

Varlığı ile hayatımı daha da anlamlı kılan gözümün nuru kızım Melisa Nur'a,

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışmamın her aşamasında beni yönlendiren, yardımlarını ve desteğini eksik etmeyen tez danışmanım Prof. Dr. Hüsnü Ata Erbay'a, tez çalışmamın bir bölümünde yakından çalışma fırsatı bulduğum ve tez çalışmamın zenginleşmesine katkı sağlayan, Tez İzleme Komitesi üyesi, Prof. Dr. Alp Eden'e ve tez çalışmam boyunca desteğini eksik etmeyen, Tez İzleme Komitesi üyesi, Prof. Dr. Faruk Güngör'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, ilgi ve destekleriyle beni sürekli teşvik eden sevgili aileme canı gönülden teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Aralık, 2006

Gülçin M. Muslu

İÇİNDEKİLER

ÖZET

v

SUMMARY

vii

1. GİRİŞ	1
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ DAVEY-STEWARTSON (GDS) SİSTEMİ	7
2.1 Giriş	7
2.2 Doğrusal Olmayan Schrödinger (NLS) denklemi	8
2.3 Davey-Stewartson (DS) sistemi	13
2.4 Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi	15
3. GDS SİSTEMİ İÇİN BAZI ANALİTİK SONUÇLAR	19
3.1 Giriş	19
3.2 Hiperbolik-Eliptik-Eliptik hal için bazı analitik sonuçlar	20
3.2.1 GDS sistemi için ölçek dönüşümü	20
3.2.2 NLS denklemi ve DS sistemi için sözde-konformal dönüşüm	21
3.2.3 GDS sistemi için sözde-konformal dönüşüm	23
3.2.4 GDS sistemi için patlama profilleri	25
3.2.4.1 Ozawa'nın yaklaşımı	25
3.2.4.2 "Radyal" çözüm yaklaşımı	26
3.2.4.3 u_A çözümünün patlaması	30
3.3 Eliptik-Eliptik-Eliptik hal için bazı analitik sonuçlar	33
3.3.1 GDS sistemi için patlama çözümleri ve literatür	33
3.3.2 Çözümlerin varlığı ve patlama için koşullar	34
3.3.3 GDS sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı	44
3.4 Yozlaşmış Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (YGDS) sistemi için bazı analitik sonuçlar	45
4. GDS SİSTEMİ VE RÖLAKSASYON SAYISAL YÖNTEMİ	53
4.1 Giriş	53
4.2 Rölaksasyon yöntemi ve NLS denkleminin patlama çözümleri	55
4.3 Rölaksasyon yöntemi ve DS sisteminin patlama çözümleri	60
4.3.1 Hiperbolik-Eliptik hal	63
4.3.2 Eliptik-Eliptik hal	64
4.4 Rölaksasyon yöntemi ve GDS sisteminin patlama çözümleri	67

4.4.1 Hiperbolik-Eliptik-Eliptik hal	69
4.4.2 Eliptik-Eliptik-Eliptik hal	70
4.4.2.1 $\gamma > 0$ durumu	71
4.4.2.2 $\gamma < 0$ durumu	74
4.5 YGDS sisteminin patlama çözümleri	75
4.5.1 $\gamma > 0$ durumu	76
4.5.2 $\gamma < 0$ durumu	77
5. GDS SİSTEMİ VE SPLIT-STEP FOURIER YÖNTEMİ	79
5.1 Giriş	79
5.2 Split-step Fourier yöntemi ve NLS denkleminin patlama çözümleri	80
5.3 Split-step Fourier yöntemi ve DS sisteminin patlama çözümleri	86
5.3.1 Hiperbolik-Eliptik hal	88
5.3.2 Eliptik-Eliptik hal	89
5.4 Split-step Fourier yöntemi ve GDS sisteminin patlama çözümleri	92
5.4.1 Hiperbolik-Eliptik-Eliptik hal	94
5.4.2 Eliptik-Eliptik-Eliptik hal	96
5.4.2.1 $\gamma > 0$ durumu	96
5.4.2.2 $\gamma < 0$ durumu	97
5.5 YGDS sisteminin patlama çözümleri	99
5.5.1 $\gamma > 0$ durumu	99
5.5.2 $\gamma < 0$ durumu	100
6. SONUÇLAR	102
KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	109

GENELLEŞTİRİLMİŞ DAVEY-STEWARTSON SİSTEMİNİN PATLAMA ÇÖZÜMLERİ: ANALİTİK VE SAYISAL SONUÇLAR

ÖZET

Bu tezde, Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sisteminin patlama çözümlerini araştırmak için yapılmış bir çalışmanın analitik ve sayısal sonuçları sunulmaktadır. GDS sistemi

$$\begin{aligned}i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} &= \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u \\ \varphi_{1,xx} + m_2 \varphi_{1,yy} + n \varphi_{2,xy} &= (|u|^2)_x \\ \lambda \varphi_{2,xx} + m_1 \varphi_{2,yy} + n \varphi_{1,xy} &= (|u|^2)_y,\end{aligned}$$

genelleştirilmiş elastik bir malzemeden oluşan sonsuz bir ortamdaki zayıf doğrusal olmayan dalgaların yayılımını karakterize eden model olarak ortaya çıkmıştır. Bu modelde, $u(x, y, t)$ kısa enine dalganın kompleks genliğidir, $\varphi_1(x, y, t)$ ve $\varphi_2(x, y, t)$ reel değerli fonksiyonları, sırasıyla, uzun boyuna ve uzun enine dalga modlarıdır, x ve y uzaysal koordinatlarıdır ve t zamandır. $\sigma, \kappa, \gamma, \lambda, m_1, m_2, n$ parametreleri $(\lambda - 1)(m_2 - m_1) = n^2$ bağıntısını sağlayan reel sabitlerdir. Kübik Doğrusal Olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ve Davey-Stewartson (DS) sistemi yukarıdaki sistemin iki iyi bilinen özel durumudur. GDS sisteminin önemli bir özel durumu $\lambda = 1, m_1 = m_2, n = 0$ koşulları sağlandığı zaman ortaya çıkar. Bu özel durum Yozlaşmış Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (YGDS) sistemi olarak adlandırılır. GDS sistemi $(\sigma, m_1, m_2, \lambda)$ katsayılarının işaretlerine göre sınıflandırılır. Bu tez çalışmasında, $(-, +, +, +)$ ve $(+, +, +, +)$ işaretlerine karşılık gelen, sırasıyla, hiperbolik-eliptik-eliptik (HEE) ve eliptik-eliptik-eliptik (EEE) durumları gözönüne alınmıştır. Düzgün başlangıç datasına sahip bir çözümün herhangi bir normu sonlu zamanda sınırsız oluyorsa, bu çözüm GDS sisteminin patlama çözümü olarak adlandırılır.

Bu tez altı temel sonuç içermektedir. Birinci olarak, HEE durumda, GDS sisteminin sözde-konformal invaryantlığını kullanarak bir analitik patlama çözümü elde edilmiştir. İkinci olarak, EEE durumda, $p > 2$ için çözümlerin L^p -normlarının $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiği gösterilmiştir. Üçüncü olarak, EEE durumda, sonlu zamanda patlama ve global varlık hakkında yeni sonuçlar sunulmuş ve bu yeni sonuçların $\gamma < 0$ durumunda κ parametresinin bütün değerlerini kapsadığı vurgulanmıştır. Dördüncü olarak, YGDS sisteminin bir doğrusal olmayan dönüşüm yardımıyla DS sistemine dönüştüğü gösterilmiştir. Beşinci olarak, GDS sistemini çözmek için röleksasyon sayısal yöntemi kullanılmış ve sayısal şemanın patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu gözlenmiştir. Altıncı olarak, GDS sistemini çözmek için bir diğer sayısal yöntem olan split-step Fourier yöntemi kullanılmış ve, bu yöntemin röleksasyon yöntemi ile karşılaştırılmasından, split-step yönteminin hesaplama zamanı açısından röleksasyon yönteminden daha etkin olduğu bulunmuştur.

Tez, kendi içinde bütünlüklü, altı bölümden oluşur. Her bir bölümün içeriği aşağıda verilmiştir. Bölüm 1, dispersif doğrusal olmayan dalga denklemlerinin patlama çözümleri konusuna bir genel giriştir. Bölüm 2, NLS denklemi, DS sistemi ve GDS sistemine kısa, genel, öğretici bir bakış sunar. Bu doğrusal olmayan dalga denklemlerinin tamamı için, kütlenin korunumuna, enerjinin korunumuna ve momentumun korunumuna karşılık gelen korunum yasaları Noether teoremi yardımıyla türetilmiştir. Bölüm 3’de, GDS sisteminin HEE ve EEE durumları için, sonlu zamanda patlamayla ilgili yeni analitik sonuçlar sunulmuştur. GDS sisteminin HEE durumunda, ilk olarak GDS sistemi için bir ölçek dönüşümü tanıtılmış ve bu dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklük elde edilmiştir. Daha sonra, literatürde DS sistemi için verilmiş sözde-konformal dönüşüm GDS sistemine genişletilmiş ve bu dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklük Noether teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Son olarak, sözde-konformal dönüşüm üzerine inşa edilmiş bir analitik patlama çözümü iki farklı yaklaşım kullanılarak elde edilmiştir. GDS sisteminin EEE durumunda, teklik oluşumu ve global varlık hakkında yeni analitik sonuçlar sunulmuştur. GDS sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelenmiş ve $p > 2$ için çözümlerin L^p normlarının zamanda sifra yakınsadığı ispatlanmıştır. Bundan başka, YGDS sistemi DS sistemine dönüştürülerek, YGDS sisteminin düzgün başlangıç datasına sahip sonlu zamanda patlayan çözümlerinin mevcut olduğu gösterilmiştir. Bölüm 4’de, GDS sisteminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için röleksasyon sayısal yöntemi kullanılmıştır. Sayısal şema, GDS ve YGDS sistemleri için verilmiş analitik sonuçlar kullanılarak, test edilmiş ve patlama olayını yakalamada başarılı olduğu bulunmuştur. Bölüm 5’de, GDS sistemini çözmek için split-step Fourier sayısal yöntemi kullanılmıştır. Sayısal deneyler, split-step yönteminin röleksasyon yöntemine kıyasla sadece daha hızlı değil daha doğru da olduğunu göstermektedir. Bölüm 6, sonuçların kısa bir özetini ve gelecek için çalışma önerilerini kapsamaktadır.

BLOW-UP SOLUTIONS OF THE GENERALIZED DAVEY-STEWARTSON SYSTEM: ANALYTICAL AND NUMERICAL RESULTS

SUMMARY

This thesis presents the analytical and numerical results of a study conducted to investigate blow-up solutions of the generalized Davey-Stewartson (GDS) system. The GDS system

$$\begin{aligned} i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} &= \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u \\ \varphi_{1,xx} + m_2 \varphi_{1,yy} + n \varphi_{2,xy} &= (|u|^2)_x \\ \lambda \varphi_{2,xx} + m_1 \varphi_{2,yy} + n \varphi_{1,xy} &= (|u|^2)_y \end{aligned}$$

arises as a model for the propagation of weakly nonlinear waves in a bulk medium composed of an elastic material with couple stresses. In this model, $u(x, y, t)$ is the complex amplitude of the short transverse wave mode, the real-valued functions $\varphi_1(x, y, t)$ and $\varphi_2(x, y, t)$ are the long longitudinal and long transverse wave modes, respectively, x and y are the spatial coordinates and t is the time. The parameters $\sigma, \kappa, \gamma, \lambda, m_1, m_2, n$ are real constants that satisfy the relation $(\lambda-1)(m_2-m_1) = n^2$. The cubic nonlinear Schrodinger (NLS) equation and the Davey-Stewartson (DS) system are two well-known special cases of the above system. An important special case of the GDS system occurs when $\lambda = 1, m_1 = m_2, n = 0$. It is called the degenerate generalized Davey-Stewartson (YGDS) system. The GDS system is classified according to the signs of $(\sigma, m_1, m_2, \lambda)$. The hyperbolic-elliptic-elliptic (HEE) and elliptic-elliptic-elliptic (EEE) cases, corresponding to $(-, +, +, +)$ and $(+, +, +, +)$, respectively, are considered in this thesis study. A solution of the GDS system with smooth initial data is said to be a blow-up solution if some norm of the solution becomes unbounded in finite time.

There are six main results in this thesis. First, in the HEE case an explicit blow-up solution is obtained using the pseudo-conformal invariance of the GDS system. Second, in the EEE case it is shown that for $p > 2$ the L^p -norms of the solutions decay to zero as $t \rightarrow \infty$. Third, in the EEE case, new results about global existence and blow-up in finite time are presented and it is emphasized that these new results cover the whole parameter range for κ when $\gamma < 0$. Fourth, it is shown that the YGDS system reduces to the DS system through a nonlinear transformation. Fifth, the relaxation numerical method is used to solve the GDS system and it is observed that the numerical scheme is successful in detecting blow-up phenomena. Sixth, the split-step Fourier method is another numerical method used for solving the GDS system and a comparison with the relaxation method shows that it is computationally more efficient than the relaxation method.

The thesis is organized in six relatively self-contained chapters. Details of each chapter are given as follows. Chapter 1 is a general introduction to the subject of

blow-up solutions of nonlinear wave equations with dispersion. Chapter 2 gives a brief tutorial overview of the NLS equation, the DS system and the GDS system. For all of these nonlinear wave equations, the conservation laws corresponding to the conservation of mass, the conservation of momentum and the conservation of energy are derived with the help of Noether's theorem. In Chapter 3, new analytical results related to blow-up in finite time for the HEE and EEE cases of the GDS system are presented. In the HEE case of the GDS system, first, a scale transformation is introduced for the GDS system and the conserved quantity corresponding to this transformation is obtained. Next, the pseudo-conformal transformation given for the DS system in the literature is extended to the GDS system and the conserved quantity corresponding to this transformation is obtained using Noether's theorem. Finally, an explicit blow-up solution based on the pseudo-conformal transformation is obtained using two different approaches. In the EEE case of the GDS system, new analytical results about global existence and singularity formation are presented. Asymptotic behavior of the solutions of the GDS system is investigated and it is proved that for $p > 2$ the L^p -norms of the solutions converge to zero in time. Moreover, it is shown, by transforming the YGDS system into the DS system, that the YGDS system has solutions that blow-up in finite time from smooth initial data. In Chapter 4, the relaxation numerical method is used to obtain approximate solutions of the GDS system. The numerical scheme is tested using the analytical results given for the GDS system and the YGDS system and is found to exhibit promising performance in detecting blow-up phenomena. In Chapter 5, the split-step Fourier numerical method is used to solve the GDS system. Numerical experiments show that the split-step method is not only faster but more accurate than the relaxation method. Chapter 6 contains a brief summary of the results and also covers suggestions for future work.

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan dalga denklemleri akışkanlar dinamiği, katı hal fiziği, plazma fiziği ve optik gibi fiziğin bir çok farklı alanında dalga yayılımını modelleyen denklemler olarak ortaya çıkmaktadırlar. Bu nedenle son yıllarda hem fizikçilerin hem de matematikçilerin çeşitli açılardan ilgisini çekmektedirler. Dalga yayılımının lineer ve lineer olmayan şeklinde sınıflandırılmasının yanında bir diğer sınıflandırılması da hiperbolik (dispersif olmayan) dalga ve dispersif dalga sınıflandırmasıdır [1]. Hiperbolik dalga tanımı, dalga denkleminin çözümünden bağımsız olup, matematiksel olarak hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denklem ile tanımlanabilen dalgalar için kullanılır. Dispersif dalga tanımı ise, denklem tipi yerine çözümün formu üzerine inşa edilen bir tanımdır. Dispersif dalgalar faz hızının dalga sayısına bağlı olduğu dalgalar, yani farklı dalga sayılarına karşılık gelen dalga modlarının farklı hızlarda yayıldığı dalgalardır. Böylece, doğrusal olmayan etkiler dalganın dikleşmesine neden olurken dispersif etkiler dalganın dağılmasına neden olacaktır. Zayıf doğrusal olmayan bazı dalga denklemlerinin soliton adı verilen ve dispersiyon ve doğrusal olmayan etkilerin dengelenmesi sonucu oluşan çok özel dalga çözümlerine sahip olduğu bilinmektedir. Soliton çözümleri uzayda lokalize olmuş, sabit hızla yayılan ve şeklini koruyan dalgaları gösterir. Bu dalgaların en önemli özelliği çarpışmalar sonucunda hız ve şekillerinde bir değişiklik olmamasıdır. Soliton çözümlerine sahip zayıf doğrusal olmayan dalga denklemlerinin en basit olanları ve aynı zamanda en çok bilinenleri Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ve Doğrusal Olmayan Schrödinger (NLS) denkleminin bir boyutlu ve kübik doğrusal olmayan terim içeren halidir. KdV denklemi zayıf dispersif bir ortamda yayılan uzun dalgaların yayılımını karakterize eden denklem olarak ortaya çıkarken, bir boyutlu NLS denklemi kuvvetli dispersif bir ortamda yayılan kısa dalgaların (kompleks) genliklerinin değişimini tanımlayan denklem olarak ortaya çıkar.

Bir boyutlu kübik Doğrusal Olmayan Schrödinger denklemi için tanımlanmış başlangıç-değer problemi, yeteri kadar hızlı bir şekilde azalan düzgün bir başlangıç datası için global olarak iyi tanımlıdır [2, 3]. Ancak bu denklemin iki uzay boyutuna genişletilmesi olan ve özellikle doğrusal olmayan optik gibi alanlarda uygulama bulan iki boyutlu kübik NLS denklemi için aynı durum geçerli değildir. Bu denklemin eliptik hali için, başlangıç datasının uygun bir normunun yeteri kadar büyük olması halinde, doğrusal olmayan etkilerin dispersif etkilerden daha baskın olması sonucu, çözümlerinin dikleşeceği ve sınırsız büyüme sonucu sonlu bir zamanda tekilliğin ortaya çıkacağı bilinmektedir [2]. İki boyutlu NLS denkleminin tanımladığı fiziksel büyüklükler sınırsız olamayacağı için, bunun anlamı tekillik civarında iki boyutlu NLS denkleminin geçerliliğinin kalmayacağı ve bu denklemin yerine yeni bir denklemin yazılması gerektiğidir. Bu yeni denklem başlangıçta zayıf ama çözüm dikleştikçe katkısı giderek artan ek fiziksel katkılar, örneğin dissipasyon veya daha kuvvetli dispersiyon gibi, içerecek ve böylece tekillik oluşumunu engelleyebilecektir. Düzgün başlangıç koşullarına sahip bir çözümün sonlu zamanda tekilliğe sahip olmasının, yani patlamasının, en basit örneğini içeren iki boyutlu NLS denklemi bu özelliği nedeniyle çok sayıda matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu doğrultuda yapılan araştırmalar sonucunda eliptik NLS denkleminin doğrusal olmayan teriminin katsayısındaki parametre cinsinden başlangıç-değer probleminin global olarak iyi tanımlı olduğu veya sonlu zamanda patlama çözümlerine sahip olduğu parametre aralıkları belirlenmiştir. Bu tez çalışması açısından ilginç olan nokta bu aralıkların sözkonusu parametre cinsinden bütün değerleri kapsaması, yani global varlık ve sonlu zamanda patlamanın geçerli olduğu aralıklar arasında veya bu aralıklar dışında herhangi bir boşluğun olmamasıdır.

Benzer bir durum, yine su dalgaları ve doğrusal olmayan optik gibi birçok alanda ortaya çıkan ve düzlemde bir kısa dalga ile bir uzun dalganın etkileşimini karakterize eden DS sistemi için de geçerlidir [2]. DS sistemi, iki denklemi birbirine bağlayan terimler bir an için ihmal edildiğinde, iki boyutlu kübik NLS denklemi ve bir lineer ikinci mertebe kısmi türevli diferansiyel denklemden oluşur. Bu iki denklemden birinin hiperbolik diğerinin eliptik olduğu durumda yani hiperbolik-eliptik (HE) ve eliptik-hiperbolik (EH) durumlarında, DS sisteminin soliton çözümlerine sahip olduğu bilinmektedir. Ancak gerek HE durumda gerekse eliptik-eliptik (EE)

durumda parametrelerin değerlerine bağlı olarak DS sisteminin sonlu zamanda patlayan cözömlere sahip olduğu gösterilmiştir. HE durumunda, DS sisteminin sözde-konformal dönüşüm olarak adlandırılan bir özel dönüşüm altında invaryant kalması kullanılarak, ve belirli parametre değerleri için, bir analitik patlama cözümü elde edilmiştir [4]. EE durumunda ise, yine iki boyutlu kübik NLS denkleminde olduğu gibi, Cauchy probleminin global olarak iyi tanımlı olduğu ve patlama cözömlerine sahip olduğu parametre aralıkları belirlenmiştir [2]. Bu tez calışması açısından ilginç olan nokta, NLS denkleminde olduğu gibi, bu aralıkların birleşiminin bütün reel eksenini kapsamasıdır.

Fizik ve mühendisliğin değişik alanlarında sürdürölen araştırmaların sonucu olarak, yeni bazı fiziksel etkileri katmak için gerek NLS denklemine gerekse DS sistemine bazı yeni terimler ilave edilmesi ve hatta bazen de yeni denklemler ilave edilmesi gündeme gelmiştir. Yakın bir zamanda, genelleştirilmiş elastik bir malzemeden oluşan sonsuz bir elastik düzlemde yayılan iki uzun dalga ile bir kısa enine dalganın etkileşimi incelenmiş ve bu etkileşimin, şimdiki tez calışmasında Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi olarak adlandırılacak bir denklem sistemi ile modellenebileceği gösterilmiştir [5]. Burada kısa dalga esas olarak bir enine dalga iken, iki uzun dalgadan biri enine dalga diğeri boyuna dalgadır. Bu yeni sistem üç denklemden oluşmakta ve bir NLS denklemi tipinde olan denklem, esas olarak, kısa dalganın kompleks genliğinin değişimini tanımlamaktadır. Bu üç denklem arasındaki bağlantıyı sağlayan terimler ihmal edildiğinde, esas olarak uzun dalgaların değişimini tanımlayan diğer iki denklem iki bağlantılı diferansiyel denkleme indirgenir. GDS sistemi parametrelerinin işaretlerine bağlı olarak sınıflandırılmış ve eliptik-eliptik-eliptik (EEE) olarak adlandırılan bir durumda global varlık ve sonlu zamanda patlama ağılarından incelenmiştir [6]. Bu inceleme sonucunda global varlık ve sonlu zamanda patlama için parametreler üzerine getirilen kısıtlamaların, DS sisteminden farklı olarak, parametrelerin bütün değerlerini kapsamadığı gözlenmiştir. Bu durum, yani global varlık ve sonlu zamanda patlama ağılarından hiçbir sonucun elde edilemediği parametre aralıklarının bulunması açık bir problem olarak araştırmacıların dikkatine sunulmuştur.

Bu tez çalışmasının amaçlarından biri, yukarıda belirtilen ve bir sonuç elde edilemeyen parametre aralıklarında global varlık ve sonlu zamanda patlama açılarından ne olduğunu gerek analitik gerekse sayısal teknikler kullanarak ortaya çıkarmak ve bu doğrultuda mümkünse belirsizlik aralıklarını tamamen kaldırmak ve eğer bu mümkün değilse en azından aralıkları küçültmektir. Tez çalışmasının diğer bir amacı, hiperbolik-eliptik-eliptik (HEE) olarak adlandırılan durumda, DS sistemi için yapıldığı gibi, sözde-konformal dönüşüm yardımıyla bir analitik patlama çözümü inşa etmektir. Tez çalışması, ayrıntıları ileride verileceği üzere, her iki amacına da hemen hemen tamamen ulaşmış durumdadır.

Tez çalışmasında sunulan yeni analitik sonuçlar, literatürde sunulan bazı çalışmaları temel alarak elde edilmiştir. DS sistemi için [4]'de uygulanan yaklaşım GDS sistemine genişletilmiş ve, sözde-konformal dönüşüm yardımıyla, HEE durumunda GDS sistemi için bir analitik patlama çözümü elde edilmiştir. EEE durumunda ise, GDS sistemi için tanımlı Cauchy probleminin çözümünün global varlığı ve sonlu zamanda patlaması ile ilgili olarak [6]'da verilen iki ayrı teoremin ispatları esas alınarak, yeni parametre aralıkları elde edilmiş ve global varlık ve sonlu zamanda patlama için verilen koşulların en azından bazı durumlarda boşluk içermediği ve eğer boşluk içeriyorsa da bu boşlukların literatürde sunulanlardan daha küçük olduğu gösterilmiştir.

Tez çalışmasında sunulan sayısal sonuçlar iki farklı sayısal yöntem, split-step ve rölaksasyon yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Literatürde DS sistemini sayısal olarak çözmek için kullanılmış bu iki yöntem [7, 8], bu tez çalışmasında GDS sistemine genişletilmiş ve yapılan sayısal deneyler sonucunda bulunan sayısal sonuçlarla analitik sonuçların tam bir uyum içerisinde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, bir sonlu fark şeması olması nedeniyle esas olarak "lokal" bir yöntem olan rölaksasyon yöntemi ile bir Fourier spektral şeması olması nedeniyle esas olarak bir "global" yöntem olan split-step yönteminin tamamen farklı yapılarına rağmen benzer sayısal sonuçlar verdiği tespit edilmiştir. GDS sistemini çözmek için bu iki sayısal yöntemin seçilmesindeki diğer nedenler ileride ayrıca belirtilecektir.

Tez çalışmasının diğer bölümlerinin içerikleri aşağıdaki gibidir. Bölüm 2'de NLS denklemi, DS sistemi ve GDS sistemi tanıtılacaktır. Daha sonra, bu denklemler

için kütlenin korunumu, enerjinin korunumu ve momentumun korunumuna karşılık gelen korunum yasaları Noether teoremi yardımıyla yeniden türetilenlerdir. Son olarak, bu dalga denklemlerinin patlama çözümleri ve patlama koşulları için bilinenler kısaca özetlenecektir.

Bölüm 3’de GDS sisteminin HEE ve EEE halleri için yeni bazı analitik sonuçlar verilecektir. İlk olarak, GDS sistemi için bir ölçek dönüşümü tanıtılacaktır. Bu ölçek dönüşümüne karşılık gelen korunan büyüklük elde edilecek ve varyans özdeşliği ile arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Daha sonra, literatürde NLS denklemi ve DS sistemi için sunulmuş sözde-konformal dönüşümler tanıtılacaktır. DS sistemi için verilen sözde-konformal dönüşüm GDS sistemine genişletilecek ve bu dönüşüm ile ilgili korunan büyüklük iki farklı yöntem kullanılarak elde edilecektir. Son olarak, sözde-konformal dönüşüm yardımıyla, aynı analitik patlama çözümleri iki farklı yaklaşım kullanılarak elde edilecektir. GDS sisteminin EEE hali için, ilk olarak, literatürde verilen patlama koşulları ifade edilecek ve daha sonra yeniden türetilen iyileştirilmiş patlama koşulları verilecektir. Bu bölümde son olarak, GDS sisteminin belirli bir kümeden seçilen çözümlerinin zaman içinde asimptotik davranışı incelenecek ve çözümlerin L_p normlarının $p > 2$ için sıfıra gittiği gösterilecektir.

Bölüm 4’de ise, GDS sistemini oluşturan denklemlere farklı zaman adımlarında yaklaşarak, nonlinear terimleri hesaplama rahatlığı sağlayan röleksasyon sayısal yöntemi GDS sistemini çözmek için kullanılmıştır. İlk olarak, röleksasyon şeması iki boyutlu NLS denklemi ve DS sistemi için tanıtılmış ve şema ve bilgisayar programı literatürde verilen sonuçlar ile karşılaştırarak doğrulanmıştır. Daha sonra, röleksasyon yöntemi GDS sistemine genişletilmiştir. Sayısal şema GDS sisteminin EEE ve HEE halleri ve GDS sisteminin bir özel hali olan Yozlaşmış Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (YGDS) sistemi için verilen analitik sonuçlar ile test edilmiş ve sayısal şemanın patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu gözlenmiştir.

Bölüm 5’de, GDS sistemi için tanımlı başlangıç-değer problemini alt problemlere ayrıştırarak, orijinal problemin çözümüne alt problemlerin ardışık olarak çözülmesiyle yaklaşan split-step yöntemi GDS sistemini çözmek için kullanılmıştır. İlk olarak, split-step yöntemi iki boyutlu NLS denklemi için tanıtılmıştır. NLS

denklemleri için split-step yönteminin zamanda birinci merteye ve ikinci merteye yaklaşımlarına karşılık gelen algoritmaları verilmiştir. Sayısal şemaların ve bilgisayar programlarının doğruluğunu test etmek için, bazı örnek problemler için hesaplanan patlama zamanları literatürde verilmiş sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Daha sonra, split-step yöntemi DS sistemine uygulanmış ve yöntemin zamanda birinci ve ikinci merteye olan yaklaşımları sunulmuştur. Sayısal şemaların doğruluğu DS sisteminin EE ve HE halleri için verilmiş patlama zamanları ile ilgili sonuçlarla karşılaştırma yaparak doğrulanmıştır. Son olarak, split-step yöntemi GDS sistemine genişletilmiştir. Sayısal şema hem GDS sisteminin EEE, HEE halleri ve YGDS sistemi için literatürde verilen analitik sonuçlar ile hem de Bölüm 4’de rölaksasyon yöntemi yardımıyla elde edilen sayısal sonuçlar ile test edilmiştir. Bölüm 6’da, sonuçların genel bir değerlendirmesi yapılmış ve gelecekte çalışılması düşünülen konular sunulmuştur.

Son olarak, doğrusal olmayan dalga denklemlerinin patlama çözümleri hakkında çok sayıda makalenin yayınlandığını ve bunların tamamını kapsayan bir inceleme yazısının bu tez çalışmasının çerçevesi içerisinde düşünülmediğini, burada kaynak olarak verilen makalelerin tez çalışması ile ilgili yakından ilgili olan makaleler olduğunu belirtmek uygun olacaktır.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ DAVEY-STEWARTSON (GDS) SİSTEMİ

2.1 Giriş

Bu bölümde, tez boyunca ele alınacak olan doğrusal olmayan dalga denklemleri, NLS denklemi, DS sistemi ve GDS sistemi, tanıtılacaktır. Ele alınan denklemlerin bazı analitik özellikleri ifade edilecek ve kütle, enerji ve momentumun korunumuna karşılık gelen korunum yasaları Noether teoremi yardımıyla yeniden türetilenler olacaktır. Ayrıca, bu denklemlerin patlama çözümleri ve patlama koşulları için literatürde bilinenler kısaca özetlenecektir.

Şimdiki Giriş altbölümünü bitirmeden önce, bu ve bundan sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanımları vermek uygun olacaktır: $1 < p < \infty$ olmak üzere $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx < \infty$ koşulunu sağlayan $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) ölçülebilir fonksiyonlarının oluşturduğu $L^p(\mathbb{R}^n)$ uzayı için norm

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

ile tanımlanır.

α_1, α_2 pozitif tamsayılar olmak üzere, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ çoklu indisin mertebesi

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$$

ile hesaplanır. Verilen bir α çoklu indisi için $D^\alpha u(x)$ türevi

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$$

ile tanımlanır. $m > 0$ ve $1 \leq p \leq \infty$ iken

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^2) : D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^2), \quad \forall |\alpha| \leq m\},$$

uzayı Sobolev uzayı olarak adlandırılır. Bu uzaydaki norm ise,

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

ile verilir. $p = 2$ olması durumunda Sobolev uzayları $H^m(\mathbb{R}^2)$ ile gösterilir [9]:

$$H^m(\mathbb{R}^2) = W^{m,2}(\mathbb{R}^2).$$

Schwartz uzayı ise $x^\beta = x_1^\beta x_2^\beta$ olmak üzere

$$\mathcal{S} = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\beta D^\alpha u(x)| = 0, \quad \forall \alpha, \beta \text{ çoklu indis için}\}$$

şeklinde tanımlanır [9]. Bu uzay test fonksiyonları uzayı olarak da adlandırılır. $\mathcal{S}'$ dual uzayı ise distribüsyonlar ya da genelleştirilmiş fonksiyonlar uzayı adını alır [9]. Son olarak, kompleks eşleniği göstermek için $*$ sembolünün kullanıldığı belirtilmelidir.

2.2 Doğrusal Olmayan Schrödinger denklemi

NLS denklemi genel halde

$$i u_t + \Delta u + \lambda |u|^{2\sigma} u = 0, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad (2.1)$$

şeklinde verilen bir doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Burada u fonksiyonu uzaysal koordinatların ve t zamanının kompleks değerli bir fonksiyonu olup, λ ve σ reel parametrelerdir. Ayrıca $i = \sqrt{-1}$ olup, Δ operatörü d boyutlu uzayda Laplace operatörünü göstermektedir. NLS denklemi akışkanlar dinamiği, plazma fiziği, doğrusal olmayan optik gibi fiziğin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır. Örneğin bir uzay boyutu için, NLS denklemi kuvvetli dispersif bir ortamda yayılan zayıf doğrusal olmayan dalgaların genlik modülasyonunu karakterize eden denklem olarak ortaya çıkmıştır [10]. İki uzay boyutu için, kırılma indeksi elektromanyetik alanın genliğinin fonksiyonu ile orantılı olan bir elektromanyetik alanda ışınların yayılımını karakterize eden denklem olarak ortaya çıkmıştır [11, 12]. Üç uzay boyutu için, Langmuir dalgalarının Zakharov modelinin limit durumu olarak türetilmiştir [13].

NLS denklemini

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_t - u u_t^*) - |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{\sigma + 1} |u|^{2\sigma+2} \quad (2.2)$$

Lagrange yoğunluk fonksiyonuna karşılık gelen Euler-Lagrange denklemi olarak türetmek mümkündür. Bir boyutlu kübik NLS denklemi ters saçılma tekniği

anlamında tamamen integre edilebilir bir denklemdir [14]. Bu sebeple, $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ iken u fonksiyonunun ve türevlerinin yeterince hızla sıfıra gittiği varsayımı altında, bir boyutlu kübik NLS denkleminin çözümlerinin sonsuz sayıda korunum yasasını sağladığı bilinmektedir. Eğer, (2.1) denklemi u^* ile çarpılır, sonuç denklemin eşleniği alınır, bulunan iki denklem taraf tarafa çıkarılır ve elde edilen denklem $\mathbb{R}^d$ üzerinde integre edilirse, NLS denkleminin çözümlerinin

$$I_1(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} = I_1(0) \quad (2.3)$$

korunum yasasını sağladığı gösterilir. Bu şekilde direkt hesaplama yöntemi ile NLS denkleminin sağladığı daha karışık korunum yasalarını bulmak oldukça zordur. Bu sebeple düzgün çözümler için daha sistematik bir yaklaşım uygulanmasına izin veren Noether teoreminden yararlanılacaktır.

Noether teoremi kısaca şu şekilde ifade edilebilir: Eğer bir varyasyonel problem bir dönüşüm ailesi altında invariant kalıyor ise, bu varyasyonel probleme karşılık gelen Euler denklemi bir korunum yasası şeklindedir. Şimdi, $x_0, x_1, \dots, x_d$ şeklinde $(d+1)$ bağımsız değişken, bu bağımsız değişkenlerin $u_1, u_2, \dots, u_m$ şeklinde m bilinmeyen fonksiyonunu ve bu fonksiyonların birinci mertebe kısmi türevlerini içeren bir

$$J\{u_1, u_2, \dots, u_m\} = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} F(x_0, x_1, \dots, x_d, u_1, u_2, \dots, u_m, u_{1,x_0}, u_{1,x_1}, \dots, u_{1,x_d}, \dots, u_{m,x_d}) dx_0 dx_1 \dots dx_d$$

fonksiyoneli için Noether teoremi ifade edilecektir. Ancak sunumda sadelik sağlamak amacıyla $u = (u_1, \dots, u_m)$ ve $x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_d)$ notasyonları kullanılacak, ayrıca $dx_0 dx_1 dx_2 \dots dx_d$ ifadesi dx ile gösterilecektir.

Noether Teoremi: ([15], sayfa 177)

Eğer

$$J\{u\} = \int_D F(x, u, \nabla u) dx$$

fonksiyoneli bir D keyfi bölgesi için

$$x'_i = \Phi_i(x, u, \nabla u; \epsilon) \sim x_i + \epsilon \varphi_i(x, u, \nabla u) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, d)$$

$$u'_j = \Psi_j(x, u, \nabla u; \epsilon) \sim u_j + \epsilon \psi_j(x, u, \nabla u) \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

dönüşüm ailesi altında invariant ise, $J\{u\}$ fonksiyonelinin her bir ekstremal yüzeyi

üzerinde

$$\sum_{i=0}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \left(\sum_{l=0}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \varphi_l - \psi_j \right) - F \varphi_i \right] = 0 \quad (2.4)$$

denklemini sağlar.

