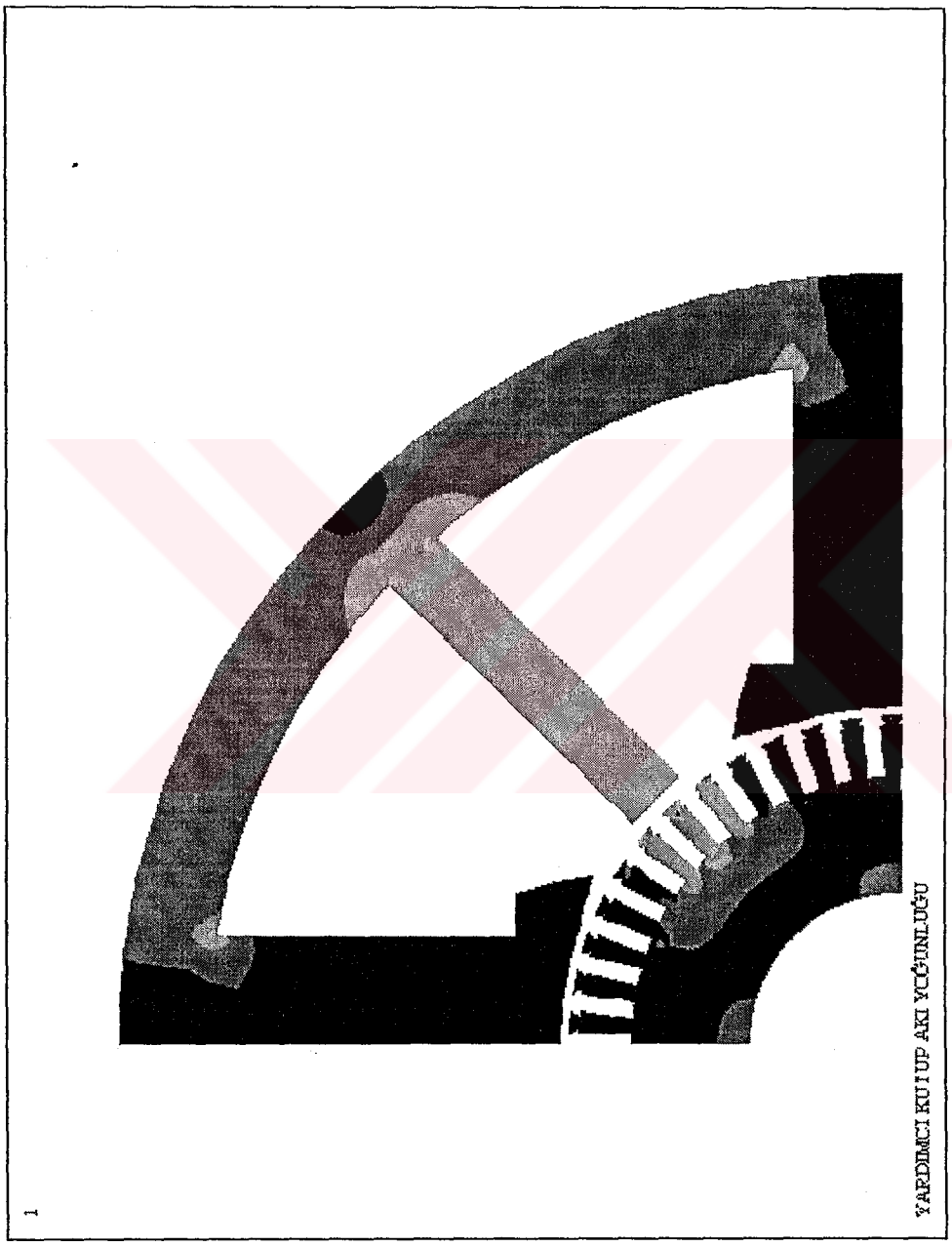
Şekil 7.18'de motorun yardımcı kutbu için vektör potansiyele ait analiz sonuçları akı çizgileri şeklinde ve Şekil 7.19 ve Şekil 7.20'de ise B akı yoğunluklarına ait analiz sonuçları verilmiştir.



Şekil 7.17 Hava aralığı yardımcı kutup alan eğrisi.



Şekil 7.18 Yardımcı kutup için akı dağılımı.



Şekil 7.19 Yardımcı kutup için B akı yoğunluğu dağılımı.



