

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN BURKULMA ANALİZİ İÇİN
GELİŞTİRİLEN YENİ BİR FONKSİYONEL VE SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Tuncay GÜN**

**Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ
Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ**

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ali Nuri DOĞRUOĞLU

HAZİRAN 2002

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN BURKULMA ANALİZİ İÇİN
GELİŞTİRİLEN YENİ BİR FONKSİYONEL VE SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Tuncay GÜN
(501981091)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 31 Mayıs 2002**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali Nuri DOĞRUOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mehmet OMURTAG
Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ (Y.T.Ü)**

HAZİRAN 2002

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, doğru eksenli elastik çubukların burkulma problemi, yeni bir fonksiyonel geliştirilerek incelenmiştir.

Bu çalışma sırasında değerli katkılarını esirgemeyen başta değerli hocam Yrd. Doç. Dr. A. Nuri Doğruoğlu'na, Yüksek Lisans çalışmam sırasında her türlü desteği veren İnş. Müh. Fikret Berker'e, İnş. Müh. Yüksel Soyalan'a ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2002

İnş. Müh. Tuncay Gün

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Çalışmanın Amacı ve Problemin Tanımı	1
1.2. Çalışmada İzlenen Yol	2
1.3. Konu ile İlgili Yapılmış Çalışmalar	2
2. STABİLİTE PROBLEMİNİN TEMEL KAVRAMLARI	5
2.1. Stabilitate Probleminin Denge Konumları	5
2.2. Stabilitate Probleminin Çeşitleri	6
2.3. Problemin Kesin Çözümünün Araştırılması	8
3. GELİŞTİRİLEN FONKSİYONEL	13
3.1. Çubuk Eksenî Yönünde Yayılı Yük Bulunması Haline ait Fonksiyonel	13
3.2. Çubuk Eksenine Dik Yönde Yayılı Yük Etkimesi Haline ait Fonksiyonel	17
4. YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ KULLANILARAK ÇÖZÜMÜN ARAŞTIRILMASI	18
4.1. Ritz Yöntemi	18
4.1.1. Birinci Tip Burkulma Problemi	21
4.1.2. İkinci Tip Burkulma Problemi	29
4.1.3. Üçüncü Tip Burkulma Problemi	35
4.1.4. Dördüncü Tip Burkulma Problemi	40
4.2. Sonlu elemanlar Yöntemi ile Çözüm	47
4.2.1. Lineer Şekil Fonksiyonları (L.Ş.F.) ile Çözüm	51
4.2.1.1. Birinci Tip Burkulma Problemi	54
4.2.1.2. İkinci Tip Burkulma Problemi	58
4.2.1.3. Üçüncü Tip Burkulma Problemi	61
4.2.1.4. Dördüncü Tip Burkulma Problemi	64
4.2.2. Kuadratik Şekil Fonksiyonları (K.Ş.F.) ile Çözüm	67
4.2.2.1. Birinci Tip Burkulma Problemi	70
4.2.2.2. İkinci Tip Burkulma Problemi	73
4.2.2.3. Üçüncü Tip Burkulma Problemi	77
4.2.2.4. Dördüncü Tip Burkulma Problemi	81
4.2.3. Kübik Şekil Fonksiyonları (C.Ş.F.) ile Çözüm	85
4.2.3.1. Birinci Tip Burkulma Problemi	89
4.2.3.2. İkinci Tip Burkulma Problemi	92
4.2.3.3. Üçüncü Tip Burkulma Problemi	94

4.2.3.4. Dördüncü Tip Burkulma Problemi	97
4.2.4. Eleman ve Sistem Matrislerinde İndirgeme İşlemi	100
4.2.4.1. L.Ş.F. Kullanılarak Elde Edilen Matrislerde İndirgeme İşlemi	101
4.2.4.2. K.Ş.F. Kullanılarak Elde Edilen Matrislerde İndirgeme İşlemi	103
4.2.4.3. C.Ş.F. Kullanılarak Elde Edilen Matrislerde İndirgeme İşlemi	104
5. UYGULAMALAR	107
5.1. Değişken Kesitli Çubuk Problemi	107
5.2. Sürekli Kiriş Problemi	110
5.3. Yarım Çerçeve Problemi	113
5.4. Tam Çerçeve Problemi	120
5.4.1. Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve	120
5.4.2. Yanal Deplasmanı Önlenmemiş Çerçeve	125
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	129
KAYNAKLAR	135
ÖZGEÇMİŞ	137

KISALTMALAR

L.Ş.F	: Lineer Şekil Fonksiyonları
K.Ş.F	: Kuadratik Şekil Fonksiyonları
C.Ş.F	: Kübik Şekil Fonksiyonları

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1 : 1.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri	28
Tablo 4.2 : 2.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri	34
Tablo 4.3 : 3.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri	39
Tablo 4.4 : 4.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri	46
Tablo 4.5 : 1.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	57
Tablo 4.6 : 2.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	60
Tablo 4.7 : 3.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	63
Tablo 4.8 : 4.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	66
Tablo 4.9 : 1.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	72
Tablo 4.10 : 2.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	76
Tablo 4.11 : 3.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	80
Tablo 4.12 : 4.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	84
Tablo 4.13 : 1.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	91
Tablo 4.14 : 2.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	94
Tablo 4.15 : 3.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	96
Tablo 4.16 : 4.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri ..	99

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Kararlı,Kararsız ve Farksız Denge Konumları	5
Şekil 2.2 : Vurgu Stabilitesi Problemi	6
Şekil 2.3 : Dallanma Tipi Stabilité Problemi	7
Şekil 2.4 : Dallanma Tipi Stabilité Probleminde Denge Konumları	7
Şekil 2.5 : İki Ucu Mafsallı Çubuğa Ait Bilinmeyenler.....	8
Şekil 2.6 : İki Ucu Mafsallı Çubukta Kesit Tesirleri.....	8
Şekil 2.7 : Burkulma Problemine Ait Bilinmeyenler.....	10
Şekil 2.8 : Farklı Burkulma Tipleri İçin Burkulma Uzunlukları ve Kritik Burkulma Yükleri	12
Şekil 3.1 : Çubuk Eksenî Yönde Düzgün Yayılı Yük Bulunması Hali	13
Şekil 3.2 : Çubuk Eksenine Dik Yönde Düzgün Yayılı Yük Bulunması Hali	17
Şekil 4.1 : Ritz Yöntemi ile Çözümde 1.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler.....	21
Şekil 4.2 : Ritz Yöntemi ile Çözümde 2.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler.....	29
Şekil 4.3 : Ritz Yöntemi ile Çözümde 3.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler.....	35
Şekil 4.4 : Ritz Yöntemi ile Çözümde 4.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler.....	40
Şekil 4.5 : Lokal Ve Global Eksen Takımları Ve Şekil Fonksiyonları	48
Şekil 4.6 : Lineer Şekil Fonksiyonları	51
Şekil 4.7 : Değişken Dönüşümü Yapılmış Lineer Şekil Fonksiyonları	51
Şekil 4.8 : 1.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	54
Şekil 4.9 : 1. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	55
Şekil 4.10 : 1. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekillleri	57
Şekil 4.11 : 2.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	58
Şekil 4.12 : 2.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	59
Şekil 4.13 : 2.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekillleri	60
Şekil 4.14 : 3.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	61
Şekil 4.15 : 3.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile Üç Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekillleri	62
Şekil 4.16 : 4.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	64
Şekil 4.17 : 4.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F. ile Üç Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekillleri	65
Şekil 4.18 : Kuadratik Şekil Fonksiyonları	67
Şekil 4.19 : 1.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	70
Şekil 4.20 : 1. Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekillleri	72

Şekil 4.21	: 2.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	73
Şekil 4.22	: 2.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	74
Şekil 4.23	: 2.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	76
Şekil 4.24	: 3.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	77
Şekil 4.25	: 3.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	78
Şekil 4.26	: 3.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	79
Şekil 4.27	: 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	81
Şekil 4.28	: 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm	83
Şekil 4.29	: 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	83
Şekil 4.30	: 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Üç Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	84
Şekil 4.31	: Kübik Şekil Fonksiyonları	85
Şekil 4.32	: 1.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	89
Şekil 4.33	: 1. Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	91
Şekil 4.34	: 2.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	92
Şekil 4.35	: 2.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	93
Şekil 4.36	: 3.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	94
Şekil 4.37	: 3.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	96
Şekil 4.38	: 4.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm	97
Şekil 4.39	: 4.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri	98
Şekil 5.1	: Değişken Kesitli Çubukta L.Ş.F. ile Birer Elemanlı Çözüm	107
Şekil 5.2	: Sürekli Kiriş Problemine Ait Değişkenler	110
Şekil 5.3	: Sürekli Kiriş Probleminin K.Ş.F. 'lu Tek Elemanlı Çözümü	110
Şekil 5.4	: Sürekli Kiriş Probleminde K.Ş.F. 'lu Tek Elemanda Mod Şekilleri	112
Şekil 5.5	: Yarım Çerçeve Problemi	113
Şekil 5.6	: Yarım Çerçeve Probleminin K.Ş.F. 'lu Birer Elemanlı Çözümü	114
Şekil 5.7	: Yarım Çerçeve Probleminin K.Ş.F. 'lu İkişer Elemanla Çözümü	116
Şekil 5.8	: Yarım Çerçeve Probleminde K.Ş.F. 'lu İkişer Eleman İçin Mod Şekilleri	118
Şekil 5.9	: Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve	120
Şekil 5.10	: Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçevede K.Ş.F. 'lu Birer Elemanlı Çözüm	121
Şekil 5.11	: Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçevede K.Ş.F. 'lu İkişer Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri	124
Şekil 5.12	: Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve	125
Şekil 5.13	: Yanal Deplasmanı Önlenmemiş Çerçevede K.Ş.F. 'lu Birer Eleman Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri	127
Şekil 6.1	: 1.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Çözümlerin Karşılaştırılması	131
Şekil 6.2	: 2.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Çözümlerin Karşılaştırılması	132
Şekil 6.3	: 3.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Çözümlerin Karşılaştırılması	133
Şekil 6.4	: 4.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Çözümlerin Karşılaştırılması	134

SEMBOL LİSTESİ

a	: Vurgu stabilitesi probleminde eleman uzunluğu
a_n	: Sabit çarpan
A	: Elemanın kesit alanı
c	: Dönme rijitliği
E	: Elemanın elastisite modülü
F	: Dış yük vektörü
h	: Vurgu stabilitesi probleminde sistemin toplam yüksekliği
h_e	: Sonlu eleman uzunluğu
H	: Yatay tepki kuvveti
I	: Elemanın ilgili eksenindeki atalet momenti
$I(u)$	: Fonksiyonel
K	: Katsayılar matrisi
K^*	: İndirgenmiş katsayılar matrisi
L	: Çubuğun boyu
M	: Moment
$\hat{M}$	: Sınırdaki değeri bilinen moment sınır koşulu vektörü
$M(z)$	: Moment yaklaşım fonksiyonu
N	: Normal kuvvet
P	: Sabit eksenel basınç yükü
P_0	: Burkulmanın başlamasına sebep olan yük
P_{kr}	: Kritik burkulma yükü
q	: Yayılı yük
Q	: Operatör
T	: Kesme kuvveti
$\hat{T}$	: Sınırdaki değeri bilinen kuvvet sınır koşulu vektörü
u	: Sistemin yatay deplasmanı
u_i	: Düğüm noktası bilinmeyen
v	: Sistemin düşey deplasmanı
$\hat{v}$	: Sınırdaki değeri bilinen yerdeğiştirme sınır koşulu
$v(z)$	: Çökme yaklaşım fonksiyonu
β	: Burkulma uzunluğu
δ	: Vurgu stabilitesi probleminde sistemin düşey deplasmanı
ϕ	: Çubuktaki dönme
Π	: Toplam potansiyel enerji
Ω	: Dönme vektörü
$\hat{\Omega}$	: Sınırdaki değeri bilinen dönme sınır koşulu vektörü
$\eta(z)$	: Yaklaşım fonksiyonu
$\omega(z)$	: Problemin gerçek çözümü
Ψ	: Sonlu eleman ana bölgesi
Ψ^e	: Sonlu eleman alt bölgesi
ψ_i	: Şekil fonksiyonu

DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLARIN BURKULMA ANALİZİ İÇİN GELİŞTİRİLEN YENİ BİR FONKSİYONEL VE SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada, doğru eksenli elastik çubukların burkulma problemi, yeni bir fonksiyonel geliştirilerek çözülmüştür.

Çalışma toplam altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışmanın amacı ve izlenen yol belirtilmiştir. Çalışmanın literatürdeki yerini göstermek amacıyla da burkulma analizi ile ilgili daha önceden yapılmış çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, stabilite probleminin temel kavramları açıklanmıştır. Problemin kesin çözümünü elde etmenin zorluklarından bahsedilerek, yaklaşık çözüme gitme gerekliliği üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde ise, fonksiyonel analiz yöntemi ile ve Gateaux türevi kullanılarak, lineer elastik doğru eksenli çubukların burkulmasına ait, yeni bir fonksiyonel elde edilmiştir. Fonksiyonelin yapısında, çökme ve moment büyüklükleri bulunmakta ve hem geometrik, hem de dinamik sınır koşullarını içermektedir. Fonksiyonel literatürdeki toplam potansiyel enerji ifadesine de dönüşebilmektedir.

Dördüncü bölümde, bu yeni fonksiyonelin doğruluğunu test etmek için, literatürde Euler halleri olarak bilinen burkulma tipleri gözönüne alınmış, sabit kesitli çubukların kritik burkulma yükü problemi, önce Ritz, daha sonra da karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çalışmanın ilerleyen kısımlarında, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonları kullanılarak her düğüm noktasında çökme ve moment bilinmeyenleri olan kapalı formda karışık sonlu eleman matrisleri elde edilmiştir. Ritz yöntemi kullanılarak çözümü araştırılan Euler halleri, bu karışık sonlu eleman matrisleri kullanılarak yeniden incelenmiştir. Çözümde Mathematica programı kullanılmıştır. Eleman sayısının artmasına paralel olarak, sistem matrisinin boyutlarının büyümesinden dolayı ortaya çıkan çözüm zorluklarını aşmak için de, indirgenmiş sistem matrisleri kullanılmıştır.

Beşinci bölümde ise, bir önceki bölümde elde edilen indirgenmiş sonlu eleman matrisleri kullanılarak, değişken kesitli çubukların, sürekli kirişlerin, yanal deplasmanı önlenmiş yada serbest bırakılmış çerçevelerin burkulma analizine yönelik uygulamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçların, literatürdeki çalışmalarla karşılaştırıldığında, önerilen yöntemlerle geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonunun, mühendislik uygulamaları açısından yeter yakınsaklığı sağladığı gözlenmiştir. Altıncı ve son bölümde ise yapılan inceleme ve örnekler sonucu elde edilen sonuçlar özetlenerek açıklanmıştır.

A NEW FUNCTIONAL FOR BUCKLING ANALYSIS OF STRAIGHT BARS AND ITS FINITE ELEMENT SOLUTION

SUMMARY

In this study, an analysis of buckling of elastic straight bars is investigated using a new functional that was improved in this study.

The study is composed of six chapters. The first chapter, is an introduction to the subject where general aims and the concepts are given. Short information about past investigations in buckling analysis are given for showing place of our study in literature.

In the second chapter, basic assumptions in the buckling analysis are introduced. Due to obtaining the exact solution of the problem, the problem must be solved using numerical methods.

In the third chapter, using the Gateaux differential, a new functional is obtained for linear elastic straight bars using functional analysis method. The functional contains deflection and moment terms, and also both the geometric and the dynamic boundary conditions are involved. The functional can be transformed to the total potential energy equation in literature.

In the fourth chapter, for testing the new functional, critical buckling loads of straight bars, which are known as Euler buckling types in literature, are solved using Ritz and mixed finite element methods. Using linear, quadratic and cubic shape functions, mixed finite element matrices for straight bars, which has deflection and moment term in each node, are obtained in an explicit form. Euler buckling types, which are solved with Ritz method in previous part, are also examined with these mixed finite element matrices. Mathematica is used for solution of this matrices. In order to avoid the difficulties of solving huge system matrix, that are seen with increasing element number, reduce system matrix is used

In the fifth chapter, using these reduced element matrices, buckling analysis of variable cross section bars, continuous beams and lateral displacement fixed or free frames, are done. The comparison of the results with the examples given in the literature, was in a good agreement.

In sixth chapter, a combination of the conclusions of the examples and researches are presented.

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı ve Problemin Tanımı

Yapı elemanları, malzeme, yükleme ve mesnetlenme şartlarına bağlı olarak değişik şekillerde göçme konumlarına ulaşırlar. Yapı elemanlarının farklı yükler altında göçmemesini sağlamak için, görevlerini güvenle yapacak biçimde boyutlandırmak gerekir. Bu boyutlama işlemi, dış yükler etkisiyle elemanda oluşacak gerilme ve deplasmanların belirli sınır değerleri aşmaması ilkesine dayanır.

