

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIK TEKİL SİSTEMLERİN KARARLIĞI VE EKONOMİK
UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ
Uğur ŞAHİN**

Anabilim Dalı : Matematik Mühendisliği

Programı : Matematik Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ulviye BAŞER

TEMMUZ 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIK TEKİL SİSTEMLERİN KARARLIĞI VE EKONOMİK
UYGULAMALARI**

**DOKTORA TEZİ
Uğur ŞAHİN
(509022004)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31 Temmuz 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 04 Şubat 2010

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ulviye BAŞER (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA (İTÜ)
Prof. Dr. İbrahim EKSİN (İTÜ)
Doç. Dr. Alpaslan PARLAKÇI (İBÜ)
Doç. Dr. Nalan ANTAR (İTÜ)**

ŞUBAT 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmaya zemin hazırlayacak fikri sağlamasından ve ayrıca çalışmanın yönü hususunda yaptığı katkılardan dolayı hocam Prof. Dr Ulviye Başer'e ve çalışmam sırasında yararlandığım kaynakları hazırlayan bütün bilim adamlarına bu emeklerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tez çalışmam boyunca desteğini hep yanımda hissettiğim eşime ve yetişmemde fedakarlıklarını hiç bir şekilde esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Temmuz 2009

Uğur Şahin

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	v
KISALTMALAR	vii
ÇİZELGE LİSTESİ	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Gecikmeli Tekil Sistemler ve Gecikmeli T-S Bulanık Tekil Sistemler.....	3
1.2 Yapılan Çalışmalar	4
1.3 Tezin İçeriği.....	5
1.4 Notasyon.....	6
2. BULANIK KÜMELER VE BULANIK MODELLEME	7
2.1 Bulanık Kümeler.....	7
2.1.1 Bulanık kümeler üzerinde işlemler	8
2.1.2 Bulanık kümelerin diğer özellikleri.....	11
2.2 Bulanık Bağlıntılar.....	14
2.3 Bulanık Modelleme	17
2.3.1 Mamdani Model	18
2.3.2 T-S Model	19
2.4 Bulanık Modellerin Dizaynı	20
3. KARARLILIK ANALİZİ	25
3.1 Kararlılık ve Kararlılık Analizi.....	25
3.2 Tekil Sistemlerde Kararlılık	26
3.3 Bulanık Tekil Sistemlerde Kararlılık.....	27
3.4 DME-Doğrusal Matris Eşitsizlikleri.....	28
4. GECİKMELİ TEKİL SİSTEMLERDE KARARLILIK PROBLEMİ	31
4.1 Problem Tanımı	31
4.2 Gecikmeye Bağlı Gürbüz Kararlılık Ve Gürbüz Kararlılaştırma	33
4.3 Sayısal Örnekler	41
5. GECİKMELİ BULANIK TEKİL SİSTEMLERİN KARARLIĞI	49
5.1 Problemin Tanımı	49
5.2 Gecikmesi Zamanla Değişen Bulanık Tekil Sistemlerde Gecikmeye Bağlı Gürbüz Kararlılık ve Gürbüz Kararlılaştırma.....	53
5.3 Sayısal Örnekler	61
6. GARANTİLİ MALİYET KONTROLÜ	69
6.1 Problemin Tanımı	69
6.2 Sayısal Örnekler	74
7. SONUÇLAR	77
KAYNAKLAR	79
EKLER	87
ÖZGEÇMİŞ	91

KISALTMALAR

DME : Doğrusal Matris Eşitsizliği

BM : Bulanık Modelleme

BÇS : Bulanık Çıkarım Sistemi

T-S : Takagi-Sugeno

LKF : Lyapunov Krasovskii Fonksiyoneli

PDD : Paralel dağıtılmış dengeleme

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : 1. Örnekte verilen sistem için maksimum gecikme.....	40
karşılaştırma tablosu	
Çizelge 4.2 : 2. Örnek te verilen sistem için maksimum gecikme.....	41
karşılaştırma tablosu	
Çizelge 4.3 : 3. Örnek te verilen sistem için maksimum gecikme.....	41
karşılaştırma tablosu	
Çizelge 4.4 : 4. Örnek te verilen sistem için maksimum gecikme.....	42
karşılaştırma tablosu	
Çizelge 4.5 : 5. Örnek te verilen sistem için maksimum gecikme.....	43
karşılaştırma tablosu	
Çizelge 5.1 : Örnek 1 için $\bar{\sigma}$ değeri.....	59
Çizelge 5.2 : Örnek 2 için $\bar{\sigma}$ değerleri.....	60
Çizelge 5.3 : Örnek 3 için $\bar{\sigma}$ değerleri.....	60
Çizelge 6.1 : J_0 için performans tablosu.....	65

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : 3'e yakın sayılar kümesinin bulanık ve klasik kümeler ile gösterimi.....	8
Şekil 2.2 : A ve B bulanık kümelerinin a) Birleşim , b) Kesişim c) A tümleyen.....	10
kümelerinin üyelik fonksiyonları yardımıyla gösterimi	
Şekil 2.3 : Bulanık alt küme kavramının gösterimi ($A \subseteq B$).....	11
Şekil 2.4 : $X \subset R$ gerçel sayılar kümesi olması halinde farklı α değerlerine.....	13
karşı gelen α -kesim kümeleri	
Şekil 2.5 : A bulanık kümesi ve A'nın dayanak, öz ve sınır kümeleri.....	14
Şekil 2.6 : Konveks olmayan normal bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu.....	14
Şekil 2.7 : Bulanık çıkarım mekanizması.....	18
Şekil 2.8 : Mamdani tarzı bulanık çıkarım sistemi.....	19
Şekil 2.9 : T-S tarzı Bulanık çıkarım sistemi.....	20
Şekil 2.10 : Doğrusal olmayan terimlere ait alt ve üst sınır gösterimleri.....	22
Şekil 2.11 : Bulanık sisteme ait üyelik fonksiyonları.....	22
Şekil 4.1 : Örnek 1 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	44
Şekil 4.2 : Örnek 3 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	46
Şekil 4.3 : Örnek 4 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	48
Şekil 4.4 : Örnek 6 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	50
Şekil 5.1 : Örnek 1 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	64
Şekil 5.2 : Örnek 2 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	66
Şekil 5.3 : Örnek 3 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	68
Şekil 5.4 : Örnek 4 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.....	70

BULANIK TEKİL SİSTEMLERİN KARARLILIĞI VE EKONOMİK UYGULAMALARI

ÖZET

Sistem modelleme mühendislik ve diğer alanlarda oldukça önemli yer tutan bir konudur. Geleneksel matematiksel modelleme yöntemlerinin başlıca eksiklikleri doğrusal olmayan durumlarda ve yeterli veya kesin bilginin olmadığı belirsiz olgularla karşılaşıldığında yetersiz kalmalarıdır. Sözü edilen problemleri çözebilmek için önerilen bulanık modelleme yöntemleri ise belirsiz bilgiyi ifade etmede oldukça başarılı araçlar sunan ve hesaplama düzeyinde ise çok geniş bir sınıf üzerinde doğrusal olmayan sistemlere istenilen doğruluk düzeyinde yaklaşımlar sağlayan esnek matematiksel araçlardır. Diğer taraftan, fiziksel ya da mühendislik süreçlerinin bir çoğunda genellikle sistemlerin o andaki durumlarına bağlı olduğu kadar iletim, taşıma durumu ve hesaplama zamanı gibi problemlerden ötürü geçmişe bağlı durumlarını da göz önünde bulundurmaları gerekmektedir. Gecikme, incelenen sisteme göre sabit veya zaman değişkenli olabilir ve sistem analizi, kontrolör dizaynı gibi konuları daha karmaşık hale getirmektedir. Herhangi bir dinamik sistemde zaman gecikmesinin varlığı sistemde kararsızlık ve performans düşüklüğüne yol açabilir. Bu yüzden bu tip sistemlerin kararlılık ve performans analizleri teorik ve pratik açıdan önem kazanmıştır. Tekil sistemler daha genel bir yapıda olduklarından ötürü fiziksel sistemleri normal sistemlere göre daha iyi tanımlama kapasitesine sahiptirler. Temsil ettiği sistemin davranışını hem türevli hem de cebirsel bir denklem yardımıyla tanımlayan dinamik sistemlere tekil sistemler denir.

Bütün bu bahsedilen durumları içeren, yani zaman gecikmesi, tekillik ve belirsizlik gibi durumlara sahip sistemin kontrolü ve kararlılığının incelenmesi problemi sistemin dizaynı ve analizi açısından önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü kararlı olmayan bir sistem kullanışsız olduğu kadar aynı zamanda tehlikelidir. Literatürde bu durumların hepsini birden kapsayan çalışmalar oldukça sınırlıdır. Gecikmesi zamana bağlı bulanık tekil bir sistemin kararlılığını gecikmeye bağlı olarak inceleyen çalışmalar ise oldukça yetersiz sayıda olup bu yönde daha fazla iyileştirmelerin yapılabileceğini göstermektedir.

Bu durumlar göz önünü alınarak, bu tez çalışmasında gecikmesi zamanla değişen tekil bir sistemin ve yine gecikmesi zamanla değişen Takagi-Sugeno (T-S) tipi bulanık tekil bir modelle temsil edilen bir sistemin kararlılık ve kararlılaştırma koşulları tekil sistemler için uygun olan bir Lyapunov Krasovskii fonksiyoneli tanımlanarak gecikmeye bağlı olarak yapılan çalışmalardan daha yüksek bir gecikme sınırı elde edecek şekilde geliştirilmiştir. Bulanık tekil sistemin kararlılaştırması için paralel dağıtılmış dengeleyici (PDD) yöntemi kullanılarak durum geribeslemeli denetim kuralı tanımlanmıştır. Yine sistem kontrol parametrelili belirsizlik içermesi durumunda gürbüz kararlılık ve gürbüz kararlılaştırma problemleri hem tekil sistemler hem de bulanık tekil sistemler için ortaya konmuştur. Bütün sonuçlar Doğrusal Matris Eşitsizliği (DME) yardımıyla sunulmuştur.

Gecikmeli sistemler için kararlılık problemi gecikmeden bağımsız veya gecikmeye bağlı olarak iki açıdan incelenmektedir. Gecikmeden bağımsız sonuçlar bütün gecikme değerleri için sistemi kararlı kılarken, gecikmeye bağlı durumlarda gecikmenin bazı değerleri için sistem kararlı diğer değerler için ise kararsız kalmaktadır. Buna rağmen

gecikmeye bağı olan sonuçlar özellikle gecikmenin nisbeten daha küçük olduğu durumlarda daha esnek bir yapıdadırlar. Yapılan çalışmada bütün sonuçlar gecikmeye bağı olarak elde edilmiş olup herhangi bir model dönüşümü ve sınırlandırma tekniğı kullanılmamıştır. Bu tür teknikler kararlılık analizini kötü yönde etkileyen durumlar oluşturduğu için tercih edilmemiştir. Sistem performansı garantili maliyet hesabı yöntemiyle ölçülerek kararlılık analizleri Takagi-Sugeno tarzı bulanık tekil sistem için gecikmeye bağı olarak ortaya konmuştur.

Çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm konuyla ilgili tanıtıcı bilgilerle birlikte daha önce yapılan çalışmaları özetlemektedir. İkinci bölüm bulanık küme teorisi ve bulanık modelleme ile ilgili çalışmada kullanılacak olan bilgileri sunmaktadır. Üçüncü bölümde ise tekil ve bulanık tekil sistemlerde kararlılık ve kararlılaştırma problemi tanıtılmaya çalışılacaktır. Gecikmesi zamana bağı tekil sistemlere ait kararlılık ve durum geri beslemeli kararlılaştırma problemi dördüncü bölümde ele alınmıştır. Aynı şekilde Takagi-Sugeno tarzı gecikmesi zamana bağı bulanık tekil bir sistemin kararlılık ve kararlılaştırma analizi beşinci bölümde ve garantili maliyet kontrolüne ilişkin inceleme ise altıncı bölümde yer almaktadır. Son bölüm ise sonuçların tartışıldığı değerlendirme bölümüdür.

Ortaya konulan bütün sonuçlar Lyapunov-Krasovskii Teoremi ile gecikmeye bağı olarak Doğrusal Matris Eşitsizlikleri ile ifade edilmiştir. Sisteme ait kararlılık çözümleri DME araç kutusu bulunan Matlab gibi programlarda kolaylıkla bulunabilir. Her bölümde elde edilen teorik sonuçlar örneklendirilerek yapılan çalışmalarla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar varolan çalışmalarla karşılaştırıldığında geliştirilen yöntemin diğerlerinden daha iyi gecikme sonuçlarıyla sistemin kararlılığını sağladığını söylemek mümkündür.

STABILITY OF FUZZY DESCRIPTOR SYSTEM AND ECONOMICAL APPLICATION

SUMMARY

Developing mathematical models of real systems is a central topic in many disciplines of engineering and science. Traditional mathematical modelling techniques aren't be able to cope with systems sufficiently which have problems due to nonlinearities and lack of precise knowledge about these systems. On the other hand, fuzzy models can be seen as logical models and allows the use of information expressed in the imprecise form. At the computation level, fuzzy models can be regarded as flexible mathematical structures that can approximate a large class of complex nonlinear systems to a desired degree of accuracy. In modelling of physical and engineering processes it is often necessary to take into account also the presence of time-delays due to transmission and transport phenomena or even due to computation time. The presence of delays makes system analysis and control design much more complicated and generally regarded as a main source of instability and poor performance. This allows the implementation of more sophisticated and effective control strategies. Descriptor systems describe physical systems better than regular ones. Descriptor systems are also referred to as singular systems, implicit systems, generalized state space systems, differential-algebraic systems, or semistate systems whose behaviors are described by both differential equations (or difference equations) and algebraic equations. Such systems can preserve the structure of practical systems and have extensive applications in power systems, robotic systems and networks.

In this study, the stability and the stabilization conditions of the fuzzy and nonfuzzy descriptor system with time varying delay are obtained by defining suitable Lyapunov Krasovskii Functional and a delay dependent stability criterion is given in such a way which is better than the previous results in the literature. The considered problem is to design a state feedback controller such that the closed-loop system is robustly stable. To stabilize the fuzzy descriptor system, a state feedback controller rule is defined by using Parallel Distributed Compensation (PDC) method. In the case of having uncertainty parameters, robust stability and robust stabilization problems are solved for fuzzy and nonfuzzy case. All of the results are presented in terms of Linear Matrix Inequality (LMI) form.

The stability issue of the delay systems can be classified into two types: delay-independent stabilization and delay dependent stabilization. While the delay-independent stabilization result stabilizes the studied system for all delay values, in the delay-dependent case the delay has an upper bound. However, in general, the delay-independent case is more conservative than the delay-dependent case, especially when the time delay is comparatively small. In this thesis, all the developed results are obtained as a delay-dependent type and they can also be reduced to the delay independent case. An improved delay-dependent sufficient condition for the existence of a state feedback controller guaranteeing that the closed-loop dynamics is regular, impulse free and stable is proposed without using model transformation and any bounding techniques. These techniques are not preferred here because they cause a more

conservative result on the upper bound of delay. Besides that the guaranteed cost analysis is performed and stability conditions for T-S type fuzzy descriptor system are developed based on the delay-dependent stability approach.

This thesis is organized as follows; Section I gives the preliminaries and the problem formulation. A summary that belongs to other studies in the literature is also given in this section. Section II explains the basics of the fuzzy set theory and the fuzzy modelling principle. Section III establishes the stability analysis of the fuzzy and the non-fuzzy descriptor systems. Section IV presents the stability and the stabilization results for the considered nonfuzzy descriptor systems with time varying delay. The stability analysis of the fuzzy case is introduced in Section V and guaranteed cost issue is investigated in Section VI. Finally, the evaluation of the thesis is argued in Section VII.

All the developed results are in the LMI framework which makes them interesting since the solutions are easily obtained using existing powerful tools like the LMI toolbox of Matlab or any equivalent tool. Numerical examples are solved to show the usefulness and validness of the theoretical results and compared with other studies in the literature.

1. GİRİŞ

Sistem modelleme mühendislik ve diğer alanlarda oldukça önemli yer tutan bir konudur. Geleneksel sistem modelleme yöntemleri sistemi belirleyen niceliklerin kesin ve tam bir şekilde tanımlanmasına bağlı matematiksel araçlar üzerine kurulmuştur. Örneğin diferansiyel denklemler, cebirsel veya fark denklemleri bunlardan bazılarıdır. Ayrıca, modelin pratik düzeyde kullanılabilir olması için çok karmaşık olmaması ve sistemi yeterince temsil edemeyecek kadar da çok basit olmaması gerekir. Geleneksel matematiksel modelleme yöntemlerinin başlıca eksiklikleri doğrusal olmayan durumları ve yeterli veya kesin bilginin olmadığı belirsiz olguları çözmede yetersiz kalmalarıdır.

Sözü edilen problemler için önerilen ve Zadeh'in 1965 te [1] yapılan bulanık küme teorisi çalışmasına dayalı bulanık modelleme yöntemi ise belirsiz bilgiyi ifade etmede oldukça başarılı araçlar sunar. Bulanık modeller sistemi belirleyen değişkenler arasında niteliksel bağlar kurabilmek için "Eğer..ise.." tarzı kural tabanları kurmak yoluyla gerçekleştirilir. Bu yapı doğal dilde var olan ifade tarzları içindeki bilginin kullanımına olanak verdiği gibi modelin analiz ve yorumlanmasına açıklık kazandırır. Doğrusal olmayan süreçler doğrusal alt süreçlere ayrılarak kurallar içinde değerlendirilir. Hesaplama düzeyinde ise çok geniş bir sınıf üzerinde doğrusal olmayan sistemlere istenilen doğruluk düzeyinde yaklaşımlar sağlayan esnek matematiksel araçlardır[2, 3].

Diğer taraftan, fiziksel ya da mühendislik süreçlerinin bir çoğu genellikle sistemlerin o andaki durumlarına bağlı olduğu kadar iletim, taşıma durumu ve hesaplama zamanı gibi problemlerden ötürü geçmişe bağlı durumlarını da göz önünde bulundurmaktadır. Dış etkenlere bağlı olan sistemler ise anlık cevap veremezler ve yine bunun gibi biyolojik süreçlerde de sistemin gelecek durumu ile geçmiş durumunun birbirinden bağımsızlığı kabulünü yaparak sadece sistemin şu anki durumu üzerinden değerlendirme yapılması yetersizdir. Böylesi durumlarda gecikme zamanı dediğimiz durum ortaya çıkar ve bu sistemler zaman gecikmeli sistemler olarak adlandırılırlar. Zaman gecikmeli sistemlere örnek olarak iletişim ağları, ısı dönüştürücüleri, sayısal hesaplama gerektiren bilgisayar kontrollü sistemler, biyolojik sistemler, yapay ağlar, kimyasal reaktörler verilebilir. Gecikme incelenen sisteme göre sabit veya zaman değişkenli olabilir ve sistem analizi, kontrolör dizaynı gibi konuları daha karmaşık hale

getirirler. Herhangi bir dinamik sistemde zaman gecikmesinin varlığı sistemde kararsızlık ve performans düşüklüğüne yol açabilir. Bu yüzden bu tip sistemlerin kararlılık ve performans analizleri teorik ve pratik açıdan önem kazanmıştır[4-6].

Tekil sistemler ise fiziksel sistemleri normal sistemlere göre daha iyi tanımlama kapasitesine sahiptirler. Sistemlerin yapısını koruyan tekil sistemlerin güç sistemleri, robotik, ağlar, devreler, ekonomi gibi değişik alanlarda geniş uygulama alanları vardır. Temsil ettiği sistemin davranışını hem türevli hem de cebirsel bir denklem yardımıyla tanımlayan dinamik sistemlere tekil sistemler denir. Tekil sistemler kapalı sistemler, genelleştirilmiş normal sistemler, türevli cebirsel denklemler veya yarı durum sistemleri olarak da adlandırılmaktadırlar. Normal sistemler üzerine yapılmış bir çok çalışma tekil sistemler üzerine de genişletilmiştir [7, 8].

Bütün bu bahsedilen durumları içeren, yani zaman gecikmesi, tekillik ve belirsizlik gibi durumlara sahip sistemin kontrolü ve kararlılığının incelenmesi problemi sistemin dizaynı ve analizi açısından önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü kararlı olmayan bir sistem kullanışsız olduğu kadar aynı zamanda tehlikelidir.

Bu durumlar göz önüne alınarak, bu tez çalışmasında gecikmesi zamanla değişen tekil bir sistemin ve yine gecikmesi zamanla değişen Takagi-Sugeno (T-S) tipi bulanık tekil bir modelle temsil edilen bir sistemin kararlılık ve kararlılaştırma koşulları tekil sistemler için uygun olan bir Lyapunov Krasovskii fonksiyoneli tanımlanarak gecikmeye bağlı olarak yapılan çalışmalardan daha yüksek bir gecikme sınırı elde edecek şekilde geliştirilmiştir. Bulanık tekil sistemin kararlılaştırması için paralel dağıtılmış dengeleyici (PDD) yöntemi kullanılarak durum geribeslemeli denetim kuralı tanımlanmıştır. Yine sistem kontrol parametrelili belirsizlik içermesi durumunda gürbüz kararlılık ve gürbüz kararlılaştırma problemleri hem tekil sistemler hem de bulanık tekil sistemler için ortaya konmuştur. Bütün sonuçlar Doğrusal Matris Eşitsizliği (DME) yardımıyla sunulmuştur.

Gecikmeli sistemler için kararlılık problemi gecikmeden bağımsız veya gecikmeye bağlı olarak iki açıdan incelenmektedir. Gecikmeden bağımsız sonuçlar bütün gecikme değerleri için sistemi kararlı kılarken, gecikmeye bağlı durumlarda gecikmenin bazı değerleri için sistem kararlı diğer değerleri için ise kararsız kalmaktadır. Yapılan çalışmada bütün sonuçlar gecikmeye bağlı olarak elde edilmiş olup çalışmaya özgün olarak herhangi bir model dönüşümü ve sınırlandırma tekniği kullanılmamıştır. Bu tür teknikler kararlılık analizini kötü yönde etkileyen durumlar oluşturduğu için tercih edilmemiştir. Bunların yanı sıra, sistem performansı garantili maliyet hesabı yöntemiyle

ölçülerek kararlılık analizleri Takagi-Sugeno tarzı bulanık tekil sistem için gecikmeye bağlı olarak ortaya konmuştur.

1.1 Gecikmeli Tekil Sistemler ve Gecikmeli T-S Bulanık Tekil Sistemler

$x(t) \in R^n$ durum vektörü, $u(t) \in R^m$ giriş kontrol vektörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} (\Sigma) : \quad E\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t)) + Bu(t) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\bar{\sigma}, 0] \end{aligned} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan sisteme *gecikmeli tekil sistemler* denir. Burada $E \in R^{n \times n}$ tekil ve A, A_d, B uygun boyutlu sabit sistem matrisleridir ve gecikme fonksiyonu $\sigma(t)$;

$$0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} \text{ and } \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$$

şartlarını sağlar.

Doğrusal olmayan gecikmesi zamana bağlı bir sistem T-S tipi bulanık bir model yardımıyla aşağıdaki gibi temsil edilebilir.

$$\begin{aligned} (\Sigma) : \text{Kural } i : \\ \text{Eğer } \theta_1(t) \text{ } M_{i1} \text{ ve...ve } \theta_g(t) \text{ } M_{ig} \\ \text{İSE} \left\{ \begin{aligned} E_i \dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{di} x(t - \sigma(t)) + B_i u(t) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\bar{\sigma}, 0] \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Burada $i \in S = \{1, 2, \dots, r\}$ olmak üzere r kural sayısını, M_{ij} bulanık kümeleri, $\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_g(t)$ öncüllere ait değişkenleri, $x(t) \in R^n$ durum vektörünü, $u(t) \in R^m$ giriş vektörünü göstermektedir. Yine, burada $E_i \in R^{n \times n}$ tekil ve A_i, A_{di}, B_i uygun boyutlu sabit sistem matrisleridir. Durum gecikmesi olarak alınan $\sigma(t)$ aşağıdaki koşulları sağlayan zamana bağlı türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} \text{ ve } \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1 \quad (1.3)$$

Böyle sistemlere *gecikmeli bulanık tekil sistemler* denir.

1.2 Yapılan Çalışmalar

Gecikmeli tekil sistemlerin kararlılığı incelemeleri iki yönlü olarak sürmektedir. Yapılan çalışmalarda sonuçlar gecikmeye bağlı ve gecikmeden bağımsız olarak ortaya konmaktadır. Gecikmeye bağlı olmayan kararlılık çalışmalarında gecikme zamanının bütün değerleri için kararlılık koşulları sağlansa dahi kararlılık şartları gecikmeye bağlı olan çalışmalardan daha korumacı bir durum oluşturmaktadırlar. Bu durum sistem analizi açısından istenmeyen bir konudur.

Tekil sistemlerin kararlılığının incelenmesi problemi ise kararlılık analizinin yanı sıra regülerlik ve etkiden bağımsızlık özelliklerinin de incelenmesini gerektirdiğinden normal sistemlere göre daha karmaşık bir yapıdadır. Lyapunov anlamında kararlılık incelemesi için geliştirilen teknikler ve kararlılık koşullarının Doğrusal Matris Eşitsizlikleri (DME) ile incelenmesi kararlılık konusunda hem tekil hem de normal sistemler için oldukça geniş uygulama alanı oluşturmuştur. 80 ve 90 lı yıllarda tekil olmayan sistemlerdeki bir çok kavram ve yapı tekil sistemler için de genişletilme olanağı bulmuştur [7-11].

Gecikmeli tekil sistemlerin kararlılığı gecikmeden bağımsız olarak gecikme sabit olduğu durumda incelenmiştir [10, 12]. Gecikmeye bağlı ve sabit gecikmeli tekil bir sistemin kararlılık problemi için yeter koşullar DME'ler ile [13, 14, 16, 21] çalışmalarında verilmiştir.

Sistemin kontrol girdisi ile kararlı hale getirilmesi problemi kararlılaştırma problemi olarak adlandırılır. Kontrol girdisi durum vektörüne bağlı olduğu durumda durum geri beslemeli kontrol problemi ortaya çıkar. Sabit gecikmeli tekil sistemlerde gecikmeden bağımsız olarak durum geri beslemeli kontrol problemi [10, 12]'de, gecikmeye bağlı olarak ise [15, 19, 23, 17, 21]' de ele alınmıştır.

Sabit gecikmeli tekil sistemler için gecikmeden bağımsız gürbüz kararlılık koşulları [21, 22, 10, 12] de, gecikmeye bağlı olarak ise [19, 23, 17, 18]'de verilmiştir.

Bulanık tekil sistemler için kararlılık çalışmalarının temelleri [24, 25] 'de verilen tanımlar ile atılmıştır. Bu çalışmalarda T-S tipi bulanık tekil bir sistemin tanımı verilerek kararlılık ve kararlılaştırma problemleri için yeter koşullar üretilmiştir. Sonrasında, gecikmesiz sistemler için gürbüz kararlılık ve H_∞ problemleri, sırasıyla [26, 27]'de verilmiştir.

Durum gecikmeli bulanık tekil sistemlerin kararlılığı [28, 29 ve 33]'te incelenmiştir. Bu tip sistemlerde gecikmeye bağlı yeter koşullar ise [31, 34] deki çalışmalarla 2009 yılında verilmiştir.

Durum geri beslemeli kontrolör tasarımı gecikmesi sabit olmayan bulanık bir tekil sistem için gecikmeden bağımsız olarak [32, 28, 30, 33]'te, gecikmeye bağlı olarak ise [29, 34] de incelenmiştir.

Belirsiz parametreler içeren sistemler için gürbüz kararlılık problemi yine gecikmeden bağımsız olarak [32, 29, 30] ile, gecikmeye bağlı yeter koşullar ise [31] ile verilmiştir. [60, 61, 62]'de tekil olmayan gecikmeli sistemler için yapılan çalışmalar içindedir.

1.3 Tezin İçeriği

Bu tez çalışmasında hem bulanık olmayan tekil sistemler hem de bulanık tekil sistemler için gecikme zamanla değişen yapıda alınmış ve bütün sonuçlar durum gecikmesine ve gecikmenin türevinin üst sınırına bağlı olarak elde edilmiştir. Ayrıca her sistem için durum geri beslemeli kontrolör ve gürbüz kontrolör tasarımları gerçekleştirilerek kararlılık koşulları DME'ler cinsinden verilmiştir. Elde edilen sonuçların daha önce yapılan çalışmalardan farkı aşağıda belirtilmiştir.

