



ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİNDEKİ ÇÖZÜMÜ ETKİLEYEN SEÇİLEBİLİR PARAMETRELERİN TABAKALI PLAKALARIN EĞİLME PROBLEMLERİNDE İNCELENMESİ

Özkan Özbek¹, Ömer Yavuz Bozkurt²

^{1,2}Gaziantep Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü, 27310, Gaziantep

ABSTRACT

In this study; the effects of selectable parameters of element-free Galerkin method (EFGM) such as support domain size, number of Gauss integration point in a background cell and order of monomials are investigated on the solution accuracy of bending analyses of layered plates. A general EFGM algorithm based on Reissner-Mindlin plate theory (FSDT) has been developed on MATLAB programming environment and solutions are achieved using this algorithm. The effects of parameters on the solution accuracy are presented with displacement results in Tables. The obtained results using regular and irregular node distributions are compared with analytical results in the literature.

ÖZET

Bu çalışmada, eleman bağımsız Galerkin yöntemi çözümlerinde destek etki büyüklüğü, arka plan hücrelerindeki integrasyon nokta sayısı ve monomiyallerin derecesi gibi seçime bağlı parametrelerin tabakalı plakaların eğilme analizlerindeki etkileri incelenmiş ve elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olan analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Kullanılan yöntem için MATLAB programında Reissner-Mindlin Plaka Teorisi tabanlı genel amaçlı bir program geliştirilmiş ve çözümler bu program kullanılarak yapılmıştır. Parametrelerin çözüm üzerindeki etkileri parametre değerlerine karşın deformasyon değeri düzeninde hazırlanan çizelgeler ile gösterilmiştir. Oluşturulan modellerde, düzgün dağıtılmış düğüm noktaları ve düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılmıştır.

GİRİŞ

Son zamanlarda, sağladıkları yüksek gerilim/ağırlık oranından dolayı tabakalı kompozit plakalar mühendislik uygulamalarında önemli bir yer kazanmış ve doğru bir şekilde analiz edilme gereksinimleri oluşmuştur. Tabakalı plakaları analiz etmek için sonlu elemanlar yöntemi, sınır elemanları yöntemi ve ağırsız yöntemler gibi birçok sayısal yöntem bulunmaktadır [1-3]. Sonlu elemanlar ve sınır elemanları yöntemleri problemi doğru bir şekilde çözmek için iyi bir ağ kalitesine ihtiyaç duymaktadırlar. Ağırsız yöntemlerde ise böyle bir zorunluluk bulunmamaktadır. Günden güne gelişmekte olan ağırsız yöntemler, tabakalı plakaların analizlerinde verdikleri dikkat çekici sonuçlardan dolayı tercih edilen yöntemlerdendir.

Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi sahip olduğu çözüm hassasiyeti sebebiyle katı cisimler mekaniğinde en yaygın kullanılan ağırsız yöntemlerdendir [4,5]. Şekil fonksiyonu türetimi için Hareketli En Küçük Kareler yaklaşımı kullanan yöntem sayısal integral almak içinde arka plan hücreleri ve Gauss quadrature yöntemi kullanılmaktadır [7]. Eleman bağımsız Galerkin yönteminin burulma [7], çatlak analizleri [8], eğilme [9] vs. gibi birçok alanda tercih edilen ve

başarılı bir şekilde uygulanan bir yöntem olduğu görülmektedir. Öte yandan, yöntem çözümü etkileyen ağırlık fonksiyonu türü, destek etki büyüklüğü, arka plan hücrelerindeki integrasyon nokta sayısı, monomiyallerin derecesi ve ceza katsayısı gibi uygulayan insanların karar verdiği bazı parametreleri içerir.

