



TABAKALI KOMPOZİT LEVHALARDA YAPIŞTIRICI/LEVHA ARA YÜZEY ÇATLAK PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Mete Onur KAMAN*, Fatih CETİŞLİ**

*mkaman@firat.edu.tr Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 23119-Elazığ.

** fcetisli@pau.edu.tr Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 20070-Denizli.

ÖZET

Bu çalışmada, yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit levhalarda yapıştırıcı/levha ara yüzey çatlak problemi sayısal olarak incelenmiştir. Çatlak ucu gerilme şiddet faktörü *Yerdeğiştirme Ekstrapolasyon Metodu* ile hesaplanmıştır. İzotropik/monoklinik malzeme ara yüzeyindeki çatlak ucu yerdeğiştirme ve gerilmeler, malzeme özellikleri ile ilişkili *Barnett-Lothe* (L , S) tensörlerine bağlıdır ve bu tensörler *Stroh* formülleri kullanılarak, standart özdeğer probleminin çözümü ile elde edilir. Genelleştirilmiş anizotropik malzemeler için geçerli elastik rijitlik matrisleri cinsinden *Barnett-Lothe* tensör ifadeleri kullanılarak, ara yüzey çatlak ucu gerilme şiddet faktörünün sayısal çözümü için açık formüller elde edilmiştir. Sayısal uygulamada kompozit levhadaki fiber takviye açısının gerilme şiddet faktörü üzerindeki etkisi grafik halinde sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Arayüzey Çatlak, Gerilme Şiddet Faktörü, Sonlu Elemanlar Metodu, Anizotropik malzeme.

ABSTRACT

The adhesive/plate interface crack problem in composite plates that are bounded with adhesive is numerically investigated in this study. The stress intensity factor at the crack tip is calculated by using *Displacement Extrapolation Method*. The displacements and stresses at the crack tip of the interface of the isotropic/anisotropic material are related with *Barnett-Lothe* (L , S) tensors that are depended on material characteristics. These tensors are obtained by using *Stroh* formulations and solving standard eigenvalue problem. Formulations are obtained for the numerical solution of stress intensity factor at the interface crack tip by using the *Barnett-Lothe* tensors that are defined by means of the stiffness matrices, which are valid for the generalized anisotropic materials. The effect of the composite plate's fiber angle on stress intensity factor is graphically presented in numerical application.

Keywords: Interface Crack, Stress Intensity Factor, Finite Element Method, Anisotropic Material.

1. GİRİŞ

Günümüzde kompozit malzemelerin kullanımı hızlı bir şekilde artmaktadır. Bu artışa paralel olarak kompozit malzemelerin kullanımı sırasında meydana gelecek hasarların incelenmesi de büyük bir önem göstermektedir. Geleneksel bağlantı tipi olarak tanımlanan sökülebilir mekanik birleştirmeler, yapı içerisinde süreksizlikler oluşturduğu için gerilme yığılmalarına neden olur. Birleşme bölgesinde eşit gerilme dağılımını sağlamak amacıyla yapıştırıcı ile yapılan birleştirmeler kompozit malzemeler için özellikle tercih edilmektedir. Ancak basınç, sıcaklık, uygulama şartları vb. özellikler yapışma kalitesini önemli ölçüde belirleyen faktörlerdir. Ayrıca uygun olmayan kullanım şartları ve ortamlar da birleşme mukavemetini azaltabilir. Bu durum ise yapışma bölgesinde makro boyutta hasar oluşumlarını tetikler. Meydana gelen hasar tipleri; yapıştırıcı/levha arayüzey çatlağı, yapıştırıcı kayma/soyulma hasarı, levha delaminasyon hasarı şeklinde genellenebilir.

Kompozit levha ile yapıştırıcı arasında oluşan çatlak ucundaki gerilme şiddet faktörünün hesaplanması, hasar oluşumu tahminlerinde önemli bir rol oynar. Ara yüzey çatlak probleminde, takviyeli kompozit levhadaki fiberler çatlak doğrultusu (0°) ve çatlak doğrultusuna dik doğrultu (90°) dışında yönlendirilmiş ise malzeme davranışının ortotropik yapıdan monoklinik yapıya dönüşmesine neden olur. Dolayısıyla da çatlak ucu yer değiştirme ve gerilme bağıntılarının genelleştirilmiş anizotropik malzeme için hesaplanması gerekir. Gotoh [1], Clements [2], Willis [3], Bassabi ve Qu [4] ve Wu [5] farklı anizotropik malzemeler arasında meydana gelen arayüzey çatlak problemlerini araştırmışlardır [6]. Hwu [7] Stroh formüllerini [8] kullanarak aynı problem için çatlak ucu gerilmelerin asimptotik çözümünü sunmuştur. Bu konuda analitik çalışmaların zorluğu dikkate alındığında sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine paralel olarak, sonlu elemanlar metodunun kullanıldığı araştırmalar da artmıştır. Ikeda ve diğ. [6] genel anizotropik malzemelerde iki boyutlu arayüzey çatlak problemi için gerilme şiddet faktörünü virtüel çatlak genişleme metodunu kullanarak hesaplamışlardır. Qian ve Sun [9] farklı takviye açılarına sahip kompozit tabakalar arasındaki arayüzey çatlak problemini sonlu elemanlar metodunu kullanarak çözmüşlerdir. Nagai ve diğ. [10] anizotropik malzemelerde arayüzey üç boyutlu çatlak problemini M integral ve yerdeğiştirme ekstrapolasyon metodu ile incelemişlerdir. Penado [11] anizotropik malzemeler için arayüzey çatlak ucu tekil şiddet faktörlerini sayısal ve elastisite çözümlerinin birleşimiyle elde etmiştir.