Şekil 7.20 Yardımcı kutup için B akı yoğunluğu dağılımı (dişlerde).

BÖLÜM 8

SONUÇLAR

Bu bölümde, çalışmada elde edilmiş olan sonuçlar maddeler halinde aşağıda verilmiştir:

1. Sayısal metodlardan biri olan sonlu elemanlar metodu, elektromagnetik alan analizleri için oldukça önemli bir metod olma özelliğine sahiptir.

2. Analiz sonucunda elde edilen B akı yoğunluğu dağılımı ve akı çizgileri modelin magnetik davranışı hakkında detaylı bir bilgi vermektedir.

3. Analiz sonucunda elde edilen diş dibi endüksiyonu, geleneksel hesapla bulunmuş olan değere % 1-2'lik farkla eşittir.

4. Analiz sonucunda elde edilen hava aralığına ait uyarma, endüvi ve yardımcı kutup alan eğrileri literatürde geçen eğrilere uymakta birlikte; özellikle diş ve oluk bölgelerinde daha detaylı bir açıklama getirmektedir.

5. Motor uyarma durumu için elde edilmiş olan hava aralığı uyarma eğrisinde, kutup altlarında B akı yoğunluğu en büyük değerini alırken geometrik nötr bölgede sıfır olmaktadır.

6. Motor endüvi durumu için elde edilmiş olan hava aralığı endüvi eğrisinde, geometrik nötr bölgede B akı yoğunluğu en büyük değerini alırken kutup ortalarında sıfır olmaktadır.

7. Motor yardımcı kutup durumu için elde edilmiş olan hava aralığı yardımcı kutup eğrisinde, geometrik nötr bölgede B akı yoğunluğu en büyük değerini alırken kutup uçlarına ulaşmadan sıfır olmaktadır.

8. Endüvi alanı uyarma alanı için bozucu bir etkiye sahiptir. Buna endüvi reaksiyonu denir ve magnetik nötr bölgenin geometrik nötr bölgeden sapmasına sebep

olmaktadır.

9. Yardımcı kutup alanı, endüvi alanının ters yönünde olup geometrik nötr bölgede endüvi alanını yok etmektedir.

10. Endüvi reaksiyonunu ortadan kaldırmak için tasarlanmış yardımcı kutup, magnetik nötr bölge ile geometrik nötr bölgeyi çakıştırdığından endüvi alanı kompanze edilmektedir.

11. Sonlu elemanlar metodu, elektrik mühendisleri için oldukça önemli avantajlar sağlamaktadır. Çünkü bu metodla elektrik makinalarının magnetik davranışları tesbit edilebilmekte ve oluşabilecek problemlere karşı çözümler üretebilecek veriler sağlanabilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] BODUROĞLU, Turgut, Elektrik Makinaları Dersleri, DA Makinaları, Cilt.IV, Kısım 2, İstanbul, 1972.

[2] ANSYS User's Manual For Revision 5.0:Volume I, Procedures, SASI, 1992.

[3] ANSYS User's Manual For Revision 5.0:Volume II, Command, SASI, 1992.

[4] ANSYS User's Manual For Revision 5.0:Volume III, Elements, SASI, 1992.

[5] ANSYS User's Manual For Revision 5.0:Volume IV, Theory, SASI, 1992.

[6] KALENDERLİ, Özcan, Elektrik Mühendisliğinde Sonlu Elemanlar Yöntemi, Ders notları, İstanbul, 1994.

[7] SABONNADIERE, J-C, COULOMB, J-L, Finete Element Method in CAD, Springer-Verleg, New York, 1987.

[8] CHARI, M.V.K., SILVESTER, P., Finite Element in Electrical and Magnetic Field Problems, Wiley, New York, 1980.

[9] SILVESTER, P., CHARI, M.V.K., Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems, IEEE Trans. on Power App. and Syst., Vol. PAS-89, 1970, pp.1642-1651.

[10] CHARI, M.V.K., SILVESTER, P., Finite Element Analysis of Magnetically Saturated D-C Machines, IEEE Trans. on Power App. and Syst., Vol. PAS-90, 1971, pp.2362-2372.

[11] SILVESTER, P., CABAYAN, H.S., BROWNE, B.T., Efficient Teqniques for Finite Element Analysis of Electric Machines, IEEE Trans. on Power App. and Syst., Vol. PAS-92, 1973, pp.1274-1281.

[12] ANSYS Magnetics User Guide For Revision 5.0, SASI, 1993.