Noether teoreminin bu bölümde sunulacak uygulamalarında zaman ve uzay koordinatlarının ayrıştırılması kolaylık sağlayacağı için, sadeleştirmek amacıyla bundan sonra D uzay-zaman bölgesi olarak $D = \mathbb{R}^d \times [0, T]$, yani $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ve $t \in [0, T]$ olmak üzere bütün $(t, x_1, x_2, \dots, x_d)$ noktalarının kümesi, alınacak ve

$$\begin{aligned} t &= x_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d), \quad d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_d, \quad \delta t = \epsilon \varphi_0, \\ \delta x_i &= \epsilon \varphi_i \quad (i = 1, \dots, d), \quad \delta u_j = \epsilon \psi_j \quad (j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

notasyonu kullanılacaktır. Bu durumda, yukarıda herbir ekstremal yüzey üzerinde sağlanması gereken (2.4) özdeşliği diverjans formunda

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada

$$\bar{\psi}_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} \delta t + \sum_{l=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \delta x_l - \delta u_j$$

olmak üzere

$$P = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)} \bar{\psi}_j - F \delta t \quad (2.6)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \bar{\psi}_j - F \delta x_i \quad (i = 1, 2, \dots, d) \quad (2.7)$$

tanımları yapılmıştır. (2.5) ile verilen diverjans form bazı koşulların sağlanması durumunda bir korunum yasasına dönüşür. Eğer Q_i ($i = 1, 2, \dots, d$) büyüklüklerinin tamamının $|x| \rightarrow \infty$ iken sifıra gittiği varsayılır ve (2.5) denklemini $\mathbb{R}^d$ üzerinde integre edilirse

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} P d\mathbf{x} = 0$$

korunum yasasına ulaşılır. Burada P korunan büyüklüğün yoğunluğu olup, yukarıdaki korunum yasası

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^d} P d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

korunan büyüklüğünün zamanla değişmediğini yani

$$I(t) = I(0) \quad (2.9)$$

olduğunu ifade eder.

Şimdi Noether teoreminin herhangi bir alan için (2.5) lokal korunum yasalarını ve (2.9) global korunum yasalarını türetmenin genel bir yöntemini sağladığı, (2.1) NLS denklemi için korunum yasaları türetilerek gösterilecektir. Bu amaçla (2.2) Lagrange yoğunluk fonksiyonu yardımıyla "action" yani

$$S\{u\} = \int \int \mathcal{L}(u, \nabla u) d\mathbf{x} dt$$

fonksiyoneli tanımlanacaktır. Bu durumda $m = 2$ olup, $u_1 = u$, $u_2 = u^*$ alınacaktır. NLS denklemi için $S\{u\}$ fonksiyoneli

$$S\{u\} = \int \int \left[\frac{i}{2} (u^* u_t - u u_t^*) - |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{\sigma + 1} |u|^{2\sigma+2} \right] d\mathbf{x} dt \quad (2.10)$$

şeklinde verilir.

Faz Dönüşümü: (2.10) integrali $u' = e^{i\epsilon} u$ faz dönüşümü altında invariant kalmaktadır. Faz dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük dönüşüm

$$u' \cong u + i\epsilon u$$

ile verilir. Bu durumda

$$\delta u_1 = i\epsilon u, \quad \delta u_2 = -i\epsilon u^*, \quad \delta t = \delta x_1 = \dots = \delta x_d = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan korunan büyüklük

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 d\mathbf{x}$$

ile verilir.

Uzay Koordinatında Öteleme: (2.10) integrali $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ uzay koordinatında öteleme altında invariant kalmaktadır. Bu durumda

$$\delta t = \delta u_1 = \delta u_2 = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} i (u \nabla u^* - u^* \nabla u) d\mathbf{x}$$

büyüklüğü korunan bir büyüklüktür.

Zamanda Öteleme: (2.10) integrali $t' = t + \delta t$ öteleme dönüşümü altında invariant kalmaktadır. Bu durumda

$$\delta u_1 = \delta u_2 = \delta x_1 = \dots = \delta x_d = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u|^2 - \frac{\lambda}{\sigma+1} |u|^{2\sigma+2}) d\mathbf{x}$$

büyüklüğü korunan bir büyüklüktür.

Yukarıda ifade edilen I_1, I_2 ve I_3 korunan büyüklükleri, sırasıyla, kütlenin korunumu, momentumun korunumu ve enerjinin korunumu yasaları ile ilgili korunan büyüklüklerdir ve bu korunan büyüklükler patlama neticelerinin elde edilmesinde önemli rol oynar.

NLS denkleminin patlama çözümleri ve patlama koşulları 1970'li yıllardan başlayarak çalışılmıştır. $\lambda = 1$ halinde, NLS denklemi için uzay boyutu d ile doğrusal olmayan terimin kuvveti σ arasındaki ilişkiye bağlı olarak üç farklı durum sözkonusudur. $\sigma d < 2$ durumu kritikaltı (subcritical) durum olarak adlandırılmaktadır. Bu durumda verilen bir başlangıç koşulu için NLS denkleminin global olarak çözümü mevcuttur. $\sigma d = 2$ ve $\sigma d > 2$ durumları, sırasıyla, kritik (critical) ve kritiküstü (supercritical) durum olarak adlandırılır. Kritik durumda, yani $\sigma = 1$, $d = 2$ iken, çözümün sonlu zamanda patlaması mümkündür. Patlama için gerek koşul kütlenin başlangıç değerinin, $I_1(0)$, belirli bir eşik değerinden yani I_{1C} kritik değerinden daha büyük veya eşit olmasıdır; $I_1(0) \geq I_{1C}$. Patlama için yeter koşul ise, enerjinin (Hamiltonyenin) başlangıç değerinin,

$$I_3(0) = \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla u_0|^2 - \frac{1}{2} |u_0|^4) d\mathbf{x}$$

negatif olmasıdır; $I_3(0) < 0$. Kritiküstü durumda da patlama için yeter koşul enerjinin başlangıç değerinin negatif olmasıdır. Kritik ve kritiküstü durumlarda patlama neticeleri

$$\mathcal{V} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{x}|^2 |u|^2 d\mathbf{x} \quad (2.11)$$

ile tanımlanan varyansın zaman içerisindeki değişimi incelenerek elde edilmiştir. Varyansın sonlu olduğu kabul edilerek, (2.11) denkleminin iki kere türetilmesinden

$$\frac{d^2 \mathcal{V}}{dt^2} = 8I_2 - 4\lambda \frac{\sigma d - 2}{\sigma + 1} \int |u|^{2\sigma+2} d\mathbf{x}$$

varyans özdeşliği elde edilmiştir. Kritik ve kritiküstü durumlar için yukarıda bahsedilen patlama neticeleri (2.11) ile tanımlanan varyansı sonlu yapan veya radyal simetrik başlangıç koşulları için ispat edilmiştir. Varyansın sonlu kalmaması halinde hangi koşullar altında patlama olayının gerçekleşeceği sorusu ile hala ilgilenilmektedir [2, 3].

2.3 Davey-Stewartson sistemi

(1 + 1) NLS denkleminin, iki boyutlu genelleştirmelerinden biri de DS sistemidir. DS sistemi

$$i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma u \varphi_x \quad (2.12)$$

$$\varphi_{xx} + m \varphi_{yy} = (|u|^2)_x \quad (2.13)$$

şeklinde verilmiş bir doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemidir. Burada u kompleks değerli, φ reel değerli olup x, y uzaysal koordinatlarının ve t zamanının fonksiyonlarıdır. σ, κ, γ ve m reel parametrelerdir. Bu sistem ilk olarak Davey ve Stewartson tarafından zayıf doğrusal olmayan su dalgalarının yayılımını karakterize eden sistem olarak önerilmiştir [16]. $\gamma = 0$ veya $m = 0$ durumlarında DS sistemi NLS denklemine indirgenmektedir.

DS sistemi, parametrelerin $\sigma = \pm 1, \kappa = \pm 1, \gamma = \pm 2, m = \mp 1$ şeklinde seçilmesi halinde, ters saçılma tekniği anlamında tamamen integre edilebilir bir sistemdir [2]. (σ, m) katsayılarının işaretlerine göre DS sistemi sırasıyla eliptik-eliptik $(+, +)$, eliptik-hiperbolik $(+, -)$, hiperbolik-eliptik $(-, +)$ ve hiperbolik-hiperbolik $(-, -)$ olarak adlandırılır. Bu çalışmada, daima $m > 0$ kabul edilecek ve hem u hem de φ fonksiyonunun ve uzaysal türevlerinin sonsuzda sifıra gittiği varsayılacaktır.

DS sistemi

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u^* u_t - u u_t^*) - \frac{\kappa}{2} |u|^4 - \sigma |u_x|^2 - |u_y|^2 - \gamma \varphi_x |u|^2 + \frac{\gamma}{2} [(\varphi_x)^2 + m(\varphi_y)^2] \quad (2.14)$$

Lagrange yoğunluk fonksiyonuna karşılık gelen Euler-Lagrange denklemleri olarak türetilir. Yukarıda da bahsedildiği üzere, DS sistemi parametrelerin özel seçilmiş bazı değerleri için integre edilebilir bir sistemdir, yani sonsuz çoklukta korunum yasasına sahiptir. Burada sadece kütlenin korunumu, enerjinin korunumu, x yönündeki momentumun ve y yönündeki momentumun korunumuna karşılık gelen korunum yasaları için korunan büyüklükler elde edilecektir.

DS sistemi için $S\{u\}$ fonksiyoneli

$$S\{u\} = \int \int \int \left\{ \frac{i}{2}(u^* u_t - u u_t^*) - \frac{\kappa}{2} |u|^4 - \sigma |u_x|^2 - |u_y|^2 - \gamma \varphi_x |u|^2 + \frac{\gamma}{2} [(\varphi_x)^2 + m(\varphi_y)^2] \right\} dx dy dt \quad (2.15)$$

şeklinde verilir. Bu durumda iki boyutlu uzay ele alındığından $d = 2$ olup, bağımsız değişkenler $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ ile verilir. Bağımlı değişken sayısı $m = 3$ olup, $u_1 = u$, $u_2 = u^*$, $u_3 = \varphi$ şeklinde alınacaktır.

Faz Dönüşümü: (2.15) integrali $u' = e^{i\epsilon} u$ faz dönüşümü altında invaryant kalmaktadır. Faz dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük dönüşüm

$$u' \cong u + i\epsilon u$$

ile verilir. Bu durumda

$$\delta u_1 = i\epsilon u, \quad \delta u_2 = -i\epsilon u^*, \quad \delta u_3 = \delta t = \delta x = \delta y = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan korunan büyüklük kütlenin korunumuna karşılık gelir ve

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx dy$$

ile verilir.

Uzay Koordinatında Öteleme: (2.15) integrali $x' = x + \delta x$ uzay koordinatında öteleme altında invaryant kalmaktadır. Bu durumda

$$\delta u_1 = \delta u_2 = \delta u_3 = \delta t = \delta y = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} (u u_x^* - u^* u_x) dx dy$$

korunan büyüklüğü x yönündeki momentumun korunumuna tekabül eder. Benzer şekilde $y' = y + \delta y$ uzay koordinatında öteleme altında (2.15) integralinin invariant kalmasına karşılık gelen

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^2} (u u_y^* - u^* u_y) dx dy$$

korunan büyüklüğü, y yönündeki momentumun korunumuna tekabül eder.

Zamanda Öteleme: (2.15) integrali $t' = t + \delta t$ öteleme dönüşümü altında invariant kalmaktadır. Bu durumda

$$\delta u_1 = \delta u_2 = \delta u_3 = \delta x = \delta y = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^2} [\sigma |u_x|^2 + |u_y|^2 + (\kappa |u|^4 + \gamma(\varphi_x^2 + m\varphi_y^2))/2] dx dy$$

korunan büyüklüğü enerjinin korunumuna karşılık gelir.

DS sisteminin patlama çözümleri ve patlama koşulları ile ilgili iki önemli makale göze çarpmaktadır. Bunlardan ilki, Ghidaglia ve Saut'un yaptığı çalışmadır [17]. Bu çalışmada, Ghidaglia ve Saut DS sisteminin eliptik-eliptik ve hiperbolik-eliptik durumları için $L^2(\mathbb{R}^2)$, $H^1(\mathbb{R}^2)$ ve $H^2(\mathbb{R}^2)$ uzaylarında çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç koşuluna sürekli bağımlılığını $[0, T)$ sonlu zaman aralığı için göstermişlerdir. Eliptik-eliptik durumda ise, $\sigma = 1$ ve $\kappa \geq \max(-\gamma, 0)$ için $L^2(\mathbb{R}^2)$ ve $H^1(\mathbb{R}^2)$ uzaylarındaki lokal çözümün genişletilmesiyle çözümün global olarak da varolduğu gösterilmiştir. Ayrıca eliptik-eliptik durumda, $\kappa < \max(-\gamma, 0)$ iken çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı gösterilmiştir. Diğer çalışmada ise, Ozawa [4] hiperbolik-eliptik hal için sözde-konformal dönüşüm yardımıyla analitik olarak patlama çözümlerini bulmuştur. Bu konudan bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak bahsedilecektir.

2.4 Genelleştirilmiş Davey-Stewartson sistemi

Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (GDS) sistemi

$$i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u \quad (2.16)$$

$$\varphi_{1,xx} + m_2 \varphi_{1,yy} + n \varphi_{2,xy} = (|u|^2)_x \quad (2.17)$$

$$\lambda \varphi_{2,xx} + m_1 \varphi_{2,yy} + n \varphi_{1,xy} = (|u|^2)_y \quad (2.18)$$

şeklinde verilmiş bir doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemidir. Burada u kompleks değerli, φ_1 ve φ_2 reel değerli fonksiyonlar olup, x, y uzaysal koordinatlarının ve t zamanının fonksiyonlarıdır. $\sigma, \kappa, \gamma, \lambda, m_1, m_2, n$ reel parametrelerdir. Ayrıca, katsayılar arasında

$$(\lambda - 1)(m_2 - m_1) = n^2 \quad (2.19)$$

şeklinde bir bağıntı sağlanmaktadır. GDS sistemi sonsuz bir genelleştirilmiş elastik ortamda yayılan dalgaların genlik modülasyonunu karakterize eden sistem olarak önerilmiştir [5]. GDS sistemi $(\sigma, m_1, m_2, \lambda)$ katsayılarının işaretlerine göre eliptik-eliptik-eliptik $(+, +, +, +)$, eliptik-eliptik-hiperbolik $(+, +, +, -)$, eliptik-hiperbolik-hiperbolik $(+, -, -, +)$, hiperbolik-eliptik-eliptik $(-, +, +, +)$, hiperbolik-hiperbolik-hiperbolik $(-, -, -, +)$, hiperbolik-eliptik-hiperbolik $(-, +, +, -)$ olarak adlandırılır [6].

GDS sisteminin en önemli özel hallerinden biri iki boyutlu NLS denklemidir. Bir diğer özel halinde, katsayıların $n = 1 - \lambda = m_1 - m_2$ ilişkisini sağlaması halinde, GDS sistemi bir doğrusal olmayan dönüşüm yardımıyla DS sistemine indirgenmektedir [6]. Bunun dışındaki bazı özel durumlarda da GDS sisteminin klasik DS sistemine indirgendiği gösterilebilir.

GDS sistemi için Lagrange yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i}{2}(u^* u_t - u u_t^*) - \frac{\kappa}{2} |u|^4 - \sigma |u_x|^2 - |u_y|^2 - \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y}) |u|^2 \\ & + \frac{\gamma}{2}[(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})] \end{aligned}$$

olarak verilir [6].

GDS sistemi için $S\{u\}$ fonksiyoneli

$$\begin{aligned} S\{u\} = & \int \int \int \left\{ \frac{i}{2}(u^* u_t - u u_t^*) - \frac{\kappa}{2} |u|^4 - \sigma |u_x|^2 - |u_y|^2 - \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y}) |u|^2 \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{2}[(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})] \right\} dx dy dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

ile verilir. Bu durumda iki boyutlu uzay ele alındığından $d = 2$ olup, bağımsız değişkenler $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ ile verilir. Bağımlı değişken sayısı $m = 4$ olup, $u_1 = u$, $u_2 = u^*$, $u_3 = \varphi_1$, $u_4 = \varphi_2$ şeklinde alınacaktır.

Faz Dönüşümü: (2.20) integrali $u' = e^{i\epsilon}u$ faz dönüşümü altında invariant kalmaktadır. Faz dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük dönüşüm

$$u' \cong u + i\epsilon u$$

ile verilir. Bu durumda

$$\delta u_1 = i\epsilon u, \quad \delta u_2 = -i\epsilon u^*, \quad \delta u_3 = \delta u_4 = \delta t = \delta x = \delta y = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan korunan büyüklük kütlenin korunumuna karşılık gelir ve

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx dy$$

ile verilir.

Uzay Koordinatında Öteleme: (2.20) integrali $x' = x + \delta x$ uzay koordinatında öteleme altında invariant kalmaktadır. Bu durumda

$$\delta u_1 = \delta u_2 = \delta u_3 = \delta u_4 = \delta t = \delta y = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} i(u^* u_x - u u_x^*) dx dy$$

korunan büyüklüğü x yönündeki momentumun korunumuna tekabül eder. Benzer şekilde $y' = y + \delta y$ uzay koordinatında öteleme altında GDS sisteminin invariant kalmasına karşılık gelen

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^2} i(u^* u_y - u u_y^*) dx dy$$

korunan büyüklüğü y yönündeki momentumun korunumuna tekabül eder.

Zamanda Öteleme: (2.20) integrali $t' = t + \delta t$ öteleme dönüşümü altında invariant kalmaktadır. Bu durumda

$$\delta u_1 = \delta u_2 = \delta u_3 = \delta u_4 = \delta x = \delta y = 0$$

olacaktır. (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$\begin{aligned} I_4 = \int_{\mathbb{R}^2} \{ & \sigma |u_x|^2 + |u_y|^2 + \frac{\kappa}{2} |u|^4 + \frac{\gamma}{2} [(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 \\ & + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})] \} dx dy \end{aligned} \quad (2.21)$$

korunan büyüklüğü enerjinin (Hamiltonyenin) korunumuna karşılık gelir.

GDS sisteminin EEE hali için çözümlerin varlığı ve patlama koşulları ile ilgili olarak [6]'da elde edilen sonuçlar, bütünlük sağlamak amacıyla Alt bölüm 3.3'de sunulacaktır.

3. GDS SİSTEMİ İÇİN BAZI ANALİTİK SONUÇLAR

3.1 Giriş

Bu bölümde, GDS sisteminin HEE ve EEE halleri ve GDS sisteminin bir özel hali olan YGDS sistemi için bazı analitik sonuçlar verilecektir. HEE hal ile ilgili kısımda, Altbölüm 3.2, ilk olarak GDS sistemi için bir ölçek dönüşümü tanıtılacaktır. Bu ölçek dönüşümüne karşılık gelen korunan büyüklük elde edilecek ve varyans özdeşliği ile arasındaki ilişki üzerinde durulacaktır. Daha sonra, NLS denklemi ve DS sistemi için literatürde verilmiş sözde-konformal dönüşümler tanıtılacaktır. Bir sonraki adımda, Ozawa [4] tarafından DS sistemi için kullanılan sözde-konformal dönüşüm GDS sistemine genişletilecek ve bu yeni dönüşüm ile ilgili korunan büyüklük iki farklı yöntem ile elde edilecektir. Son olarak, sözde-konformal dönüşüm yardımıyla, hem Ozawa [4] tarafından izlenen yol takip edilerek hem de "radyal" çözümler yaklaşımı kullanılarak GDS sistemi için bir parametrelili çözüm ailesi elde edilecek ve bu çözüm ailesinin sonlu zamanda orijinde tekilliğe sahip olan analitik patlama çözümlerini oluşturduğu gösterilecektir. EEE ile ilgili kısımda, Altbölüm 3.3, ilk olarak GDS sistemi için literatürde verilen patlama koşulları sunulacak ve daha sonra iyileştirilmiş patlama koşulları türetilenecektir. Ayrıca, GDS sisteminin belirli bir kümeden seçilen çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecek ve $p > 2$ için çözümlerin L^p normlarının $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiği gösterilecektir. YGDS sistemi ile ilgili kısımda ise, Altbölüm 3.4, YGDS sistemi özel bir dönüşüm yardımıyla klasik DS sistemine dönüştürülecek ve böylece YGDS sisteminin çözümlerinin global varlığı ve çözümlerin sonlu zamanda patlaması için koşullar DS sistemine ait koşullardan türetilenecektir. Ayrıca, GDS sistemi için gerek literatürde verilmiş koşulların gerekse Altbölüm 3.3'de türetilmiş koşulların özel hal olarak YGDS sistemi için elde edilmiş koşullara indirgenip indirgenmediği tartışılacaktır.

3.2 Hiperbolik-Eliptik-Eliptik Hal için bazı analitik sonuçlar

Bu altbölümde GDS sisteminin HEE hali için literatürde de sunulmuş [18] bazı analitik sonuçlar verilecektir.

3.2.1 GDS sistemi için ölçek dönüşümü

[6]'da belirtilmeyen ancak (2.20) fonksiyoneli invariant bırakan bir diğer dönüşüm ise ölçek dönüşümüdür. GDS sistemi için $(x, y, t, u, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (x', y', t', u', \varphi'_1, \varphi'_2)$ ölçek dönüşümü

$$\begin{aligned} u'(x', y', t') &= \mu u(x, y, t) \\ \varphi'_1(x', y', t') &= \mu \varphi_1(x, y, t) \\ \varphi'_2(x', y', t') &= \mu \varphi_2(x, y, t) \\ x' &= \frac{x}{\mu}, \quad y' = \frac{y}{\mu}, \quad t' = \frac{t}{\mu^2} \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada μ ölçeği gösteren bir parametredir. Ölçek dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük dönüşüm, $\mu = 1 - \epsilon$ ve $\epsilon \ll 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= x + \epsilon x, \quad y' = y + \epsilon y, \quad t' = t + 2\epsilon t \\ u' &= u - \epsilon u, \quad \varphi'_1 = \varphi_1 - \epsilon \varphi_1, \quad \varphi'_2 = \varphi_2 - \epsilon \varphi_2 \end{aligned}$$

ile verilir [2]. Bu bağıntılar ve (2.8) yardımıyla hesaplanan

$$I_5 = i \int_{\mathbb{R}^2} \{x(uu_x^* - u^*u_x) + y(uu_y^* - u^*u_y)\} dx dy - 4tI_4 \quad (3.1)$$

büyüklüğü bir korunan büyüklüktür. Eğer $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ gösterilimi kullanılırsa, I_5 korunan büyüklüğü

$$I_5 = i \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{x} \cdot (u \nabla u^* - u^* \nabla u) dx dy - 4tI_4$$

şeklinde de yazılabilir. GDS sisteminde $\sigma = 1$ alınması halinde, varyans fonksiyonu

$$\mathcal{V}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) |u|^2 dx dy$$

şeklinde tanımlanır [6]. Varyans fonksiyonunun birinci türevi

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 2i \int_{\mathbb{R}^2} \{x(uu_x^* - u^*u_x) + y(uu_y^* - u^*u_y)\} dx dy$$

olarak elde edilmiştir [6]. Ölçek dönüşümüne karşılık gelen (3.1) korunan büyüklüğüne dikkat edilirse,

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = 2I_5 + 8tI_4$$

eşitliği elde edilir. Varyans fonksiyonunun ikinci türevinden de

$$\frac{d^2\mathcal{V}}{d^2t} = 8I_4$$

varyans özdeşliği bulunur. Bu özdeşlik [6]'da farklı bir yol kullanılarak elde edilmiştir.

3.2.2 NLS denklemi ve DS sistemi için sözde-konformal dönüşüm

(i) *NLS Denklemi:*

NLS denklemi Altbölüm 2.2'de bahsedilen simetrilerin dışında çok özel bir simetriye daha sahiptir. Uzay boyutu ile doğrusal olmayan terimin kuvveti arasındaki ilişki $sd = 2$ şeklinde iken, NLS denklemi bir $(\mathbf{x}, t, u) \rightarrow (\mathbf{x}', t', u')$ dönüşümü altında invariant kalmaktadır. Burada $(\mathbf{x}, t, u) \rightarrow (\mathbf{x}', t', u')$ dönüşümü

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \frac{t_0 \mathbf{x}}{t_* - t}, \quad t' = \frac{t_0^2 t}{t_*(t_* - t)}, \quad t < t_* \\ u'(\mathbf{x}', t') &= \left(\frac{t_* - t}{t_0}\right)^{d/2} u(\mathbf{x}, t) \exp\left(\frac{i|\mathbf{x}|^2}{4(t_* - t)}\right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak verilir ve bu dönüşüm "sözde-konformal" dönüşüm olarak adlandırılır. Burada t_0 ve t_* keyfi parametreleri göstermektedir. Sözde-konformal dönüşüm optikte "lens" dönüşümü olarak da adlandırılır. Sözde-konformal dönüşüm ilk olarak 1970 yılında Talanov, 1979 yılında Ginibre ve Velo [19] tarafından eliptik NLS denklemi için farkedilmiştir. Daha sonra hiperbolik NLS denkleminin de sözde-konformal dönüşüm altında invariant kaldığı gösterilmiştir [20].

NLS denklemi için, sözde-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklük ilk olarak Noether teoremi yardımıyla bulunacaktır. Özel olarak $t_0 = t_*$ seçilirse, (3.2) dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük dönüşüm, $\epsilon = 1/t^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \mathbf{x}t\epsilon, \quad t' = t + t^2\epsilon \\ u' &= u + \left(-\frac{d}{2}t + \frac{i}{4}|\mathbf{x}|^2\right)u\epsilon \end{aligned}$$

şeklinde verilir [2]. Bu bağıntılar ve (2.8) yardımıyla hesaplanan,

$$C = \int (|\mathbf{x}u + 2it\nabla u|^2 - \frac{4\lambda t^2}{\sigma + 1}|u|^{2\sigma+2})d\mathbf{x} \quad (3.3)$$

büyüklüğü sözde-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklüktür.

Sözde-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklüğü elde etmede bir diğer yol ise, NLS denkleminin sözde-konformal dönüşüm altında invaryant kalması gerçeğine dayanır. Yeni koordinat takımındaki toplam enerjiyi gösteren

$$I'_3 = \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla' u'|^2 - \frac{\lambda}{\sigma + 1}|u'|^{2\sigma+2}) d\mathbf{x}'$$

büyüklüğü de korunacaktır. (3.2) ifadeleri bu denklemden kullanılırsa,

$$I'_3 = \int_{\mathbb{R}^d} \{ |(\frac{t_* - t}{t_0})\nabla u + \frac{i}{2t_0}\mathbf{x}u|^2 - \frac{\lambda}{\sigma + 1}(\frac{t_* - t}{t_0})^2 |u|^{2\sigma+2} \} d\mathbf{x}$$

elde edilir. Özel olarak $t_0 = 1$, $t_* = 0$ alınırsa

$$4I'_3 = \int_{\mathbb{R}^d} (|\mathbf{x}u + 2it\nabla u|^2 - \frac{4\lambda t^2}{\sigma + 1}|u|^{2\sigma+2})d\mathbf{x} \quad (3.4)$$

bulunur. Yeni koordinat takımında toplam enerjiyi gösteren I'_3 büyüklüğü bir korunan büyüklük olduğundan, $4I'_3$ büyüklüğü de bir korunan büyüklük olacaktır. (3.3) ve (3.4) ifadelerinin karşılaştırılmasından, hem Noether teoremi kullanılarak hem de NLS denkleminin sözde-konformal dönüşüm altında invaryant kalmasından yararlanılarak aynı korunan büyüklüğün elde edildiği gözlenir.

(ii) *DS Sistemi:*

NLS denklemi için elde edilen sözde-konformal dönüşüm Kuznetsov ve Turitsyn [20] ve Ozawa [4] tarafından DS sistemine genişletilmiştir. DS sistemi için sözde-konformal dönüşüm

$$\begin{aligned} u'(x', y', t') &= (a + bt) \exp[-ib \frac{\sigma x^2 + y^2}{4(a + bt)}] u(x, y, t) \\ \varphi'(x', y', t') &= (a + bt) \varphi(x, y, t) \\ x' &= \frac{x}{(a + bt)}, \quad y' = \frac{y}{(a + bt)}, \quad t' = \frac{c + dt}{a + bt} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\in \text{SL}_2(\mathbb{R}), \quad (\text{yani, } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1) \end{aligned}$$

olarak verilir. DS sistemi için sözde-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklük

$$C = \int_{\mathbb{R}^2} \{ \sigma |xu + 2i\sigma t u_x|^2 + |yu + 2it u_y|^2 + 2t^2(\kappa |u|^4 + \gamma[(\varphi_x)^2 + m(\varphi_y)^2]) \} dx dy$$

ile verilir [2]. Bu korunan büyüklük, aynen yukarıda NLS denklemi için yapılan hesaplamalara benzer şekilde, hem Noether teoremi kullanılarak hem de DS sisteminin sözde-konformal dönüşüm altında invaryant kalmasından yararlanılarak elde edilmiştir. Ancak bu hesaplamalar burada sunulmayacaktır.

3.2.3 GDS sistemi için sözde-konformal dönüşüm

GDS sistemi, Altbölüm 2.4'de bahsedilen simetrilerin dışında çok özel bir simetriye daha sahiptir. (2.20) fonksiyoneli $|\sigma| = 1$ olması durumunda, bir $(x, y, t, u, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (x', y', t', u', \varphi'_1, \varphi'_2)$ dönüşümü altında invaryant kalmaktadır. Burada $(x', y', t', u', \varphi'_1, \varphi'_2)$ değişkenleri

$$\begin{aligned} u'(x', y', t') &= (a + bt) \exp(-ib \frac{\sigma x^2 + y^2}{4(a + bt)}) u(x, y, t) \\ \varphi'_1(x', y', t') &= (a + bt) \varphi_1(x, y, t) \\ \varphi'_2(x', y', t') &= (a + bt) \varphi_2(x, y, t) \\ x' &= \frac{x}{(a + bt)}, \quad y' = \frac{y}{(a + bt)}, \quad t' = \frac{c + dt}{a + bt} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\in \text{SL}_2(\mathbb{R}), \quad (\text{yani, } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ve } ad - bc = 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak verilir ve bu dönüşüm "sözde-konformal dönüşüm" olarak adlandırılır [18, 21].

İlk olarak, sözde-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklük Noether teoremi yardımıyla bulunacaktır. Özel olarak $a = 1$, $b = -1/t^*$, $c = 0$, $d = 1$ seçilirse, (3.5) dönüşümüne karşılık gelen sonsuz küçük dönüşüm, $\epsilon = 1/t^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x' &= x + xt\epsilon, & y' &= y + yt\epsilon, & t' &= t + t^2\epsilon \\ \varphi'_1 &= \varphi_1 + \varphi_1 t\epsilon, & \varphi'_2 &= \varphi_2 + \varphi_2 t\epsilon \\ u' &= u - tu\epsilon + \frac{i}{4}(\sigma x^2 + y^2)u\epsilon \end{aligned}$$

şeklinde verilir [2]. Bu bağıntılar ve (2.8) yardımıyla hesaplanan,

$$I_6 = \int_{\mathbb{R}^2} \{ \sigma |xu + 2i\sigma t u_x|^2 + |yu + 2it u_y|^2 + 2t^2(\kappa |u|^4 + \gamma[(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})]) \} dx dy \quad (3.6)$$

büyüklüğü korunan bir büyüklüktür.

Sözde-konformal dönüşüme karşılık gelen korunan büyüklüğü elde etmede bir diğer yol ise, GDS sisteminin sözde-konformal dönüşüm altında invaryant kalması gerçeğine dayanır. Yeni koordinat takımındaki toplam enerjiyi gösteren

$$I'_4 = \int_{\mathbb{R}^2} \{ \sigma |u'_{x'}|^2 + |u'_{y'}|^2 + \frac{\kappa}{2} |u'|^4 + \frac{\gamma}{2} [(\varphi'_{1,x'})^2 + m_2(\varphi'_{1,y'})^2 + \lambda(\varphi'_{2,x'})^2 + m_1(\varphi'_{2,y'})^2 + n(\varphi'_{1,y'}\varphi'_{2,x'} + \varphi'_{1,x'}\varphi'_{2,y'})] \} dx' dy'$$

büyüklüğü de korunmalıdır. (3.5) ifadeleri bu denklemde kullanılırsa,

$$I'_4 = \int_{\mathbb{R}^2} (a + bt)^2 \{ \sigma |u_x - \frac{ib\sigma x}{2(a + bt)} u|^2 + |u_y - \frac{iby}{2(a + bt)} u|^2 + \frac{\kappa}{2} |u|^4 + \frac{\gamma}{2} [(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})] \} dx dy \quad (3.7)$$

elde edilir. Özel olarak $a = 0$, $b = -1$ seçilir ve

$$\begin{aligned} |u_x - \frac{ib\sigma x}{2(a + bt)} u|^2 &= \frac{1}{4t^2} |xu + 2i\sigma t u_x|^2 \\ |u_y - \frac{iby}{2(a + bt)} u|^2 &= \frac{1}{4t^2} |yu + 2it u_y|^2 \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edilirse,

$$4I'_4 = \int_{\mathbb{R}^2} \{ \sigma |xu + 2i\sigma t u_x|^2 + |yu + 2it u_y|^2 + 2t^2(\kappa |u|^4 + \gamma[(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})]) \} dx dy \quad (3.8)$$

bulunur. Yeni koordinat takımında toplam enerjiyi gösteren I'_4 büyüklüğü bir korunan büyüklük olduğundan, $4I'_4$ büyüklüğü de bir korunan büyüklük olacaktır.

(3.6) ve (3.8) ifadelerinin karşılaştırılmasından, hem Noether teoremi kullanarak hem de GDS sisteminin sözde-konformal dönüşüm altında invaryant kalmasından yararlanılarak aynı korunan büyüklüğün elde edildiği gözlenir.

3.2.4 GDS sistemi için patlama profilleri

Sözde-konformal dönüşüm GDS sisteminin HEE hali için analitik patlama çözümlerinin bulunmasında çok önemli bir rol oynar. Burada ilk olarak, sözde-konformal dönüşüm yardımıyla, Ozawa'nın yaklaşımını takip ederek bir patlama çözümü elde edilecektir. Daha sonra, GDS sisteminin bir özel "radyal" çözüme sahip olması koşuluna karşılık gelen bir parametreye bağlı analitik patlama çözüm ailesi elde edilecektir. Ozawa'nın yaklaşımını kullanarak bulunan çözümün bu çözüm ailesinin bir elemanı olduğuna işaret edilecektir.

3.2.4.1 Ozawa'nın yaklaşımı

İlk olarak, GDS sisteminin $f(x, y) = 1 + Ax^2 + By^2$ ve A, B, C_1, C_2 sabitler olmak üzere

$$u(x, y, t) = \frac{1}{f(x, y)}, \quad \varphi_1(x, y, t) = C_1 \frac{f_x(x, y)}{f(x, y)}, \quad \varphi_2(x, y, t) = C_2 \frac{f_y(x, y)}{f(x, y)}$$

şeklinde bir çözüme sahip olduğu varsayılacaktır. φ_1 ve φ_2 çözümleri (2.17) ve (2.18) denklemlerinin sol tarafında konulursa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} & \varphi_{1,xx} + m_2 \varphi_{1,yy} + n \varphi_{2,xy} \\ &= 2C_1 \left\{ \frac{[A + (m_2 + n_1)B] + Ax^2[(m_2 + n_1)B - A] + By^2[A - (m_2 + n_1)B]}{f^2} \right\}_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

ve

$$\begin{aligned} & \lambda \varphi_{2,xx} + m_1 \varphi_{2,yy} + n \varphi_{1,xy} \\ &= 2C_2 \left\{ \frac{[A(\lambda + n_2) + m_1 B]}{f^2} + \frac{Ax^2[m_1 B - A(\lambda + n_2)]}{f^2} + \frac{By^2[A(\lambda + n_2) - m_1 B]}{f^2} \right\}_y \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada $n_1 = n(C_2/C_1)$, $n_2 = n(C_1/C_2)$ tanımları yapılmıştır. (2.17) ve (2.18) denklemleri nedeniyle, (3.9) ifadesi $(|u^2|)_x = (1/f^2)_x$ ifadesine, (3.10) ifadesi ise $(|u^2|)_y = (1/f^2)_y$ ifadesine eşit olacağından,

$$\begin{aligned} A &= B(m_2 + n_1), & AC_1 &= \frac{1}{4} \\ m_1 B &= A(\lambda + n_2), & m_1 BC_2 &= \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

bağıntıları elde edilir. Benzer şekilde φ_1, φ_2 ve u çözümleri (2.16) denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned}
& i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} - \kappa |u|^2 u - \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u \\
& = [(-2A\sigma - 2B - \kappa - 2AC_1\gamma - 2BC_2\gamma) + x^2(6A^2\sigma - 2AB + 2A^2C_1\gamma - 2ABC_2\gamma) \\
& + y^2(-2AB\sigma + 6B^2 - 2ABC_1\gamma + 2B^2C_2\gamma)]/f^3
\end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. Bu ifadenin her x, y için sıfıra eşit olması koşulundan,

$$\begin{aligned}
-2A\sigma - 2B - \kappa - 2AC_1\gamma - 2BC_2\gamma &= 0 \\
6A^2\sigma - 2AB + 2A^2C_1\gamma - 2ABC_2\gamma &= 0 \\
-2AB\sigma + 6B^2 - 2ABC_1\gamma + 2B^2C_2\gamma &= 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu kısımda, HEE hal gözönüne alındığından σ bir negatif reel sayı olmalıdır. Ayrıca, denklemin sözde-konformal dönüşüm altında invariant kalabilmesi için $|\sigma| = 1$ olmalıdır. Bu nedenle bundan sonraki hesaplarda $\sigma = -1$ alınacaktır. (3.11) ve (3.13) bağıntılarının ardışık olarak çözülmesiyle, katsayılar arasında

$$\begin{aligned}
C_1 &= m_1 C_2, \quad \lambda = m_1(1 - n), \quad m_2 = 1 - \frac{n}{m_1} \\
\kappa &= -\frac{\gamma}{2}\left(1 + \frac{1}{m_1}\right), \quad A = B = \frac{\gamma}{16}\left(1 - \frac{1}{m_1}\right)
\end{aligned}$$

bağıntıları bulunur. Sonuç olarak, A parametresi yukarıdaki bağıntı sağlanacak şekilde seçilirse,

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \frac{1}{1 + A(x^2 + y^2)} \\
\varphi_1(x, y, t) &= \frac{x}{2[1 + A(x^2 + y^2)]} \\
\varphi_2(x, y, t) &= \frac{y}{2m_1[1 + A(x^2 + y^2)]}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

çözümü GDS sisteminin zamana bağlı olmayan bir çözümüdür.