Bu çalışmada, yapıştırıcı ile tek yüzeyinden birleştirilmiş kompozit levhalarda yapıştırıcı/levha ara yüzey çatlak probleminin sayısal çözümü ele alınmıştır. Fiber takviye açıları ile çatlak farklı doğrultularda seçilmişlerdir. Bu nedenle de (i) ilk aşamada malzeme rijitlik matrisinin çatlak doğrultusuna transformasyon formülleri verilmiştir. Bu durumda artık kompozit malzeme davranışı monoklinik, yapıştırıcı ise izotropiktir. İzotropik/monoklinik levha ara yüzeyindeki çatlak ucu yerdeğiştirme ve gerilmeler, malzeme özellikleri ile ilişkili *Barnett-Lothe* (L , S) tensörlerine bağlıdır ve bu tensörler *Stroh* formülleri kullanılarak, standart özdeğer probleminin çözümü ile elde edilir. Ancak genelleştirilmiş anizotropik malzemeler için geçerli elastik rijitlik matrisleri cinsinden *Barnett-Lothe* tensör ifadeleri ilk defa Liou ve Sung [12] tarafından elde edilmiştir. Çalışmanın (ii) ikinci aşamasında bu formüller yerdeğiştirme ekstrapolasyon metoduna uygulanarak, yapıştırıcı/kompozit levha arayüzey çatlak probleminin sayısal çözümü elde edilmiştir. (iii) Üçüncü aşamada ise; üç boyutlu sayısal uygulamada kompozit levhadaki fiber takviye açısının gerilme şiddet faktörü üzerindeki etkisi grafik halinde sunulmuştur.

2. MATERYAL VE METOD

2.1 İzotropik ve Monoklinik Malzemeler Arasındaki Arayüzey Çatlak İçin Gerilme Şiddet Faktörü

Farklı anizotropik malzemeler arasındaki arayüzey çatlaktaki gerilme şiddet faktörü Hwu [7] tarafından

$$\begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \Lambda \left\langle \left\langle \left(\frac{r}{l_k} \right)^{-i\varepsilon_\alpha} \right\rangle \right\rangle \Lambda^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada r çatlak ucundan olan uzaklık olup, l_k gelişigüzel seçilen karakteristik uzunluktur. ε_α ($\alpha = 1, 2, 3$) ise arayüzey malzeme sabitlerini içerir. $\langle \langle \rangle \rangle$ diyagonal matris olup, $i = \sqrt{-1}$ şeklindedir. Matris Λ , üç özvektörün birleşimi olup

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \quad (2)$$

$$(M^* + e^{2i\pi\delta} \overline{M}^*) \lambda = 0 \quad (3)$$

özdeğer problemine bağlıdır. Λ matrisi

$$\overline{\Lambda}^T D \Lambda = I \quad (4)$$

şeklinde normalize edilebilir. Özdeğerlerin açık formülleri Ting [13] tarafından

$$\delta_\alpha = -\frac{1}{2} + i\varepsilon_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (5)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon, \quad \varepsilon_3 = 0 \quad (6)$$

$$\beta = \left[-\frac{1}{2} \text{tr}(W D^{-1})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

olarak verilmiştir. Burada tr matris köşegenlerinin toplamı olup; ε salınım endeksi olarak tanımlanır. M^* arayüzey malzeme matrisi

$$M^* = D - iW \quad (8)$$

olarak tanımlanır ve *Barnett-Lothe* tensörleri [14] ile ilişkilidir.

$$D = L_1^{-1} + L_2^{-1} \quad (9)$$

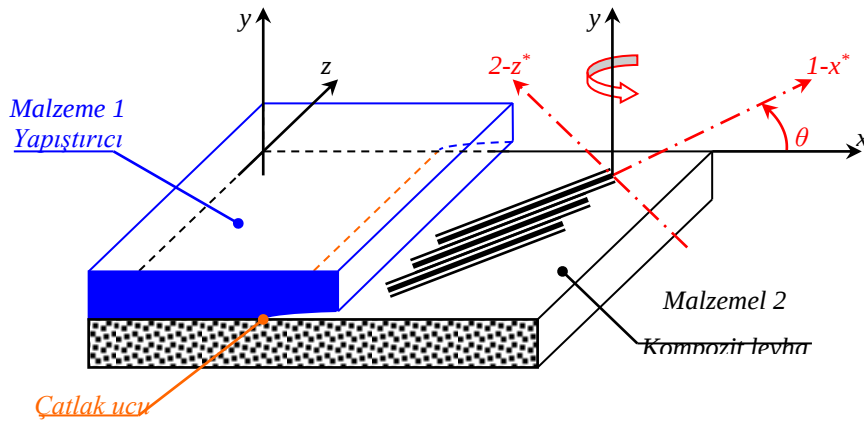
$$W = S_1^* L_1^{-1} - S_2^* L_2^{-1} \quad (10)$$

1 ve 2 indisleri sırasıyla alt ve üst malzemeleri tanımlar (Şekil 1). İzotropik yapıştırıcı malzemesi için S_1^* ve L_1 matrisleri

$$S_1^* = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (11)$$

şeklindedir. E Elastisite modülü, ν ise Poisson oranıdır.

Yapıştırıcı/tek tönü fiber takviyeli kompozit levha arayüzeyinde meydana gelen bir çatlak probleminde, eğer kompozit levhadaki fiber doğrultuları gelişigüzel seçilmiş ise ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), 1-2 malzeme asal eksen takımı çatlak doğrultusu ile çakışmaz. Çatlak doğrultusu üzerinde kompozit levhadaki S_2^* ve L_2 matrislerini elde edebilmek için, orthotropik levhanın malzeme özellikleri ile ilgili matrisin $y = 0$ simetri eksenine göre çatlak doğrultusuna transform edilmesi gerekir (Şekil 1). Ortotropik malzemeler için şekil değiştirme-gerilme bağıntısı



Şekil 1. Kompozit ile yapıştırıcı arasında arayüzey kenar çatlak.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

şeklinde verilir. S_{ij} ($i,j=1,\dots,6$) malzemenin kompliyans katsayıları olup, $[S]$ rijitlik matrisi $[C]$ 'ye dönüştürülebilir.