Bulanık olmayan tekil sistemler için incelediğimiz bütün sonuçlar gecikmesi sabit olan çalışmalar olup gecikmesi zamanla değişen bir çalışmaya rastlanılamamıştır. Bu tez çalışmasında ise gecikme zamanla değişen yapıda alınmıştır. Gecikme fonksiyonunun $\sigma(t) = \sigma$ olarak değiştirilmesi durumunda gecikmesi sabit olan bir sisteme indirgenmiş olur. [10, 12] de verilen sonuçlar gecikmeden bağımsızdır. Gecikmeden bağımsız olan kararlılık koşulları gecikmeye bağımlı olanlara göre daha kısıtlı bir yapıdadır ve esnekliği daha az sonuçlar verirler. Bu durum dördüncü bölümde gecikmeden bağımsız olan yapılar için kararlılığını sağlayamayan fakat gecikmeye bağımlı durumlarda çözülebilen bir sistem ile örneklendirilmiştir.

[13] numaralı çalışmanın sonuçları gecikmeye bağlı olmakla birlikte gürbüz kararlılık koşulları incelenmemiş ve DME sayısını artıracak ek koşullar türetilmiştir. [16, 19] numaralı çalışmalar da yine gecikmeye bağlı sonuçlar olmakla birlikte gecikmesi sabit olan sistemler için kararlılık koşulları geliştirmişlerdir. [19] numaralı çalışmada genişletilmiş sistem matrislerinin kullanılması çözümlerin esnekliğini azaltan bir yapıdadır. Yine [13] numaralı çalışmada olduğu gibi ek koşullar DME sayısını artırmakla birlikte kullanılan sınırlandırma tekniği sonuçlar gecikmeden bağımsız

olmasına rağmen sistemin esnekliği üzerinde ikinci bir sınırlandırma oluşturmaktadır. [16] numaralı çalışma kararlılaştırma için herhangi bir sonuç vermemiştir. Tekil sistemler için ortaya konulan dördüncü bölümdeki sonuçlar da ise herhangi bir model dönüşümü ve sınırlandırma tekniğinin kullanılmaması ve bunlardan doğacak olan ek koşulların bulunmaması esnekliği artırıcı yönde olan durumlardır ve bölüm sonunda ortaya konan karşılaştırmalı örnekler bu durumu açıkça ortaya koymaktadır. Fakat burada geliştirilen DME yapısı dördüncü bölümde verilen DME yapısıyla oldukça benzer olmasına rağmen örnek sistemler üzerinde iki çözüm arasında farklılıklar görülmektedir.

Bulanık tekil sistemler üzerine yapılan çalışmalar içerisinde son zamanlarda yapılan [31, 34] dışında kalan diğer bütün çalışmalar kararlılık koşullarını gecikmeden bağımsız olarak geliştirmiş olmalarının yanında sabit olmayan zamana bağlı gecikme türü üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmaların her ikisinde de model dönüşümü kullanılarak sistemin gecikme esnekliği sınırlandırılmış ve yine sınırlandırma tekniklerinin kullanılması ek koşullar getirerek DME yükünü artıran sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Beşinci bölümde gecikmeli bulanık tekil sistemler için elde edilen sonuçlar ise model dönüşümü ve sınırlandırma tekniklerinden bağımsız olarak elde edilmişlerdir. Bölüm sonundaki örneklerden yapılan çalışmalarla aralarındaki farklar gözlenebilir.

Altıncı bölümde yapılan garantili maliyet analizi gecikmeye bağlı olarak elde edilen sonuçlarla birlikte gecikmesi zamana bağlı bulanık bir tekil sistem için geliştirilmiştir. [31]'nolu çalışma dışında bu konuda henüz ortaya konmuş bir sonuca rastlanılmamıştır. Bu bölümde yapılan performans analizinin garantili maliyet kontrolör tasarımı için [31] numaralı çalışmadan daha iyi bir alternatif oluşturduğunu garantili maliyet değerinin üst sınırı olan J_0 için bulunan değerden gözlemlemek mümkündür.

1.4 Notasyon

R^n , n boyutlu doğrusal vektör uzayını, $R^{n \times m}$ ise $n \times m$ boyutlu gerçel matrislerin kümesini göstermektedir. Herhangi bir V matrisi için $V > 0$ ile pozitif belirlilik, $V < 0$ ise negatif belirlilik ifade etmektedir. Matrisler büyük harflerle gösterilirken vektör ve skalerler ise küçük harflerle gösterilmiştir. T ve -1 sırasıyla bir matrisin transpozunu ve tersini gösteren sembollerdir. “*” ise herhangi bir $A \in R^{n \times n}$ matrisinde simetrik pozisyonundaki transpozu alınmış elemanları göstermektedir.

2. BULANIK KÜMELER VE BULANIK MODELLEME

2.1 Bulanık Kümeler

Klasik küme yaklaşımına göre istediğimiz özelliğe sahip olan bir birey, eleman veya çalışma alanı içerisindeki ölçümler, tanımlanan kümeye ya aittirler veya değildirler. Bu tür kümeleri ifade etmek için özel bir fonksiyon tanımlanabilir ve bu fonksiyona karakteristik fonksiyon denilir. Karakteristik fonksiyon her bir elemana 1 ve 0 değerlerinden birini üyelik durumuna göre atayarak, evrensel küme üzerinde tanımlanan ve bizim ilgilendiğimiz özelliğe sahip olan elemanların oluşturduğu kümeyi belirler.

Örneğin; X evrensel kümesi üzerinde belirli bir özelliği taşıyan elemanları ayırarak oluşturduğumuz A kümesini;

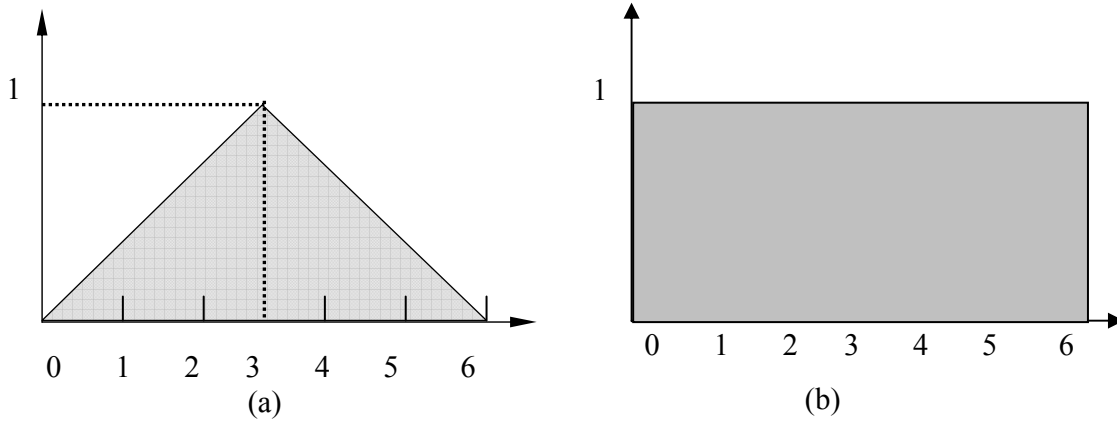
$$\forall x \in X, \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases} \quad (2.1)$$

karakteristik fonksiyon yardımıyla ifade edebiliriz. Fonksiyon A kümesine ait elemanlara 1 değerini, ait olmayan elemanlara ise 0 değerini atamaktadır. Fonksiyondan da görüldüğü üzere, klasik kümelerde bir eleman için üyelikten üye olmamaya geçiş çok kesindir ve iyi tanımlanmıştır. Fakat, bulanık kümeleri içeren bir evrensel küme içerisindeki elemanların üyelik geçişi derecelidir. Elemanların kümeye ait olma derecelerinden bahsetmek sözkonusudur. Bundan dolayı elemanın bu kümeye aitliği, belirsizliği ölçmeye yarayan bir fonksiyonla tanımlanır. Bu fonksiyona üyelik fonksiyonu ve bu fonksiyonun oluşturduğu kümeye, bulanık küme denir. Şekil 2.1 “3’e yakın sayılar” gibi muğlak bir kavramın bulanık ve normal kümeler üzerinden yorumlanışını vermektedir.

Tanım 2.1: X boş olmayan klasik anlamda bir küme olsun. X 'deki bir bulanık A kümesi

$$\forall x \in X \text{ için; } \mu_A: X \longrightarrow [0,1] \quad (2.2)$$

fonksiyonu ile verilir.



Şekil 2.1 : 3'e yakın sayılar kümesinin (a) bulanık ve (b) klasik kümeler ile gösterimi.

2.1.1 Bulanık kümeler üzerinde işlemler

Klasik kümeler üzerinde tanımlanan üç temel işlem olan tümleyen alma, birleşim ve kesişim işlemlerinin bulanık kümeler üzerine genişletilmesini birden fazla yolla yapmak mümkündür. Uygulama alanının getirdiği özelliklere göre yeni işlemlerin tanımlanabilmesi kapasitesi, bulanık kümeleri klasik kümelerden ayırteden önemli noktalardan biridir. Fakat, genelde standart bulanık küme işlemleri olarak adlandırılan özel bir genişletme işlemi, bulanık küme teorisinde daha ayrıcalıklı bir yer tutar.

X kümesi üzerinde A , B ve C bulanık kümeleri verilmiş olsun. $\forall x \in X$ için tümleyen, birleşme ve kesişme işlemleri standart olarak aşağıdaki gibi verilirler.

Tanım 2.2: X kümesi üzerinde tanımlı normal bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu yardımıyla;

$$\forall x \in X, \neg A(x) = 1 - A(x) \quad (2.3)$$

verilen yeni üyelik fonksiyonuna A bulanık kümesinin tümleyeni denir.

Tanım 2.3: X kümesi üzerinde tanımlı normal bulanık A ve B kümesi için standart birleşme ve kesişme işlemleri sırasıyla

$$\forall x \in X, (A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x) \quad (2.4)$$

$$\forall x \in X, (A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x) \quad (2.5)$$

ile tanımlanır.

Şekil 2.2 temel işlemlerin grafiksel gösterimini vermektedir. Klasik kümeler teorisinden bildiğimiz küme işlemlerinin özellikleri bulanık kümeler için de geçerlidir. İspatsız verilecek bu özellikler arasında çelişmezlik ilişkisi veya özellikler ortanın dışlanması olarak adlandırılan, üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesi bulanık küme teorisinin en önemli ayırt edici karakteristiğini ortaya koyarlar. Bu ilkeler bulanık kümeler için geçerli değildirler.

$$A \cup \neg A = X \quad (2.6)$$

$$A \cap \neg A = \emptyset \quad (2.7)$$

Yukarıda açıklanan iki özellik dışında, klasik kümeler için geçerli olan diğer özellikler bulanık kümeler için de geçerlidirler.

A, B ve C, X evrensel kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler olmak üzere;

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

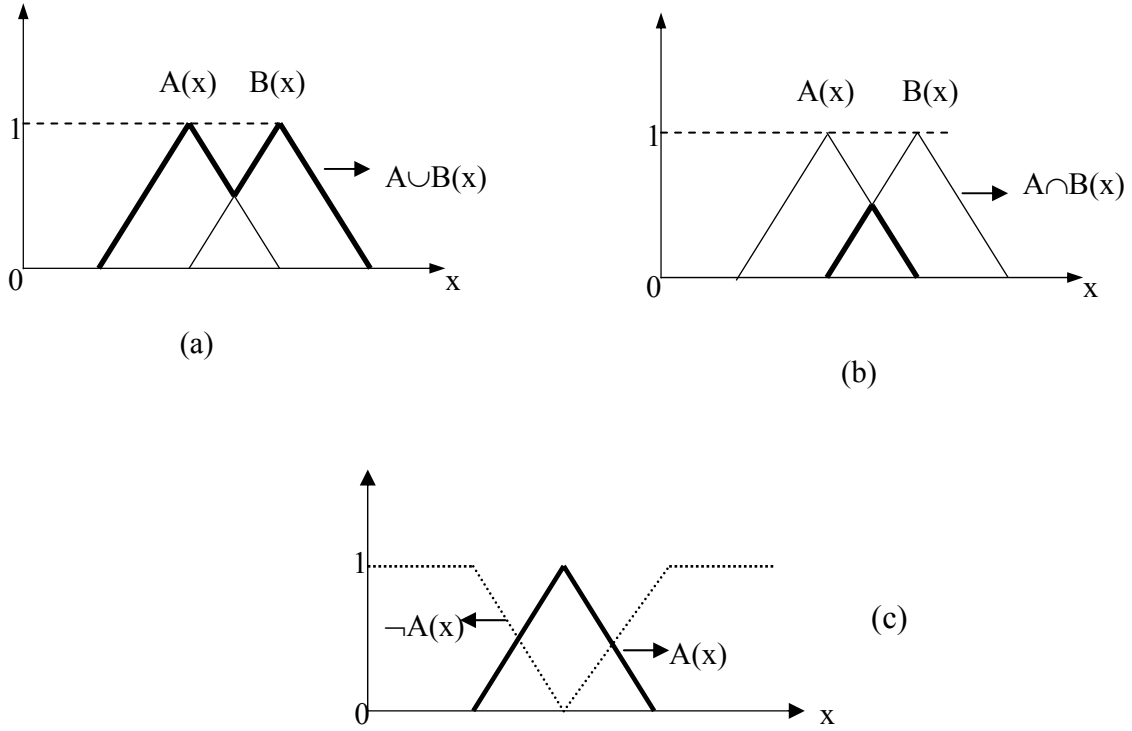
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap A = A, A \cup A = A, \neg(\neg A) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\left. \begin{array}{l} \neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B \\ \neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B \end{array} \right\} \text{De'Morgan kuralları}$$



Şekil 2.2 : A ve B bulanık kümelerinin a) Birleşim , b) Kesişim c) Atümleyen kümelerinin üyelik fonksiyonları yardımıyla gösterimi.

X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümeleri içine alan kümeye bulanık kuvvet kümesi denir ve $F(X)$ ile gösterilir. Verilen $A, B \in F(X)$ bulanık kümeleri için $A \subseteq B$ özelliği ancak ve ancak

$$A(x) \leq B(x), \forall x \in X \quad (2.8)$$

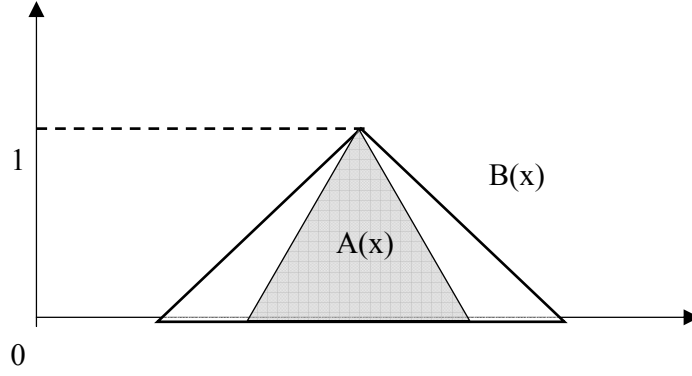
olması durumunda gerçekleşir. Yani, A'nın B kümesinin alt kümesi olması için, A'daki elemanlara karşı gelen bütün üyelik derecelerinin, B'deki üyelik derecelerinden küçük olması gerekli ve yeterlidir. Ayrıca bu durum geçerli olduğunda, standart küme işlemleri altında;

$$A \cup B = B, A \cap B = A \quad (2.9)$$

sağlanır. Şekil 2.3 bulanık bir küme ile alt küme arasındaki üyelik fonksiyonu ilişkisini göstermektedir.

Sonlu veya sayılabilir bir evrensel X kümesinin üzerinde tanımlı A bulanık kümesinin gösterimi sırasıyla;

$$A = \left\{ \frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{A(x_n)}{x_n} \right\} \quad (2.10)$$



Şekil 2.3 : Bulanık alt küme kavramının gösterimi ($A \subseteq B$).

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A(x_i)}{x_i} \right\} \quad (2.11)$$

X evreni sayılamayan sayıda elemana sahipse bu durumda da;

$$A = \left\{ \int \frac{A(x)}{x} \right\} \quad (2.12)$$

şeklindedir.

2.1.2 Bulanık kümelerin diğer özellikleri

Bu bölümde bulanık kümeleri ilgilendiren diğer basit kavramlar üzerinde durulacaktır. Bu kavramların en başında bulanık kümelerle klasik kümeler arasında ilişki kurmamızı sağlayan α -kesimi ve kuvvetli α -kesimi kavramı vardır.

Tanım 2.4. X klasik kümesi üzerinde tanımlı bulanık A kümesine ait

$${}^{\alpha}A = \{ x \mid A(x) \geq \alpha \}, \alpha \in [0,1] \quad (2.13)$$

$${}^{\alpha+}A = \{ x \mid A(x) > \alpha \}, \alpha \in [0,1] \quad (2.14)$$

kümelerine sırasıyla α -kesim ve kuvvetli α -kesim kümeleri denir.

Tanım 2.5. A bulanık kümesinin farklı α -kesimlerini temsil eden bütün α 'ların oluşturduğu kümeye A'nın düzey kümesi denir ve

$$\Lambda(A) = \{ \alpha \mid A(x) = \alpha, \exists x \in X \} \quad (2.15)$$

şeklinde verilir.

Tanım 2.6. A bulanık kümesinin dayanağı, X evrensel kümesinin A bulanık kümesi içerisinde üyelik derecesi 0 dan büyük bütün elemanlarının oluşturduğu kümedir. Dayanak kümesi α -kesimi yardımıyla

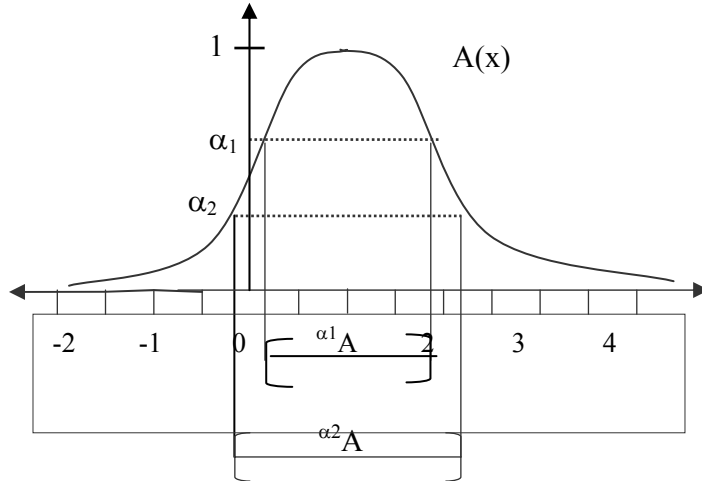
$${}^{0+}A = \text{day}(A) = \{ x \mid A(x) > 0 \} \quad (2.16)$$

olarak da yazılır.

Tanım 2.7. X klasik kümesi üzerinde tanımlı bulanık A kümesine ait,

$${}^1A = \text{öz}(A) = \{ x \mid A(x) = 1 \} \quad (2.17)$$

kümesine A'nın özü denir. Yani A bulanık kümesinin öz kümesi, üyelik dereceleri 1'e eşit olan elemanların oluşturduğu kümedir. A içerisinde üyelik derecesi 1'den büyük bir eleman olmadığından dolayı gösterim olarak 1A α -kesimi de seçilebilir.



Şekil 2.4 : $X \subset R$ gerçel sayılar kümesi olması halinde farklı α değerlerine karşı gelen α -kesim kümeleri.

Şekil 2.4 te farklı α değerlerine karşı gelen α -kesim kümeleri gösterilmiştir.

Tanım 2.8. A' 'nın 0 ile 1 arasında kalan üyelik derecelerini alan elemanların oluşturduğu kümeye de A' 'nın sınırı denir.

$$\text{Sınır}(A) = \{ x \mid 0 < A(x) < 1 \} \quad (2.18)$$

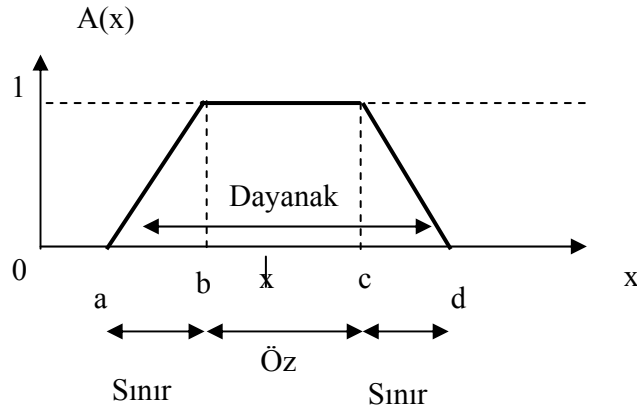
ile verilir.

Tanım 2.9. Üyelik derecelerinin en küçük üst sınırına, A 'nın yüksekliği denir ve formel olarak

$$y(A) = \sup_{x \in X} A(x) \quad (2.19)$$

şeklinde gösterilir.

Eğer A 'nın yüksekliği 1, yani $y(A)=1$ ise A ya *normal* bulanık küme, aksi takdirde normal olmayan bulanık küme denir. Normalleştirilmek istenilen bir bulanık küme, küme içerisindeki bütün üyelik derecelerinin $y(A)$ ya bölünmesiyle elde edilir. Şekil 2.5 bir normal bulanık kümenin bu kısımlarını göstermektedir.



Şekil 2.5 : A bulanık kümesi ve A'nın dayanak, öz ve sınır kümeleri.

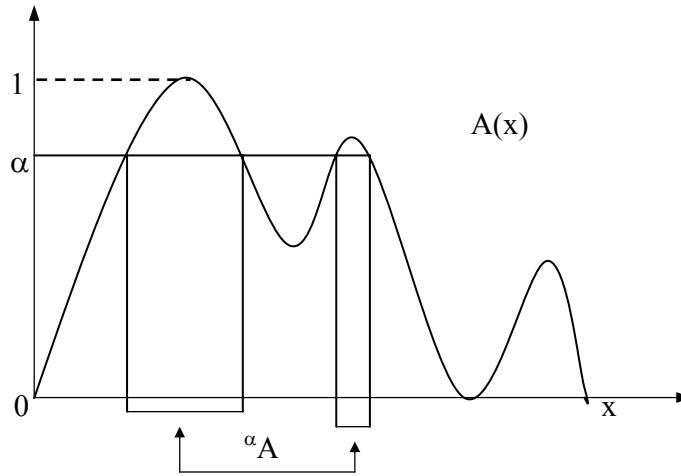
Bulanık kümelerin konvekslik şartı aşağıdaki eşitsizlikle belirlenir;

Tanım 2.10. $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere X üzerinde tanımlı A bulanık kümesinin elemanları

$$A(\lambda.x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2)) \quad (2.20)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda A bulanık kümesine konvekstir denir. (2.20)'de $x \in X$ ve $\lambda \in R$ arasındaki işlem, söz konusu doğrusal uzaydaki skalerle çarpma işlemidir. Bu özellik klasik kümelerin konvekslik kavramının bir genelleştirmesi olarak görülebilir.

Şekil 2.6 $X \subset \mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olması halinde konveks olmayan normal bir bulanık kümenin üyelik fonksiyonunu göstermektedir.



Şekil 2.6 : Konveks olmayan normal bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu.

2.2 Bulanık Bağıntılar

Klasik bağıntılar iki kümenin elemanları arasında belirlenen bir ilişkinin varlığını veya yokluğunu ortaya koyarlar. Bulanık bağıntılar ise bu ilişkinin kuvvetini veya derecesini ifade ederler. Genel olarak, bulanık bağıntılar kartezyen çarpım şeklindeki evrensel kümeler üzerinde tanımlı bulanık kümelerdir.

Klasik anlamda bir bağıntı X ve Y kümelerinin oluşturduğu kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi olarak;

$$R = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq X \times Y \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilir. Bir bağıntının elemanları, görüldüğü üzere ikililerden oluşmaktadır. Klasik bir bağıntıda klasik anlamda bir küme olduğundan dolayı, karakteristik fonksiyon yardımıyla ifade etmek mümkündür.

$X \times Y$ üstünde tanımlı bulanık bir bağıntı ise;

$$R = \{((x,y), R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y, R(x,y) \in [0,1]\} \subseteq X \times Y \times [0,1] \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanabilir. R bağıntısı içinde yer alan $R(x,y)$ fonksiyonu iki değişkenli bir üyelik fonksiyonudur ve üyelik derecesi x ile y arasındaki ilişkinin kuvveti olarak yorumlanabilir. Bulanık bağıntılar da bulanık kümelerde olduğu gibi üyelik fonksiyonları yardımıyla belirlenirler. Bulanık bağıntı kavramı her bir çifte belirli bir üyelik derecesi ataması yönünden, klasik bağıntı kavramıyla karşılaştırıldığında ilişkileri daha kuvvetli açıklama gücüne sahiptir.

Bağıntının üzerinde tanımlandığı küme sonlu olduğunda takdirde gösterim için bir matris yapısı kullanmak uygundur. Örneğin;

$$X=\{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \quad \text{ve} \quad Y=\{ y_1, y_2, \dots, y_m \} \text{ için}$$

$X \times Y$ üzerindeki bir bağıntı bu elemanlar arasındaki ilişkiyi gösterecek şekilde;

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ile verilir. Burada $i= 1 \dots n$ ve $j= 1 \dots m$ için her $r_{ij}= R(x_i, y_j)$ şeklinde tanımlıdır. Yani, i . satır ve j . sütundaki matris elemanına karşılık gelen r_{ij} , R bağıntısında (x_i, y_j) 'nin üyelik derecesi $R(x_i, y_j)$ 'yi ifade eder. Daha yüksek boyuttaki bağıntılar da aynı kural çerçevesinde tanımlanabilir.

Bulanık bağıntılar da birer bulanık küme olduğuna göre, onlar üzerinde de aynı işlemleri tanımlamak mümkündür. Fakat, bulanık bağıntılar üzerinde bunların yanısıra ters bağıntı ve bileşke gibi farklı işlemler de tanımlamak mümkündür.

R_1 ve R_2 , $A \times B$ üzerinde tanımlı iki bulanık bağıntı olmak üzere;

$$R_1 = \{ (x, y, R_1(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y, R_1(x, y) \in [0, 1] \} \quad (2.24)$$

$$R_2 = \{ (x, y, R_2(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y, R_2(x, y) \in [0, 1] \} \quad (2.25)$$

şeklinde verilmiş olsunlar. R_1 ve R_2 arasında yapılabilecek işlemler, yine onları belirleyen üyelik fonksiyonları aracılığıyla bulanık kümeler üzerindeki gibi yapılır.

Herhangi bir bağıntının tümleyeni yine onun üyelik fonksiyonunun değerlerinin 1 den çıkarılmasıyla elde edilir. Yani,

$$\neg R_1(x, y) = 1 - R_1(x, y) \quad (2.26)$$

$R_1 \cap R_2$ 'nin üyelik fonksiyonu ise yine üyeliklerin en küçüğü alınarak elde edilir.

$$R_1 \cap R_2(x, y) = \min (R_1(x, y), R_2(x, y)) \quad (2.27)$$

$R_1 \cup R_2$ 'nin üyelik fonksiyonu, üyeliklerin en büyüğünün seçilmesiyle oluşturulur;

$$R_1 \cup R_2(x, y) = \max (R_1(x, y), R_2(x, y)) \quad (2.28)$$

$R_1 \subseteq R_2$ olması ancak ve ancak

$$\forall (x, y) \in X \times Y \text{ için } R_1(x, y) \leq R_2(x, y) \quad (2.29)$$

eşitsizliğinin sağlanması ile gerçekleşir.

Yine $X \times Y$ üzerinde tanımlı olan bir bulanık bağıntının tersi ise $Y \times X$ üzerinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere;

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y) \quad (2.30)$$

eşitliği ile belirlenir.