Göçme, burkulma etkileriyle de ortaya çıkabilir. Yapı elemanı, kendi eksenini doğrultusunda bir basınç kuvvetinin etkimesi durumunda da, dış basınç kuvvetinin ve elemanın eğilme rijitliği ve mesnetlenme koşullarına bağlı olan burkulma limit yükünün aşılması durumunda da, göçme konumuna ulaşabilir.

Kısacası, şekil değiştiren cisimler mekaniğinde, genel olarak, iki tip problem söz konusudur.

- a) Gerilme problemi
- b) Stabilitate problemi

Gerilme probleminde, bir cismin farklı dış yük etkileri altında iç bünyesinde oluşan gerilmelerin, çeşitli bilimsel çalışmalar sonucu kabul edilen sınır gerilme değerlerine ne kadar yaklaştığı, yani elemanın ne kadar zorlandığı analiz edilir.

Stabilitate probleminde ise, dış yük etkileri altında, dengede olduğu bilinen cismin, kararlı, kararsız yada farksız denge konumlarından hangisinde olduğu araştırılır.

Uygulanan basınç kuvvetinin şiddetine bağlı olarak, burkulma etkileri de farklı şekillerde kendini gösterir. Dış basınç yükünün artmasıyla birlikte, eleman eksenine dik yöndeki deplasmanlar artar ve burkulma limit yükünün aşılmasıyla da göçme meydana gelir. Özellikle, kesiti, boyuna oranla çok küçük olan (narin çubuklar) yapı elemanlarında bu olay daha sık gözlenir. Basınç yükü etkisiyle elemanda oluşan normal gerilmeler küçük mertebelerde olsa, yani emniyet gerilmeleri aşılmassa bile, eleman narinliğinin büyük olması sebebiyle, burkulma etkileri daha etkin bir biçimde

ortaya çıkar. Bu sonuç, özellikle narin elemanlar kullanılması durumunda stabilite problemine, gerilme problemine oranla daha fazla dikkat edilmesi gerekliliğini ortaya çıkarır.

1.2 Çalışmada İzlenen Yol

Bu çalışmada doğru eksenli elastik çubukların, burkulma analizi için yeni bir fonksiyonel geliştirilmiştir. Bu fonksiyonel sabit ve değişken kesitli çubukların, düzlem çerçevelerin ve sürekli kirişlerin burkulma analizinde kullanılmıştır.

Öncelikle, stabilite probleminin temel kavramları üzerinde durulmuştur. Bu temel kavramlar yardımıyla, fonksiyonel analiz yöntemi ile ve Gateaux türevi kullanılarak, lineer elastik doğru eksenli çubukların burkulmasına ait, yeni bir fonksiyonel elde edilmiştir. Fonksiyonel, literatürdeki toplam potansiyel enerji ifadesine de dönüşebilmektedir. Bu yeni fonksiyonelin doğruluğunu test etmek için, literatürde Euler halleri olarak bilinen burkulma tipleri gözönüne alınmış, sabit kesitli çubukların kritik burkulma yükü problemi, önce Ritz, daha sonra da karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Çözümde Mathematica programı kullanılmıştır.

Eleman sayısının artmasına paralel olarak, sistem matrisinin boyutlarının büyümesinden dolayı ortaya çıkan çözüm zorluklarını aşmak için de, indirgenmiş eleman ve sistem matrisleri elde edilmiştir. Elde edilen karışık sonlu eleman matrisleri yardımıyla, değişken kesitli çubukların, sürekli kirişlerin, yanal deplasmanı önlenmiş yada serbest bırakılmış çerçevelerin burkulma analizine yönelik uygulamalar yapılmıştır.

Elde edilen sonuçlar, literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmış, önerilen yöntemlerle geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonunun, mühendislik uygulamaları açısından yeter yakınsaklığı sağladığı görülmüştür. Son bölümde ise yapılan inceleme ve örnekler sonucu elde edilen sonuçlar özetlenerek açıklanmıştır.

1.3 Konu ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

Çubuk ve çerçeve sistemlerin burkulma analizi için literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğunda, problemin kesin çözümü yerine geçecek, yaklaşık çözümler üzerinde durulmuştur.

Pflüger, A. [2], daha çok özel değer problemlerinin lineerleştirilmesi üzerinde çalışmıştır. Problemin kesin çözümünün zorlukları üzerinde özellikle durmuş, çözüm

için, klasik yöntemlerin yanısıra, Ritz ve Galerkin gibi yaklaşık yöntemlerinde kullanılabileceğini belirtmiştir. Yazar, değişik tipte burkulma problemlerinin çözümlerine ilişkin kendi araştırma sonuçlarını abak ve tablolar halinde sunmuştur.

Chajes, A. [10], doğru yada değişken kesitli çubuk, çerçeve ve sürekli kirişlerin stabilite problemini incelemiş, problemin yaklaşık çözümünü, özellikle değişik matris yöntemlerini kullanarak araştırmıştır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yaptığı çözümlerde, literatürde toplam potansiyel enerji ifadesi olarak bilinen eşitliği kullanarak eleman ve sistem matrislerini elde etmiş, bu matrisleri kullanarak, değişik tipte sistemlere (sürekli kiriş, çerçeve vb.) ait kritik burkulma yükü ve burkulma mod şekillerini elde etmiştir.

Li Q.S. ve arkadaşları [13], değişken kesitli çubukların stabilitesi üzerinde çalışmışlardır. Probleme ait denge denklemi, ikinci mertebeden bir diferansiyel ifadeye dönüşmektedir. Bu diferansiyel denklemin çözümünde Bessel fonksiyonları kullanılmıştır. Aynı çalışmada, değişken kesitli bir çubuğun serbest titreşimi üzerine yönelik bir uygulamada mevcuttur.

Aynı yazarların bir başka çalışmasında [14], çözümde Bessel fonksiyonlarının yanısıra geometrik serilerden de faydalanılmıştır.

Li Q.S., [15] farklı katmanlarda ve herbiri değişken kesitli olan çubukların birleşimi ile meydana gelen sistemlerin stabilitesi üzerine çalışmıştır. Herbir çubuğun rijitlik matrisinin terimlerini bir fonksiyona bağlı olarak ifade etmiş, çubuğun üzerine uygulanan normal kuvvetin değişimini de yine aynı fonksiyona bağlı olarak yazmıştır. Elde edilen diferansiyel denklem, yine Bessel fonksiyonları yardımıyla çözülmüştür.

Pi Y.L. ve Trahair N. S., [17] kemerlerin kendi düzlemindeki burkulması ait yeni bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Bu formülasyonda, nonlinear etkilerde dikkate alınmıştır. Kemerin yarıçapının azalmasıyla birlikte, nonlinear etkilerin dikkate alınmasıyla elde edilen kritik burkulma yükünün, sadece lineer terimlere bağlı olarak elde edilen burkulma yükünden daha düşük olacağı sonucuna ulaşmışlardır.

Chassie G. G., ve arkadaşları, [19] hem sabit basınç kuvveti hem de burulma etkisi altındaki dairesel kesitli çubukların stabilitesi üzerine çalışmışlardır. Problemin nümerik çözümünde taşıma matrisleri yöntemi kullanılmış, elde edilen sonuçlara bağlı olarak çeşitli abaklar hazırlamışlardır.

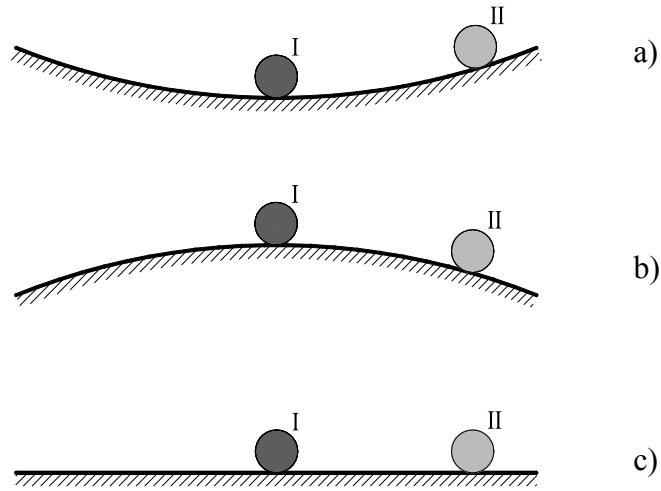
Fonksiyoneli elde etmek için fonksiyonel analiz yöntemi ile ve Gateaux türevi kullanılmıştır. Oden, J. T. ve Reddy, J. N. [3] de bu konudaki temel esasları belirtmişlerdir.

2. STABİLİTE PROBLEMİNİN TEMEL KAVRAMLARI

Fonksiyoneli elde etmeden önce, stabilite probleminin temel kavramları üzerinde durmak gerekmektedir.

2.1 Stabilite Probleminin Denge Konumları

Stabilite probleminin denge konumları hakkında genel bir fikir verebilmek için, Şekil 2.1 de verilen bilyenin, denge konumları dikkate alınmıştır.



Şekil 2.1 Kararlı, Kararsız ve Farksız Denge Konumları

Şekil 2.1.a da görülen bilye, içbükey bir kapta I konumunda iken dengededir. Bilye II konumuna getirilip bırakılsa, dış kabın şeklinden dolayı, sürtünme kayıplarının ihmal edildiği varsayımıyla, tekrar I konumuna, yani denge konumuna gelir. Böyle bir durumda I konumunun dengesinin **kararlı** olduğu kabul edilir.

Şekil 2.1.b de ise bilye, I konumunda iken dengede olsa bile, II konumuna getirildikten sonra doğacak olan hareket, bilyeyi I konumundan uzaklaştıracaktır. Bu durumda I konumuna ait denge **kararsız** dır.

Şekil 2.1.c deki durum ise her iki halin birleşimi gibidir. II konumunda iken bilye dengededir ve, II konumundan I konumuna tekrar dönemediği gibi II konumundan da ayrılmaz. Bu durumda I konumundaki dengenin **farksız** denge konumu olduğu kabul edilir. Stabilite probleminde temel amaç, bu farksız denge konumuna karşılık gelen çözümün araştırılmasıdır. Özetle,

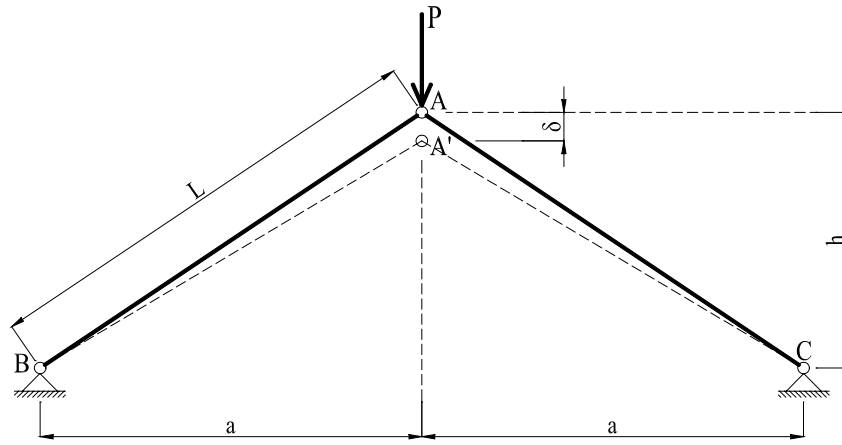
- a) Kararlı dengede sistem, denge konumu bozulsa bile, kendiliğinden bu konuma döner.
- b) Kararsız dengede, dengenin bozulması, sistemi ilk konumundan uzaklaştıracak şekilde devam eder.
- c) Farksız dengede ise sistem, konumu bozulmuş olsa bile bir denge konumunda bulunur.

2.2 Stabilite Probleminin Çeşitleri

Stabilite problemleri uygulanan kuvvetle, oluşacak sapma arasındaki bağıntılarda mevcut olan çok değerliliklere göre iki sınıfa ayrılır. Bunlar, literatürde,

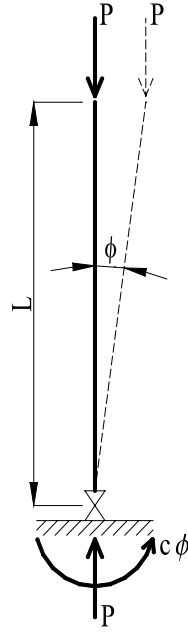
- a) Vurgu stabilitesi problemi
- b) Dallanma tipi stabilite problemi

olarak isimlendirilir. Vurgu stabilitesi problemine bir örnek olarak Şekil 2.2 deki sistemin stabilitesi gösterilebilir.



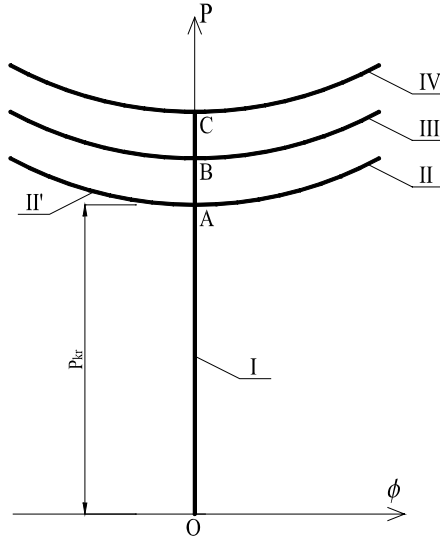
Şekil 2.2 Vurgu Stabilitesi Problemi

Dallanma tipi stabilite problemi ise, pratikte en çok karşılaşılan ve bu çalışmada da üzerinde durulan stabilite problemi tipidir.



Şekil 2.3 Dallanma Tipi Stabilité Problemi

Şekil 2.3 de verilen ve literatürde adi burkulma çubuğu olarak isimlendirilen çubukta, $P = P(\phi)$ eğrisi $P = P_{kr}$ noktasında, yani kritik yükün etkidiği anda dallanmaktadır. Şekil 2.4 den de görüleceği gibi, $P < P_{kr}$ olduğu sürece, yalnız I denge konumu mevcuttur ve bu denge kararlı dendedir. $P = P_{kr}$ haline ise şekilde A noktası karşılık gelir. $P > P_{kr}$ durumunda ise, P - ϕ bağıntısı II ve II' simetrik kolları ile gösterilir. Kritik yükün aşılması halinde her üç denge konumu da mevcuttur.



Şekil 2.4 Dallanma Tipi Stabilité Probleminde Denge Konumları

Sistem, I konumunda dengede kalabileceği gibi, yük değişmese bile II veya II' denge konumlarına geçebilir. Burada, eğri üzerindeki her bir nokta, sistemin birbirinden farklı kararlı denge konumlarını yansıtır. Aynı dallanma, benzer şekilde

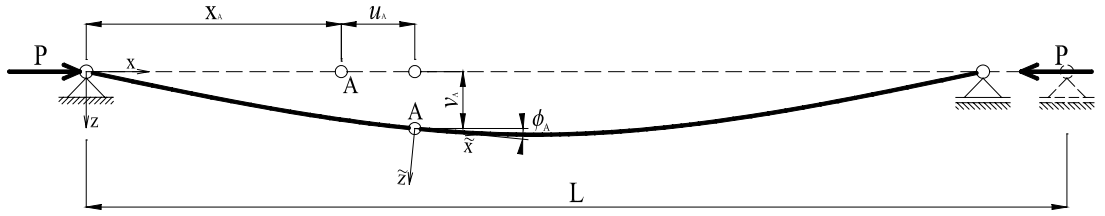
B ve C noktaları içinde geçerlidir. B ve C noktalarına ait burkulma yüklerinin aşılması durumunda sistem kararlı yada kararsız denge konumlarında olabilir.

Çalışmanın bundan sonraki kısımlarında, sadece dallanma tipi burkulma problemleri dikkate alınmıştır.

2.3 Problemin Kesin Çözümünün Araştırılması

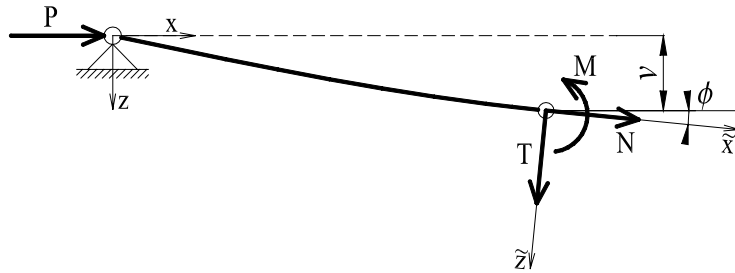
Problemin kesin çözümü için, literatürdeki üç ana yöntem kullanılabilir. Bunlar, denge yöntemi, enerji yöntemi ve dinamik yöntemidir.

Denge metodunu kullanarak, burkulma probleminin genel bağıntıları çıkartılmak istenirse, eksenel bir P dış yük etkisi altında Şekil 2.5 deki gibi şekil değiştiren basit kiriş ele alınabilir.