[13] ANSYS Structural Nonlinearities User Guide For Revision 5.0, SASI, 1993.

[14] FITZGERALD, A.E., KINGSLEY, C.JR., KUSKO, A., Electric Machinery, MacGraw-Hill, New York, 1990.

[15] NASAR, S.A., BOLDEA, I., Electric Machines, New York, 1990.

[16] ERDELYI, E.A.,FUCHS, E.F., Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, Part I, Theoretical Fundamentals, IEEE Trans. on Power App. and Syst., Vol. PAS-89, 1970, pp.1546-1554.

[17] ERDELYI, E.A.,FUCHS, E.F., Nonlinear Magnetic Field Analysis of DC Machines, Part II, Application of the Method, IEEE Trans. on Power App. and Syst., Vol. PAS-89, 1970, pp.1555-1564.

EK-A
PROGRAM ÇIKTI ÖRNEKLERİ

PROGRAMA GİRİŞ
/FILNAME,DC
/TITLE,DC MACHINE ANALYSIS
/UNITS,CGS
!PARAMETRELER
TH1=3.902756
TH2=1.951378
ALF=7.05882352
ALF2=3.52941176
! MODELLEME
/PREP7
ET,1,13
R,1
MP,MURX,1,1 !HAVA ARALIGI
MP,MURX,2,1 !SARGILAR
! MALZEME 3 VE 4 ICIN BH EGRILERI
TB,BH,3,,32
TBPT,, 0.640000000 , 2.00000000
TBPT,, 0.100000000 , 4.00000000
TBPT,, 1.25000000 , 6.00000000
TBPT,, 1.62500000 , 8.00000000
TBPT,, 2.25000000 , 10.0000000
TBPT,, 4.00000000 , 12.0000000
TBPT,, 6.00000000 , 13.2500000
TBPT,, 8.00000000 , 14.0000000
TBPT,, 10.0000000 , 14.5000000
TBPT,, 12.0000000 , 14.7500000
TBPT,, 14.0000000 , 14.8750000
TBPT,, 16.0000000 , 15.0000000
TBPT,, 18.0000000 , 15.1250000
TBPT,, 20.0000000 , 15.2000000
TBPT,, 40.0000000 , 16.5000000
TBPT,, 60.0000000 , 17.2500000
TBPT,, 80.0000000 , 17.7500000
TBPT,, 100.000000 , 18.2500000
TBPT,, 120.000000 , 18.5000000
TBPT,, 140.000000 , 18.7500000
TBPT,, 160.000000 , 19.0000000
TBPT,, 180.000000 , 19.2500000
TBPT,, 200.000000 , 19.3750000
TBPT,, 400.000000 , 20.5000000
TBPT,, 600.000000 , 21.7500000
TBPT,, 800.000000 , 22.6250000
TBPT,, 1000.00000 , 23.2500000
TBPT,, 1200.00000 , 23.7500000
TBPT,, 1400.00000 , 24.2500000
TBPT,, 1600.00000 , 24.5000000
TBPT,, 1800.00000 , 24.7500000

```
TBPT,, 2000.00000   , 25.0000000
TBPLOT,BH,3
TB,BH,4,,19
TBPT,, 2.00000000   , 2.00000000
TBPT,, 4.00000000   , 6.75000000
TBPT,, 6.00000000   , 9.75000000
TBPT,, 8.00000000   , 11.1250000
TBPT,, 10.0000000   , 12.0000000
TBPT,, 12.0000000   , 12.5000000
TBPT,, 14.0000000   , 13.0000000
TBPT,, 16.0000000   , 13.2500000
TBPT,, 18.0000000   , 13.7500000
TBPT,, 20.0000000   , 14.0000000
TBPT,, 40.0000000   , 15.2500000
TBPT,, 60.0000000   , 16.0000000
TBPT,, 80.0000000   , 16.5000000
TBPT,, 100.000000   , 17.0000000
TBPT,, 120.000000   , 17.5000000
TBPT,, 140.000000   , 17.7500000
TBPT,, 160.000000   , 18.2500000
TBPT,, 180.000000   , 18.3750000
TBPT,, 200.000000   , 18.5000000
TBPLOT,BH,4
! MODELLEME ICIN GEOMETRI
K,,,19.7
KGEN,2,1,,,1.35          ! KUTUP1
KGEN,2,2,,,1.35
KGEN,2,3,,,1.35
K,,5.49,19.7
K,,7.71,19.7
K,,8.66,16.1
K,,8.56,15.8
K,,8.27,15.7
K,,5.91,16.5             ! KP 10
CSYS,1
K,,17.5,75
K,,17.5,80
K,,17.5,85
CSYS
K,,,17.5                 ! KP X
KSYMM,X,2,13,1
K,,9.75,19.7
.....
.....
.....
ALANLAR TANIMLANIYOR
CSYS,1
AGEN,2,ALL,,1,,90
ASEL,S,AREA,,5,8
AGEN,2,ALL,,1,,90
ASEL,ALL                 ! KUTUP 4
ASEL,S,AREA,,9,12
AGEN,2,ALL,,1,,90    ! KUTUP 2
ASEL,ALL                 ! 4 KUTUP
! KUTUP COMPONENT
! KUTUP AYAGI ALAN
ASEL,S,P50X
   4
2
```

```
6
10
14
CM,KUT_AY  ,AREA
! KUTUP BASI ALAN
ASEL,S,P50X
   4
1
13
5
9
CM,KUT_BAS ,AREA
! KUTUP SARGISI ALAN
ASEL,S,P50X
   8
3
4
7
8
11
12
15
16
CM,KUT_SAR ,AREA
! KUTUP ALAN GRUBU
CMGRP,KUTUP,KUT_AY,KUT_BAS,KUT_SAR
! KUTUP AYAGI CIZGI VE NOKTA
CMSEL,S,kut_ay
LSLA,S,0
CM,ka_line ,LINE
KSLL,S
CM,ka_kp,KP
! KUTUP BASI CIZGI VE NOKTA
CMSEL,S,kut_bas
LSLA,S,0
CM,kb_line ,LINE
KSLL,S
CM,kb_kp   ,KP
! KUTUP SARGISI CIZGI VE NOKTA
CMSEL,S,kut_sar
LSLA,S,0
CM,ks_line ,LINE
KSLL,S
CM,ks_kp   ,KP
! KUTUP CIZGI VE NOKTA GRUBU
CMGRP,k_line,ka_line,kb_line,ks_line
CMGRP,k_kp,ka_kp,kb_kp,ks_kp
.....
.....
.....
!!!!!!!!KUTUP MESH!!!
! KUTUP1 MESH
CMSEL,S,KUTUP
CMSEL,A,k_line
ESHAPE,3
ESIZE,,1
AATT,3
LCCAT,P50X
   2
```