İki bağıntı arasında bir bileşke işleminden söz etmek için, birinci bağıntının ikinci elemanlarının ait olduğu kümeyle, ikinci bağıntının birinci elemanlarının ait olduğu kümenin aynı olması gerekir. Bu durumda; R_1 , $X \times Y$ ve R_2 de $Y \times Z$ üzerinde tanımlı iki bulanık bağıntı ise

$$\mathfrak{R} = R_1 \circ R_2$$

bileşke işlemi $X \times Z$ kümesinin elemanlarından oluşmalıdır. $\mathfrak{R}$ bileşke bulanık bağıntısını temsil edecek üyelik fonksiyonu R_1 ve R_2 'nin üyelik fonksiyonları tarafından belirlenir. Formel olarak bileşke işlemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\mathfrak{R}(x,z) = (R_1 \circ R_2)(x,z) = \max_{y \in Y} \min [R_1(x,y), R_2(y,z)] \quad (2.31)$$

Yukarıda tanımlanan işlemlerden başka, bulanık bağıntılar bu işlemler arasında tanımlanan aşağıdaki özellikleri de sağlarlar,

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$$

$$R_3 \circ (R_1 \cup R_2) = (R_3 \circ R_1) \cup (R_3 \circ R_2)$$

$$R_3 \circ (R_1 \cap R_2) = (R_3 \circ R_1) \cap (R_3 \circ R_2)$$

$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$$

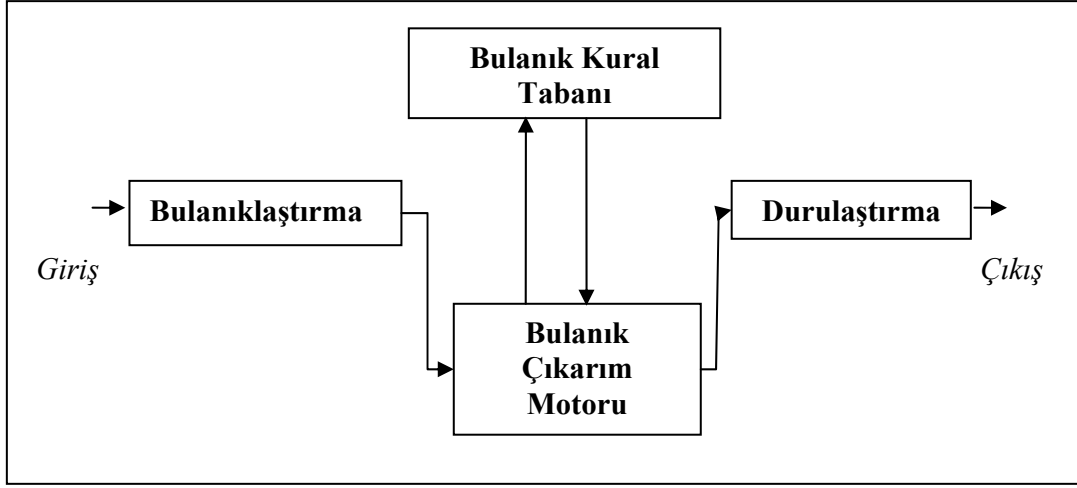
2.3 Bulanık Modelleme

Modelleme genel olarak bir sistemin doğasını ve davranışını uygun matematiksel araçlarla ifade etmek olarak tanımlanabilir. Sistemler matematiksel modellerin değişik türleri ile temsil edilebilirler. Örneğin diferansiyel denklemler, cebirsel veya fark denklemleri bunlardan bazılarıdır. Ayrıca, modelin pratik düzeyde kullanılabilir olması için çok karmaşık olmaması ve sistemi yeterince temsil edemeyecek kadar da çok basit olmaması gerekir. Geleneksel matematiksel modelleme yöntemlerinin başlıca eksiklikleri doğrusal olmayan durumlar, yeterli veya kesin bilginin olmadığı belirsiz olgularla başa çıkmada yetersiz kalmalarıdır.

Bulanık küme teorisi ise belirsiz bilgiyi ifade etmede oldukça başarılı araçlar sunar. Bulanık modeller sistemi belirleyen değişkenler arasında niteliksel bağlar kurabilmek için “Eğer..ise..” tarzı kural tabanları kurmak yoluyla gerçekleştirilir. Kural tabanı değişkenlere atanan üyelik fonksiyonlarının değişik tarzlarda bir araya getirilmesiyle oluşur. Bu yapı doğal dilde var olan ifade tarzları içindeki bilginin kullanımına olanak verdiği gibi modelin analiz ve yorumlanmasına açıklık kazandırır. Doğrusal olmayan süreçler doğrusal alt süreçlere ayrılarak kurallar içinde değerlendirilir. Hesaplama düzeyinde ise çok geniş bir sınıf üzerinde doğrusal olmayan sistemlere istenilen doğruluk düzeyinde yaklaşımlar sağlayan esnek matematiksel araçlardır [2]. Bulanık modelleme, bulanık çıkarım sistemi (BÇS), bulanık kontrol (BK), bulanık ilişkilendirme hafızası, bulanık sistem isimlendirmeleri aynı manayı ifade etmek için kullanılmaktadırlar.

Bulanık bir sistemin genel yapısı aşağıdaki Şekil 2.7 de ortaya konmuştur. Genel olarak sistem dört ana parçadan meydana gelmektedir; giriş değişkenlerine ait bulanık kümelerin belirlendiği bulanıklaştırılma aşaması ve sistemden elde edilecek sonucun pratik olarak kullanılabilir hale getirildiği durulaştırma süreci sistemin ilk ve son kısımlarıdır. Bunlar arasında ise sistemin genel davranışını belirleyen kural tabanı bulunmaktadır. Yine kural tabanının hemen altında bulunan bulanık çıkarım motoru da bulanık kurallar arasında nasıl işlem yapılacağını belirlendiği kısımdır.

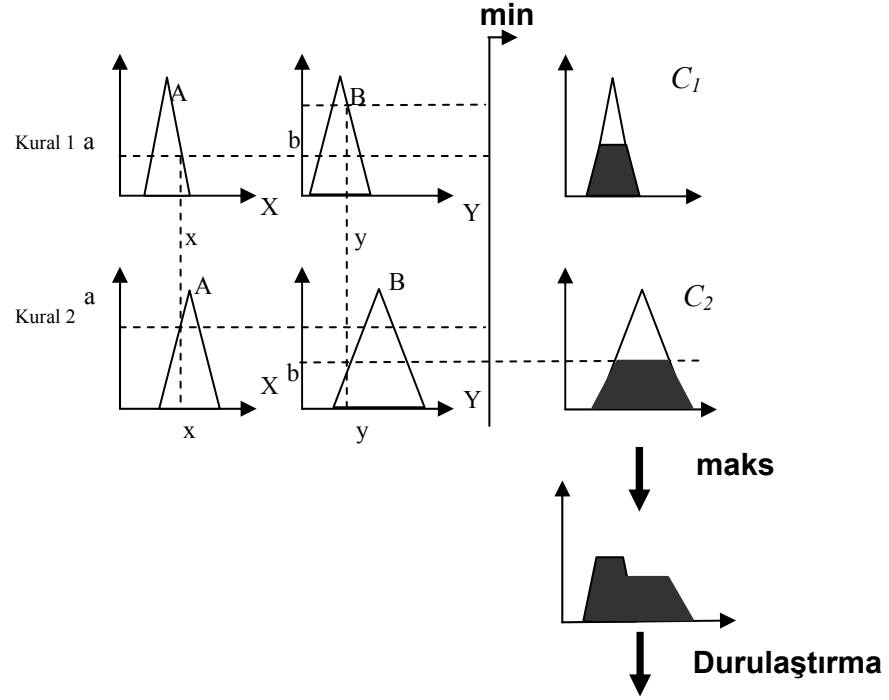
Kural tabanını oluşturan kuralların sonuç kısmına göre bulanık sistem yapılarını ikiye ayırmak mümkündür. Bunlardan ilki sonuç kısmını belirleyen çıkış değişkeninin de bulanık kümeden oluştuğu Mamdani tipi bulanık sistemler, diğeri ise sonucun girdi değişkenlerinin doğrusal bileşimlerinden oluştuğu Takagi-Sugeno (T-S) tarzı bulanık sistemlerdir.



Şekil 2.7 : Bulanık çıkarım sisteminin genel yapısı ve parçaları.

2.3.1 Mamdani Model

Kuralların öncül ve sonuç kısımlarının bulanık kümelerle ifade edildiği çıkarım modelidir. Tetiklenen kurallara ait öncül bulanık kümelerin istenen girdi değerleri için üyelik dereceleri belirlendikten sonra uygun ve genelde tercih edilen işlemcilerle sonuç bulanık kümesi üzerindeki etkileri hesaplanır. Her bir kurala ait sonuç kümeleri öncül kümelerinin kendileri üzerinde işlem gören matematiksel operatörler sayesinde yeni bulanık kümelerin ortaya çıkmasına sebep olurlar. Bunların birleşimi ile elde edilen en son küme üzerinden uygun bulunan durulaştırma işlemi sayesinde sisteme ait çıktı değeri hesaplanmış olur. Şekil 2.8 de iki kuralı bulunan bir sistemin Mamdani model üzerinden nasıl çıkarım yapabileceği gösterilmektedir.



Şekil 2.8 : Mamdani tarzı bulanık çıkarım sistemi.

2.3.2 T-S Model

Klasik EĞER-İSE kuralı yerine çıktı kısmında aşağıdaki tarzda bir yapı kullanılır;

$$\begin{aligned}
 R^l: & \text{ Eğer } x_1 \text{ } F_1^l \text{ ve } \dots \text{ ve } x_n \text{ } F_n^l, \\
 & \text{ İse } y^l = c_0^l + c_1^l x_1 + \dots + c_n^l x_n
 \end{aligned}
 \quad (2.32)$$

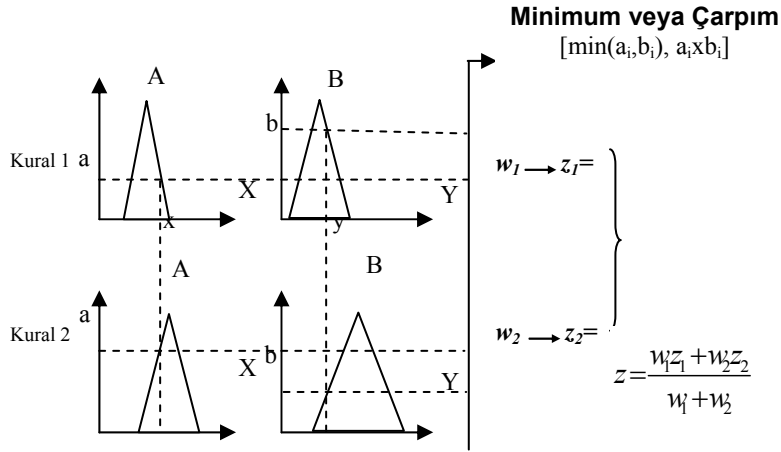
Burada F_i^l girdi değişkenlerine ait bulanık alt kümeleri, c_i çıktı fonksiyonunun gerçel değerli parametreleri, y^l ise $l = 1, 2, \dots, M$ olmak üzere R^l kuralına karşı gelen çıktı değerlerini göstermektedir. Görüldüğü üzere çıktı değeri girdi değerlerine bağlı bir fonksiyon olarak yazılmıştır. Gerçek değerli giriş vektörü $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ için, T-S tipi bulanık bir sistemin çıktısı her bir kuralın çıktısı üzerinden (2.33) formülünde verildiği üzere ağırlıklandırılmış ortalama ile hesaplanır.

$$Z(x) = \frac{\sum_{l=1}^M w^l z^l}{\sum_{l=1}^M w^l}
 \quad (2.33)$$

Burada w_i ler kuralların öncül kısmından elde edilen doğruluk değerleri olmak üzere (2.34) deki gibi hesaplanır.

$$w^j = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^j}(x_i) \quad (2.34)$$

$\mu_{F_i^j}(x_i)$ ise i . değişkene linci kuralda karşılık gelen üyelik fonksiyonunu göstermektedir. Bu tip bulanık sistemin avantajı parametre tahminini ve kural tabanının oluşturulmasını kolaylaştıran metodların kullanımında büyük kolaylıklar sağlamasıdır. Şekil 2.9 da iki girdisi bir çıktısı olan bir sistem için iki kural üzerinden T-S tipi bulanık bir sistemin nasıl işlediği gösterilmiştir.



Şekil 2.9 : T-S (Takagi-Sugeno) tarzı Bulanık çıkarım sistemi.

Her bir değişkene ait verilen değerler için karşılık gelen üyelik dereceleri bulunduğundan sonra w_1 ve w_2 ağırlıkları (2.34) eşitliğinde verildiği gibi hesaplanır. Bunlar her bir kuralın ağırlığı olarak kuralların çıktısında yer alan z_1 ve z_2 fonksiyonlarıyla birlikte ağırlıklandırılmış ortalaması alınarak en son çıktı değerine ulaşılır.

2.4 Bulanık Modellerin Dizaynı

Yukarıda anlatılan bulanık modelleme türlerinin her ikisinde de modelin kurulum aşamasında geçilmesi gereken süreç aynıdır. Başlangıçta giriş ve çıkış değişkenlerinin seçilmesi ile birlikte, bu değişkenlere ait üyelik fonksiyonlarının ve alt dilsel terimlerinin belirlenmesi işlemi yapılır. Modeli kurulacak sistemin fiziki yapısı kural tabanı

oluşturma sırasında kullanılabilecek ilk kaynaktır. Kural tabanı da elde edildikten sonra sistemin işletmesi için gerekli çıkarım kurallarının seçilmesine geçilerek model test edilir. Modelin yeterlilik testlerinden geçip geçemediğine ilişkin verilen kararlar birlikte sayılan adımlar gözden geçirilerek her birine ait gerekli değişimler yapılır. Model tipi, kural sayısı, üyelik fonksiyonlarının tipi ve her bir değişkene ait üyelik fonksiyonu sayısının değiştirilmesi modelin iyileştirilmesi için yapılması gerekli değişiklikler arasındadır.

Bunlar yapılırken uzman görüşünden faydanılacağı gibi, sistemi belirleyen değişkenlere ait veriler de kullanılarak modelin yeterliliği istenilen düzeye getirilmeye çalışılabilir. Bu yöntem bulanık parametreleri belirleme de denilebilir. T-S tarzı bulanık modelleme yöntemi ortaya çıktıktan sonra bir çok araştırmacı tarafından bu parametreleri belirlemek için oldukça fazla sayıda yöntem ortaya konmuştur [40, 44-48]. Bu yaklaşım fiziksel veya analitik olarak modeli ortaya konulamayan sistemler için çok daha uygundur [44, 47].

Diğer bir yaklaşım ise verilen sistem denklemlerinden T-S tipi bulanık modelin türetilerek elde edilmesidir. İlk defa [42] numaralı çalışmada ortaya konulan bu yaklaşım “doğrusal olmayan sektörler” ve “yerel yaklaşımlar” yöntemlerini kullanır. Yerel yaklaşımlar yönteminde uzay alt parçalara ayrılarak doğrusal olmayan terimler bu bölgelerde seçilen uygun doğrusal terimlerle değiştirilir. Elde edilen modelin kural sayısı modelin karmaşıklığı doğrultusunda oluşacaktır[41,43].

Şimdi bulanık bir modelin nasıl elde edileceğini ve adı geçen yöntemlerin nasıl kullanılacağını aşağıdaki örnek üzerinden göstermeye çalışalım.

Basit bir doğrusal olmayan sistem örneği olarak kütle yay sürtünme mekanik sistemini ele alalım. Sistemdeki sürtünme katsayısı, yay sabitinin ve giriş teriminin doğrusal olmadığı kabul edildiği takdirde sistem

$$M\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \Phi(\dot{x})u \quad (2.35)$$

şeklinde modellenebilir. Burada M kütle, u ise uygulanan kuvveti, $f(x)$ yaya bağlı doğrusal olmayan terimi, $g(x, \dot{x})$ ise sürtünmeye bağlı doğrusal olmayan terimi göstermektedir. $\Phi(\dot{x})$ giriş terimine bağlı doğrusal olmayan terimdir. (2.35) ile modellenen sistemde, $x \in [-a, a]$, $\dot{x} \in [-b, b]$, $ab > 0$ olmak üzere

$$g(x, \dot{x}) = D(c_1 x + c_2 \dot{x}^3), \quad f(x) = c_3 x + c_4 \dot{x}^3 \quad \Phi(\dot{x}) = 1 + c_5 \dot{x}^3$$

olarak alalım. Parametre değerleri de aşağıda verildiği gibi olsun.

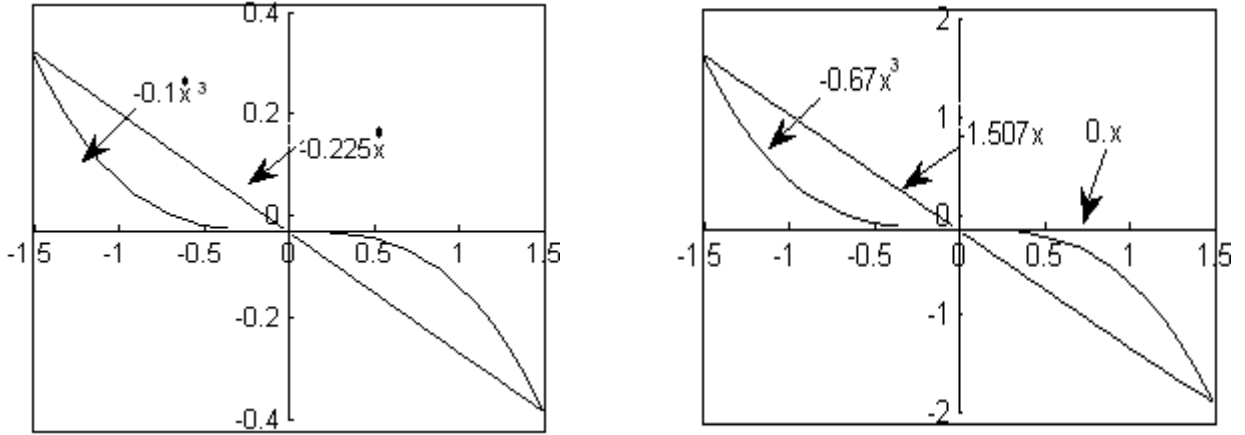
$$\begin{aligned} M &= 1.0, & D &= 1.0, \\ c_1 &= 0.01, & c_2 &= 0.1, & c_3 &= 0.01, & c_4 &= 0.67, & c_5 &= 0, \\ a &= 1.5, & b &= 1.5 \end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa (2.35) ifadesi

$$\ddot{x} = -0.1\dot{x}^3 - 0.02x - 0.67x^3 + u \quad (2.36)$$

şeklini alır. $-0.1\dot{x}^3$ ve $-0.67x^3$ doğrusal olmayan terimleri $x \in [-1.5, 1.5]$, $\dot{x} \in [-1.5, 1.5]$ aralıkları için sınırlandırılarak bir sektör içinde doğrusallaştırılabilir. Şekil 2.10 her iki terime ait bu aralıklarda elde edilmiş doğrusallaştırmaları göstermektedir. Bu doğrusallaştırmalar aşağıdaki eşitsizlikler yardımıyla elde edilebilirler,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} -1.5075x \leq -0.67x^3 \leq 0x, & x \geq 0 \\ 0x \leq -0.67x^3 \leq -1.5075x, & x < 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} -0.225\dot{x} \leq -0.1\dot{x}^3 \leq 0\dot{x}, & \dot{x} \geq 0 \\ 0\dot{x} \leq -0.1\dot{x}^3 \leq -0.225\dot{x}, & \dot{x} < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.37)$$

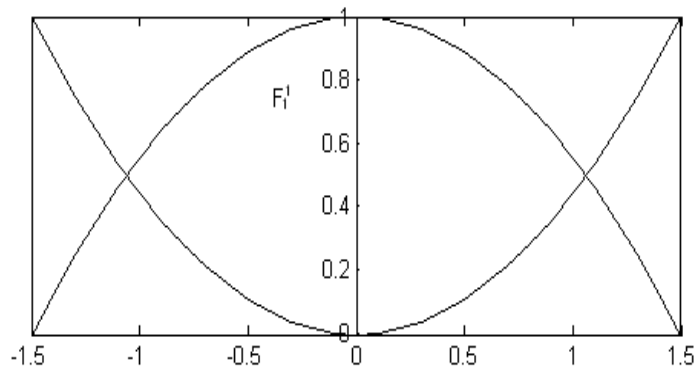


Şekil 2.10 : Doğrusal olmayan terimlere ait alt ve üst sınır gösterimleri.

Doğrusal olmayan terimlerin üst ve alt sınırları yardımıyla kendilerini ifade etmek mümkündür. (2.37) ifadesindeki eşitsizlikler yardımıyla

$$\begin{aligned} -0.67x^3 &= F_1^1 \cdot 0.x - (1 - F_1^1)1.5075x, \\ -0.1\dot{x}^3 &= F_2^1 \cdot 0.\dot{x} - (1 - F_2^1)0.225\dot{x} \end{aligned} \quad (2.38)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür. Burada gerekli hesaplamalar yapılırsa $F_1^1(x(t))$ ve $F_2^1(x(t))$ aşağıdaki şekilde bulunur.



Şekil 2.11 : Bulanık sisteme ait üyelik fonksiyonları.

$$\begin{aligned} F_1^1(x(t)) &= 1 - \frac{x^2(t)}{2.25}, & F_1^2(x(t)) &= 1 - F_1^1(x(t)) = \frac{x^2(t)}{2.25} \\ F_2^1(x(t)) &= 1 - \frac{\dot{x}^2(t)}{2.25}, & F_2^2(x(t)) &= 1 - F_2^1(x(t)) = \frac{\dot{x}^2(t)}{2.25} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Bu fonksiyonlar yukarıda modeli verilen sisteme karşılık olarak bulunacak olan bulanık sistemde üyelik fonksiyonlarına karşılık gelecek olan fonksiyonlardır. Şekil 2.11 de gösterilen bu üyelik fonksiyonları yardımıyla (2.36) doğrusal olmayan sistemi T-S bulanık modeliyle aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Kural 1: EĞER $x(t) F_1^1$ ve $\dot{x}(t) F_2^1$ ise

$$OHALDE \ddot{x}(t) = -0.02x + u$$

Kural 2: EĞER $x(t) F_1^1$ ve $\dot{x}(t) F_2^2$ ise

$$OHALDE \ddot{x}(t) = -0.225\dot{x} - 0.02x + u$$

Kural 3: EĞER $x(t) F_1^2$ ve $\dot{x}(t) F_2^1$ ise

$$OHALDE \ddot{x}(t) = -1.5275x + u$$

Kural 4: EĞER $x(t) F_1^2$ ve $\dot{x}(t) F_2^2$ ise

$$OHALDE \ddot{x}(t) = -0.225\dot{x} - 1.5275x + u$$

Bu modeli kararlılık analizine uygun bir şekilde matrislerle aşağıdaki şekilde yazmak da mümkündür.

Kural 1: EĞER $x(t) F_1^1$ ve $\dot{x}(t) F_2^1$ ise

$$OHALDE \dot{x}(t) = A_1x + B_1u$$

Kural 2: EĞER $x(t) F_1^1$ ve $\dot{x}(t) F_2^2$ ise

$$OHALDE \dot{x}(t) = A_2x + B_2u$$

Kural 3: EĞER $x(t) F_1^2$ ve $\dot{x}(t) F_2^1$ ise

$$OHALDE \dot{x}(t) = A_3x + B_3u$$

Kural 4: EĞER $x(t) F_1^2$ ve $\dot{x}(t) F_2^2$ ise

$$OHALDE \dot{x}(t) = A_4x + B_4u$$

Burada $x(t) = [\dot{x}(t) \ x(t)]^T$ olmak üzere sistem matrisleri de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -0.225 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1.5275 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -0.225 & -1.5275 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenir. Bu yöntem ile elde edilen T-S bulanık modeli, doğrusal olmayan (2.36) sistemini tam olarak ifade eder.

3. KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde tekil ve bulanık tekil sistemlerde kararlılık analizi için gerekli olan tanımlar ve araçlar tanıtılacaktır. Kararlılığın Lyapunov tanımı ve DME yapısı da bu bölümde tanıtılacaktır.

3.1 Kararlılık ve Kararlılık Analizi

Kararlılık kontrol sistemlerinde denetlenmesi gereken özelliklerin en başında gelir. Çünkü kararlı olmayan bir sistem kullanışsız ve aynı zamanda tehlikelidir. Kabaca kararlılık bir sistemin çalışmaya başladıktan sonraki bütün durumları için istenen kontrol hedefinde veya bu hedefin civarında kalması olarak tanımlanabilir [49].

Doğrusal veya doğrusal olmayan herhangi bir sistemin kararlılık analizinde yaygın olarak kullanılan en güçlü araçlardan birisi Lyapunov kararlılık yaklaşımıdır. Bu metod Lyapunov fonksiyonu denilen bir V fonksiyonun belirlenmesi ve bu V fonksiyonunun özellikleri yoluyla sistemin kararlılığının incelenmesine dayanır. V fonksiyonelinin inşasında kullanılacak bir yöntemin olmaması ve kararlılık için sadece yeter koşullar üretebilmesi yaklaşımın zayıf yönlerini oluşturur. Genel olarak sürekli dinamik bir sistem için Lyapunov teoremi aşağıdaki şekildedir.

Teorem 3.1. $x(t) \in R^n$ ve $f(x(t))$, $n \times 1$ boyutlu vektör fonksiyonu olmak üzere $\forall t$ için $f(0) = 0$ olacak şekilde sürekli ve zamana bağlı bir sistem $\dot{x}(t) = f(x(t))$ şeklinde verilsin. $x(t)$ ye göre sürekli $V(x(t))$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} a) & V(0) = 0 \\ b) & V(x(t)) > 0, x(t) \neq 0 \\ c) & \|x(t)\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x(t)) \rightarrow \infty \\ d) & \dot{V}(x(t)) < 0, x(t) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

koşullarını sağlıyorsa $x(t) = 0$ denge noktası asimptotik olarak kararlı denir. Burada $V(x(t))$ Lyapunov fonksiyonu adını alır.

3.2 Tekil Sistemlerde Kararlılık

Tekil bir sistem için kararlılık analizi yapılırken regüler olma ve etkiden bağımsızlık koşulu da kontrol edilmelidir. Bundan dolayı

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3.2)$$

tekil sistemi için kararlılık koşulu aşağıdaki tanımlar ile ve Teorem 3.2 de ki gibi verilir.

Tanım 3.1[7]:

- 1) Eğer $\det(sE - A) \neq 0$ ise (E, A) çiftine *regüler* denir.
- 2) Eğer $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank } E$ ise (E, A) çiftine *etkiden bağımsız* denir.

Tanım 3.2: Eğer (E, A) çifti regüler ve etkiden bağımsız ise bu durumda (3.2) sistemi de regüler ve etkiden bağımsız denir.

Teorem 3.2: [9] Tekil $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ sisteminin regular, etkiden bağımsız ve kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} P^T E &= E^T P \geq 0 \\ P^T A + A^T P &< 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

şartlarını sağlayacak bir P matrisinin olmasıdır.

Proof: Lyapunov fonksiyonu $V(x(t)) = x^T(t)P^T E x(t)$ şeklinde seçilerek (3.3) koşullarının elde edilebileceği hemen görülebilir.

Sisteme gecikme eklendiği

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t)) \quad (3.4)$$

durumda Teorem 3.2 ile verilen kararlılık koşulları aşağıdaki şekilde yeniden verilir. Bu teorem Lyapunov Krasovski teoreminin tekil sistemler için yeniden düzenlenmiş şeklidir.

Teorem 3.3: $A_{22}, A_{d22} \in R^{n_2 \times n_2}$, $n = n_1 + n_2$, A_{22}^{-1} var ve $\rho(A_{22}^{-1} A_{d22}) < 1$ olmak üzere (3.4) sistemi

$$(E, A, A_d) = \left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} \right) \quad (3.5)$$

şeklinde verilmiş olsun. (3.4) ile tanımlanan sistemin kararlı olması için yeter koşul $x_t = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\sigma, 0]$ ve $\phi = [\phi_1^T, \phi_2^T]^T$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mu\|\phi(0)\|^2 &\leq V(\phi) \leq \gamma\|\phi\|^2 \\ \dot{V}(x_t) &\leq -\alpha\|x_t\|^2\end{aligned}\tag{3.6}$$

koşullarını sağlayan $\alpha > 0$, $\mu > 0$, $\gamma > 0$ sayılarının ve $V : C_n[-\sigma, 0] \rightarrow R$ fonksiyonelinin bulunabilmesidir.

3.3 Bulanık Tekil Sistemlerde Kararlılık

Tekil sistemlerde olduğu gibi T-S tarzı bulanık tekil sistemlerde de kararlılık analizi için regülerlik ve etkiden bağımsızlık şartı aranır. T-S bulanık model i. kuralı aşağıdaki şekilde verilmek üzere,

$$\begin{aligned}(\Sigma) : \text{Kural } i : \\ \text{Eğer } \theta_1(t) M_{i1} \text{ ve...ve } \theta_g(t) M_{ig} \\ \text{O halde } E_i \dot{x}(t) = A_i x(t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Her E_i için $E_i W = [E_{i1} \ 0]$, $E_{i1} \in R^{n \times n_i}$, $i = 1 \dots r$ ve $\text{rank } E_{i1} = n_i$ koşullarını sağlayacak şekilde W tersinir matrisi vardır. Bu şartlar altında

$$V_i E_i W = [I_{n_i} \ 0] = E$$

koşulunu sağlayacak V_i , $i \in S = \{1, 2, \dots, r\}$ matrisleri mevcuttur ve bununla birlikte

$$x = W^{-1} \tilde{x} \text{ dönüşümü sistem matrisini } A_i = V_i \tilde{A}_i W = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} \\ A_{i3} & A_{i4} \end{bmatrix} \text{ şeklinde bir dönüşümle}$$

(3.4) ile verilen T-S modelini eşdeğer olarak

$$\begin{aligned}(\Sigma) : \text{Kural } i : \\ \text{Eğer } \theta_1(t) M_{i1} \text{ ve...ve } \theta_g(t) M_{ig} \\ \text{O halde } E \dot{x}(t) = A_i x(t)\end{aligned}\tag{3.8}$$

şekline getirir. Durum ve giriş vektörleri ile birlikte yukarıda verilen T-S bulanık sistemi ağırlık ortalamalı durulaştırıcı ve çıkarım için çarpma operatörü kullanılarak; $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \dots \ \theta_g(t)]$ olmak üzere kural tabanlı bu sistemin son hali

$$\mu_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(\theta_j(t)) \text{ ve } h_i(\theta(t)) = \frac{\mu_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))}$$

olmak üzere

$$E\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) A_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))} = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) A_i x(t) \quad (3.9)$$

olacak şekilde bulunur. Bu eşitliklerde her t değeri için

$$\mu_i(\theta(t)) \geq 0, i \in S, \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) > 0 \quad (3.10)$$

ve ayrıca

$$h_i(\theta(t)) \geq 0, i \in S, \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1 \quad (3.11)$$

koşulları sağlanır. Bu durumda kararlılık için aşağıdaki tanımlar ve Teorem 3.3 geçerli olur.