Şekil 2.5 İki Ucu Mafsallı Çubuğa Ait Bilinmeyenler

P dış yük etkisi altında, A noktasının yapacağı yatay ve dikey deplasman u_A ve v_A , dönme ise ϕ_A ile gösterilsin. Çubuk üzerinde herhangi bir yerde alınmış bu A noktasına ait kesit tesirleri ile, P dış yükü arasındaki ilişki ise Şekil 2.6 da verilmiştir.



Şekil 2.6 İki Ucu Mafsallı Çubukta Kesit Tesirleri

Şekil değiştirmiş sistemde üzerinde, P dış kuvveti ile N, T ve M kesit büyüklükleri arasındaki denge şartları, Şekil 2.6 dan,

$$N + P \cos \phi = 0 \quad (2.1.a)$$

$$T - P \sin \phi = 0 \quad (2.1.b)$$

$$M - Pv = 0 \quad (2.1.c)$$

olarak yazılabilir. Çubuğun birim uzaması ve dönmesi ise [2] de,

$$\varepsilon = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2} - 1 \quad (2.2.a)$$

$$\phi' = \frac{v''(1+u') - u''v'}{(1+u')^2 + v'^2} \quad (2.2.b)$$

olarak verilmiştir. Bu eşitlikler yardımıyla elde edilen diferansiyel denklemin çözümü [2] de verilmiştir. Burkulmanın başlamasına neden olacak olan P kuvveti P_0 ile gösterilirse, P_0 yükü,

$$P_0 = n^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{1}{1 - \frac{P_0}{EA}} \quad (2.3)$$

olarak elde edilir Burada n katsayısı, her bir farklı burkulma formuna karşılık gelen periyot sayısını ifade eder. P_0 / EA değeri, ihmal edilebilecek oranda küçük bir değerdir. Örneğin, çelik için akma sınırı 240 N/mm^2 , elastisite modülü 210000 N/mm^2 alınırsa, birim deplasman değeri akma sınırında 0.00114 değerine ulaşır. Birim uzama yada kısalma değeri hiçbir zaman bu değeri aşamaz. Bu yüzden, (2.3) denkleminde P_0 / EA değerini ihmal etmek yanlış olmaz. Böylelikle burkulmanın başlamasına neden olacak olan P_0 kuvveti daha basit bir tarzda,

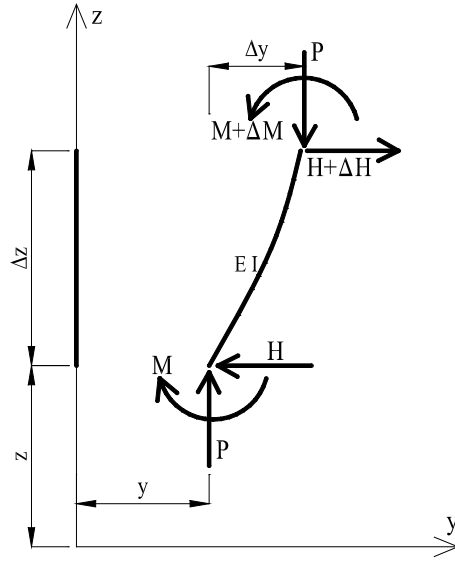
$$P_0 = P_{kr} \approx \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.4)$$

biçiminde yazılabilir. Bu değer, literatürde *Euler Burkulma yükü* yada *kritik burkulma yükü* olarak bilinen değerdir. Denge denklemi şekil değiştirmiş form üzerinde yazıldığı için problem nonlinear yapıdadır. Bu yüzden, diferansiyel denklemin kesin çözümüne, oldukça karışık ve zor adımlar takip edilerek ulaşılır. Zira, bütün vurgu ve dallanma problemleri, denge şartlarında şekil değiştirmelerin gözönüne alınması zorunluluğu dolayısıyla statikçe belirsizdir.

Burada iki ucu mafsallı basit bir çubuk için yapılmış olan işlemler, daha fazla bilinmeyenli hiperstatik sistemlere uygulandığında, ortaya çok daha karışık ve çözümü zor diferansiyel denklemler çıkar. Çünkü, nonlinearlık, sadece elde edilen diferansiyel denklemde değil, aynı zamanda mesnet şartlarında da mevcuttur. Bu yüzden, problemi bu nonlinear yapıdan kurtarıp lineerleştirme işlemine tabi tutmak ve çözüme yaklaşık çözüm yöntemleri ile ulaşma, zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. Bu lineerleştirmeyi sağlamak için, çözümde sadece kritik yükün elde edilmesiyle yetinmek ve sistemin kritik burkulma yüküne kadar rijit olduğu, şekil değiştirmenin ise bu konumdan sonra başladığı kabul edilebilir. Bu kabuller, çözümde büyük

kolaylıklar sağlar. Stabilité probleminin genel bağıntılarına geçmeden önce hesaptaki bu kabul ve hipotezleri ortaya koymak gerekmektedir.

- Hooke kanunu geçerlidir. Malzeme lineer elastik, homojen ve izotropdur.
- Bernoulli-Navier hipotezi geçerlidir, yani düzlem kesitler şekil değiştirmeden sonra da düzlem kalmaktadır.
- Kesitin kayma merkezi, ağırlık merkezi ile çakışmaktadır.
- Şekil değiştirmeler çok küçük mertebelerdedir.



Şekil 2.7 Burkulma Problemine Ait Bilinmeyenler

Şekil 2.7 de, sabit bir eksenel P dış yükü etkisinde ve Δz boylu bir elemana ait bilinmeyenler görülmektedir. Elemanın her iki ucundaki kesme kuvveti H, eksenel dış yük P, moment ise M ile gösterilsin ve kesme kuvvetinin çubuk boyunca değişmediği kabul edilsin. ($\Delta H=0$) Tüm bu kabuller ışığında, bu elemanın üst ucundaki moment dengesi,

$$M + \Delta M = P\Delta y + H\Delta z + M \quad (2.5)$$

$$\Delta M = P\Delta y + H\Delta z \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. $\Delta z \rightarrow 0$ olarak limite geçilirse, yani türev işlemi yapılırsa,

$$H = \text{sabit} = H_0 \quad (2.7)$$

$$\frac{dM}{dz} = P \frac{dy}{dz} + H_0 \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. H_0 kesme kuvvetini denklemlerde yok etmek için (2.8) ifadesinin bir kez daha türevi alınır,

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = P \frac{d^2 y}{dz^2} \quad (2.9)$$

ifadesi elde edilir. Herhangi bir eğilme çubuğunun çökme-eğilme momenti ilişkisine ait diferansiyel ifade ise,

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (2.10)$$

biçimindedir. Böylelikle, burkulma analizinde kullanılacak iki diferansiyel denklem elde edilmiş olur. Bu iki ifadeden (2.9) “denge denklemi”, (2.10) ise “bünye bağıntısı” olarak isimlendirilir.

Bu çalışmada, elastik kolon teorisi adı verilen ve ilk defa Euler tarafından incelenen, 4 farklı burkulma tipi baz alınmıştır. Dolayısıyla, çözümlerde elde edilen sonuçlar bu değerlerle karşılaştırılmıştır.

Denge denklemi ile bünye bağıntısı arasındaki ilişkiyi kurmak için, (2.9) ifadesinde M yerine (2.10) daki değeri yerine konursa,

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} \right) EI + P \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad (2.11)$$

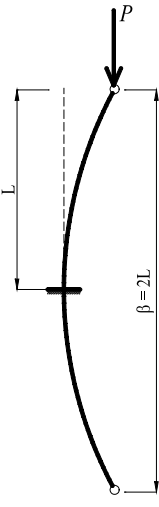
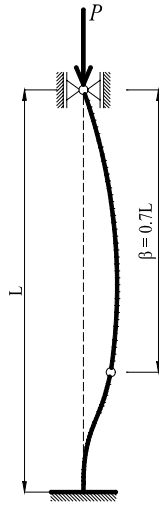
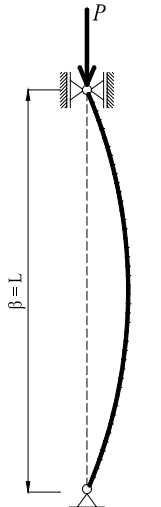
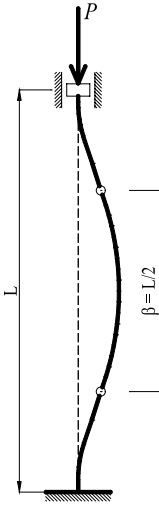
şeklinde burkulma diferansiyel denklemi elde edilir. (P / EI) yerine β^2 yazılırsa, diferansiyel denklem,

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + \beta^2 \frac{d^2 y}{dz^2} = 0 \quad (2.12)$$

halini alır. Bu diferansiyel denklemin, çözümünde kullanılan sınır şartları ise:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Mafsallı uçlarda:} & y = 0, \quad y'' = 0 \\ \text{Ankastre uçlarda:} & y = 0, \quad y' = 0 \\ \text{Düşey P yükü ile yüklü serbest uçta:} & y'' = 0, \quad (EIy'')' + Py' = 0 \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

biçimindedir. (2.12) diferansiyel denkleminin, (2.13) de verilen sınır şartları kullanılarak, trivial olmayan çözümleri Euler tarafından yapılmış ve değişik mesnet koşullarına sahip elastik kolonların kritik burkulma yükleri Şekil 2.8 deki gibi bulunmuştur. Burada β ile gösterilen uzunluk o tipe ait “burkulma uzunluğu” dur.

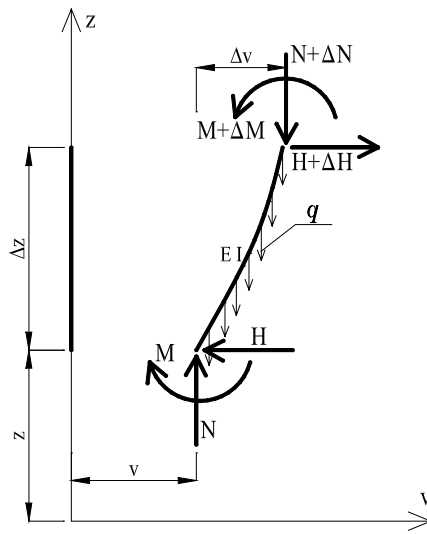
TİP 1	TİP 2	TİP 3	TİP 4
ANKASTRE-SERBEST	ANKASTRE-MAFSALLI	MAFSALLI-MAFSALLI	ANKASTRE-ANKASTRE
			
$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$	$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$	$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$

Şekil 2.8 Farklı Burkulma Tipleri İçin Burkulma Uzunlukları ve Kritik Burkulma Yükleri

3. GELİŞTİRİLEN FONKSİYONEL

Bu çalışmada, çubuğa, hem kendi eksenini doğrultusunda, hem de kendi eksenine dik doğrultuda yayılı yük etkimesi hallerine ait iki ayrı fonksiyonel elde edilmiştir.

3.1 Çubuk Eksenî Yönünde Yayılı Yük Bulunması Haline ait Fonksiyonel



Şekil 3.1 Çubuk Eksenî Yönünde Düzgün Yayılı Yük Bulunması Hali

Şekil 3.1 de, kendi ağırlığı etkisindeki ve Δz boylu bir elemana ait bilinmeyenler görülmektedir. Elemandaki yatay kuvvet, ve üst uca ait moment dengesi,

$$\Delta N - q\Delta z = 0 \quad (3.1)$$

$$\Delta M = N\Delta v + H\Delta z - \frac{q}{2}\Delta z\Delta v \quad (3.2)$$

şeklindedir. $H = \text{sabit} = H_0$ olduğu kabul edilir ve $\Delta z \rightarrow 0$ olarak limite geçilirse,

$$\frac{dN}{dz} = q \quad (3.3)$$

$$\frac{dM}{dz} = N\frac{dv}{dz} + H_0 - \frac{q}{2}\Delta v \quad (3.4)$$

eşitlikleri elde edilir. Δv , ikinci mertebeye ait deplasman olup, sıfıra çok yakın bir değerdir. Dolayısıyla (3.4) denkleminde ihmal edilebilir. Böylelikle (3.4) eşitliği,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dz} = \mathbf{N} \frac{dv}{dz} + \mathbf{H}_0 \quad (3.5)$$

halini alır. H_0 , kesme kuvvetini denklemlerde yok etmek için (3.5) ifadesinin bir kez daha türevi alınır,

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dz^2} = \mathbf{N} \frac{d^2v}{dz^2} \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. Herhangi bir çubuğun çökme-eğilme moment ilişkisi ise,

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{\mathbf{M}}{EI} \quad (3.7)$$

şeklindedir. Burada (3.3) ve (3.6) ifadeleri “denge denklemleri”, (3.7) ifadesi ise “bünye bağıntısı” olarak isimlendirilir. (3.3), (3.6) ve (3.7) de verilen denge denklemleri ve bünye bağıntılarına ait geometrik sınır koşulları,

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} &= -\hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{\Omega} &= \hat{\mathbf{\Omega}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve dinamik sınır koşulları ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}} \\ -\mathbf{M} &= -\hat{\mathbf{M}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklindedir. Bu sınır koşullarının açık ifadeleri ise birtakım varyasyonel işlemler sonucunda elde edilir. (3.8) ve (3.9) da şapkalı terimler sırasıyla, sınırlarda değerleri bilinen $\mathbf{v}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$, yerdeğiştirme, dönme, kuvvet ve moment vektörlerine karşılık gelir. Denge denklemleri ve bünye bağıntıları, sınır koşulları da dahil olmak üzere operatör formda,

$$\mathbb{L}\mathbf{y} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.10.a)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbb{L}\mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (3.10.b)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\mathbf{L}$, diferansiyel operatörü, $\mathbf{y}$, yerdeğiştirmeleri ve kesit tesirlerini, $\mathbf{f}$, yük vektörünü ifade eder. $\mathbf{Q}$ ise bir sürekli operatördür. $\mathbf{Q}$ operatörü sınır şartlarını da içerecek şekilde matris formunda,

$$\begin{bmatrix} -N \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ EI \frac{d^2}{dz^2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{\Omega} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{\Omega}_0 \\ \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\hat{\mathbf{v}}_0 \\ \hat{\mathbf{\Omega}}_0 \\ \hat{\mathbf{T}}_0 \\ -\hat{\mathbf{M}}_0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır. Sınır koşulları, sıfır alt indisi ile belirtilmiştir. Burada, $\mathbf{Q}$ operatörünün potansiyel bir operatör oluşu ancak,

$$\langle d\mathbf{Q}(z, \bar{z}), z^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(z, z^*), \bar{z} \rangle \quad (3.12)$$

eşitliğinin sağlanması ile mümkündür. Eşitlikteki, $(\langle, \rangle)$ simgesi iç çarpımı göstermektedir. Yıldızlı ve üzeri çizgili olarak yazılan ifadeler ise, ilgili fonksiyon için seçilmiş, sabit çarpım ifadeleridir. $d\mathbf{Q}(z, \bar{z})$ ise,

$$d\mathbf{Q}(z, \bar{z}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} (\mathbf{Q}(z + \tau \bar{z}) - \mathbf{Q}(z)) \right) \quad (3.13)$$

şeklinde tariflenir ve $\mathbf{Q}$ operatörünün Gâteaux türevini gösterir. τ sabit bir sayıdır. (3.13) ifadesinin gradyanı ise,

$$d\mathbf{Q}(z, \bar{z}) = \frac{\partial \mathbf{Q}(z + \tau \bar{z})}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \quad (3.14)$$

şeklinde dir. Yapılan işlemler neticesinde, $\mathbf{Q}$ operatörünün potansiyel bir operatör olduğu görülmüştür.