3.2.4.2 "Radyal" çözüm yaklaşımı

GDS sisteminin zamana bağlı olmayan çözümlerini bulmak için, ilk olarak GDS sistemi

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

kutupsal koordinat sistemi için yeniden yazılacaktır. Yeni koordinatlarda bağımlı değişkenlerin sadece r ve θ değişkenlerinin fonksiyonları oldukları varsayılacaktır: $u = u(r, \theta)$, $\varphi_1 = \varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2 = \varphi_2(r, \theta)$. Bu durumda (2.16) denklemi,

$$\begin{aligned} & \sigma[u_{rr} \cos^2 \theta - \frac{u_{r\theta}}{r} \sin(2\theta) + \frac{u_r}{r} \sin^2 \theta + \frac{u_\theta}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} \sin^2 \theta] \\ & + u_{rr} \sin^2 \theta + \frac{u_{r\theta}}{r} \sin(2\theta) + \frac{u_r}{r} \cos^2 \theta - \frac{u_\theta}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} \cos^2 \theta \\ & = \kappa u^3 + \gamma u(\varphi_{1,r} \cos \theta - \frac{\varphi_{1,\theta}}{r} \sin \theta + \varphi_{2,r} \sin \theta + \frac{\varphi_{2,\theta}}{r} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

(2.17) denklemi,

$$\begin{aligned} & \varphi_{1,rr} \cos^2 \theta - \frac{\varphi_{1,r\theta}}{r} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{1,r}}{r} \sin^2 \theta + \frac{\varphi_{1,\theta}}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{1,\theta\theta}}{r^2} \sin^2 \theta \\ & + m_2[\varphi_{1,rr} \sin^2 \theta + \frac{\varphi_{1,r\theta}}{r} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{1,r}}{r} \cos^2 \theta - \frac{\varphi_{1,\theta}}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{1,\theta\theta}}{r^2} \cos^2 \theta] \\ & + n[\frac{\varphi_{2,rr}}{2} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{2,r\theta}}{r} \cos(2\theta) - \frac{\varphi_{2,r}}{2r} \sin(2\theta) - \frac{\varphi_{2,\theta}}{r^2} \cos(2\theta) - \frac{\varphi_{2,\theta\theta}}{2r^2} \sin(2\theta)] \\ & = 2u(u_r \cos \theta - \frac{u_\theta}{r} \sin \theta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

ve (2.18) denklemi,

$$\begin{aligned} & \lambda[\varphi_{2,rr} \cos^2 \theta - \frac{\varphi_{2,r\theta}}{r} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{2,r}}{r} \sin^2 \theta + \frac{\varphi_{2,\theta}}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{2,\theta\theta}}{r^2} \sin^2 \theta] \\ & + m_1[\varphi_{2,rr} \sin^2 \theta + \frac{\varphi_{2,r\theta}}{r} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{2,r}}{r} \cos^2 \theta - \frac{\varphi_{2,\theta}}{r^2} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{2,\theta\theta}}{r^2} \cos^2 \theta] \\ & + n[\frac{\varphi_{1,rr}}{2} \sin(2\theta) + \frac{\varphi_{1,r\theta}}{r} \cos(2\theta) - \frac{\varphi_{1,r}}{2r} \sin(2\theta) - \frac{\varphi_{1,\theta}}{r^2} \cos(2\theta) - \frac{\varphi_{1,\theta\theta}}{2r^2} \sin(2\theta)] \\ & = 2u(u_r \sin \theta - \frac{u_\theta}{r} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklini alır. Özel olarak $u = u(r)$, $\varphi_1 = \varphi_1(r)$, $\varphi_2 = \varphi_2(r)$ varsayımı altında, sistemin sadece $\varphi_1 = \text{sabit}$, $\varphi_2 = \text{sabit}$ ve $u = 0$ çözümüne sahip olduğu gözlenmiştir. Şimdi sistemin

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{h(r)}{C_3} \\ \varphi_1(r, \theta) &= C_1 g(r) \cos \theta \\ \varphi_2(r, \theta) &= C_2 g(r) \sin \theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

şeklinde bir çözümü olduğu varsayılacaktır. Burada C_1, C_2 ve C_3 keyfi sabitlerdir. Ayrıca $g(r)$ fonksiyonunun $r \rightarrow \infty$ iken hızlıca sıfıra gittiği varsayılacaktır. Bu ifadeler (3.16) ve (3.17) denklemlerinde yerine konulursa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} & g''(r)[C_1 \cos^2 \theta + (m_2 C_1 + n C_2) \sin^2 \theta] + (\frac{g(r)}{r})' \\ & [(m_2 C_1 + n C_2) \cos^2 \theta + (3 C_1 - 2 m_2 C_1 - 2 n C_2) \sin^2 \theta] = [(\frac{h(r)}{C_3})^2]' \end{aligned} \quad (3.19)$$

ve

$$g''(r)[(\lambda C_2 + nC_1) \cos^2 \theta + m_1 C_2 \sin^2 \theta] + \left(\frac{g(r)}{r}\right)'$$

$$[(-2\lambda C_2 + 3m_1 C_2 - 2nC_1) \cos^2 \theta + (\lambda C_2 + nC_1) \sin^2 \theta] = \left[\left(\frac{h(r)}{C_3}\right)^2\right]' \quad (3.20)$$

elde edilir. Burada t notasyonu r değişkenine göre türevi gösterir. Bu iki denklemin uyumlu olabilmesi için

$$C_1 = \lambda C_2 + nC_1, \quad m_2 C_1 + nC_2 = m_1 C_2$$

$$m_2 C_1 + nC_2 = -2\lambda C_2 + 3m_1 C_2 - 2nC_1$$

$$3C_1 - 2m_2 C_1 - 2nC_2 = \lambda C_2 + nC_1 \quad (3.21)$$

bağıntılarının sağlanması gerekir. Bu bağıntılar ardışık olarak çözülürse,

$$C_1 = m_1 C_2$$

olduğu sonucuna varılır. Yani, $\varphi_2(r, \theta) = \frac{C_1}{m_1} g(r) \sin \theta$ şeklinde olmalıdır. (3.21) bağıntıları (3.19) veya (3.20) denkleminde yerine konulursa

$$C_1[g''(r) + \left(\frac{g(r)}{r}\right)'] - \left[\left(\frac{h(r)}{C_3}\right)^2\right]' = 0 \quad (3.22)$$

denklemini elde edilir. Öte yandan (3.15) denklemini

$$\frac{h''(r)}{C_3}[\sigma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] + \frac{h'(r)}{C_3 r}[\sigma \sin^2 \theta + \cos^2 \theta] = \kappa \frac{h^3(r)}{C_3^3} + \gamma \frac{h(r)}{C_3}$$

$$\{C_1 g'(r)[\cos^2 \theta + \frac{1}{m_1} \sin^2 \theta] + C_1 \frac{g(r)}{r}[\sin^2 \theta + \frac{1}{m_1} \cos^2 \theta]\} \quad (3.23)$$

şeklini alır.

Şimdi $h(r) = g(r)/r$ olduğu varsayılacaktır. Böylece (3.22) denklemini

$$C_1[g''(r) + \left(\frac{g(r)}{r}\right)'] - \frac{1}{C_3^2} \left(\frac{g^2(r)}{r^2}\right)' = 0$$

biçiminde yazılıp integre edilirse,

$$C_1 g'(r) = K - C_1 \frac{g(r)}{r} + \frac{1}{C_3^2} \frac{g^2(r)}{r^2} \quad (3.24)$$

birinci mertebe diferansiyel denklemini elde edilmiş olur. Burada K keyfi bir sabittir. $g(r)$ fonksiyonunun ve türevinin $r \rightarrow \infty$ iken hızlıca sıfıra gittiği varsayımından, $K = 0$ sonucuna varılır. Bu durumda

$$g'(r) = -\frac{g(r)}{r} + \frac{1}{C_1 C_3^2} \frac{g^2(r)}{r^2} \quad (3.25)$$

Riccati denklemi için $g(r) = 2 C_1 C_3^2 r$ fonksiyonu bir özel çözümdür. v yeni bir bağımlı değişken olmak üzere

$$g(r) = 2 C_1 C_3^2 r + \frac{1}{v(r)}$$

dönüşümü yapılırsa,

$$v'(r) = -3 \frac{v(r)}{r} - \frac{1}{C_1 C_3^2 r^2}$$

homojen olmayan lineer denklemi elde edilir. Bu lineer denklemin çözümü, M keyfi bir sabit olmak üzere

$$v(r) = -\frac{1}{2C_1 C_3^2 r} \left(1 + \frac{1}{Mr^2}\right)$$

şeklindedir. Böylece (3.25) Riccati denkleminin çözümü

$$g(r) = \frac{2C_1 C_3^2 r}{1 + Mr^2}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak, (3.18) sistemi

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{2C_1 C_3}{1 + Mr^2} \\ \varphi_1(r, \theta) &= \frac{2C_1^2 C_3^2 r}{1 + Mr^2} \cos \theta \\ \varphi_2(r, \theta) &= \frac{1}{m_1} \frac{2C_1^2 C_3^2 r}{1 + Mr^2} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklini alır. (3.23) denkleminde $\sigma = -1$ alınır ve (3.26) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &(-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left\{ -\frac{4MC_1 C_3}{(1 + Mr^2)^2} + \frac{16M^2 C_1 C_3 r^2}{(1 + Mr^2)^3} + \frac{4MC_1 C_3}{(1 + Mr^2)^2} \right\} \\ &= \kappa \frac{8C_1^3 C_3^3}{(1 + Mr^2)^3} + \gamma \frac{2C_1 C_3}{1 + Mr^2} \left\{ (\cos^2 \theta + \frac{1}{m_1} \sin^2 \theta) \frac{2C_1^2 C_3^2 (1 - Mr^2)}{(1 + Mr^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + (\sin^2 \theta + \frac{1}{m_1} \cos^2 \theta) \frac{2C_1^2 C_3^2}{1 + Mr^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Paydalar eşitlenip düzenlenirse, her θ için

$$\frac{16M^2 C_1 C_3 r^2}{(1 + Mr^2)^3} = \left[-\frac{4M\gamma C_1^3 C_3^3 r^2 (1 - \frac{1}{m_1})}{(1 + Mr^2)^3} \right] + \frac{8\kappa C_1^3 C_3^3 + 4\gamma C_1^3 C_3^3 (1 + \frac{1}{m_1})}{(1 + Mr^2)^3} \quad (3.28)$$

eşitliğin sağlanması gerektiği sonucuna ulaşılır. Bu ise ancak $M = 4C_1^2 C_3^2 A$ olmak üzere

$$\kappa = -\frac{\gamma}{2} \left(1 + \frac{1}{m_1}\right), \quad A = \frac{\gamma}{16} \left(1 - \frac{1}{m_1}\right)$$

olması durumunda gerçekleşecektir.

Kartezyen koordinatlara geri dönülürse, katsayılar arasında

$$\begin{aligned}\sigma &= -1, & \lambda &= m_1(1 - n), & m_2 &= 1 - \frac{n}{m_1} \\ \kappa &= -\frac{\gamma}{2}\left(1 + \frac{1}{m_1}\right), & A &= \frac{\gamma}{16}\left(1 - \frac{1}{m_1}\right)\end{aligned}\quad (3.29)$$

ilişkilerinin sağlanması durumunda

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= \frac{2C_1C_3}{1 + 4C_1^2C_3^2A(x^2 + y^2)} \\ \varphi_1(x, y, t) &= \frac{2C_1^2C_3^2x}{1 + 4C_1^2C_3^2A(x^2 + y^2)} \\ \varphi_2(x, y, t) &= \frac{1}{m_1} \frac{2C_1^2C_3^2y}{1 + 4C_1^2C_3^2A(x^2 + y^2)}\end{aligned}\quad (3.30)$$

ifadeleri GDS sisteminin zamana bağlı olmayan bir çözümünü oluşturur. Elde edilen bu çözüm aslında Ozawa'nın yaklaşımını takip ederek elde edilen çözümün $\mu = 2C_1C_3$ ölçek parametresi ile ölçeklenmiş halidir. Yani, "radyal" çözüm yaklaşımıyla elde edilen (3.30) çözümü ($u', \varphi'_1, \varphi'_2$) ile gösterilir ve $\mu = 2C_1C_3$ olmak üzere ölçek dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}u'(x', y', t') &= \frac{2C_1C_3}{1 + 4C_1^2C_3^2A(x'^2 + y'^2)} = \frac{\mu}{1 + A(x^2 + y^2)} = \mu u(x, y, t) \\ \varphi'_1(x', y', t') &= \frac{2C_1^2C_3^2x'}{1 + 4C_1^2C_3^2A(x'^2 + y'^2)} = \frac{\mu x}{2[1 + A(x^2 + y^2)]} = \mu \varphi_1(x, y, t) \\ \varphi'_2(x', y', t') &= \frac{2C_1^2C_3^2y'}{m_1[1 + 4C_1^2C_3^2A(x'^2 + y'^2)]} = \frac{\mu y}{2m_1[1 + A(x^2 + y^2)]} = \mu \varphi_2(x, y, t)\end{aligned}$$

bulunan (u, φ_1, φ_2) çözümü Ozawa'nın yaklaşımını takip ederek elde edilen (3.14) çözümüdür.

3.2.4.3 u_A çözümünün patlaması

Yukarıda verilen tartışma (3.29) bağıntılarının sağlanması halinde, (3.30) denklemleri ile verilen

$$\begin{aligned}v_A(x, y) &= \frac{\mu}{1 + A\mu^2(x^2 + y^2)} \\ \Psi_{1A}(x, y) &= \frac{\mu^2x}{2[1 + A\mu^2(x^2 + y^2)]} \\ \Psi_{2A}(x, y) &= \frac{\mu^2y}{2m_1[1 + A\mu^2(x^2 + y^2)]}\end{aligned}$$

fonksiyonlarının GDS sisteminin zamana bağılı olmayan bir çözümünü oluşturduğunu gösterir. Öte yandan, GDS sistemi (3.5) sözde-konformal dönüşümü altında invariant kaldığından, $(v_A, \Psi_{1A}, \Psi_{2A})$ fonksiyonları GDS sisteminin bir çözümü ise,

$$\begin{aligned} u_A(x, y, t) &= \frac{1}{(a + bt)} \exp\left[ib \frac{y^2 - x^2}{4(a + bt)}\right] v_A(x', y') \\ \varphi_{1A}(x, y, t) &= \frac{1}{(a + bt)} \Psi_{1A}(x', y') \\ \varphi_{2A}(x, y, t) &= \frac{1}{(a + bt)} \Psi_{2A}(x', y') \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar da GDS sisteminin bir çözümünü oluşturur. Böylece katsayıların (3.29) bağıntılarını sağlayacak şekilde seçimi halinde,

$$\begin{aligned} u_A(x, y, t) &= \frac{1}{(a + bt)} \exp\left[ib \frac{y^2 - x^2}{4(a + bt)}\right] \frac{\mu}{1 + A\mu^2(x'^2 + y'^2)} \\ \varphi_{1A}(x, y, t) &= \frac{1}{(a + bt)} \frac{\mu^2 x'}{2[1 + A\mu^2(x'^2 + y'^2)]} \\ \varphi_{2A}(x, y, t) &= \frac{1}{(a + bt)} \frac{\mu^2 y'}{2m_1[1 + A\mu^2(x'^2 + y'^2)]} \end{aligned} \quad (3.31)$$

fonksiyonları GDS sisteminin HEE hali için bir çözüm ailesini oluşturur. Bu durumda u_A fonksiyonu için $t = 0$ zamanına karşılık gelen başlangıç koşulu

$$u_A(x, y, 0) = \frac{1}{a} \exp\left(ib \frac{y^2 - x^2}{4a}\right) \frac{\mu}{1 + \frac{A}{a^2} \mu^2 (x^2 + y^2)} \quad (3.32)$$

şeklinde olacaktır. $A > 0$ iken

$$\|v_A\|_2 = (\pi/A)^{1/2}$$

olması nedeniyle, v_A fonksiyonu L^2 uzayının elemanıdır. u_A fonksiyonu ise her $t \in \mathbb{R}^+$ için, $a + bt \neq 0$ ve $A > 0$ iken,

$$\begin{aligned} \|u_A(t)\|_2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{(a + bt)} \exp\left(ib \frac{y^2 - x^2}{4(a + bt)}\right) \frac{\mu}{1 + A\mu^2(x'^2 + y'^2)} \right|^2 dx dy \right]^{1/2} \\ &= \mu \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{1 + A\mu^2(x'^2 + y'^2)} \right|^2 dx' dy' \right]^{1/2} \\ &= \mu \left[\int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + A\mu^2 r^2} \right)^2 r dr d\theta \right]^{1/2} \\ &= \left(\frac{\pi}{A} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

olması nedeniyle L^2 uzayının bir elemanıdır. Fakat $(x^2 + y^2)^{1/2}v_A$ fonksiyonu L^2 uzayının elemanı değildir. Öte yandan, ∇u_A fonksiyonu da

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_A(t)\|_2 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{\partial u_A}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_A}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \right]^{1/2} \\
&= \mu \left[\left(\frac{b^2}{4} + 4A^2\mu^4 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x'^2 + y'^2) \left(\frac{1}{1 + A\mu^2(x'^2 + y'^2)} \right)^2 dx' dy' \right]^{1/2} \\
&= \mu \left[\left(\frac{b^2}{4} + 4A^2\mu^4 \right) \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{1 + A\mu^2 r^2} \right)^2 r^3 dr d\theta \right]^{1/2} \\
&= \infty
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olması nedeniyle L^2 uzayının elemanı değildir. Böylece u_A fonksiyonu (3.33) nedeniyle H^1 uzayının bir elemanı değildir.

$T = -a/b$ ve $ab < 0$ olmak üzere, $\epsilon = a + bt = -b(T - t)$ tanımı yapılırsa, kütle yoğunluk fonksiyonu

$$|u_A(x, y, t)|^2 = \frac{1}{\epsilon^2} |v_A\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}\right)|^2$$

halini alır. $|u_A|^2 \in \mathcal{S}'$ ve $\forall \phi \in \mathcal{S}$ için

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u_A(x, y, t)|^2 \phi(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\epsilon^2} |v_A\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{y}{\epsilon}\right)|^2 \phi(x, y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |v_A(\bar{x}, \bar{y})|^2 \phi(\epsilon \bar{x}, \epsilon \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}
\end{aligned}$$

olup, $\epsilon \rightarrow 0$ yani $t \rightarrow T$ iken, son integral $(\pi/A)\phi(0, 0)$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$|u_A(t)|^2 \rightarrow \frac{\pi}{A} \delta$$

yakınsaması elde edilir. Burada δ Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir.

v_A fonksiyonunun radyal simetrik olduğuna fakat $u_A(x, y, 0)$ fonksiyonunun eksponansiyel terim nedeniyle radyal simetrik olmadığına dikkat edilmelidir. Başlangıç durumu olan $u_A(x, y, 0)$ fonksiyonu uzayda cebirsel bir azalma göstermektedir. Zaman patlama zamanı olan T değerine yaklaştıkça, çözüm orijinde lokalize olacak ve $|u_A(t)|^2$ kütle yoğunluk fonksiyonu $\mu^2 \epsilon^{-2} = \mu^2 b^{-2} (T - t)^{-2}$ maximum değerine ulaşacaktır. Bu ise çözümün $(T - t)^{-2}$ patlama hızıyla sonsuza gittiğini gösterir. Sonuç olarak, a ve b parametrelerinin uygun seçilmesi koşuluyla, istenilen patlama zamanında tekilliğe sahip olacak şekilde bir parametreye bağlı (analitik) patlama çözüm ailesi elde edilmiştir.

3.3 Eliptik-Eliptik-Eliptik hal için bazı analitik sonuçlar

Bu altbölümde, GDS sisteminin EEE hali için bazı analitik sonuçlar verilecektir. Bu bölümün geri kalan kısmında ve bundan sonraki bölümlerde, GDS sistemi için (2.21) ile verilen ve enerjinin korunumuna karşılık gelen I_4 büyüklüğü literatür ile uyum sağlamak amacıyla $\mathcal{H}$ (Hamiltonyen) ile gösterilecektir.

3.3.1 GDS sistemi için patlama çözümleri ve literatür

GDS sisteminin çözümlerinin global varlığı sorusu ilk olarak [6]'da ele alınmıştır. Bu çalışmada m_1, m_2 ve λ katsayılarının pozitif değerli olduğu varsayılarak, GDS sisteminin EEE hali için aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 1 ([6], sayfa 11537): $m_1 > 0$ ve $\kappa \geq \max\{-\gamma \max(1, \frac{1}{m_1}), 0\}$ için GDS sisteminin çözümleri globaldir.

Yine aynı çalışmada çözümlerin sonlu zamanda patlamasının hangi koşullar altında mümkün olduğu sorusu tartışılmıştır. m_1, m_2 ve λ katsayılarının pozitif değerli olduğu varsayılarak, GDS sisteminin EEE hali için aşağıdaki Lemma ve Teorem ispatlanmıştır.

Lemma 1 ([6], sayfa 11540): $m_1 > 1$ ve $\kappa < \min(-\frac{\gamma}{m_1}, 0)$ için $\mathcal{H}(u_0) < 0$ olacak şekilde $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ vardır.

Teorem 2 ([6], sayfa 11541): $\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2 \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$ ve $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ olmak üzere, GDS sisteminin $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ başlangıç değeri için tanımlanmış Cauchy probleminin çözümü u olsun. Eğer

$$(i) \mathcal{H}(u_0) < 0$$

$$(ii) \mathcal{H}(u_0) = 0 \text{ ve } \text{Im} \int_{\mathbb{R}^2} (xu_0^* u_{0,x} + yu_0^* u_{0,y}) dx dy < 0$$

$$(iii) \mathcal{H}(u_0) > 0 \text{ ve } -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^2} (xu_0^* u_{0,x} + yu_0^* u_{0,y}) dx dy > \sqrt{\mathcal{H}(u_0)\mathcal{V}(0)}$$

koşullarından bir tanesi sağlanırsa, o zaman öyle bir T zamanı vardır ki

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (\|u_x\|_{L^2} + \|u_y\|_{L^2}) = \infty$$

olur, yani, eğer çözüm var ise sonlu zamanda patlayacaktır.

[6]'da GDS sisteminin EEE hali için m_1, m_2 ve λ pozitif olmak üzere elde edilen

sonuçlar ileride yapılacak karşılaştırmalarda kolaylık sağlaması amacıyla, aşağıda $\gamma > 0$ ve $\gamma < 0$ durumları için ayrı ayrı ifade edilecektir. GDS sisteminin EEE hali için

(i) katsayıların

$$\gamma > 0 \text{ için } m_1 > 0, \quad \kappa \geq 0 \quad (3.34)$$

veya

$$\gamma < 0 \text{ için } m_1 > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max(1, \frac{1}{m_1}) \quad (3.35)$$

koşullarını sağlaması durumunda çözüm global olarak varolacak ve

(ii) katsayıların

$$\gamma > 0 \text{ için } m_1 > 1, \quad \kappa < -\frac{\gamma}{m_1} \quad (3.36)$$

veya

$$\gamma < 0 \text{ için } m_1 > 1, \quad \kappa < 0 \quad (3.37)$$

koşullarını sağlaması durumunda ise çözüm sonlu zamanda patlayacaktır. [6]'da belirtildiği gibi, burada ilginç olan nokta yukarıda verilen koşulların κ parametresinin bütün değerlerini kapsamamasıdır. Örneğin, $\gamma > 0$ durumu için; (i) eğer $m_1 > 1$ ise κ parametresinin $-\frac{\gamma}{m_1} \leq \kappa < 0$ aralığında veya (ii) eğer $0 < m_1 < 1$ ise $\kappa < 0$ için çözümlerin global varlığı veya patlaması üzerine yukarıdaki koşullardan yararlanarak bir şey söylemek mümkün olmamaktadır. Benzer şekilde, $\gamma < 0$ durumu için; (i) eğer $m_1 > 1$ ise κ parametresinin $0 \leq \kappa < -\gamma$ aralığında veya (ii) eğer $0 < m_1 < 1$ ise $\kappa < -\frac{\gamma}{m_1}$ için yine [6]'da ifade edilen koşullardan yararlanarak çözümlerin global varlığı veya patlaması üzerine bir şey söylemek mümkün değildir. Bu durum [6]'da da belirtilmiş ve yukarıdaki koşullarda kapsanmayan parametre değerleri için çözümlerin varlığı veya patlamasının açıklığa kavuşturulmasının bir açık problem olduğu ifade edilmiştir. Bu tez çalışmasının en önemli başlangıç noktalarından biri, bu problemi gerek analitik teknikler gerekse sayısal teknikler kullanarak bir çözüme kavuşturma çabası olmuştur.

3.3.2 Çözümlerin varlığı ve patlama için koşullar

Yukarıda GDS sisteminin EEE hali için çözümlerin global varlığı ve patlaması ile ilgili olarak [6]'da ifade edilen koşulların, κ parametresi için

(i) $\gamma > 0$ durumunda

$$\begin{array}{ll} m_1 > 1 & \text{ise} \quad [-\frac{\gamma}{m_1}, 0) \\ 0 < m_1 < 1 & \text{ise} \quad (-\infty, 0) \end{array} \quad (3.38)$$

aralıklarını

(i) $\gamma < 0$ durumunda

$$\begin{array}{ll} m_1 > 1 & \text{ise} \quad [0, -\gamma) \\ 0 < m_1 < 1 & \text{ise} \quad (-\infty, -\frac{\gamma}{m_1}) \end{array} \quad (3.39)$$

aralıklarını belirsiz bıraktığı belirtilmişti. Çözümlerin global varlığı ve patlaması ile ilgili olarak [6]'da ispatlanan teoremler burada yeniden ele alınacak ve yukarıda belirtilen koşullar iyileştirilmeye çalışılacak, diğer bir deyişle global varlık veya patlama konusunda birşey söylenemeyen parametre aralıkları ortadan kaldırılmaya veya en azından küçültülmeye çalışılacaktır. Aşağıda verilecek teoremlerin ispatları [6]'da yapılan ispatlara çok benzer olduğundan, burada sadece farklılık yaratan noktalar üzerinde durulacaktır.

İlk olarak, GDS sisteminin çözümlerinin varlığı ile ilgili bir teorem ispatlanacaktır. Bu teoremin ifadesini ve ispatını vermeden önce yukarıda ifade edilen Teorem 1'in ifadesi ile ilgili bir uyarıda bulunulması yararlı olacaktır. [6]'da Teorem 1'in ifadesinde açıkça belirtilmemesine rağmen, elde edilen sonucun $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$ ve $n > 0$ için geçerli olduğu, diğer bir deyişle bu eşitsizliklerin hesaplamalar sırasında kullanıldığı vurgulanmalıdır.

Teorem 3: $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$, $n > 0$ ve

$$\delta_1 = \frac{1 + m_1 - 2n}{\lambda m_1 + m_2} \quad (3.40)$$

olmak üzere,

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \min\{\delta_1, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\}$$

ve

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max(\frac{1}{m_1}, 1)$$

durumları için GDS sisteminin çözümleri globaldir.

İspat: [6]'da Plancherel teoremi kullanılarak u çözümüne ait Hamiltonyenin (yani enerjinin (2.21)) ,

$$\alpha = \alpha(\xi_1, \xi_2) = \frac{\lambda \xi_1^4 + (1 + m_1 - 2n)\xi_1^2 \xi_2^2 + m_2 \xi_2^4}{(\lambda \xi_1^2 + m_2 \xi_2^2)(\xi_1^2 + m_1 \xi_2^2)} \quad (3.41)$$

olmak üzere, Fourier uzayında

$$\mathcal{H}(u) = \int (\xi_1^2 + \xi_2^2) |\hat{u}|^2 d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{2} \int (\kappa + \alpha \gamma) |\hat{f}|^2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.42)$$

şeklinde yazılabileceği gösterilmiştir ([6], sayfa 11538, denklem (26)). Burada (ξ_1, ξ_2) Fourier değişkenlerini, $\hat{u}$ ve $\hat{f}$ ise, sırasıyla, u ve $|u|^2$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerini gösterir. Şimdi [6] Ek A'da izlenen yaklaşım uygulanacak, yani pozitif d, e ve f büyüklükleri için geçerli

$$\min\left\{\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}\right\} \leq \frac{a+b+c}{d+e+f} \leq \max\left\{\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}\right\} \quad (3.43)$$

eşitsizliği $\alpha(\xi_1, \xi_2)$ fonksiyonuna uygulanacaktır. Bu durumda bazı uzun hesaplamalardan sonra

(i) $m_1 \geq 1$ iken

$$\min(\delta_1, \frac{1}{m_1}) \leq \alpha(\xi_1, \xi_2) \leq 1, \quad (3.44)$$

(ii) $0 < m_1 < 1$ iken

$$\min(\delta_1, 1) \leq \alpha(\xi_1, \xi_2) \leq \frac{1}{m_1} \quad (3.45)$$

olduğunu göstermek mümkündür. Bu iki sonucun

$$\min\left\{\delta_1, \min\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)\right\} \leq \alpha(\xi_1, \xi_2) \leq \max\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)$$

şeklinde biraraya getirilebileceğine dikkat edilmelidir. Bu durumda

(i) $\gamma > 0$ iken

$$\kappa \geq -\gamma \min\left\{\delta_1, \min\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)\right\}$$

için ve

(ii) $\gamma < 0$ iken

$$\kappa \geq -\gamma \max\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)$$

için $\kappa + \alpha\gamma \geq 0$ olacağı açıktır. Böylece (3.42) enerji ifadesi

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(u) &\geq \int (\xi_1^2 + \xi_2^2) |\hat{u}|^2 d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \int (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy\end{aligned}$$

şeklinde aşağıdan sınırlanabilecektir. Bu ise, [6]'da belirtildiği gibi, u fonksiyonunun H^1 normu üzerine bir sınır getirecek ve çözümün global olarak varolması için lokal varlığının yeterli olması sonucunu verecektir.

Yukarıda verilen ispatın [6]'da verilen ispata tamamen benzer olduğu ve aradaki farkın (3.44) ve (3.45) eşitsizliklerinin türetilmesinden kaynaklandığı vurgulanmalıdır. Bu eşitsizliklerle [6]'da sunulan eşitsizlikler karşılaştırıldığında eşitsizliklerin sağ taraflarının aynı fakat sol taraflarının farklı olduğu gözlenir. Bu farklılık, çözümlerin global varlığı için katsayılar üzerine getirilen kısıtlamalar açısından $\gamma < 0$ durumunda herhangi bir farklılık yaratmamakla birlikte, $\gamma > 0$ durumunda [6] ve şimdiki çalışmada farklı sonuçlara ulaşılmasına neden olmaktadır. Burada elde edilen sonuçların [6]'da elde edilen sonuçların bir iyileştirilmesi şeklinde olduğu ileride gösterilecektir. ($\alpha(\xi_1, \xi_2)$ büyüklüğü için yukarıda verilmiş (3.44) ve (3.45) eşitsizliklerinin doğruluğu [6]'nın yazarları tarafından da sözlü olarak belirtilmiştir.)

İkinci olarak, Hamiltonyeni negatif yapan başlangıç datasının varlığı ile ilgili koşulları verecek olan aşağıdaki lemma ispatlanacaktır.

Lemma 2: $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$, $n > 0$ ve

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{m_1}(1 - 2n + m_1) + \sqrt{\lambda m_2}(1 + m_1)}{(m_1\sqrt{\lambda} + \sqrt{m_1 m_2})(\sqrt{m_2} + \sqrt{\lambda m_1})} \quad (3.46)$$

olmak üzere,

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \min\{\delta_2, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\}$$

ve

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \max(\frac{1}{m_1}, 1)$$

durumları için $\mathcal{H}(u_0) < 0$ olacak şekilde $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ vardır.

İspat: μ, β_1 ve β_2 pozitif parametreler olmak üzere $v_\mu = \mu \exp(-x^2/\beta_1^2 - y^2/\beta_2^2)$

fonksiyonu için [6]'da Hamiltonyen hesaplanmıştır. Uzun hesaplamalardan sonra

$$J(\beta_1, \beta_2) = \frac{(m_2 + \sqrt{\lambda m_1 m_2})\beta_1^2 + [\sqrt{m_1}(1 - 2n + m_1) + \sqrt{\lambda m_2}(1 + m_1)]\beta_1\beta_2 + (\lambda m_1 + \sqrt{\lambda m_1 m_2})\beta_2^2}{(m_1\sqrt{\lambda} + \sqrt{m_1 m_2})[\sqrt{m_1 m_2}\beta_1^2 + (\sqrt{m_2} + \sqrt{\lambda m_1})\beta_1\beta_2 + \sqrt{\lambda}\beta_2^2]}$$

olmak üzere, Hamiltonyenin

$$\mathcal{H}(v_\mu) = \frac{\pi(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{2\beta_1\beta_2}\mu^2 + \frac{\pi\beta_1\beta_2}{8}(\kappa + \gamma J)\mu^4 \quad (3.47)$$

şeklinde yazılabileceği gösterilmiştir. (3.43) eşitsizliğinin kullanılması ile bazı uzun hesaplamalardan sonra,

(i) $m_1 \geq 1$ iken

$$\min(\delta_2, \frac{1}{m_1}) \leq J(\beta_1, \beta_2) \leq 1 \quad (3.48)$$

(ii) $0 < m_1 < 1$ iken

$$\min(\delta_2, 1) \leq J(\beta_1, \beta_2) \leq \frac{1}{m_1} \quad (3.49)$$

olduğunu göstermek mümkündür. Bu iki sonucun

$$\min\{\delta_2, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\} \leq J(\beta_1, \beta_2) \leq \max(\frac{1}{m_1}, 1)$$

şeklinde birleştirilebileceği açıktır. Hamiltonyenin (3.47) ile verilen ifadesinden, $\kappa + \gamma J \geq 0$ ise Hamiltonyenin negatif olamayacağı sonucu çıkar. Öte yandan, $\kappa + \gamma J < 0$ olmasının Hamiltonyeni negatif yapmaya yetmeyeceğine ve Hamiltonyenin negatif olması için

$$\kappa + \gamma J < -\frac{4(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{\mu^2\beta_1^2\beta_2^2}$$

koşulunun sağlanması gerektiğine dikkat edilmelidir. Ancak, $\kappa + \gamma J < 0$ durumunda μ parametresini uygun şekilde seçerek Hamiltonyen negatif yapılabilir. Kısa bir hesap

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \max(\frac{1}{m_1}, 1)$$

ve

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \min\{\delta_2, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\}$$

durumları için, β_1 ve β_2 parametrelerinin nasıl seçildiğinden bağımsız olarak, $\kappa + \gamma J < 0$ ve $H(v_\mu) < 0$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, yine kısa bir hesap, β_1 ve β_2 parametrelerinin uygun bir şekilde seçilmesi koşuluyla,

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \min\{\delta_2, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\}$$

ve

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \max(\frac{1}{m_1}, 1)$$

durumları için $\kappa + \gamma J < 0$ ve dolayısıyla $H(v_\mu) < 0$ olduğunu gösterir.