Tanım 3.3: [25] (3.9) ile verilmiş bulanık açık çevrim tekil sistemi için;

- 1) Eğer $\det(sE - \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) A_i) \neq 0$ ise (E, A_i) çiftine *regüler dir* denir.
- 2) Eğer $\deg(\det(sE - \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) A_i)) = \text{rank } E$ ise (E, A_i) çiftine *etkiden bağımsız* denir.

Tanım 3.4: Eğer (E, A_i) çifti regüler ve etkiden bağımsız ise bu durumda, (3.9) sistemi de regüler ve etkiden bağımsız dır denir.

Teorem 3.4: [25] Tekil $E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) A_i x(t)$ sisteminin regular, etkiden bağımsız ve kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} P^T E &= E^T P \geq 0 \\ P^T A_i + A_i^T P &< 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

şartlarını sağlayacak bir P matrisinin olmasıdır.

3.4 DME-Doğrusal Matris Eşitsizlikleri

Lyapunov anlamında kararlılık problemi hem tekil hem de bulanık tekil sistemlerde kararlılık koşullarını sağlayacak olan P ve bunun gibi matrislerin bulunmasına bağlı olacak şekildedir. Bu matrislerin bulunması problemi konveks iyileştirme teknikleri ile çözülebilen DME problemine dönüşür [51-53]. Kararlılığın olup olmaması yeter

koşulları sağlayacak olan bir P matrisinin olup olmaması ile eşdeğerdir. Bu problem DME problemi olarak adlandırılır.

Tanım 3.5:[50] $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $F_i^T = F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, r$ olsun. Bu durumda

$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^r x_i F_i > 0$ matris eşitsizliğine DME-Doğrusal Matris Eşitsizliği denir.

Kararlılık koşullarını DME formuna sokabilmek için sıkça kullanılan Schur Tümlenyeni Teoremi de aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 3.5. x 'e bağlı $Q(x)$, $R(x)$ ve $S(x)$ matrisleri $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ ve $S(x)$ koşullarını sağlayacak şekilde verilmiş olsun.

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (3.13)$$

koşulunun sağlanması için ancak ve ancak

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ * & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.14)$$

DME yapısının sağlanması gerekir.

4. GECİKMELİ TEKİL SİSTEMLERDE KARARLILIK PROBLEMİ

Tekil sistemlerin kontrolü fiziksel sistemleri regüler sistemlerden daha iyi tanımlama imkanına sahip olduklarından dolayı geçmiş yıllarda yoğun olarak çalışılan bir alandır. Tekil sistemlerde gürbüz kararlılık ve gürbüz kararlılaştırma problemi, regüler sistemlere nazaran daha karmaşık bir yapıdadır. Çünkü tekil sistemler için ek olarak regülerlik ve etkiden bağımsız özelliğinin de incelenmesi gerekmektedir.

Bu bölümde gecikmesi zamanla değişen tekil bir sistemin kararlılık analizi ve durum geri beslemesi ile kararlılaştırma koşulları gecikmeye bağlı olarak DME ile ortaya konmuştur. Aynı şekilde sistem parametrelerinin belirsizlik taşıması durumunda gürbüz kararlılık incelemesi yapılmıştır. Sonuçlar yapılan çalışmalarla karşılaştırılarak örneklendirilmiş ve tablolaştırılmıştır.

4.1 Problem Tanımı

$x(t) \in R^n$ durum vektörü, $u(t) \in R^m$ giriş kontrol vektörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} (\Sigma) : \quad E\dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - \sigma(t)) \\ &\quad + (B + \Delta B)u(t) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\bar{\sigma}, 0] \end{aligned} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanan belirsiz parametrelili gecikmeli tekil sistemler gözönüne alalım. Burada $E \in R^{n \times n}$ tekil ve A, A_d, B uygun boyutlu sabit matrislerdir. $\Delta A, \Delta A_d$ ve ΔB ise zamanla değişmeyen normu sınırlı belirsiz parametreleri temsil eden matrisler olmak üzere

$$[\Delta A \quad \Delta A_d \quad \Delta B] = DF(\sigma)[N_A \quad N_D \quad N_B] \quad (4.2)$$

formundadır. D, N_A, N_D ve N_B ise sabit ve uygun boyutlu matrislerdir. Belirsiz $F(\sigma)$ matrisi $F(\sigma)F(\sigma)^T \leq I$ sağlayacak şekildedir ve $\varphi(t)$ vektör değerli sürekli bir fonksiyondur.

(4.1)'e ait nominal zorlanmamış gecikmeli tekil sistem;

$$0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty \quad \text{ve} \quad 0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1 \quad (4.3)$$

olmak üzere

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t)) \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Kapalı çevrim nominal gecikmeli tekil bir sistem ise

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t)) + Bu(t) \quad (4.5)$$

ile ifade edilir. Genellikle bir şey kaybetmeden E , A ve A_d matrislerini;

$$E = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} A_{d11} & A_{d12} \\ A_{d21} & A_{d22} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

formunda düşünmek mümkündür. Burada giriş vektörü ile ona ait başlangıç koşulu uygun olarak

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \varphi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $x_1(t) \in R^{n_1}$, $x_2(t) \in R^{n_2}$ dir.

Öncelikli olarak kararlılığın incelenmesinde gerekli olan tanımları ve yardımcı teoremleri verelim.

Tanım 4.1 [7]:

- 1) Eğer $\det(sE - A) \neq 0$ ise (E, A) çiftine *regüler* dir denir.
- 2) Eğer $\deg(\det(sE - A)) = \text{rank } E$ ise (E, A) çiftine *etkiden bağımsız* denir.

Tanım 4. 2:

- 1) Eğer (E, A) çifti regüler ve etkiden bağımsız ise bu durumda, gecikmeli tekil (4.4) sistemi de regüler ve etkiden bağımsız dir denir.
- 2) Her $\varepsilon > 0$, en az bir skaler $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı $\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \|\phi(t)\| \leq \delta(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\phi(t)$ uygun başlangıç koşulu için bulunabiliyorsa, sistemin çözümü olan $x(t)$, her $t \geq 0$ için $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayacaktır. Böyle sistemlere kararlıdır denir. Bununla birlikte, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ da yazılabilir.

Tanım 4.3: Σ , belirsiz gecikmeli sistemi $u(t) = 0$ durumundaki bütün kabul edilebilir ΔA ve ΔA_d belirsizlikleri için *regüler*, *etkiden bağımsız* ve *kararlı* ise bu durumda Σ ya *gülbüz kararlı* sistem denir.

Tanım 4.4: Σ , belirsiz gecikmeli sistemini gürbüz kararlı hale getirecek $u(t) = Kx(t)$ $K \in R^{m \times n}$ doğrusal durum geri besleme kontrol kuralı varsa bu durumda Σ sistemi *gürbüz kararlaştırılabilir* ve $u(t) = Kx(t)$ ye Σ sistemi için *kararlı geribesleme kontrol kuralı* denir.

Y.Teorem 4.1[9]: Tekil $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} P^T E &= E^T P \geq 0 \\ P^T A + A^T P &< 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

şartlarını sağlayacak bir P matrisinin olmasıdır.

Y.Teorem 4.2[54]: Ω , simetrik Γ ve Ξ uygun boyutlu matrisleri ve $FF^T < I$ koşullarını sağlayan F matrisi verilmiş olsun. $\Omega + \Gamma F \Xi + \Xi^T F^T \Gamma^T < 0$ eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\Omega + \varepsilon \Gamma \Gamma^T + \varepsilon^{-1} \Xi^T \Xi < 0$ olmasıdır.

4.2 Gecikmeye Bağlı Gürbüz Kararlılık Ve Gürbüz Kararlılaştırma

Bu bölümde, gürbüz kararlılık ve kararlılaştırma probleminin çözümü gecikmeye bağlı olarak doğrusal matris eşitsizliği (DME) yaklaşımıyla verilecektir. Fakat buna geçmeden önce (4.4) sistemini kararlı hale getirecek koşulları verelim.

Teorem 4.1: $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$ ve $0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$ ve η sabitleri verilmiş olsun. Nominal tekil (4.4) sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve kararlı olması için yeter koşul

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= P^T A + A^T P + Q + E^T N E + E^T N^T E \\ \Gamma_{12} &= P^T A_d - E^T N E + E^T M^T E \\ \Gamma_{22} &= -(1-\eta)Q - E^T M E - E^T M^T E \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & -\bar{\sigma} E^T N & \bar{\sigma} A^T Z \\ * & \Gamma_{22} & -\bar{\sigma} E^T M & \bar{\sigma} A_d^T Z \\ * & * & -\bar{\sigma} Z & 0 \\ * & * & 0 & -\bar{\sigma} Z \end{bmatrix} < 0 \quad (4.8)$$

eşitsizliğini sağlayacak uygun boyutlu

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, P_{11} = P_{11}^T > 0, Q^T = Q > 0, Z^T = Z > 0, \\ Z_{11} = Z_{11}^T > 0, N, M$$

$P_{11}, Z_{11} \in R^{p \times p}$ olacak şekilde matrislerinin bulunmasıdır.

İspat: (4.8) ile verilen DME sağlandığı takdirde $P^T A + A^T P < 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Sistemin regülerliğinin sağlanması için (4.7) koşullarını ve E matrisinin

(4.6) formunu kullanarak $P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, P_{11} = P_{11}^T > 0$ formunda elde edilir.

Dolayısıyla (4.4) sistemi regüler ve etkiden bağımsızlık özelliklerini sağlar. Aynı şekilde P nin tersinir olduğu söylenebilir. Bundan dolayı P_{22} de tersinirdir. P matrisi (4.8) de yerine yerleştirilip soldan ve sağdan

$\begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpılırsa aşağıdaki (4.9) ve (4.10) daki matris eşitsizlikleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} P_{22}^T A_{22} + A_{22}^T P_{22} + Q_{22} & P_{22}^T A_{d22} \\ * & -Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} P_{22}^T A_{22} + A_{22}^T P_{22} + Q_{22} & P_{22}^T A_{d22} \\ * & -(1-\eta)Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

Buradan Q_{22} matrisinin tersinir olduğunu söyleyebiliriz. (4.10) eşitsizliğinden $P_{22}^T A_{22} + A_{22}^T P_{22} < 0$ ve bundan dolayı A_{22} tersinirdir. (4.10) eşitsizliği sağdan ve soldan sırasıyla $\begin{bmatrix} -(A_{22}^{-1} A_{d22}^T)^T & I_{n_2} \end{bmatrix}$ ve transpozu ile çarpılırsa $A_{d22}^T A_{22}^{-T} Q_{22} A_{22}^{-1} A_{d22} - Q_{22} < 0$ sonucuna ulaşılır. Bu sonuç $\rho(A_{22}^{-1} A_{d22}) < 1$ olduğunu gösterir.

Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli (LKF) $V(x(t)) = V_1 + V_2 + V_3$

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= x^T(t) P^T E x(t) \\ V_2(x(t)) &= \int_{t-\sigma(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \\ V_3(x(t)) &= \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (4.11)$$

olacak şekilde seçelim.

$V(x(t))$ fonksiyonelinin türetilmesiyle;

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x(t)) &= 2x^T(t)P^T E\dot{x}(t) \\ \dot{V}_2(x(t)) &= x^T(t)Qx(t) - (1 - \dot{\sigma}(t))x^T(t - \sigma(t))Qx(t - \sigma(t)) \\ \dot{V}_3(x(t)) &= \bar{\sigma}\dot{x}^T(t)E^T ZE\dot{x}(t) - \int_{t-\bar{\sigma}}^t \dot{x}^T(s)E^T ZE\dot{x}(s)ds\end{aligned}\quad (4.12)$$

elde edilir. $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}$, koşulundan dolayı

$$-\int_{t-\bar{\sigma}}^t \dot{x}^T(s)E^T ZE\dot{x}(s)ds < -\int_{t-\sigma(t)}^t \dot{x}^T(s)E^T ZE\dot{x}(s)ds \quad (4.13)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Diğer taraftan

$$-\int_{t-\sigma(t)}^t \dot{x}^T(s)E^T ZE\dot{x}(s)ds \leq -\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} \int_{t-\sigma(t)}^t \dot{x}(s)^T E^T ds\right)(\bar{\sigma}Z)\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} \int_{t-\sigma(t)}^t E\dot{x}(s)ds\right) \quad (4.14)$$

halini alır. Gösterim kısalığı açısından $i_\sigma = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(\int_{t-\sigma(t)}^t E\dot{x}(s)ds \right)$ ve $x(t - \sigma(t)) = x_\sigma(t)$ olarak alalım. Newton-Leibnitz formülü ile birlikte

$$2[x^T(t)E^T N + x^T(t - \sigma_i(t))E^T M][Ex(t) - Ex(t - \sigma(t)) - \int_{t-\sigma(t)}^t E\dot{x}(s)ds] = 0 \quad (4.15)$$

(4.15) ve (4.14) deki eşitsizlikler (4.12) ile birlikte değerlendirilirse

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &\leq x^T(t)[P^T A + A^T P + Q + E^T NE + E^T N^T E]x(t) + \\ &\quad x^T(t)[PA_d - E^T NE + E^T M^T E]x_\sigma(t) + x_\sigma^T(t)[-(1 - \eta)Q - E^T ME - E^T M^T E]x_\sigma(t) \\ &\quad + \bar{\sigma}\dot{x}^T(t)E^T ZE\dot{x}(t) - i_\sigma(\bar{\sigma}Z)i_\sigma \\ &\quad - 2\bar{\sigma}x^T(t)E^T Ni_\sigma - 2\bar{\sigma}x_\sigma^T(t)E^T Mi_\sigma\end{aligned}\quad (4.16)$$

elde edilir. $\dot{x}^T(t)E^T ZE\dot{x}(t)$ terimi düzenlenerek;

$$\begin{aligned}\dot{x}^T(t)E^T ZE\dot{x}(t) &= [Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t))]^T \bar{\sigma}Z[Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t))] \\ &= \zeta^T(t) \begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \\ 0 \end{bmatrix} (\bar{\sigma}Z) \begin{bmatrix} A^T & A_d^T & 0 \end{bmatrix} \zeta(t)\end{aligned}\quad (4.17)$$

Son olarak Schur tümleyeni argümanıyla birlikte $\zeta^T(t) = [x(t) \ x^T(t - \sigma(t)) \ i_\sigma]$ olacak şekilde (4.16) ve (4.17) teki ifadeler kullanılarak $\dot{V}(x_t) < 0$ 'a denk olan (4.8) deki ifade elde edilir. Bu durumda (4.4) sistemi kararlıdır. $\square$

Teorem 4.2: $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$ ve $0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$ ve η sabitleri verilmiş olsun. Belirsiz parametreye sahip zorlanmamış (4.1), $u(t) = 0$, sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve gürbüz kararlı olması için yeter koşul

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= P^T A + A^T P + Q + E^T N E + E^T N^T E \\ \Gamma_{12} &= P^T A_d - E^T N E + E^T M^T E \\ \Gamma_{22} &= -(1 - \eta)Q - E^T M E - E^T M^T E\end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & -\bar{\sigma} E^T N & \bar{\sigma} A^T Z & P D & \varepsilon N_A^T \\ * & \Gamma_{22} & -\bar{\sigma} E^T M & \bar{\sigma} A_d^T Z & 0 & \varepsilon N_D^T \\ * & * & -\bar{\sigma} Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & -\bar{\sigma} Z & \bar{\sigma} Z D & 0 \\ * & * & 0 & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & 0 & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.18)$$

eşitsizliğini sağlayacak uygun boyutlu $P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, $P_{11} = P_{11}^T > 0$, $Q^T = Q > 0$,

$Z^T = Z > 0$, N, M matrislerinin bulunmasıdır.

İspat: Schur tamamlama argümanı ve (4.18) eşitsizliği kullanılarak

$$\Omega + \varepsilon^{-1} \Gamma \Gamma^T + \varepsilon \Xi^T \Xi < 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada Ω (4.8) eşitsizliğinin sol tarafındaki matris ile eşit ve $\Gamma = \begin{bmatrix} D^T P^T & 0 & 0 & \sigma D^T Z^T \end{bmatrix}^T$, $\Xi = \begin{bmatrix} N_A & N_D & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde seçilir. 2 numaralı yardımcı teorem ve (4.19) eşitsizliği ile birlikte

$$\begin{aligned}\Psi_{11} &= P^T (A + \Delta A) + (A + \Delta A)^T P + Q + E^T N E + E^T N^T E \\ \Psi_{12} &= P^T (A_d + \Delta A_d) - E^T N E + E^T M^T E \\ \Psi_{22} &= -(1 - \eta)Q - E^T M E - E^T M^T E\end{aligned}$$

olacak şekilde,

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & -\bar{\sigma}E^T N_1 & \bar{\sigma}(A + \Delta A)^T Z \\ * & \Psi_{22} & -\bar{\sigma}E^T N_2 & \bar{\sigma}(A_d + \Delta A_d)^T Z \\ * & * & -\bar{\sigma}Z & 0 \\ * & * & 0 & -\bar{\sigma}Z \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 4.1 ve Tanım 4.3 aracılığıyla istenen sonuca hemen ulaşılır. $\square$

Bir sonraki aşamada amacımız

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \sigma(t)) + Bu(t) \quad (4.21)$$

kapalı çevrim sistemini regüler, etkiden bağımsız ve kararlı hale getirecek durum geri beslemeli

$$u(t) = Kx(t) \quad (4.22)$$

kontrol kuralının tasarımı olacaktır.

Teorem 4.3: $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$, $0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$ ve η sabitleri ile λ_1 ve λ_2 skalerleri verilmiş olsun. Gecikmeli, tekil ve belirsiz parametreye sahip olmayan (4.21) sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve kararlılaştırılabilir olması için yeter koşul

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= X^T A^T + AX + Y^T B^T + BY + \bar{Q} + 2\lambda_1 E^T XE \\ \Theta_{12} &= A_d^T X - \lambda_1 E^T XE + \lambda_2 E^T XE \\ \Theta_{22} &= -(1-\eta)\bar{Q} - 2\lambda_2 E^T XE \\ \Theta_{13} &= -\bar{\sigma}\lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Theta_{23} &= -\bar{\sigma}\lambda_2 \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olacak şekilde,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \bar{\sigma}X^T A^T + Y^T B^T \\ * & \Theta_{22} & \Theta_{23} & \bar{\sigma}X^T A_d^T \\ * & * & -\bar{\sigma}\bar{Z} & 0 \\ * & * & * & -\bar{\sigma}\bar{Z} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

eşitsizliğini sağlayacak uygun boyutlu

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, X_{11} = X_{11}^T > 0, \bar{Q} = \bar{Q}^T > 0, \bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ * & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0, Y$$

matrislerinin bulunmasıdır. Bununla birlikte geri besleme kontrol matrisi

$$K = YX^{-1} \quad (4.24)$$

ile verilir.

İspat: Teorem 4.1 e benzer olarak aynı işlemler yapıldıktan sonra A yerine $A+BK$ yazılarak

$$\Gamma_{11} = P^T(A+BK) + (A+BK)^T P + Q + E^T N E + E^T N^T E$$

$$\Gamma_{12} = P^T A_d - E^T N E + E^T M^T E$$

$$\Gamma_{22} = -(1-\eta)Q - E^T M E - E^T M^T E$$

olacak şekilde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & -\bar{\sigma} E^T N & \bar{\sigma} (A+BK)^T Z \\ * & \Gamma_{22} & -\bar{\sigma} E^T M & \bar{\sigma} A_d^T Z \\ * & * & -\bar{\sigma} Z & 0 \\ * & * & 0 & -\bar{\sigma} Z \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisi LMI formuna sokmak için, $T^T = \text{diag}\{P^{-T}, P^{-T}, Z^{-T}, Z^{-T}\}$ olacak şekilde Φ 'yı sırasıyla soldan T^T , sağdan T ile çarpar, aynı zamanda

$$X = P^{-1}, \bar{Q} = P^{-T} Q P^{-1}, Z^{-1} = \bar{Z}, P_{11}^{-1} = X_{11},$$

$$\text{ve } N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix}, N_{11} = \lambda_1 P_{11}, M_{11} = \lambda_2 P_{11} \text{ şeklinde tanımlayarak}$$

gerekli işlemleri yaparsak;

$$\begin{aligned}
P^{-T}\Gamma_{11}P^{-1} &= P^{-T}(P^T A + A^T P + P^T BK + (BK)^T P + Q + E^T NE + E^T N^T E)P^{-1} \\
&= AP^{-1} + P^{-T}A^T + BKP^{-1} + P^{-T}K^TB^T + P^{-T}QP^{-1} + P^{-T}(E^T NE + E^T N^T E)P^{-1} \\
&= AX + X^T A^T + BY + Y^T B^T + \bar{Q} + \lambda_1 E^T XE + \lambda_1 E^T XE
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{-T}\Gamma_{12}P^{-1} &= P^{-T}(PA_d - E^T NE + E^T M^T E)P^{-1} \\
&= A_d X - \lambda_1 E^T XE + \lambda_2 E^T XE
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{-T}\Gamma_{13}Z^{-1} &= -\bar{\sigma}P^{-T}(E^T N)Z^{-1} \\
P^{-T}\Gamma_{14}Z^{-1} &= \bar{\sigma}P^{-T}[(A+BK)^T Z]Z^{-1} = \bar{\sigma}P^{-T}(A+BK)^T \\
P^{-T}\Gamma_{22}P^{-1} &= -P^{-T}[(1-\eta)Q - E^T ME - E^T M^T E]P^{-1} = -(1-\eta)\bar{Q} - \lambda_2 E^T XE - \lambda_2 E^T XE \\
P^{-T}\Gamma_{23}Z^{-1} &= -\bar{\sigma}P^{-T}(E^T M)Z^{-1} \\
P^{-T}\Gamma_{24}Z^{-1} &= \bar{\sigma}P^{-T}(A_d^T Z)Z^{-1} = \bar{\sigma}P^{-T}A_d^T \\
Z^{-T}\Gamma_{33}Z^{-1} &= -\bar{\sigma}Z^{-T}(Z)Z^{-1} = -\bar{\sigma}Z^{-T} = -\bar{\sigma}\bar{Z} \\
Z^{-T}\Gamma_{44}Z^{-1} &= -\bar{\sigma}Z^{-T}ZZ^{-T} = -\bar{\sigma}Z^{-1} = -\bar{\sigma}\bar{Z}
\end{aligned}$$

$\varsigma^T(t) = [x(t) \ x^T(t - \sigma(t)) \ i_\sigma]$ olacak şekilde $\Sigma < 0$ elde ederiz. Bu durumda (4.21)

sistemi kararlılaştırılabilir ve durum geribesleme matrisi $K = YX^{-1}$ ile verilir. $\square$

Teorem 4.4: $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$ ve $0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde ε , $\bar{\sigma}$ ve η sabitleri ile λ_1 ve λ_2 skalerleri verilmiş olsun. Gecikmeli, tekil ve belirsiz parametreye sahip (4.1) sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve gürbüz kararlılaştırılabilir olması için yeter koşul

$$\Gamma = \begin{bmatrix} D^T & 0 & 0 & \bar{\sigma}D^T \end{bmatrix}^T \text{ ve } \Xi = \begin{bmatrix} N_A X + N_B Y & N_D X & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

olacak şekilde

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \Gamma & \Xi \\ * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

eşitsizliğini sağlayacak uygun boyutlu

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, X_{11} = X_{11}^T > 0, \bar{Q} = \bar{Q}^T > 0, \bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ * & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0, Y$$

matrislerinin bulunmasıdır. Bununla birlikte geri besleme kontrol matrisi

$$K = YX^{-1} \quad (4.27)$$

ile verilir.

İspat: (4.1) sistemi için Teorem 4.1 deki işlemler aynı şekilde tatbik edilirse

$$\Delta\Sigma = \begin{bmatrix} P^T(\Delta A + \Delta BK) + (\Delta A + \Delta BK)^T P & P^T \Delta A_d & 0 & \bar{\sigma}(\Delta A + \Delta BK)^T Z \\ * & 0 & 0 & \bar{\sigma} \Delta A_d Z \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $\Sigma + \Delta\Sigma < 0$ elde edilecektir. Soldan T^T , sağdan T ile çarpar, aynı zamanda $X, \bar{Q}, \bar{Z}$ parametreleri kullanılırsa

$$\Sigma + \Gamma F \Xi + \Xi^T F^T \Gamma^T < 0 \quad (4.28)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.25) eşitsizliği Y. Teorem 2 kullanılarak

$$\Sigma + \varepsilon^{-1} \Gamma \Gamma^T + \varepsilon \Xi^T \Xi < 0 \quad (4.29)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan (4.29) ifadesine Schur tümleyeni argümanı uygulanırsa (4.26) ifadesi hemen elde edilir. Buradan (4.1) sistemi gürbüz kararlılaştırılabilir ve durum geribesleme matrisi $K = YX^{-1}$ ile verilir. $\square$

4.3 Sayısal Örnekler

Önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak bu bölümde sunulacaktır.

Örnek 4.1: (4.4) sistemine ait [19] numaralı çalışmada

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} -1.1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Verilen örnek sistem için sonuçlar Çizelge 4.1 de verilmiştir. Çizelge [19-22, 36-39]'da yapılan çalışmaları karşılaştırmalı olarak listelemektedir. Sisteme ait simulasyon sonuçlarının verildiği Şekil 4.1'den de sistemin kararlı sonuç verdiği de gözlenebilir.

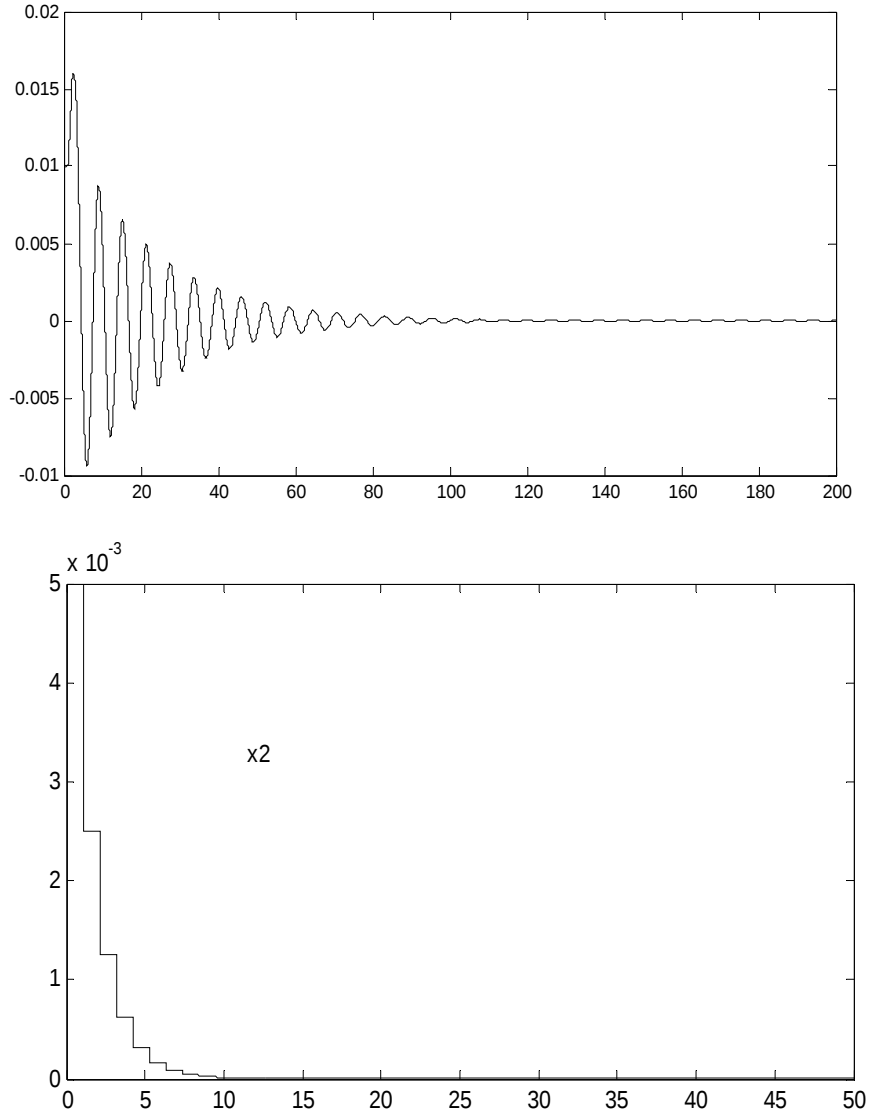
Çizelge 4.1 : 1.Örnekte verilen sistem için maksimum gecikme tablosu

Yöntem	$\bar{\sigma}$
[36, 37]	0.556
[18]	0.870
[22]	0.9091
[20,21]	0.9680
[59]	1.0423
[19]	1.066
Teorem 4.1	1.066

Örnek 4.2: $u(t) = 0$ olmak üzere belirsiz parametreye sahip (4.1) sistemine ait bir örnek olarak

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} -2.4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \lambda I, N_A = N_D = 0.5I$$



Şekil 4.1 : Örnek 1 deki sisteme ait simulasyon sonuçları.