Potansiyel olduğu bilinen bir $\mathbf{Q}$ operatörüne karşı gelen fonksiyonel ise, Oden ve Reddy tarafından, [3] de

$$I(u) = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(su), u \rangle ds \quad (3.15)$$

şeklinde verilmiştir. Burada, s skaler bir büyüklüktür. (3.15) denklemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I(u) = & - \left\langle \frac{d\mathbf{M}}{dz}, \frac{dv}{dz} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{M}, \frac{\mathbf{M}}{EI} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \mathbf{N}, \frac{dv}{dz}, \frac{dv}{dz} \right\rangle + \\
& + \left\langle (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}), \mathbf{H} \right\rangle_{\varepsilon} + \left\langle \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dz}, \mathbf{M} \right\rangle_{\varepsilon} + \left\langle \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v} \right\rangle_{\sigma} + \left\langle (\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \frac{dv}{dz} \right\rangle_{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

biçiminde, çubuk eksenini yönünde yayılı yük bulunması haline ait fonksiyonel elde edilir. Burada, ilk üç terim bölge terimlerini, $\langle , \rangle_{\varepsilon}$ geometrik sınır koşullarını, $\langle , \rangle_{\sigma}$ ise dinamik sınır koşullarını gösterir. Şapkalı büyüklükler ise sınırlarda değerleri bilinen geometrik ve dinamik sınır koşullarıdır. $\mathbf{H}$ ve $\hat{\mathbf{H}}$ ve $\mathbf{N}$ 'nin açık ifadeleri ise,

$$\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{M}}{dz} - \mathbf{N} \frac{dv}{dz} \tag{3.17.a}$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{d\hat{\mathbf{M}}}{dz} - \mathbf{N} \frac{d\hat{v}}{dz} \tag{3.17.b}$$

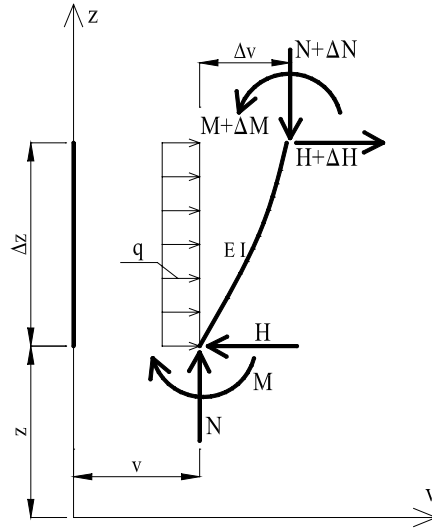
$$\mathbf{N} = \mathbf{P} + \int dz \tag{3.18}$$

şeklindedir. Burada, $\mathbf{P}$ çubuğa kendi eksenini doğrultusunda etkiyen sabit dış yükün değerini göstermektedir. Burkulma problemine ait, toplam potansiyel enerji ifadesi ise, literatürde,

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{N} \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz \tag{3.19}$$

şeklindedir. Bu eşitlikte, (3.16) ifadesindeki, bölge terimleri yerine (3.6) ve (3.7) eşitlikleri konur ve gerekli işlemler yapılırsa, (3.19) ifadesinin elde edildiği görülür. Bu da elde edilen fonksiyonelin, literatürdeki toplam potansiyel enerji ifadesine de dönüşebildiğini göstermektedir.

3.2 Çubuk Eksenine Dik Yönde Yayılı Yük Etkimesi Haline ait Fonksiyonel



Şekil 3.2 Çubuk Eksenine Dik Yönde Düzgün Yayılı Yük Bulunması Hali

Şekil 3.2 de görüldüğü gibi, eğer çubuk üzerinde eksenine dik yönde düzgün yayılı yük varsa, elemandaki yatay kuvvet ve üst uca ait moment dengesi,

$$\Delta H = -q\Delta z \quad (3.20)$$

$$\Delta M = N\Delta v + H\Delta z - \frac{q}{2}\Delta z^2 \quad (3.21)$$

şeklinde yazılır. $\Delta z \rightarrow 0$ olarak limite geçilir ve benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$\frac{dH}{dz} = -q \quad (3.22)$$

$$\frac{dM}{dz} = N \frac{dv}{dz} + H - q\Delta z \quad \Delta z \cong 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dM}{dz} = N \frac{dv}{dz} + H \quad (3.23)$$

denklemleri elde edilir. Daha öncede belirtildiği gibi, Δv , ikinci mertebeye ait deplasman olup, sıfıra çok yakın bir değer olması sebebiyle ihmal edilmiştir. Burada (3.22) ve (3.23) bu hale ait denge denklemleridir. Bu iki denge denklem ve (3.7) deki bünye bağıntısı yardımıyla, çubuk eksenine dik yönde yayılı yük etkimesi haline ait fonksiyonel,

$$\begin{aligned} I(u) = & - \left\langle \frac{dM}{dz}, \frac{dv}{dz} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle M, \frac{M}{EI} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle N, \frac{dv}{dz}, \frac{dv}{dz} \right\rangle + \langle q, v \rangle \\ & + \langle (v - \hat{v}), H \rangle_{\varepsilon} + \left\langle \frac{d\hat{v}}{dz}, M \right\rangle_{\varepsilon} + \langle \hat{H}, v \rangle_{\sigma} + \langle (M - \hat{M}), \frac{dv}{dz} \rangle_{\sigma} \end{aligned} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir.

4. YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ KULLANILARAK ÇÖZÜMÜN ARAŞTIRILMASI

Mekanikte, bir problemin kesin çözümünün elde edilmesinde yaşanan zorlukları aşmak için, çoğu zaman çeşitli yaklaşık çözümlere ihtiyaç duyulur. Problemin kesin çözümünde olan, ancak ihmal edildiğinde sonucun doğruluğuna olumsuz bir şekilde tesir etmeyen birtakım büyüklüklerin ortadan kaldırılması ile, kesin çözümün yerini tutacak yaklaşık çözümler elde edilebilir.

Bir önceki bölümde, burkulma problemindeki nonlinear etkilerin ihmal edilip, sadece lineer konuma göre denge ve enerji ifadelerinin yazılması halinde bile elde edilecek sonuçların, problemin kesin çözümüne çok yakın olduğu belirtilmişti. Dolayısıyla, problemin yaklaşık çözümünü araştırırken de, nonlinear etkileri ihmal etmek yanlış olmaz.

Bu bölümde, çalışmanın temelini teşkil eden sonlu eleman analizine geçmeden önce, fonksiyoneli test etmek amacıyla, yaklaşık yöntemlerden biri olan Ritz yöntemi kullanılarak çözüm araştırılmıştır.

4.1 Ritz Yöntemi

Fonksiyonelin çözümü için kullanılan yöntemlerin başında Ritz Yöntemi gelmektedir. Ritz yönteminde de, diğer yaklaşık yöntemlerde olduğu gibi, problem, çok değişkenli bir minimum problemine indirgenir. Ritz yönteminde temel amaç bu minimum değerin bulunmasıdır.

Problemin gerçek çözümü $\omega(z)$ olsun. Bu $\omega(z)$, gerçek çözümünün yerine, aşağıdaki şekilde düzenlenen bir $\eta(z)$ yaklaşık çözümü konulabilir.

$$\omega(z) \cong \eta(z) = a_1\eta_1(z) + a_2\eta_2(z) + \dots + a_n\eta_n(z) \quad (4.1)$$

Burada, $a_1, a_2, \dots, a_n$ problemin bilinmeyenlerinden bağımsız sabit çarpanlardır. $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ise problemin geometrik yada dinamik sınır şartlarının birini veya her ikisini birden sağlayan, ancak bunun dışında tamamen keyfi olarak seçilen yaklaşım fonksiyonlarıdır.

Bir önceki bölümde, eksenî yönünde ve eksenine dik yönde yayılı yüklerin ayrı ayrı etkimesi halleri için, (3.16) ve (3.24) de iki ayrı fonksiyonel elde edilmişti. Daha öncede belirtildiği gibi, Ritz yöntemi ile yapılan olan çözümde, problemin sınır şartları, seçilen yaklaşım fonksiyonları ile sağlanır. Bu bölümde, sadece Euler burkulma tipleri gözönüne alınmıştır. Hem geometrik hem de dinamik sınır şartları, seçilen yaklaşım fonksiyonları ile sağlandığı kabulü ile fonksiyoneldeki sınır koşulu terimleri kaldırılırsa, sadece bölge terimlerine bağlı;

$$I(u) = -\int_0^L \frac{dM}{dz} \frac{dv}{dz} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{MM}{EI} dz + \frac{P}{2} \int_0^L \frac{dv}{dz} \frac{dv}{dz} dz \quad (4.2.a)$$

$$u = \begin{bmatrix} v, M \end{bmatrix} \quad (4.2.b)$$

ifadesi elde edilir. Euler hallerinde, çubuğa sadece aksenal bir sabit dış yük etkidiği için $q=0$ dır. Dolayısıyla, fonksiyonelde sadece sabit dış yük terimi bulunur Bundan sonraki bölümlerde bu dış yük P ile gösterilmiştir. Fonksiyoneldeki değişkenler, her bir noktadaki $v(z)$ çökmesi ve $M(z)$ eğilme momentidir. Bu çökme ve momentlerin kesin değerleri yerine, bunlara karşılık gelen ve problemin geometrik ve dinamik sınır şartlarını kesin olarak sağlayan, $\bar{v}(z)$ ve $\bar{M}(z)$ yaklaşım fonksiyonları konursa,

$$v(z) \cong \bar{v}(z) = a_{11}\eta_{11}(z) + a_{12}\eta_{12}(z) + \dots\dots\dots a_{1n}\eta_{1n}(z) \quad (4.3.a)$$

$$M(z) \cong \bar{M}(z) = a_{21}\eta_{21}(z) + a_{22}\eta_{22}(z) + \dots\dots\dots a_{2n}\eta_{2n}(z) \quad (4.3.b)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu yaklaşım fonksiyonlarının seçilmesinde dikkat edilen en önemli husus, $\bar{v}(z)$ yaklaşım fonksiyonunun, probleme ait *geometrik*; $\bar{M}(z)$ yaklaşım fonksiyonunun ise *dinamik* sınır şartlarını kesin olarak sağladığıdır. Ancak, Ritz metodunun uygulama alanında, her iki sınır koşulu tipinin birden sağlanması şart değildir.

Sadece bölge terimlerine bağlı (4.2.a) ifadesinde, $v(z)$ yerine $\bar{v}(z)$, $M(z)$ yerine de $\bar{M}(z)$ yaklaşım fonksiyonları yerleştirilerek, fonksiyonel, yaklaşım fonksiyonları cinsinden,

$$I(u) = -\int_0^L \frac{d\bar{M}}{dz} \frac{d\bar{v}}{dz} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} dz + \frac{P}{2} \int_0^L \frac{d\bar{v}}{dz} \frac{d\bar{v}}{dz} dz \quad (4.4)$$

biçiminde yazılabilir.

$I(u)$ ile ifade edilen fonksiyonelin bilinmeyenlere göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, eleman denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial I(u)}{\partial a_1} = 0, \dots \frac{\partial I(u)}{\partial a_2} = 0, \dots \frac{\partial I(u)}{\partial a_n} = 0 \quad (4.5)$$

Bu şekilde, bilinmeyen sayısı kadar denklemleri olan, bir lineer homojen denklem takımı elde edilir. Bu denklem takımına, yük ile ilgili terimler katsayı olarak girer. a_n çarpanlarının bulunmasını sağlayan bu lineer homojen denklem takımının çözümü, katsayılar matrisi **K**, a_n sabit çarpanlarının bulunduğu vektör **A** ile gösterilirse,

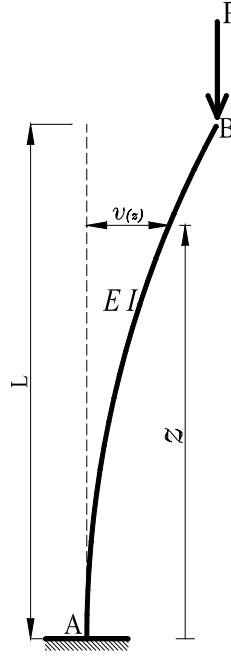
$$\mathbf{K} \mathbf{A} = 0 \quad (4.6)$$

eşitliğinin sağlanması ile mümkündür. Bu homojen denklem takımının, trivial olmayan çözümü, sadece, **K**, katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması ile mümkündür.

Bu determinantın açılımı ile elde edilecek olan eşitliğin, normal kuvvet ifadesine göre bulunan köklerin en küçüğü, aranan kritik burkulma yükünü verir. Diğer kökler ise diğer öz değerlere karşı gelen burkulma kökleridir. Daha yüksek mertebeden yaklaşım fonksiyonlarının seçimi ile de daha çok sayıda özel değer elde edilebilir.

2. bölümde, uygulamada en çok karşılaşılan sabit kesitli çubuklara ait burkulma problemi tipleri ve bu tiplerin Euler tarafından bulunan kritik burkulma yükleri verilmişti. Bu bölümde ise, fonksiyoneli test etmek amacıyla, değişik mertebelerde ve hem geometrik hem de dinamik sınır şartlarının her ikisini birden sağlayan fonksiyonlar seçilerek çözüm araştırılmıştır. Bu fonksiyonlar, (4.3.a) ve (4.3.b) de belirtildiği gibi hem çökme hem de momente bağlı olarak yazılmıştır.

4.1.1 Birinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.1 Ritz Yöntemi ile Çözümde 1.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler

Bu burkulma probleminde, A ve B noktasına ait geometrik ve dinamik sınır koşulları,

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad M(L) = 0 \quad M'(L) = 0 \quad (4.7)$$

şeklinde. Çözümde, aşağıda verilen yaklaşım fonksiyonları kullanılmıştır.

- 1. çözüm

$$\bar{v}(z) = a \left(\frac{z}{L} \right)^2 + b \left(\frac{z}{L} \right)^3 \quad (4.8)$$

$$\bar{M}(z) = c \left(\frac{z}{L} - 1 \right) + d \left(\frac{z}{L} - 1 \right)^2 \quad (4.9)$$

- 2. çözüm

$$\bar{v}(z) = a \left(\frac{z}{L} \right)^2 + b \left(\frac{z}{L} \right)^3 + c \left(\frac{z}{L} \right)^4 \quad (4.10)$$

$$\bar{M}(z) = d \left(\frac{z}{L} - 1 \right) + e \left(\frac{z}{L} - 1 \right)^2 + f \left(\frac{z}{L} - 1 \right)^3 \quad (4.11)$$

- 3. çözüm

$$\bar{v}(z) = a\left(\frac{z}{L}\right)^2 + b\left(\frac{z}{L}\right)^3 + c\left(\frac{z}{L}\right)^4 + d\left(\frac{z}{L}\right)^5 \quad (4.12)$$

$$\bar{M}(z) = e\left(\frac{z}{L}-1\right) + f\left(\frac{z}{L}-1\right)^2 + g\left(\frac{z}{L}-1\right)^3 + h\left(\frac{z}{L}-1\right)^4 \quad (4.13)$$

- 4. çözüm

$$\bar{v}(z) = a\left(\frac{z}{L}\right)^2 + b\left(\frac{z}{L}\right)^3 + c\left(\frac{z}{L}\right)^4 + d\left(\frac{z}{L}\right)^5 + e\left(\frac{z}{L}\right)^6 \quad (4.14)$$

$$\bar{M}(z) = f\left(\frac{z}{L}-1\right) + g\left(\frac{z}{L}-1\right)^2 + h\left(\frac{z}{L}-1\right)^3 + i\left(\frac{z}{L}-1\right)^4 + j\left(\frac{z}{L}-1\right)^5 \quad (4.15)$$

1. Çözüm

Sadece bölge terimlerine bağlı olarak (4.4) de ifade edilen fonksiyonelde, (4.8) ve (4.9) yaklaşım fonksiyonları yerlerine konur ve gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$\frac{d\bar{v}}{dz} = \frac{2az}{L^2} + \frac{3bz^2}{L^3} \quad (4.16)$$

$$\frac{d\bar{M}}{dz} = \frac{c}{L} + \frac{2d}{L}\left(\frac{z}{L}-1\right) \quad (4.17)$$

$$I = -\frac{ac}{L} - \frac{bc}{L} + \frac{2ad}{3L} + \frac{bd}{2L} + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2L}{3EI} - \frac{cdL}{2EI} + \frac{d^2L}{5EI}\right) + \frac{P}{2}\left(\frac{4a^2}{3L} + \frac{3ab}{L} + \frac{9b^2}{5L}\right) \quad (4.18)$$

eşitlikleri elde edilir. Sisteme etkiyen eksenel dış yük P ile gösterildiğinden, fonksiyonelde N yerine P konmuştur. (4.12) de ifade edilmiş olan fonksiyonelin, sabit katsayıları göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, eleman denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial d} = 0 \quad (4.19)$$

(4.18) ifadesi üzerinde (4.19) kısmi türevleri uygulanırsa,

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{4P}{3L}a + \frac{3P}{2L}b - \frac{1}{L}c + \frac{2}{3L}d = 0 \quad (4.20.a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \frac{3P}{2L}a + \frac{9P}{5L}b - \frac{1}{L}c + \frac{1}{2L}d = 0 \quad (4.20.b)$$

$$\frac{\partial I}{\partial c} = -\frac{1}{L}a - \frac{1}{L}b + \frac{L}{3EI}c - \frac{L}{4EI}d = 0 \quad (4.20.c)$$

$$\frac{\partial I}{\partial d} = \frac{2}{3L}a + \frac{1}{2L}b - \frac{L}{4EI}c + \frac{L}{5EI}d = 0 \quad (4.20.d)$$

lineer homojen denklem takımı elde edilir. Tüm bu eşitlikler matris formunda yazılırsa,

$$\mathbf{K} \mathbf{A} = 0 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{4P}{3L} & \frac{3P}{2L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{3L} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial b} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{3P}{2L} & \frac{9P}{5L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2L} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial c} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{4EI} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial d} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{2}{3L} & \frac{1}{2L} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} \end{bmatrix} \end{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe ait trivial olmayan çözümün elde edilebilmesi için,

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (4.23)$$

olmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = 9L^4 P^2 - 184EIL^2 P + 400E^2 I^2 = 0 \quad (4.24)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri:

$$P_1 = 2.4731 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 17.97 \frac{EI}{L^2} \quad (4.25)$$

olarak elde edilir. Bu kökler arasındaki en küçük değer, kritik burkulma yüküdür.

$$P_{kr} = 2.4731 \frac{EI}{L^2} \quad (4.26)$$

değeri, kolona ait kritik burkulma yüküdür. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükünün ise

$$P_{ger} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 2.4674 \frac{EI}{L^2} \quad (4.27)$$

olduğu bilinmektedir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 0.231' dır.