Yukarıda verilen ispatın [6]'da verilen ispata tamamen benzer olduğu ve aradaki farkın (3.48) ve (3.49) eşitsizliklerinin türetilmesinden kaynaklandığı vurgulanmalıdır. İlk olarak, [6]'da sadece $m_1 \geq 1$ durumu için bir eşitsizlik türetildiğine, diğer bir deyişle (3.49) eşitsizliği için bir karşılaştırma yapma olanağının olmadığına dikkat edilmelidir. (3.48) eşitsizliği [6]'da verilen benzer eşitsizlik ile karşılaştırıldığında eşitsizliklerin sağ taraflarının aynı fakat sol taraflarının farklı olduğu gözlenir. Bu farklılık Hamiltonyenin negatif olması ve Teorem 3 nedeniyle çözümlerin sonlu zamanda patlaması için katsayılar üzerine getirilen kısıtlamalar açısından, hem $\gamma > 0$ hem de $\gamma < 0$ durumlarında şimdiki çalışma ve [6] arasında farklılığa neden olmaktadır. Burada elde edilen sonuçların [6]'da elde edilen sonuçların bir iyileştirilmesi olduğu ileride gösterilecektir.

Şimdi hem çözümlerin global varlığı hem de çözümlerin sonlu zamanda patlaması için gereken koşullar bir bütünlük sağlaması için birlikte yazılacaktır. GDS sisteminin EEE halinde;

(i) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \min\{\delta_1, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\} \quad (3.50)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max(\frac{1}{m_1}, 1) \quad (3.51)$$

koşullarını sağlaması durumunda lokal olarak varolan çözümler global olarak da vardır ve

(ii) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \min\{\delta_2, \min(\frac{1}{m_1}, 1)\} \quad (3.52)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \max\left(\frac{1}{m_1}, 1\right) \quad (3.53)$$

koşullarını sağlaması durumunda Cauchy probleminin $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ çözümü sonlu zamanda patlayacaktır. Bu koşullarda görünen δ_1 ve δ_2 parametreleri (3.40) ve (3.46) denklemleri ile verilmiş olup genel halde, yani $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$ ve $n > 0$ iken,

$$\begin{aligned} \delta_1 = \frac{1 + m_1 - 2n}{\lambda m_1 + m_2} &= \frac{(1 + m_1 - 2n)(\sqrt{m_1} + \sqrt{\lambda m_2})}{(\lambda m_1 + m_2)(\sqrt{m_1} + \sqrt{\lambda m_2})} \\ &< \frac{\sqrt{m_1}(1 + m_1 - 2n) + \sqrt{\lambda m_2}(1 + m_1)}{\lambda m_1 \sqrt{m_1} + \lambda m_1 \sqrt{\lambda m_2} + m_2 \sqrt{m_1} + m_2 \sqrt{\lambda m_2}} \\ &< \frac{\sqrt{m_1}(1 + m_1 - 2n) + \sqrt{\lambda m_2}(1 + m_1)}{\lambda m_1 \sqrt{m_1} + m_1 \sqrt{\lambda m_2} + m_2 \sqrt{m_1} + m_2 \sqrt{\lambda m_2}} = \delta_2 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Öte yandan, $\lambda = 1$, $m_2 = m_1 = m$, $n = 0$ limit durumunda bu eşitsizlik $\delta_1 = \delta_2$ eşitliğine dönüşmektedir.

Bu tez çalışmasının hareket noktalarından birinin [6]'da açık problem olarak belirtilen soruna çözüm bulmak, diğer bir deyişle κ parametresinin [6]'da global varlık veya sonlu zamanda patlama açısından bir sonuca ulaştırılamamış aralıklarında ne olduğunu ortaya çıkarmak olduğu yukarıda belirtilmişti. Yukarıda toplu halde verilen koşulların bir incelemesi, bu tez çalışmasında elde edilen yeni koşullarla $\gamma < 0$ durumu için bir boşluk kalmadığını, yani $\gamma < 0$ durumunda κ parametresinin bütün değerleri için çözümlerin global varlığı veya sonlu zamanda patlaması açısından bir belirsizliğin kalmadığını gösterir. Böylece [6]'da belirtilen açık problem, analitik teknikler kullanılarak bu altbölümde $\gamma < 0$ için çözülmüş olur.

Öte yandan, $\gamma > 0$ durumunda çözümlerin global varlığı ve çözümlerin patlaması açısından bir belirsizliğin mevcut olduğu bir κ aralığı hala vardır. (3.50) ve (3.52) eşitsizliklerinden bu aralığın

$$-\gamma \min\left\{\delta_2, \min\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)\right\} \leq \kappa < -\gamma \min\left\{\delta_1, \min\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)\right\} \quad (3.54)$$

şeklinde olduğu sonucu çıkar. Burada $\delta_1 < \delta_2$ olduğuna dikkat edilmelidir. Elde edilen bu sonucu [6]'da elde edilenlerle karşılaştırabilmek için şimdilik $m_1 \geq 1$

olduğu kabul edilecektir. Bu durumda (3.54) eşitsizliği

$$-\gamma \min(\delta_2, \frac{1}{m_1}) \leq \kappa < -\gamma \min(\delta_1, \frac{1}{m_1})$$

şeklini alır. Şimdi (i) $\frac{1}{m_1} < \delta_1$, (ii) $\delta_1 < \frac{1}{m_1} < \delta_2$ ve (iii) $\delta_2 < \frac{1}{m_1}$ durumlarının herbiri için bu eşitsizliğin aldığı şekil irdelenecektir:

(i) $\frac{1}{m_1} < \delta_1$ durumunda bu eşitsizlik ortadan kalkacak, yani $\gamma > 0$ durumunda da çözümlerin global varlığı veya sonlu zamanda patlaması açısından açıklığa kavuşmamış bir κ değeri mevcut olmayacaktır.

(ii) $\delta_1 < \frac{1}{m_1} < \delta_2$ durumunda belirsizliğin mevcut olduğu aralık

$$-\frac{\gamma}{m_1} \leq \kappa < -\gamma\delta_1$$

şeklini alacaktır.

(iii) $\delta_2 < \frac{1}{m_1}$ durumunda söz konusu aralık

$$-\gamma\delta_2 \leq \kappa < -\gamma\delta_1 \quad (3.55)$$

şeklini alacaktır. $\gamma > 0$ için [6]'da belirsizlik aralığının, (3.34) ve (3.36) eşitsizliklerinden görüldüğü üzere,

$$-\frac{\gamma}{m_1} \leq \kappa < 0 \quad (3.56)$$

şeklinde bulunduğu hatırlanırsa, $\delta_1 > 0$ durumunda yukarıda (ii) ve (iii) durumlarında elde edilen aralıkların [6]'da bulunmuş aralıktan daha küçük olduğu açıktır. Bu durumu daha açık bir şekilde görebilmek amacıyla, sayısal çözüm yöntemleri ile ilgili olan Bölüm 4 ve Bölüm 5'de kullanılacak katsayı değerleri için bu aralıkları karşılaştırmak yararlı olacaktır. Eğer katsayılar için yukarıda belirtilen kısıtlamalar gözönüne alınır ve katsayılar

$$\lambda = 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad n = 1, \quad \gamma = 1 \quad (3.57)$$

seçilirse

$$\delta_1 = \frac{1}{7}, \quad \delta_2 = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^2} = \kappa_0 \simeq 0.444$$

bulunur. Bu durumda $\delta_1 < \delta_2 < \frac{1}{m_1}$ olup, belirsizlik aralığı (3.55) eşitsizliğinden

$$-\kappa_0 \leq \kappa < -\frac{1}{7}$$

olarak elde edilir. Ancak (3.56) eşitsizliğinin yukarıdaki katsayı değerleri için

$$-\frac{1}{2} \leq \kappa < 0$$

şeklinde olduğuna dikkat edilirse, beklenildiği gibi şimdiki çalışmada $\gamma > 0$ için ulaşılan belirsizlik aralığının [6]'da verilenden daha küçük olduğu sonucuna ulaşılır.

Bu altbölümde elde edilen sonuçlarla [6]'da elde edilen sonuçların farklılığı, YGDS sistemi ile ilgili Altbölüm 3.4'de yeniden ele alınarak analitik olarak incelenecektir. Ancak bu noktada Bölüm 4 ve Bölüm 5'de gerçekleştirilen bazı sayısal deneylerin sonuçlarından da bahsetmek yararlı olacaktır. Bu altbölümde analitik olarak elde edilen koşullar, genel olarak, Bölüm 4 ve Bölüm 5'de çalışılacak olan, sırasıyla, rölaksasyon ve split-step sayısal yöntemlerinin doğru bir şekilde bilgisayar programı haline getirilip getirilmediğini test etmek açısından son derece yararlıdır. Ancak, yukarıdaki gibi, farklı analitik sonuçların mevcut olduğu durumlarda sayısal deneyler de sonuca varmak açısından yararlı olabilmektedir. Örneğin, bu altbölümde elde edilen sonuçlar (3.57) parametre değerleri için $\kappa = -1/7$ durumunda çözümün global olarak varolduğunu belirtirken, $\kappa = -1/7$ değeri [6]'da belirsizlik aralığının içinde kalmıştır. Bu durumu açıklığa kavuşturmak amacıyla, Bölüm 4 ve Bölüm 5'de yukarıdaki parametre değerleri ve $\kappa = -1/7$ için (4.35) ile verilen Gaussyen başlangıç koşuluna karşılık gelen Cauchy problemi, sırasıyla, rölaksasyon ve split-step sayısal yöntemleri kullanılarak çözülmüş ve $\|u\|_\infty$ normunun zamanla değişimi Şekil 4.8 ve Şekil 5.3'de sunulmuştur. Bu şekillerde sunulan eğrilerin incelenmesi, $\kappa = -1/7$ değeri için her iki sayısal yöntem açısından da çözümün global olarak varolduğuna işaret eder. Böylece hem bu altbölümde elde edilen analitik sonuçların hem de iki farklı sayısal yöntem ile elde edilen sayısal sonuçların tam bir uyum içerisinde olduğu gözlenir. Öte yandan, yukarıda [6]'dan farklı olarak $\gamma < 0$ durumu için bir boşluk kalmadığı, yani $\gamma < 0$ durumunda κ parametresinin bütün değerleri için çözümlerin global varlığı veya sonlu zamanda patlaması açısından bir belirsizliğin kalmadığı ifade edilmişti. Bu

durumu da sayısal olarak irdelemek amacıyla, katsayılar

$$\lambda = 2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = 3, \quad n = 1, \quad \gamma = -1 \quad (3.58)$$

şeklinde seçilirse, (3.51) koşulundan

$$\kappa \geq 1$$

iken çözümlerin global olarak varolduğu ve (3.53) koşulundan da

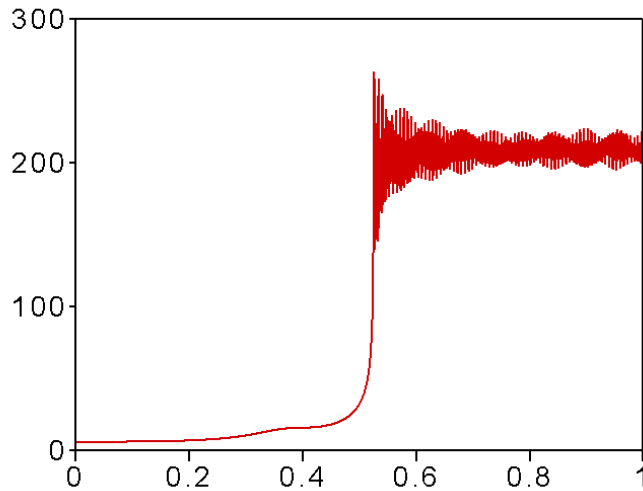
$$\kappa < 1$$

iken çözümlerin sonlu zamanda patlayacağı ortaya çıkar. Ancak, yukarıdaki katsayı değerleri için [6]'da verilen koşullar

$$0 \leq \kappa < 1$$

aralığını belirsiz olarak bırakmaktadır.

Şekil 3.1'de (4.35) başlangıç koşulu ve $\kappa = 1/2$ değeri için, split-step yöntemi ile elde edilen sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. Şekilden görüldüğü üzere, sayısal yöntem $\kappa = 1/2$ değeri için çözümün sonlu zamanda patlayacağına işaret etmektedir. Dolayısıyla $\gamma < 0$ durumu için de hem bu altbölümde analitik olarak elde edilen sonuç hem de split-step sayısal yöntemi ile elde edilen sonuç uyum içerisindedir.



Şekil 3.1. $\kappa = 1/2$ değeri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.

(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Yukarıdaki irdelemelere ek olarak, [6] ve şimdiki çalışmada bulunan sonuçların farklılığı, Altbölüm 3.4'de YGDS sisteminin çözümlerinin global varlığı veya sonlu zamanda patlama koşulları incelendiğinde, yeniden ele alınacak ve bu altbölümde elde edilen koşulların YGDS için türetilen koşullara indirgendiği analitik olarak gösterilecektir.

3.3.3 GDS sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı

Altbölüm 3.2.3'de, $|\sigma| = 1$ olması halinde GDS sisteminin sözde-konformal dönüşüm altında invariant kaldığından bahsedilmişti. Dolayısıyla sözde-konformal dönüşüm sistemin EEE hali için de geçerlidir. Bu altbölümde, Weinstein'in [22] izlediği yolu takip ederek, sistemin EEE hali için $\Sigma = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2) : (x^2 + y^2)^{1/2}u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ kümesinden seçilen çözümlerin $p > 2$ iken L^p normlarının sıfıra gittiği sözde-konformal dönüşüm yardımıyla gösterilecektir [18].

[6]'da $m_1 > 0$ ve $\kappa \geq \max\{-\gamma \max\{1, 1/m_1\}, 0\}$ olmak üzere, her $\xi \in \mathbb{R}^2$ için (3.41) ile verilen $\alpha(\xi_1, \xi_2)$ ifadesi için $\kappa + \alpha(\xi_1, \xi_2)\gamma > 0$ olduğu gösterilmiştir. Şimdiki çalışmada ise, [6]'da verilen bu koşullar iyileştirilerek, Teorem 3'de verilen koşullar için $\kappa + \alpha(\xi_1, \xi_2)\gamma > 0$ olduğu gösterilmiştir. $\mathcal{H}(u)$ ile gösterilen korunan büyüklüğün

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u) = & \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \sigma |u_x|^2 + |u_y|^2 + \frac{\kappa}{2} |u|^4 + \frac{\gamma}{2} [(\varphi_{1,x})^2 + m_2(\varphi_{1,y})^2 \right. \\ & \left. + \lambda(\varphi_{2,x})^2 + m_1(\varphi_{2,y})^2 + n(\varphi_{1,y}\varphi_{2,x} + \varphi_{1,x}\varphi_{2,y})] \right\} dx dy, \end{aligned}$$

toplam enerjiyi gösterdiği hatırlanırsa,

$$\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \mathcal{H}(u)(t)$$

elde edilir. Kütle ve enerji korunan büyüklükler olduğundan çözümlerin H^1 normu

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \mathcal{H}(u_0) + \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

sınırlı kalacaktır.

Fonksiyonunun kendisi ile modülünün gradyanlarının L^2 normları arasındaki ilişkiyi gösteren

$$\|\nabla |u|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad (3.59)$$

eşitsizlik Stampacchia eşitsizliği olarak adlandırılır [9]. (3.59) yardımıyla

$$\mathcal{H}(|u|)(t) \leq \mathcal{H}(u)(t) \quad (3.60)$$

yazılabilir. GDS sisteminin herhangi bir v çözümü için, (3.60) ve enerjinin korunumundan

$$\mathcal{H}(|v|)\left(\frac{c+dt}{a+bt}\right) \leq \mathcal{H}(v)\left(\frac{c+dt}{a+bt}\right) \leq \mathcal{H}(v)\left(\frac{c}{a}\right)$$

sağlanacaktır. Sözde-konformal dönüşümün v çözümünü u çözümüne taşıdığını varsayarsak, $T = \frac{c+dt}{a+bt}$ için

$$\mathcal{H}(|u|)(T) = (a+bt)^2 \mathcal{H}(|v|)(T) \leq (a+bt)^2 \mathcal{H}(v)\left(\frac{c}{a}\right) = (d-bT)^{-2} \mathcal{H}(v)\left(\frac{c}{a}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla k bir sabit olmak üzere,

$$\mathcal{H}(|u|)(T) \leq k(1+|T|)^{-2}$$

bulunur.

Sonuç olarak, Gagliardo-Nirenberg eşitsizliği [23] kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p &\leq C \|\nabla |u|\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{p-2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C \mathcal{H}(|u|)^{(p-2)/2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq N(1+|t|)^{2-p} \end{aligned}$$

bulunur. Burada N bir sabiti göstermektedir. Böylece $\lambda > 1$, $m_2 > m_1 > 0$, $n > 0$ ve (3.40) ile verilen δ_1 ifadesi için,

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \min\left\{\delta_1, \min\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)\right\}$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max\left(\frac{1}{m_1}, 1\right)$$

koşulları sağlanmak üzere Σ kümesinden seçilen çözümlerin L^p normlarının $p > 2$ için $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiği sonucuna varılır.

3.4 Yozlaşmış Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (YGDS) sistemi için bazı analitik sonuçlar

Genelleştirilmiş elastik bir ortamda yayılmakta olan bir kısa enine dalga (u) ile, biri boyuna dalga (φ_1) ve diğeri enine dalga (φ_2) olmak üzere, iki uzun

dalganın etkileşimini tanımlayan GDS sisteminin en iyi bilinen indirgemeleri NLS denklemi ve DS sistemidir. Bu altbölümde, bu iyi bilinen indirgemeler dışında, GDS sisteminin bir özel fiziksel durumdan kaynaklanan bir başka indirgemesi tanıtılacaktır. Ayrıca bulunan yeni denklem sistemi, çözümlerin global varlığı ve çözümlerin sonlu zamanda patlaması açılarından tartışılacaktır.

Boyuna dalgaların faz hızı olan c_1 ile enine dalgaların faz hızı c_2 birbirlerine eşit olduğu zaman ($c_1^2 = c_2^2$), faz hızları ve elastik malzeme sabitlerine bağlı olarak açık ifadeleri [6]'da (sayfa 11534, (10) denklemi) verilmiş olan λ , m_1 , m_2 ve n katsayıları

$$\lambda = 1, \quad m_1 = m_2, \quad n = 0 \quad (3.61)$$

şeklini alır. Bu özel durum için GDS sistemi,

$$\begin{aligned} i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} &= \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u \\ \varphi_{1,xx} + m \varphi_{1,yy} &= (|u|^2)_x \\ \varphi_{2,xx} + m \varphi_{2,yy} &= (|u|^2)_y \end{aligned} \quad (3.62)$$

sistemine indirgenir. Burada $m_1 = m_2 = m$ gösterilimi kullanılmıştır. (3.62) denklem sistemi bundan sonra Yozlaşmış Genelleştirilmiş Davey-Stewartson (YGDS) sistemi olarak adlandırılacak olup, bu sistemin GDS sisteminden en önemli farkı son iki denklemdeki karışık türevli terimlerin yok olması ve dolayısıyla son iki denklemin sol taraflarının birbirlerinden bağımsız olmasıdır. YGDS sisteminin eliptik-hiperbolik-hiperbolik ($\sigma = 1, m < 0$) hali için gezen dalga şeklindeki bazı özel çözümleri [24]'de sunulmuştur.

GDS sistemi için [6]'da verilmiş olan sınıflandırma, $\sigma = 1$ ve $m > 0$ için YGDS sisteminin EEE durumda olacağını belirtir. Şimdi GDS sisteminin EEE durumu için çözümlerin global varlığı ve sonlu zamanda patlaması ile ilgili olarak gerek [6]'da gerekse bu çalışmada elde edilen koşullar (3.61) özel durumu için yani YGDS sistemi için ifade edilecektir. (3.61) özel durumu için [6]'da türetilen (3.34)-(3.37) koşulları şu şekli alır. YGDS sisteminin EEE hali için

(i) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq 0 \quad (3.63)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max\left(\frac{1}{m}, 1\right) \quad (3.64)$$

koşullarını sağlaması durumunda çözüm global olarak varolacak ve

(ii) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad m > 1, \quad \kappa < -\frac{\gamma}{m} \quad (3.65)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad m > 1, \quad \kappa < 0 \quad (3.66)$$

koşullarını sağlaması durumunda çözüm sonlu zamanda patlayacaktır. YGDS sistemi için elde edilen bu koşulların $m_1 = m$ yerleştirmesi dışında, GDS sistemi için türetilmiş (3.34)-(3.37) koşulları ile tamamen aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle yukarıda ifade edilen (3.63)-(3.66) koşullarının, GDS sisteminde olduğu gibi YGDS sistemi için de, bir belirsizlik aralığı yaratması yani bu koşulların κ parametresinin bütün değerlerini kapsamaması doğaldır.

Altbölüm 3.3.2’de türetilen koşulların (3.61) özel durumu için alacağı şekli belirlemeden önce, bu koşullarda görünen δ_1 ve δ_2 katsayılarının bu özel durumda aldığı şekli belirtmekte yarar vardır. (3.61) özel durumu için (3.40) ve (3.46) denklemleriyle tanımlanan δ_1 ve δ_2 katsayıları

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{1+m}{2m} > 0$$

şeklini alır. Eğer $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ gösterilimi kullanılırsa Altbölüm 3.3.2’de GDS sistemi için türetilmiş (3.50)-(3.53) koşulları YGDS sistemi için aşağıdaki şekli alır: YGDS sisteminin EEE hali için

(i) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \min\left\{\delta, \min\left(\frac{1}{m}, 1\right)\right\}$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max\left(\frac{1}{m}, 1\right)$$

koşullarını sağlaması durumunda lokal olarak varolan çözümler global olarak da vardır ve

(ii) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \min\{\delta, \min(\frac{1}{m}, 1)\}$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \max(\frac{1}{m}, 1)$$

koşullarını sağlaması durumunda çözüm sonlu zamanda patlayacaktır. Ancak, $\delta = (1 + m)/(2m)$ tanımı nedeniyle

$$\min\{\delta, \min(\frac{1}{m}, 1)\} = \min(\frac{1}{m}, 1)$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda yukarıdaki koşullar aşağıdaki şekli alır: YGDS sisteminin EEE hali için

(i) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \min(\frac{1}{m}, 1) \quad (3.67)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max(\frac{1}{m}, 1) \quad (3.68)$$

koşullarını sağlaması durumunda lokal olarak varolan çözümler global olarak da vardır ve

(ii) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \min(\frac{1}{m}, 1) \quad (3.69)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \max(\frac{1}{m}, 1) \quad (3.70)$$

koşullarını sağlaması durumunda çözüm sonlu zamanda patlayacaktır.

Yukarıdaki koşulların, GDS sistemi için Altbölüm 3.3.2’de türetilmiş koşullardan farklı olarak, κ parametresinin bütün değerlerini kapsadığına dikkat edilmelidir. Diğer bir deyişle, aynen DS sisteminde olduğu gibi, YGDS sistemi için de çözümlerin varlığı ve/veya varolmaması anlamında, κ parametresinin bir belirsizlik aralığı mevcut değildir. Ancak bu açıdan (3.67)-(3.70) koşullarının [6]’da sunulan koşullardan indirgeme yoluyla elde edilen (3.63)-(3.66) koşulları ile çeliştiğine dikkat edilmelidir.

Şimdi yukarıda sunulan (3.67)-(3.70) koşullarının doğruluğu farklı bir yol izleyerek ispatlanacaktır. Bu amaçla, ilk olarak YGDS sistemi bir dönüşüm yardımıyla klasik DS sistemine dönüştürülecektir. Daha sonra YGDS sistemi için yukarıda elde edilen koşulların gerçekte DS sistemine karşılık gelen koşullardan başka birşey olmadığı gösterilecektir.

Yukarıda belirtilen dönüşümde işlem kolaylığı sağlama amacıyla DS sistemi, $\tilde{\sigma}, \tilde{\kappa}, \tilde{\gamma}, \tilde{m}$ yeni parametreler olmak üzere v ve ψ fonksiyonları için

$$i v_t + \tilde{\sigma} v_{xx} + v_{yy} = \tilde{\kappa} |v|^2 v + \tilde{\gamma} v \psi_x \quad (3.71)$$

$$\psi_{xx} + \tilde{m} \psi_{yy} = (|v|^2)_x \quad (3.72)$$

şeklinde yeniden yazılacaktır. Eliptik-eliptik durum yani $\tilde{\sigma} > 0$, $\tilde{m} > 0$ durumu gözönüne alınacaktır. Hesaplamalarda kolaylık sağlamak amacıyla $\tilde{\sigma}$ parametresi $\tilde{\sigma} = 1$ şeklinde normalize edilecektir. Ghidaglia ve Saut [17] DS sistemi için

(i) katsayıların

$$\tilde{\gamma} > 0, \quad \tilde{\kappa} \geq 0 \quad (3.73)$$

veya

$$\tilde{\gamma} < 0, \quad \tilde{\kappa} \geq -\tilde{\gamma} \quad (3.74)$$

koşullarını sağlaması halinde çözümlerin global olarak varolduğunu ve

(ii) katsayıların

$$\tilde{\gamma} > 0, \quad \tilde{\kappa} < 0 \quad (3.75)$$

veya

$$\tilde{\gamma} < 0, \quad \tilde{\kappa} < -\tilde{\gamma} \quad (3.76)$$

koşullarını sağlaması halinde çözümün sonlu zamanda patlayacağını göstermişlerdir.

(3.72) denklemi x değişkenine göre türetilir ve a ve b sabitleri $a^2 > 0$ ve $b \neq 0$ koşullarını sağlamak üzere

$$u = \frac{v}{a}, \quad \Phi = \frac{\psi_x}{b}$$

tanımları yapılırsa, DS sisteminin farklı bir şekilde yazılımına karşılık gelen [2]

$$i u_t + u_{xx} + u_{yy} = \tilde{\kappa} a^2 |u|^2 u + \tilde{\gamma} b u \Phi$$

$$\Phi_{xx} + \tilde{m} \Phi_{yy} = \frac{a^2}{b} (|u|^2)_{xx} \quad (3.77)$$

sistemine ulaşılır.

Şimdi (3.62) YGDS sisteminin bir doğrusal olmayan dönüşüm yardımıyla (3.77) sistemine dönüştüğü gösterilecektir. Bu amaçla

$$\Phi = \varphi_{1,x} + \varphi_{2,y} - \frac{1}{m} |u|^2 \quad (3.78)$$

şeklinde bir Φ fonksiyonu tanımlanır. Eğer $\Phi_{xx} + m\Phi_{yy}$ büyüklüğü bu tanım kullanılarak hesaplanır ve bulunan ifadede (3.62) sisteminin ikinci ve üçüncü denklemleri kullanılırsa

$$\Phi_{xx} + m\Phi_{yy} = (1 - \frac{1}{m})(|u|^2)_{xx} \quad (3.79)$$

denklemini elde edilir. Öte yandan (3.78) tanımının (3.62) sisteminin birinci denkleminde kullanılmasıyla, $\sigma = 1$ için,

$$i u_t + u_{xx} + u_{yy} = (\kappa + \frac{\gamma}{m}) |u|^2 u + \gamma u \Phi \quad (3.80)$$

denklemini elde edilir. Eğer (3.77) denklemleri ile verilen DS sisteminin katsayıları

$$a^2 \tilde{\kappa} = \kappa + \frac{\gamma}{m}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{b}, \quad \tilde{m} = m, \quad \frac{a^2}{b} = 1 - \frac{1}{m}$$

şeklinde seçilirse, (3.77) DS sisteminin (3.79) ve (3.80) denklemlerinin tanımladığı sisteme dönüştüğü gözlenir. Diğer bir deyişle, bir doğrusal olmayan dönüşüm yardımıyla YGDS sistemini DS sistemine dönüştürmenin mümkün olduğu gözlenir. Yukarıdaki katsayı dönüşümlerinde $a^2 > 0$ olduğuna ve $0 < m < 1$ ve $m \geq 1$ durumları için, sırasıyla, $b < 0$ ve $b > 0$ olacağına dikkat edilmelidir. Aşağıdaki hesaplamalarda, a ve b katsayılarının

$$\begin{aligned} m \geq 1 \quad \text{için} \quad a^2 &= 1 - \frac{1}{m}, \quad b = 1 \\ 0 < m < 1 \quad \text{için} \quad a^2 &= -(1 - \frac{1}{m}), \quad b = -1 \end{aligned}$$

şeklinde seçildiği varsayılacaktır.

Çözümlerin global varlığı ve çözümlerin sonlu zamanda patlaması ile ilgili olarak DS sistemi için [17]'de türetilmiş olan (3.73)-(3.76) koşulları κ, γ, m ve b parametrelerine bağlı olarak aşağıdaki şekli alır: DS sisteminin EE hali için,

(i) katsayıların

$$\frac{\gamma}{b} > 0, \quad \kappa \geq -\frac{\gamma}{m} \quad (3.81)$$

veya

$$\frac{\gamma}{b} < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \quad (3.82)$$

koşullarını sağlaması halinde çözüm global olarak vardır ve

(ii) katsayıların

$$\frac{\gamma}{b} > 0, \quad \kappa < -\frac{\gamma}{m} \quad (3.83)$$

veya

$$\frac{\gamma}{b} < 0, \quad \kappa < -\gamma \quad (3.84)$$

koşullarını sağlaması halinde çözüm sonlu zamanda patlamaktadır. Bu koşulların, yukarıda belirtilen dönüşüm nedeniyle, artık aynı zamanda YGDS sisteminin EEE hali için çözümlerin global varlığı veya çözümlerin sonlu zamanda patlaması koşulları olduğuna dikkat edilmelidir. Yukarıdaki koşulların (3.73)-(3.76) koşullarından elde edilmesi sırasında $a^2 > 0$ ve $\frac{a^2}{b} + \frac{1}{m} = 1$ bağıntılarının kullanıldığına dikkat edilmelidir. Yeni koşulların b parametresini içermesi nedeniyle, (3.81)-(3.84) koşullarını $m \geq 1$ (yani $b = 1$) ve $0 < m < 1$ (yani $b = -1$) durumları için ayrı ayrı ele almak gerekir. Eğer bu işlem yapılır ve gösterilim kolaylığı sağlamak için $\min(\frac{1}{m}, 1)$ ve $\max(\frac{1}{m}, 1)$ gösterilimi kullanılırsa, (3.81) ve (3.84) koşulları şu şekli alır: DS sisteminin EE hali ve YGDS sisteminin EEE hali için

(i) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa \geq -\gamma \min(\frac{1}{m}, 1) \quad (3.85)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa \geq -\gamma \max(\frac{1}{m}, 1) \quad (3.86)$$

koşullarını sağlaması halinde çözüm global olarak vardır ve

(ii) katsayıların

$$\gamma > 0, \quad \kappa < -\gamma \min\left(\frac{1}{m}, 1\right) \quad (3.87)$$

veya

$$\gamma < 0, \quad \kappa < -\gamma \max\left(\frac{1}{m}, 1\right) \quad (3.88)$$

koşullarını sağlaması halinde çözüm sonlu zamanda patlamaktadır. DS sistemi ve DS sistemine dönüştürüldüğü gösterilmiş olan YGDS sistemi için türetilmiş olan bu koşullarla ilgili ilginç nokta, bu koşulların, Altbölüm 3.3.2’de, GDS sistemi için bulunmuş koşullardan (3.61) indirgemesi yoluyla YGDS sistemi için elde edilmiş, (3.85)-(3.88) koşullarına özdeş olmasıdır. Diğer bir deyişle, GDS sistemi için bu çalışmada elde edilmiş koşullardan indirgeme yoluyla YGDS sistemi için bulunmuş koşullar ve DS sistemi için literatürde verilmiş koşullar kullanılarak yine YGDS için bulunmuş koşullar tam olarak çakışmaktadır. Öte yandan, GDS sistemi için [6]’da türetilmiş olan (3.34)-(3.37) koşulları için benzer bir çakışma sağlanmamaktadır. Diğer bir deyişle, (3.34)-(3.37) koşulları (3.61) indirgemesi sonucu YGDS sistemi için yukarıda bulunmuş koşullara (3.85)-(3.88) indirgenmemektedir.

4. GDS SİSTEMİ VE RÖLAKSASYON SAYISAL YÖNTEMİ

4.1 Giriş

Doğrusal olmayan dalga denklemleri ile modellenmiş birçok fiziksel sistemde çok hızlı bir şekilde lokalize olan çözümlerin varolduğu iyi bilinmektedir. Bu şekilde aşırı lokalize olmuş çözümler örneğin gaz dinamiğinde şok dalgaları olarak doğrusal olmayan optikte ise sonlu zaman tekillikleri, yani patlama çözümleri, olarak ortaya çıkmaktadır. Bu şekilde aşırı lokalize olmuş çözümleri sayısal olarak etkin bir şekilde hesaplama çabalarının daha düzgün çözümleri hesaplama çabaları yanında ilave zorluklar içereceği açıktır. Bunun nedeni hem çözümün sınırlı düzgünlüğe sahip olduğu bölgelerde çok sayıda uzaysal grid noktasından oluşan bir uzayda ayırıklaştırmaya ihtiyaç duyulması hem de patlama problemlerinde patlama zamanına yaklaştıkça çözümün genliğinin hızlı bir şekilde büyümesinin en azından patlama zamanı civarında çok sayıda zamansal grid noktasından oluşan bir zamanda ayırıklaştırmaya ihtiyaç duymasıdır. Bu zorluklar araştırmacılara patlama problemleri için özel sayısal teknikler geliştirmeye yöneltmiştir.

Patlama olayını sayısal olarak incelemede en çok kullanılan yöntemler (i) dinamik yeniden ölçekleme yöntemi (the method of dynamic rescaling) [2] ve (ii) ardışık grid yeniden dağıtımı (the method of iterative grid redistribution) [39] olarak adlandırılan yöntemlerdir. Dinamik yeniden ölçekleme yöntemi, patlama civarında geçerli olan çözümün asimptotik profilinden yararlanarak hem bağımlı değişkeni hem de bağımsız değişkenleri dinamik bir şekilde yeniden ölçekleme üzerine kurulmuş bir sayısal yöntemdir. Ardışık grid yeniden dağıtımı yönteminde ise, tekilliğin ortaya çıktığı bölgelerde istenilen hassasiyete ulaşılmasını sağlayacak şekilde grid dağılımı bir varyasyonel ilke yardımıyla uyarlamalı (adaptive) olarak yenilenir.

GDS sisteminin sayısal olarak araştırılmak istenilen patlama çözümlerinin

asimptotik profilleri henüz bilinmediğinden, yukarıda belirtilen sayısal yöntemleri bu çalışmada uygulama olanağı yoktur. Bu nedenle şimdiki çalışmada, sayısal yöntemin direkt olarak doğrusal olmayan dalga denkleminde uygulanmasına izin veren sayısal yöntemler tercih edilmiştir. Son zamanlarda patlama çözümlerini sayısal olarak yakalama amacıyla önerilmiş ve bu niteliğe sahip iki yöntem mevcuttur. Bu yöntemler NLS denklemi ve DS sistemine uygulanmış olan rölaksasyon [25, 26] ve split-step [7, 27] sayısal yöntemleridir.

Bu bölümde, ilk olarak rölaksasyon sayısal yöntemi iki boyutlu NLS denklemi için tanıtılmıştır. Daha sonra literatürde patlama zamanı verilmiş bir örnek problem için sayısal şemanın ve bilgisayar programının doğruluğu araştırılmıştır. Bir sonraki adımda ise, rölaksasyon yöntemi DS sistemine uygulanmıştır. Sayısal şemanın doğruluğu DS sisteminin hem eliptik-eliptik ve hem de hiperbolik-eliptik halleri için, literatürdeki örnek problemlere ait patlama zamanları ile ilgili sonuçlarla karşılaştırma yaparak doğrulanmıştır. Son olarak, rölaksasyon yöntemi GDS sistemine genişletilmiştir. Sayısal şema GDS sisteminin EEE, HEE halleri ve GDS sisteminin özel hali olan YGDS sistemi için verilen analitik sonuçlar ile test edilmiştir. Sonuç olarak, rölaksasyon yönteminin NLS denklemi, DS sistemi ve GDS sistemi için patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu bölümde ele alınan tüm dalga denklemleri iki boyutlu uzayda yani xy düzleminin tamamında tanımlı olacaktır. Ancak sayısal yaklaşımlar doğası gereği, sayısal yöntemin uygulanması sırasında xy düzleminin tamamı yerine $[a, b] \times [c, d]$ dikdörtgensel bölgesi üzerinde hesaplamalar yapılacaktır. Seçilen bütün örnek problemlerin böyle bir yaklaşıma izin verecek şekilde olduğuna, yani bilinmeyen fonksiyonların $x \rightarrow \pm\infty$ ve/veya $y \rightarrow \pm\infty$ iken hızlıca sıfıra gittiğine dikkat edilmelidir. $[a, b]$ aralığı N_x sayıda eşit uzunluklu alt aralığa ve $[c, d]$ aralığı N_y sayıda eşit uzunluklu alt aralığa bölünürse, (x_j, y_k) uzaysal grid noktalarının koordinatları

$$\begin{aligned} x_j &= a + j(b - a)/N_x, & j &= 0, 1, \dots, N_x \\ y_k &= c + k(d - c)/N_y, & k &= 0, 1, \dots, N_y \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Benzer şekilde zaman aralığı M sayıda eşit uzunluklu alt aralığa

bölünecek ve zamansal grid noktaları

$$t_m = mT/M, \quad m = 0, 1, \dots, M$$

şeklinde tanımlanacaktır. u fonksiyonunun (x_j, y_k) grid noktası ve t_m zamanına karşı gelen yaklaşımı $u_{j,k}^m$ ile gösterilecektir. Bu ifade $u_{j,k}$ büyüklüğünün m . kuvveti olan $(u_{j,k})^m$ ile karıştırılmamalıdır.