TABAKALI KOMPOZİT PLAKALAR İÇİN REİSSNER-MİNDLİN PLAKA TEORİSİ

Kartezyen koordinat sisteminin $x - y$ düzleminde yatan orta düzlemi ile tipik bir Reissner-Mindlin plakası Şekil 1’de gösterilmektedir. Orta düzlem ile mesafesi z olan bir noktanın yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x(x, y) \\ -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

burada (u, v, w) plakanın x, y ve z yönlerinde ki yer değiştirmelerini, θ_x ve θ_y enine kesitin x ve y eksenlerine göre dönmelerini göstermektedir. Eğilmeden oluşan θ_x, θ_y enine dönmeleri ve w orta düzlem yer değiştirmesi ile Reissner-Mindlin plakasında oluşan birim deformasyon aşağıdaki gibi yazılır.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} \\ -z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ -\theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ -\theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Ortotropik doğrusal elastik malzemeler için genelleştirilmiş Hooke yasasını kullanarak i ’inci tabakada ki gerilme aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \bar{\mathbf{c}}^i \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

burada

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^i = \mathbf{T}^T \mathbf{c}^i \mathbf{T} \quad (5)$$

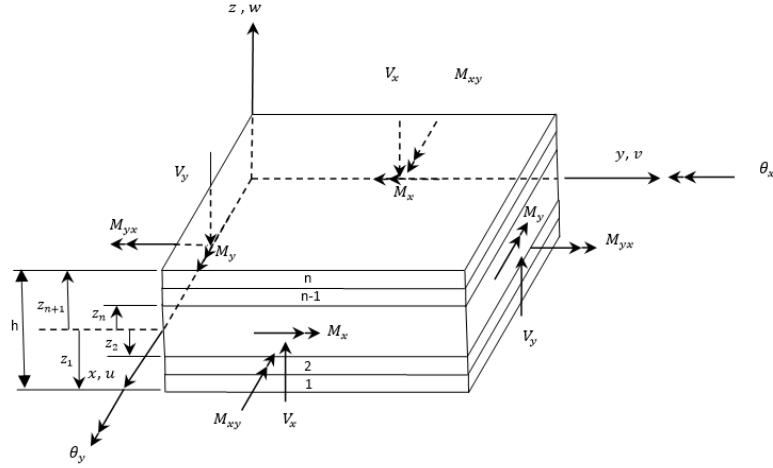
Ayrıca $\mathbf{c}^i$ i ’inci tabakanın malzeme matrisidir ve $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{13}$ and G_{23} gibi malzeme özelliklerinden oluşur. Ortotropik malzemeler için malzeme matrisi aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{c}^i = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ve $\mathbf{T}$ tabaka dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta \cos\theta & -\sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

burada θ ilgili tabakada ki fiberin yönelim açısıdır.



Şekil 1. Tipik tabakalı Reissner-Mindlin plakası

Tabakada ki fiber yerleşimine göre dönüşümü gerçekleştirilmiş birim deformasyonları $\{\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy}\} = z \{\bar{\epsilon}_{xx} \ \bar{\epsilon}_{yy} \ \bar{\gamma}_{xy}\}$ göz önüne alarak i 'inci tabakanın üst yüzeyinde ki gerilmeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{z_i+1} &= z_{i+1} [\bar{c}_{11}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{13}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\ \sigma_{yy}^{z_i+1} &= z_{i+1} [\bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{22}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{23}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\ \tau_{xy}^{z_i+1} &= z_{i+1} [\bar{c}_{13}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{23}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{33}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\ \tau_{xz}^{z_i+1} &= [\bar{c}_{44}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{45}^i \gamma_{yz}] \\ \tau_{yz}^{z_i+1} &= [\bar{c}_{45}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{55}^i \gamma_{yz}] \end{aligned} \quad (8)$$

Eğme döndürgüleri (M_{ij}) ve kayma kuvvetleri (V_{ij}) aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \sigma_{xx}^i dz \\ M_{yy} &= \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \sigma_{yy}^i dz \\ M_{xy} &= \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \tau_{xy}^i dz \\ V_{xx} &= k_{sh} \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{xz}^i dz \\ V_{yy} &= k_{sh} \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{yz}^i dz \end{aligned} \quad (9)$$