2. Çözüm

Bir önceki çözümde yapılan işlemlere benzer şekilde, türev ve integral işlemleri yapılarak,

$$\begin{aligned} I = & -\frac{ad}{L} - \frac{bd}{L} - \frac{cd}{L} + \frac{2ae}{3L} + \frac{be}{2L} + \frac{2ce}{5L} - \frac{af}{2L} - \frac{3bf}{10L} - \frac{cf}{5L} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{3EI} - \frac{deL}{2EI} + \frac{e^2L}{5EI} + \frac{2dfL}{5EI} - \frac{efL}{3EI} + \frac{f^2L}{7EI} \right) + \\ & + \frac{P}{2} \left(\frac{4a^2}{3L} + \frac{3ab}{L} + \frac{4bc}{L} + \frac{16c^2}{7L} + \frac{9b^2 + 16ac}{5L} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{4P}{3L} & \frac{3P}{2L} & \frac{8P}{5L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{3L} & -\frac{1}{2L} \\ \frac{3P}{2L} & \frac{9P}{5L} & \frac{2P}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2L} & -\frac{3}{10L} \\ \frac{8P}{5L} & \frac{2P}{L} & \frac{16P}{7L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{5L} & -\frac{1}{5L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} \\ \frac{2}{3L} & \frac{1}{2L} & \frac{2}{5L} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} \\ -\frac{1}{2L} & -\frac{3}{10L} & -\frac{1}{5L} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.29)$$

eşitlikleri elde edilir. Trivial olmayan çözümü elde etmek için katsayılar matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = 16L^6 P^3 - 1185EIL^4 P^2 + 20700E^2 I^2 L^2 P - 44100E^3 I^3 = 0 \quad (4.30)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 2.4673 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 22.98 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 48.62 \frac{EI}{L^2} \quad (4.31)$$

$$P_{kr} = 2.4673 \frac{EI}{L^2} \quad (4.32)$$

olarak elde edilir. (4.27) de ifade edilen Euler burkulma yükü, ile arasındaki bağıl hata oranı % -0.0041 gibi oldukça küçük bir değerdir. Yaklaşım fonksiyonunun mertebesinin artırılması ile elde edilen sonucun çok daha iyi olduğu görülmektedir.

3. Çözüm

Bir önceki çözümde yapılan işlemlere benzer şekilde, türev ve integral işlemleri yapılarak,

$$\begin{aligned} I = & -\frac{ae}{L} - \frac{be}{L} - \frac{ce}{L} - \frac{de}{L} + \frac{2af}{3L} + \frac{bf}{2L} + \frac{2cf}{5L} + \frac{df}{3L} - \frac{ag}{2L} - \frac{3bg}{10L} - \frac{cg}{5L} + \\ & -\frac{dg}{7L} + \frac{2ah}{5L} + \frac{bh}{5L} + \frac{4ch}{35L} + \frac{dh}{14L} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2 L}{3EI} - \frac{efL}{2EI} + \frac{f^2 L}{5EI} + \frac{2egL}{5EI} + \right. \\ & \left. -\frac{fgL}{3EI} + \frac{g^2 L}{7EI} - \frac{ehL}{3EI} + \frac{2fhL}{7EI} - \frac{ghL}{4EI} + \frac{h^2 L}{9EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{4a^2}{3L} + \frac{3ab}{L} + \right. \\ & \left. + \frac{9b^2}{5L} + \frac{16ac}{L} + \frac{5cd}{9L} + \frac{25d^2}{3L} + \frac{2(6bc+5ad)}{3L} + \frac{2(8c^2+15bd)}{7L} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{4P}{3L} & \frac{3P}{2L} & \frac{8P}{5L} & \frac{5P}{3L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{3L} & -\frac{1}{2L} & \frac{2}{5L} \\ \frac{3P}{2L} & \frac{9P}{5L} & \frac{2P}{L} & \frac{15P}{7L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2L} & -\frac{3}{10L} & \frac{1}{5L} \\ \frac{8P}{5L} & \frac{2P}{L} & \frac{16P}{7L} & \frac{5P}{2L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{5L} & -\frac{1}{5L} & \frac{4}{35L} \\ \frac{5P}{3L} & \frac{15P}{7L} & \frac{5P}{2L} & \frac{25P}{9L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{3L} & -\frac{1}{7L} & \frac{1}{14L} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} \\ \frac{2}{3L} & \frac{1}{2L} & \frac{2}{5L} & \frac{1}{3L} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} \\ -\frac{1}{2L} & -\frac{3}{10L} & -\frac{1}{5L} & -\frac{1}{7L} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} & -\frac{L}{8EI} \\ \frac{2}{5L} & \frac{1}{5L} & \frac{4}{35L} & \frac{1}{14L} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} & -\frac{L}{8EI} & \frac{L}{9EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(4.34)

eşitlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{K} = & \left(-\frac{617}{1129172244E^4I^4} + \frac{1}{1829677E^4I^4L} \right) P^4 + \\
& + \left(-\frac{101}{1905913E^3I^3L^3} + \frac{62303}{1176221088E^3I^3L^2} \right) P^3 + \\
& + \left(\frac{13}{12965E^2I^2L^5} - \frac{196291}{19603684E^2I^2L^4} \right) P^2 + \\
& + \left(-\frac{1}{463EIL^7} + \frac{1069}{500094EIL^6} \right) P + \frac{1}{21609L^8} = 0
\end{aligned} \tag{4.35}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$\begin{aligned}
P_1 &= -0.03 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 2.46743 \frac{EI}{L^2} \\
P_3 &= 22.13 \frac{EI}{L^2} & P_4 &= 72.36 \frac{EI}{L^2}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$P_{kr} = 2.46743 \frac{EI}{L^2} \tag{4.37}$$

değeri kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu kritik burkulma yükü değeri ile (4.27) de ifade edilen Euler burkulma yükü arasındaki bağıl hata oranı % 0.0012 dir. Bu değer, 1. ve 2. çözümde elde edilen sonuçlara göre daha iyidir.

4. Çözüm

$$\begin{aligned}
I = & -\frac{af}{L} - \frac{bf}{L} - \frac{cf}{L} - \frac{df}{L} - \frac{ef}{L} + \frac{2ag}{3L} + \frac{bg}{2L} + \frac{2cg}{5L} + \frac{dg}{3L} + \frac{2eg}{7L} - \frac{ah}{2L} + \\
& -\frac{3bh}{10L} - \frac{ch}{5L} - \frac{dh}{7L} - \frac{3eh}{28L} + \frac{2ai}{5L} + \frac{bi}{5L} + \frac{4ci}{35L} + \frac{di}{14L} + \frac{ei}{21L} - \frac{aj}{3L} + \\
& -\frac{bj}{7L} - \frac{cj}{14L} - \frac{5dj}{126L} - \frac{ej}{42L} + \frac{1}{2} \left(\frac{f^2L}{3EI} - \frac{fgL}{2EI} + \frac{g^2L}{5EI} + \frac{2fhL}{5EI} - \frac{ghL}{3EI} + \right. \\
& + \frac{h^2L}{7EI} - \frac{fiL}{3EI} + \frac{2giL}{7EI} - \frac{hiL}{4EI} + \frac{i^2L}{9EI} + \frac{2fjL}{7EI} - \frac{gjL}{4EI} + \frac{2hjL}{9EI} - \frac{ijL}{5EI} + \\
& + \frac{j^2L}{11EI} \Big) + \frac{P}{2} \left(\frac{4a^2}{3L} + \frac{3ab}{L} + \frac{9b^2+16ac}{5L} + \frac{2(6bc+5ad)}{3L} + \frac{6de}{L} + \right. \\
& + \frac{36e^2}{11L} + \frac{2(8c^2+15bd+12ae)}{7L} + \frac{10cd+9be}{2L} + \left. \frac{25d^2+48ce}{9L} \right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial a}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{4P}{3L} & \frac{3P}{2L} & \frac{8P}{5L} & \frac{5P}{3L} & \frac{12P}{7L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{3L} & -\frac{1}{2L} & \frac{2}{5L} & -\frac{1}{3L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial b}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{3P}{2L} & \frac{9P}{5L} & \frac{2P}{L} & \frac{15P}{7L} & \frac{9P}{4L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2L} & -\frac{3}{10L} & \frac{1}{5L} & -\frac{1}{7L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial c}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{8P}{5L} & \frac{2P}{L} & \frac{16P}{7L} & \frac{5P}{2L} & \frac{8P}{3L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{5L} & -\frac{1}{5L} & \frac{4}{35L} & -\frac{1}{14L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial d}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{5P}{3L} & \frac{15P}{7L} & \frac{5P}{2L} & \frac{25P}{9L} & \frac{3P}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{3L} & -\frac{1}{7L} & \frac{1}{14L} & -\frac{5}{126L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial e}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{12P}{7L} & \frac{9P}{4L} & \frac{8P}{3L} & \frac{3P}{L} & \frac{36P}{11L} & -\frac{1}{L} & \frac{2}{7L} & -\frac{3}{28L} & \frac{1}{21L} & -\frac{1}{42L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial f}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial g}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{2}{3L} & \frac{1}{2L} & \frac{2}{5L} & \frac{1}{3L} & \frac{2}{7L} & -\frac{L}{4EI} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} & -\frac{L}{8EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial h}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2L} & -\frac{3}{10L} & -\frac{1}{5L} & -\frac{1}{7L} & -\frac{3}{28L} & \frac{L}{5EI} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} & -\frac{L}{8EI} & \frac{L}{9EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial i}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{2}{5L} & \frac{1}{5L} & \frac{4}{35L} & \frac{1}{14L} & \frac{1}{21L} & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{7EI} & -\frac{L}{8EI} & \frac{L}{9EI} & -\frac{L}{10EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial j}=0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{1}{3L} & -\frac{1}{7L} & -\frac{1}{14L} & -\frac{5}{126L} & -\frac{1}{42L} & \frac{L}{7EI} & -\frac{L}{8EI} & \frac{L}{9EI} & -\frac{L}{10EI} & \frac{L}{11EI} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Trivial olmayan çözümü elde etmek için katsayılar matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = \frac{9P^5}{1120E^5I^5} - \frac{419P^4}{128E^4I^4L^2} + \frac{1759P^3}{4E^3I^3L^4} - \frac{86625P^2}{4E^2I^2L^6} + \frac{328860P}{EIL^8} - \frac{686070}{L^{10}} = 0 \quad (4.40)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 2.46740 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 22.21 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 60.61 \frac{EI}{L^2} \quad (4.41)$$

$$P_4 = 145.97 \frac{EI}{L^2} \quad P_5 = 176.11 \frac{EI}{L^2}$$

$$P_{kr} = 2.4674 \frac{EI}{L^2} \quad (4.42)$$

olarak elde edilir. Bulunan değer, virgülden sonraki 4 basamak için, (4.27) de verilen Euler burkulma yükü, ($P_{ger} = 2.4674(EI/L^2)$) ile aynıdır.

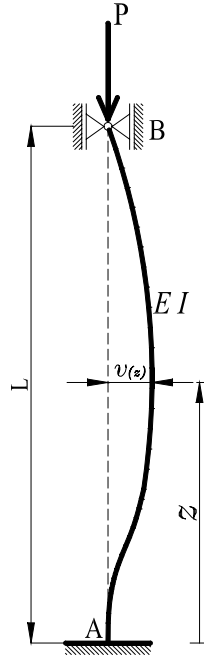
Bu burkulma problemi tipinde, yaklaşım fonksiyonlarının mertebeleri arttırıldıkça, bulunan kritik burkulma yükü değerinin, gerçek değerine gittikçe yaklaştığı görülmektedir. Ancak, buradaki en önemli sorun, fonksiyonların mertebesini

yükselttikçe, işlem yoğunluğunun da aynı oranda artmasıdır. 1.çözümde elde edilmiş olan % 0.231 hata oranı bile, mühendislik uygulamaları için kabul edilebilecek bir hata oranıdır. Sonuçlar özet olarak Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1 1.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri

Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
2	4	2.4731	2.4674	0.231
3	6	2.4673		0.004
4	8	2.4674		0.001
5	10	2.4674		0.000

4.1.2 İkinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.2 Ritz Yöntemi ile Çözümde 2.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler

Bu burkulma probleminde çubuğun alt ucu ankastre, üst ucu ise mafsallıdır. Bu tipe ait geometrik ve dinamik sınır koşulları,

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (4.43)$$

şeklindedir. Bu sınır koşullarını sağlayan değişik mertebelerdeki yaklaşım fonksiyonları ise aşağıda verilmiştir.

- 1. çözüm

$$\bar{v}(z) = z^2 \left(\frac{z}{L} - 1 \right) (az + b) \quad (4.44)$$

$$\bar{M}(z) = L \left(\frac{z}{L} - 1 \right) (cz^2 + dz + e) \quad (4.45)$$

- 2. çözüm

$$\bar{v}(z) = z^2 \left(\frac{z}{L} - 1 \right) (a z^2 + b z + c) \quad (4.46)$$

$$\bar{M}(z) = L \left(\frac{z}{L} - 1 \right) (d z^3 + e z^2 + f z + g) \quad (4.47)$$

• 3. çözüm

$$\bar{v}(z) = z^2 \left(\frac{z}{L} - 1 \right) (az^3 + bz^2 + cz + d) \quad (4.48)$$

$$\bar{M}(z) = L \left(\frac{z}{L} - 1 \right) (ez^4 + fz^3 + gz^2 + hz + i) \quad (4.49)$$

1. Çözüm

Sadece bölge terimlerinin olduğu ve yaklaşım fonksiyonları cinsinden (4.4) de verilen fonksiyonelde, (4.44) ve (4.45) yaklaşım fonksiyonlarını yerlerine konur, gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$I = -\frac{bdL^3}{6} - \frac{2bcL^4}{15} - \frac{adL^4}{10} - \frac{acL^5}{10} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2L^3}{3EI} + \frac{deL^4}{6EI} + \frac{d^2L^5}{30EI} + \frac{ceL^5}{15EI} + \frac{cdL^6}{30EI} + \frac{c^2L^7}{105EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{2b^2L^3}{15} + \frac{abL^4}{5} + \frac{3a^2L^5}{35} \right) \quad (4.50)$$

ifadesi elde edilir. (4.50) ifadesi üzerinde kısmi türev işlemleri uygulanıp, elde edilen denklem takımı matris formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3L^5P}{35} & \frac{L^4P}{10} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{L^4}{10} & 0 \\ \frac{L^4P}{10} & \frac{2L^3P}{15} & -\frac{2L^4}{15} & -\frac{L^3}{6} & 0 \\ -\frac{L^5}{10} & -\frac{2L^4}{15} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} \\ -\frac{L^4}{10} & -\frac{L^3}{6} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} & \frac{L^4}{12EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^5}{30EI} & \frac{L^4}{12EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.51)$$

eşitlikleri elde edilir. Trivial olmayan çözümü elde etmek için, katsayılar matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = L^4P^2 - 68L^2EIP + 980E^2I^2 = 0 \quad (4.52)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 20.7335 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 47.27 \frac{EI}{L^2} \quad (4.53)$$

$$P_{kr} = 20.7335 \frac{EI}{L^2} \quad (4.54)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü ise, 2. bölümde tarif edildiği gibi,

$$P_{ger} = \frac{\pi^2 EI}{(0.70L)^2} = 20.1420 \frac{EI}{L^2} \quad (4.55)$$

olduğu bilinmektedir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 2.94' dür.