4.2. Rölaksasyon yöntemi ve NLS denkleminin patlama çözümleri

NLS denkleminin sayısal çözümleri son yıllarda birçok araştırmanın konusu olmuştur. NLS denkleminin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan yöntemlerden biri de sonlu farklar yöntemidir. Sonlu farklar yönteminin uygulanması sırasında zamandaki ilerlemeler için Crank-Nicolson [28], Runge-Kutta [29], operatör ayrıştırması (splitting) tipinde [30] gibi birçok farklı ayrıklaştırmalar yaparak NLS denkleminin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Fakat bu yöntemlerin çok azı kütlenin korunumu ve enerjinin korunumu yasalarını sağlamaktadır. Kütlenin korunumu ve enerjinin korunumu yasalarını da sağlayan yöntemlerden biri Delfour, Fortin ve Payre tarafından önerilen kapalı (implicit) Crank-Nicolson şemasıdır [28]. Bir boyutlu NLS denklemi (2.1) için Crank-Nicolson şeması

$$\begin{aligned} i \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right\} \\ = -\frac{\lambda}{2\sigma} \frac{|u_j^{n+1}|^{2\sigma} - |u_j^n|^{2\sigma}}{|u_j^{n+1}|^2 - |u_j^n|^2} (u_j^{n+1} + u_j^n) \end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Burada Δx ve Δt ile, sırasıyla, uzayda ve zamandaki adımlar, u_j^n ile u fonksiyonunun x_j grid noktası ve t_n zamanına karşı gelen yaklaşımı ifade edilmektedir. Bu şemanın zamanda ve uzayda ikinci mertebeden doğruluğa sahip olduğu gösterilmiştir. Şema, uygulanması kolay bir şema olmakla birlikte, her adımda bir doğrusal olmayan denklem sisteminin bir iterasyon şeması ile çözülmesi gerekmektedir. Bu ise hesap zamanının bir hayli artmasına sebep olmaktadır. Bu sebeple Besse doğrusal olmayan adımı rahatlatılması üzerine kurulmuş rölaksasyon yöntemini önermiştir [25]. Ayrıca [25]'de, Besse iki uzay boyutlu NLS denklemi için rölaksasyon şemasının yakınsaklığını da göstermiştir. Aşağıda rölaksasyon yöntemi iki uzay boyutlu NLS denkleminin uygulanarak açıklanacaktır.

İlk olarak, 2 boyutlu NLS denklemi

$$\psi = |u|^{2\sigma} \quad (4.1)$$

$$iu_t + \Delta u = -\lambda \psi u \quad (4.2)$$

şeklinde yeniden yazılacaktır. Rölaksasyon yöntemindeki temel fikir, doğrusal olmayan terimi yeni bir değişken cinsinden yazarak denklemleri farklı zaman adımında çözmektir. Bu amaçla, $|u|^{2\sigma}$ fonksiyonunun yaklaşımı olarak ψ fonksiyonu tanıtılmış ve (4.1) ve (4.2) denklemlerine sırasıyla $t = n\Delta t$ ve $t = (n+1/2)\Delta t$ zaman adımlarında yaklaşılmıştır. Besse'nin önerdiği rölaksasyon şeması yarı-ayrık formda

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} + \psi^{n-\frac{1}{2}}}{2} &= |u^n|^{2\sigma} \\ i \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \Delta \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) &= -\lambda \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \psi^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ile verilir. Ayrıca başlangıç koşulları

$$u^0(x) = u_0(x), \quad \psi^{-1/2}(x) = |u^0(x)|^2$$

şeklinde alınacak ve Dirichlet sınır koşullarının sağlandığı varsayılacaktır. Uzaysal türevlere merkezi farklar ile yaklaşırsa

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} &= |u_{j,k}^n|^{2\sigma} \\ i \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{2(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1} + u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{2(\Delta y)^2} \\ &= -\lambda \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} \psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeması elde edilir. Gereksiz matris çarpımlarından kaçınmak için,

$$w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2}$$

tanımı yapılırsa, (4.3) şeması başlangıç ve sınır koşullarını içerecek şekilde, $j = 1, 2, \dots, N_x - 1$ ve $k = 1, 2, \dots, N_y - 1$ olmak üzere

$$\frac{\psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = |u_{j,k}^n|^{2\sigma} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{2i}{\Delta t} w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{w_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + w_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{j,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + w_{j,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta y)^2} \\ + \lambda w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} \psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2i}{\Delta t} u_{j,k}^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$u_{j,k}^{n+1} = 2w_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,k}^n \quad (4.6)$$

$$u_{0,k}^{n+1} = 0, \quad u_{N_x,k}^{n+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N_y \quad (4.7)$$

$$u_{j,0}^{n+1} = 0, \quad u_{j,N_y}^{n+1} = 0, \quad j = 1, \dots, N_x - 1 \quad (4.8)$$

halini alır. Böylece bütün (x_j, y_k) uzaysal grid noktalarında (4.5) denkleminin yazılmasıyla oluşan

$$(B + \lambda \Psi^{n+\frac{1}{2}}) W^{n+\frac{1}{2}} = U^n \quad (4.9)$$

lineer denklem sistemine ulaşılır. Burada $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ bilinmeyenden oluşan $W^{n+\frac{1}{2}}$ vektörü ve $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ bilinmeyenden oluşan $\Psi^{n+\frac{1}{2}}$ ve U^n vektörleri

$$\begin{aligned} W^{n+\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} w_{1,1}^{n+\frac{1}{2}} & w_{2,1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & w_{N_x-1,1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & w_{1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} & w_{2,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & w_{N_x-1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T \\ \Psi^{n+\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} \psi_{1,1}^{n+\frac{1}{2}} & \psi_{2,1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_{N_x-1,1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_{1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} & \psi_{2,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & \psi_{N_x-1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T \\ U^n &= \begin{bmatrix} u_{1,1}^n & u_{2,1}^n & \cdots & u_{N_x-1,1}^n & \cdots & u_{1,N_y-1}^n & u_{2,N_y-1}^n & \cdots & u_{N_x-1,N_y-1}^n \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

şeklindedir.

(4.9) denkleminde geçen B katsayılar matrisi üç köşegenli (tridiagonal) yapıda değildir. Örnek olarak, $N_x = 5, N_y = 6$ alınması haline karşılık gelen B matrisinin yapısı sunulmuştur. Burada ν, r_x, r_y parametreleri

$$\nu = \frac{2i}{\Delta t} - \frac{2}{(\Delta x)^2} - \frac{2}{(\Delta y)^2}, \quad r_x = \frac{1}{(\Delta x)^2}, \quad r_y = \frac{1}{(\Delta y)^2}$$

olarak tanımlanmıştır.

Sonuç olarak, verilen $(\psi_{j,k}^{n-1/2}, u_{j,k}^n)$ başlangıç koşulu için röleksasyon şeması üç adımda gerçekleştirilecektir. İlk adımda, (4.4) yardımıyla ψ fonksiyonunun bir sonraki zaman adımındaki değeri, $\psi_{j,k}^{n+1/2}$, hesaplanacaktır. İkinci adımda ise, $\psi_{j,k}^{n+1/2}$ yaklaşık çözümü kullanılarak (4.9) lineer denklem sistemi çözülecektir ve $W_{j,k}^{n+1/2}$ hesaplanacaktır. Son adımda ise, (4.6) denklemini yardımıyla u fonksiyonunun bir sonraki zaman adımındaki değeri, $u_{j,k}^{n+1}$, hesaplanacaktır.

$$B = \begin{pmatrix} \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_x & \nu & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_y & 0 & 0 & 0 & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & 0 & \nu & r_x & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x & 0 & 0 & 0 & r_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu & r_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_y & 0 & 0 & r_x & \nu \end{pmatrix}$$

İki uzay boyutlu NLS denklemi için Besse tarafından önerilen rölaksasyon yöntemi, örnek problem için aşağıda test edilecektir. Katsayılar $\lambda = 1, \sigma = 1$ şeklinde alınmıştır.

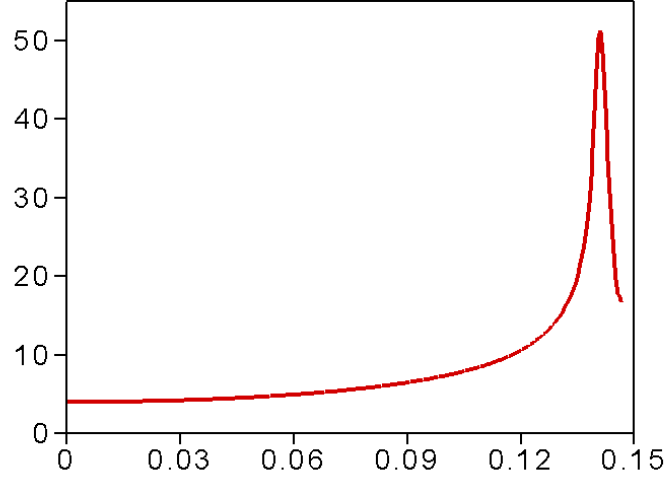
Örnek 4.1:

İlk olarak, Gaussyen başlangıç koşulu,

$$u(x, y, 0) = 4 \exp[-(x^2 + y^2)], \quad (4.10)$$

için tanımlanmış problem ele alınacaktır. NLS denklemi (4.10) başlangıç koşulu için $[-6, 6] \times [-6, 6]$ bölgesinde $T = 0, 15$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma için grid sayıları $N_x = N_y = 200$ ve zamansal ayrıklaştırma için grid

sayısı $M = 300$ olarak alınmıştır. Şekil 4.1'de çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.



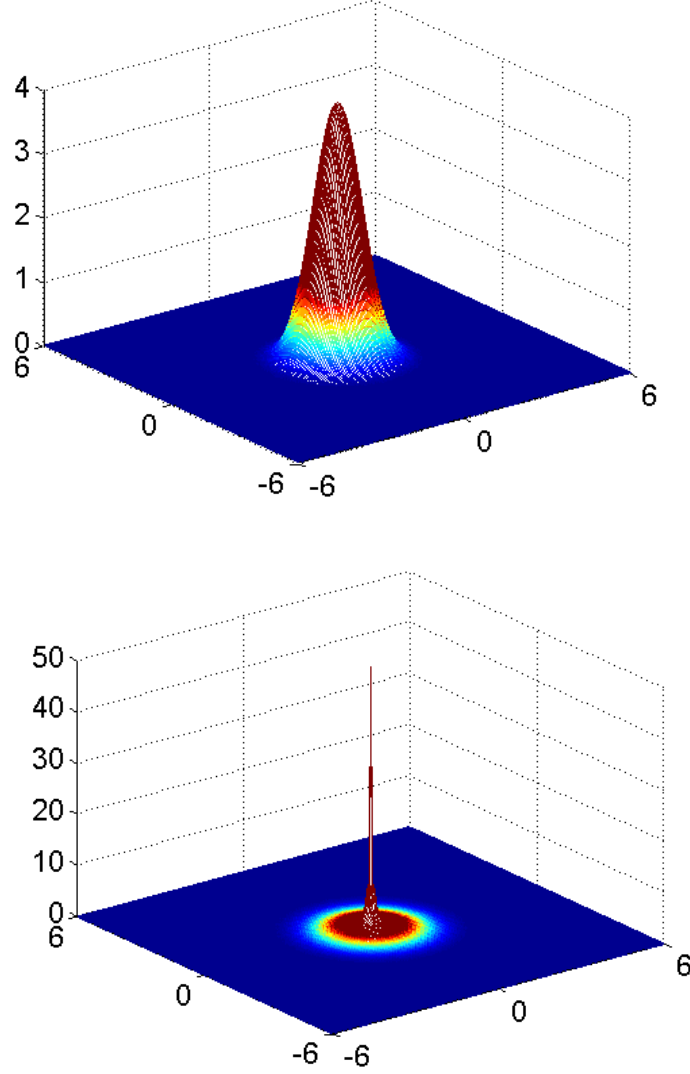
Şekil 4.1. NLS denkleminde çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.

(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şekilden de görüldüğü üzere, çözümün genliği patlama zamanına yaklaştıkça giderek büyümektedir. Başlangıçta çözümün genliği 4 olmasına rağmen, patlama zamanına yaklaştığında çözümün genliğinin 50 civarında olduğuna dikkat edilmelidir. Seçilen uzay ve zaman adımlarına karşılık gelen patlama zamanı $t_* = 0,141$ olarak elde edilmiştir. Bulunan bu patlama zamanı, aynı uzay ve zaman adım sayıları için, Besse tarafından yine rölaksasyon yöntemi kullanarak bulunan netice ile tam olarak çakışmaktadır [8]. Bu durum rölaksasyon yönteminin bilgisayar ortamına taşınmasının doğru bir şekilde gerçekleştirildiğinin bir doğrulaması olarak kabul edilebilir. Radyal simetrik NLS denklemi Akrivis ve arkadaşları tarafından, hem iki hemde üç uzay boyutu için, uzayda Galerkin sonlu eleman yöntemi zamanda ise kapalı Crank-Nicolson şeması kullanarak çözülmüştür [31]. Bu çalışmada uzay ve zaman adım sayılarının çok daha büyük değerleri için (4.10) başlangıç koşuluna karşılık gelen patlama zamanı, maksimum genlik 10^{15} mertebesinde olmak üzere, $t_* = 0,145445128$ olarak hesaplanmıştır. Shen tarafından gerçekleştirilen bir başka çalışmada ise, iki boyutlu radyal Schrödinger denklemi hareketli eş yerleştirme (moving collocation) yöntemi kullanılarak çözülmüş ve patlama zamanı, maksimum genlik 10^{13} mertebesinde olmak üzere, $t_* = 0,14544222$ olarak elde edilmiştir [32]. Patlama zamanının seçilen uzay ve zaman adımına bağlı olduğu düşünülürse, literatürde verilen sonuçlarla

şimdiki çalışmada ve Besse tarafından elde edilen sonuçların uyumlu olduğuna ve rölaksasyon yönteminin patlama olayını yakalamakta başarılı olduğuna dikkat edilmelidir.

Çözümün patlama zamanına yaklaştıkça değişen profilini görmek için, başlangıç profili ve rölaksasyon yöntemi kullanılarak bulunan sayısal çözümün $t_* = 0,141$ zamanına ait profili Şekil 4.2’de sunulmuştur.



Şekil 4.2. Başlangıç profili ($t = 0$) ve sayısal çözümün $t_* = 0,141$ zamanına karşılık gelen profili. (Düşey eksen: $|u|$, Yatay eksenler: x, y)

4.3. Rölaksasyon yöntemi ve DS sisteminin patlama çözümleri

(2.12)-(2.13) ile verilen DS sistemi

$$i u_t + \sigma u_{xx} + u_{yy} = \kappa |u|^2 u + \gamma u \varphi_x \quad (4.11)$$

$$\varphi_{xx} + m\varphi_{yy} = -\eta(|u|^2)_x \quad (4.12)$$

formunda yeniden yazılabilir [8]. Burada η parametresi bir reel sabittir. (4.11) ve (4.12) denklemleri operatör formda yazılırsa

$$\begin{aligned} i u_t + \mathcal{A}u &= \kappa |u|^2 u + \gamma u \phi_x \\ \Delta \phi &= -\eta(|u|^2)_x \end{aligned}$$

halini alır. $\mathcal{A}$ operatörü $\mathcal{A} = -\partial_x^2 + \partial_y^2$ veya $\mathcal{A} = \Delta$ şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla bu altbölümde, sistemin hiperbolik-eliptik ve eliptik-eliptik durumları gözönüne alınacaktır. Besse'nin önerdiği rölaksasyon şeması, $\psi = |u|^2$ olmak üzere, yarı ayrık formda

$$\begin{aligned} i \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \mathcal{A} \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) &= \left[\kappa \psi^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \phi_x^{n+\frac{1}{2}} \right] \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right), \\ \Delta \left(\frac{\phi^{n+\frac{1}{2}} + \phi^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) &= -\eta(|u^n|^2)_x, \\ \left(\frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} + \psi^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) &= |u^n|^2 \end{aligned}$$

ile verilir [8]. Ayrıca, başlangıç koşulları

$$u^0(x) = u_0(x), \quad \psi^{-1/2}(x) = |u^0(x)|^2, \quad \phi^{-1/2}(x) = \phi^{1/2}(x)$$

şeklinde alınacak ve Dirichlet sınır koşulları uygulanacaktır. Buradaki uzaysal türevlere merkezi farklar ile yaklaşırsa

$$\begin{aligned} i \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \sigma \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{2(\Delta x)^2} \\ + \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1} + u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{2(\Delta y)^2} \\ = \left[\kappa \psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \frac{\phi_{j+1,k}^{n+1/2} - \phi_{j-1,k}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right] \left(\frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} \right), \\ \frac{\phi_{j+1,k}^{n+1/2} - 2\phi_{j,k}^{n+1/2} + \phi_{j-1,k}^{n+1/2} + \phi_{j+1,k}^{n-1/2} - 2\phi_{j,k}^{n-1/2} + \phi_{j-1,k}^{n-1/2}}{2(\Delta x)^2} \\ + \frac{\phi_{j,k+1}^{n+1/2} - 2\phi_{j,k}^{n+1/2} + \phi_{j,k-1}^{n+1/2} + \phi_{j,k+1}^{n-1/2} - 2\phi_{j,k}^{n-1/2} + \phi_{j,k-1}^{n-1/2}}{2(\Delta y)^2} \\ = -\eta \frac{|u_{j+1,k}^n|^2 - |u_{j-1,k}^n|^2}{2\Delta x}, \\ \frac{\psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = |u_{j,k}^n|^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeması elde edilir. Gereksiz matris çarpımlarından kaçınmak için

$$\xi_{j,k}^{n+1/2} = \frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2}, \quad \eta_{j,k}^n = \frac{\phi_{j,k}^{n+1/2} + \phi_{j,k}^{n-1/2}}{2}$$

tanımları yapılır ve (4.13) şeması başlangıç ve sınır koşullarını da içerecek şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{2i}{\Delta t} \xi_{j,k}^{n+1/2} + \sigma \frac{\xi_{j+1,k}^{n+1/2} - 2\xi_{j,k}^{n+1/2} + \xi_{j-1,k}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{\xi_{j,k+1}^{n+1/2} - 2\xi_{j,k}^{n+1/2} + \xi_{j,k-1}^{n+1/2}}{(\Delta y)^2} \\ - \left[\kappa \psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \frac{\phi_{j+1,k}^{n+1/2} - \phi_{j-1,k}^{n+1/2}}{2\Delta x} \right] \xi_{j,k}^{n+1/2} = \frac{2i}{\Delta t} u_{j,k}^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{\eta_{j+1,k}^n - 2\eta_{j,k}^n + \eta_{j-1,k}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\eta_{j,k+1}^n - 2\eta_{j,k}^n + \eta_{j,k-1}^n}{(\Delta y)^2} = -\eta \frac{|u_{j+1,k}^n|^2 - |u_{j-1,k}^n|^2}{2\Delta x} \quad (4.15)$$

$$\frac{\psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = |u_{j,k}^n|^2 \quad (4.16)$$

$$u_{j,k}^{n+1} = 2\xi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,k}^n \quad (4.17)$$

$$\phi_{j,k}^{n+1/2} = 2\eta_{j,k}^n - \phi_{j,k}^{n-1/2} \quad (4.18)$$

$$u_{0,k}^{n+1} = 0, \quad u_{N_x,k}^{n+1} = 0, \quad \phi_{0,k}^{n+1/2} = 0, \quad \phi_{N_x,k}^{n+1/2} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N_y \quad (4.19)$$

$$u_{j,0}^{n+1} = 0, \quad u_{j,N_y}^{n+1} = 0, \quad \phi_{j,0}^{n+1/2} = 0, \quad \phi_{j,N_y}^{n+1/2} = 0 \quad j = 1, \dots, N_x - 1 \quad (4.20)$$

$$u^0(x) = u_0(x), \quad \psi^{-1/2}(x) = |u^0(x)|^2, \quad \phi^{-1/2}(x) = \phi^{1/2}(x) \quad (4.21)$$

halini alır. Böylece bütün (x_j, y_k) uzaysal grid noktalarında (4.14) denkleminin yazılmasıyla oluşan

$$AW_1^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2i}{\Delta t} U^n \quad (4.22)$$

lineer denklem sisteminin ve (4.15) denkleminin yazılmasıyla oluşan

$$BW_2^n = C \quad (4.23)$$

lineer denklem sisteminin çözülmesi gerekecektir. Burada $(N_x - 1) \times (N_y - 1)$ bilinmeyenlerden oluşan $W_1^{n+\frac{1}{2}}$ ve W_2^n vektörleri

$$\begin{aligned} W_1^{n+\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} \xi_{1,1}^{n+\frac{1}{2}} & \xi_{2,1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & \xi_{N_x-1,1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & \xi_{1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} & \xi_{2,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} & \cdots & \xi_{N_x-1,N_y-1}^{n+\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^T \\ W_2^n &= \begin{bmatrix} \eta_{1,1}^n & \eta_{2,1}^n & \cdots & \eta_{N_x-1,1}^n & \cdots & \eta_{1,N_y-1}^n & \eta_{2,N_y-1}^n & \cdots & \eta_{N_x-1,N_y-1}^n \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklinde. (4.22) ve (4.23) denklemlerinde geçen A ve B matrislerinin, üç köşegenli yapıda olmadığını belirtmek gerekir. Son olarak, rölaksasyon yönteminin DS sistemi için yakınsaması [8, 33]'da tartışılmıştır.

4.3.1 Hiperbolik-Eliptik hal

Bu kısımda hiperbolik-eliptik hal gözönüne alınacağından DS sisteminde parametre değerleri $\sigma = -1$ ve $m = 1$ seçilir. Bölüm 3’de, Ozawa [4] tarafından bir sözde-konformal dönüşüm yardımıyla DS sisteminin bir analitik patlama çözümü elde edildiğinden bahsedilmişti. Şimdi bu patlama çözümü yardımıyla yukarıda önerilen sayısal şema test edilecektir.

Ozawa [4], DS sisteminin hiperbolik-eliptik hali için

$$u_\alpha(x, y, t) = \frac{1}{a + bt} \exp\left[\frac{ib}{4(a + bt)}(y^2 - x^2)\right] \left[1 + \frac{\alpha}{(a + bt)^2}(x^2 + y^2)\right]^{-1} \quad (4.25)$$

şeklinde bir analitik patlama çözümü elde etmiştir. Burada α pozitif keyfi bir parametredir. a ve b parametreleri ise sözde-konformal dönüşüme uygun olarak seçilmesi gereken parametrelerdir. (4.25) çözümünde $a = 1, b = -4$ ve $\alpha = 1$ olduğu varsayılır. Bu durumda

$$\|u\|_\infty = \frac{1}{1 - 4t}$$

olması nedeniyle, analitik patlama zamanı $t_* = 0,25$ olacaktır. Alınan parametre değerlerine karşılık gelen başlangıç koşulu ise

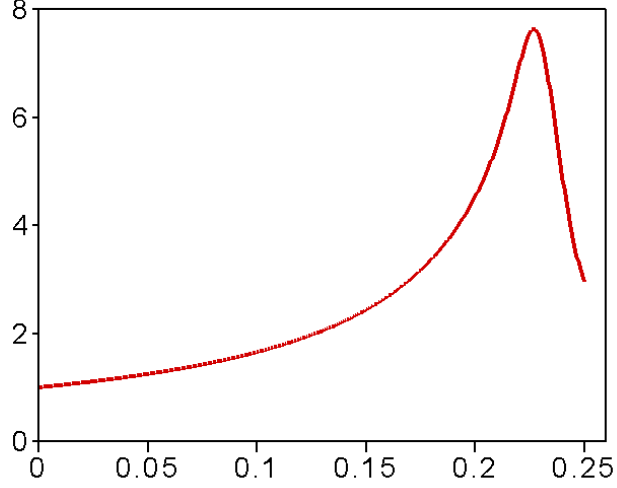
$$u(x, y, 0) = \frac{\exp[i(x^2 - y^2)]}{1 + x^2 + y^2} \quad (4.26)$$

ile verilir.

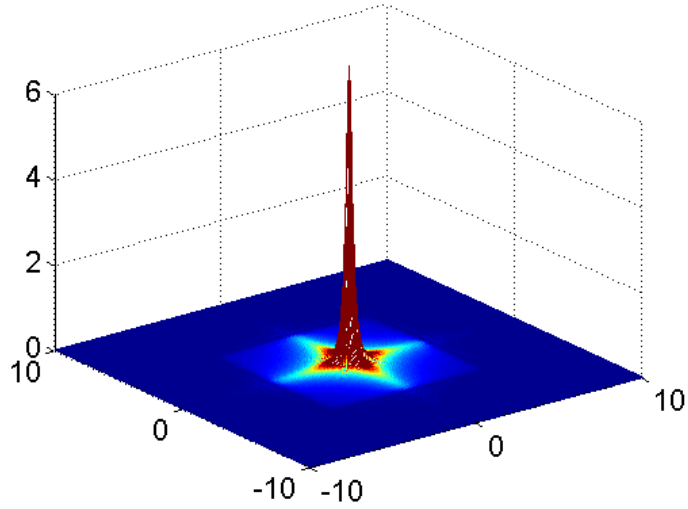
DS sistemi (4.26) başlangıç koşulu için $[-10, 10] \times [-10, 10]$ bölgesinde $T = 0,25$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma grid sayıları $N_x = N_y = 256$ ve zamansal ayrıklaştırma grid sayısı ise $M = 500$ olarak alınmıştır. Şekil 4.3’de çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.

Şekilden de görüldüğü üzere, çözümün genliği patlama zamanına yaklaştıkça giderek büyümektedir. Başlangıçta çözümün maksimum genliği 1 olmasına rağmen, patlama zamanına yaklaştığında çözümün genliğinin 8 civarında olduğuna dikkat edilmelidir. Seçilen uzay ve zaman adımlarına karşılık gelen patlama zamanı $t_* = 0,2226$ olarak elde edilmiştir. Aynı uzay ve zaman adımı için, Besse rölaksasyon yöntemini kullanarak patlama zamanını $t_* = 0,222$ olarak elde etmiştir [8]. Analitik patlama zamanının $t_* = 0,25$ olduğu düşünülürse, şimdiki çalışmada

elde edilen sonucun analitik patlama zamanına daha yakın olduğu söylenebilir. Bu durum yine, hem rölaksasyon şemasının mevcut bir patlama olayını yakalamakta başarılı olduğunu ve hem de yukarıda belirtilen rölaksasyon şemasının başarılı bir şekilde bilgisayar ortamına taşındığını gösterir.



Şekil 4.3. DS sisteminin HE hali için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.
(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)



Şekil 4.4. DS sisteminin HE hali için sayısal çözümün $t = 0,22$ zamanındaki profili.
(Düşey eksen: $|u|$, Yatay eksenler: x, y)

Patlama zamanına yaklaştıkça çözümün değişen profilini görmek için, Şekil 4.4' de sayısal çözümün $t = 0,22$ zamanındaki profili sunulmuştur.

4.3.2 Eliptik-Eliptik hal

Bu kısımda eliptik-eliptik hal gözönüne alınacağından (4.11)-(4.12) DS sisteminde parametre değerleri $\sigma = 1$ ve $m = 1$ seçilir. Ghidaglia ve Saut yaptıkları

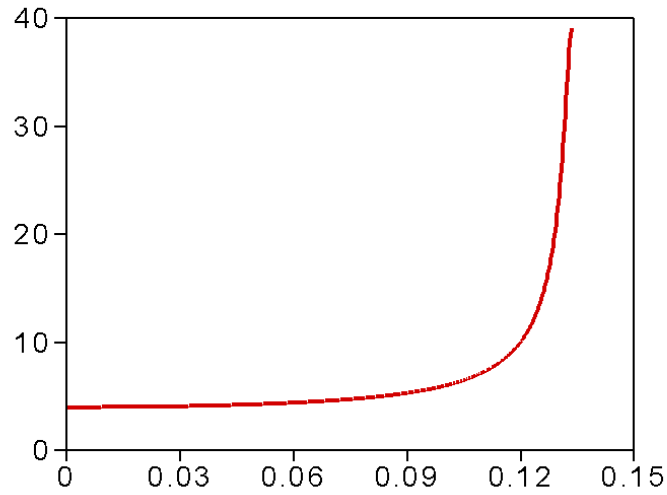
çalışmada, DS sisteminin eliptik-eliptik hali için, (i) $\kappa = -1$ veya (ii) $\kappa = 1$ ve $\eta > 1$ durumunda sistemin negatif enerjiye sahip olacağını ve böylece sonlu zaman içinde çözümde bir tekilliğin ortaya çıkacağını göstermişlerdir [17]. Elde edilen bu sonuç, aşağıdaki örnek problem yardımıyla, önerilen sayısal yöntemi test etmek için kullanılacaktır.

Örnek 4.2:

Yukarıda belirtilen patlama sonucuna göre DS sisteminde katsayıların $\kappa = -1$, $\gamma = 1$ ve $\eta = 1$ alınması halinde, DS sisteminin çözümü sonlu zaman içinde tekilliğe sahip olacaktır. Şimdiki örnekte de katsayılar bu şekilde seçilir ve başlangıç koşulu

$$u(x, y, 0) = 4 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4}\right) \quad (4.27)$$

Gaussyen fonksiyonu olarak alınır. DS sistemi (4.27) başlangıç koşulu için $[-4, 4] \times [-4, 4]$ bölgesinde $T = 0, 14$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma için grid sayıları $N_x = N_y = 100$ ve zamansal ayrıklaştırma için grid sayısı $M = 700$ olarak alınmıştır. Şekil 4.5’de çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.



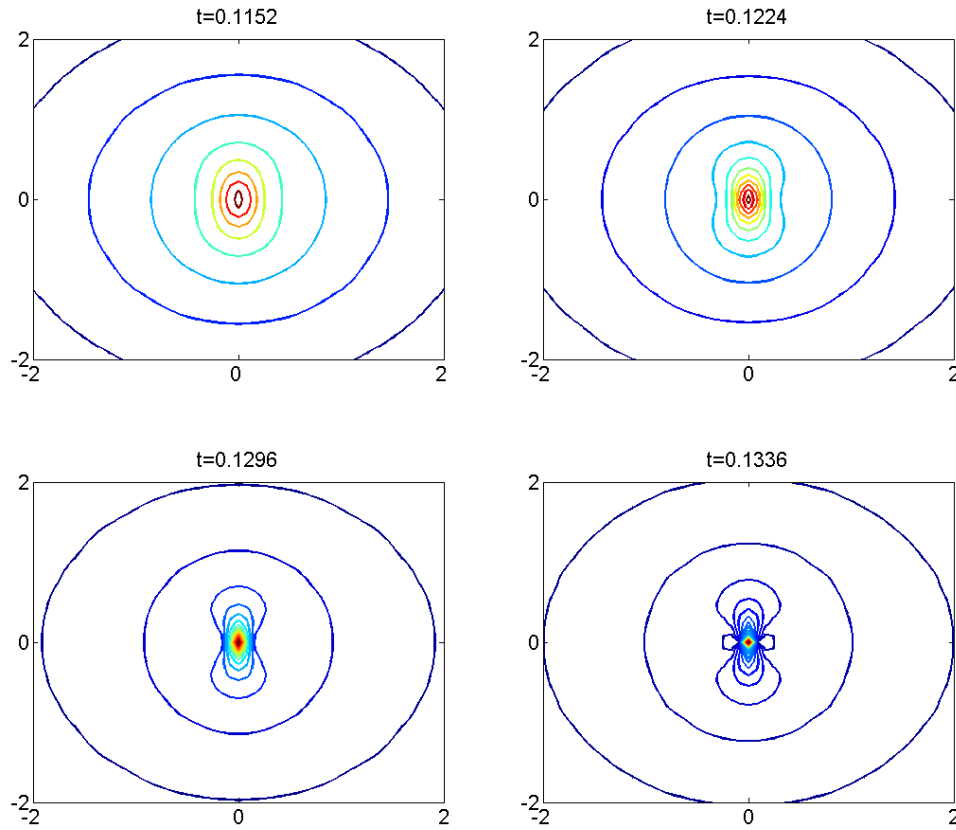
Şekil 4.5. DS sisteminin EE hali için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.

(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şekilden de görüldüğü üzere, çözümün genliği patlama zamanına yaklaştıkça giderek büyümektedir. Başlangıçta çözümün genliği 4 olmasına rağmen, patlama zamanına yaklaştığında çözümün genliğinin 40 civarında olduğuna dikkat edilmelidir.

Seçilen uzay ve zaman adımlarına karşılık gelen patlama zamanı $t_* = 0,1336$ olarak elde edilmiştir. Aynı uzay ve zaman adımı için, Besse röleksasyon yöntemini kullanarak, yine maksimum genlik 40 civarında olmak üzere, patlama zamanını $t_* = 0,1332$ olarak elde etmiştir [8]. Bir diğer çalışmada ise, Besse aynı problemi farklı uzay ve zaman adımları için ikinci mertebe split-step yöntemi ile çözmüş ve patlama zamanını, maksimum genlik 110 civarında olmak üzere, $t_* = 0,1311$ olarak bulmuştur [7]. Şimdiki çalışmada elde edilen patlama zamanının virgülden sonraki ilk iki hanesi ile diğer çalışmalarda elde edilen neticelerin virgülden sonraki ilk iki hanesinin aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Burada sayısal patlama zamanının seçilen uzay ve zaman adımına bağlı olduğu gözönünde bulundurulursa, EE durumunda da röleksasyon yönteminin patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu sonucuna varılır.

Patlama zamanına yaklaştıkça çözümün değişen profilini görmek için, Şekil 4.6'da çözümün değişik zamanlardaki çevrit (contour) çizimleri verilmektedir.

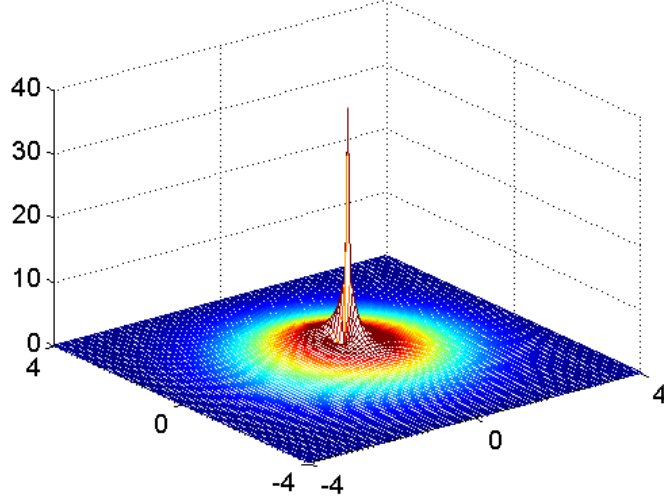


Şekil 4.6. Çözümün sırasıyla $t = 0,1152$, $t = 0,1224$, $t = 0,1296$, $t = 0,1336$ zamanlarındaki çevrit çizimleri.

Şekilden de görüldüğü üzere, çözüm $t = 0,1152$ zamanında radyal simetrik bir yapıya sahip olmasına karşılık, sayısal patlama zamanına yaklaştıkça radyal

simetrik olmayan bir yapıya dönüşmektedir.

Şekil 4.7’de ise şimdiki çalışmada elde edilen sayısal çözümün $t_* = 0,1336$ sayısal patlama zamanındaki profili sunulmuştur.



Şekil 4.7. Çözümün $t_* = 0,1336$ sayısal patlama zamanındaki profili.

(Düşey eksen: $|u|$, Yatay eksen: x, y)

4.4. Rölaksasyon yöntemi ve GDS sisteminin patlama çözümleri

(2.16)-(2.18) ile verilen GDS sistemi

$$i u_t + \mathcal{A}u = \kappa |u|^2 u + \gamma(\varphi_{1,x} + \varphi_{2,y})u$$

$$\mathcal{L}_1\varphi_1 + \mathcal{M}\varphi_2 = (|u|^2)_x$$

$$\mathcal{M}\varphi_1 + \mathcal{L}_2\varphi_2 = (|u|^2)_y$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $\mathcal{A}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ve $\mathcal{M}$ operatörleri

$$\mathcal{A} = \sigma \partial_{xx} + \partial_{yy}, \quad \mathcal{L}_1 = \partial_{xx} + m_2 \partial_{yy}, \quad \mathcal{L}_2 = \lambda \partial_{xx} + m_1 \partial_{yy}, \quad \mathcal{M} = n \partial_{xy}$$

ile verilmektedir. GDS sistemi için önerdiğimiz rölaksasyon şemasının yarı ayrık formu, $\psi = |u|^2$ olmak üzere,

$$\frac{\psi^{n+\frac{1}{2}} + \psi^{n-\frac{1}{2}}}{2} = |u^n|^2 \quad (4.28)$$

$$\mathcal{L}_1\left(\frac{\varphi_1^{n+\frac{1}{2}} + \varphi_1^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) + \mathcal{M}\left(\frac{\varphi_2^{n+\frac{1}{2}} + \varphi_2^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) = (|u^n|^2)_x \quad (4.29)$$

$$\mathcal{M}\left(\frac{\varphi_1^{n+\frac{1}{2}} + \varphi_1^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) + \mathcal{L}_2\left(\frac{\varphi_2^{n+\frac{1}{2}} + \varphi_2^{n-\frac{1}{2}}}{2}\right) = (|u^n|^2)_y \quad (4.30)$$

$$i \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \mathcal{A}\left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2}\right) = \left[\kappa \psi^{n+\frac{1}{2}} + \gamma (\varphi_{1,x}^{n+\frac{1}{2}} + \varphi_{2,y}^{n+\frac{1}{2}}) \right] \left(\frac{u^{n+1} + u^n}{2} \right) \quad (4.31)$$

şeklinde verilir. Ayrıca Dirichlet sınır koşullarının sağlandığı varsayılacaktır. Başlangıç koşulları ise

$$u^0(x) = u_0(x), \quad \psi^{-1/2}(x) = |u^0(x)|^2, \quad \varphi_1^{-1/2}(x) = \varphi_2^{1/2}(x), \quad \varphi_2^{-1/2}(x) = \varphi_2^{1/2}(x)$$

formunda alınacaktır.