burada k_{sh} kayma düzeltme katsayısıdır. Denklem 8’de ki gerilme değerlerinin Denklem 9’a yerleştirilmesi ile Denklem 9 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \sum_i^n \left[\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right] [\bar{c}_{11}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{13}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\ M_{yy} &= \sum_i^n \left[\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right] [\bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{22}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{23}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\ M_{xy} &= \sum_i^n \left[\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right] [\bar{c}_{13}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{33}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\ V_{xx} &= k_{sh} \sum_i^n [z_{i+1} - z_i] [\bar{c}_{44}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{45}^i \gamma_{yz}] \\ V_{yy} &= k_{sh} \sum_i^n [z_{i+1} - z_i] [\bar{c}_{45}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{55}^i \gamma_{yz}] \end{aligned} \quad (10)$$

Denklem 10’daki eğme döndürücüleri ve kayma kuvvetleri vektörel olarak aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i^n \mathbf{D}^i \mathbf{L} \Phi \left(\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right) = \left[\sum_i^n \mathbf{D}^i \left(\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right) \right] \mathbf{L} \Phi \quad (11)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xx} \\ V_{yy} \end{bmatrix} = k_{sh} \sum_i^n [\mathbf{A}_{sh}^i (\nabla \mathbf{w} - \Phi) (z_{i+1} - z_i)] = k_{sh} [\sum_i^n \mathbf{A}_{sh}^i (z_{i+1} - z_i)] (\nabla \mathbf{w} - \Phi)$$

burada,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\Phi = \{\theta_x \quad \theta_y\}^T \quad (13)$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T \quad (14)$$

Ayrıca $\mathbf{D}^i$ ve $\mathbf{A}_{sh}^i$ sırası ile eğme ve kayma etkileri ile ilişkili malzeme özellikleridir. Matris olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\mathbf{D}^i = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^i & \bar{c}_{12}^i & \bar{c}_{13}^i \\ \bar{c}_{12}^i & \bar{c}_{22}^i & \bar{c}_{23}^i \\ \bar{c}_{13}^i & \bar{c}_{23}^i & \bar{c}_{33}^i \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{A}_{sh}^i = \begin{bmatrix} \bar{c}_{44}^i & \bar{c}_{45}^i \\ \bar{c}_{45}^i & \bar{c}_{55}^i \end{bmatrix} \quad (16)$$

Kütle kuvvetlerin yokluğunda, sanal çalışma prensibi kullanılarak elde edilen denge denklemleri aşağıda verilmiştir,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \mathbf{M} - \mathbf{V} &= 0 \\ \nabla^T \mathbf{V} + \mathbf{b} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

burada $\mathbf{b}$ uygulanan dış kuvvetler vektörüdür. Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi bu denklem sistemlerinin çözümü için kullanılır.

ELEMEN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ

Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı

Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı'na göre herhangi bir $\mathbf{x}$ noktasında ve Ω lokal alan içerisinde yer alan $u(\mathbf{x})$ alan değişkeni fonksiyonu için aşağıdaki ifade yazılır;

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (18)$$

burada m esas terimlerinin sayısını, $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$ monomiyal esas fonksiyonlarının vektörünü, $\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})\}$ ise katsayılar vektörünü, ve $\mathbf{x}^T = [x, y]$ 2 boyutlu problemler için konum vektörünü gösterir. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ esas fonksiyonunu elde etmek monomiyaller Pascal Üçgeni'nden minimum bütünlüğü sağlayarak seçilir.

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ coefficients vektörünü elde etmek için $u(\mathbf{x})$ fonksiyonu ve lokal yaklaşımı arasındaki fark Denklem 19'te ifade edilen ağırlıklı ayırık (discrete) L_2 norm kullanılarak minimize edilmelidir.

$$J = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (19)$$

burada, n $\mathbf{x}$ noktasının destek alanı içerisinde bulunan düğüm noktalarının sayısını, u_i $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 'de u 'nun noktasal değerini, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ise ağırlık fonksiyonun ifade etmektedir. Ağırlık fonksiyonu değeri $\mathbf{x}$ noktasının destek alanı içinde bulunan bütün düğüm noktaları için sıfırdan büyük olmak zorundadır.