$$C = S^{-1} \quad (13)$$

Global koordinat sistemine göre, döndürülmüş malzeme matrisi

$$C^* = R_C C R_C^T \quad (14)$$

olarak tanımlanır. Burada transformasyon matrisi [15]

$$R_C = \begin{bmatrix} t_{11}^2 & t_{12}^2 & t_{13}^2 & 2t_{12}t_{13} & 2t_{13}t_{11} & 2t_{11}t_{12} \\ t_{21}^2 & t_{22}^2 & t_{23}^2 & 2t_{22}t_{23} & 2t_{23}t_{21} & 2t_{21}t_{22} \\ t_{31}^2 & t_{32}^2 & t_{33}^2 & 2t_{32}t_{33} & 2t_{33}t_{31} & 2t_{31}t_{32} \\ t_{21}t_{31} & t_{22}t_{32} & t_{23}t_{33} & t_{22}t_{33} + t_{23}t_{32} & t_{23}t_{31} + t_{21}t_{33} & t_{21}t_{32} + t_{22}t_{31} \\ t_{31}t_{11} & t_{32}t_{12} & t_{33}t_{13} & t_{32}t_{13} + t_{33}t_{12} & t_{33}t_{11} + t_{31}t_{13} & t_{31}t_{12} + t_{32}t_{11} \\ t_{11}t_{21} & t_{12}t_{22} & t_{13}t_{23} & t_{12}t_{23} + t_{13}t_{22} & t_{13}t_{21} + t_{11}t_{23} & t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} \end{bmatrix} \quad (15)$$

dir. Matrisin katsayıları ise

$$\begin{aligned} t_{11} &= \cos\theta_z \cos\theta_y - \sin\theta_z \sin\theta_x \sin\theta_y \\ t_{12} &= -\sin\theta_z \cos\theta_x \\ t_{13} &= \cos\theta_z \sin\theta_y + \sin\theta_z \sin\theta_x \cos\theta_y \\ t_{21} &= \sin\theta_z \cos\theta_y + \cos\theta_z \sin\theta_x \sin\theta_y \\ t_{22} &= \cos\theta_z \cos\theta_x \\ t_{23} &= \sin\theta_z \sin\theta_y - \cos\theta_z \sin\theta_x \cos\theta_y \\ t_{31} &= -\cos\theta_x \sin\theta_y \\ t_{32} &= \sin\theta_x \\ t_{33} &= \cos\theta_x \cos\theta_y \end{aligned} \quad (16)$$

olarak tanımlanır. θ_x , θ_y ve θ_z Euler açılarıdır. Rijitlik matrisinin çatlak doğrultusuna transformasyonu için değerleri $\theta_x = 0$, $\theta_y = -\theta \neq 0$ ve $\theta_z = 0$ şeklinde alınır. Verilen bu şartlar altında elde edilecek yeni rijitlik matrisi,

$$C^* = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & c_{13}^* & 0 & c_{15}^* & 0 \\ c_{12}^* & c_{22}^* & c_{23}^* & 0 & c_{25}^* & 0 \\ c_{13}^* & c_{23}^* & c_{33}^* & 0 & c_{35}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^* & 0 & c_{46}^* \\ c_{15}^* & c_{25}^* & c_{35}^* & 0 & c_{55}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46}^* & 0 & c_{46}^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

dir. Bu malzeme matrisi $x_2 = y = 0$ simetri düzlemine göre monoklinik malzeme olarak tanımlanır. Düzlem şekil değiştirme hali için rijitlik matrisinin bileşenleri

$$M_{ij} = c_{ij}^* - \frac{c_{i3}^* - c_{j3}^*}{c_{33}^*}, (i,j=1,\dots,6) \quad (18)$$

şeklinde tekrar düzenlenmelidir. Bu noktadan sonra ise S_2^* ve L_2 matrislerinin monoklinik malzemeler için yazılması gerekir. *Barnett-Lothe* tensörleri, kartezyen koordinatlarda lineer elastik malzemeler için denge denklemlerinin kullanılması ile elde edilen

$$Ua = (Q + p(R + R^T) + p^2T)a = 0 \quad (19)$$

özdeğer probleminin çözümünden elde edilir. Burada; $Q=[C_{i1k1}]$, $R=[C_{i1k2}]$ ve $T=[C_{i2k2}](i,k=1,...,3)$ olarak tanımlanır. Denklem (19)'un yerdeğiştirme fonksiyonu için çözümünden; üç farklı sanal pozitif sanal kök p_i , ($i=1, 2, 3$) ve bunlara bağlı elde edilecek a_k ($k=1, 2, 3$) özvektörler bulunur. Sütun vektörü a_k ayrıca

$$b_k = (R^T + p_k T)a_k = -(R + p_k^{-1}Q)a_k \quad (k=1, 2, 3) \quad (20)$$

ile ilişkilidir. Üç farklı özdeğer için elde edilecek $[A]$ ve $[B]$ matrisleri arasındaki ilişki

$$L = -2iBB^T, \quad S^* = i(2AB^T - I) \quad (21)$$

şeklinde dir. Bu matrisler anizotropik malzemeler için genellikle sayısal olarak hesaplanmaktadır. $x_2 = y = 0$ simetri düzlemine göre monoklinik malzemeler için bu ifadeler malzeme rijitlik matris bileşenleri cinsinden açık ifadeleri Liou ve Sung [12] tarafından elde edilmiştir.

$$S_2^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\hat{Y}_{12}}{Y_{22}} & 0 \\ \frac{\hat{Y}_{12}Y_{33} + \hat{Y}_{23}\hat{Y}_{13}}{Y_{11}Y_{33} - Y_{13}^2} & 0 & -\frac{\hat{Y}_{12}Y_{13} + \hat{Y}_{23}\hat{Y}_{11}}{Y_{11}Y_{33} - Y_{13}^2} \\ 0 & \frac{\hat{Y}_{23}}{Y_{22}} & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} \frac{Y_{33}}{Y_{11}Y_{33} - Y_{13}^2} & 0 & -\frac{Y_{13}}{Y_{11}Y_{33} - Y_{13}^2} \\ 0 & \frac{1}{Y_{22}} & 0 \\ -\frac{Y_{13}}{Y_{11}Y_{33} - Y_{13}^2} & 0 & \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{33} - Y_{13}^2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Denklem (22)'de;

$$\begin{aligned} Y_{11} &= i[\Theta_0 + \lambda(p_3)\Theta_1 - a_{13}(p_3)\Theta]/D_B \\ Y_{33} &= i[\lambda(p_3)p_3\Theta_3 - \lambda(p_3)\Gamma_3 + a_{33}(p_3)]/D_B \\ \hat{Y}_{12} &= \text{Re}\{[\lambda(p_3)p_3\Theta_1 + a_{13}(p_3)\Gamma + \Gamma_1]/D_B\} \\ Y_{22} &= i[\lambda(p_3)p_3\Theta_2 + a_{23}(p_3)\Gamma + \Gamma_2]/D_B \\ Y_{13} &= -\text{Im}\{[\lambda(p_3)p_3\Theta_0 - \lambda(p_3)\Gamma_1 + a_{13}(p_3)]/D_B\} \\ \hat{Y}_{23} &= \text{Re}\{[\lambda(p_3)p_3\Gamma_0 - \lambda(p_3)\Gamma_2 + a_{23}(p_3)]/D_B\} \end{aligned} \quad (23)$$

ve

$$D_B = 1 + \lambda(p_3)[\Gamma + p_3\Theta] \quad (24)$$

olup,

$$\Theta_0 = M_{22}M_{46}\Lambda_2 - M_{66}M_{25}\Lambda_0 - M_{22}M_{44}\Omega_3 + (M_{25}M_{46} - M_{66}M_{44} + M_{46}^2)\Omega_1$$