Eğer t_n zamanına karşılık gelen $(u^n, \varphi_1^{n-1/2}, \varphi_2^{n-1/2}, \psi^{n-1/2})$ çözümünün bilindiği varsayılırsa, bir sonraki zaman adımına karşılık gelen sayısal çözüm şu şekilde hesaplanır: İlk olarak ψ fonksiyonunun $t_{n+1/2}$ zaman adımındaki yaklaşık değeri, (4.28) denkleminin tam ayrıklaştırılmış formu olan

$$\frac{\psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \psi_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} = |u_{j,k}^n|^2$$

denklemini yardımıyla açık bir şekilde hesaplanacaktır. Öte yandan (4.29) denkleminin tam ayrıklaştırılmış hali

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{1,j+1,k}^{n+1/2} - 2\varphi_{1,j,k}^{n+1/2} + \varphi_{1,j-1,k}^{n+1/2} + \varphi_{1,j+1,k}^{n-1/2} - 2\varphi_{1,j,k}^{n-1/2} + \varphi_{1,j-1,k}^{n-1/2}}{2(\Delta x)^2} \\ & + m_2 \frac{\varphi_{1,j,k+1}^{n+1/2} - 2\varphi_{1,j,k}^{n+1/2} + \varphi_{1,j,k-1}^{n+1/2} + \varphi_{1,j,k+1}^{n-1/2} - 2\varphi_{1,j,k}^{n-1/2} + \varphi_{1,j,k-1}^{n-1/2}}{2(\Delta y)^2} \\ & + n \frac{\varphi_{2,j+1,k+1}^{n+1/2} - \varphi_{2,j+1,k-1}^{n+1/2} - \varphi_{2,j-1,k+1}^{n+1/2} + \varphi_{2,j-1,k-1}^{n+1/2}}{8\Delta x \Delta y} \\ & + n \frac{\varphi_{2,j+1,k+1}^{n-1/2} - \varphi_{2,j+1,k-1}^{n-1/2} - \varphi_{2,j-1,k+1}^{n-1/2} + \varphi_{2,j-1,k-1}^{n-1/2}}{8\Delta x \Delta y} \\ & = \frac{|u_{j+1,k}^n|^2 - |u_{j-1,k}^n|^2}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklinde ve (4.30) denkleminin tam ayrıklaştırılmış hali

$$\begin{aligned} & \lambda \frac{\varphi_{2,j+1,k}^{n+1/2} - 2\varphi_{2,j,k}^{n+1/2} + \varphi_{2,j-1,k}^{n+1/2} + \varphi_{2,j+1,k}^{n-1/2} - 2\varphi_{2,j,k}^{n-1/2} + \varphi_{2,j-1,k}^{n-1/2}}{2(\Delta x)^2} \\ & + m_1 \frac{\varphi_{2,j,k+1}^{n+1/2} - 2\varphi_{2,j,k}^{n+1/2} + \varphi_{2,j,k-1}^{n+1/2} + \varphi_{2,j,k+1}^{n-1/2} - 2\varphi_{2,j,k}^{n-1/2} + \varphi_{2,j,k-1}^{n-1/2}}{2(\Delta y)^2} \\ & + n \frac{\varphi_{1,j+1,k+1}^{n+1/2} - \varphi_{1,j+1,k-1}^{n+1/2} - \varphi_{1,j-1,k+1}^{n+1/2} + \varphi_{1,j-1,k-1}^{n+1/2}}{8\Delta x \Delta y} \\ & + n \frac{\varphi_{1,j+1,k+1}^{n-1/2} - \varphi_{1,j+1,k-1}^{n-1/2} - \varphi_{1,j-1,k+1}^{n-1/2} + \varphi_{1,j-1,k-1}^{n-1/2}}{8\Delta x \Delta y} \\ & = \frac{|u_{j,k+1}^n|^2 - |u_{j,k-1}^n|^2}{2\Delta y} \end{aligned} \quad (4.33)$$

ile verilir. Çözümün ikinci adımında, (4.32) ve (4.33) denklemleri yardımıyla oluşturulan bağlantılı lineer denklem sistemi çözülerek, φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının $t_{n+1/2}$ zaman adımındaki yaklaşık değerleri hesaplanacaktır. (4.31) denkleminin tam ayrıklaştırılmış hali ise

$$\begin{aligned} & i \frac{u_{j,k}^{n+1} - u_{j,k}^n}{\Delta t} + \sigma \frac{u_{j+1,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j-1,k}^{n+1} + u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{2(\Delta x)^2} \\ & + \frac{u_{j,k+1}^{n+1} - 2u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k-1}^{n+1} + u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{2(\Delta y)^2} \\ & = \left[\kappa \psi_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma \left(\frac{\varphi_{1,j+1,k}^{n+1/2} - \phi_{1,j-1,k}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{\varphi_{2,j,k+1}^{n+1/2} - \phi_{2,j,k-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \right) \right] \left(\frac{u_{j,k}^{n+1} + u_{j,k}^n}{2} \right) \quad (4.34) \end{aligned}$$

ile verilir. Çözümün üçüncü adımında, daha önceki adımlarda hesaplanan $\varphi_1^{n+1/2}$, $\varphi_2^{n+1/2}$ ve $\psi^{n+1/2}$ yaklaşık değerleri (4.34) denkleminde yazılarak oluşturulan lineer denklem sistemi çözülerek u fonksiyonunun t_{n+1} zaman adımındaki yaklaşık değeri hesaplanacaktır.

4.4.1 Hiperbolik-Eliptik-Eliptik hal

İlk olarak, HEE hal gözönüne alınacağından, (2.18) sisteminde $\sigma = -1$ seçilir. Daha önce Bölüm 3'de belirtildiği üzere, GDS sisteminin HEE hali için bir sözde-konformal dönüşüm yardımıyla analitik patlama çözümü elde edilmişti. Şimdi bu patlama çözümü yardımıyla sayısal şema test edilecektir.

Bölüm 3'de GDS sisteminin katsayılarının (3.29) bağıntılarını sağlaması halinde, (3.31) ile verilen çözüme sahip olduğu gösterilmiştir. (3.31) ile verilen çözümde $a = 1, b = -4, \mu = 1$ ve $A = 1$ olarak alınırsa, çözümün L^∞ normunun

$$\|u\|_\infty = \frac{1}{1 - 4t}$$

olması nedeniyle, analitik patlama zamanı $t_* = 0,25$ olacaktır.

Örnek 4.3:

Şimdiki örnek problemde, katsayılar (3.29) bağıntılarını sağlayacak şekilde $m_1 = 2$, $m_2 = n = \lambda = 2/3$, $\gamma = 32, \kappa = -24$ seçilir. Problem $[-10, 10] \times [-10, 10]$ bölgesinde $t = 0,25$ zamanına kadar çözülmüştür. Tablo 4.1'de, değişik uzay ve zaman adımları için röleksasyon sayısal yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri verilmektedir. Verilen bir $(\Delta x, \Delta y)$ uzaysal adımına karşılık gelen Δt zaman adımını belirlemek

için $\Delta t = \nu[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$ bağıntısı kullanılacaktır. Burada $\nu = 0,3828125$ alınmıştır.

Tablo 4.1

Uzay ve zaman grid sayılarının değişik değerleri için bulunan patlama zamanları ve sayısal çözümün bu patlama zamanlarındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
150	18	0,1806	4,1478
200	33	0,1894	4,9669
250	51	0,2009	5,8684
300	73	0,2055	6,7183
350	100	0,2075	7,3959
400	131	0,2099	8,1943
500	204	0,2169	9,5290

Tablodan da görüldüğü üzere, uzaysal ve zamansal ayrıklaştırma grid sayıları arttıkça, sayısal patlama zamanı da analitik patlama zamanına giderek yaklaşmaktadır. Ayrıca, grid sayıları arttıkça çözümün L^∞ normunun yaklaşık patlama zamanındaki değeri de artmaktadır. Sonuç olarak, röleksasyon yönteminin teorik olarak varlığı gösterilen patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu söylenebilir. Bilgisayar kapasitesindeki kısıtlamalar nedeniyle grid sayılarını daha fazla arttırmak ve patlama zamanına daha iyi bir yaklaşım elde etmek mümkün olmamıştır.

4.4.2 Eliptik-Eliptik-Eliptik hal

Bu kısımda, EEE hal gözönüne alınacağından aşağıdaki bütün sayısal testlerde $\sigma = 1$ alınmıştır. Aşağıda GDS sistemi çeşitli parametre değerleri alınarak,

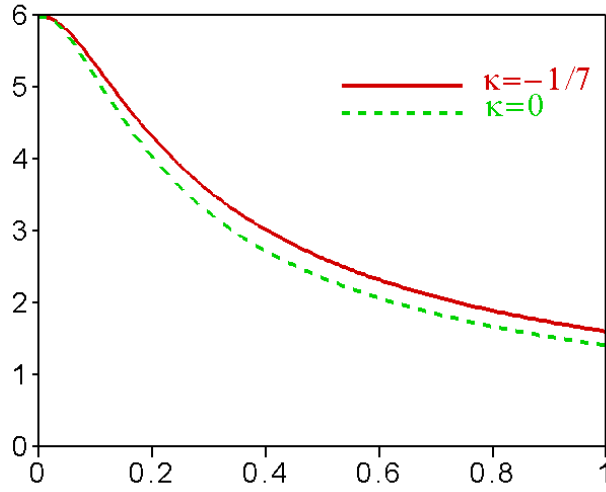
$$u(x, y, 0) = 6 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4}\right) \quad (4.35)$$

Gaussyen başlangıç koşulu için $[-12, 12] \times [-12, 12]$ bölgesinde $T = 1$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma grid sayıları $N_x = N_y = 200$ ve zamansal ayrıklaştırma grid sayısı $M = 150$ olarak alınmıştır. Önerilen sayısal şema Alt bölüm 3.3.2'de verilen analitik sonuçlar yardımıyla test edilecektir. Aşağıda GDS sisteminin EEE hali için iki farklı durum, $\gamma > 0$ ve $\gamma < 0$ durumları, ele alınmıştır.

4.4.2.1. $\gamma > 0$ durumu

GDS sistemindeki katsayılar, (2.19) bağıntısını sağlayacak şekilde, $\lambda = 2, m_1 = 2, m_2 = 3, n = 1$ olarak seçilir. Ayrıca $\gamma > 0$ koşuluna dikkat ederek, $\gamma = 1$ alınır. Seçilen parametre değerleri için, (3.50) ve (3.52) koşullarından, (i) $\kappa \geq -1/7$ iken çözümün global olarak varolduğu ve (ii) $\kappa < -0,444$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı açıktır. Fakat $-0,444 \leq \kappa < -1/7$ olması durumunda çözümün global olarak varolup olmadığı konusu analitik olarak cevaplanamamış problemlerden biridir.

Şekil 4.8'de $\kappa = -1/7$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.



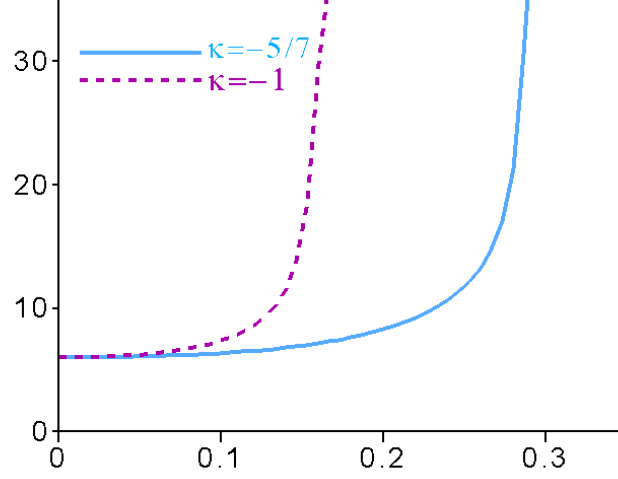
Şekil 4.8. $\kappa = -1/7$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Analitik neticelere göre, $\kappa \geq -1/7$ iken çözümün global olarak varolduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla elde edilen sayısal sonuçlar analitik neticeler ile uyumludur. Şekil 4.9'da ise, $\kappa = -5/7$ ve $\kappa = -1$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.

Şekil 4.9, seçilen κ değerleri için, çözümün L^∞ normunun patlama zamanına yaklaştıkça büyüdüğünü göstermektedir. Yukarıda seçilen katsayı değerleri için, $\kappa < -0,444$ iken GDS sistemi sonlu zaman içinde tekilliğe sahip olacağından, elde edilen sayısal sonuçlar analitik sonuçlarla tamamen uyumludur.

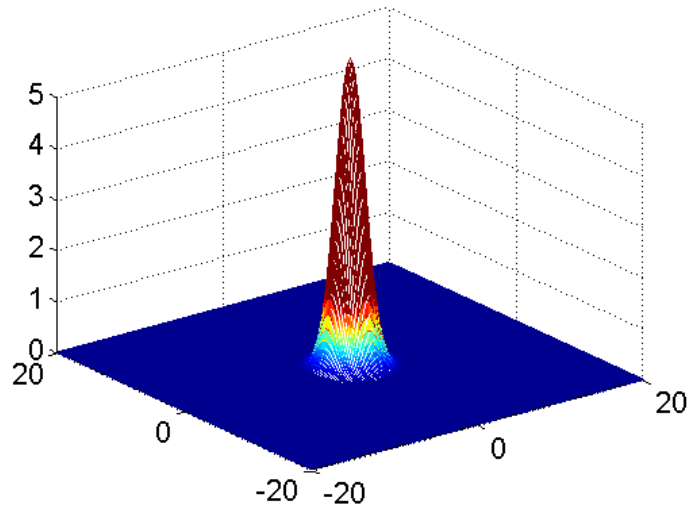
Yukarıda da belirtildiği gibi, $-0,444 \leq \kappa < -1/7$ olması durumunda çözümün global olarak varolup olmadığı konusu analitik olarak bilinmemektedir. Bu

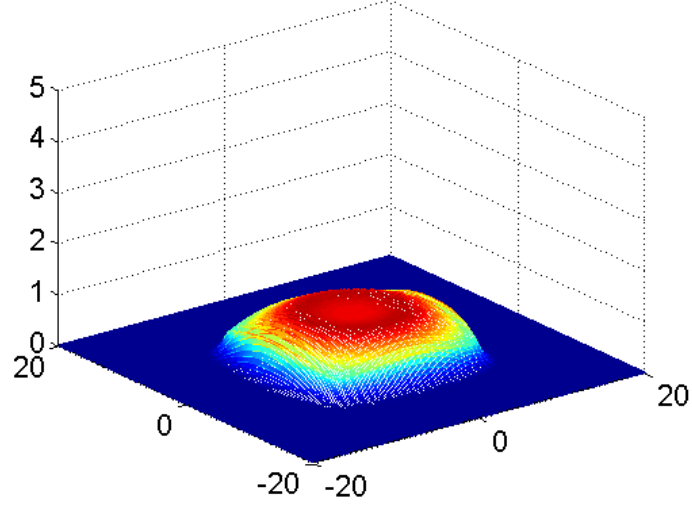
aralıktaki κ değerleri için, her türlü gayrete rağmen Hamiltoniyeni negatif yapacak şekilde uygun bir başlangıç koşulu bulunamadığından, sayısal yöntem yardımıyla da bu aralıkta çözümün global olarak varolup olmadığı sorusuna cevap verilememiştir.



Şekil 4.9. $\kappa = -5/7$ ve $\kappa = -1$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şimdi çözümün zamanla değişen profili çeşitli κ değerleri için sunulacaktır. Şekil 4.10'da $\kappa = 1$ değeri için çözümün $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarındaki profilleri sunulmuştur. κ parametresinin bu değeri için çözümün global varlığının analitik olarak gösterildiğine dikkat edilmelidir.



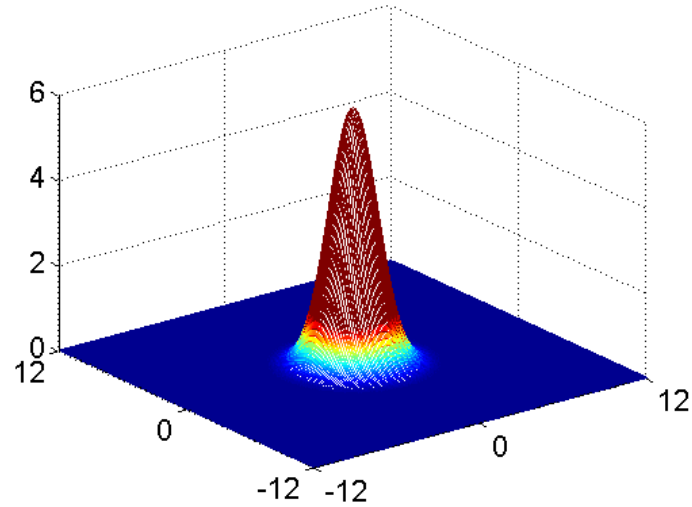


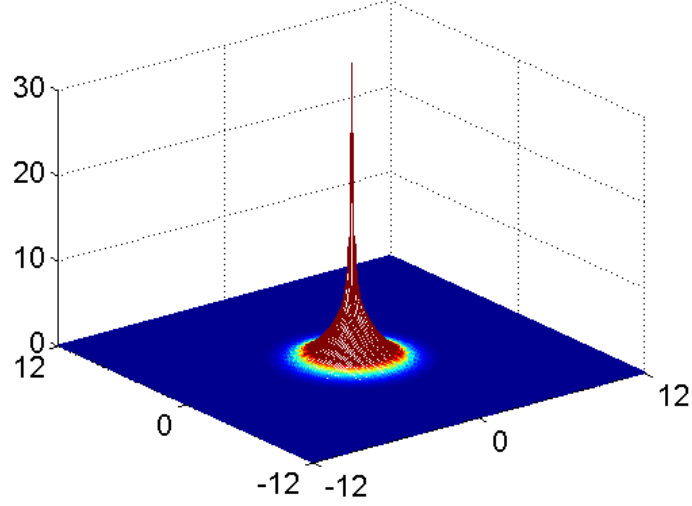
Şekil 4.10. Sayısal çözümün $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarındaki profilleri.

(Düşey eksen: $|u|$, Yatay eksen: x, y)

Sayısal çözümün $t = 0$ zamanındaki genliği 6 olmasına rağmen, $t = 1$ zamanındaki genliği yaklaşık 1 civarındadır. Burada çözümün zaman ilerledikçe gittikçe dağılarak yayıldığı görülmektedir. Sonuç olarak, seçilen κ değeri için dispersiyonun etkisi nonlinerliğin etkisine göre daha baskındır.

Şekil 4.11'de ise $\kappa = -1$ değeri için çözümün $t = 0$ ve $t = 1$ 'deki profilleri sunulmuştur. κ parametresinin bu değeri için çözümün sonlu zamanda patlayacağını analitik olarak ispatlandığına dikkat edilmelidir.





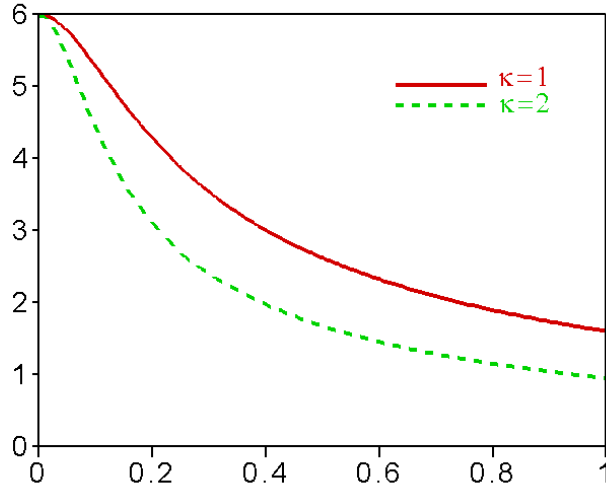
Şekil 4.11 Sayısal çözümün $t = 0$ ve $t = 1$ zamanlarındaki profilleri
(Düşey eksen: $|u|$, Yatay eksen: x, y)

Sayısal çözümün başlangıçta 6 olan genliği, $t = 1$ zamanında yaklaşık 30 civarındadır. Bu durum, seçilen κ değeri için doğrusal olmayan terimin etkisinin dispersiyonunun etkisine göre daha baskın olduğunu gösterir.

4.4.2.2. $\gamma < 0$ durumu

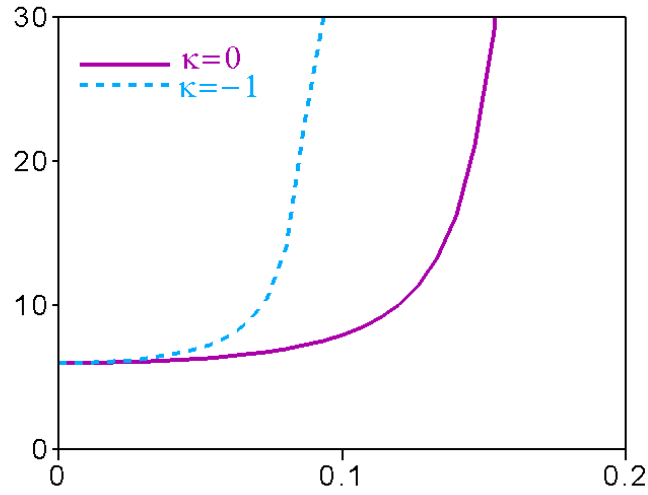
GDS sisteminde (2.19) bağıntısını sağlayacak şekilde $\lambda = 2, m_1 = 2, m_2 = 3, n = 1$ ve $\gamma = -1$ alınır. Seçilen parametre değerleri için, (3.51) ve (3.53) koşullarından $\kappa \geq 1$ iken çözümün global olarak varolduğu ve $\kappa < 1$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı açıktır. Dolayısıyla $\gamma < 0$ durumunda, hakkında analitik olarak bir bilgiye sahip olamadığımız κ aralığı bulunmamaktadır. Şekil 4.12’de, $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.

Şekil 4.13’de ise, $\kappa = 0$ ve $\kappa = -1$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. Analitik neticelere göre, $\kappa \geq 1$ iken çözümün global olarak varolduğu ve $\kappa < 1$ iken çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı gösterilmiştir. Dolayısıyla hem Şekil 4.12’de hem de Şekil 4.13’de elde edilen sayısal sonuçlar analitik neticeler ile tamamen uyumludur.



Şekil 4.12. $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi

(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)



Şekil 4.13 $\kappa = 0$ ve $\kappa = -1$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

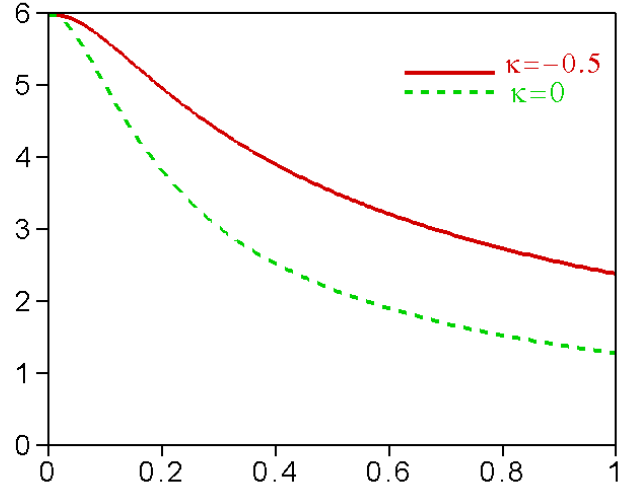
4.5 YGDS sisteminin patlama çözümleri

Bu altbölümde, (3.62) sisteminde $\sigma = 1$ ve $m > 0$ alınacaktır. Aşağıda YGDS sistemi çeşitli parametre değerleri alınarak (4.35) Gaussyen başlangıç koşulu için $[-12, 12] \times [-12, 12]$ bölgesinde $T = 1$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma grid sayıları $N_x = N_y = 200$ ve zamansal ayrıklaştırma grid sayısı $M = 150$ olarak alınmıştır. Şimdi YGDS sistemi γ parametresinin iki farklı hali için gözönüne alınacaktır.

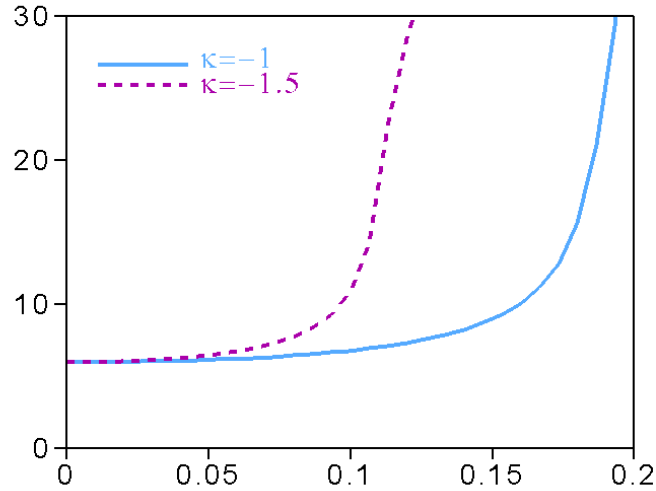
4.5.1. $\gamma > 0$ durumu

YGDS sisteminde $\gamma = 1, m = 2$ katsayıları seçilir. Seçilen parametre değerleri için, (3.85) ve (3.87) koşullarından $\kappa \geq -0,5$ iken çözümün global olarak varolduğu ve $\kappa < -0,5$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı açıktır.

Şekil 4.14'de $\kappa = -0,5$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.



Şekil 4.14. $\kappa = -0,5$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)



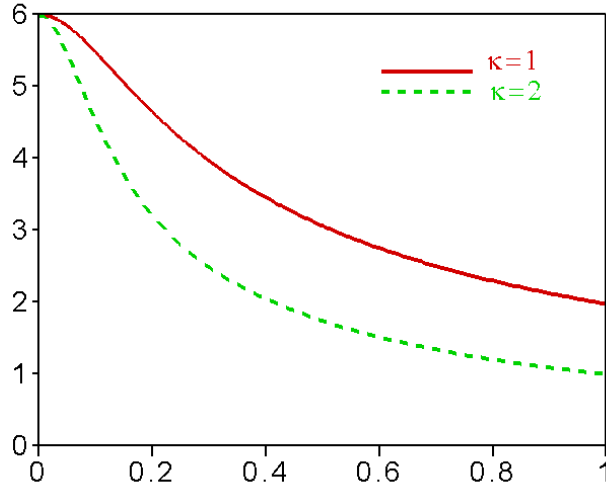
Şekil 4.15. $\kappa = -1$ ve $\kappa = -1,5$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şekil 4.15'de ise $\kappa = -1$ ve $\kappa = -1,5$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.

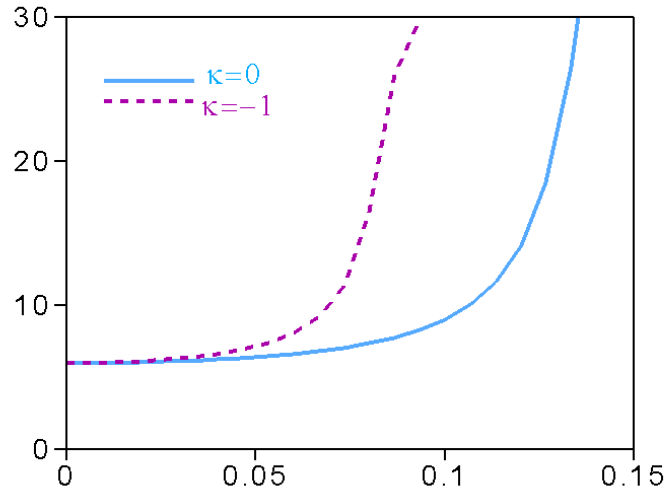
$\kappa = -0,5$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla giderek azalması, $\kappa = -1$ ve $\kappa = -1,5$ değerleri için de sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla giderek büyümesi yukarıda verilen analitik sonuçlarla uyumludur.

4.5.2. $\gamma < 0$ durumu

YGDS sisteminde $\gamma = -1, m = 2$ katsayıları seçilir. Alınan parametre değerleri için, (3.86) ve (3.88) koşullarından $\kappa \geq 1$ iken çözümün global olarak varolduğu ve $\kappa < 1$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı açıktır.



Şekil 4.16. $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi



Şekil 4.17. $\kappa = -1$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şekil 4.16'da $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için, Şekil 4.17'de ise $\kappa = -1$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla giderek azalması,

$\kappa = -1$ ve $\kappa = 0$ değerleri için de sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla giderek büyümesi analitik sonuçlarla uyumludur.

5. GDS SİSTEMİ VE SPLIT-STEP FOURIER YÖNTEMİ

5.1 Giriş

Bu bölümde, ilk olarak split-step yöntemi iki boyutlu NLS denklemi için tanıtılmıştır. NLS denklemi için split-step yönteminin zamanda birinci merteye ve zamanda ikinci merteye yaklaşımlarına karşılık gelen sayısal şemalar verilmiştir. Daha sonra sayısal şemaların doğruluğunu test etmek amacıyla, örnek problemler için bulunan patlama zamanları literatürde verilen sonuçlar ve rölaksasyon yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bir sonraki adımda ise, split-step yöntemi DS sistemine uygulanmış ve yöntemin zamanda birinci ve zamanda ikinci merteye olan yaklaşımları sunulmuştur. Sayısal şemaların doğruluğu, DS sisteminin EE ve HE hallerine ait örnek problemler için literatürde verilmiş patlama zamanları ile ilgili sonuçlarla karşılaştırma yaparak doğrulanmıştır. Son olarak, split-step yöntemi GDS sistemine genişletilmiştir. Sayısal şema GDS sisteminin EEE, HEE halleri ve YGDS sistemi için Bölüm 3'te verilen analitik sonuçlar ve Bölüm 4'de verilen sayısal sonuçlar ile test edilmiştir. Sonuç olarak, split-step yönteminin patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu ve split-step yönteminin rölaksasyon yönteminden daha hızlı ve daha doğru sonuç verdiği gözlenmiştir.

Rölaksasyon yönteminde yapıldığı gibi, sayısal yöntemi uygulayabilmek için $\mathbb{R}^2$ yerine $[a, b] \times [c, d]$ şeklinde dikdörtgensel bir bölge alınır. a ve b sabitleri ile c ve d sabitlerinin elde edilen sayısal sonuçları etkilemeyecek kadar birbirlerinden uzak seçilmesi gerekir. $u(x, y, t)$ fonksiyonunun periyodik sınır koşullarını sağladığı varsayılır. $[a, b]$ aralığı N_x sayıda eşit uzunluklu alt aralığa ve $[c, d]$ aralığı N_y sayıda eşit uzunluklu alt aralığa bölünürse, uzaysal grid noktaları

$$X_j = j(b - a)/N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_x$$

$$Y_k = k(d - c)/N_y, \quad k = 0, 1, \dots, N_y$$

şeklinde olacaktır. Benzer şekilde, sayısal çözümün aranacağı $[0, T]$ zaman aralığı M tane eşit uzunluklu alt aralığa bölünürse, zamansal grid noktaları

$$t_m = mT/M, \quad m = 0, 1, \dots, M$$

şeklinde verilir. Son olarak, u fonksiyonunun (X_j, Y_k) grid noktası ve t_m zamanına karşı gelen yaklaşımı $U_{j,k}^m$ ile gösterilecektir.

5.2. Split-step Fourier yöntemi ve NLS denkleminin patlama çözümleri

Doğrusal olmayan dalga denklemlerinin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan sayısal yöntemlerden biri de split-step yöntemidir. Split-step yöntemindeki esas fikir, orijinal başlangıç-değer problemini altproblemlere ayırtırmak ve bu altproblemleri uygun bir sırada çözerek orijinal problemin çözümüne yaklaşımdır. Doğrusal olmayan dispersif dalga denklemleri için genellikle bu ayrışım sadece dispersif ve sadece doğrusal olmayan etkileri içeren altproblemler şeklinde gerçekleştirilir. Split-step yöntemi ilk olarak Hardin ve Tappert [34] tarafından NLS denkleminde uygulanmıştır. Taha ve Ablowitz yaptıkları çalışmada, sonlu farklar yönteminin açık ve kapalı algoritmalarını içeren değişik versiyonlarını split-step yöntemi ile karşılaştırmışlar ve split-step yönteminin NLS denklemi için en iyi yöntem olduğu sonucuna ulaşmışlardır [35]. Ancak bu noktada, split-step yönteminin NLS denklemi için çok başarılı olmasının altında bu özel duruma ait altproblemlerin analitik olarak çözülebilmesinin yattığı belirtilmelidir. Split-step yöntemi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için [36, 37, 38] ve bu çalışmalarda belirtilen kaynaklara başvurulabilir.

İlk olarak, split-step yöntemi iki boyutlu NLS denklemi için tanıtılacaktır. Eğer $[a, b] \times [c, d]$ bölgesi

$$X = \frac{2\pi(x-a)}{b-a}, \quad Y = \frac{2\pi(y-c)}{d-c} \quad (5.1)$$

dönüşümleri yardımıyla $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ kare bölgesine normalize edilirse, (2.1) NLS denklemi

$$iu_t + \bar{\alpha} u_{XX} + \bar{\beta} u_{YY} + \lambda |u|^{2\sigma} u = 0 \quad (5.2)$$

şeklini alır. Burada $\bar{\alpha} = [2\pi/(b-a)]^2$ ve $\bar{\beta} = [2\pi/(d-c)]^2$ tanımları yapılmıştır. Yukarıda da bahsedildiği üzere, split-step yöntemindeki esas fikir orijinal problemi dispersif ve doğrusal olmayan etkileri içeren altproblemlere ayırtırmak ve daha

sonra altproblemleri verilmiş bir sırada çözerek orijinal problemin çözümüne yaklaşmaktır. Bu amaçla, (5.2) NLS denklemi,

$$\mathcal{L} : \quad iu_t + \bar{\alpha} u_{XX} + \bar{\beta} u_{YY} = 0 \quad (5.3)$$

lineer denklemi ve

$$\mathcal{N} : \quad iu_t + \lambda |u|^{2\sigma} u = 0 \quad (5.4)$$

doğrusal olmayan denkleme ayrıştırılır ve bu denklemler verilmiş bir sırada ardışık olarak çözülür. (5.3) lineer denklemi için tanımlanmış başlangıç-değer problemi iki boyutlu Fourier dönüşümü kullanarak çözülür. Böylece m . zaman adımına ait $U_{j,k}^m$ büyüklüklerinin bilindiği varsayılırsa, $(m+1)$. zaman adımına karşılık gelen büyüklükleri hesaplamak için zamandaki ilerlemeler

$$U_{j,k}^{m+1} = \mathcal{F}_{j,k}^{-1} \{ \exp[-i(\bar{\alpha}\xi_1^2 + \bar{\beta}\xi_2^2)\Delta t] \cdot \mathcal{F}_{\xi_1, \xi_2}[U_{j,k}^m] \}$$

denklemi kullanılarak gerçekleştirilir. Burada $\mathcal{F}$ iki boyutlu ayrık Fourier dönüşümünü, $\mathcal{F}^{-1}$ iki boyutlu ters ayrık Fourier dönüşümünü ve ξ_1, ξ_2 ise x, y koordinatlarına karşılık gelen Fourier değişkenlerini göstermektedir. (5.4) doğrusal olmayan denklem için zamandaki ilerlemeler

$$U_{j,k}^{m+1} = \exp(i\lambda |U_{j,k}^m|^{2\sigma} \Delta t) U_{j,k}^m$$

bağıntısı yardımıyla hesaplanacaktır. Herbir zaman adımında NLS denklemine ait sayısal çözüm, birinci mertebe split-step Fourier yöntemi için

$$\varphi_1(\Delta t) = \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(\Delta t) \circ \mathcal{S}_{\mathcal{N}}(\Delta t) \quad (5.5)$$

ayrıştırma formülüne göre gerçekleştirilecektir. Burada $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(\Delta t)$ ve $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}(\Delta t)$ ile, sırasıyla, lineer altprobleme ve doğrusal olmayan altprobleme karşılık gelen çözüm operatörleri gösterilmektedir. Yani, birinci adımda (5.4) doğrusal olmayan denkleme göre ilerlenir ve ara çözüm elde edilir. İkinci adımda ise, bu ara çözüm başlangıç datası olmak üzere (5.3) lineer denkleme göre ilerlenir. İkinci mertebe split-step Fourier yöntemi için, herbir zaman adımındaki ilerleme

$$\varphi_2(\Delta t) = \mathcal{S}_{\mathcal{N}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \mathcal{S}_{\mathcal{L}}(\Delta t) \mathcal{S}_{\mathcal{N}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \quad (5.6)$$

ayrıştırma formülüne göre gerçekleştirilecektir. Birinci mertebe ve ikinci mertebe split-step yöntemlerinin hem yakınsaması hem de yakınsama hızlarının, sırasıyla,

birinci ve ikinci mertebe olduğunun gösterilmesi literatürde tartışılmış bir konudur [27]. Bu çalışmada ele alınan örnek problemler için (5.5) ve (5.6) ifadelerinde $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ ve $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ operatörlerinin yerlerinin değiştirilmesinin de sayısal sonuçları değiştirmediği gözlenmiştir.