6
7
LESIZE,P50X,,,4
21
LESIZE,P50X,,,4
6
AMESH,1
ESIZE,,1
LESIZE,P50X,,,2
32
LESIZE,P50X,,,2
31
LESIZE,P50X,,,7
36
LESIZE,P50X,,,7
27
AMESH,2
ESIZE,,2
AATT,2
LESIZE,P50X,,,7
41
LESIZE,P50X,,,7
38
LESIZE,P50X,,,4
42
LESIZE,P50X,,,4
39
AMESH,3
AMESH,4
.....
.....
.....
ÇÖZÜM AŞAMASI
/SOLUTION
KBC,0
NEQIT,1
NSUBS,2
LSWRITE,1
NSUBS,1
NEQIT,20
CNVTO,CSG,,1e-5
LSWRITE,2
SAVE
LSSOLVE,1,2
FINISH
.....
.....
.....
SONUÇLARI GÖZLEME
/POST1
SET,2
PLFLUX,27
PLNSOL,B,SUM
.....
.....
SAVE
FINISH
/EXIT

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf ÖZOĞLU, 1967 yılında ÜRGÜP'te doğdu. Sırasıyla Atatürk İlkokulunu, Ürgüp Ortaokulunu ve Ürgüp Lisesini birincilikle bitirdi. 1985 yılında Yıldız Üniversitesi Elektrik Mühendisliğine kaydını yaptırdı. Bir yıl sonra ise yatay geçişle İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik Mühendisliğine kaydını aldırarak 1989 yılında tamamlayarak mezun oldu. 2 yıl kadar özel şirketlerde çalıştıktan sonra 1991'de İstanbul Üniversitesinde Arş. Gör. kadrosuyla göreve başladı. Aynı yıl İ.T.Ü Fen Bilimlerine kaydını yaptırarak Yüksek Lisansa başladı. Halen İstanbul Üniversitesinde görevine devam etmektedir.