Herhangi bir $\mathbf{x}$ noktasında $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ e bağlı olarak ağırlıklı kalanın minimize edilmesi için aşağıdaki denklem kullanılır;

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (20)$$

Denklem 20'nin uygulanması ile lineer denklemi kümesi olarak aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (21)$$

burada $\mathbf{U}_s = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}^T$ destek alanındaki düğüm noktaları için alan fonksiyonunun noktasal değerlerinin vektörüdür. Ayrıca $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri sırasıyla Denklem 22 ve Denklem 23'de ki gibidir.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})p(x_i)p^T(x_i), \quad w_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - x_i) \quad (22)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})p(x_1) \quad w_2(\mathbf{x})p(x_2) \quad \dots \quad w_n(\mathbf{x})p(x_n)] \quad (23)$$

$\mathbf{A}$ matrisi hareketli en küçük karelerin ağırlıklı döndürge matrisi olarak adlandırılır ve eğer tekil değilse $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (24)$$

$u^h(\mathbf{x})$ 'in noktasal yaklaşımı Denklem 18 kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir;

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})u_i = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (25)$$

burada Φ^T is hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonlarının vektörünü gösterir ve Denklem 26'da ki gibi ifade edilir.

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (26)$$

Şekil fonksiyonlarının kısmi türevlerine Denklem 27 kullanılarak ulaşılır.

$$\Phi_{,i} = (\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{,i} = \mathbf{p}_{,i}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i} \quad (27)$$

burada

$$\mathbf{A}_i^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_i \mathbf{A}^{-1} \quad (28)$$

Ağırlık fonksiyonları hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonlarını türetmek için en önemli noktalardan biridir. Hareketli en küçük kareler yaklaşımının süreklilik özellikleri temel olarak ağırlık fonksiyonlarına dayanmaktadır. Ağırlık fonksiyonu maksimum değerini destek alanının merkezinden alarak destek alanı içerisinde pozitif, destek alanı dışında monoton bir düşüş kullanarak sıfır olmalıdır. Literatürde değişik ağırlık fonksiyonları bulunmaktadır [5]. Bu çalışmada kübik spline ağırlık fonksiyonu kullanılır ve formülü aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$w_i(\mathbf{x} - x_i) = w(\bar{r}_i) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ 4/3 - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - 4/3 \bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (29)$$

2 boyutlu problemlerde dikdörtgen etki alanı için ağırlık fonksiyonları Denklem 30 ve Denklem 31 kullanılarak elde edilir.

$$w(\bar{r}_i) = w(r_x)w(r_y) = w_x w_y \quad (30)$$

$$r_x = \frac{|x - x_i|}{r_{wx}} \quad \text{ve} \quad r_y = \frac{|y - y_i|}{r_{wy}} \quad (31)$$

burada r_{wx} ve r_{wy} x ve y yönlerinde destek alanı ölçüleridir.

Galerkin Zayıf Formu ve Sınır Şartlarının Güçlendirilmesi

Reissner-Mindlin plakaları için Galerkin zayıf form denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_d \mathbf{u})^T D \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{u})^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{u})^T t_{\Gamma} dS + \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_{\Gamma})^T \alpha (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_{\Gamma}) d\Gamma \quad (32)$$

Buradan ayrık(discrete) sistem denklemi aşağıda gibi yazılabilir;

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^{\alpha}) \mathbf{U} = (\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\alpha}) \quad (33)$$

burada $\mathbf{K}$ global direngenlik matrisini gösterir ve Denklem 34’de verilen noktasal direngenlik matrislerinden elde edilir.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (34)$$

burada,

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \phi_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & \phi_i \end{bmatrix}^T \quad (35)$$

Ayrıca Denklem 33’de yer alan $\mathbf{K}^{\alpha}$ ceza katsayıları matrisi olup, Denklem 36’de ifade edilmektedir.

$$(\mathbf{K}^{\alpha})_{ij} = \int_{\Gamma_u} \varphi_i^T \alpha \varphi_j d\Gamma \quad (36)$$

burada φ_i diyagonal matrisidir. Eğer ilgili serbestlik derecesi kısıtlanmamış ise diyagonal elemanlar 0’a aksi takdirde 1’e eşittir.