Yukarıda NLS denklemi için önerilen birinci ve ikinci mertebe split-step şemaları, literatürde tartışılmış üç farklı örnek problem için test edilecektir. Aşağıdaki sayısal deneylerde, (2.1) denkleminde $\lambda = 1$ ve $\sigma = 1$ alınmıştır. Seçilen $(\Delta x, \Delta y)$ uzaysal adımına karşı gelen Δt zaman adımını belirlemek için, $\Delta t = \nu[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$ bağıntısı kullanılmıştır. ν parametresinin çeşitli değeri için yapılan deneylerde sayısal yakınsama gözlenmiş, ancak aşağıdaki bütün sayısal deneylerde, hesaplama zamanı açısından daha etkin olan, $\nu = 0, 1$ değeri kullanılmıştır.

Örnek 5.1:

İlk olarak, Gaussyen başlangıç koşulu,

$$u(x, y, 0) = 4 \exp[-(x^2 + y^2)], \quad (5.7)$$

için tanımlanmış problem ele alınacaktır. NLS denklemi yukarıda verilen başlangıç koşulu için $[-6, 6] \times [-6, 6]$ bölgesinde $T = 0, 15$ zamanına kadar çözülmüştür. Tablo 5.1’de, değişik uzay ve zaman adımları kullanılarak, birinci mertebe split-step Fourier yöntemi ile bulunan patlama zamanları ve çözümün bu patlama zamanlarındaki L^∞ normunun değeri verilmektedir.

Tablo 5.1

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci mertebe split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
64	22	0,14318182	19,689
128	86	0,14476744	37,394
256	342	0,14517544	72,552
512	1365	0,14527473	140,175
1024	5462	0,14541377	280,540
2048	21486	0,14543424	555,542

Tablo 5.2’de ise, ikinci mertebe split-step Fourier yöntemi için değişik uzay ve zaman adımları kullanarak bulunan patlama zamanları ve çözümün bu patlama zamanlarındaki L^∞ normunun değeri verilmektedir.

Tablo 5.2

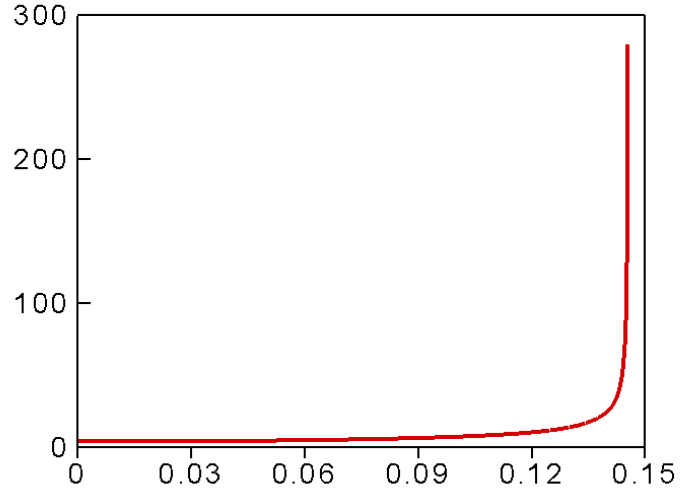
Değişik uzay ve zaman grid sayıları için ikinci mertebe split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
64	22	0,15000000	19,302
128	86	0,14651163	36,535
256	342	0,14517544	71,226
512	1365	0,14538462	142,383
1024	5462	0,14541300	278,050
2048	21486	0,14546216	436,278

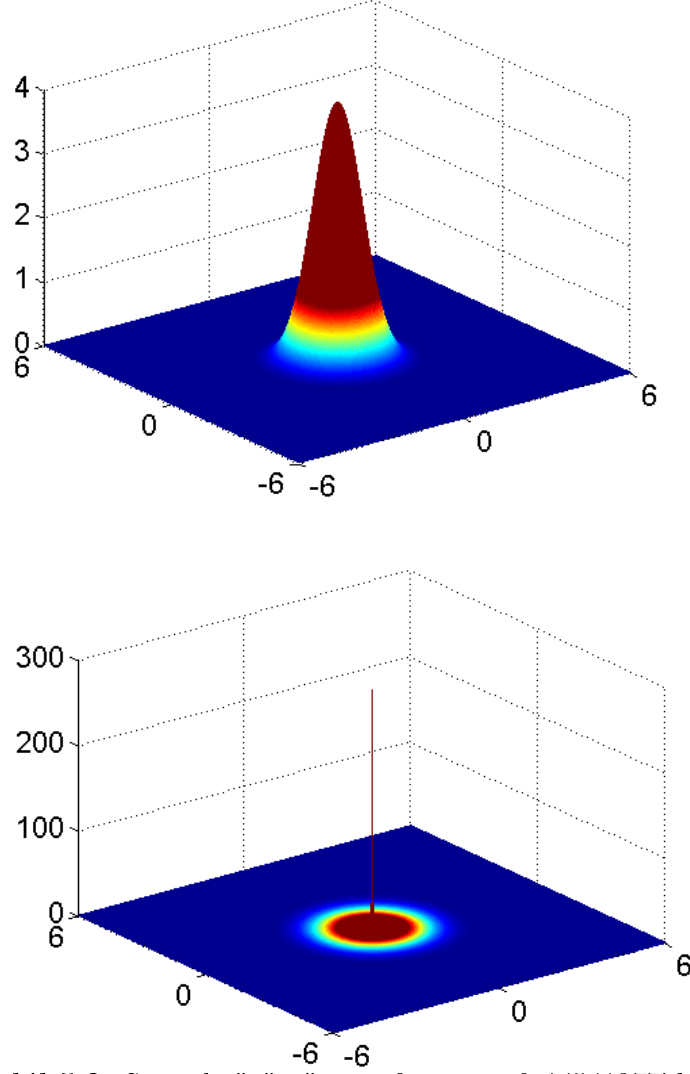
Her iki tablodan da görüldüğü gibi, uzaysal ve zamansal grid noktalarının sayılarının artması ile t_* ile gösterilen yaklaşık patlama zamanları belirli bir değere doğru yakınsamaktadır. Bu tablolardaki sayısal değerlerin bir incelemesi, yaklaşık patlama zamanının en azından virgülden sonraki ilk dört hanesi doğru olacak şekilde kestirilebileceğini ve bu değer $t_* = 0,1454$ olduğunu ortaya koyar. Alt bölüm 4.2'deki Örnek 4.1'de bahsedilen ve [31, 32]'de verilen sonuçlar ile şimdi bulunan sonucun ilk dört hanesinin uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca [31] ve [32]'de farklı sayısal teknikler ve çok daha büyük grid sayıları için bulunan daha doğru sonuçlar, split-step yöntemi ile bulunan patlama zamanının rölaksasyon yöntemi ile bulunana göre daha iyi olduğunu ortaya koyar. Burada ikinci mertebe split-step yöntemi ile daha hızlı bir yakınsamaya ulaşılması beklenirken, patlama zamanını tahmin etme konusunda birinci ve ikinci mertebe yöntemler arasında belirgin bir farklılık gözlenmemiştir. Bu durumun dispersif ve doğrusal olmayan etkilerin dengelenmesini ifade eden NLS denkleminde genliğin çok büyük değerleri için doğrusal olmayan etkilerin dispersif etkilere göre daha belirleyici olmasından kaynaklandığı ve bu nedenle genliğin çok büyük değerleri için ayrıştırma formülünün önemini yitirdiği düşünülmektedir.

Şekil 5.1'de sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. Şekilden de görüldüğü üzere, çözümün genliği patlama zamanına yaklaştıkça giderek büyümektedir. Başlangıçta çözümün genliği 4 iken, patlama zamanına yaklaşıldığında çözümün genliğinin 300 civarında olduğuna dikkat edilmelidir.

Patlama zamanına yaklaştıkça çözümün değişen profilini görmek için, birinci mertebe split-step yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal çözümün başlangıç ve $t = 0,14541377$ zamanına ait profilleri Şekil 5.2'de sunulmuştur.



Şekil 5.1. NLS denkleminde sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.
(Düsey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)



Şekil 5.2. Sayısal çözümün $t = 0$ ve $t_* = 0,14541377$ 'deki profilleri.

Burada uzaysal ayrıklaştırma grid sayısı $N_x = N_y = 1024$ ve zamansal ayrıklaştırma grid sayısı $M = 5462$ alınmıştır. Şekilden de görüldüğü üzere patlama

zamanına yaklaştıkça dalgalının genliği artarak büyümektedir.

Örnek 5.2:

İkinci olarak, farklı bir Gaussyen başlangıç koşulu,

$$u(x, y, 0) = 15 \exp[-(x^2 + y^2)^2],$$

için tanımlanmış problem ele alınacaktır. Bu başlangıç koşulu için NLS denklemi $[-2, 5, 2, 5] \times [-2, 5, 2, 5]$ bölgesinde $T = 0,03$ zamanına kadar çözülmüştür. Örnek 5.1’de, hesaplanan patlama zamanları açısından birinci ve ikinci merteye yöntemler arasında belirgin bir farklılık gözlenmediğinden, bu problemde sadece birinci merteye split-step yöntemi uygulanmıştır. Tablo 5.3’de değişik uzay ve zaman adımları için bulunan patlama zamanları ve çözümün bu patlama zamanlarındaki L^∞ normunun değeri verilmektedir.

Tablo 5.3

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci merteye split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
64	25	0,02760000	71,315
128	99	0,03000000	95,838
256	394	0,02984772	258,352
512	1573	0,02879847	394,333
1024	6291	0,02885551	859,381

Tablo 5.3’de sunulan sayısal değerler uzay ve zaman adımlarının değerleri azaldıkça patlama zamanının belirli bir sayısal değere doğru yakınsadığını ve yaklaşık patlama zamanının, en azından virgülden sonraki ilk üç hanesi doğru olmak üzere, $t_* = 0,028$ alınabileceğini gösterir. Bu problem [39]’da dinamik yeniden ölçekleme sayısal yöntemi kullanılarak çözülmüş ve patlama zamanı, maksimum genlik 10^6 mertebesinde olmak üzere, $t_* = 0,02875793$ olarak hesap edilmiştir. Dolayısıyla şimdiki çalışmada elde edilen patlama zamanının literatürde bulunanlar ile uyumlu olduğu sonucuna ulaşılır.

Örnek 5.3:

Akrivis ve arkadaşları tarafından incelenen bir diğer problemde ise

$$u(x, y, 0) = 6\sqrt{2} \exp[-(x^2 + y^2)],$$

şeklindeki Gaussyen başlangıç koşulu alınmıştır [31]. Bu çalışmada patlama zamanı, maksimum genlik 10^{11} mertebesinde olmak üzere, $t_* = 0,0402898$ olarak hesaplanmıştır. Aşağıda bu problem, birinci mertebe split-step yöntemi kullanarak, $[-6, 6] \times [-6, 6]$ bölgesinde $T = 0,05$ zamanına kadar çözülmüştür. Elde edilen değerler Tablo 5.4'de sunulmuştur.

Tablo 5.4

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci mertebe split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
128	29	0,03965517	42,499
256	114	0,04035088	83,683
512	456	0,04024123	153,790
1024	1821	0,04028007	298,031

Tablo 5.4'de sunulan sayısal sonuçlar grid noktalarının artan sayısı ile yaklaşık patlama zamanlarının belirli bir değere yakınsadığını ve yaklaşık patlama zamanının, virgülden sonraki ilk dört hane doğru olmak üzere, $t_* = 0,0402$ alınabileceğini gösterir. Bu değer [31]'de elde edilen ve yukarıda belirtilen netice ile uyumlu olduğuna dikkat edilmelidir.

Literatürde çeşitli sayısal teknikler kullanılarak çalışılmış NLS denkleminin ait üç örnek problem için split-step yöntemi ile yukarıda elde edilen sayısal sonuçların literatürde sunulanlar ile çakışması dikkat çekicidir. Bu durum split-step yönteminin NLS denkleminin patlama çözümlerini yakalamakta oldukça başarılı olduğunu gösterir.

5.3. Split-step yöntemi ve DS denkleminin patlama çözümleri

(4.11)-(4.12) ile verilen DS sistemi, sayısal çözümün aranacağı bölgenin (5.1) dönüşümleri altında normalize edilmesi ile

$$\begin{aligned}
 i u_t + \bar{\sigma} u_{XX} + \bar{\beta} u_{YY} &= \kappa |u|^2 u + \bar{\gamma} u \phi_X \\
 \bar{\beta} \phi_{XX} + \bar{m} \phi_{YY} &= -\bar{\eta} (|u|^2)_X
 \end{aligned}$$

halini alır. Burada

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \sigma, \quad \bar{\beta} = \left(\frac{2\pi}{d-c}\right)^2, \quad \bar{\gamma} = \frac{2\pi}{b-a} \gamma, \quad \bar{m} = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 m, \quad \bar{\eta} = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right) \eta$$

tanımları yapılmıştır. NLS denklemi için yapılmış olana benzer şekilde, DS sisteminin split-step yöntemi ile çözümü,

$$\mathcal{L} : \quad i u_t + \bar{\sigma} u_{XX} + \bar{\beta} u_{YY} = 0 \quad (5.8)$$

lineer denkleminin ve

$$\mathcal{N} : \quad \bar{\beta} \phi_{XX} + \bar{m} \phi_{YY} + \bar{\eta} (|u|^2)_X = 0 \quad (5.9)$$

$$i u_t - \kappa |u|^2 u - \bar{\gamma} u \phi_X = 0 \quad (5.10)$$

doğrusal olmayan denklem sisteminin verilmiş bir sırada çözülmesi esasına dayanır [7, 40]. Yine NLS denkleminde olduğu gibi, (5.8) lineer denkleminin kesin çözümü iki boyutlu Fourier dönüşümü kullanılarak elde edilecek ve lineer altproblem için zamanda ilerlemeler

$$U_{j,k}^{m+1} = \mathcal{F}_{j,k}^{-1} \{ \exp[-i(\bar{\sigma} \xi_1^2 + \bar{\beta} \xi_2^2) \Delta t] \mathcal{F}_{\xi_1, \xi_2} [U_{j,k}^m] \} \quad (5.11)$$

denklemi kullanılarak gerçekleştirilecektir. Doğrusal olmayan altproblem ise iki adımda çözülecektir. İlk olarak (5.9) denklemi yardımıyla ϕ_X türevi hesaplanacak, daha sonra bulunan ϕ_X türevi (5.10) denkleminde yerine konarak u fonksiyonu hesaplanacaktır. Bu durumda doğrusal olmayan altproblem için zamanda ilerlemeler

$$\begin{aligned} (\phi_X)_{j,k}^{m+1} &= \mathcal{F}_{j,k}^{-1} \left[-\frac{\bar{\eta} \xi_1^2}{\bar{\beta} \xi_1^2 + \bar{m} \xi_2^2} \mathcal{F}_{\xi_1, \xi_2} [|U_{j,k}^m|^2] \right] \\ U_{j,k}^{m+1} &= \exp \{ -i [\kappa |U_{j,k}^m|^2 + \bar{\gamma} (\phi_X)_{j,k}^m] \Delta t \} U_{j,k}^m \end{aligned}$$

denklemleri kullanılarak gerçekleştirilecektir. Birinci merteye split-step yöntemi (SS1) için (5.5) ayrıştırma formülü, ikinci merteye split-step yöntemi (SS2) için de (5.6) ayrıştırma formülü dikkate alınacaktır. Ayrıca ayrıştırma formüllerinde $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ ve $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ operatörlerinin yerdeğiştirmesinin, patlama zamanı için bulunan yaklaşık değerleri etkilemediği ele alınan örneklerde gösterilecektir. Ancak (5.6) ayrıştırma formülünün uygulanması sırasında doğrusal olmayan altproblem iki adımda çözülüyor olmasının, yerdeğiştirme işleminin hesaplama zamanını etkilemesi sonucunu vereceği gözden kaçırılmamalıdır. Sonuç olarak, sırasıyla, doğrusal olmayan, lineer ve doğrusal olmayan adımın uygulandığı şemadaki ($\mathcal{NLN}$) hesaplama zamanı, yine sırasıyla, lineer, doğrusal olmayan ve lineer adımların

uygulandığı şemadaki ($\mathcal{LN}\mathcal{L}$) hesaplama zamanından daha büyüktür. Split-step yönteminin DS sistemi için yakınsaması [7]'de tartışılmıştır.

Aşağıda DS sisteminin EE ve HE halleri için birtakım sayısal deneyler sunulacaktır. Seçilen bir $(\Delta x, \Delta y)$ uzaysal adımına karşı gelen Δt zaman adımını belirlemek için $\Delta t = \nu[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$ bağıntısı kullanılacaktır. Bütün sayısal örneklerde $\nu = 0,1$ alınmıştır.

5.3.1 Hiperbolik-Eliptik hal

Bu altbölümde HE hal gözönüne alınacağından (4.11)-(4.12) ile verilen sistemde $\sigma = -1$ ve $m = 1$ seçilir. Altbölüm 4.3.1'de DS sisteminin Ozawa [4] tarafından elde edilen bir analitik patlama çözümünden bahsedilmişti. Şimdi bu analitik patlama çözümü yardımıyla split-step şemaları test edilecektir.

DS sistemi, röleksasyon yönteminde yapıldığı gibi, (4.26) başlangıç koşulu için $[-40, 40] \times [-40, 40]$ bölgesinde $t = 0, 25$ zamanına kadar çözülmüştür. Tablo 5.5'de birinci mertbe split-step şeması için, Tablo 5.6'da ise ikinci mertbe split-step şeması için elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 5.5

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci mertbe split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	SS1 ($\mathcal{LN}$)		SS1 ($\mathcal{NL}$)	
		t_*	$\ u\ _\infty$	t_*	$\ u\ _\infty$
256	13	0,23076923	5,238	0,23076923	5,245
512	51	0,24509804	9,840	0,24509804	9,843
1024	205	0,24878049	18,834	0,24878049	18,837

Tablo 5.6

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için ikinci mertbe split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	SS2 ($\mathcal{NLN}$)		SS2 ($\mathcal{LN}\mathcal{L}$)	
		t_*	$\ u\ _\infty$	t_*	$\ u\ _\infty$
256	13	0,23076923	5,242	0,23076923	5,242
512	51	0,24509804	9,841	0,24509804	9,841
1024	205	0,24878049	18,836	0,24878049	18,836
2048	819	0,24969475	36,135	0,24969475	36,135

Her iki tablodan da görüldüğü üzere, uzay ve zaman adımlarının değeri azaldıkça, sayısal patlama zamanı da teorik patlama zamanı olan $t_* = 0,25$ değerine

yaklaşmaktadır. Ayrıştırma formüllerinde $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{N}$ operatörlerinin yerdeğiştirmesi ile patlama zamanı için elde edilen sonuçlar şimdiki sonuçlar ile tamamen aynıdır. Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'daki sayısal değerler, patlama zamanı için birinci ve ikinci merteye sayısal şemalar kullanılarak elde edilen sonuçların da tamamen aynı olduğunu gösterir. Bu durum daha çok hesaplama zamanı alan ikinci merteye split-step şeması yerine, birinci merteye split-step şeması ile de aynı sonuçların elde edilebileceğini ve daha iyi sonuçları elde etmede belirleyici olanın yöntemin mertebesinin değil uzaysal ayrıklaştırma olduğunu gösterir.

Altbölüm 4.3.1'de rölaksasyon yöntemi kullanarak yapılan sayısal incelemede patlama zamanı $t_* = 0,2226$ olarak bulunmuştu. Uzay ve zaman adımlarının farklı olması nedeniyle bu örnek problem için rölaksasyon ve split-step yöntemleri arasında tam bir karşılaştırma mümkün olmamakla birlikte, split-step yöntemi ile elde edilen yukarıdaki sonucun teorik patlama zamanına daha yakın olduğu açıktır. Rölaksasyon yöntemi ile daha iyi bir sonuç elde etmek için uzaysal ve zamansal grid nokta sayılarının bir hayli arttırılması gerekmektedir. Bu ise bu çalışmanın yapıldığı bilgisayarın kapasitesindeki kısıtlamalar nedeniyle mümkün olmamaktadır.

5.3.2 Eliptik-Eliptik hal

Bu altbölümde EE hal gözönüne alınacağından (4.11)-(4.12) sisteminde $\sigma = 1$ ve $m = 1$ seçilir. Altbölüm 4.3.2'de bahsedilen analitik sonuçlar, yine aynı altbölümde tanımlanmış iki örnek problem yardımıyla önerilen sayısal yöntemi test etmek için kullanılacaktır.

Örnek 5.4:

Altbölüm 4.3.2'de DS sisteminin katsayılarının $\kappa = -1$, $\gamma = 1$ ve $\eta = 1$ alınması halinde, DS sistemi çözümünün sonlu zaman içinde tekilliğe sahip olacağından bahsedilmişti. Altbölüm 4.3.2'de tanımlı aynı örnek problem (4.27) başlangıç koşulu için $[-12, 12] \times [-12, 12]$ bölgesinde $T = 0,14$ zamanına kadar çözülmüştür. Tablo 5.7'de birinci merteye split-step Fourier yöntemi için önce doğrusal olmayan sonra lineer adımın uygulandığı şemaya ($\mathcal{LN}$) ait sonuçlar ve önce lineer sonra doğrusal olmayan adımın uygulandığı şemaya ($\mathcal{NL}$) ait sonuçlar birlikte sunulmuştur.

Tablo 5.8’de ise, ikinci merteye split-step Fourier yöntemi için doğrusal olmayan, lineer, doğrusal olmayan adımların uygulandığı şemaya ($\mathcal{NLN}$) ait sonuçlar ve lineer, doğrusal olmayan, lineer adımların uygulandığı şemaya ($\mathcal{LNL}$) ait sonuçlar birlikte sunulmuştur.

Tablo 5.7

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci merteye split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

		SS1 ($\mathcal{LN}$)		SS1 ($\mathcal{NL}$)	
$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$	t_*	$\ u\ _\infty$
128	20	0,13300000	19,700	0,14000000	19,662
256	80	0,13125000	34,891	0,13300000	34,928
512	319	0,13078370	63,861	0,13122257	63,904
1024	1274	0,13076923	121,734	0,13087912	121,698
2048	5907	0,13078043	237,547	0,13080413	237,406

Tablo 5.8

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için ikinci merteye split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

		SS2 ($\mathcal{NLN}$)		SS2 ($\mathcal{LNL}$)	
$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$	t_*	$\ u\ _\infty$
128	20	0,14000000	18,048	0,14000000	19,185
256	80	0,13125000	33,576	0,13300000	35,385
512	319	0,13078370	62,514	0,13122257	66,483
1024	1274	0,13087912	119,517	0,13098901	127,961
2048	5907	0,13080413	237,618	0,13082783	248,239

Tablo 5.7 ve Tablo 5.8’de sunulan sayısal sonuçlar, ikinci merteye yöntem için daha fazla hesap maliyeti ortaya çıkmasına rağmen birinci merteye ile hemen hemen aynı sonuçların elde edildiğini göstermektedir. Yine grid noktası sayısının artan değerleri ile sayısal sonuçlar belirli bir değere yakınsamakta olup, yaklaşık patlama zamanını $t_* = 0,1308$ kabul etmek uygun görülmektedir. Burada bulunan patlama zamanının aynı örnek problem için gerek literatürde sunulmuş gerekse Altbölüm 4.3.2’de rölaksasyon yöntemi kullanarak bulunmuş patlama zamanlarının virgülden sonraki iki hanesinin çakıştığına dikkat edilmelidir.

Örnek 5.5:

Şimdiki örnek problemde $\kappa = 1$, $\gamma = 1$ ve $\eta = 5$ alınmıştır. Altbölüm 4.3.2’de bahsedilen patlama sonuca göre, $\eta > 1$ olduğundan, çözümün bir süre sonra patlaması beklenmektedir. (4.27) ile verilen başlangıç koşulu için problem $[-12, 12] \times [-12, 12]$ bölgesinde $T = 0, 12$ zamanına kadar çözülmüştür. Tablo 5.9’da birinci merteye split-step Fourier yöntemi için önce doğrusal olmayan sonra lineer adımın uygulandığı şemaya ($\mathcal{LN}$) ait sonuçlar ve önce lineer sonra doğrusal olmayan adımın uygulandığı şemaya ($\mathcal{NL}$) ait sonuçlar birlikte sunulmuştur.

Tablo 5.9

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci merteye split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

		SS1 ($\mathcal{LN}$)		SS1 ($\mathcal{NL}$)	
$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$	t_*	$\ u\ _\infty$
128	18	0,12000000	16,382	0,12000000	12,195
256	68	0,11294118	32,862	0,11470588	32,858
512	273	0,11076923	56,976	0,11120879	56,960
1024	1092	0,11142857	104,832	0,11153846	104,839

Tablo 5.10

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için ikinci merteye split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

		SS2 ($\mathcal{NLN}$)		SS2 ($\mathcal{LNL}$)	
$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$	t_*	$\ u\ _\infty$
128	20	0,12000000	14,389	0,12000000	12,357
256	80	0,11250000	33,122	0,11550000	37,378
512	319	0,11059561	57,977	0,11059561	61,334
1024	1274	0,11142857	106,963	0,11161695	114,043

Tablo 5.10’da ise, ikinci merteye split-step Fourier yöntemi için doğrusal olmayan, lineer, doğrusal olmayan adımların uygulandığı şemaya ($\mathcal{NLN}$) ait sonuçlar ve lineer, doğrusal olmayan, lineer adımların uygulandığı şemaya ($\mathcal{LNL}$) ait sonuçlar birlikte sunulmuştur.

Yukarıdaki tablolarda sunulan sonuçlar, patlama zamanının yaklaşık olarak $t_* = 0, 111$ alınabileceğini gösterir. Aynı problem için patlama zamanı, ikinci merteye split-step yöntemi kullanarak, maksimum genlik 150 civarında olmak üzere, Besse tarafından $t_* = 0, 1115$ şeklinde hesaplanmıştır [7].

Yukarıda EE hal için ele alınan iki örnek problem, önerilen sayısal yöntemin teorik olarak varlığı gösterilen patlama olayını yakalamakta başarılı olduğunu ve patlama zamanı için bulunan değerlerin hem literatürde sunulanlar hem de bir önceki bölümde rölaksasyon yöntemi kullanarak elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğunu gösterir.

5.4. Split-step Fourier yöntemi ve GDS sisteminin patlama çözümleri

Sayısal çözümün aranacağı bölgenin (5.1) dönüşümleri altında normalize edilmesiyle (2.16)-(2.18) GDS sistemi

$$\begin{aligned} i u_t + \bar{\sigma} u_{XX} + \bar{\alpha} u_{YY} &= \kappa |u|^2 u + (\bar{\gamma}_1 \varphi_{1,X} + \bar{\gamma}_2 \varphi_{2,Y})u \\ \bar{\beta} \varphi_{1,XX} + \bar{m}_2 \varphi_{1,YY} + \bar{n} \varphi_{2,XY} &= \bar{\eta}_1 (|u|^2)_X \\ \bar{\lambda} \varphi_{2,XX} + \bar{m}_1 \varphi_{2,YY} + \bar{n} \varphi_{1,XY} &= \bar{\eta}_2 (|u|^2)_Y \end{aligned}$$

şeklini alır. Burada

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \sigma, \quad \bar{\alpha} = \left(\frac{2\pi}{d-c}\right)^2, \quad \bar{\gamma}_1 = \left(\frac{2\pi}{b-a}\right) \gamma, \quad \bar{\gamma}_2 = \left(\frac{2\pi}{d-c}\right) \gamma \\ \bar{\beta} &= \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2, \quad \bar{m}_2 = \left(\frac{2\pi}{d-c}\right)^2 m_2, \quad \bar{n} = \frac{(2\pi)^2}{(b-a)(d-c)} n \\ \bar{\lambda} &= \left(\frac{2\pi}{b-a}\right)^2 \lambda, \quad \bar{m}_1 = \left(\frac{2\pi}{d-c}\right)^2 m_1, \quad \bar{\eta}_1 = \frac{2\pi}{b-a}, \quad \bar{\eta}_2 = \frac{2\pi}{d-c} \end{aligned}$$

tanımları yapılmıştır. GDS sisteminin split-step yöntemi ile çözümü,

$$\mathcal{L} : \quad i u_t + \bar{\sigma} u_{XX} + \bar{\alpha} u_{YY} = 0 \quad (5.12)$$

lineer denkleminin ve

$$\mathcal{N} : \quad \bar{\beta} \varphi_{1,XX} + \bar{m}_2 \varphi_{1,YY} + \bar{n} \varphi_{2,XY} - \bar{\eta}_1 (|u|^2)_X = 0 \quad (5.13)$$

$$\bar{\lambda} \varphi_{2,XX} + \bar{m}_1 \varphi_{2,YY} + \bar{n} \varphi_{1,XY} - \bar{\eta}_2 (|u|^2)_Y = 0 \quad (5.14)$$

$$i u_t - \kappa |u|^2 u - (\bar{\gamma}_1 \varphi_{1,X} + \bar{\gamma}_2 \varphi_{2,Y})u = 0 \quad (5.15)$$

doğrusal olmayan denklemlerinin uygun bir sırada çözülmesi esasına dayanır. Hem NLS denkleminde hem de DS sisteminde olduğu gibi, (5.12) denkleminin kesin çözümü iki boyutlu Fourier dönüşümü kullanarak elde edilir ve lineer altproblem için zamanda ilerlemeler

$$U_{j,k}^{m+1} = \mathcal{F}_{j,k}^{-1} \{ \exp[-i(\bar{\sigma} \xi_1^2 + \bar{\alpha} \xi_2^2) \Delta t] \cdot \mathcal{F}_{\xi_1, \xi_2} [U_{j,k}^m] \}$$

denkleminde göre gerçekleştirilir. Doğrusal olmayan altproblem ise üç adımda çözülecektir. İlk olarak, (5.13) ve (5.14) denklemleri yardımıyla $\varphi_{1,X}$ ve $\varphi_{2,Y}$ türevleri hesaplanacak, daha sonra $\varphi_{1,X}$ ve $\varphi_{2,Y}$ türevleri (5.15) denkleminde yerine konarak u fonksiyonu hesaplanacaktır. Bu doğrultuda, ilk olarak, $\varphi_{1,X}$ ve $\varphi_{2,Y}$ türevlerini hesaplamak için (5.13) ve (5.14) denklemlerine Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} -(\bar{\beta}\xi_1^2 + \bar{m}_2\xi_2^2) \hat{\varphi}_1 - \bar{n} \xi_1\xi_2 \hat{\varphi}_2 &= i\bar{\eta}_1\xi_1(|\hat{u}|^2) \\ -\bar{n} \xi_1\xi_2 \hat{\varphi}_1 - (\bar{\lambda}\xi_1^2 + \bar{m}_1\xi_2^2) \hat{\varphi}_2 &= i\bar{\eta}_2\xi_2(|\hat{u}|^2) \end{aligned}$$

cebirsel denklemleri elde edilir. Bu cebirsel denklemlerin çözülmesiyle $\varphi_{1,X}$ türevinin fiziksel uzaydaki noktasal gösterilimi

$$(\varphi_{1,X})_{j,k}^{m+1} = \mathcal{F}_{j,k}^{-1} \left\{ \frac{\bar{\eta}_1(\bar{\lambda}\xi_1^2 + \bar{m}_1\xi_2^2)\xi_1^2 - \bar{\eta}_2\bar{n}\xi_1^2\xi_2^2}{(\bar{\beta}\xi_1^2 + \bar{m}_2\xi_2^2)(\bar{\lambda}\xi_1^2 + \bar{m}_1\xi_2^2) - \bar{n}^2\xi_1^2\xi_2^2} \mathcal{F}_{\xi_1,\xi_2}[|U_{j,k}^m|^2] \right\} \quad (5.16)$$

bağıntısı ve $\varphi_{2,Y}$ türevinin fiziksel uzaydaki noktasal gösterilimi

$$(\varphi_{2,Y})_{j,k}^{m+1} = \mathcal{F}_{j,k}^{-1} \left\{ \frac{\bar{\eta}_2(\bar{\beta}\xi_1^2 + \bar{m}_2\xi_2^2)\xi_2^2 - \bar{\eta}_1\bar{n}\xi_1^2\xi_2^2}{(\bar{\beta}\xi_1^2 + \bar{m}_2\xi_2^2)(\bar{\lambda}\xi_1^2 + \bar{m}_1\xi_2^2) - \bar{n}^2\xi_1^2\xi_2^2} \mathcal{F}_{\xi_1,\xi_2}[|U_{j,k}^m|^2] \right\} \quad (5.17)$$

bağıntısı yardımıyla hesaplanır. Son olarak (5.16) ve (5.17) türevleri

$$U_{j,k}^{m+1} = \exp\{-i[\kappa |U_{j,k}^m|^2 + \bar{\gamma}_1 (\varphi_{1,X})_{j,k}^m + \bar{\gamma}_2 (\varphi_{2,Y})_{j,k}^m]\Delta t\} U_{j,k}^m$$

denkleminde yerine konulursa, doğrusal olmayan altproblem çözülmüş olur. DS sistemi ile ilgili örneklerde birinci ve ikinci mertebe split-step şemaları ile tamamen aynı sonuçlar elde edildiğinden, GDS sistemine yalnız birinci mertebe split-step yöntemi uygulanacaktır. Ayrıca, DS sisteminde $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{N}$ operatörlerinin yerdeğiştirmesi ile elde edilen sonuçlar tamamen aynı olduğundan, GDS sistemi için önce doğrusal olmayan sonra lineer adımın uygulandığı şema $(\mathcal{LN})$, yani (5.5) formülü, dikkate alınacaktır.

Bu bölümde GDS sisteminin EEE ve HEE halleri gözönüne alınacaktır. Verilen bir $(\Delta x, \Delta y)$ uzaysal adımına karşı gelen Δt zaman adımını belirlemek için $\Delta t = \nu[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$ bağıntısı kullanılacaktır. Bütün sayısal deneylerde $\nu = 0, 1$ alınmıştır.

5.4.1 Hiperbolik-Eliptik-Eliptik hal

İlk olarak, HEE hal gözönüne alınacağından, GDS sisteminde $\sigma = -1$ seçilir. Daha önce Bölüm 3’de, GDS sisteminin HEE hali için bir sözde-konformal dönüşüm yardımıyla analitik patlama çözümü elde edilmişti. Şimdi bu patlama çözümü yardımıyla sayısal şema test edilecektir.

Bölüm 3’de GDS sisteminin, katsayıların (3.29) bağıntılarını sağlaması halinde, (3.31) ile verilen analitik çözüme sahip olduğu ve bu çözümün sonlu zamanda patlayacağı gösterilmiştir. (3.31) ile verilen çözümde $a = 1$, $b = -4$, $\mu = 1$ ve $A = 1$ alınırsa, çözümün L^∞ normu

$$\|u\|_\infty = \frac{1}{1 - 4t} \quad (5.18)$$

olarak hesaplanır ve bu durumda analitik patlama zamanı $t_* = 0,25$ olur.

Aşağıda ele alınan iki örnek problemde (3.32) başlangıç koşulundaki A parametresi 1 olacak şekilde GDS sistemindeki katsayılar seçilmiştir. Bu durumda GDS sisteminin HEE hali için seçilen başlangıç koşulunun, DS sisteminin hiperbolik-eliptik halinde alınan (4.26) başlangıç koşulu ile çıktığına dikkat edilmelidir.

Örnek 5.6:

İlk örnek problemde, katsayılar (3.29) bağıntılarını sağlayacak şekilde $m_1 = 2$, $m_2 = n = \lambda = \frac{2}{3}$, $\gamma = 32$, $\kappa = -24$ seçilmiştir. Problem $[-40, 40] \times [-40, 40]$ bölgesinde $t = 0,25$ zamanına kadar çözülmüştür.