2. Çözüm

$$\begin{aligned} I = & -\frac{cfL^3}{6} - \frac{2ceL^4}{15} - \frac{bfL^4}{10} - \frac{cdL^5}{10} - \frac{beL^5}{10} - \frac{afL^5}{15} - \frac{3bdL^6}{35} + \\ & -\frac{8aeL^6}{105} - \frac{adL^7}{14} + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2L^3}{3EI} + \frac{fgL^4}{6EI} + \frac{f^2L^5}{30EI} + \frac{egL^5}{15EI} + \frac{efL^6}{30EI} + \right. \\ & + \frac{dgL^6}{30EI} + \frac{e^2L^7}{105EI} + \frac{2dfL^7}{105EI} + \frac{deL^8}{84EI} + \frac{d^2L^9}{252EI} \left. \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{2c^2L^3}{15} + \right. \\ & \left. + \frac{bcL^4}{5} + \frac{3b^2L^5}{35} + \frac{16acL^5}{105} + \frac{abL^6}{7} + \frac{4a^2L^7}{63} \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{4L^7P}{63} & \frac{L^6P}{14} & \frac{8L^5P}{105} & -\frac{L^7}{14} & -\frac{8L^6}{105} & -\frac{L^5}{15} & 0 \\ \frac{L^6P}{14} & \frac{3L^5P}{35} & \frac{L^4P}{10} & -\frac{3L^6}{35} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{L^4}{10} & 0 \\ \frac{8L^5P}{105} & \frac{L^4P}{10} & \frac{2L^3P}{15} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{2L^4}{15} & -\frac{L^3}{6} & 0 \\ -\frac{L^7}{14} & -\frac{3L^6}{35} & -\frac{L^5}{10} & \frac{L^9}{252EI} & \frac{L^8}{168EI} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} \\ -\frac{8L^6}{105} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{2L^4}{15} & \frac{L^8}{168EI} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} \\ -\frac{L^5}{15} & -\frac{L^4}{10} & -\frac{L^3}{6} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} & \frac{L^4}{12EI} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} & \frac{L^4}{12EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\det \mathbf{K} = 5L^6P^3 - 910L^4EIP^2 + 47824L^2E^2I^2P - 635040E^3I^3 = 0 \quad (4.58)$$

Bu ifadenin P'ye bağılı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 20.1477 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 65.27 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 96.59 \frac{EI}{L^2} \quad (4.59)$$

$$P_{kr} = 20.1477 \frac{EI}{L^2} \quad (4.60)$$

olarak elde edilir. (4.55) de verilen Euler burkulma yükü, ile arasındaki bağılı hata oranı % 0.028'e düşmüştür. Yaklaşım fonksiyonlarının mertebesinin artırılması ile elde edilen sonucun daha iyi olduğu görülmektedir.

3. Çözüm

$$\begin{aligned} I = & -\frac{dhL^3}{6} - \frac{2dgL^4}{15} - \frac{chL^4}{10} - \frac{dfL^5}{10} - \frac{cgL^5}{10} - \frac{bhL^5}{15} - \frac{8deL^6}{105} + \frac{3cfL^6}{35} \\ & - \frac{8bgL^6}{105} - \frac{ahL^6}{21} - \frac{ceL^7}{14} - \frac{bfL^7}{14} - \frac{5agL^7}{84} - \frac{4beL^8}{63} - \frac{5afL^8}{84} - \frac{aeL^9}{18} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{i^2L^3}{3EI} + \frac{hiL^4}{6EI} + \frac{h^2L^5}{30EI} + \frac{giL^5}{15EI} + \frac{ghL^6}{30EI} + \frac{fiL^6}{30EI} + \frac{g^2L^7}{105EI} + \frac{2fhL^7}{105EI} \right. \\ & \left. + \frac{2eiL^7}{105EI} + \frac{fgL^8}{84EI} + \frac{ehL^8}{84EI} + \frac{f^2L^9}{252EI} + \frac{egL^9}{126EI} + \frac{efL^{10}}{180EI} + \frac{e^2L^{11}}{495EI} \right) \\ & + \frac{P}{2} \left(\frac{2d^2L^3}{15} + \frac{cdL^4}{5} + \frac{3c^2L^5}{35} + \frac{16bdL^5}{105} + \frac{bcL^6}{7} + \frac{5adL^6}{42} + \frac{4b^2L^7}{63} \right. \\ & \left. + \frac{abL^8}{9} + \frac{5a^2L^9}{99} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{5L^9 P}{99} & \frac{L^8 P}{18} & \frac{5L^7 P}{84} & \frac{5L^6 P}{84} & -\frac{L^9}{18} & -\frac{5L^8}{84} & -\frac{5L^7}{84} & -\frac{L^6}{21} & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial b} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{L^8 P}{18} & \frac{4L^7 P}{63} & \frac{L^6 P}{14} & \frac{8L^5 P}{105} & -\frac{4L^8}{63} & -\frac{L^7}{14} & -\frac{8L^6}{105} & -\frac{L^5}{15} & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial c} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{5L^7 P}{84} & \frac{L^6 P}{14} & \frac{3L^5 P}{35} & \frac{L^4 P}{10} & -\frac{L^7}{14} & -\frac{3L^6}{35} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{L^4}{10} & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial d} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{5L^6 P}{84} & \frac{8L^5 P}{105} & \frac{L^4 P}{10} & \frac{2L^3 P}{15} & -\frac{8L^6}{105} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{2L^4}{15} & -\frac{L^3}{6} & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial e} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{L^9}{18} & -\frac{4L^8}{63} & -\frac{L^7}{14} & -\frac{8L^6}{105} & \frac{L^{11}}{495EI} & \frac{L^{10}}{360EI} & \frac{L^9}{252EI} & \frac{L^8}{168EI} & \frac{L^7}{105EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial f} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{5L^8}{84} & -\frac{L^7}{14} & -\frac{3L^6}{35} & -\frac{L^5}{10} & \frac{L^{10}}{360EI} & \frac{L^9}{252EI} & \frac{L^8}{168EI} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial g} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{5L^7}{84} & -\frac{8L^6}{105} & -\frac{L^5}{10} & -\frac{2L^4}{15} & \frac{L^9}{252EI} & \frac{L^8}{168EI} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial h} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{L^6}{21} & -\frac{L^5}{15} & -\frac{L^4}{10} & -\frac{L^3}{6} & \frac{L^8}{168EI} & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} & \frac{L^4}{12EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial i} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^7}{105EI} & \frac{L^6}{60EI} & \frac{L^5}{30EI} & \frac{L^4}{12EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{4.62}$$

Trivial olmayan çözümü elde etmek için, katsayılar matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{K} = & 3L^8 P^4 - 1184L^6 EIP^3 + 152352L^4 E^2 I^2 P^2 - 6967296L^2 E^3 I^3 P \\
& + 87816960E^4 I^4 = 0
\end{aligned}
\tag{4.63}$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 20.1925 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 58.76 \frac{EI}{L^2}
\tag{4.64}$$

$$P_3 = 142.12 \frac{EI}{L^2} \quad P_4 = 173.60 \frac{EI}{L^2}$$

$$P_{kr} = 20.1925 \frac{EI}{L^2}
\tag{4.65}$$

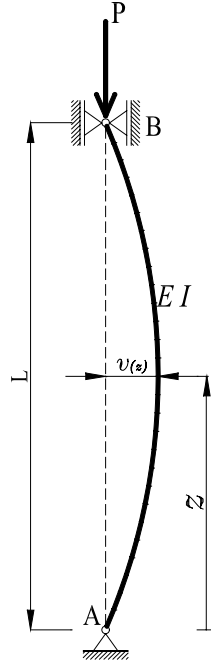
olarak elde edilir. (4.55) de ifade edilen Euler burkulma yükü ile arasındaki bağıl hata oranı % 0.251 dir. 2. çözümde elde edilen hata oranı (% 0.028) daha iyiydi. Bu da, yaklaşım fonksiyonlarının mertebelerini artırdıkça elde edilecek sonucun, her zaman için daha iyi olamayabileceği sonucunu ortaya çıkarmaktadır.

Belirli bir mertebeden sonra sonuçların gerçek değerinden uzaklaşabileceği görülmektedir. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi [2] de verilmiştir. Bu bölümde elde edilmiş olan sonuçlar özet halinde Tablo 4.2 de verilmiştir.

Tablo 4.2 2.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri

Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
2	5	20.7335	20.1420	2.940
3	7	20.1477		0.028
4	9	20.1925		0.251

4.1.3 Üçüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.3 Ritz Yöntemi ile Çözümde 3.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler

Bu burkulma probleminde çubuğun alt ucunda sabit, üst ucunda ise kayıcı mesnet bulunmaktadır. Bu tipe ait geometrik ve dinamik sınır koşulları,

$$v(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad M(0) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (4.66)$$

şeklindedir. Bu sınır koşullarını sağlayan yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilmiştir.

- 1. çözüm

$$\bar{v}(z) = az \left(\frac{z^2}{L^2} - 1 \right) + bz \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \quad (4.67)$$

$$\bar{M}(z) = cz \left(\frac{z^2}{L^2} - 1 \right) + dz \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \quad (4.68)$$

- 2. çözüm

$$\bar{v}(z) = az \left(\frac{z^3}{L^3} - 1 \right) + bz \left(\frac{z^2}{L^2} - 1 \right) + cz \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \quad (4.69)$$

$$\bar{M}(z) = dz \left(\frac{z^3}{L^3} - 1 \right) + ez \left(\frac{z^2}{L^2} - 1 \right) + fz \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \quad (4.70)$$

• 3. çözüm

$$\bar{v}(z) = az \left(\frac{z^4}{L^4} - 1 \right) + bz \left(\frac{z^3}{L^3} - 1 \right) + cz \left(\frac{z^2}{L^2} - 1 \right) + dz \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \quad (4.71)$$

$$\bar{M}(z) = ez \left(\frac{z^4}{L^4} - 1 \right) + fz \left(\frac{z^3}{L^3} - 1 \right) + gz \left(\frac{z^2}{L^2} - 1 \right) + hz \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \quad (4.72)$$

1. Çözüm

Sadece bölge terimlerinin olduğu ve yaklaşım fonksiyonları cinsinden (4.4) de, ifade edilen fonksiyonelde, (4.67) ve (4.68) yaklaşım fonksiyonları yerlerine konur, gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$I = -\frac{4acL}{5} - \frac{bcL}{2} - \frac{adL}{2} - \frac{bdL}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{8c^2L^3}{105EI} + \frac{cdL^3}{10EI} + \frac{d^2L^3}{30EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{4a^2L}{5} + abL + \frac{b^2L}{3} \right) \quad (4.73)$$

ifadesi elde edilir. (4.73) ifadesi üzerinde kısmi türev işlemleri uygulanıp, elde edilen denklem takımı matris formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4LP}{5} & \frac{LP}{2} & -\frac{4L}{5} & -\frac{L}{2} \\ \frac{LP}{2} & \frac{LP}{3} & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{3} \\ -\frac{4L}{5} & -\frac{L}{2} & \frac{8L^3}{105EI} & \frac{L^3}{20EI} \\ -\frac{L}{2} & -\frac{L}{3} & \frac{L^3}{20EI} & \frac{L^3}{30EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial b} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial c} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial d} = 0 &\rightarrow \end{aligned} \quad (4.74)$$

eşitlikleri elde edilir. Trivial olmayan çözümü elde etmek için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = L^4 P^2 - 52L^2 PEI + 420E^2 I^2 = 0 \quad (4.75)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 10.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 42.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.76)$$

$$P_{kr} = 10.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.77)$$

değeri, bu kolona ait kritik burkulma yüküdür. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükünün ise,

$$P_{ger} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 9.8696 \frac{EI}{L^2} \quad (4.78)$$

olduğu bilinmektedir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 1.32' dir.

2. Çözüm

$$I = -\frac{9adL}{7} - bdL - \frac{3cdL}{5} - aeL - \frac{4beL}{5} - \frac{ceL}{2} - \frac{3afL}{5} - \frac{bfL}{2} - \frac{cfL}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 L^3}{9EI} + \frac{11deL^3}{60EI} + \frac{8e^2 L^3}{105EI} + \frac{5dfL^3}{42EI} + \frac{efL^3}{10EI} + \frac{f^2 L^3}{30EI} \right) +$$

$$+ \frac{P}{2} \left(\frac{9a^2 L}{7} + 2abL + \frac{4b^2 L}{5} + \frac{6acL}{5} + bcL + \frac{c^2 L}{3} \right) \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{9LP}{7} & LP & \frac{3LP}{5} & -\frac{9L}{7} & -L & -\frac{3L}{5} \\ LP & \frac{4LP}{5} & \frac{LP}{2} & -L & -\frac{4L}{5} & -\frac{L}{2} \\ \frac{3LP}{5} & \frac{LP}{2} & \frac{LP}{3} & -\frac{3L}{5} & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{3} \\ -\frac{9L}{7} & -L & -\frac{3L}{5} & \frac{L^3}{9EI} & \frac{11L^3}{120EI} & \frac{5L^3}{84EI} \\ -L & -\frac{4L}{5} & -\frac{L}{2} & \frac{11L^3}{120EI} & \frac{8L^3}{105EI} & \frac{L^3}{20EI} \\ -\frac{3L}{5} & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{3} & \frac{5L^3}{84EI} & \frac{L^3}{20EI} & \frac{L^3}{30EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial b} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial c} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial d} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial e} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial f} = 0 &\rightarrow \end{aligned} \quad (4.80)$$

eşitlikleri elde edilir. Trivial olmayan çözümü elde etmek için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = L^6 P^3 - 154EIL^4 P^2 + 5712E^2 I^2 L^2 P - 42336E^3 I^3 = 0 \quad (4.81)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 9.8698 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 42.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 102.13 \frac{EI}{L^2} \quad (4.82)$$

$$P_{kr} = 9.8698 \frac{EI}{L^2} \quad (4.83)$$

olarak elde edilir. (4.78) de ifade edilen Euler burkulma yükü ile arasındaki bağıl hata oranı % 0.0020 dir. Yaklaşım fonksiyonlarının mertebesinin artırılması ile elde edilen sonucun daha iyi olduğu görülmektedir.

3. Çözüm

$$\begin{aligned} I = & -\frac{16aeL}{9} - \frac{3beL}{2} - \frac{8ceL}{7} - \frac{2deL}{3} - \frac{3afL}{2} - \frac{9bfL}{7} - cfL - \frac{3dfL}{5} + \\ & -\frac{8agL}{7} - bgL - \frac{4cgL}{5} - \frac{dgL}{2} - \frac{2ahL}{3} - \frac{3bhL}{5} - \frac{chL}{2} - \frac{dhL}{3} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{32e^2L^3}{231EI} + \frac{26efL^3}{105EI} + \frac{f^2L^3}{9EI} + \frac{64egL^3}{315EI} + \frac{11fgL^3}{60EI} + \frac{8g^2L^3}{105EI} + \right. \\ & + \frac{11ehL^3}{84EI} + \frac{5fhL^3}{42EI} + \frac{ghL^3}{10EI} + \left. \frac{h^2L^3}{30EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{16a^2L}{9} + 3abL + \right. \\ & + \left. \frac{9b^2L}{7} + \frac{16acL}{7} + 2bcL + \frac{4c^2L}{5} + \frac{4adL}{3} + \frac{6bdL}{5} + cdL + \frac{d^2L}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{16LP}{9} & \frac{3LP}{2} & \frac{8LP}{7} & \frac{2LP}{3} & -\frac{16L}{9} & -\frac{3L}{2} & -\frac{8L}{7} & -\frac{2L}{3} \\ \frac{3LP}{2} & \frac{9LP}{7} & LP & \frac{3LP}{5} & -\frac{3L}{2} & -\frac{9L}{7} & -L & -\frac{3L}{5} \\ \frac{8LP}{7} & LP & \frac{4LP}{5} & \frac{LP}{2} & -\frac{8L}{7} & -L & -\frac{4L}{5} & -\frac{L}{2} \\ \frac{2LP}{3} & \frac{3LP}{5} & \frac{LP}{2} & \frac{LP}{3} & -\frac{2L}{3} & -\frac{3L}{5} & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{3} \\ -\frac{16L}{9} & -\frac{3L}{2} & -\frac{8L}{7} & -\frac{2L}{3} & \frac{32L^3}{231EI} & \frac{13L^3}{105EI} & \frac{32L^3}{315EI} & \frac{11L^3}{168EI} \\ -\frac{3L}{2} & -\frac{9L}{7} & -L & -\frac{3L}{5} & \frac{13L^3}{105EI} & \frac{L^3}{9EI} & \frac{11L^3}{120EI} & \frac{5L^3}{84EI} \\ -\frac{8L}{7} & -L & -\frac{4L}{5} & -\frac{L}{2} & \frac{32L^3}{315EI} & \frac{11L^3}{120EI} & \frac{8L^3}{105EI} & \frac{L^3}{20EI} \\ -\frac{2L}{3} & -\frac{3L}{5} & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{3} & \frac{11L^3}{168EI} & \frac{5L^3}{84EI} & \frac{L^3}{20EI} & \frac{L^3}{30EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.85)$$

eşitlikleri elde edilir. Trivial olmayan çözümü elde etmek için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = L^8 P^4 - 352 L^6 E I P^3 + 35808 L^4 E^2 I^2 P^2 - 1128960 L^2 E^3 I^3 P + 7983360 E^4 I^4 = 0 \quad (4.86)$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma kökü,

$$\begin{aligned} P_1 &= 9.8698 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 39.50 \frac{EI}{L^2} \\ P_3 &= 102.13 \frac{EI}{L^2} & P_4 &= 200.50 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (4.87)$$

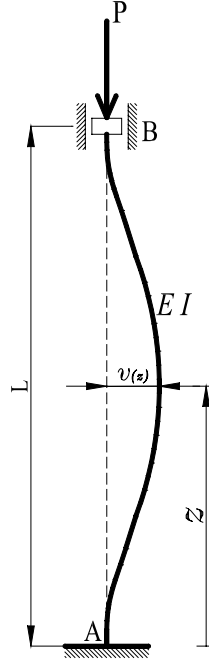
$$P_{kr} = 9.8698 \frac{EI}{L^2} \quad (4.88)$$

olarak elde edilir. (4.78) de ifade edilen Euler burkulma yükü ile arasındaki bağıl hata oranı % 0.0020 dir. 2. çözümde de elde edilen hata oranı aynı idi. Daha az işlem yoğunluğu ile uğraşmak açısından, (4.69) ve (4.70) de verilen yaklaşım fonksiyonları ile sonuca gitmek yeterli gözükmemektedir. Bu bölümde elde edilmiş olan sonuçlar özet halinde Tablo 4.3 de verilmiştir.