Denklem 33’de yer alan kuvvet vektörü $\mathbf{F}$ global kuvvet vektörüdür ve Denklem 37’de ifade edilen noktasal kuvvet vektörleri kullanılarak elde edilir.

$$F_i = \int_{\Omega} (\mathbf{L}_u \Phi_i)^T b d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{L}_u \Phi_i)^T t_{\Gamma} dS \quad (37)$$

burada Φ_i şekil fonksiyonlarının diyagonal matrisidir.

Denklem 33’de bulunan $\mathbf{F}^\alpha$ vektörü gerekli sınır şartlarının yerine getirilmesi ile elde edilen kuvvetleri gösterir ve ifadesi aşağıdaki gibidir;

$$F_i^\alpha = \int_{\Gamma_u} \varphi_i^T \alpha u_\Gamma d\Gamma \quad (38)$$

ÇÖZÜMLER VE TARTIŞMA

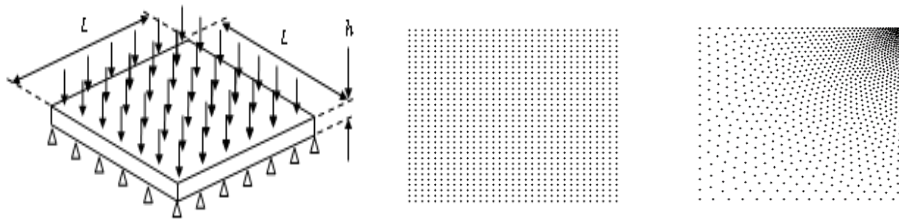
Eleman Bağımsız Galerkin Yöntemi’nin sahip olduğu seçilebilir parametrelerin tabakalı kompozit plakaların eğilme analizlerinde çözümlere etkilerini incelemek için 2 sayısal örnek gerçekleştirilmiştir. Örneklerde kullanılan malzemelerin özellikleri Çizelge 1.’de verilmiştir. Çözümlerdeki deformasyon ve x yönündeki gerilme değerleri kritik nokta olarak kabul edilen 1. tabakanın üst ve orta noktasında, y yönündeki gerilme değerleri 2. tabakanın üst ve orta noktasından elde edilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi çözümlerinde ceza katsayısı için 1×10^6 değerleri kullanılmıştır. Ayrıca çözümlerde kayma düzeltme katsayısı 5/6 olarak kullanılmıştır.

Çizelge 1. Çözümlerde kullanılan malzemelerin özellikleri

	M1	M2
E_1, Pa	250×10^9	5.6×10^6
E_2, Pa	10×10^9	1.2×10^6
G_{12}, Pa	5×10^9	0.6×10^6
G_{13}, Pa	5×10^9	0.6×10^6
G_{23}, Pa	2×10^9	0.6×10^6
ν_{12}	0.25	0.26

Örnek 1: Basit mesnetli düzgün dağıtılmış yük altında kare plaka

Basit mesnetli kare plakaya uygulanan düzgün dağıtılmış yayılı yük miktarı, $q = 100 \frac{kN}{m^2}$ olup, sahip olduğu kalınlık/uzunluk oranı 0.1’dir. Plaka 4 tabakaya sahip ve tabakalardaki fiber yönelimleri sırasıyla $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ şeklinde simetrik dizilimdedir. Malzeme olarak Çizelge 1.’den **M1** seçilmiştir. Simetriden dolayı, çözümlerde plakanın 1/4’ü modellenmiştir. Çözümlerde 1089 düğüm noktası ve 1024 arka plan hücresi kullanılmıştır. Çözümlerde kullanılan düzgün dağıtılmış ve düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları modelleri ve kare plaka Şekil 2.’de görülebilmektedir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 2. ve Çizelge 3.’te yer almaktadır.