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \theta_1 \theta_2 (M_{22} M_{46} \Omega_2 - M_{66} M_{25} \Omega_0) + (-M_{22} M_{44}) \Pi_3 + (M_{25} M_{46} - M_{66} M_{44} + M_{46}^2) \Pi_1 \\
\Theta_2 &= \theta_1 \theta_2 (M_{66} M_{25} - M_{12} M_{46}) \Omega_1 + (M_{66} M_{44} + M_{12} M_{44} - M_{25} M_{46} - M_{46}^2) \Pi_2 \\
\Theta_3 &= -M_{66} M_{22} \Lambda_2 + M_{66} M_{12} \Lambda_0 + M_{22} M_{46} \Omega_3 - M_{12} c_{46} \Omega_1 \\
\Gamma_0 &= (M_{66} M_{25} - M_{12} M_{46}) \Lambda_1 + (M_{66} M_{44} + M_{12} M_{44} - M_{25} M_{46} - M_{46}^2) \Omega_2 \\
\Gamma_1 &= M_{22} M_{46} p_1 p_2 \Lambda_1 - M_{66} M_{25} \Lambda_4 - M_{22} M_{44} p_1 p_2 \Omega_2 + (M_{25} M_{46} - M_{66} M_{44} + M_{46}^2) p_1 p_2 \Omega_0 \\
\Gamma_2 &= (M_{66} M_{25} - M_{12} M_{46}) p_1 p_2 \Lambda_0 + (M_{66} M_{44} + M_{12} M_{44} - M_{25} M_{46} - M_{46}^2) p_1 p_2 \Omega_1 \\
\Gamma_3 &= -M_{66} M_{22} p_1 p_2 \Lambda_1 + M_{66} M_{12} \Lambda_4 + M_{22} M_{46} p_1 p_2 \Omega_2 - M_{12} M_{46} p_1 p_2 \Omega_0
\end{aligned} \tag{25}$$

şeklinde yazılabilir. Θ, Γ, Ω_i ($i = 0, 1, 2, 3$), Λ_i ($i = 0, 1, 2, 4$) ve Π_i ($i = 1, 2, 3$);

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{\theta_2(p_2) - \theta_1(p_1)}{p_2 - p_1} \\
\Gamma &= \frac{\theta_1(p_1)p_2 - \theta_2(p_2)p_1}{p_2 - p_1} \\
\Omega_0 &= \frac{1/\Delta_1(p_1) - 1/\Delta_2(p_2)}{p_2 - p_1} \\
\Omega_1 &= \frac{p_1/\Delta_1(p_1) - p_2/\Delta_2(p_2)}{p_2 - p_1} \\
\Omega_2 &= \frac{p_1^2/\Delta_1(p_1) - p_2^2/\Delta_2(p_2)}{p_2 - p_1} \\
\Omega_3 &= \frac{p_1^3/\Delta_1(p_1) - p_2^3/\Delta_2(p_2)}{p_2 - p_1} \\
\Lambda_0 &= \frac{\theta_1(p_1)/\Delta_1(p_1) - \theta_2(p_2)/\Delta_2(p_2)}{p_2 - p_1} \\
\Lambda_1 &= \frac{(\theta_1(p_1)/\Delta_1(p_1))p_1 - (\theta_2(p_2)/\Delta_2(p_2))p_2}{p_2 - p_1} \\
\Lambda_2 &= \frac{(\theta_1(p_1)/\Delta_1(p_1))p_1^2 - (\theta_2(p_2)/\Delta_2(p_2))p_2^2}{p_2 - p_1} \\
\Lambda_4 &= \frac{(\theta_1(p_1)/\Delta_1(p_1))p_2 - (\theta_2(p_2)/\Delta_2(p_2))p_1}{p_2 - p_1} \\
\Pi_0 &= \frac{\theta_2(p_2)/\Delta_1(p_1) - \theta_1(p_1)/\Delta_2(p_2)}{p_2 - p_1} \\
\Pi_1 &= \frac{(\theta_2(p_2)/\Delta_1(p_1))p_1 - (\theta_1(p_1)/\Delta_2(p_2))p_2}{p_2 - p_1}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\Pi_2 = \frac{(\theta_2(p_2)/\Delta_1(p_1))p_1^2 - (\theta_1(p_1)/\Delta_2(p_2))p_2^2}{p_2 - p_1}$$

$$\Pi_3 = \frac{(\theta_2(p_2)/\Delta_1(p_1))p_1^3 - (\theta_1(p_1)/\Delta_2(p_2))p_2^3}{p_2 - p_1}$$

dir. Benzer şekilde $\theta_k(p_k)$ ($k=1, 2$) ve $\lambda(p_3)$ parametreleri

$$\theta_k(p_k) = -\frac{\beta(p_k)}{\xi(p_k)} \quad (k=1, 2) \quad (27)$$

$$\lambda(p_3) = \frac{\eta(p_3)}{\varsigma(p_3)}$$

şeklinde yazılabilir. $\eta(p_3)$, $\varsigma(p_3)$, $\xi(p_k)$, $\beta(p_k)$ ($k=1, 2$)'nin açılımları ise