şeklinde verilen sistemi ele alalım. Teorem 4.2 de oluşturulan DME problemi çözülerek farklı λ değerleri için Çizelge 4.2 deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 4.2 : 2.Örnekte verilen sistem için maksimum gecikme tablosu

λ	0.25	0.30
$[22]$	0.4209	0.3939
<i>Teorem 4.2</i>	0.74	0.71

Örnek 4.3: [19] numaralı çalışmada yer alan üç boyutlu

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 & -0.8 \\ 1 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [0.4 \quad 0.3 \quad 0.1], N_A = [0.2 \quad 0.4 \quad 0.5]$$

$$N_D = [0.3 \quad 0.7 \quad 0.5], N_B = [0.4 \quad 0.5]$$

sistemi için (4.23) deki DME yapısı çözülürse aşağıdaki matrisler ve farklı ε değerleri için Çizelge 4.3 deki gecikme değerleri elde edilir. Sisteme ait simulasyon sonuçlarının verildiği Şekil 4.2'den de sistemin kararlı sonuç verdiği de gözlenebilir.

Çizelge 4.3 : 2. Örnekte verilen sistem için maksimum gecikme tablosu

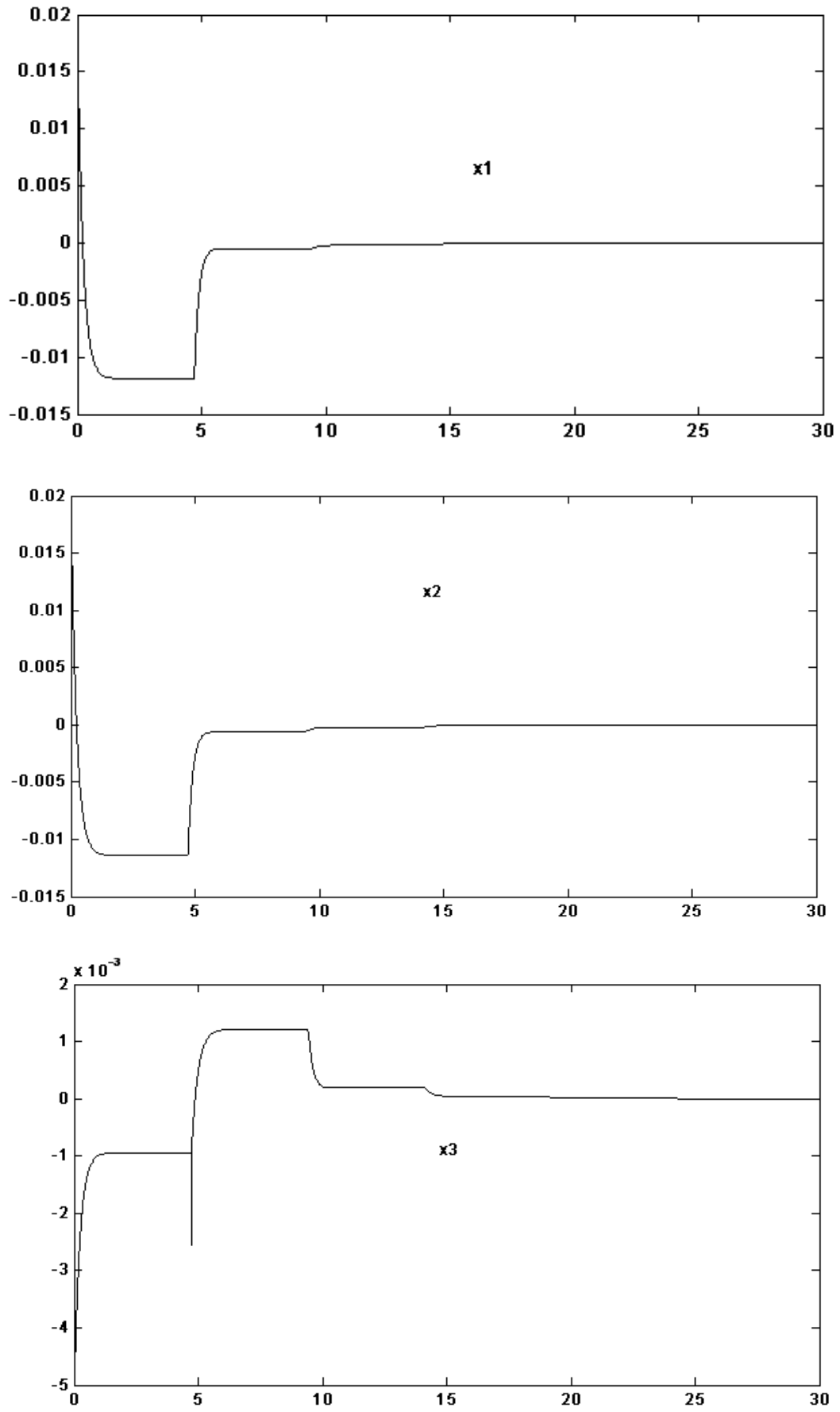
ε	0.5	1
<i>[19]</i>	3.1	1.32
<i>Teorem 4.4</i>	4.711	4.711

$$X = \begin{bmatrix} 0.3581 & 0.4353 & 0 \\ 0.4353 & 0.7634 & 0 \\ 0.1664 & 0.5683 & 0.0983 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 11.1970 & 2.8117 & 1.0432 \\ 2.8117 & 11.3033 & -2.1237 \\ 1.0432 & -2.1237 & 10.4645 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1.2079 & 0.3924 & 0.2953 \\ 0.3924 & 1.0572 & -0.5531 \\ 0.2953 & -0.5531 & 1.2604 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 22.3149 & -21.1580 & 11.2774 \\ -21.2865 & 16.8450 & -7.2344 \end{bmatrix}$$



Şekil 4.2 : Örnek 3 deki sisteme ait simülasyon sonuçları.

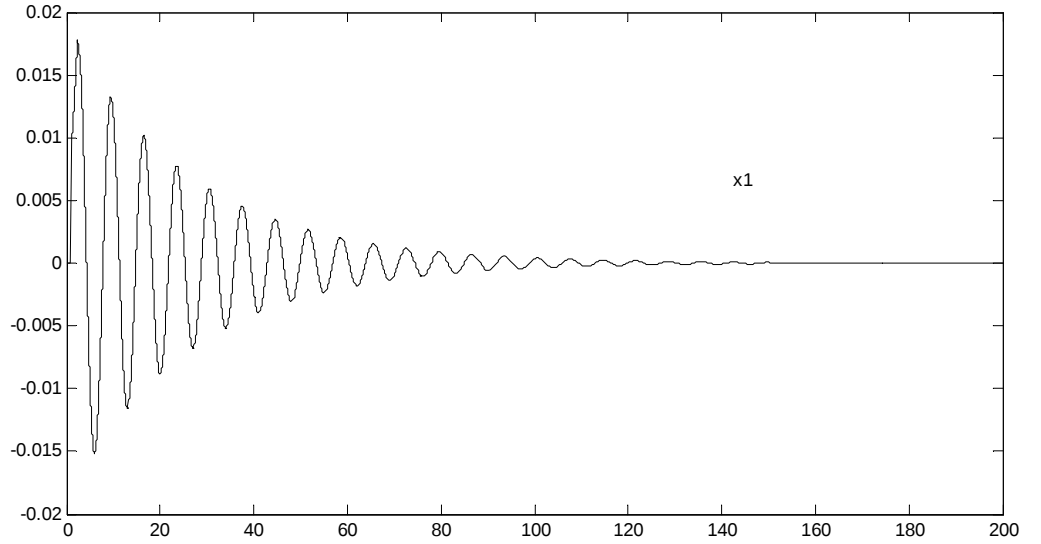
Örnek 4.4: Aşağıdaki sistem [16] numaralı çalışmada kararlılığı incelenmiş sistemlerden biridir. Aşağıda verilen tabloda [16] çalışmasında verilen sonuçlar ve Teorem 4.1 için bulunan sonuçlar verilmektedir.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

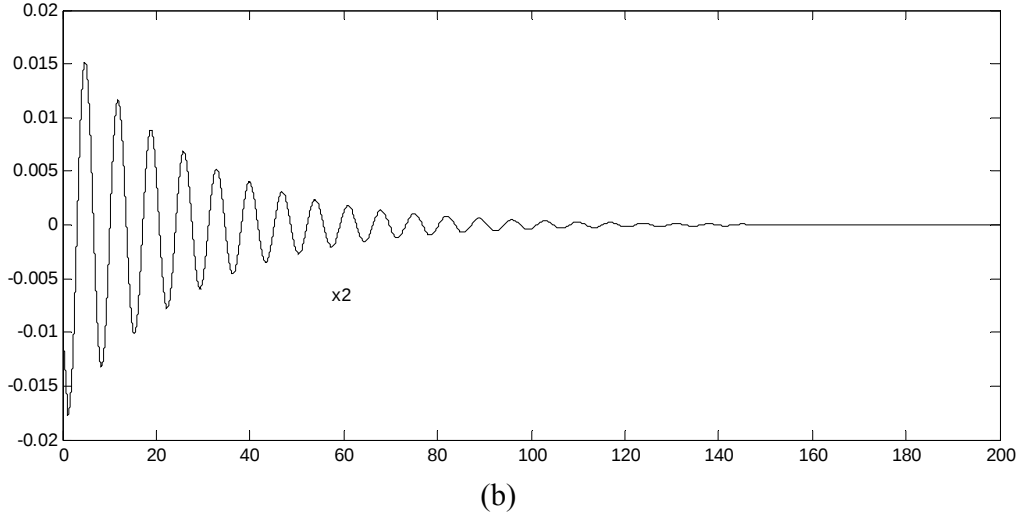
Çizelge 4.4 : 1.Örnekte verilen sistem için maksimum gecikme karşılaştırma tablosu

Yapılan çalışma	$\bar{\sigma} \quad (\eta=0)$
[16]	1.15
Teorem 4.1	1.15

Çalışma boyunca gecikme zamana bağlı olarak ele alındığından dolayı $\dot{\sigma}(t) \leq \eta < \infty$ koşulu gereğince η değeri Çizelge 4.4 de verilen karşılaştırmalar için $\eta=0$ olarak alınmıştır.



(a)



Şekil 4.3 : Örnek 4 deki sistemde a) x_1 durum değişkenine ait
b) x_2 durum değişkenine ait simulasyon sonuçları.

[16] numaralı çalışmada sonuçlar sabit gecikme üzerinden ortaya konulmakla beraber iki yöntem birbirine eşdeğerdir. Fakat [16] numaralı çalışma kararlılık incelemisini gerçekleştirmemiştir. Yine sisteme ait simulasyon sonuçlarının verildiği Şekil 4.3'den de sistemin kararlı sonuç verdiği de gözlenebilir.

Örnek 4.5: Bu örnekte yine [16] daki çalışmadan alınarak gürbüz kararlılığın incelenmiş olduğu bir sistemdir. Aşağıda verilen tabloda [16] daki çalışmada verilen sonuçlar ve Teorem 4.2 için bulunan sonuçlar verilmektedir.

$$L = 100x \begin{bmatrix} \beta & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \quad M = 100x \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \frac{1}{72}x \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} L & I_3 \\ 0 & -I_3 \end{bmatrix} \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M + NL & N \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad E_1 = E_d = [2I_3 \quad 0]$$

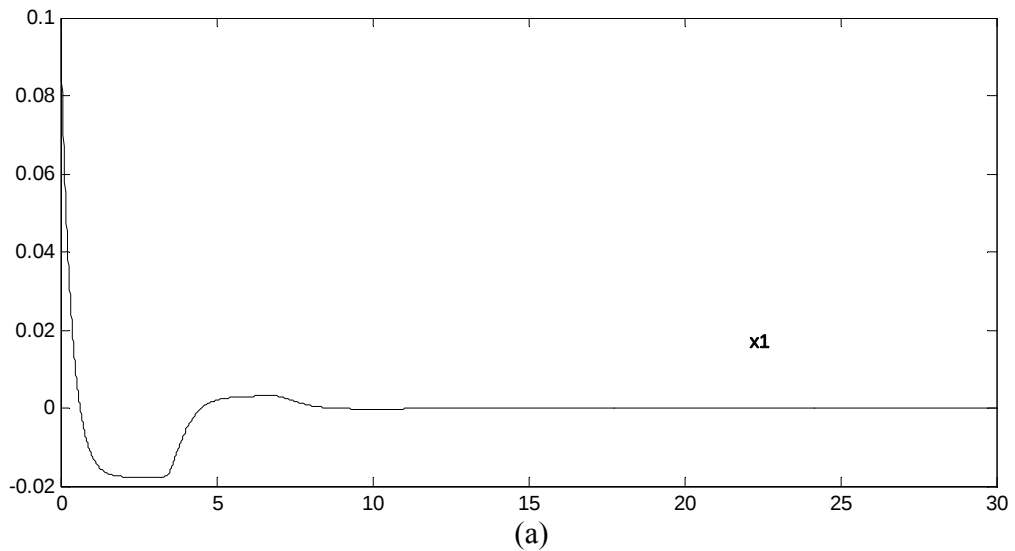
Çizelge 4.5 : 2 .Örnek te verilen sistem için maksimum gecikme karşılaştırma tablosu

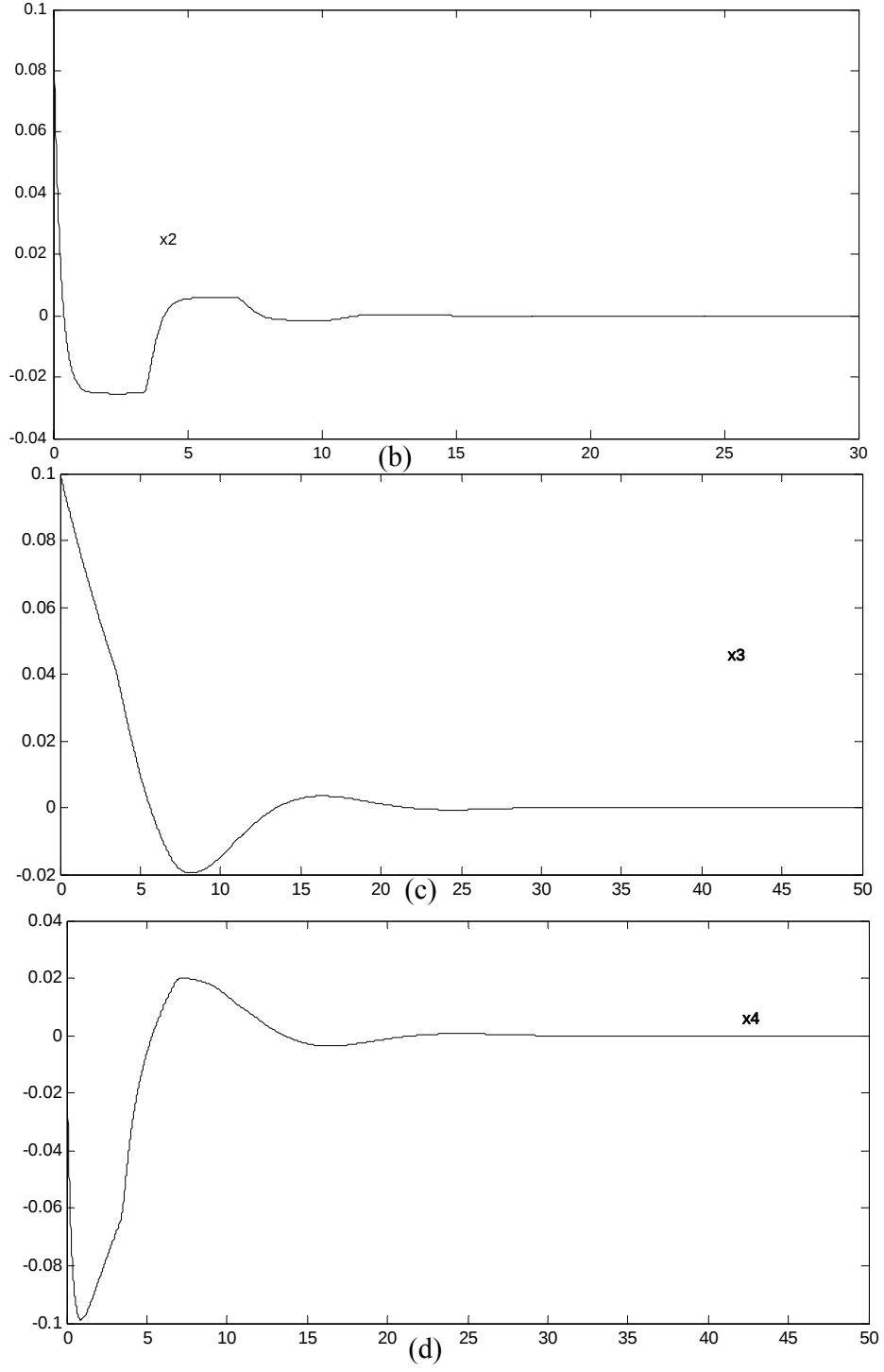
β ($\eta=0$)	-2.105	-2.103	-2.1
[4]	0.197	0.176	0.156
Teorem 4.2	1.08	0.371	0.243

Sisteme ait L matrisindeki β katsayısına göre maksimum gecikme incelenmiştir. Yine örnek 1 de olduğu gibi gecikme zamana bağlı olarak ele alındığından dolayı $\dot{\sigma}(t) \leq \eta < \infty$ koşulu gereğince η değeri Çizelge 4.5 de verilen karşılaştırmalar için $\eta=0$ olarak alınmıştır.

Örnek 4.6: : Son örnek gecikmeden bağımsız olarak oluşturulan DME yapısı için kararlılık koşullarından sonuç elde edilememiş bir sistemdir. Teorem 4.1 de verilen gecikmeye bağlı kararlılık yapısı altında incelendiğinde ise üst gecikme değeri $\bar{\sigma} = 3$ olarak elde edilmiştir.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$





Şekil 4.4 : Örnek 6 daki sisteme ait simülasyon sonuçları.

Örnek 6’da verilen sisteme ait kararlılık simülasyon sonuçları Şekil 4.4’den her bir durum değişkeni için gözlenebilir.

5. GECİKMELİ BULANIK TEKİL SİSTEMLERİN KARARLIĞI

Bu bölümde gecikmesi zamana bağlı bulanık tekil bir sisteme ait kararlılık, kararlılaştırma ve gürbüz kararlılaştırma problemleri için yeter koşullar gecikmeye bağlı olarak DME şeklinde verilmiştir. Öncelikli olarak T-S tarzı gecikmesi zamana bağlı bulanık tekil sistemin genel tanımı verilmiş, ikinci bölümde yeter koşullar geliştirildikten sonra örnekler verilmiştir.

5.1 Problemin Tanımı

Doğrusal olmayan gecikmesi zamana bağlı bir sistem T-S tipi bulanık bir model yardımıyla aşağıdaki gibi temsil edilebilir;

(Σ) : *Kural i* :

Eğer $\theta_1(t) M_{i1}$ *ve...* *ve* $\theta_g(t) M_{ig}$

$$İSE \begin{cases} E_i \dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{A}_i + \Delta \tilde{A}_i)x(t) + (\tilde{A}_{di} + \Delta \tilde{A}_{di})x(t - \sigma(t)) + (\tilde{B}_i + \Delta \tilde{B}_i)u(t) \\ \tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad t \in [-\bar{\sigma}, 0] \end{cases}$$

(5.1)

Burada $i \in S = \{1, 2, \dots, r\}$ olmak üzere r kural sayısını, M_{ij} bulanık kümeleri, $\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_g(t)$ öncüllere ait değişkenleri, $\tilde{x}(t) \in R^n$ durum vektörünü, $u(t) \in R^m$ giriş vektörünü göstermektedir. Durum gecikmesi olarak alınan $\sigma(t)$ aşağıdaki koşulları sağlayan zamana bağlı türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} \text{ ve } \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1 \quad (5.2)$$

Burada $E_i \in R^{n \times n}$, $rank E_i \leq n$ ve $\tilde{A}_i, \tilde{A}_{di}, \tilde{B}_i$ uygun boyutlu sabit matrislerdir. $\Delta \tilde{A}_i, \Delta \tilde{A}_{di}$ ve $\Delta \tilde{B}_i$ ise zamanla değişmeyen normu sınırlı belirsiz parametreleri temsil eden matrisler olmak üzere

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{A}_i & \Delta \tilde{B}_i \end{bmatrix} &= H_{0i} F_{0i}(\sigma) \begin{bmatrix} L_{0i} & L_{1i} \end{bmatrix} \\ \Delta \tilde{A}_{di} &= H_{1i} F_{1i}(\sigma) L_{2i} \end{aligned}$$

formundadır. H_i, L_{0i}, L_{1i} ve L_{2i} ise sabit ve uygun boyutlu matrislerdir. Belirsiz $F_i(\sigma)$ matrisi $F_i(\sigma)F_i(\sigma)^T \leq I$ sağlayacak şekildedir ve $\varphi(t)$ vektör değerli sürekli bir fonksiyondur.

Her E_i için $E_i W = \begin{bmatrix} E_{i1} & 0 \end{bmatrix}$, $E_{i1} \in R^{n \times n1}$, $i = 1 \dots r$ ve $\text{rank } E_{i1} = n1$ koşullarını sağlayacak şekilde W tersinir matrisi vardır. Bu şartlar altında

$$V_i E_i W = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 \end{bmatrix} = E$$

koşulunu sağlayacak V_i , $i = 1 \dots r$ matrisleri mevcuttur ve bununla birlikte $x = W^{-1} \tilde{x}$ dönüşümü sistem matrislerini

$$\begin{aligned} A_i &= V_i \tilde{A}_i W = \begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} \\ A_{i3} & A_{i4} \end{bmatrix}, \Delta A_i = V_i \Delta \tilde{A}_i W \\ A_{di} &= V_i \tilde{A}_{di} W = \begin{bmatrix} A_{di1} & A_{di2} \\ A_{di3} & A_{di4} \end{bmatrix}, \Delta A_{di} = V_i \Delta \tilde{A}_{di} W \\ B_i &= V_i \tilde{B}_i, \Delta B_i = V_i \Delta \tilde{B}_i W, \varphi(t) = W^{-1} \tilde{\varphi}(t) \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşümle (5.1) ile verilen T-S modelini eşdeğer olarak

(Σ) : *Kural i* :

$$\begin{aligned} &Eğer \theta_1(t) M_{i1} \text{ ve } \dots \text{ ve } \theta_g(t) M_{ig} \\ &ISE \left\{ \begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{di} + \Delta A_{di})x(t - \sigma(t)) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\bar{\sigma}, 0] \end{aligned} \right. \quad (5.3) \end{aligned}$$

şekline getirir. Durum ve giriş vektörleri ile birlikte (5.3) ile verilen T-S bulanık sistemi ağırlık ortalamalı durulaştırıcı ve çıkarım yapan operatörü çarpma operatörü kullanılarak; $\theta(t) = [\theta_1(t) \ \theta_2(t) \ \dots \ \theta_g(t)]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) \{ (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{di} + \Delta A_{di})x(t - \sigma(t)) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \}}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) \{ (A_i + \Delta A_i)x(t) + (A_{di} + \Delta A_{di})x(t - \sigma(t)) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\mu_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}(\theta_j(t)) \text{ ve } h_i(\theta(t)) = \frac{\mu_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))}$$

olacak şekilde bulunur. Bu eşitliklerde her t değeri için

$$\mu_i(\theta(t)) \geq 0, i \in S, \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) > 0 \quad (5.5)$$

ve ayrıca

$$h_i(\theta(t)) \geq 0, i \in S, \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1 \quad (5.6)$$

koşulları önkabul olarak alınır.

Sistemin nominal hali için PDD koşulları kullanılarak

Kontrol kuralı i :

Eğer $\theta_1(t) F_{i1}$ ve...ve $\theta_g(t) F_{ig}$ ise
 $u(t) = K_i x(t)$

bulanık kontrol kuralları oluşturulabilir. Paralel dağıtılmış dengeleyici'ye (PDD) dayalı tasarım yöntemi her bir yerel doğrusal model için bir geribesleme kontrol kuralı oluşturmaya dayanır ve genel kontrol kuralı her bir kurala karşılık gelen kontrol kurallarının birleşimiyle

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) K_i x(t)}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))} \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) K_i x(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinde elde edilir [47, 52]. Oluşturulan bulanık kontrol kuralları sistemin öncül kısmındaki aynı üyelik fonksiyonlarını kullanır.

(5.4) sisteminin nominal hali için PDD ile oluşturulan kontrol kuralları ile birlikte

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta) h_j(\theta) (A_{ij} x(t) + A_{di} x(t)) \quad (5.8)$$

$$A_{ij} = A_i + B_i K_j$$

yazmak mümkündür.

Belirsizlik parametrelerinin eklenmesiyle birlikte de aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\theta(t))h_j(\theta(t)) \left\{ (A_{ij} + H_{0i}F_{0i}(\sigma)D_{ij})x(t) + (A_{di} + H_{1i}F_{1i}(\sigma)L_{2i})x(t - \sigma(t)) \right\}$$

$$A_{ij} = A_i + B_iK_j, \quad D_{ij} = L_{0i} + L_{1i}K_j \quad (5.9)$$

Tanım 5.1[25]: (5.3) ile verilmiş bulanık tekil sistemi için;

Eğer $\det(sE - \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))A_i) \neq 0$ ise (E, A_i) çiftine *regüler dir* denir.

Eğer $\deg(\det(sE - \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t))A_i)) = \text{rank } E$ ise (E, A_i) çiftine *etkiden bağımsız* denir.

Tanım 5.2:

Eğer (E, A) çifti regüler ve etkiden bağımsız ise bu durumda, gecikmeli tekil (5.3) sistemi de regüler ve etkiden bağımsız dir denir. Her $\varepsilon > 0$, en az bir skaler $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı $\sup_{-t \leq t \leq 0} \|\phi(t)\| \leq \delta(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\phi(t)$ uygun başlangıç koşulu için bulunabiliyorsa, sistemin çözümü olan $x(t)$, her $t \geq 0$ için $\|x(t)\| \leq \varepsilon$ koşulunu sağlayacaktır. Böyle sistemlere kararlıdır denir. Bununla birlikte, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ de yazılabilir.

Tanım 5.3: Belirsiz gecikmeli Σ sistemi $u(t) = 0$ durumundaki bütün kabul edilebilir ΔA_i ve ΔA_{di} belirsizlikleri için *regüler, etkiden bağımsız ve kararlı* ise bu durumda Σ 'ya *gülbüz kararlı* sistem denir.

Tanım 5.4:, Belirsiz gecikmeli Σ sistemini gülbüz kararlı hale getirecek $u(t) = K_i x(t)$, $K_i \in R^{m \times n}$ doğrusal durum geri besleme kontrol kuralı varsa bu durumda Σ sistemi *gülbüz kararlaştırılabilir*dir ve $u(t) = K_i x(t)$ ye, Σ sistemi için *kararlı geribesleme kontrol kuralı* denir.

Y.Teorem 5.1[25]: Tekil $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$P^T E = E^T P \geq 0$$

$$P^T A_i + A_i^T P < 0 \quad (5.10)$$

şartlarını sağlayacak bir P matrisinin olmasıdır.

Y.Teorem 5.2[55]: $1 \leq i \leq n$ olmak üzere herhangi X_i , Y_i ve $S > 0$ uygun boyutlu reel matrisleri için $h_i: h_i(M(k)) \geq 0$, $\sum_{i=1}^n h_i(M(k)) = 1$ bağıntılarını sağlıyorsa bu durumda

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j X_i^T S Y_j &\leq \sum_{i=1}^n h_i (X_i^T S X_i + Y_i^T S Y_i) \\ 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_i h_j h_k h_l X_{ij}^T S Y_{kl} &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j (X_{ij}^T S X_{ij} + Y_{ij}^T S Y_{ij}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: $2X^T S Y \leq \inf_{S>0} \{X^T S X + X^T S X\}$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j X_i^T S Y_j &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j (X_i^T S X_i + Y_i^T S Y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i X_i^T S X_i + \sum_{j=1}^n h_j Y_j^T S Y_j \\ &= \sum_{i=1}^n h_i (X_i^T S X_i + Y_i^T S Y_i) \end{aligned}$$

ve benzer işlem adımları tekrarlanarak

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n h_i h_j h_k h_l X_{ij}^T S Y_{kl} &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j h_k h_l (X_{ij}^T S X_{ij} + Y_{kl}^T S Y_{kl}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j X_{ij}^T S X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_k h_l Y_{ij}^T S Y_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j (X_{ij}^T S X_{ij} + Y_{ij}^T S Y_{ij}) \end{aligned}$$

(5.11) deki eşitsizlikler elde edilir.