Tablo 4.3 3.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri

Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yükü (EI/L^2)	Euler burkulma yükü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
2	4	10.000	9.8696	1.320
3	6	9.8698		0.002
4	8	9.8698		0.002

4.1.4 Dördüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.4 Ritz Yöntemi ile Çözümde 4.Tip Burkulma Çubuğuna Ait Değişkenler

Bu burkulma probleminde çubuğun alt ucu ankastre, üst ucu ise kayıcı ankastredir. Bu tipe ait geometrik sınır koşulları,

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0 \quad v'(L) = 0 \quad (4.89)$$

şeklinde. Bu sınır koşullarını sağlayan aşağıdaki yaklaşım fonksiyonları seçilmiştir.

- 1. çözüm

$$\bar{v}(z) = az^2 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \quad (4.90)$$

$$\bar{M}(z) = bz^2 + cz + d \quad (4.91)$$

- 2. çözüm

$$\bar{v}(z) = az^2 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 + bz^3 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \quad (4.92)$$

$$\bar{M}(z) = cz^3 + dz^2 + ez + f \quad (4.93)$$

• 3. çözüm

$$\bar{v}(z) = az^2 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 + bz^3 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 + cz^4 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \quad (4.94)$$

$$\bar{M}(z) = dz^4 + ez^3 + fz^2 + gz + h \quad (4.95)$$

• 4. çözüm

$$\bar{v}(z) = az^2 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 + bz^3 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 + cz^4 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 + dz^5 \left(1 - \frac{z}{L}\right)^2 \quad (4.96)$$

$$\bar{M}(z) = ez^5 + fz^4 + gz^3 + hz^2 + iz + j \quad (4.97)$$

1. Çözüm

Sadece bölge terimlerinin olduğu ve yaklaşım fonksiyonları cinsinden (4.4) de, ifade edilen fonksiyonelde, (4.67) ve (4.68) yaklaşım fonksiyonları yerlerine konur, gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$I = -\frac{abL^3}{15} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2L}{EI} + \frac{cdL^2}{EI} + \frac{(c^2 + 2bd)L^3}{3EI} + \frac{bcL^4}{2EI} + \frac{b^2L^5}{5EI} \right) + \frac{a^2L^3P}{105} \quad (4.98)$$

ifadesi elde edilir. (4.98) ifadesi üzerinde kısmi türev işlemleri uygulanır, elde edilen denklem takımı matris formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2L^3P}{105} & \frac{L^3}{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial b} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{L^3}{15} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial c} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial d} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \end{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

Trivial olmayan çözümü elde etmek için, katsayılar matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenmelidir.

$$\det \mathbf{K} = L^2P - 42EI = 0 \quad (4.100)$$

Bu ifadenin P'ye bağı tek kökü olan

$$P_{kr} = P_1 = 42.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.101)$$

değeri, bu kolona ait kritik burkulma yüküdür. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükünün ise,

$$P_{ger} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = 39.4784 \frac{EI}{L^2} \quad (4.102)$$

olduğu bilinmektedir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 6.39' dur.

2. Çözüm

$$I = \frac{adL^3}{15} + \frac{acL^4}{10} + \frac{bdL^4}{30} + \frac{2bcL^5}{35} + \frac{1}{2} \left(\frac{f^2L}{EI} + \frac{efL^2}{EI} + \frac{(e^2 + 2df)L^3}{3EI} + \frac{(de + cf)L^4}{2EI} + \frac{(d^2 + 2ce)L^5}{5EI} + \frac{cdL^6}{3EI} + \frac{c^2L^7}{7EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{2a^2L^3}{105} + \frac{2abL^4}{105} + \frac{2b^2L^5}{315} \right) \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2L^3P}{105} & \frac{L^4P}{105} & \frac{L^4}{10} & \frac{L^3}{15} & 0 & 0 \\ \frac{L^4P}{105} & \frac{2L^5P}{315} & \frac{2L^5}{35} & \frac{L^4}{30} & 0 & 0 \\ \frac{L^4}{10} & \frac{2L^5}{35} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} \\ \frac{L^3}{15} & \frac{L^4}{30} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial I}{\partial b} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial c} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial d} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial e} = 0 &\rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial f} = 0 &\rightarrow \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\det \mathbf{K} = L^4 P^2 - 132L^2 EIP + 3780E^2 I^2 = 0 \quad (4.105)$$

Bu ifadenin P'ye bağı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 42.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 90.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.106)$$

$$P_{kr} = 42.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.107)$$

olarak elde edilir. Bu değer, 1.çözümde (4.101) de bulunan sonucun aynısıdır. (4.102) de ifade edilen Euler burkulma yükü ile arasındaki bağıl hata oranı ise % 6.39 dur.

3. Çözüm

$$\begin{aligned} I = & \frac{afL^3}{15} + \frac{aeL^4}{10} + \frac{bfL^4}{30} + \frac{4adL^5}{35} + \frac{2beL^5}{35} + \frac{2cfL^5}{105} + \frac{bdL^6}{14} + \\ & + \frac{ceL^6}{28} + \frac{cdL^7}{21} + \frac{1}{2} \left(\frac{h^2L}{EI} + \frac{ghL^2}{EI} + \frac{(g^2 + 2fh)L^3}{3EI} + \frac{(fg + eh)L^4}{2EI} + \right. \\ & + \frac{(f^2 + 2eg + 2dh)L^5}{5EI} + \frac{(ef + dg)L^6}{3EI} + \frac{(e^2 + 2df)L^7}{7EI} + \frac{deL^8}{4EI} + \\ & \left. + \frac{d^2L^9}{9EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{2a^2L^3}{105} + \frac{2abL^4}{105} + \frac{2b^2L^5}{315} + \frac{acL^5}{105} + \frac{bcL^6}{126} + \frac{2c^2L^7}{693} \right) \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{2L^3P}{105} & \frac{L^4P}{105} & \frac{L^5P}{210} & \frac{4L^5}{35} & \frac{L^4}{10} & \frac{L^3}{15} & 0 & 0 \\ \frac{L^4P}{105} & \frac{2L^5P}{315} & \frac{L^6P}{252} & \frac{L^6}{14} & \frac{2L^5}{30} & \frac{L^4}{30} & 0 & 0 \\ \frac{L^5P}{210} & \frac{L^6P}{252} & \frac{2L^7P}{693} & \frac{L^7}{21} & \frac{L^6}{28} & \frac{2L^5}{105} & 0 & 0 \\ \frac{4L^5}{35} & \frac{L^6}{14} & \frac{L^7}{21} & \frac{L^9}{9EI} & \frac{L^8}{8EI} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} \\ \frac{L^4}{10} & \frac{2L^5}{30} & \frac{L^6}{28} & \frac{L^8}{8EI} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} \\ \frac{L^3}{15} & \frac{L^4}{30} & \frac{2L^5}{105} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\det \mathbf{K} = L^6 P^3 - 330L^4 EIP^2 + 29520L^2 E^2 I^2 P - 712800E^3 I^3 = 0 \quad (4.110)$$

Bu ifadenin P'ye bağılı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 39.5016 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 90.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 200.50 \frac{EI}{L^2} \quad (4.111)$$

$$P_{kr} = 39.5016 \frac{EI}{L^2} \quad (4.112)$$

olarak elde edilir. (4.102) de ifade edilen Euler burkulma yükü ile arasındaki bağılı hata oranı % 0.059 dur. Elde edilen hata oranı, 2.çözümdeki değere göre oldukça iyidir.

4. Çözüm

$$\begin{aligned} I = & \frac{ahL^3}{15} + \frac{agL^4}{10} + \frac{bhL^4}{30} + \frac{4afL^5}{35} + \frac{2bgL^5}{35} + \frac{2chL^5}{105} + \frac{bfL^6}{14} + \\ & + \frac{5aeL^6}{42} + \frac{cgL^6}{28} + \frac{dhL^6}{84} + \frac{5beL^7}{63} + \frac{cfL^7}{21} + \frac{dgL^7}{42} + \frac{ceL^8}{18} + \\ & + \frac{dfL^8}{30} + \frac{4deL^9}{99} + \frac{1}{2} \left(\frac{k^2L}{EI} + \frac{jkL^2}{EI} + \frac{(j^2 + 2hk)L^3}{3EI} + \frac{(hj + gk)L^4}{2EI} + \right. \\ & + \frac{(fg + eh)L^8}{4EI} + \frac{(h^2 + 2gj + 2fk)L^5}{5EI} + \frac{(gh + fj + ek)L^6}{3EI} + \\ & + \left. \frac{(g^2 + 2fh + 2ej)L^7}{7EI} + \frac{(f^2 + 2eg)L^9}{9EI} + \frac{efL^{10}}{5EI} + \frac{e^2L^{11}}{11EI} \right) + \\ & + \frac{7P}{2} \left(\frac{2a^2L^3}{105} + \frac{2abL^4}{105} + \frac{2b^2L^5}{315} + \frac{acL^5}{105} + \frac{bcL^6}{126} + \frac{adL^6}{210} + \right. \\ & + \left. \frac{2c^2L^7}{693} + \frac{17bdL^7}{3465} + \frac{2cdL^8}{495} + \frac{2d^2L^9}{1287} \right) \end{aligned} \quad (4.113)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial a} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{2L^3 P}{105} & \frac{L^4 P}{15} & \frac{L^5 P}{30} & \frac{L^6 P}{60} & \frac{5L^6}{42} & \frac{4L^5}{35} & \frac{L^4}{10} & \frac{L^3}{15} & 0 & 0 \\ \frac{L^4 P}{15} & \frac{2L^5 P}{45} & \frac{L^6 P}{36} & \frac{17L^7 P}{990} & \frac{5L^7}{63} & \frac{L^6}{14} & \frac{2L^5}{35} & \frac{L^4}{30} & 0 & 0 \\ \frac{L^5 P}{30} & \frac{L^6 P}{36} & \frac{2L^7 P}{99} & \frac{7L^8 P}{495} & \frac{L^8}{18} & \frac{L^7}{21} & \frac{L^6}{28} & \frac{2L^7}{105} & 0 & 0 \\ \frac{L^6 P}{60} & \frac{17L^7 P}{990} & \frac{7L^8 P}{495} & \frac{14L^9 P}{1287} & \frac{4L^9}{99} & \frac{L^8}{30} & \frac{L^7}{42} & \frac{L^6}{84} & 0 & 0 \\ \frac{5L^6}{42} & \frac{5L^7}{63} & \frac{L^8}{18} & \frac{4L^9}{99} & \frac{L^{11}}{11EI} & \frac{L^{10}}{10EI} & \frac{L^9}{9EI} & \frac{L^8}{8EI} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} \\ \frac{4L^5}{35} & \frac{L^6}{14} & \frac{L^7}{21} & \frac{L^8}{30} & \frac{L^{10}}{10EI} & \frac{L^9}{9EI} & \frac{L^8}{8EI} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} \\ \frac{L^4}{10} & \frac{2L^5}{35} & \frac{L^6}{28} & \frac{L^7}{42} & \frac{L^9}{9EI} & \frac{L^8}{8EI} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} \\ \frac{L^3}{15} & \frac{L^4}{30} & \frac{2L^7}{105} & \frac{L^6}{84} & \frac{L^8}{8EI} & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^7}{7EI} & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^6}{6EI} & \frac{L^5}{5EI} & \frac{L^4}{4EI} & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{K} = & 1029L^8 P^4 - 95648L^6 EIP^3 + 2796640L^4 E^2 I^2 P^2 \\
& - 28976640L^2 E^3 I^3 P + 90604800E^4 I^4 = 0
\end{aligned}
\tag{4.115}$$

Bu ifadenin P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$\begin{aligned}
P_1 = 5.64 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 11.57 \frac{EI}{L^2} \\
P_3 = 28.64 \frac{EI}{L^2} \quad P_4 = 47.10 \frac{EI}{L^2}
\end{aligned}
\tag{4.116}$$

$$P_{kr} = 5.64 \frac{EI}{L^2}
\tag{4.117}$$

olarak elde edilir. Bulunan kritik burkulma yükü, gerçek değerinin çok uzağındadır. Bu fark, seçilen yaklaşım fonksiyonlarının yapısından kaynaklanmaktadır. Belirli bir mertebeden sonra elde edilen sonuçların, gerçek değerinden uzaklaştığı görülmektedir. Bu bölümde elde edilmiş olan sonuçlar özet halinde Tablo 4.4 de verilmiştir.

Tablo 4.4 4.Tip burkulma problemine ait Ritz çözümleri

Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	4	42.0000	39.4784	6.390
2	6	42.0000		6.390
3	8	39.5016		0.059
4	10	5.6400		-

4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözüm

Sonlu elemanlar yöntemi, çözümü aranan bölgenin, biraraya getirildiği zaman yine aynı bölgeyi temsil eden alt bölgelerin birleşimi cinsinden ifade edildiği, bir yaklaşık çözüm yöntemidir. Metodu diğer yöntemlerden ayıran iki önemli nokta vardır. Bunlardan biri, çözüm sırasında kullanılacak olan yaklaşım fonksiyonlarının genellikle enterpolasyon teorisi yardımıyla geliştirilmiş cebirsel fonksiyonlar oluşu, diğeri ise yaklaşım fonksiyonlarının, çözümü aranan ana bölgenin bölünmesiyle elde edilmiş olan alt bölgeler için geliştirilmiş olmasıdır. Bu alt bölgelerin her birine sonlu eleman adı verilir.

Sistemin gerçek çözümü için, ana bölge, Ψ , N sayıda oluşturulmuş her bir alt bölge ise Ψ^e ile gösterilirse,

$$\Psi = \sum_{e=1}^N \Psi^e \quad (4.118)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, sistemin ve herbir alt bölgenin bilinmeyenlerini bulmak amacıyla, alt bölgeleri temsil eden yaklaşım fonksiyonları oluşturulursa, sistemin yaklaşık çözümü,

$$\Psi \approx \bar{\Psi} = \sum_{e=1}^N \bar{\Psi}^e \quad (4.119)$$

biçimine dönüşür. Burada, üzeri çizgili ifadeler, bölgenin, yaklaşım fonksiyonlarına bağlı olarak yazılmış olduğunu ifade eder.

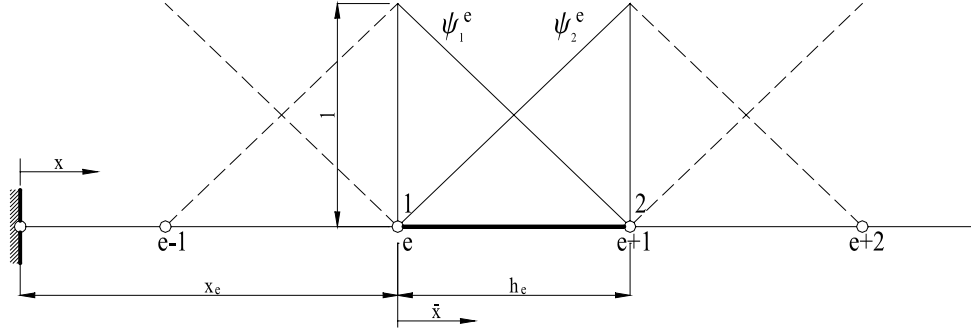
Kullanılacak bu yaklaşım fonksiyonlarına, enterpolasyon fonksiyonları da denir. Bu fonksiyonlar problemin tipine göre, bazen çözümü aranan fiziksel büyüklüğün, bazen de bilinmeyişi ifade eden fonksiyonun istenen mertebedeki türevinin sürekliliğini ilgili düğüm noktalarında sağlamak zorundadır. Bu sağlanması gereken koşullara problemin *sınır koşulları* denir.