$$\begin{aligned} \xi(p_k) &= (M_{66}M_{22}M_{44} - M_{22}M_{46}^2)p_k^4 + (M_{15}M_{66}M_{25} - M_{12}M_{66}M_{55}) \\ &\quad (M_{12}M_{25}M_{46} + M_{55}M_{22}M_{66} - M_{15}M_{22}M_{46} \\ &\quad - M_{12}M_{66}M_{44} + M_{12}M_{46}^2 - M_{66}M_{25}^2)p_k^2 \quad (k=1, 2) \\ \beta(p_k) &= (M_{15}M_{22}M_{44} + M_{25}M_{46}^2 - M_{25}M_{44}M_{12} \\ &\quad - M_{25}M_{44}M_{66} + M_{46}M_{25}^2 - M_{55}M_{22}M_{46})p_k^3 \\ &\quad (M_{15}M_{44}M_{66} + M_{55}M_{12}M_{46} - M_{15}M_{25}M_{46} - M_{15}M_{46}^2)p_k \quad (k=1, 2) \\ \eta(p_3) &= (M_{46}M_{12}^2 - M_{12}M_{66}M_{25} - M_{11}M_{22}M_{46} + M_{15}M_{22}M_{66})p_3^2 \\ &\quad + (M_{11}M_{66}M_{25} - M_{15}M_{12}M_{66}) \\ \varsigma(p_3) &= (M_{44}M_{22}M_{66} - M_{22}M_{46}^2)p_3^5 \\ &\quad + (M_{11}M_{44}M_{66} + M_{15}M_{12}M_{46} - M_{11}M_{25}M_{46} - M_{11}M_{46}^2)p_3 \\ &\quad + (M_{12}M_{25}M_{46} + M_{11}M_{22}M_{44} - 2M_{12}M_{44}M_{66} \\ &\quad - M_{15}M_{22}M_{46} + 2M_{12}M_{46}^2 - M_{44}M_{12}^2)p_3^3 \end{aligned} \quad (28)$$

dir. Denklem (23)'de, $a_{i3}(p_3)$ ($i=1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} a_{13}(p_3) &= (-\kappa_{11}(p_3) + \kappa_{10}(p_3)\lambda(p_3))/\Delta_3(p_3) \\ a_{23}(p_3) &= (-\kappa_{21}(p_3) + \kappa_{20}(p_3)\lambda(p_3))/\Delta_3(p_3) \\ a_{33}(p_3) &= (-\kappa_{31}(p_3) + \kappa_{30}(p_3)\lambda(p_3))/\Delta_3(p_3) \end{aligned} \quad (29)$$

ve

$$\begin{aligned} \kappa_{11}(p_3) &= M_{22}M_{46}p_3^2 - M_{66}M_{25} \\ \kappa_{10}(p_3) &= -M_{22}M_{44}p_3^3 + (M_{25}M_{46} - M_{66}M_{44} + M_{46}^2)p_3 \\ \kappa_{21}(p_3) &= (M_{66}M_{25} - M_{12}M_{46})p_3 \end{aligned}$$

$$\kappa_{20}(p_3) = (M_{66}M_{44} + M_{12}M_{44} - M_{25}M_{46} - M_{46}^2)p_3^2 \quad (30)$$

$$\kappa_{31}(p_3) = -M_{66}M_{22}p_3^2 + M_{66}M_{12}$$

$$\kappa_{30}(p_3) = M_{22}M_{46}p_3^3 - M_{12}M_{46}p_3$$

$$\Delta_k(p_k) = (M_{66}M_{44} - M_{46}^2)(M_{22}p_3^2 - M_{12})p_k \quad (k=1, 2, 3)$$

değerlerine eşittir. Monoklinik malzemeler için Denklem (19)'daki U matrisinin determinantı aşağıdaki formu alır.

$$\delta = \delta_6 p^6 + \delta_4 p^4 + \delta_2 p^2 + \delta_0 p^0 = 0 \quad (31)$$

Burada;

$$\begin{aligned} \delta_6 &= M_{66}M_{22}M_{44} - M_{22}M_{46}^2 \\ \delta_4 &= 2M_{12}M_{25}M_{46} - 2M_{15}M_{22}M_{46} - 2M_{12}M_{44}M_{66} + M_{11}M_{22}M_{44} \\ &\quad + M_{55}M_{22}M_{66} + 2M_{12}M_{46}^2 - M_{66}M_{25}^2 - M_{44}M_{12}^2 \\ \delta_2 &= 2M_{15}M_{66}M_{25} + 2M_{12}M_{25}M_{15} + 2M_{15}M_{12}M_{46} - 2M_{55}M_{12}M_{66} - 2M_{11}M_{25}M_{46} \\ &\quad + M_{11}M_{22}M_{55} + M_{11}M_{44}M_{66} - M_{11}M_{46}^2 - M_{22}M_{15}^2 - M_{11}M_{25}^2 - M_{55}M_{12}^2 \\ \delta_0 &= M_{11}M_{55}M_{66} - M_{66}M_{15}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

dir. Denklem (31)'in çözümünden elde edilecek kökler iki tiptir. [12, 16]. Tip I için kökler;

$$p_1 = in_1, \quad p_2 = in_2, \quad p_3 = in_3 \quad (n_1 > 0, n_2 > 0, n_3 > 0) \quad (33)$$

Tip II için kökler ise

$$p_1 = m_1 + in_1, \quad p_2 = -m_1 + in_1, \quad p_3 = in_3 \quad (34)$$

şeklindedir. Şimdi Denklem (11) ve (22) kullanılarak $[D]$ ve $[W]$ matrisleri tekrar yazılabilir.

$$D = L_1^{-1} + L_2^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & D_{13} \\ 0 & D_{22} & 0 \\ D_{13} & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$W = S_1^* L_1^{-1} - S_2^* L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -W_{21} & 0 \\ W_{21} & 0 & -W_{32} \\ 0 & W_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Bu noktada ise Denklem (19)'un dışında Denklem (3)'teki başka bir özdeğer probleminin çözülmesi ve özvektörlerinin bulunması gerekmektedir. Özvektör matrisi Λ açık formülü monoklinik malzemeler için

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{ia_f}{b_f c_f} & \frac{ia_f}{b_f c_f} & \frac{W_{32}}{\sqrt{b_f \beta D_{22}}} \\ \frac{1}{c_f} & \frac{1}{c_f} & 0 \\ \frac{id_f}{b_f c_f} & -\frac{id_f}{b_f c_f} & \frac{W_{21}}{\sqrt{b_f \beta D_{22}}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

şeklinde verilmiştir [9]. Burada;

$$\begin{aligned} a_f &= W_{21}D_{33} + W_{32}D_{13} \\ b_f &= \beta(D_{11}D_{33} - D_{13}^2) \\ c_f &= \sqrt{2D_{22}} \\ d_f &= W_{32}D_{11} + W_{21}D_{13} \end{aligned} \quad (38)$$