5.2 Gecikmesi Zamanla Değişen Bulanık Tekil Sistemlerde Gecikmeye Bağlı Gürbüz Kararlılık ve Gürbüz Kararlılaştırma

Bu bölümde, bulanık tekil sistemler için gürbüz kararlılık ve kararlılaştırma probleminin çözümü gecikmeye bağlı olarak doğrusal matris eşitsizliği yaklaşımıyla verilecektir. Fakat buna geçmeden önce zorlanmamış nominal halde olan

$$E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta) (A_i x(t) + A_{di} x(t - \sigma(t))) \quad (5.12)$$

sisteminin kararlı hale getirecek koşulları verelim.

Teorem 5.1: $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$ ve $0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$ ve η sabitleri verilmiş olsun. Nominal tekil (5.12) sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve kararlı olması için yeter koşul

$$\begin{aligned}\Gamma_{11i} &= P^T A_i + A_i^T P + Q + E^T N E + E^T N^T E \\ \Gamma_{12i} &= P^T A_{di} - E^T N E + E^T M^T E \\ \Gamma_{22i} &= -(1-\eta)Q - E^T M E - E^T M^T E\end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_{11i} & \Gamma_{12i} & -\bar{\sigma} E^T N & \bar{\sigma} A_i^T Z \\ * & \Gamma_{22i} & -\bar{\sigma} E^T M & \bar{\sigma} A_{di}^T Z \\ * & * & -\bar{\sigma} Z & 0 \\ * & * & 0 & -\bar{\sigma} Z \end{bmatrix} < 0 \quad (5.13)$$

eşitsizliğini sağlayacak uygun boyutlu

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, P_{11} = P_{11}^T > 0, Q^T = Q > 0, Z^T = Z > 0 \quad N, M$$

matrislerinin bulunmasıdır.

İspat: $\therefore$ (5.13) ile verilen DME sağlandığı takdirde $P^T A + A^T P < 0$ olduğunu söyleyebiliriz. $h_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^r h_i = 1$ olduğundan $P^T (\sum_{i=1}^r h_i A_i) + (\sum_{i=1}^r h_i A_i^T) P < 0$ elde edilir. Sistemin regülerliğinin sağlanması için (5.10) koşullarını kullanarak $P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, P_{11} = P_{11}^T > 0$ formunda elde edilir. Dolayısıyla (5.12) sistemi regüler ve etkiden bağımsızlık özelliklerini sağlar. Aynı şekilde P nin tersinir olduğu söylenebilir. Bundan dolayı P_{22} de tersinirdir. P matrisi (5.13) de yerine yerleştirilip soldan ve sağdan $\begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile çarpılırsa aşağıdaki (5.14) ve (5.15)'deki matris eşitsizlikleri elde edilir.

$$\begin{bmatrix} P_{22}^T A_{i22} + A_{i22}^T P_{22} + Q_{22} & P_{22}^T A_{di22} \\ * & -(1-\eta)Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} P_{22}^T A_{i22} + A_{i22}^T P_{22} + Q_{22} & P_{22}^T A_{di22} \\ * & -Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.15)$$

Buradan Q_{22} matrisinin tersinir olduğunu söyleyebiliriz. (5.14) eşitsizliğinden

$$P_{22}^T \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22} \right) + \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22}^T \right) P_{22} < 0 \quad \text{ve bundan dolayı} \quad \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22} \right) \text{ tersinirdir.} \quad (5.14)$$

eşitsizliği sağdan ve soldan sırasıyla $\begin{bmatrix} -\left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22}^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{di22} \right)^T & I_{n_2} \end{bmatrix}$ matrisi ve

$$\text{transpozu ile çarpılırsa} \quad \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{di22} \right)^T \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22}^{-T} \right) \times Q_{22} \times \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22}^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{di22} \right) - Q_{22} < 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç $\rho \left(\left(\sum_{i=1}^r h_i A_{i22}^{-1} \right) \left(\sum_{i=1}^r h_i A_{di22} \right) \right) < 1$ olduğunu gösterir.

Lyapunov-Krasovskii fonksiyoneli (LKF)

$$V(x(t)) = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_1(x(t)) = x^T(t) P^T E x(t)$$

$$V_2(x(t)) = \int_{t-\sigma(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \quad (5.16)$$

$$V_3(x(t)) = \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) ds d\theta$$

olacak şekilde seçelim. $V(x(t))$ fonksiyonelinin türetilmesiyle;

$$\dot{V}_1(x(t)) = 2x^T(t) P^T E \dot{x}(t)$$

$$\dot{V}_2(x(t)) = x^T(t) Q x(t) - (1 - \dot{\sigma}(t)) x^T(t - \sigma(t)) Q x(t - \sigma(t)) \quad (5.17)$$

$$\dot{V}_3(x(t)) = \bar{\sigma} \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) - \int_{t-\bar{\sigma}}^t \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) ds$$

$0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}$, koşulundan dolayı

$$-\int_{t-\bar{\sigma}}^t \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) ds < -\int_{t-\sigma(t)}^t \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) ds \quad (5.18)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. Diğer taraftan

$$-\int_{t-\bar{\sigma}}^t \dot{x}^T(s) E^T Z E \dot{x}(s) ds \leq -\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} \int_{t-\sigma(t)}^t \dot{x}(s)^T E^T ds \right) (\bar{\sigma} Z) \left(\frac{1}{\bar{\sigma}} \int_{t-\sigma(t)}^t E \dot{x}(s) \right) \quad (5.19)$$

Gösterim kısalığı açısından $i_\sigma = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(\int_{t-\sigma(t)}^t E\dot{x}(s) \right)$ ve $x(t-\sigma(t)) = x_\sigma(t)$ olarak alalım

$$2[x^T(t)E^T N + x^T(t-\sigma_i(t))E^T M][Ex(t) - Ex(t-\sigma_i(t)) - \int_{t-\sigma_i(t)}^t E\dot{x}(s)ds] = 0 \quad (5.20)$$

ile birlikte (5.19) ve (5.20) deki bağıntılar (5.17) da yerine konarak gerekli işlemler yapıldıktan sonra terimlerin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & \sum_{i=1}^r h_i(t)x^T(t)[A_i^T P + P^T A_i + Q + E^T N E + E^T N^T E]x(t) + \\ & \sum_{i=1}^r h_i(t)x^T(t)[P^T A_{di} + A_{di}^T P - E^T N E + E^T M^T]x_\sigma(t) + \\ & \sum_{i=1}^r h_i(t)x_\sigma^T(t)[-(1-\eta)Q - E^T M E - E^T M^T E]x_\sigma(t) \\ & + \bar{\sigma} \sum_{i=1}^r h_i(t)\dot{x}^T(t)E^T Z E\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r h_i(t)i_\sigma^T(\bar{\sigma}Z)i_\sigma \\ & - 2\bar{\sigma} \sum_{i=1}^r h_i(t)x^T(t)E^T N i_\sigma - 2\bar{\sigma}x_\sigma^T(t)E^T M i_\sigma \end{aligned} \quad (5.21)$$

elde edilir. Yardımcı teorem 4.1 kullanılarak $\bar{\sigma}\dot{x}^T(t)E^T Z E\dot{x}(t)$ terimi uygun biçimde

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\dot{x}^T(t)E^T Z E\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_i x(t) + A_{di} x(t-\sigma(t))]^T \bar{\sigma}Z [A_j x(t) + A_{dj} x(t-\sigma(t))] \\ &\leq \sum_{i=1}^r h_i \zeta^T(t) \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{di}^T \\ 0 \end{bmatrix} (\bar{\sigma}Z) \begin{bmatrix} A_i & A_{di}^T & 0 \end{bmatrix} \zeta(t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

$\zeta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t-\sigma(t)) \ i_\sigma^T]$ şeklini alır. Son olarak Schur tümleyeni argümanıyla birlikte (5.21) ve (5.22) deki ifadeler kullanılarak $\dot{V}(x_t) < 0$ 'a denk olan (5.13) deki ifade elde edilir. Bu durumda (5.12) sistemi kararlıdır. $\square$

Teorem 5.2. $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$, $0 \leq \dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$ ve η sabitleri ile λ_1 ve λ_2 skalerleri verilmiş olsun. Gecikmeli, tekil (5.8) sisteminin regüler, etkiden bağımsız ve kararlılaştırılabilir olması için yeter koşul

$$\begin{aligned}
\Theta_{11ij} &= X^T A_i^T + A_i X + Y_j^T B_i^T + B_i Y_j + \bar{Q} + 2\lambda_1 E^T X E \\
\Theta_{12ij} &= A_{di} X - E^T X E + E^T X E \\
\Theta_{22ij} &= -(1-\eta)\bar{Q} - 2\lambda_2 E^T X E \\
\Theta_{13ij} &= -\bar{\sigma}\lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Theta_{23ij} &= -\bar{\sigma}\lambda_2 \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Theta_{14ij} &= \bar{\sigma}(X^T A_i^T + Y_j^T B_i^T) \\
\Theta_{24ij} &= \bar{\sigma} X^T A_{di}^T \\
\Theta_{33ij} &= \Theta_{44ij} = -\bar{\sigma}\bar{Z}
\end{aligned}$$

ve

$$\Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{11ij} & \Theta_{12ij} & \Theta_{13ij} & \Theta_{14ij} \\ * & \Theta_{22ij} & \Theta_{23ij} & \Theta_{24ij} \\ * & * & \Theta_{33ij} & 0 \\ * & * & * & \Theta_{44ij} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ii} &< 0 \\
\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji} &< 0 \quad 0 < i < j \leq r
\end{aligned} \quad (5.24)$$

eşitsizliklerini sağlayacak uygun boyutlu

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad X_{11} = X_{11}^T > 0, \quad Q^T = Q > 0, \quad Z^T = Z > 0$$

matrislerinin bulunmasıdır. Bununla birlikte geri besleme kontrol matrisi

$$K_j = Y_j X^{-1} \quad (5.25)$$

ile verilir.

İspat: (5.8) deki sistem için Teorem 5.1 deki aynı işlem sırası takip edilirse

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta}_{11ij} &= (A_i + B_i K_j)^T P + P^T (A_i + B_i K_j) + Q + E^T N E + E^T M^T E \\
\tilde{\Theta}_{12ij} &= P^T A_{di} + A_{di}^T P - E^T N E + E^T M^T E \\
\tilde{\Theta}_{22ij} &= -(1-d)Q - E^T M E - E^T M^T E
\end{aligned}$$

olacak şekilde ve

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{11ij} & \tilde{\Theta}_{12ij} & \tilde{\Theta}_{13ij} \\ * & \tilde{\Theta}_{22ij} & \tilde{\Theta}_{23ij} \\ * & * & \tilde{\Theta}_{33ij} \end{bmatrix} \text{ ve } \Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{14ij} \\ \Theta_{24ij} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\Pi_{ij} = \Upsilon_{ij} + \Lambda_{ij}^T (\bar{\sigma} Z) \Lambda_{ij} \quad (5.26)$$

yazılabilir. Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \zeta^T(t) \Pi_{ij} \zeta(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2 \zeta^T(t) \Pi_{ii} \zeta(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r h_i h_j \zeta^T(t) (\Pi_{ij} + \Pi_{ji}) \zeta(t) \end{aligned} \quad (5.27)$$

elde edilir. $\zeta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t - \sigma(t)) \ i_\sigma^T]$ Schur tümleyeni argümanı ile birlikte (5.26)

ifadesi

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{11ij} & \tilde{\Theta}_{12ij} & \tilde{\Theta}_{13ij} & \tilde{\Theta}_{14ij} \\ * & \tilde{\Theta}_{22ij} & \tilde{\Theta}_{23ij} & \tilde{\Theta}_{24ij} \\ * & * & \tilde{\Theta}_{33ij} & 0 \\ * & * & * & \tilde{\Theta}_{44ij} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

ifadesi ile denk hale gelir. Φ_{ij} matrisini LMI formuna sokmak için,

$T = \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, Z^{-1}, Z^{-1}\}$ olacak şekilde sırasıyla soldan T^T , sağdan T ile çarpar,

aynı zamanda

$$X = P^{-1}, \bar{Q} = P^{-T} Q P^{-1}, \quad Z^{-1} = \bar{Z}, P_{11}^{-1} = X_{11}, \text{ ve}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad N_{11i} = \lambda_1 P_{11}, M_{11i} = \lambda_2 P_{11}$$

olacak şekilde gerekli işlemleri yaparsak;

$$\begin{aligned}
P^{-T} \tilde{\Theta}_{11ij} P^{-1} &= P^{-T} ((A_i + B_i K_j)^T P + P^T (A_i + B_i K_j) + Q + E^T N_i E + E^T N_i^T E) P^{-1} \\
&= P^{-T} A_i^T + P^{-T} (B_i K_j)^T + (A_i + B_i K_j) P^{-1} + P^{-T} Q P^{-1} + 2 P^{-T} E^T N_i^T E P^{-1} \\
&= X^T A_i^T + A_i X + Y_j^T B_i^T + B_i Y_j + \bar{Q} + 2 \lambda_1 E^T X E = \Theta_{11ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{-T} \tilde{\Theta}_{12ij} P^{-1} &= P^{-T} (P^T A_{di} - E^T N_i E + E^T M_i^T E) P^{-1} \\
&= A_{di} X - E^T X E + E^T X E = \Theta_{12ij}
\end{aligned}$$

$$P^{-T} \tilde{\Theta}_{13ij} Z^{-1} = -\bar{\sigma} P^{-T} (E^T N_i) Z^{-1} = -\bar{\sigma} \lambda_1 E^T \bar{Z} = \Theta_{13ij}$$

$$P^{-T} \tilde{\Theta}_{14ij} Z^{-1} = \bar{\sigma} P^{-T} [(A_i + B_i K_j)^T Z] Z^{-1} = \bar{\sigma} X^T (A_i + B_i K_j)^T = \Theta_{14ij}$$

$$P^{-T} \tilde{\Theta}_{22ij} P^{-1} = -P^{-1} [(1-\eta)Q - E^T M_i^T E - E^T M_i^T E] P^{-1} = -(1-\eta)\bar{Q} - 2\lambda_2 E^T X E = \Theta_{22ij}$$

$$P^{-T} \tilde{\Theta}_{23ij} Z^{-1} = -\bar{\sigma} P^{-T} (E^T M_i^T) Z^{-1} = -\bar{\sigma} \lambda_2 E^T \bar{Z} = \Theta_{23ij}$$

$$P^{-T} \tilde{\Theta}_{24ij} Z^{-1} = \bar{\sigma} P^{-T} (A_{di}^T Z) Z^{-1} = \bar{\sigma} X^T A_{di}^T = \Theta_{24ij}$$

$$Z^{-T} \tilde{\Theta}_{33ij} Z^{-1} = -\bar{\sigma} Z^{-T} (Z) Z^{-1} = -\bar{\sigma} Z^{-T} = -\bar{\sigma} \bar{Z} = \Theta_{33ij}$$

$$Z^{-T} \tilde{\Theta}_{44ij} Z^{-1} = -\bar{\sigma} Z^{-T} Z Z^{-1} = -\bar{\sigma} Z^{-T} = -\bar{\sigma} \bar{Z} = \Theta_{44ij}$$

$\zeta^T(t) = [x^T(t) \ x^T(t - \sigma(t)) \ i_\sigma]$ olmak üzere $\dot{V}(t) < \zeta^T(t) \Phi_{ij} \zeta(t) < 0$. Bu durumda $\dot{V}(t) < 0$ ifadesi (5.23) ile verilen $\Sigma_{ij} < 0$ DME'si denktir. Dolayısıyla sistem kararlıdır ve geri besleme kontrol matrisi (5.25) deki gibi verilir. $\square$

Teorem 5.3. $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma} < \infty$ ve $\dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$, ε_i , λ_1 , λ_2 ve η sabitleri verilmiş olsun. Gecikmeli, tekil ve belirsiz parametreye sahip (5.9) sisteminin regüler, etkidenden bağımsız ve gürbüz kararlılaştırılabilir olması için yeter koşul

$$\Theta_{11ij} = X^T A_i^T + A_i X + Y_j^T B_i^T + B_i Y_j + \bar{Q} + 2\lambda_1 E^T X E$$

$$\Theta_{12ij} = A_{di} X - \lambda_1 E^T X E + \lambda_2 E^T X E$$

$$\Theta_{22ij} = -(1-\eta)\bar{Q} - \lambda_2 E^T X E - \lambda_2 E^T X E$$

$$\Theta_{13ij} = -\bar{\sigma} \lambda_1 \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{14ij} = \bar{\sigma} X^T A_{ij}^T$$

$$\Theta_{23ij} = -\bar{\sigma} \lambda_2 \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_{24ij} = \bar{\sigma} X^T A_{di}^T$$

$$\Theta_{33ij} = \Theta_{44ij} = -\bar{\sigma} \bar{Z}$$

$$A_{ij} = A_i + B_i K_j, \quad D_{ij} = L_{0i} + L_{1i} K_j$$

olacak şekilde,

$$\Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \Theta_{11ij} & \Theta_{12ij} & \Theta_{13ij} & \Theta_{14ij} & H_{0i}^T & H_{1i}^T & \varepsilon_i X^T D_{ij}^T & 0 \\ * & \Theta_{22ij} & \Theta_{23ij} & \Theta_{24ij} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_i X^T L_{2i}^T \\ * & * & \Theta_{33ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \Theta_{44ij} & H_{0i}^T & H_{1i}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_i I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.29)$$

eşitsizliğini sağlayacak uygun boyutlu

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, X_{11} = X_{11}^T > 0, \bar{Q} = \bar{Q}^T > 0, \bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ * & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0, Y,$$

matrislerinin bulunmasıdır. Bununla birlikte geri besleme kontrol matrisi

$$K_j = Y_j X^{-1} \quad (5.30)$$

ile verilir.

İspat: Schur tümleyeni argümanı ve (5.29) eşitsizliği kullanılarak

$$\Phi_{ij} + \varepsilon^{-1} \Gamma_i \Gamma_i^T + \varepsilon \Xi_{ij}^T \Xi_{ij} < 0 \quad (5.31)$$

elde edilir. Burada Φ_{ij} (5.23) deki matris ile eşit ve $\Gamma_i^T = \begin{bmatrix} H_{0i} & 0 & 0 & H_{0i} \\ H_{1i} & 0 & 0 & H_{1i} \end{bmatrix}^T$,

$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} D_{ij} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{2i} X & 0 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde seçilir. 2 numaralı yardımcı teorem ve (5.31)

ifadesi ve $F_i(t) = \begin{bmatrix} F_{0i}(t) & 0 \\ 0 & F_{1i}(t) \end{bmatrix}$ ile birlikte

$$\Delta \Phi_{ij} = \Gamma_i F_i(t) \Xi_{ij} + \Xi_{ij}^T F_i(t)^T \Gamma_i^T \quad (5.32)$$

olacak şekilde,

$$\Phi_{ij} + \Delta \Phi_{ij} < 0 \quad (5.33)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Teorem 5.2'ye göre (5.9) sistemi kararlıdır ve geri besleme kontrol matrisi (5.30)'daki gibi verilir.

5.3 Sayısal Örnekler

Verilen sonuçların işlerliğini görmek için aşağıdaki örnekleri değerlendirelim.

Örnek 5.1: Aşağıdaki sistemin kararlılığı [31] numaralı çalışmada incelenmiştir.

Eğer x_1, P ise

$$E\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_{d1}x(t - \sigma(t)) + B_1u(t)$$

Eğer x_1, N ise

$$E\dot{x}(t) = A_2x(t) + A_{d2}x(t - \sigma(t)) + B_2u(t)$$

Bu sistem için P ve N in üyelik fonksiyonları şu şekilde verilmiştir:

$$h_1(x_1) = \frac{1}{1 + e^{-2x_1}} \text{ ve } h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$$

Sistem matrisleri ise aşağıdaki gibidir;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gecikme fonksiyonu ise $\sigma(t) = 2 + 0.5 \sin t$ ile belirlenmiştir. Gecikme fonksiyonun türevinin üst sınırı $d = 0.5$ olarak seçildiğinde DME için uygun çözüm ve geri besleme durum matrisleri aşağıdaki şekilde belirlenir;

$$X = \begin{bmatrix} 2.7233 & 0 \\ -0.4160 & 0.2333 \end{bmatrix}, \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0.1237 & -0.0294 \\ -0.0294 & 0.8481 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 7.0366 & 0.3140 \\ 0.3140 & 9.2264 \end{bmatrix}$$

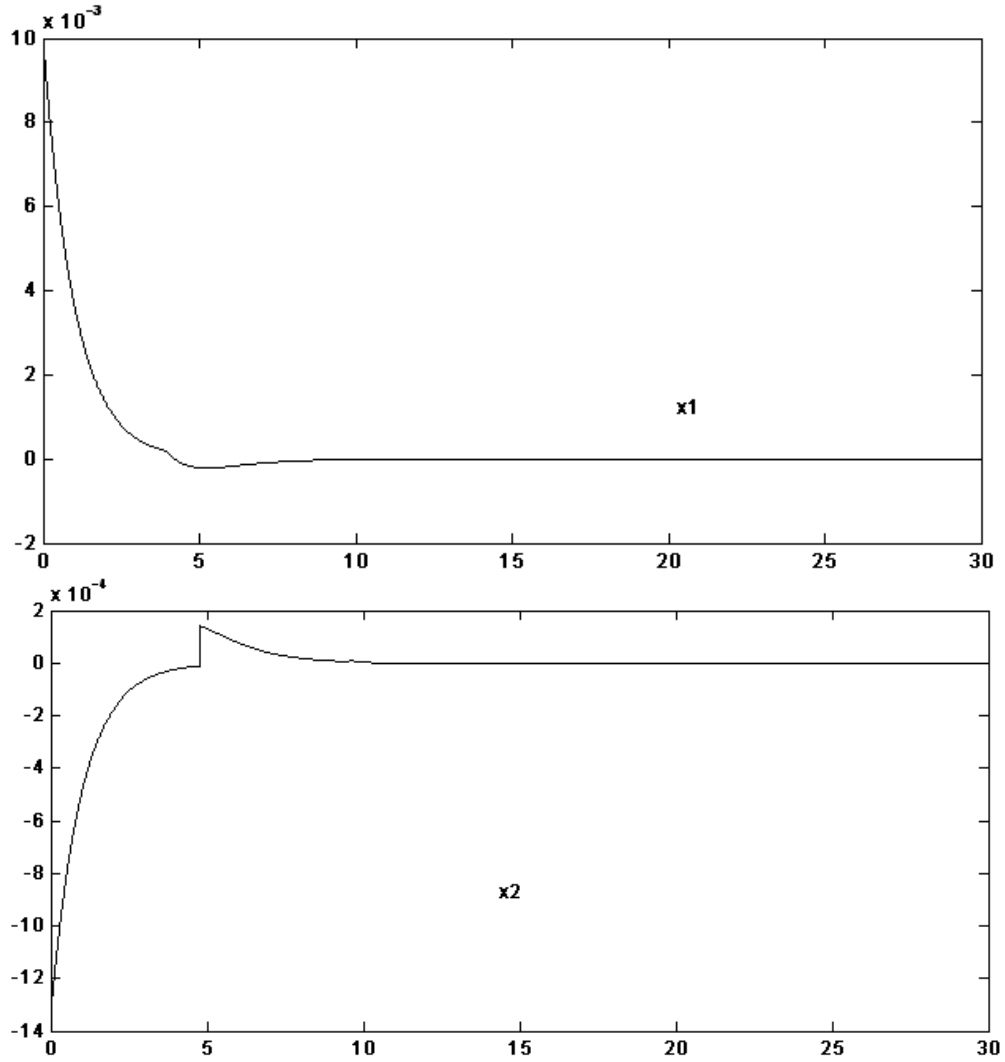
$$K_1 = [-1.1609 \quad -4.5549], K_2 = [-0.6909 \quad 1.9064]$$

$\bar{\sigma}$ değerleri Matlab altındaki LMI araç kutusu yardımıyla elde edilerek değişik parametreler için aşağıdaki tablo düzenlenmiştir.

Çizelge 5.1 : Örnek 1 için $\bar{\sigma}$ değeri

η	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\bar{\sigma}$
0	0.1	5
0.5	0.1	4.79
0.99	0.1	4.76

Örnek 1 deki sisteme ait simülasyon sonuçlarının verildiği Şekil 5.2 den sistemin kararlı sonuç verdiği de gözlenebilir.



Şekil 5.1 : Örnek 1'deki sisteme ait simülasyon sonuçları.

Örnek 5.2: Bir başka çalışma olan [32]'de bulanık tekil bir sistemin gürbüz kararlılaştırılma problemi için seçilen sistemin yapısı ve sistem matrisleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Eğer x_1, P ise

$$E\dot{x}(t) = (A_1x(t) + \Delta A_1(t)) + (A_{d1}x(t - \sigma(t)) + \Delta A_{d1}(t)) + (B_1u(t) + \Delta B_1(t))$$

Eğer x_1, N ise

$$E\dot{x}(t) = (A_2x(t) + \Delta A_2(t)) + (A_{d2}x(t - \sigma(t)) + \Delta A_{d2}(t)) + (B_2u(t) + \Delta B_2(t))$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Belirsizlik parametrelerini temsil eden matrisler ise;

$$H_{01} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, H_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, H_{11} = H_{12} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$L_{01} = L_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, L_{21} = L_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = 0.3, L_{12} = 0.2$$

Bu sistem için P ve N in üyelik fonksiyonları yukarıdaki örnekte olduğu gibidir.

$$h_1(x_1) = \frac{1}{1 + e^{-2x_1}} \text{ ve } h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$$

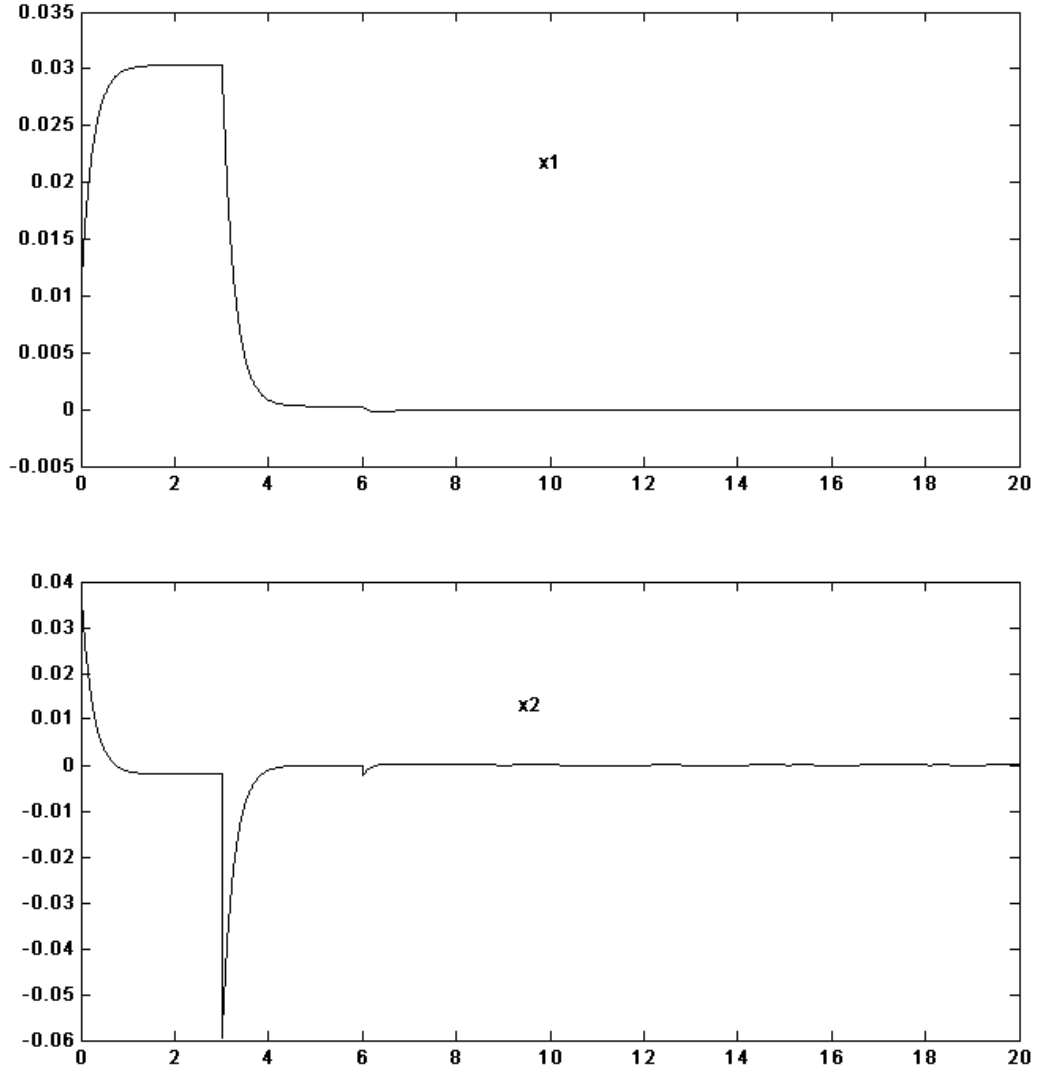
Gecikme fonksiyonu ise $\sigma(t) = 2 + 0.5 \sin t$ ile belirlenmiştir. Gecikme fonksiyonun türevinin üst sınırı $d = 0.5$ olarak seçildiğinde LMI için uygun çözüm ve geri besleme durum matrisleri aşağıdaki şekilde belirlenir;

$$X = \begin{bmatrix} 1.3734 & 0 \\ -5.0159 & 7.1267 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3.5733 & -7.3071 \\ -7.3071 & 14.9603 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} -69.2691 & -3.6045 \\ -3.6045 & 42.1464 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-15.3537 \quad -1.8143], K_2 = [-15.1392 \quad -1.7816]$$

$\bar{\sigma}$ değeri elde edilmiş ve değişik parametreler için aşağıdaki tablo elde edilmiştir

.