Şekil 2. Düzgün dağıtılmış yayılı yük altında basit mesnetli kare plaka ve EFGM yönteminde kullanılan modelleri

Elde edilen sonuçlara göre; düzgün dağıtılmış düğüm noktaları ile düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları arasında deformasyon sonuçları için önemli bir fark görülmemiştir. Yine deformasyon sonuçlarında arka plan hücrelerindeki integrasyon noktası sayılarında ciddi bir fark olmazken, gerilme sonuçlarına bakıldığında 4×4 ’ün yeterli olmadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca destek alanı büyüklüğü arttıkça sonuçlar bozulmakta olduğundan, küçük destek alanlarının daya yakın sonuçlara sahip olduğu dikkat çekmektedir.

Çizelge 2. Dört kenarından basit mesnetli kare plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş gerilmeleri ve deformasyonları

İntegrasyon nokta sayısı		Destek Alanı Büyüklüğü					Analitik Sonuç [3]
		2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	
w	4x4	1.018060	1.018196	1.019688	1.023319	1.020083	1.025
	5x5	1.029614	1.029748	1.031311	1.027814	1.031662	
	6x6	1.034525	1.034657	1.036268	1.039447	1.036585	
	7x7	1.036861	1.036993	1.038642	1.042689	1.038990	
σ_x	4x4	0.684840	0.684350	0.742126	1.031318	0.793138	0.7577
	5x5	0.706293	0.703096	0.761318	1.179623	0.810029	
	6x6	0.715605	0.711436	0.774377	1.071878	0.818204	
	7x7	0.720495	0.715566	0.779869	1.074010	0.823306	
σ_y	4x4	0.470685	0.473838	0.496144	0.516614	0.504414	0.5006
	5x5	0.482023	0.483861	0.506421	0.050887	0.512959	
	6x6	0.487094	0.488338	0.511745	0.496491	0.517001	
	7x7	0.489686	0.490620	0.514203	0.548167	0.518659	

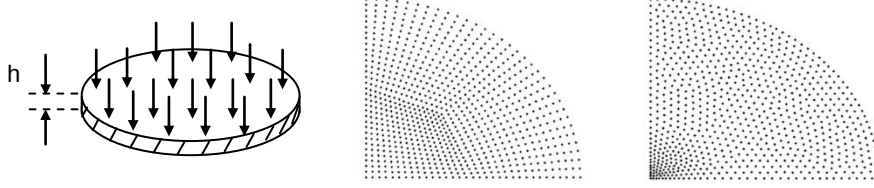
Çizelge 3. Dört kenarından basit mesnetli kare plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş gerilmeleri ve deformasyonları

İntegrasyon nokta sayısı		Destek Alanı Büyüklüğü					Analitik Sonuç [3]
		2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	
w	4x4	1.019920	1.026223	1.048636	1.082333	1.106673	1.025
	5x5	1.029806	1.031657	1.037584	1.047550	1.046373	
	6x6	1.034428	1.035136	1.037000	1.039707	1.040383	
	7x7	1.036571	1.036938	1.037498	1.039042	1.039573	
σ_x	4x4	0.385057	0.176058	0.265543	1.965286	4.420870	0.7577
	5x5	0.653946	0.802960	1.112629	0.890351	0.915897	
	6x6	0.562104	0.657339	0.650592	0.747966	0.759844	
	7x7	0.697511	0.673039	0.720202	0.740533	0.797101	
σ_y	4x4	0.354635	0.413216	0.764219	0.656152	1.008090	0.5006
	5x5	0.409185	0.443306	0.482042	0.536520	0.527752	
	6x6	0.458450	0.467977	0.481683	0.504436	0.507448	
	7x7	0.465185	0.477066	0.484947	0.484172	0.495763	

Örnek 2: Çevresi kenetlenmiş düzgün dağıtılmış yayılı yük altında dairesel plaka

Çevresi kenetlenmiş dairesel plakaya uygulanan düzgün dağıtılmış yayılı yük miktarı, $q = 1.0 \text{ Pa}$ olup, sahip olduğu yarıçap/uzunluk oranı 10'dur. Plaka 0° fiber yönelimine sahip tek tabakadır. Malzeme olarak Çizelge 1.'den **M2** seçilmiştir. Çözümlerde 817 düğüm noktası ve 768 arka plan hücresi kullanılmıştır. Simetriden dolayı, çözümlerde plakanın 1/4'ü

modellenmiştir. Çözümlerde kullanılan düzgün dağıtılmış ve düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları modelleri ve dairesel plaka Şekil 3.'de görülebilmektedir. Elde edilen deformasyon sonuçları Çizelge 4.'te yer almaktadır.