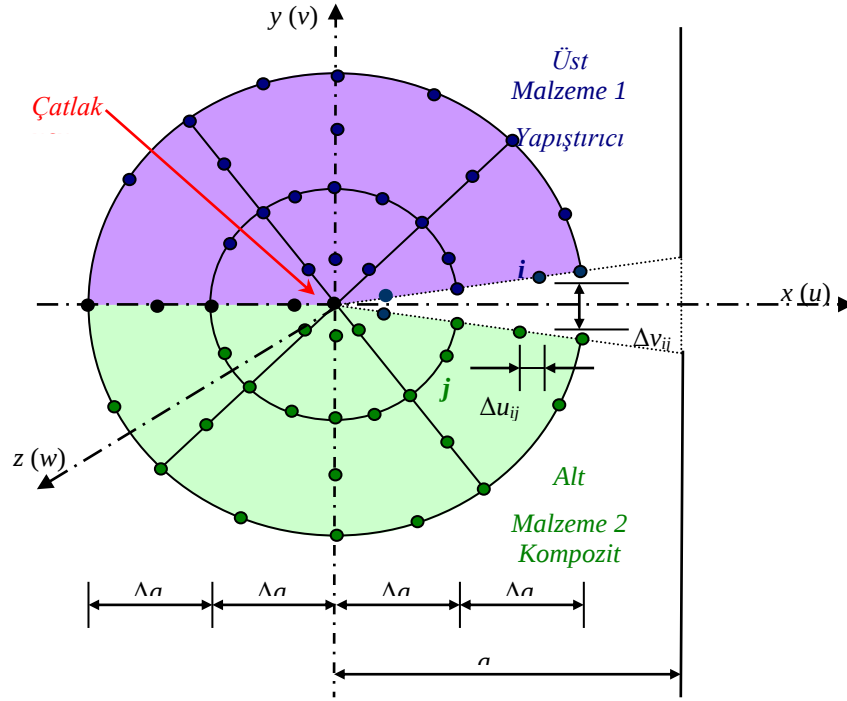
olarak tanımlanır.

2.2 Sayısal Metot

Gerilme şiddet faktörünün hesaplanmasında, yer değiştirme ekstrapolasyon metodu kullanılmıştır. Farklı anizotropik malzemeler arasında oluşan çatlak için gerilme şiddet faktörü, çatlak bölgesi yer değiştirmelerine bağlı olarak [10]

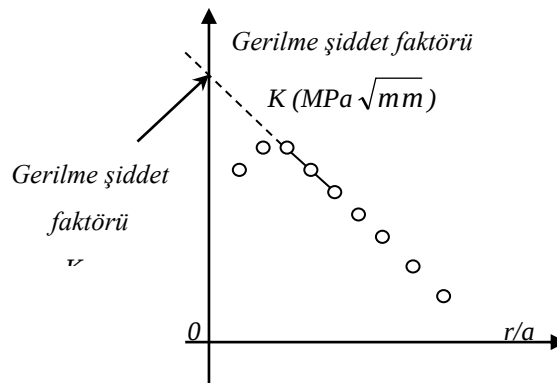
$$\begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \Lambda \left\langle \left\langle \frac{(1 + 2i\varepsilon_\alpha) \cosh(\pi\varepsilon_\alpha)}{(r/l_k)^{i\varepsilon_\alpha}} \right\rangle \right\rangle \bar{\Lambda}^{-T} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} \quad (39)$$

şeklinde yazılabilir. Burada Δu , Δv ve Δw ifadeleri $-x$, $-y$ ve $-z$ doğrultularındaki yer değiştirmelerdir (Şekil 2).



Şekil 2. Yer değiştirme ekstrapolasyon metodu için çatlak bölgesi sonlu eleman modeli ve yerdeğiştirmeler.

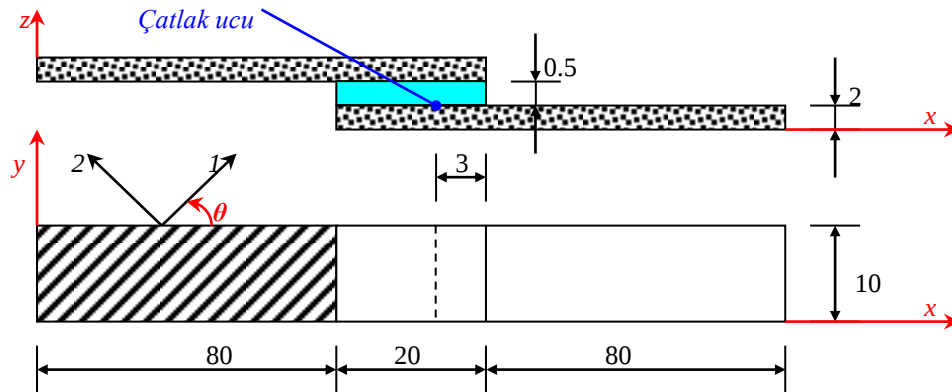
Çalışmada çatlak ucu yerdeğiştirmeleri sonlu elemanlar metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Çatlak yüzeyi boyunca, başlangıçta üst üste çakışan düğümlerin yükleme sonrası oluşan deplasman farkları Δu , Δv ve Δw , hesaplanarak, gerilme şiddet faktörünü elde etmek için Denklem (39)'da yerine yazılır. Elde edilen gerilme şiddet faktörleri ile hesaplamada kullanılan düğümlerin çatlak ucuna olan uzunlukları arasında grafik çizilir. Çatlak ucuna yakın bölgede birbirini takip eden üç noktadan elde edilen gerilme şiddet faktörü değerlerine doğru çizilerek korelasyon faktörü R^2 hesaplanır. Elde edilen doğrulardan R^2 değeri 1'e en yakın olanı seçilerek, seçilen doğrunun gerilme şiddet faktörü eksenini kestiği değer $r \rightarrow 0$ 'daki gerilme şiddet faktörü olarak kullanılır [17] (Şekil 3).



Şekil 3. Yerdeğiştirme ekstrapolasyon metoduna göre gerilme şiddet faktörünün $r \rightarrow 0$ 'da hesaplanması [18].