Tablo 5.11

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci merteye split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
256	13	0,23076923	5,238
512	51	0,24509804	9,840
1024	205	0,24878049	18,834

Tablo 5.11’de birinci merteye split-step yöntemi kullanılarak, değişik uzay ve zaman adımları için bulunan patlama zamanları ve çözümün bu patlama zamanlarındaki L^∞ normunun değeri verilmektedir.

Tablodan görüldüğü üzere, uzay ve zaman adımlarının değeri azaldıkça, sayısal patlama zamanı da teorik patlama zamanı olan $t_* = 0,25$ değerine yaklaşmaktadır. Öte yandan Altbölüm 4.4.1 Örnek 4.3’de aynı örnek problem için rölaksasyon yöntemi ile, bilgisayar kapasitesindeki kısıtlamalar nedeniyle, $t_* = 0,2169$ değerinden daha iyi bir sonuç elde edilemediği unutulmamalıdır. Dolayısıyla, bu problem için split-step yöntemi ile elde edilen sonucun analitik patlama zamanına daha yakın olması nedeniyle, split-step yönteminin bu örnekte rölaksasyon yönteminden daha başarılı olduğu sonucuna varılır.

Örnek 5.7:

İkinci örnek problemde, yine katsayılar (3.29) bağıntılarını sağlayacak şekilde, $m_1 = 0,5$, $m_2 = n = \lambda = \frac{1}{3}$, $\gamma = -16$, $\kappa = 24$ olarak seçilmiştir. Problem $[-40, 40] \times [-40, 40]$ bölgesinde $t = 0,25$ zamanına kadar çözülmüştür. Tablo 5.12’de birinci mertebe split-step yöntemi için elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Tablo 5.12

Değişik uzay ve zaman grid sayıları için birinci mertebe split-step Fourier yöntemi kullanılarak bulunan patlama zamanı ve çözümün bu patlama zamanındaki L^∞ normunun değeri

$N_x = N_y$	M	t_*	$\ u\ _\infty$
256	13	0,23076923	5,238
512	51	0,24509804	9,840
1024	205	0,24878049	18,834

Bu tablodan da görüldüğü üzere, uzay ve zaman adımlarının değeri azaldıkça, sayısal patlama zamanı da teorik patlama zamanı olan $t_* = 0,25$ değerine yaklaşmaktadır.

Tablo 5.11 ve Tablo 5.12’de sunulan sayısal sonuçların tamamen aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu iki tabloya karşılık gelen örnek problemlerde, başlangıç koşulu aynı olmakla beraber katsayı değerleri farklı seçilmiştir. Ancak aynı patlama zamanları ve aynı maksimum genlikler bulunmuştur. Çözümün L^∞ normunun zamana bağlılığını veren (5.18) denkleminin GDS sisteminin katsayılarını içermemesi nedeniyle, patlama zamanı seçilen katsayı değerlerine bağlı değildir. Bu sebeple her iki örnekte de aynı patlama zamanı elde edilmiştir. DS sisteminin de aynı özelliğe sahip olduğunun altını çizmek gerekir. GDS sisteminin burada ele alınan iki örnek problemi için bulunan sayısal sonuçlarla, DS sistemi için

elde edilen ve Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'da sunulan sonuçların tamamen aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

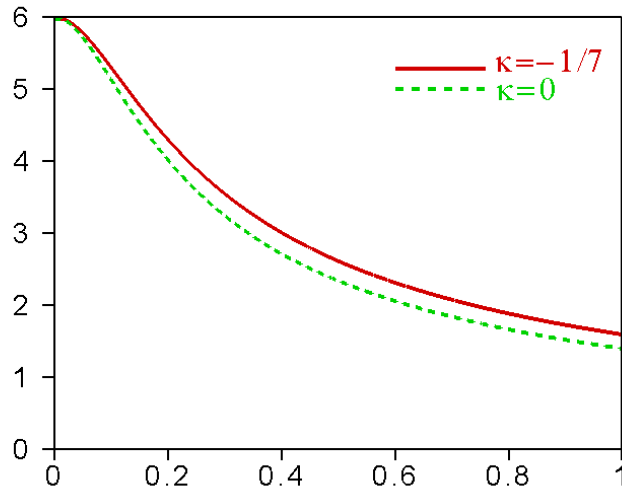
5.2.2 Eliptik-Eliptik-Eliptik hal

Bu altbölümde, EEE hal gözönüne alınacağından bütün sayısal örneklerde $\sigma = 1$ alınmıştır. GDS sisteminin EEE hali için, katsayıların (3.50) veya (3.51) koşulunu sağlaması halinde çözümün global olarak varolduğu, (3.52) veya (3.53) koşulunu sağlaması halinde de çözümün bir süre sonra patlayacağı analitik olarak gösterilmiştir. Şimdi önerilen sayısal şema bu analitik sonuçlar yardımıyla test edilecektir. Aşağıda GDS sisteminin EEE hali için iki farklı durum, $\gamma > 0$ ve $\gamma < 0$ durumları, ele alınmıştır. Her iki durum için de, GDS sistemi çeşitli parametre değerleri alınarak (4.35) Gaussyen başlangıç koşulu için $[-12, 12] \times [-12, 12]$ bölgesinde $T = 1$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma grid sayıları $N_x = N_y = 1024$ ve zamansal ayrıklaştırma grid sayısı $M = 9102$ olarak alınmıştır.

5.2.2.1. $\gamma > 0$ durumu

Altbölüm 4.4.2.1'de, seçilen parametre değerleri için, (i) $\kappa \geq -1/7$ iken çözümün global olarak varolduğu ve (ii) $\kappa < -0,444$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı ifade edilmektedir.

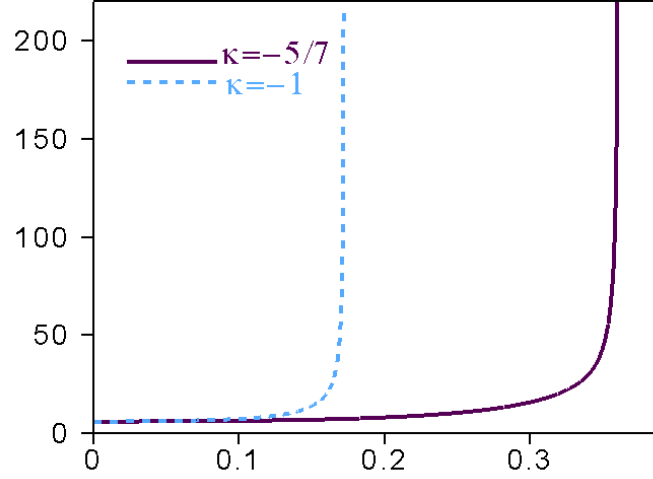
Şekil 5.3'de $\kappa = -1/7$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.



Şekil 5.3. $\kappa = -1/7$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Analitik neticelere göre, $\kappa \geq -1/7$ iken çözümün global olarak varolduğu

gösterilmiştir. Dolayısıyla elde edilen sayısal sonuçlar, analitik neticeler ve rölaksasyon yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlar ile uyumludur. Şekil 5.4’de ise, $\kappa = -5/7$ ve $\kappa = -1$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.

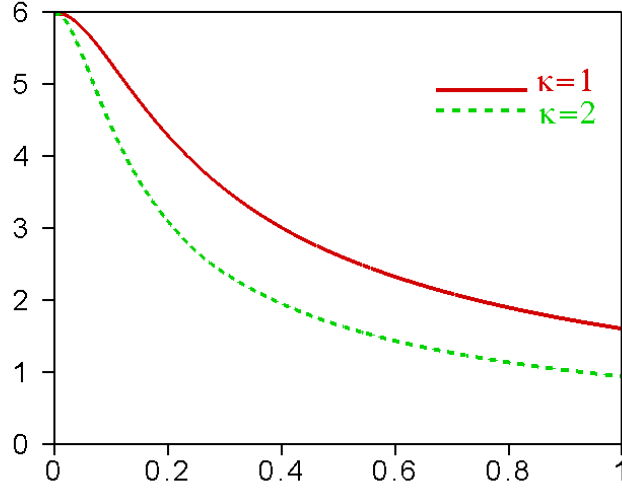


Şekil 5.4. $\kappa = -5/7$ ve $\kappa = -1$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şekil 5.4’de sunulan eğriler, seçilen κ değerleri için, çözümün L^∞ normunun patlama zamanına yaklaştıkça büyüdüğünü göstermektedir. Seçilen katsayı değerleri için, $\kappa < -0,444$ iken GDS sistemi sonlu zaman içinde tekilliğe sahip olacağından, elde edilen sayısal sonuçlar analitik sonuçlarla ve rölaksasyon yöntemi ile elde edilen sayısal sonuçlarla tamamen uyumludur. Şekil 5.4 ve Şekil 4.9’da sunulan eğrilerin bir karşılaştırılması, rölaksasyon sayısal yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda patlama zamanı civarında çözümün genliği 30 civarında iken split-step yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda genliğin 200 civarında olduğunu gösterir. Bu durum split-step yöntemi kullanılarak patlama zamanının daha iyi bir yaklaşıklıkla hesaplanabileceğini ortaya koyar.

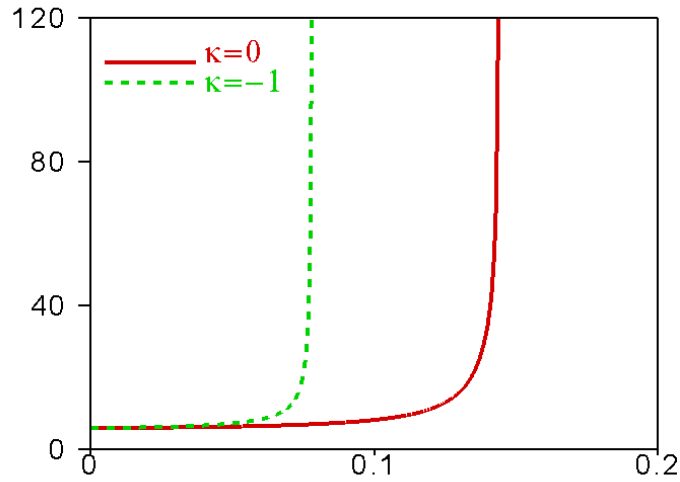
5.2.2.2. $\gamma < 0$ durumu

Alt bölüm 4.4.2.2’de, seçilen parametre değerleri için (i) $\kappa \geq 1$ iken çözümün global olarak varolduğu ve (ii) $\kappa < 1$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı ifade edilmektedir.



Şekil 5.5. $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.

(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)



Şekil 5.6. $\kappa = 0$ ve $\kappa = -1$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

Şekil 5.5’de $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için, Şekil 5.6’da ise, $\kappa = 0$ ve $\kappa = -1$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. Analitik neticeler, $\kappa \geq 1$ iken çözümün global olarak varolduğunu ve $\kappa < 1$ iken çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağını göstermektedir. Dolayısıyla hem Şekil 5.5’de hem de Şekil 5.6’da elde edilen sayısal sonuçlar analitik neticeler ve rölaksasyon yöntemi yardımıyla elde edilen sayısal sonuçlar ile tamamen uyumludur. Ayrıca Şekil 5.6 ve Şekil 4.13’de sunulan eğrilerin bir karşılaştırılması, rölaksasyon sayısal yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda patlama zamanı civarında çözümün genliği 30 civarında iken split-step yöntemi

yardımla elde edilen sonuçlarda genliğin 120 civarında olduğunu gösterir. Bu durum split-step yöntemi kullanılarak patlama zamanının daha iyi bir yaklaşıklıkla hesaplanabileceğini ortaya koyar.

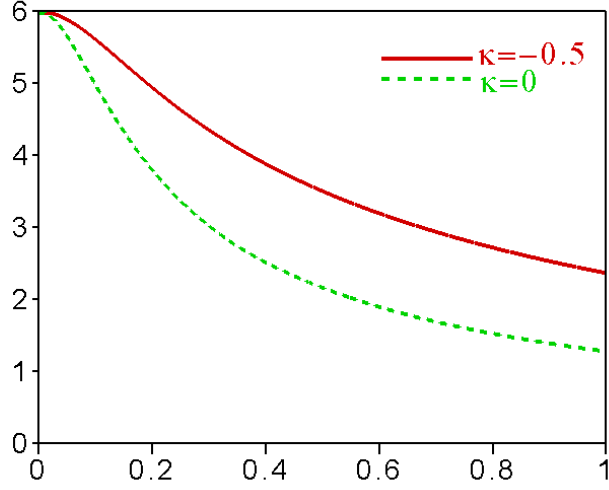
5.5 YGDS sisteminin patlama çözümleri

Bu altbölümde, (3.62) YGDS sistemi split-step sayısal yöntemi kullanılarak çözülecektir. Altbölüm 4.5’de olduğu gibi, (3.62) sisteminde $\gamma = 1$ ve $m > 0$ alınacaktır. Rölaksasyon yöntemi kullanarak Altbölüm 4.5’de çözülen örnek problemler, (4.35) Gaussyen başlangıç koşulu için $[-12, 12] \times [-12, 12]$ bölgesinde $T = 1$ zamanına kadar çözülmüştür. Uzaysal ayrıklaştırma grid sayıları $N_x = N_y = 1024$ ve zamansal ayrıklaştırma grid sayısı $M = 9102$ olarak alınmıştır. Şimdi YGDS sistemi γ parametresinin iki farklı durumu için, $\gamma > 0$ ve $\gamma < 0$, split-step yöntemi kullanılarak çözülecektir.

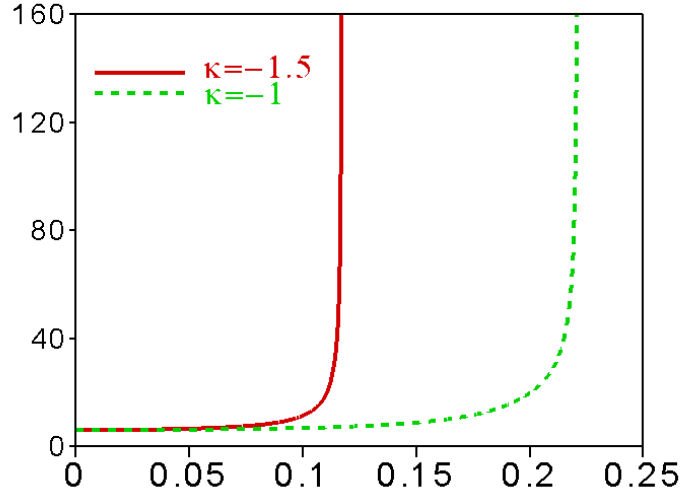
5.5.1. $\gamma > 0$ durumu

YGDS sisteminde katsayılar $\gamma = 1, m = 2$ şeklinde seçilir. Altbölüm 4.5.1’de, seçilen parametre değerleri için, (3.85) ve (3.87) koşulların sonucu olarak $\kappa \geq -0,5$ iken çözümün global olarak varolduğu ve $\kappa < -0,5$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı ifade edilmektedir.

Şekil 5.7’de $\kappa = -0,5$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. Şekil 5.8’de ise $\kappa = -1$ ve $\kappa = -1,5$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. $\kappa = -0,5$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla giderek azalması, $\kappa = -1$ ve $\kappa = -1,5$ değerleri için de sayısal çözümün L^∞ normunun belirli bir zamanda hızla büyümesi yukarıda verilen analitik sonuçlarla ve rölaksasyon yöntemi yardımıyla elde edilen sayısal sonuçlarla uyumludur. Ayrıca Şekil 5.8 ve Şekil 4.15’de sunulan eğrilerin bir karşılaştırması, rölaksasyon sayısal yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda patlama zamanı civarında çözümün genliğinin 30 civarında iken split-step yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda genliğin 160 civarında olduğunu gösterir.



Şekil 5.7. $\kappa = -0,5$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

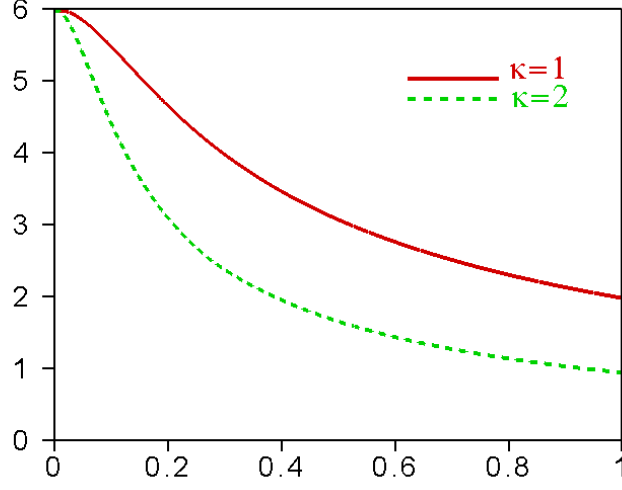


Şekil 5.8. $\kappa = -1$ ve $\kappa = -1,5$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

5.5.2. $\gamma < 0$ durumu

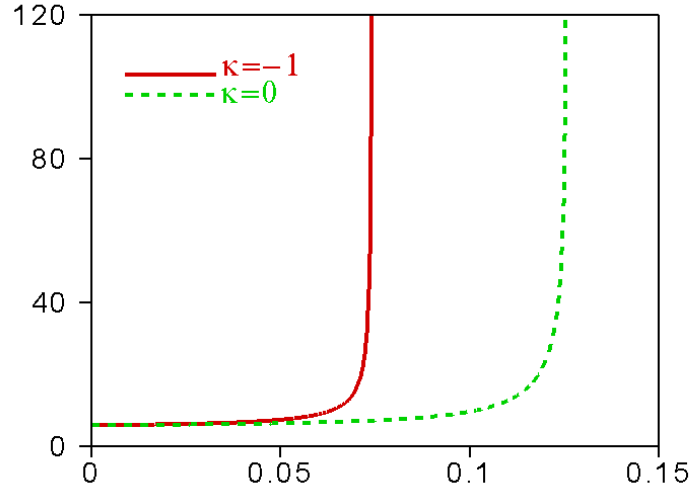
YGDS sisteminde katsayılar $\gamma = -1, m = 2$ şeklinde seçilir. Altbölüm 4.5.2’de, alınan parametre değerleri için, (3.86) ve (3.88) koşullarının sonucu olarak $\kappa \geq 1$ iken çözümün global olarak varolduğu ve $\kappa < 1$ iken de çözümün sonlu zaman içinde bir tekilliğe sahip olacağı ifade edilmektedir.

Şekil 5.9’da $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur. Şekil 5.10’da ise $\kappa = -1$ ve $\kappa = 0$ değerleri için çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi sunulmuştur.



Şekil 5.9. $\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi.

(Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)



Şekil 5.10. $\kappa = -1$ ve $\kappa = 0$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla değişimi. (Düşey eksen: $\|u\|_\infty$, Yatay eksen: t)

$\kappa = 1$ ve $\kappa = 2$ değerleri için sayısal çözümün L^∞ normunun zamanla giderek azalması, $\kappa = -1$ ve $\kappa = 0$ değerleri için de sayısal çözümün L^∞ normunun belirli bir zamanda hızla giderek büyümesi analitik sonuçlarla ve rölaksasyon yöntemi yardımıyla elde edilen sayısal sonuçlarla uyumludur. Ayrıca Şekil 5.10 ve Şekil 4.17’de sunulan eğrilerin bir karşılaştırması, rölaksasyon sayısal yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda patlama zamanı civarında çözümün genliğinin 30 civarında iken, split-step yöntemi yardımıyla elde edilen sonuçlarda genliğin 120 civarında olduğunu gösterir.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, esas olarak GDS sisteminin patlama çözümleri ve patlama çözümlerinin ortaya çıkması için gereken koşullar analitik ve sayısal yöntemler yardımıyla incelenmiştir. Bu çerçevede ilk olarak, Bölüm 2’de, NLS denklemi, DS sistemi ve GDS sistemi için literatürde bilinenler kısaca özetlenmiştir.

İkinci olarak, Bölüm 3’de, GDS sisteminin HEE, EEE halleri ve GDS sisteminin bir özel hali olan YGDS sistemi için yeni bazı analitik sonuçlar verilmiştir. HEE hal ile ilgili kısımda, ilk olarak GDS sistemi için ölçek ve sözde-konformal dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümlere karşılık gelen korunan büyüklükler elde edilmiştir. Daha sonra, sözde-konformal dönüşüm yardımıyla, hem Ozawa’nın yaklaşımını takip ederek hem de ”radyal” çözümler yaklaşımını kullanarak GDS sistemi için bir parametrelili çözüm ailesi elde edilmiştir. Ayrıca bu çözüm ailesinin sonlu zamanda orijinde tekilliğe sahip olduğu gösterilmiştir. EEE hal ile ilgili kısımda, ilk olarak [6]’da GDS sistemi için verilen global varlık ve sonlu zamanda patlama koşulları iyileştirilerek yeni koşullar, (3.50)-(3.53), türetilmiştir. Yeni koşullarla [6]’da verilen κ parametresi ile ilgili boşluk $\gamma < 0$ durumu için ortadan kalkmaktadır. Yani $\gamma < 0$ durumunda çözümlerin global varlığı veya sonlu zamanda patlaması açısından belirsiz bir aralık bulunmamaktadır. Fakat $\gamma > 0$ durumunda çözümlerin global varlığı veya sonlu zamanda patlaması açısından açıklığa kavuşmamış bir κ aralığı, [6]’da verilene göre daha küçük olmakla beraber, hala mevcuttur. Dolayısıyla bu belirsizlik aralığındaki κ değerleri için çözümlerin global olarak varolup olmadığı konusunda analitik bir sonuç mevcut olmadığından, sayısal yöntemlere başvurulmuştur. Ancak, belirsizlik aralığındaki κ değerleri için, Hamiltoniyeni negatif yapacak şekilde uygun bir başlangıç koşulu bulunamadığından, Bölüm 4 ve Bölüm 5 ’de sunulan sayısal yöntemler yardımıyla da çözümün global varlığı konusunda bir sonuca ulaşılamamış ve bu durum bir açık problem olarak kalmıştır. Son olarak, GDS sisteminin çözümlerinin asimptotik

davranışı incelenmiş ve belirli bir kümeden seçilen çözümlerin L^p normlarının, $p > 2$ için, $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiği gösterilmiştir. YGDS sistemi ile ilgili kısımda ise, ilk olarak YGDS sistemi özel bir dönüşüm yardımıyla klasik DS sistemine dönüştürülmüştür. Daha sonra, DS sistemi için literatürde verilmiş koşullardan yararlanılarak, YGDS sistemi için çözümlerin global varlığı ve patlaması ile ilgili (3.85)-(3.88) koşulları elde edilmiştir. Buradaki en ilginç nokta, GDS sistemi için bu tez çalışmasında türetilen koşullardan $\lambda = 1$, $m_1 = m_2$, $n = 0$ indirgenmesiyle elde edilen koşulların YGDS sistemi için verilen (3.85)-(3.88) koşullarına özdeş olmasıdır. Bu sonuç, GDS sistemi için sunulan koşulların doğruluğunun ayrı bir işareti olarak kabul edilmektedir. Bu bölümde GDS sistemi için verilen ölçek ve sözde-konformal dönüşümler, bu dönüşümlere karşılık gelen korunan büyüklükler, sistemin HEE hali için bir sözde-konformal dönüşüm yardımıyla elde edilen analitik patlama çözümleri ve GDS sisteminin EEE hali için belirli bir kümeden seçilen çözümlerin asimptotik davranışı için elde edilen sonuçlar tamamen orijinal nitelikte olup bir makale [18] haline getirilmiş ve yayınlanmıştır.

Üçüncü olarak, Bölüm 4’de, esas olarak DS sistemi için önerilen rölaksasyon şeması [26, 33] GDS sistemine genişletilmiştir. Sayısal şema, GDS sisteminin EEE, HEE halleri ve GDS sisteminin özel hali olan YGDS sistemi için verilen analitik sonuçlar ile test edilmiştir. GDS sistemi için önerilen rölaksasyon yöntemi, teorik olarak varlığı gösterilmiş patlama olayını yakalamakta veya çözümün global olarak varolduğunu göstermekte oldukça başarılıdır. Elde edilen sayısal sonuçlar, Bölüm 3’de sunulan analitik sonuçlar ve Bölüm 5’de split-step sayısal yöntemi ile elde edilen sonuçlarla ile tam bir uyum içerisindedir. Bu bölümde, GDS sistemi için önerilen rölaksasyon yönteminin ve sunulan sayısal deneylerin orijinal nitelikte olduğunu vurgulamak gerekir. Bu bölümdeki içerik daha da zenginleştirilerek önümüzdeki günlerde bir makale haline getirilmeye çalışılacaktır.

Son olarak, Bölüm 5’de, esas olarak DS sistemi için önerilen split-step yöntemi [7, 40] GDS sistemine genişletilmiştir. Sayısal şema GDS sisteminin EEE, HEE halleri ve YGDS sistemi için Bölüm 3’de verilen analitik sonuçlar ve Bölüm 4’de rölaksasyon yöntemi yardımıyla elde edilen sayısal sonuçlar ile test edilmiş ve tam bir uyum içerisinde olduğu gözlenmiştir. Sonuç olarak, GDS

sistemi için önerilen birinci ve ikinci mertbe split-step Fourier yöntemlerinin, teorik olarak varlığı gösterilmiş patlama olayını yakalamakta başarılı olduğu gözlenmiştir. GDS sisteminin HEE halinde, iki farklı katsayı grubu seçilmesine rağmen split-step yöntemi kullanılarak aynı patlama zamanları bulunmuştur. Bu sonuç, çözümün L^∞ normunun zamana bağlılığının GDS sisteminin katsayılarını içermemesi sonucu ile uyumludur. Ayrıca HEE durumunda, analitik patlama zamanı bilindiğinden, rölaksasyon ve split-step yöntemleri karşılaştırılmış ve split-step yöntemiyle patlama zamanının daha iyi bir yaklaşıklıkla hesaplanabileceği sonucuna varılmıştır. Gerek HEE hal için gerekse EEE hal için gerçekleştirilen sayısal deneyler, split-step yönteminin rölaksasyon yöntemine kıyasla sadece daha hızlı değil daha doğru da olduğunu göstermektedir. Son olarak, GDS sistemi için önerilen split-step yönteminin ve sunulan sayısal deneylerin orijinal nitelikte olduğunu vurgulamak gerekir. Bu bölümdeki içerik önümüzdeki günlerde bir makale haline getirilmeye çalışılacaktır.

Gelecekte çalışılması düşünülen problemler aşağıdaki gibi özetlenebilir. Bölüm 4’de GDS sistemini çözmek için kullanılan rölaksasyon yöntemi her zaman adımında bir lineer denklem sisteminin çözümüne gerek duymaktadır. Ayırıklaştırmadaki nokta sayısı arttıkça, matrisin boyutu da artmaktadır. Böylece hem hız hem de bellek açısından daha güçlü bilgisayarlara gerek duyulmaktadır. Bu tez çalışmasında, GDS sistemi için elde edilen sayısal sonuçlar 4 işlemcili, hafızası 8GB olan bir Sun Solaris 9 bilgisayarı kullanılarak hesaplanmıştır. Ancak tezde sunulanlardan daha hassas sonuçlar elde edilememiştir. Bu nedenle, gelecekte çalışılması düşünülen konulardan biri GDS sisteminin rölaksasyon yöntemi ile çözümü için yazılmış bilgisayar programının paralelleştirilerek daha hassas sonuçlar elde edilmesi olacaktır.

NLS denkleminin sayısal çözümlerinin lokal varlığı, tekliği ve rölaksasyon şemasının yarı ayırık formunun yakınsaklığı [25]’de gösterilmiştir. Daha sonra, NLS denklemi için verilen yakınsaklık analizi DS sistemi için genişletilmiştir [8, 33]. Ayrıca, NLS denklemi ve DS sistemi için kütle ve enerjinin ayırık hallerinin de rölaksasyon şeması tarafından korunduğu [8, 25, 33]’da gösterilmiştir. Split-step yönteminin NLS denklemi için yakınsaklığı [27]’de, DS sistemi için yakınsaklığı

ise [7]'de gösterilmiştir. Gelecekte çalışılması düşünülen bir diğer konu ise, GDS sistemi için önerilen rölaksasyon ve split-step şemalarının yakınsaklık analizinin gerçekleştirilmesi olacaktır. Ayrıca korunan büyüklüklerin ayırık hallerinin rölaksasyon ve split-step şemaları tarafından korunup korunmadığı da araştırılması gereken konulardan biridir.

NLS denkleminin kritik ve kiritiküstü durumları için, patlama zamanı ile doğrusal olmayan terimin katsayısı arasındaki ilişki monotonluk açısından hem analitik hem de sayısal yöntemler yardımıyla incelenmiştir [41]. Hem kiritik hem de kiritiküstü durumda, patlama zamanının doğrusal olmayan terimin katsayısına monoton olarak bağlı olmadığı gösterilmiştir. GDS sistemi için benzer bir incelemenin yapılması gelecekte çalışılması düşünülen konulardan biridir.

Doğrusal olmayan dalga denklemlerine direkt olarak uygulanan yöntemlerin patlama çözümlerini daha iyi bir doğrulukla yakalayabilmeleri için *(i)* patlamanın gerçekleştiği bölge civarında uzaysal koordinatların çok çok küçük uzay adımlarına izin verecek şekilde ayırıklaştırılmasına ve *(ii)* patlama zamanına yaklaştıkça giderek hızlı bir şekilde azalan zaman adımlarına izin verecek şekilde ayırıklaştırılmasına izin vermesi gerekir. Bu şekildeki dinamik uyarlamalı sayısal yöntemlerin bu çalışmada önerilen, hem zaman adımlarının hem de uzay adımlarının sabit olması esası üzerine kurulu, yöntemlere göre çok daha başarılı olması beklenir. Şimdiki çalışmanın, GDS sisteminin patlama çözümlerini anlama amacıyla gelecekte geliştirilmesi planlanan uyarlamalı sayısal yöntemler için bir yol gösterici çalışma niteliğinde olduğunu da ayrıca vurgulamak gerekir.

KAYNAKLAR

- [1] **Whitham, G. B.**, 1974. Linear and nonlinear waves, Wiley, New York.
- [2] **Sulem, C., Sulem, P.**, 1999. The nonlinear Schrödinger equation self-focusing and wave collapse, Springer-Verlag, Toronto.
- [3] **Strauss, W.**, 1989. Nonlinear wave equations, NSF-CBMS Research Monograph, Amer. Math. Soc., Providence.
- [4] **Ozawa, T.**, 1992. Exact blow-up solutions to the Cauchy problem for the Davey-Stewartson systems, *Proc. R. Soc. Lond.*, **436**, 345-349.
- [5] **Babaoğlu, C., Erbay, S.**, 2004. Two dimensional wave packets in an elastic solid with couple stresses, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **39**, 941-949.
- [6] **Babaoğlu, C., Eden, A., Erbay, S.**, 2004. Global existence and nonexistence results for a generalized Davey-Stewartson equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**, 11531-11546.
- [7] **Besse C., Mauser, N.J., Stimming, H.P.**, 2004. Numerical study of the Davey-Stewartson system, *Math. Model. Numer. Anal.*, **38**, 1035-1054.
- [8] **Besse, C.** 1998. Analyse numerique des systemes de Davey-Stewartson, Ph.D. Thesis.
- [9] **Kesavan, S**, 1989. Topics in functional analysis and applications, John Wiley & Sons.
- [10] **Zakharov, V. E., Shabat, A. B.**, 1972. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one dimensional self modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Physics JETP*, **34**, 62-69.
- [11] **Chiao, R. Y., Garmire, E., Townes, C.**, 1964. Self trapping of optical beams, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 479-482.
- [12] **Talanov, V. I.**, 1965. Self-focusing of wave beams in nonlinear media, *JETP Lett.*, **2**, 138-141.
- [13] **Zakharov, V. E.**, 1972. Collapse of Langmuir waves, *Soviet Physics JETP*, **35**, 908-922.
- [14] **Cazenave, T.**, 1994. Blow up and scattering in the nonlinear Schrödinger equation, Textos de Mtodos Matemticos **30**, I.M.U.F.R.J., Rio de Janeiro.

- [15] **Gelfand, I. M., Fomin, S. V.**, 1963. Calculus of variations, Prentice-Hall.
- [16] **Davey, A., Stewartson K.**, 1974. On three-dimensional packets of surface waves, *Proc. Roy. Soc. London A*, **338**, 101-110.
- [17] **Ghidaglia, J. M., Saut, J. C.**, 1990. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems, *Nonlinearity*, **3**, 475-506.
- [18] **Eden, A., Erbay, H. A., Muslu, G. M.**, 2006. Two remarks on a generalized Davey-Stewartson system, *Nonlinear Analysis*, **64**, 979-986.
- [19] **Ginibre, J., Velo, G.**, 1979. On a class of nonlinear Schrödinger equations, *J. Funct. Anal.*, **32**, 1-71.
- [20] **Kuznetsov, E. A., Turitsyn, S. K.**, 1985. Talanov transformations in self-focusing problems and instability of stationary waveguides, *Phys. Lett.*, **112A**, 273-375.
- [21] **Güngör, F., Aykanat, Ö.**, 2006. The generalized Davey-Stewartson equations, its Kac-Moody-Virasoro symmetry algebra and relation to Davey-Stewartson equations, *J. Math. Phys.*, **47**, 013510.
- [22] **Weinstein, M. I.**, 1989. The nonlinear Schrödinger equation- Singularity formation, stability and dispersion, *Contemp. Math.*, **99**, 213-232.
- [23] **Evans, L. C.**, 1997. Partial differential equations, American Mathematical Society.
- [24] **Babaoglu, C.**, 2006. Some special solutions of a generalized Davey-Stewartson system, *Chaos, Solitons & Fractals*, **30**, 781-790.
- [25] **Besse, C.**, 2004. A relaxation scheme for nonlinear Schrödinger equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **42**, 934-952.
- [26] **Besse, C., Bruneau, C. H.**, 1998. Numerical study of elliptic-hyperbolic Davey-Stewartson system: Dromions simulation and blow-up, *Math. Model Meth. Appl. Sci.*, **8**, 1363-1386.
- [27] **Besse, C., Bidegaray, B., Descombes, S.**, 2002. Order estimates in time of splitting methods for the nonlinear Schrödinger equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**, 1, 26-40.
- [28] **Delfour, M., Fortin, M., Payre, G.**, 1981. Finite difference solutions of a nonlinear Schrödinger equation, *J. Comput. Phys.*, **44**, 277-288.
- [29] **Sanz-Serna, J. M., Calvo M. P.**, 1994. Numerical hamiltonian problems, Chapman & Hall, London.
- [30] **Weideman, J. A. C., Herbst, B. M.**, 1986. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation, *SIAM J. Numer. Anal.*, **23**, 425.

- [31] **Akrivis, G. D., Dougalis V. A., Karakashian, O. A., Mckinney, W. R.**, 2003. Numerical approximation of blow-up of radially symmetric solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *SIAM J. Sci. Comput.*, **25**, 186-212.
- [32] **Chen, S**, 2000. Blow-up rate for the numerical solutions of the cubic nonlinear Schrödinger equation at critical dimension, Ph.D. Thesis.
- [33] **Besse, C.**, 1998. Schéma de relaxation pour l'équation de Schrödinger non linéaire et les systèmes de Davey et Stewartson, *C. R. Acad. Sci. Série I*, **326**, 1427-1432.
- [34] **Hardin, Tappert F.D.**, 1973. Applications of the split-step Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations, *SIAM Rev. Chronicle*, **15**, 423.
- [35] **Taha, T.R., Ablowitz, M.J.**, 1984. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical nonlinear Schrödinger equation, *J. Comp. Phys.*, **55**, 203-230.
- [36] **Muslu, G. M., Erbay, H. A.**, 2003. A split-step Fourier method for the complex modified Korteweg-de Vries equation, *Comput. Math. Appl.*, **45**, 503-514.
- [37] **Muslu, G. M., Erbay, H. A.**, 2005. Higher-order split-step Fourier schemes for the generalized nonlinear Schrödinger equation, *Math. Comput. Simulat.* **67**, 581-595.
- [38] **Borluk, H., Muslu, G. M., Erbay, H. A.**, A numerical study of the long wave-short wave interaction equations, *Math. Comput. Simulat.*, **74**, 113-125.
- [39] **Fibich, G., Gavish, N., Wang, X.-P.**, 2005. New singular solutions of the nonlinear Schrödinger equation, *Physica D*, **211**, 193-220.
- [40] **White, P. W., Weideman, J. A. C.**, 1994. Numerical simulation of solitons and dromions in the Davey-Stewartson system, *Math. Comput. Simulat.*, **37**, 469-479.
- [41] **Besse, C., Carles, R., Mauser, N., Stimming, H.P.**, Monotonicity properties of blow-up time for nonlinear Schrödinger equation: numerical tests (sunuldu).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İzmit’de doğdu. İlköğretimini Özel Körfez İlkokulu’nda, ortaokul eğitimini İzmit Ortaokulu’nda, lise eğitimini İzmit Lisesi’nde, yüksek öğrenimini ise 1993-1997 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü’nde tamamladı. 1997 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü’nde lisans üstü eğitimine başladı. 2000 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başlamış olup, halen bu görevine devam etmektedir.