Şekil 3. Çevresi kenetlenmiş dairesel plaka ve EFGM yönteminde kullanılan modelleri

Destek alanı büyüklüğü için 2.5 ve arka plan hücrelerindeki integrasyon nokta sayısı için 5x5' te en yakın sonuçların elde edildiği Çizelge 4.'te görülmektedir. Fakat bütün sonuçlar kabul edilebilir düzeyde olup, hata oranları ihmal edilebilecek kadar azdır.

Çizelge 4. Çevresinden kenetlenmiş dairesel plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmış ve dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş deformasyonları

Düğüm noktası dizilimi	İntegrasyon nokta sayısı	Destek Alanı Büyüklüğü					Nguyen (2007)
		2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	
Düğümler dağıtılmış	4x4	0.137794	0.137846	0.138076	0.138326	0.138262	0.1394
	5x5	0.139775	0.139829	0.140068	0.140309	0.140265	
	6x6	0.140614	0.140670	0.140918	0.141166	0.141107	
	7x7	0.141012	0.141071	0.141318	0.141572	0.141516	
Düğümler dağıtılmamış	4x4	0.137799	0.137821	0.137872	0.137864	0.137917	0.1394
	5x5	0.139769	0.139784	0.139808	0.139822	0.139865	
	6x6	0.140608	0.140617	0.140636	0.140650	0.140676	
	7x7	0.140669	0.141018	0.141035	0.141047	0.141081	

SONUÇLAR

Bu çalışmada eleman bağımsız Galerkin yöntemindeki çözümü etkileyen seçilebilir parametrelerin tabakalı plakaların eğilme problemlerinde etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre; düzgün dağıtılmış ve dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılarak yapılan çözümlerde önemli bir fark gözlemlenmemiştir. İncelenen örnekler için destek alanı büyüklüğü ve arka plan hücrelerindeki integrasyon nokta sayıları için sırasıyla 3.0 ve 5x5 önerilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] A.H. Sheikh, S. Halder, D. Sengupta, A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes, *Composite Structures*. 55 (2002) 329-336.
- [2] A. Reis, E.L. Albuquerque, F.L. Torsani, L.P. Junior, P. Sollero, Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 35 (2010) 105-113.
- [3] J. Belinha, L. M. J. S. Dinis, Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method. *Computers and Structures*. 84 (2006) 1547-1559.
- [4] T. Belytschko, Meshless methods an overview and recent developments, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38 (1996) 1655-1679.
- [5] G.R. Liu, *Mesh Free Methods Moving Beyond The Finite Element Method*, Taylor and Francis Group, 2003.

- [6] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*. 37 (1981) 141-158.
- [7] A.G. Arani, Sh. Maghamikia, M. Mohammadimehr, A. Arefmanesh, Buckling analysis of laminated composite rectangular plates reinforced by SWCNTs using analytical and finite element methods. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 25 (2011) 809-820.
- [8] S.Sh. Ghorashi, S.R. Sabbagh-Yazdi, S. Mohammadi, Element free Galerkin method for crack analysis of orthotropic plates. *Computational Methods in Civil Engineering*. 1 (2010) 1-13.
- [9] P. Umasree, K. Bhaskar, Accurate flexural analysis of clamped moderately thick cross-ply rectangular plates by superposition of exact untruncated infinite series solutions, *Journal of Reinforced Plastics Composite*. 24(2002) 1723-1736.
- [10] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, & T. Tran-Cong, A simple and accurate four-node quadrilateral element using stabilized nodal integration for laminated plates, *CMC: Computers, Materials and Continua*. 6(3) (2007) 159-176.