Şekil 5.2 : Örnek 2’deki sisteme ait simülasyon sonuçları.

Şekil 5.2 durum değişkenlerinin kararlılık sonuçlarının simülasyonunu göstermektedir.

Çizelge 5.2 : Örnek 2 için $\bar{\sigma}$ değerleri

η	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$	$\bar{\sigma}$
0	0.1	1	3.61
0.5	0.1	1	3.01

Örnek 5.3: [33] numaralı çalışmada ele alınan doğrusal olmayan ve gecikmeye bağlı diferansiyel sistem

$$(1 + a \cos \theta(t))\ddot{\theta}(t) = -b\dot{\theta}^3(t) + c\theta(t) + c_\tau\theta(t - \tau(t)) + du(t)$$

şeklinde verilmiştir. Burada $c_\tau = 0.8$, $\tau(t) = 1 + 0.2 \sin(t)$ olarak alınırsa sistem matrisleri;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & -b(\phi^2 + 2) & a - 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & -a - 1 - a\phi^2 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & a - 1 \end{bmatrix}, A_{d1} = A_{d2} = A_{d3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_\tau & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix}$$

olan bulanık bir sisteme dönüşür. $a = b = c = d = 1$, $\phi = 2$ olarak alınarak kararlılık incelemesi yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Çizelge 5.3 : Örnek 3 için $\bar{\sigma}$ değerleri

η	$\lambda_1 = \lambda_2$	$\bar{\sigma}$
0.2	0.1	4.99
0.2	0.001	5.55

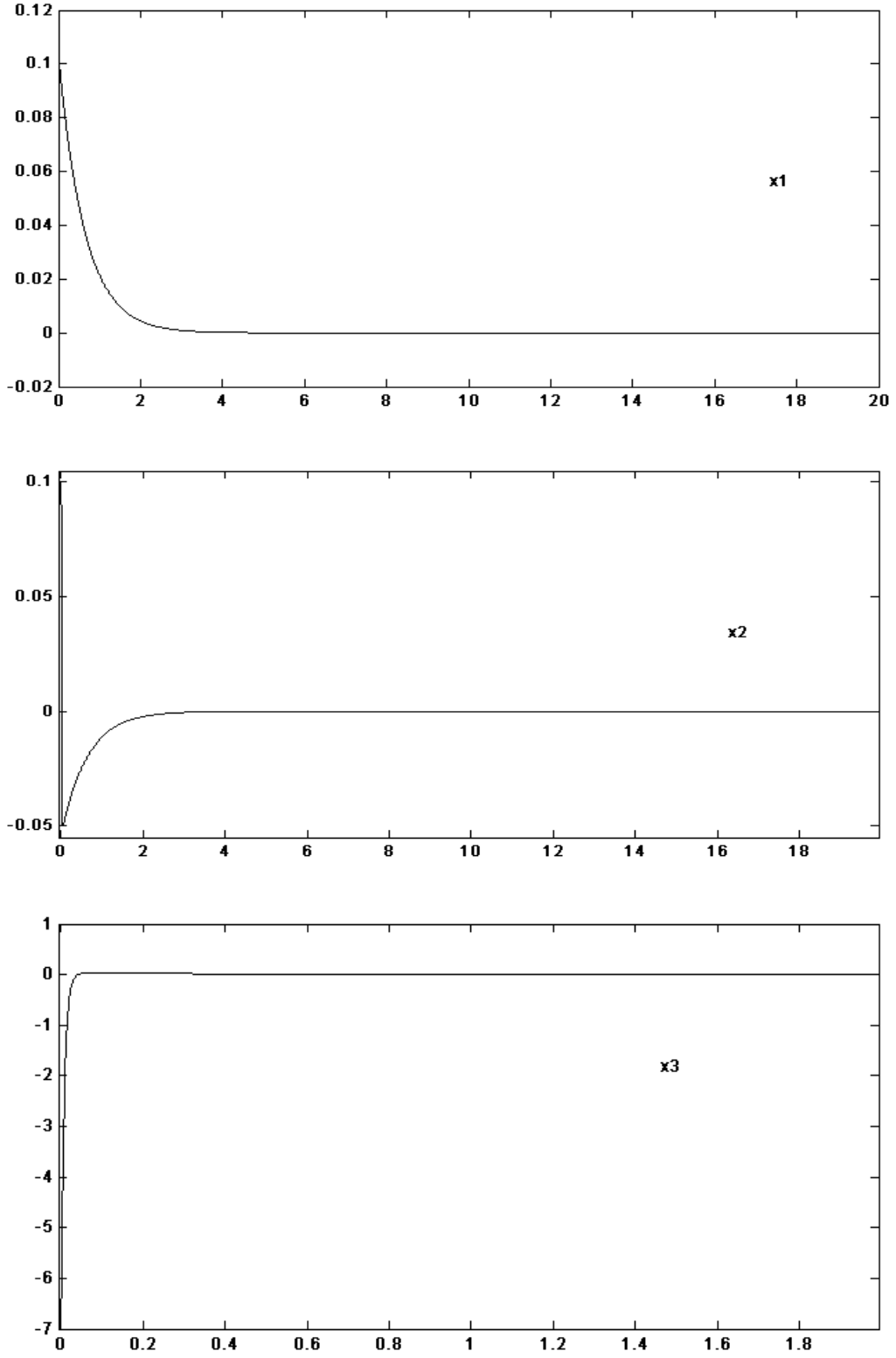
Geri besleme kontrol matrisleri ise

$$K_1 = 10^4 \times [-1.1412 \quad -2.213 \quad -0.049]$$

$$K_2 = 10^4 \times [-1.1412 \quad -2.213 \quad -0.049]$$

$$K_3 = 10^4 \times [-1.1412 \quad -2.213 \quad -0.049]$$

olarak elde edilmiştir.



Şekil 5.3 : Örnek 3’deki sisteme ait simülasyon sonuçları.

Örnek 3 deki durum değişkenleri için simülasyon sonuçları Şekil 5.3’te verilmiştir.

Örnek 5.4: Son örnek [34] numaralı çalışmada incelenmiş ve gecikmeden bağımsız olarak oluşturulan DME yapısı için kararlılık koşullarından sonuç elde edilememiş bir sistemdir. Teorem 5.1 de verilen gecikmeye bağlı kararlılık yapısı altında incelendiğinde ise Tablo 4 teki [34] numaralı çalışmayla beraber karşılaştırmalı sonuçlar elde edilmiştir.

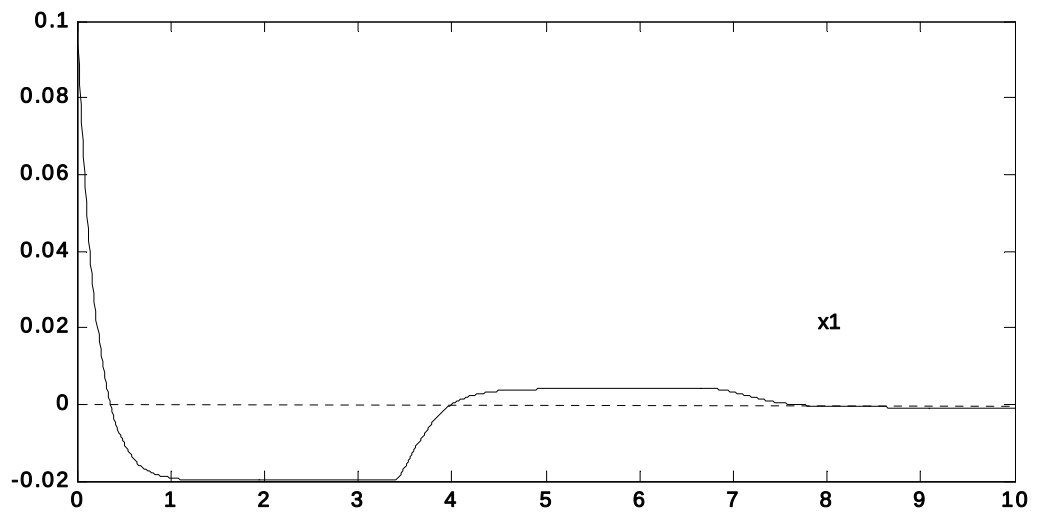
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -4 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

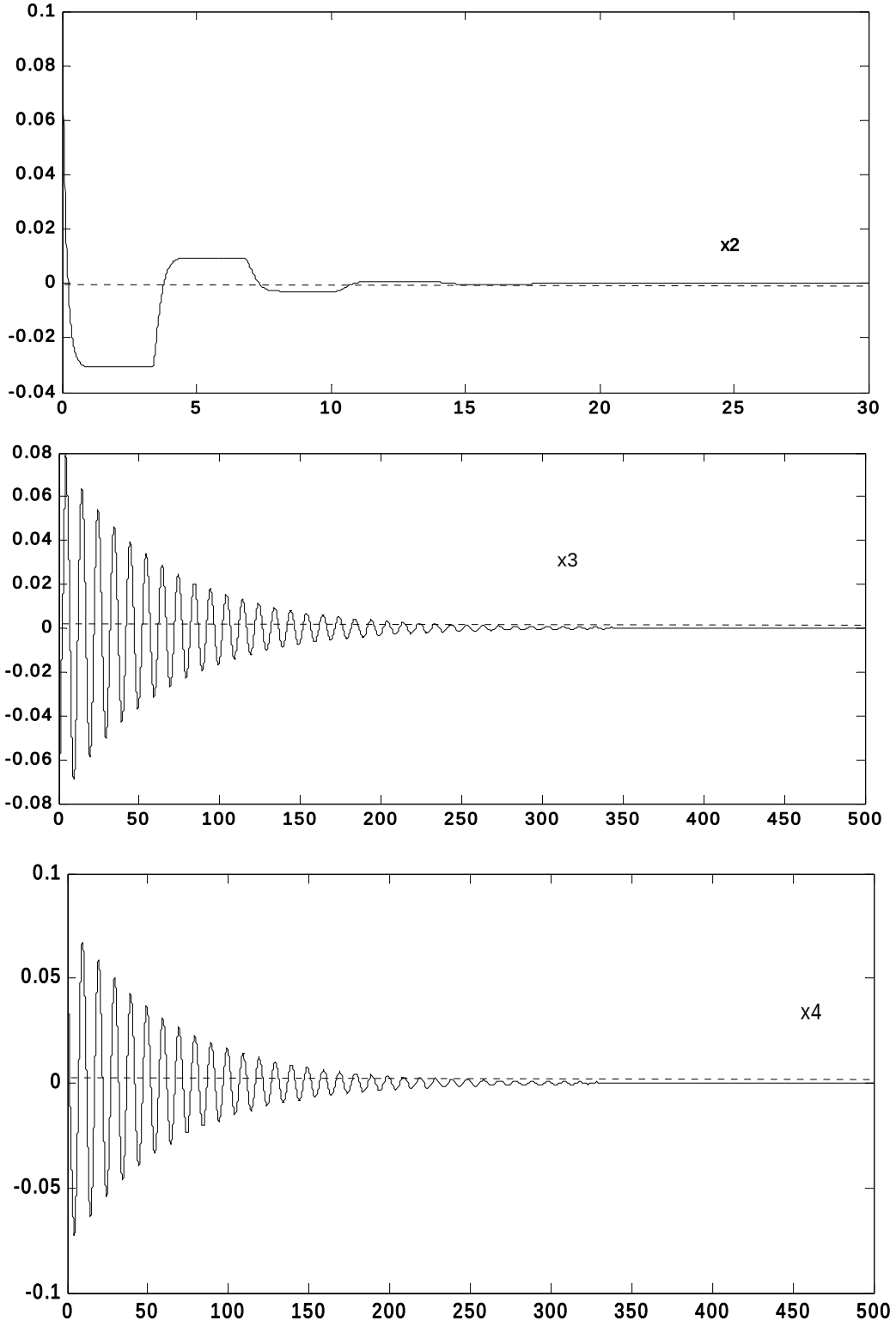
$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -2.5 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Çizelge 5.4 : Örnek 3 için $\bar{\sigma}$ değerleri

	η	$\bar{\sigma}$
[34]	0.1	3.36
Teorem 5.1	0.1	3.36

Tablodan elde edilen sonuçlar gecikmeye bağlı olan sonuçların gecikmeden bağımsız olan sonuçlara göre daha etkin olduğunu göstermektedir.





Şekil 5.4 : Örnek 4'deki sisteme ait simülasyon sonuçları.

Örnek 4 deki durum değişkenleri için simülasyon sonuçları Şekil 5.4'te verilmiştir.

6. GARANTİLİ MALİYET KONTROLÜ

Gerçek bir kontrol düzeneği ile çalışılırken, kararlılığın yanısıra belirli bir düzeyde performans seviyesinin garantilenmesi hedeflenir. Bu problem ilk olarak [56] numaralı yapılan çalışmada incelenerek garantili maliyet kontrolü olarak adlandırılmıştır. Bu yaklaşım verilen performans kriteri için bir üst sınır belirlemekle kalmayıp belirsizliklerden kaynaklanan performans kaybının bu sınırın altında kalmasını garantiler [57].

6.1 Problemin Tanımı

$S > 0, R > 0$ matrisleri verilmiş olsun.

$$J = \int_0^{\infty} \{x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t)\} dt \quad (6.1)$$

(6.1) fonksiyonu ile ilişkili olarak, bulanık garantili maliyet kontrol şu şekilde tanımlanır[58].

Tanım 6.1: (5.8) sistemi ve (6.1) maliyet fonksiyonu için $J \leq J_0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $u(t)$ bulanık kontrol kuralı ve J_0 skaleri varsa bu durumda, $u(t)$ ve J_0 değerine sırasıyla (5.7) sistemine karşılık gelen garantili maliyet kontrol kuralı ve garantili maliyet değeri adı verilir.

Teorem 6.1: $0 \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}$ $\dot{\sigma}(t) \leq \eta < 1$ koşullarını sağlayacak şekilde $\bar{\sigma}$, η , λ_1 ve λ_2 sabitleri verilmiş olsun. Maliyet fonksiyonu (6.1) eşitliği ile verilmiş bulanık tekil (5.8) sisteminin düzgün, etkiden bağımsız ve kararlı olması için yeter koşul

$$\Lambda_{11ij} = X^T (A_i^T + A_j^T) + (A_i + A_j)X + Y_j^T B_i^T + Y_i^T B_j^T + B_i Y_j + B_j Y_i + \bar{Q} + 4\lambda_1 E^T X E$$

$$\Lambda_{12ij} = (A_{di} + A_{dj})X - 2E^T X E + 2E^T X E$$

$$\Lambda_{22ij} = -2(1-\eta)\bar{Q} - 4\lambda_2 E^T X E$$

$$\Lambda_{13ij} = -\bar{\sigma}\lambda_1 \begin{bmatrix} (2\bar{Z}_{11} + U_{1i} + U_{1j}) & (2\bar{Z}_{12} + U_{2i} + U_{2j}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{23ij} = -\bar{\sigma}\lambda_2 \begin{bmatrix} (2\bar{Z}_{11} + V_{1i} + V_{1j}) & (2\bar{Z}_{12} + V_{2i} + V_{2j}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{14ij} = \bar{\sigma} X^T (A_i^T + A_j^T) + Y_j^T B_i^T + Y_i^T B_j^T$$

olacak şekilde

$$\Pi_{ii} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11ii} & \Lambda_{12ii} & \Lambda_{13ii} & \bar{\sigma} X^T A_i^T + Y_i^T B_i^T & X^T & Y_i^T \\ * & \Lambda_{22ii} & \Lambda_{23ii} & \bar{\sigma} X^T A_{di}^T & 0 & * \\ * & * & -\bar{\sigma}\bar{Z} & 0 & 0 & * \\ * & * & * & -\bar{\sigma}\bar{Z} & 0 & * \\ * & * & * & * & -V & * \\ * & * & * & * & * & -U \end{bmatrix} < 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

$$\Pi_{ij} + \Pi_{ji} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11ij} & \Lambda_{12ij} & \Lambda_{13ij} & \Lambda_{14ij} & X^T & Y_i^T & Y_j^T \\ * & \Lambda_{22ij} & \Lambda_{23ij} & \bar{\sigma} X^T (A_{di}^T + A_{dj}^T) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2\bar{\sigma}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2\bar{\sigma}\bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -1/2V & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -U & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -U \end{bmatrix} \leq 0, \quad 1 \leq i \leq j \leq r$$

(6.2-3)

eşitsizliklerini sağlayacak uygun boyutlu

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, X_{11} = X_{11}^T > 0, \bar{Q} = \bar{Q}^T > 0, \bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ * & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} > 0, Y_{i,j}$$

matrislerinin bulunmasıdır. Bununla birlikte garantili maliyet kontrol kuralı

$$K_j = Y_j X^{-1} \quad (6.4)$$

ile verilir ve maliyet fonksiyonu

$$J_0 = x^T(0) E^T P x(0) + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s) \bar{Q}^{-1} \varphi(s) ds + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s) E^T Z E \dot{\varphi}(s) ds d\theta \quad (6.5)$$

şeklinde üst sınıra sahiptir.

İspat: Bir önceki bölümde Teorem 5.2 de yapılan işlem sırası takip edilerek (5.28) de verilen Φ_{ij} ile birlikte

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) \zeta^T(t) \Phi_{ij} \zeta(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) x^T(t) (S + K_i^T R K_j) x(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) x^T(t) (S + K_i^T R K_j) x(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^2(t) \zeta^T(t) \Psi_{ij} \zeta(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j>i}^r h_i(t) h_j(t) \zeta^T(t) (\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) \zeta(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) x^T(t) (S + K_i^T R K_j) x(t)\end{aligned}$$

düzenlemeleriyle

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \Psi_{11ij} & \Psi_{12ij} & -\bar{\sigma}(E^T N_i) & \bar{\sigma}(A_i + B_i K_j)^T Z & I & K_i^T \\ * & \Psi_{22ij} & -\bar{\sigma}(E^T M_i) & \bar{\sigma} A_{di}^T Z & 0 & * \\ * & * & -\bar{\sigma} Z & 0 & 0 & * \\ * & * & * & -\bar{\sigma} Z & 0 & * \\ * & * & * & * & -S^{-1} & * \\ * & * & * & * & * & -R^{-1} \end{bmatrix}$$

(6.6)

şeklinde elde edilir. Bu matrisi DME formuna sokmak için, $T = \text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, Z^{-1}, Z^{-1}, I, I\}$ olacak şekilde sırasıyla soldan T^T , sağdan T ile çarpar, aynı zamanda $X = P^{-1}$, $\bar{Q} = P^{-1} Q P^{-1}$, $Z^{-1} = \bar{Z}$, $V = S^{-1}$, $U = R^{-1}$, $P_{11}^{-1} = X_{11}$, $N_{11i} = \lambda_1 P_{11}$, ve $M_{11i} = \lambda_2 P_{11}$ olacak şekilde tanımlayarak gerekli işlemleri yaparsak;

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i^2(t) \zeta^T(t) \Pi_{ij} \zeta(t) + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j>i}^r h_i(t) h_j(t) \zeta^T(t) (\Pi_{ij} + \Pi_{ji}) \zeta(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t) h_j(t) x^T(t) (S + K_i^T R K_j) x(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(t)h_j(t)x^T(t)(S + K_i^T R K_j)x(t) \\ &= -(x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t))\end{aligned}$$

sonucuna hemen ulaşabiliriz ki bu da bize sistemin kararlı olduğunu gösterir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı 0 dan T ye integre edilirse;

$$\begin{aligned}\int_0^T (x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t)) &\leq -V(x(T)) + x^T(0)E^T Px(0) \\ &\quad + \int_{-\bar{\sigma}(t)}^0 x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{x}^T(s)E^T ZE\dot{x}(s)dsd\theta\end{aligned}\quad (6.7)$$

ve $V(x(t)) \geq 0$, $\dot{V}(x(t)) < 0$ olduğundan $\lim_{T \rightarrow \infty} V(x(T)) = C$ sonucu kullanılarak;

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (x^T(t)Sx(t) + u^T(t)Ru(t)) &\leq x^T(0)E^T Px(0) \\ &\quad + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s)Q\varphi(s)ds \\ &\quad + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s)E^T ZE\dot{\varphi}(s)dsd\theta\end{aligned}\quad (6.8)$$

bulunur. Buradan $J \leq J_0$ olacak şekilde (6.5) ile verilen

$$J_0 = x^T(0)E^T Px(0) + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s)Q\varphi(s)ds + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s)E^T ZE\dot{\varphi}(s)dsd\theta$$

üst sınırı elde edilmiş olur. $\square$

Aşağıdaki teorem garantili maliyet için bulunan üst sınır J_0 ın en küçük değerini araştırmada kullanılan bir araçtır.

Teorem 6.2: (5.7) T-S tekil sistemi ve (6.1) de verilen maliyet fonksiyonu için

$$\begin{aligned}NN^T &= \int_{-\sigma}^0 \varphi(s)\varphi^T(s)ds \\ T_2 &= \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}(s)\dot{\varphi}^T(s)dsd\theta\end{aligned}\quad (6.9)$$

olacak şekilde (6.10) ile verilen iyileştirme problemi X, Q, Z ve $Y_i, i = 1, 2, \dots, r$ şeklinde çözümlere sahipse bu durumda (6.4) ile verilen kontrol kuralı en iyileştirilmiş garantili maliyet kuralıdır.

$$\begin{aligned}
& \min_{X, Q, Z, Y_i} \{ \omega + tr(\Omega_1) + tr(\Omega_2) \} \\
& \text{öyleki} \quad i) LMI\text{s (24), (25)} \\
& ii) \begin{bmatrix} -\omega & \varphi_1^T(0) \\ \varphi_1(0) & -X_1 \end{bmatrix} < 0 \\
& iii) \begin{bmatrix} -\Omega_1 & N^T \\ N & -Q \end{bmatrix} < 0 \\
& iv) \begin{bmatrix} -\Omega_2 & (T_2^{\frac{1}{2}} E^T)^T \\ * & -\bar{Z} \end{bmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{6.10}$$

İspat: Garantili maliyet üst sınırı olarak bulunan

$$J_0 = x^T(0) E^T P x(0) + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s) (P^T \bar{Q} P)^{-1} \varphi(s) ds + \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s) E^T Z E \dot{\varphi}(s) ds d\theta \tag{6.11}$$

değerini üç bileşen halinde

$$\begin{aligned}
J_{01} &= x^T(0) E^T P x(0) \\
J_{02} &= \int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s) (P^T \bar{Q} P)^{-1} \varphi(s) ds \\
J_{03} &= \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s) E^T Z E \dot{\varphi}(s) ds d\theta
\end{aligned} \tag{6.12}$$

inceleyebiliriz. Tekil sisteme ait başlangıç değeri $x(0) = \begin{bmatrix} \varphi_1^T(0) & \varphi_2^T(0) \end{bmatrix}^T$ E matrisinin ayrışması ile uyumlu olarak verilmiştir. Bu durumda teoremin koşulları gereğince;

$$J_{01} = x^T(0) E^T P x(0) = \varphi_1^T(0) X_1^{-1} \varphi_1(0) < \omega$$

elde edilir. Diğer taraftan $Trace(AB) = Trace(BA)$ eşitliği, $\bar{Z} = Z^{-1}$ tanımlaması ve Schur tümleyeni argümanı ile birlikte iii) ve iv) deki LMI yapılarına

$$\begin{aligned}
tr(J_{02}) &= tr\left(\int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s) (P^T \bar{Q} P)^{-1} \varphi(s) ds\right) \quad tr(J_{03}) = tr\left(\int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s) E^T Z E \dot{\varphi}(s) ds d\theta\right) \\
&= tr\left((P^T \bar{Q} P)^{-1} \int_{-\bar{\sigma}}^0 \varphi^T(s) \varphi(s) ds\right) \quad = tr\left(E^T Z E \int_{-\bar{\sigma}}^0 \int_{\theta}^0 \dot{\varphi}^T(s) \dot{\varphi}(s) ds d\theta\right) \\
&= tr(N^T (P^T \bar{Q} P)^{-1} N) < tr(\Omega_1) \quad = tr(E^T Z E T_2) = tr(T_2^{\frac{1}{2}} E^T Z E T_2^{\frac{1}{2}}) < tr(\Omega_2)
\end{aligned}$$

işlemleri ile ulaşılabilmektedir. Dolayısıyla J_0 için en küçük üst sınır bulma problemi $J_0 < \omega + tr(\Omega_1) + tr(\Omega_2)$ koşulunu sağlayacak bir en küçükleme problemine dönüşmüş olur.

6.2 Sayısal Örnekler

Garantili maliyet hesabı için [31] numaralı çalışmadaki sistemden yararlanılmıştır.

Eğer x_1, P ise

$$E\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_{d1}x(t - \sigma(t)) + B_1u(t)$$

Eğer x_1, N ise

$$E\dot{x}(t) = A_2x(t) + A_{d2}x(t - \sigma(t)) + B_2u(t)$$

Bu sistem için P ve N in üyelik fonksiyonları şu şekilde verilmiştir:

$$h_1(x_1) = \frac{1}{1 + e^{-2x_1}} \text{ ve } h_2(x_1) = 1 - h_1(x_1)$$

Sistem matrisleri ise aşağıdaki gibidir;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{d1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gecikme fonksiyonu ise $\sigma(t) = 2 + 0.5 \sin t$ ile belirlenmiştir. Gecikme fonksiyonun türevinin üst sınırı $d = 0.5$ olarak seçilerek Teorem 6.2 kullanıldığında DME için uygun çözüm ve geri besleme durum matrisleri aşağıdaki şekilde belirlenir;

$$X = \begin{bmatrix} 0.3999 & 0 \\ -0.1060 & -0.1544 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.0765 & 0.1238 \\ 0.1238 & 1.0076 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1.8417 & 0.5701 \\ 0.5701 & 696.1534 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-1.2839 \quad -1.7686], K_2 = [-1.2119 \quad -1.3293]$$

Çizelge 6.1 : J_0 için performans tablosu

Metod	$\bar{\sigma}$	J_0
[31]	3.2396	321.43
Teorem 6.2	3.2396	213.43

Çizelge 6.1 de $\bar{\sigma} = 3.2396$ değeri için [31] numaralı çalışma ile karşılaştırma yapılmıştır. $\bar{\sigma} = 3.2396$ için J_0 'a ait gözlenen değer Teorem 6.2'nin daha iyi sonuç ürettiğini göstermektedir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada gecikmeli tekil ve gecikmeli bulanık tekil sistemlerin kararlılık analizlerine ait yeter koşullar Lyapunov-Krosovskii teoremi ile üretilmeye çalışılmıştır. Ortaya konan bütün sonuçlar DME yapılarıyla ifade edilerek uygun matematiksel hesaplama araçlarıyla çözülmüştür. Ayrıca gürbüz kararlılık ve gürbüz kararlılaştırma için yeter koşullar yine DME yapıları ile ortaya konmuştur.

İlk önce kontrol girdileri içermeyen sistemlerin kararlılıkları ve dayanıklı kararlılıkları incelenmiş, daha sonra bu sistemleri kontrol girdileri vasıtaları ile kararlı hale getirmek için durum geri beslemeli kontrol ve durum geri beslemeli dayanıklı kontrol problemleri çözülmüştür. Bu problemlerde amaç, durum geri besleme kontrol kuralını sistemlere uygulayarak, elde edilen kapalı çevrim sistemlerinin kararlılıkları için yeterli koşulları DME'ler cinsinden bulmak olmuştur.