3. SAYISAL UYGULAMA

Tek yüzü yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit levha bağlantı boyutları Şekil 4'te gösterilmiştir. Kompozit ile yapıştırıcı arasında levha genişliği boyunca 3 mm boyunda düz bir çatlak olduğu kabul edilmiştir. 2 mm kalınlığa sahip kompozit levha, tek yönlü takviyelendirilmiş karbon/epoksiden üretilmiş olup, fiber oryantasyon açısı $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$ arasındadır. Karbon/epoksi kompozitin ve yapıştırıcının mekanik özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.



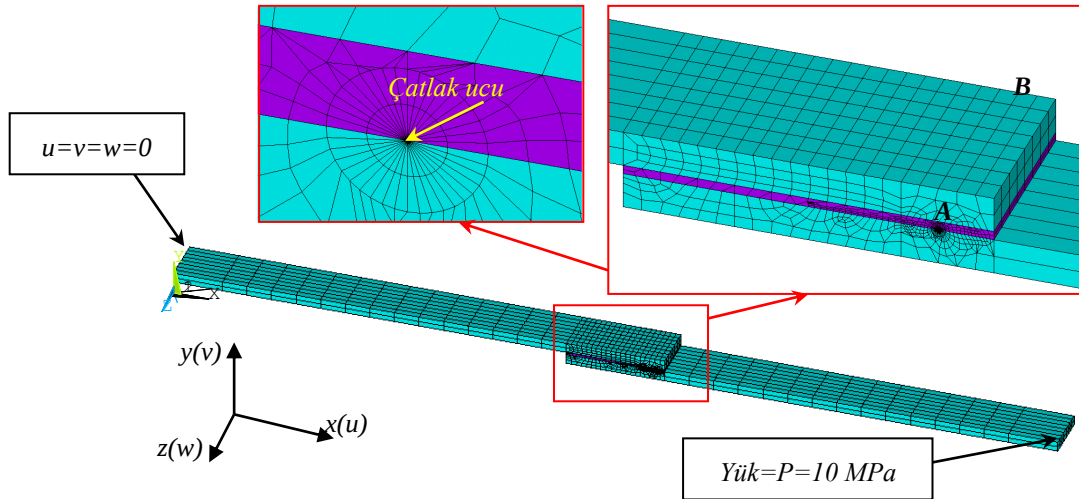
Şekil 4. Bağlantı boyutları.

Tablo1. Karbon/epoksi kompozit ve yapıştırıcının mekanik özellikleri.

Malzeme	E_1^* (MPa)	E_2, E_3 (MPa)	G_{12}, G_{13} (MPa)	G_{23} (MPa)	ν_{12}, ν_{13} (-)	ν_{23} (-)
Carbon/Epoksi [19]	145000	10000	7000	3700	0.25	0.5
Yapıştırıcı	1500	1500	576.923	576.923	0.3	0.3

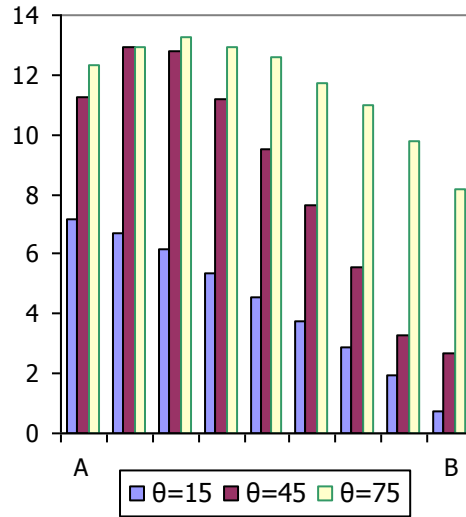
* E , G ve ν : Sırasıyla malzemelerin Elastisite modülü, Kayma modülü, Poisson oranıdır.

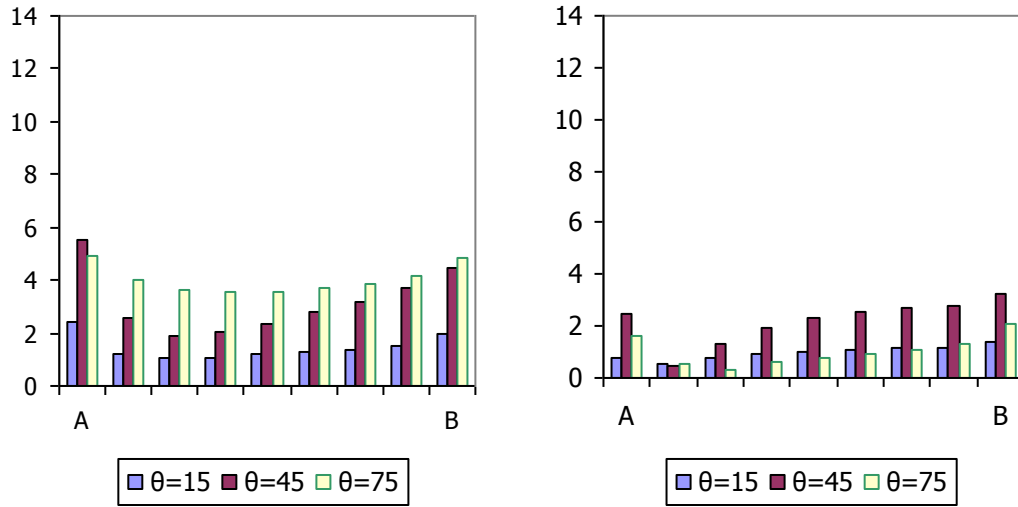
1-fiber doğrultusu, 2-fibere dik doğrultu, 3-kalınlık doğrultusudur.



Şekil 5. Problemin sonlu eleman modeli.

Problemin üç boyutlu sonlu elemanlar modeli Şekil 5'te gösterilmiştir [20]. Kenar çatlğa sahip levha, ve yapıştırıcı 20 düğümlü *Solid95* eleman tipi kullanılarak modellenmiş olup, çatlak ucunda tekil (singular) elemanlar kullanılmıştır. Her iki kompozit levhadaki fiber yönlendirmeleri ise levhalarda kullanılan elemanların koordinat sistemlerinin θ 'ya göre transform edilmesiyle elde edilmiştir [21]. Levha sağ kenarında yerdeğıştirmeler $u = v = w = 0$ 'dır, sol kenarda ise yer değıştirmeler $v = w = 0$ olup levha $P=10$ MPa üniform çekme yükü etkisi altındadır.

a) K_I gerilme şiddet faktörü ($\text{MPamm}^{1/2}$)



b) K_{II} gerilme şiddet faktörü ($\text{MPamm}^{1/2}$) c) K_{III} gerilme şiddet faktörü ($\text{MPamm}^{1/2}$)

Şekil 6. Levha genişliği boyunca gerilme şiddet faktörünün farklı fiber oryantasyon açıları (θ) için değişimi.

Şekil 6’da levha genişliği boyunca (A-B aralığı Şekil 5) çatlak ucu arayüzey gerilme şiddet faktörünün değişimi fiber takviye açıları $\theta=15^\circ$, 45° ve 75° için verilmiştir. Fiber takviye açısının artmasıyla K_I değerinin arttığı görülebilir. Ayrıca fiber yönlendirmesi üzerinde A kenarından B kenarına gidildikçe K_I gerilme şiddet faktörü azalmaktadır. Ancak bu düşüş küçük θ değerleri için daha fazladır. K_{II} ve K_{III} gerilme şiddet faktörleri K_I ’e göre A kenarında çok daha küçük değerlerde olup, B kenarında bu fark özellikler küçük θ açılarında kapanmaktadır. K_{II} değerleri levha kenarlarında maksimum olup, fiber takviye açısının artmasıyla artmaktadır. En büyük K_{III} değerleri $\theta=45^\circ$ için elde edilmiştir ancak bu değerler, K_I ve K_{II} gerilme şiddet faktörlerinin yanında küçüktür.

Bu çalışmada, yapıştırıcı ile birleştirilmiş kompozit levhalarda ara yüzey çatlak problemi sayısal olarak incelenmiştir. Çatlak ucu gerilme şiddet faktörü *Yerdeğiştirme Ekstrapolasyon Metodu* ile hesaplanmıştır. İzotropik/monoklinik malzeme ara yüzeyindeki çatlak ucu yerdeğiştirme ve gerilmeler için, anizotropik malzemeler için geçerli elastik rijitlik matrisleri cinsinden *Barnett-Lothe* tensör ifadeleri kullanılarak açık formüller elde edilmiştir. Sayısal uygulamada kompozit levhadaki fiber takviye açısının artmasının gerilme şiddet faktörü üzerinde etkili olduğu gösterilmiştir. Çalışma farklı tabakalı kompozitler için üç boyutlu delaminasyon problemlerinin sayısal çözümüne de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Gotoh, M., ‘‘Some Problems of Bonded Anisotropic Plates with Cracks along The Bond’’, International Journal of Fracture Mechanics, 3, 253-265, 1967.
- [2] Clements, D.L., ‘‘A Crack between Dissimilar Anisotropic Media’’, International Journal of Engineering Sciences, 9, 257-265, 1971.

- [3] Willis, J.R., ‘‘Fracture Mechanics of Interfacial Cracks’’, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 19, 353–368, 1971.
- [4] Bassani, J.L. ve J. Qu, ‘‘Crack on Bimaterial and Bicrystal Interfaces’’, Journal of The Mechanics and Physics of Solids, 37, 435–53, 1989.
- [5] Wu, K.C., ‘‘Stress Intensity Factor and Energy Release Rate for Interfacial Crack between Dissimilar Anisotropic Materials’’, ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 882–886, 1990.
- [6] Ikeda, T., M., Nagai, K., Yamanaga ve N., Miyazaki, ‘‘Stress intensity factor analyses of interface cracks between dissimilar anisotropic materials using the finite element method’’, Engineering Fracture Mechanics, 73, 2067–2079, 2006.
- [7] Hwu, C., ‘‘Explicit solutions for collinear interface crack problems’’, International Journal of Solids and Structures, 30, 301–312, 1993.
- [8] Stroh, A.N., ‘‘Steady state problems in anisotropic elasticity’’, Journal of Mathematical Physics, 41, 77–103, 1962.
- [9] Qian, W. ve Sun, C.T., ‘‘Calculation of Stress Intensity Factors for Interlaminar Cracks in Composite Laminates’’, Composites Science and Technology, 51, 637-650, 1997 .
- [10] Nagai, M., Ikeda, T. ve Miyakazi, N., ‘‘Stress intensity factor analysis of a three-dimensional interface crack between dissimilar anisotropic materials’’, Engineering fracture Mechanics, 74, 2481–2497, 2007.
- [11] Penado, F.E., ‘‘Singular intensity factors at bimaterial anisotropic interfaces’’, Composite Structures, 52, 323-333, 2001.
- [12] Liou, J.Y. ve Sung, J.C., ‘‘On the Barnett–Lothe tensors for anisotropic elastic materials’’, European Journal of Mechanics A/Solids, 27, 1140–1160, 2008.
- [13] Ting, T.C.T., ‘‘Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites’’, International Journal of Solids and Structures, 22, 965–983, 1986.
- [15] Sills, L.B., Wawrzynek, P.A., Carter, B., Ingrassia, A.R. ve Hershkovitz, I., ‘‘Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: part II — arbitrary geometry’’, Engineering Fracture Mechanics, 74, 1293–1307, 2007.
- [16] Wei, L. ve Ting, T.C.T., ‘‘Explicit expressions of the Barnett-Lothe tensors for anisotropic materials’’, Journal of Elasticity, 36, 67–83, 1994.
- [17] Sills L.B., Hershkovitz, I., Wawrzynek, P.A., Elisai, R. ve Ingrassia, A.R., ‘‘Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: part I — $z = 0$ is a symmetric plane’’, Engineering Fracture Mechanics, 72, 2328–2358, 2005.
- [18] Freed, Y. ve Sills, L.B., ‘‘A through interface crack between a $\pm 45^\circ$ transversely isotropic pair of materials’’, International Journal of Fracture, 133, 1-41, 2005 .
- [19] Gu, L., Kasavajhala, A.R.M., Zhao, S., ‘‘Finite element analysis of cracks in aging aircraft structures with bonded composite-patch repairs’’, Composites : Part B, 42, 505-510, 2011.
- [20] ANSYS 12.1 Academic Teaching Introductory Help Menu, 2009.

- [21] Madenci, E. ve Güven, I.,“The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS”, 686, Springer, New York, 2006.