Sonuçların tamamı gecikmeye bağlı olarak ifade edildiğinden dolayı gecikmeden bağımsız olan sonuçlardan daha esnek bir yapıya sahiptir. Ayrıca kullanılan teknikler ile gecikmenin daha geniş bir aralıkta değişmesi sağlanmış ve herhangi bir model dönüşüm yöntemi ile birlikte literatürde sıkça kullanılan sınırlandırma tekniklerinin kullanılmaması gecikmenin üst sınırının daha büyük olmasına yine olumlu katkıda bulunmuştur.

Gecikme fonksiyonunun hızlı değişimler göstermesi durumunda ($\eta > 1$) kararlılık yeter koşulları vermek için bir çok teknik denenmiş olmasına karşın sonuç alınamamıştır.

Garantili maliyet hesabı problemi gecikmeli bulanık bir tekil sistem için çözümlere garantili maliyet üst sınır değeri hesabı verilmiş ve buna karşılık gelen gecikme değeri yine DME yapısının çözülmesiyle elde edilmiştir.

Ortaya konan bütün sonuçların literatürde yer alan çalışmalarla karşılaştırması yapılmıştır. Kullanılan yöntemdeki serbest parametrelerin sayısının fazla olması diğer çalışmalardan daha iyi sonuç elde edilmesinde önemli rol oynamıştır. Parametreleri belirleyen katsayıların seçimi için uygun şekilde eniyileştirme yapılması sonuçların daha fazla iyi olmasına sebep olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Zadeh, L.A.**, 1965. Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 338-353.
- [2] **Babuska, R.**, 1998. *Fuzzy Modeling for Control*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [3] **Jager, R.**, 1995. Fuzzy logic in control, *Ph.D Thesis*, Technische Universiteit Delft, ISBN 90-9008318-9.
- [4] **Hale, J.K., ve Lunel, S.M.V.**, 1991. *Introdouction to Functional Differential Equations*, App. Math. Sciences, 99, Springer-Verlag, New-York.
- [5] **Mahmoud, M. S.**, 2000. *Robust Control and Filtering for Time delay Systems*, Control Engineering Series, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [6] **Niculescu, S.I., Verriest, E.I., Dugard, L., ve Dion, J.M.**, 1998. *Stability of Linear Systems with Delayed State: A Guided Tour*, Grenoble, 31-38, France.
- [7] **Dai, L.**, 1989. *Singular Control Systems*, Berlin, Germany: Springer-Verlag.
- [8] **Lewis, F.L**, 1986, A survey of linear singular systems, *Circuits. Syst. Signal Processing* , **5**, 336.
- [9] **Masubuchi, I., Kamitane, Y., Ohara, A. and Suda, N.**, 1997. Control for descriptor systems: a matrixinequalities approach, *Automatica*, **33**, 4, 159-162.
- [10] **Xu, S., Dooren, P. V., Stefan, R. and Lam, J.** 2002. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 7, pp. 1122-1128.
- [11] **Cobb, D.**, 1984. Controllability, Observability, and Duality in Singular Systems, *IEEE Transactions On Automatic Control*, Ac-**29**, 12.
- [12] **Xu., S., Lam, J., and Yang, C.**, 2003. Robust H_{∞} control for uncertain singular systems with state delay, *International Journal Robust and Nonlinear Control*, **13**, 1213-1223.
- [13] **Boukas, E K, Almuthairi N F.**, 2006. Delay-dependent stabilization of singular linear systems with delays *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, **2**, 2, 283-291.
- [14] **Boukas, E K.**, 2007. Singular linear systems with delay: H_{∞} stabilization, *Optimal Control Applications and Methods*, **28**, 259-274.
- [15] **Boukas, E K, Liu, Z K**, 2003. Delay-dependent stability analysis of singular linear continuous-time sys-tem, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, **150**, 4, 325-330.

- [16] **Zhu, S., Cheng Z., Cheng Z., Feng, J.,** 2007. Delay-dependent Robust Stability Criteria for Two Classes of Uncertain Singular Time Delay Systems *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**, 5, 880-885,.
- [17] **Zhu, S., Cheng, Z., and Feng, J.,** 2005. Delay-dependent Robust Stability Criterion and Robust Stabilization for Uncertain Singular Time-delay Systems, *American Control Conference*, June 8-10, Portland, OR, USA, 2839-2844.
- [18] **Gao, H., Zhu, S., Cheng, Z., and Xu, B.,** 2005. Delay-dependent State Feedback Guaranteed Cost Control for Uncertain Singular Time Delay Systems, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville, Spain, December 12-15.
- [19] **Wu, Z.G. and Zhou, Wu-N,** 2007. Delay-dependent Robust Stabilization for Uncertain Singular Systems with State Delay, *Acta Automatica Sinica*, **33**, 3, 714-718.
- [20] **Fridman, E.,** 2001. A Lyapunov-based approach to stability of descriptor systems with delay, *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, *IEEE*, 2850-2855.
- [21] **Fridman, E., Shaked U.,** 2002. H_∞ control of linear state-delay descriptor systems: an LMI approach, *Linear Algebra and Its Applications*, **351**, 1, 271-302.
- [22] **Fridman, E.,** 2002. Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **273**, 1, 24-44.
- [23] **Zhong, R., and Yang, Z.,** 2006. Delay-Dependent Robust Control of Descriptor Systems With Time Delay, *Asian Journal of Control*, **8**, 1, 36-44.
- [24] **Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K. and Wang, H.O.,** 1999. Fuzzy descriptor systems: Stability analysis and design via LMIs, *Proceedings of the American Control Conference*, San Diego, California , 1827-1831.
- [25] **Taniguchi, T., Tanaka, K. and Wang, H.O.,** 2000. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, **8**, 4, 442-452.
- [26] **Bao-Ping Ma, Xue-Mei Zhu, Ji Sun,** 2005. Guaranteed Cost Control Of Uncertain T-S Fuzzy Descriptor Systems *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Guangzhou, 18-21.
- [27] **Yoneyama, J. and Ichikawa, A.,** 1999. H_∞ Control for Takagi-Sugeno Fussy Descriptor Systems, *IEEE Conference on Systems, Man and Cybernetics*, III-28-III-33, Tokyo, Japan.
- [28] **Tian, W., Zhang, H. and Jiang, L.,** 2007. Guaranteed Cost Control for a Class of Fuzzy Descriptor Systems with Time-Varying Delay, *Fuzzy Information and Engineering*, ICFIE, ASC **40**, 751-759.
- [29] **Tian, W., Zhang, H. and Yang, X.,** 2007. Robust H_∞ Control for Fuzzy Descriptor Systems with Time-Varying Delay and Parameter Uncertainties *Third International Conference on Natural Computation*, **3**, 18-22,

- [30] **Tian, W., Zhang, H.**, 2008. Robust Fuzzy Guaranteed Cost Control for Nonlinear Descriptor Systems with Time-Varying Delay, *IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control*, ICNSC 864-869.
- [31] **Tian, W.**, 2008. Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy descriptor systems with time delays, *IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems*, 899-904,
- [32] **Wang, Y., Sun, Z. Q. and Sun, F. C.**, 2004. Robust Fuzzy Control of a class of Nonlinear Descriptor Systems with Time-Varying Delay, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, **2**, 76-82.
- [33] **Lin, C., Wang, Q. G. and Lee, T. H.**, 2006. Stability and Stabilization of a class of Fuzzy Time-Delay Descriptor Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **14**, 4, 542-551.
- [34] **Zhang, H., Shen Y. and Feng, G.**, 2009. Delay-dependent stability and control for a class of fuzzy descriptor systems with time-delay, *Fuzzy sets and systems*, **160**, 12, 1689-1707.
- [35] **Demir, T.**, 2007. Delay-dependent Guaranteed Cost control for T-S Fuzzy Systems , *M.Sc. Thesis*, Istanbul Technical University, Turkey.
- [36] **Zhu, S. Q., Cheng, Z.L. and Feng, J.**, 2005. Delay-dependent robust stability criterion and robust stabilization for uncertain singular time-delay systes, *Proceedings of American Control Conference*, Porland, USA, AACC, 2839-2844
- [37] **Zhong, R.X. and Yang, Z.**, 2006. Delay-dependent robust control of descriptor systems with time delay, *Asian Journal of Control*, **8**, 1, 36-44.
- [38] **Gao, H., Shuqian Z., Cheng, Z. and Xu, B.**, 2005. Delay-dependent state feedback guaranteed cost control uncertain singular timedelay systems, *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference*, 4354-4359.
- [39] **Takaba K., Morihira, N. and Katayama, T.**, 1995. A generalized Lyapunov theorem for descriptor system, *Systems and Control Lett.*, **24**, 49-51,.
- [40] **Takagi, T. and Sugeno, M.**, 1985. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern.*, SMC-15, 116-132.
- [41] **Tanaka, K. and Wang, H.O.**, 2001. *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, New York.
- [42] **Kawamoto, S., Tada, K., Ishigame A. and Taniguchi, T.**, 1992. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems, *Proc. of First Int. Conf. on Fuzzy Systems*, 1, 1427-1434.
- [43] **Ohtake, H., Tanaka, K. and Wang, H.O.**, 2001. Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept, *IFSA World Congress and 20 th NAFIPS Int.Conf.1*, 127-132.
- [44] **Kang, G.T., and Sugeno, M.**, 1988. Structure identification of fuzzy model, *Fuzzy Sets and Systems*, **28**, 15-33.
- [45] **Wang, L. and Langari, R.**, 1995. Building Sugeno-type models using fuzzy discretization and orthogonal parameter estimation techniques, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, **3**, 454-458.

- [46] Horikawa, S., Furuhashi, T. and Uchikawa, Y., 1992. On fuzzy modeling using fuzzy neural networks with the back propagation algorithm, *IEEE Trans. on Neural Networks*, **3**, 801-806.
- [47] Kang, G.T. and Sugeno, M., 1986. Fuzzy modeling and control of multilayer incinerator, *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 329-345.
- [48] Sugeno, M. and Tanaka, K., 1991. Successive identification of fuzzy model and its applications to prediction of complex systems, *Fuzzy Sets and Systems*, **42**, 315-344.
- [49] Slotine, J.E. and Li, W., 1991. *Ahead nonlinear Control*, Prentice-Hall Publications, Englewood Cliffs.
- [50] Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. and El Ghaoui, L., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- [51] Wang, H.O., Tanaka, K. and Griffin, M., 1996. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, **4**, 14-23.
- [52] Wang, H.O., Tanaka, K. and Griffin, M., 1995. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model, *Proc. Fuzz-IEEE IFES'95*, **4**, 531-538.
- [53] Wang, H.O., Tanaka, K. and Griffin, M., 1995. An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems: Stability and design issues, *Proc. American Control Conf.*, **4**, 2272-2276.
- [54] Petersen, I. R., 1987. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems, *Systems and Control Letters*, **8**, no.4, pp.351-357.
- [55] Guan, X. P. and Chen, C-L., 2004. Delay-Dependent Guaranteed Cost Control for T-S Fuzzy Systems With Time Delays, *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, **12**, 2, 236-249.
- [56] Chang, S. S. L, amd Peng, T. K. C., 1972, Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, *IEEE Trans. Automat Control*, **AC-17**, 474-483.
- [57] Yu, L., and Chu J., 1999. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems, *Automatica*, **35**, 1155-1159.
- [58] Sahin, U. and Baser, U., 2009. Delay-Dependent Guaranteed Cost Control for T-S Fuzzy Descriptor Systems with Time Varying Delay, (accepted proceeding in IFAC'09 8th Workshop on Time Delay System in Romania.)
- [59] Yang, F. Zhang Q-L., 2005. Delay-dependent H control for linear descriptor systems with delay in state, *Journal of Control Theory and Applications*, **3**, 1, pp. 76-84.
- [60] Parlakci, M.N.A, 2006. "Improved robust stability criteria and design of robust stabilizing controller for uncertain linear time delay systems", *Int. J. Robust Nonlinear Control*, **16**, 13, 599-636.
- [61] Parlakci, M.N.A, 2009. "Robust delay-dependent guaranteed cost controller design for uncertain neutral system," *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 8, 2936-2949.

- [62] **Parlakci, M.N.A**, 2009. “Robust delay-dependent guaranteed cost controller design for uncertain nonlinear neutral systems with time –varying state delays,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, doi:10.1002/rnc.1437

EKLER

EK A : Kararlılık Koşullarına Ait Teoremlerdeki DME'lerin Açık Matris Gösterimleri

Çizelge A.1 : Teorem 4.1 için LME'nin açık yapısı

$A_{11}^T * P_{11}^T + A_{21}^T * P_{12}^T + P_{11} * A_{11} + P_{12} * A_{21} + Q_{11} + N_{11} + N_{11}^T$	$A_{21}^T * P_{22}^T + P_{11} * A_{12} + P_{12} * A_{22} + Q_{12}$	$P_{11} * A_{d11} + P_{12} * A_{d21} + N_{11} + M_{11}$	$P_{11} * A_{d12} + P_{12} * A_{d22}$	$-t_1 * N_{11}$	$-t_1 * N_{12}$	$t_1 * A_{11}^T * Z_{11} + t_1 * A_{21}^T * Z_{21}$	$t_1 * A_{11}^T * Z_{12} + t_1 * A_{21}^T * Z_{22}$
***	$A_{22}^T * P_{22}^T + P_{22} * A_{22} + Q_{22}$	$P_{22} * A_{d21}$	$P_{22} * A_{d22}$	0	0	$t_1 * A_{12}^T * Z_{11} + t_1 * A_{22}^T * Z_{21}$	$t_1 * A_{12}^T * Z_{12} + t_1 * A_{22}^T * Z_{22}$
***	***	$-1 + n * Q_{11} - M_{11} - M_{11}^T$	$-1 + n * Q_{12}$	$-t_1 * M_{11}$	$-t_1 * M_{12}$	$t_1 * A_{d11}^T * Z_{11} + t_1 * A_{d21}^T * Z_{21}$	$t_1 * A_{d11}^T * Z_{12} + t_1 * A_{d21}^T * Z_{22}$
***	***	***	$-1 + n * Q_{22}$	0	0	$t_1 * A_{d12}^T * Z_{11} + t_1 * A_{d22}^T * Z_{21}$	$t_1 * A_{d12}^T * Z_{12} + t_1 * A_{d22}^T * Z_{22}$
***	***	***	***	$-t_1 * Z_{11}$	$-t_1 * Z_{12}$	0	0
***	***	***	***	***	$-t_1 * Z_{22}$	0	0
***	***	***	***	***	***	$-t_1 * Z_{11}$	$-t_1 * Z_{12}$
***	***	***	***	***	***	***	$-t_1 * Z_{22}$

Çizelge A.2 : Teorem 4.3 için LME'nin açık yapısı

$A11 * X11^T + A12 * X12^T$ $+ X11 * A11^T$ $+ X12 * A12^T$ $+ B11 * Y11 + Y11^T * B11^T$ $+ Q11 + 2 * l1 * X11$	$A12 * X22^T$ $+ X11 * A21^T$ $+ X12 * A22^T$ $+ B11 * Y12 + Y11^T * B21^T + Q12$	$Ad11 * X11^T$ $+ Ad12 * X12^T -$ $l1 * X11 + l2 * X11$	$Ad12 * X22^T$	$-t1 * l1 Z11 -$ $t1 * U1$	$-t1 * l1 Z12 -$ $t1 * U2$	$t1 * X11 * A11^T$ $+ t1 * X12 * A12^T$ $+ Y11^T * B11^T$	$t1 * X11 * A21^T$ $+ t1 * X12 * A22^T$ $+ (Y11^T * (B21^T])$
***	$A22 * X22^T$ $+ X22 * A22^T$ $+ B21 * Y12 + Y12^T * B21^T + Q22$	$Ad21 * X11^T$ $+ Ad22 * X12^T$	$Ad22 * X22^T$	0	0	$t1 * X22 * A12^T$ $+ Y12^T * B11^T$	$t1 * X22 * A22^T + Y12^T$ $* B21^T$
***	***	$(-1+n) * Q11 -$ $2 * l2 * X11$	$(-1+n) * Q12$	$-t1 * l1 Z11 -$ $t1 * V1$	$-t1 * l1 Z12 -$ $t1 * V2$	$t1 * X11 * Ad11^T +$ $t1 * X12 * Ad12^T$	$t1 * X11 * Ad21^T + t1 * X12 * Ad22^T$
***	***	***	$(-1+n) * Q22$	0	0	$t1 * X22 * Ad12^T,$	$t1 * X22 * Ad22^T$
***	***	***	***	$-t1 / Z11$	$-t1 * Z12$	0	0
***	***	***	***	***	$-t1 * Z22$	0	0
***	***	***	***	***	***	$-t1 * Z11$	$-t1 * Z12$
***	***	***	***	***	***	***	$-t1 * Z22$

Çizelge A.3 : Teorem 5.1 için LME'nin açık yapısı

$A_{i11}^T P_{11}^T + A_{i21}^T P_{12}^T + P_{11}^T A_{i11} + P_{12}^T A_{i21} + Q_{11} + N_{i11} N_{i11}^T$	$A_{i21}^T P_{22}^T + P_{11}^T A_{i12} + P_{12}^T A_{i22} + Q_{12}$	$P_{11}^T A_{di11} + P_{12}^T A_{di21} - N_{i11} M_{i11}^T$	$P_{11}^T A_{di12} + P_{12}^T A_{di22}$	$-t_1^* N_{i11}$	$-t_1^* N_{i12}$	$t_1^* A_{i11}^T Z_{11} + t_1^* A_{i21}^T Z_{12}$	$t_1^* A_{i11}^T Z_{12} + t_1^* A_{i21}^T Z_{22}$
*	$A_{i22}^T P_{22}^T + P_{22}^T A_{i22} + Q_{22}$	$P_{22}^T A_{di21}$	$P_{22}^T A_{di22}$	0	0	$t_1^* A_{i12}^T Z_{11} + t_1^* A_{i22}^T Z_{12}$	$t_1^* A_{i12}^T Z_{12} + t_1^* A_{i22}^T Z_{22}$
*	*	$(-1+n)^* Q_{11} - M_{i11} M_{i11}^T$	$(-1+n)^* Q_{12} - M_{i12} M_{i12}^T$	$-t_1^* M_{i11}$	$-t_1^* M_{i12}$	$t_1^* A_{di11}^T Z_{11} + t_1^* A_{di21}^T Z_{12}$	$t_1^* A_{di11}^T Z_{12} + t_1^* A_{di21}^T Z_{22}$
*	*	*	$(-1+n)^* Q_{22}$	0	0	$t_1^* A_{di12}^T Z_{11} + t_1^* A_{di22}^T Z_{12}$	$t_1^* A_{di12}^T Z_{12} + t_1^* A_{di22}^T Z_{22}$
*	*	*	*	$-t_1^* Z_{11}$	$-t_1^* Z_{12}$	0	0
*	*	*	*	*	$-t_1^* Z_{22}$	0	0
*	*	*	*	*	*	$-t_1^* Z_{11}$	$-t_1^* Z_{12}$
*	*	*	*	*	*	*	$-t_1^* Z_{22}$

Çizelge A.4 : Teorem 5.2 için LME'nin açık yapısı

$X_{11}^T \cdot A_{i11}^T + X_{21}^T \cdot A_{i12}^T + A_{i11} \cdot X_{11} + A_{i12} \cdot X_{21} + Y_{j11}^T \cdot B_{i11}^T + B_{i11} \cdot Y_{j11} + Q_{11} + 2 \cdot l_{11} \cdot X_{11}$	$X_{11}^T \cdot A_{i21}^T + X_{21}^T \cdot A_{i22}^T + A_{i12} \cdot X_{22} + Y_{j11}^T \cdot B_{i21}^T + B_{i11} \cdot Y_{j12} + Q_{12}$	$A_{di11} \cdot X_{11} + A_{di12} \cdot X_{21} - l_{11} \cdot X_{11} + l_{21} \cdot X_{11}$	$A_{di12} \cdot X_{22}$	$-t_1 \cdot k_1 \cdot Z_{11}$	$-t_1 \cdot k_1 \cdot Z_{12}$	$t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{i11}^T + X_{21}^T \cdot A_{i12}^T + Y_{j11}^T \cdot B_{i11}^T$	$t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{i21}^T + X_{21}^T \cdot A_{i22}^T + Y_{j11}^T \cdot B_{i21}^T$
*	$X_{22}^T \cdot A_{i22}^T + A_{i22} \cdot X_{22} + Y_{j12}^T \cdot B_{i21}^T + B_{i21} \cdot Y_{j12} + Q_{22}$	$A_{di21} \cdot X_{11} + A_{di22} \cdot X_{21}$	$A_{di22} \cdot X_{22}$	0	0	$t_1 \cdot X_{22}^T \cdot A_{i12}^T + Y_{j12}^T \cdot B_{i11}^T$	$t_1 \cdot X_{22}^T \cdot A_{i22}^T + Y_{j12}^T \cdot B_{i21}^T$
*	*	$-1 + n^T \cdot Q_{11} - 2 \cdot l_{21} \cdot X_{11}$	$-1 + n^T \cdot Q_{12}$	$-t_1 \cdot k_2 \cdot Z_{11}$	$-t_1 \cdot k_2 \cdot Z_{12}$	$t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{di11}^T + t_1 \cdot X_{21}^T \cdot A_{di12}^T$	$t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{di21}^T + t_1 \cdot X_{21}^T \cdot A_{di22}^T$
*	*	*	$-1 + n^T \cdot Q_{22}$	0	0	$t_1 \cdot X_{22}^T \cdot A_{i12}^T$	$t_1 \cdot X_{22}^T \cdot A_{i22}^T$
*	*	*	*	$-t_1 \cdot Z_{11}$	$-t_1 \cdot Z_{12}$	0	0
*	*	*	*	*	$-t_1 \cdot Z_{22}$	0	0
*	*	*	*	*	*	$-t_1 \cdot Z_{11}$	$-t_1 \cdot Z_{12}$
*	*	*	*	*	*	*	$-t_1 \cdot Z_{22}$

Çizelge A.5 : Theorem 5.3 için LME'nin açık yapısı

1. Satır

S11	S12	S13	S14	S15	S16	S17	S18	H _{i11} ^T	H _{i12} ^T	H _{i11} ^T	H _{i12} ^T	s1-13	s1-14	0	0
*	s21	s22	s23	0	0	s27	s28	H _{i21} ^T	H _{i22} ^T	H _{i21} ^T	H _{i22} ^T	s2-13	s2-14	0	0
*	*	$1+n^T \cdot Q_{11} - 2 \cdot l_2^T \cdot X_{11}$	$-1+n^T \cdot Q_{12}$	S35	S36	S37	S38	0	0	0	0	0	0	S3-15	S3-16
*	*	*	$51+n^T \cdot Q_{22}$	0	0	$t_1^T \cdot X_{22}^T \cdot \text{Adi}_{12}^T$	$t_1^T \cdot X_{22}^T \cdot \text{Adi}_{22}^T$	0	0	0	0	0	0		
*	*	*	*	$-t_1^T \cdot Z_{11}$	$-t_1^T \cdot Z_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	$-t_1^T \cdot Z_{22}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	$-t_1^T \cdot Z_{11}$	$-t_1^T \cdot Z_{12}$	H _{j11} ^T	H _{j12} ^T	H _{j11} ^T	H _{j12} ^T	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	$-t_1^T \cdot Z_{22}$	H _{j12} ^T	H _{j22} ^T	H _{j21} ^T	H _{j22} ^T	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	ei	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	ei	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	ei	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	ei	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	ei	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	ei	0	0
	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	ei

$s_{11}=X_{11}^T \cdot A_{i11}^T + X_{21}^T \cdot A_{i12}^T + A_{i11} \cdot X_{11} + A_{i12} \cdot X_{21} + Y_{j11}^T \cdot B_{i11}^T + B_{i11} \cdot Y_{j11} + Q_{11} + 2 \cdot l_1 \cdot X_{11}$
 $S_{12}=X_{11}^T \cdot A_{i21}^T + X_{21}^T \cdot A_{i22}^T + A_{i12} \cdot X_{22} + Y_{j11}^T \cdot B_{i21}^T + B_{i11} \cdot Y_{j12} + Q_{12}$
 $S_{13}=A_{di11} \cdot X_{11} + A_{di12} \cdot X_{21} - l_1 \cdot X_{11} + l_2 \cdot X_{11}$
 $S_{14}=A_{di12} \cdot X_{22} \quad S_{15}=-t_1 \cdot k_1 \cdot Z_{11}$
 $S_{16}=-t_1 \cdot k_1 \cdot Z_{12}$
 $S_{17}=t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{i11}^T + X_{21}^T \cdot A_{i12}^T + Y_{j11}^T \cdot B_{i11}^T$
 $S_{18}=t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{i21}^T + X_{21}^T \cdot A_{i22}^T + Y_{j11}^T \cdot B_{i21}^T$
 $S_{1-13}=e_i \cdot X_{11}^T \cdot T_{ai11}^T + X_{21}^T \cdot T_{ai12}^T + Y_{j11}^T \cdot B_{i11}^T$
 $S_{1-14}=e_i \cdot X_{22}^T \cdot T_{ai12} + Y_{j12}^T \cdot T_{bi11}^T$

2. Satır

$S_{21}=X_{22}^T \cdot A_{i22}^T + A_{i22} \cdot X_{22} + Y_{j12}^T \cdot B_{i21}^T + B_{i21} \cdot Y_{j12} + Q_{22}$
 $S_{22}=A_{di21} \cdot X_{11} + A_{di22} \cdot X_{21}$
 $S_{23}=A_{di22} \cdot X_{22}$
 $S_{26}=t_1 \cdot X_{22}^T \cdot A_{i12}^T + Y_{j12}^T \cdot B_{i11}^T$
 $S_{27}=t_1 \cdot X_{22}^T \cdot A_{i22}^T + Y_{j12}^T \cdot B_{i21}^T$
 $S_{2-13}=e_i \cdot (T_{ai21} \cdot X_{11} + T_{ai22} \cdot X_{21} + T_{bi21} \cdot Y_{j11})^T$
 $S_{2-14}=e_i \cdot (T_{ai22} \cdot X_{22} + T_{bi21} \cdot Y_{j12})^T$

3. Satır

$S_{35}=-t_1 \cdot k_2 \cdot Z_{11}$
 $S_{36}=-t_1 \cdot k_2 \cdot Z_{12}$
 $S_{37}=t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{di11}^T + t_1 \cdot X_{21}^T \cdot A_{di12}^T$
 $S_{38}=t_1 \cdot X_{11}^T \cdot A_{di21}^T + t_1 \cdot X_{21}^T \cdot A_{di22}^T$
 $S_{3-15}=e_i \cdot (T_{ci11} \cdot X_{11} + e_i \cdot T_{ci12} \cdot X_{21})^T$
 $S_{3-16}=e_i \cdot (T_{ci12} \cdot X_{22})^T$

4. Satır

$S_{4-15}=e_i \cdot (T_{ci21} \cdot X_{11} + e_i \cdot T_{ci22} \cdot X_{21})^T$
 $s_{4-16}=e_i \cdot (T_{ci22} \cdot X_{22})^T$

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Uğur Şahin

Doğum Yeri ve Tarihi: Kırıkkale -05/06/1976

Adres: İ.T.Ü Matematik Mühendisliği Bölümü Ayazağa Kampüsü Sarıyer

Lisans Üniversitesi: Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1998

Y.Lisans Üniversitesi: İ.T.Ü Matematik Mühendisilği Bölümü, 2003

Yayın Listesi:

- Gülbay, M., **Sahin, U.** ve K. Cengiz, 2005, E-COMMERCE CUSTOMER'S SEGMENTATION BY MEANS OF FUZZY C-MEANS CLUSTERING, 35th International Conference on Computers & Industrial Engineering, Istanbul
- Dogan. I., **Sahin, U.**, 2003, Supplier selection using activity-based costing and fuzzy present-worth techniques, Logistics Information Management, ,Vol.16-6, pp.420 – 426
- Bedirhanoglu, I., **Sahin, U.**, 2005, Düşük, Orta ve Yüksek Dayanımlı Betonların Elastisite Modüllerinin Bulanık Mantık İle Belirlenmesi, BMYS, Yükseliş, Kocaeli.
- Demirkaya S., **Sahin, U.**, 2008, Bir Kemer Baraj Kretindeki Yatay Konum Değişimlerinin Modellenmesinde ANFIS Yaklaşımı, BMYS-II.
- **Sahin, U.**, Demirkaya, S., 2008, Long Term Behavior Monitoring of an Arch Dam Using Adaptive Neuro-Fuzzy Model Technique, LTB09, Austuria
- **Sahin, U.**, Bedirhanoglu, I., 2008, A Nero-Fuzzy model approach to predict the compressive strength of FRP wrapped concrete, BMYS-II
- Baser U., **Sahin, U.**, Delay Dependent Robust Stability of Descriptor System with time varying delay. 2008 (gönderilen makale)
- **Sahin, U.**, Baser U., 2009, Delay-Dependent Guaranteed Cost Control for T-S Fuzzy Descriptor Systems with Time Varying Delay, IFAC TDS'09 8th Workshop on Delay System, Romania, 1-3 September.(kabul edilmiş bildirisi)