Elemanın herhangi bir noktasında, çözümü aranan fiziksel büyüklüğün gerçek değeri, u_e , yaklaşık değeri u_h^e ile gösterilirse,

$$u_e \approx u_h^e = \sum_{i=1}^n u_i^e \psi_i^e \quad (4.120)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, u_i^e katsayıları, ψ_i^e fonksiyonun, ilgili düğüm noktalarındaki değerleridir. Bu katsayıların toplam adedi elemanın serbestlik

derecesini belirler. ψ_i^e lar ise aynı düğüm noktalarına ait yaklaşım fonksiyonlarıdır ve adlarına şekil fonksiyonları denir. Örneğin, global koordinat takımında sol ucu 1, sağ ucu 2 numarasıyla ifade edilen bir e elemanına ait şekil fonksiyonları, ψ_1^e ve ψ_2^e ile gösterilebilir. (Şekil 4.5)



Şekil 4.5 Lokal ve Global Eksen Takımları ve Şekil Fonksiyonları

e elemanı üzerinde, herhangi bir noktanın ordinatı,

$$u_e = \sum_{i=1}^2 u_i^e \psi_i^e = u_1^e \psi_1^e + u_2^e \psi_2^e \quad (4.121)$$

eşitliği ile bulunabilir. Şekil fonksiyonlarının seçiminde dikkat edilmesi gerekenler ise şunlardır.

- Şekil fonksiyonu, hangi düğüm noktası için yazılmışsa o düğüm noktasında bir, diğer düğüm noktalarında ise sıfır değerini vermelidir.
- Elemanın herhangi bir düğüm noktasında yada eleman üzerinde, şekil fonksiyonlarının ordinatlarının toplamı mutlaka bir etmelidir.

Örneğin Şekil 4.5 de eleman üzerinde lineer değiştiği kabul edilen şekil fonksiyonları çizilmiştir. Bu şekil fonksiyonları global eksen takımında,

$$\psi_1^e = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e} \quad \psi_2^e = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e} \quad (4.122)$$

biçiminde yazılabilir. Şekil fonksiyonlarını, elemanın kendi eksen takımında da yazmak mümkündür. Bunun için, başlangıç noktası 1 düğüm noktasına taşınırsa, (4.122) eşitlikleri, lokal eksen takımları cinsinden,

$$\psi_1^e = 1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \quad \psi_2^e = \frac{\bar{x}}{h_e} \quad (4.123)$$

haline dönüşür. Çözümün hassasiyetini artırmak amacıyla, problemin genel yapısına uygun şekil fonksiyonları seçilebilir. Şekil fonksiyonlarının seçiminde, probleme ait fonksiyoneldeki ifadeler içinde, en yüksek mertebeli terimin derecesine bakılır. Örneğin, içinde en yüksek 1.mertebeden türev barındıran bir fonksiyonel için seçilecek şekil fonksiyonu, minimum C^0 tipi şekil fonksiyonu olmalıdır. C^0 tipi şekil fonksiyonu kullanılan bir problemde, problemin bağımsız değişkeninin sadece kendisi tüm eleman üzerinde sürekli olmak zorundadır. Eğer, fonksiyonelde en yüksek mertebeli türevin derecesi 2 ise, minimum C^1 tipi şekil fonksiyonu kullanılır. Bu durumda, bağımsız değişkenin hem kendisi hem de 1 dereceden türevi bölge boyunca sürekli olmak zorundadır.

Bunu şu şekilde genelleştirmek mümkündür. İçinde en yüksek, n 'inci mertebeden türev barındıran bir fonksiyonel için C^{n-1} veya üzeri tipte şekil fonksiyonu kullanılır. Problemin bağımsız değişkeninin hem kendisi hem de $n-1$ 'inci mertebeye kadar olan tüm türevleri sürekli dir.

Problemin tipine göre, herbir düğüm noktası için gerekli sayıda yazılmış u_i 'ler, probleme ait fonksiyonel içinde yerine konur ve düğüm noktalarındaki değişkenlerine göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenirse, eleman denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin sayısı düğüm noktalarındaki bilinmeyenler kadardır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial u_1^e} &= 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{\partial I}{\partial u_n^e} &= 0 \end{aligned} \tag{4.124}$$

Herbir eleman için yazılmış bu eşitlikler, aynı düğüm noktasında birleşen farklı elemanlardaki ortak bilinmeyenler için birleştirme işlemine tabi tutulursa, sisteme ait denge denklemleri elde edilir. Sistemin toplam serbestlik derecesi kadar yazılan bu denklem takımı, matris formunda

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{4.125}$$

biçiminde gösterilebilir. Burada $\mathbf{K}$, sistem matrisini; $\mathbf{u}$, bilinmeyenler vektörünü; $\mathbf{F}$ ise yük vektörünü ifade eder. Buradan bilinmeyenler vektörü,

$$\mathbf{u} = (\mathbf{K})^{-1} \mathbf{F} \tag{4.126}$$

ile elde edilebilir. Eğer dış yük vektörü sıfır ise, sistemin trivial olmayan çözümü,

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (4.127)$$

eşitliği ile elde edilir. Artık bu genel bilgiler yardımıyla, daha önceden elde edilmiş olan fonksiyonelin sonlu eleman çözümünü araştırılabilir.

Daha öncede belirtildiği gibi, problemin çözümünde kullanılacak şekil fonksiyonları, fonksiyonel ifadedeki en yüksek türevli terimin mertebesine göre belirlenir. Sadece bölge terimlerine bağlı olarak fonksiyonel,

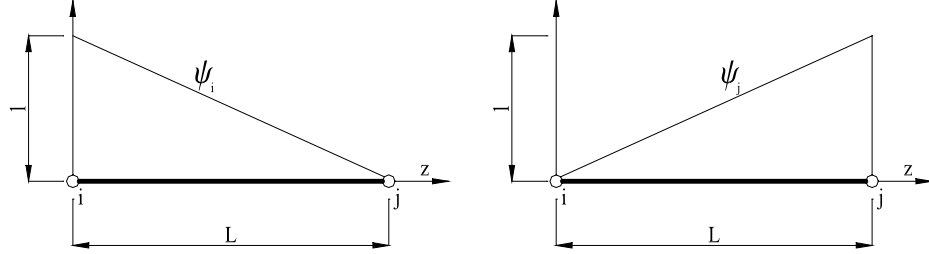
$$I(u) = -\int_0^L \frac{dM}{dz} \frac{dv}{dz} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{MM}{EI} dz + \frac{P}{2} \int_0^L \frac{dv}{dz} \frac{dv}{dz} dz \quad (4.2.a)$$

$$u = \begin{bmatrix} v, M \end{bmatrix} \quad (4.2.b)$$

biçiminde elde edilmişti. Sonlu eleman analizi, *kodlama yöntemi* adı verilen yöntemle yapılacaktır. Bu yöntemde, sıfır olduğu bilinen sınır koşullarının bulunduğu satır ve sütunlar sistem matrisinden silinir. Dolayısıyla, fonksiyonelde dinamik ve geometrik sınır koşulu terimlerini almaya gerek yoktur. (4.2.a) dan da görüleceği gibi, fonksiyoneldeki en yüksek mertebeli türevin derecesi 1'dir. Dolayısıyla en az C^0 tipi şekil fonksiyonları kullanılmalıdır.

4.2.1 Lineer Şekil Fonksiyonları (L.Ş.F) ile Çözüm

Öncelikle, C^0 tipi şekil fonksiyonları arasında en basiti olan lineer şekil fonksiyonları ile çözüm araştırılacaktır. Şekil 4.6 da z değişkenine bağlı lineer şekil fonksiyonları verilmiştir.



Şekil 4.6 Lineer Şekil Fonksiyonları

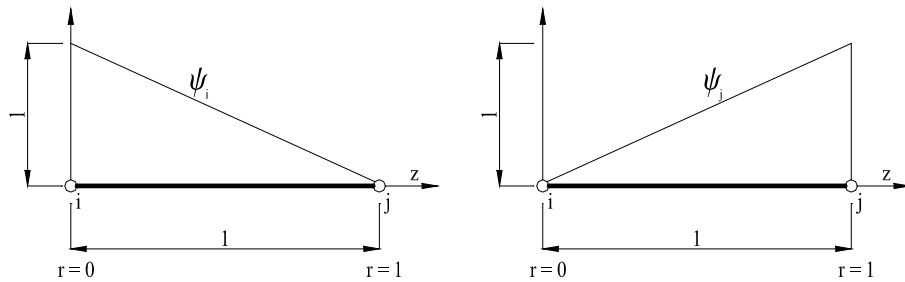
Boyu L olan herhangi bir elemanın sol düğüm noktasını i , sağ düğüm noktasını ise j ile gösterilsin. Bölge üzerinde lineer değişim gösteren şekil fonksiyonları, z değişkenine bağlı olarak,

$$\psi_i = 1 - \frac{z}{L} \quad \psi_j = \frac{z}{L} \quad (4.128)$$

biçiminde yazılır. İşlemlerde kolaylık sağlaması açısından, Şekil 4.7 de görüleceği gibi, $r = z / L$ şeklinde, r 'ye bağlı değişken dönüşümü yapılırsa, şekil fonksiyonları,

$$\psi_i = 1 - r \quad \psi_j = r \quad (4.129)$$

halini alır.



Şekil 4.7 Değişken Dönüşümü Yapılmış Lineer Şekil Fonksiyonları

(4.121) eşitliği gereğince, fonksiyoneldeki bağımsız değişkenler olan v ve M^e nin herhangi bir noktadaki değeri, şekil fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$v = v_i \psi_i + v_j \psi_j \quad (4.130)$$

$$M = M_i \psi_i + M_j \psi_j \quad (4.131)$$

şeklinde yazılabilir. (4.130) ve (4.131) ifadelerinde, şekil fonksiyonlarının (4.129) da tarif edilen değerleri yerlerine konursa,

$$v = v_i(1-r) + v_j(r) \quad (4.132)$$

$$M = M_i(1-r) + M_j(r) \quad (4.133)$$

eşitlikleri elde edilir. Çökme ve momentin, fonksiyonel içindeki, (dv/dz) ve (dM/dz), kısmi türev işlemleri de, r değişkenine bağlı olarak yazılmalıdır.

$$r = \frac{z}{L} \quad \frac{dr}{dz} = \frac{1}{L} \quad dz = Ldr \quad (4.134)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} = (-v_i + v_j) \frac{1}{L} \quad (4.135)$$

$$\frac{dM}{dz} = \frac{dM}{dr} \frac{dr}{dz} = (-M_i + M_j) \frac{1}{L} \quad (4.136)$$

(4.2.a) ifadesinin r değişkenine bağlı olarak düzenlenmiş yeni hali,

$$I = -L \int_0^1 \left(\frac{dM}{dr} \frac{dr}{dz} \right) \left(\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \right) dr + \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{M^2}{EI} dr + \frac{PL}{2} \int_0^1 \left(\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \right)^2 dr \quad (4.137.a)$$

$$I = -\frac{1}{L} \int_0^1 \frac{dM}{dr} \frac{dv}{dr} dr + \frac{L}{2} \int_0^1 \frac{M^2}{EI} dr + \frac{P}{2L} \int_0^1 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 dr \quad (4.137.b)$$

şeklinde yazılabilir. v, M, dv/dr, dM/dr' in değerleri (4.137.b) de yerine konur, gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$I = -\frac{1}{L} \int_0^1 (-M_i + M_j)(-v_i + v_j) dr + \frac{L}{2EI} \int_0^1 [M_i(1-r) + M_j(r)]^2 dr + \frac{P}{2L} \int_0^1 (-v_i + v_j)^2 dr \quad (4.138)$$

$$I = -\frac{(-M_i + M_j)(-v_i + v_j)}{L} + \frac{L}{6EI} (M_i^2 + M_i M_j + M_j^2) + \frac{P(-v_i + v_j)^2}{2L} \quad (4.139)$$

ifadeleri elde edilir. I ile ifade edilen fonksiyonelin düğüm noktası bilinmeyenlerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, eleman denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial I}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_j} = 0 \quad (4.140)$$

(4.139) ifadesi üzerinde (4.140) kısmi türevleri uygulanırsa,

$$\frac{\partial I}{\partial v_i} = \frac{P}{L}v_i - \frac{1}{L}M_i - \frac{P}{L}v_j + \frac{1}{L}M_j = 0 \quad (4.141.a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial M_i} = -\frac{1}{L}v_i + \frac{L}{3EI}M_i + \frac{1}{L}v_j + \frac{L}{6EI}M_j = 0 \quad (4.141.b)$$

$$\frac{\partial I}{\partial v_j} = -\frac{P}{L}v_i + \frac{1}{L}M_i + \frac{P}{L}v_j - \frac{1}{L}M_j = 0 \quad (4.141.c)$$

$$\frac{\partial I}{\partial M_j} = \frac{1}{L}v_i + \frac{L}{3EI}M_i - \frac{1}{L}v_j + \frac{L}{6EI}M_j = 0 \quad (4.141.d)$$

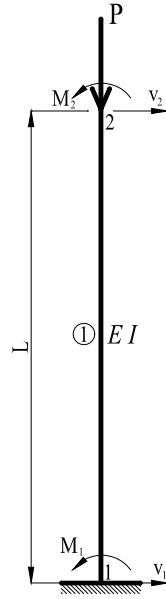
lineer homojen denklem takımı elde edilir. Tüm bu eşitlikleri matris formunda yazılırsa,

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = 0 \quad (4.142)$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial v_i} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial M_i} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial v_j} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial M_j} = 0 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} v_i \quad M_i \quad v_j \quad M_j \\ \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{P}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{P}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} & \frac{1}{L} & \frac{L}{6EI} \\ \hline -\frac{P}{L} & \frac{1}{L} & \frac{P}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{L}{6EI} & -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i \\ M_i \\ v_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (4.143)$$

biçiminde, lineer şekil fonksiyonlarına bağlı, eleman matrisi ve düğüm noktası bilinmeyenleri ifade edilmiş olur. Daha çok sayıda elemanla çözüme gidilmek istenirse, eleman matrisleri arasında birleştirme işlemi yapılarak, sistem matrisi elde edilir. Bu eleman matrisini kullanarak, değişik burkulma tiplerine ait, kritik burkulma yükü çözümleri araştırılabilir.

4.2.1.1 Birinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.8 1.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.8 de EI eğilme rijitliğine sahip L boyundaki elemanın, 1 ve 2 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. (4.143) de elde edilen eleman matrisi yardımıyla,

$$\begin{bmatrix} \frac{P}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{P}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} & \frac{1}{L} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{P}{L} & \frac{1}{L} & \frac{P}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{L}{6EI} & -\frac{1}{L} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ M_1 \\ v_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

① elemanına ait eşitlik elde edilir. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 2 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad M_2 = 0 \quad (4.145)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır şartları koşullarıdır. v_1 ve M_2 'nin bulunduğu satır ve sütunlar sistem matrisinden yokedilirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & \frac{P}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.146)$$

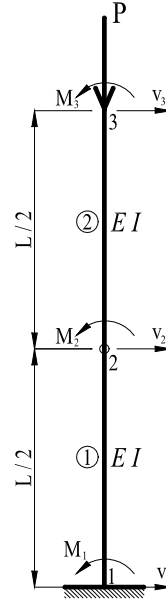
eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = \frac{P}{3EI} - \frac{1}{L^2} = 0 \quad (4.147)$$

Buradan kritik burkulma yükü,

$$P_{kr} = \frac{3EI}{L^2} \quad (4.148)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü ise, (4.27) de verildiği gibi $P_{ger} = 2.4674(EI/L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 21.59' dur. Eleman sayısını artırarak, çözümün araştırılmasına devam edilecektir.



Şekil 4.9 1. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüm

(4.143) de verilen eleman matrisleri, $L / 2$ uzunluğundaki, ① ve ② no'lu elemanlar için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\mathbf{K}^1 = \begin{bmatrix} \frac{2P}{L} & -\frac{2}{L} & -\frac{2P}{L} & \frac{2}{L} \\ -\frac{2}{L} & \frac{L}{6EI} & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} \\ \frac{2P}{L} & \frac{2}{L} & \frac{2P}{L} & -\frac{2}{L} \\ \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & -\frac{2}{L} & \frac{L}{6EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ M_1 \\ v_2 \\ M_2 \end{matrix} \quad \mathbf{K}^2 = \begin{bmatrix} \frac{2P}{L} & -\frac{2}{L} & -\frac{2P}{L} & \frac{2}{L} \\ -\frac{2}{L} & \frac{L}{6EI} & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} \\ \frac{2P}{L} & \frac{2}{L} & \frac{2P}{L} & -\frac{2}{L} \\ \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & -\frac{2}{L} & \frac{L}{6EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \end{matrix} \quad (4.149)$$

Her iki elemanın ortak düğüm noktası olan 2 nolu düğüm noktasına ait değerler toplanarak, sistem bilinmeyenlerine bağlı eşitlik elde edilir.

$$\begin{bmatrix} v_1 & M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 \\ \frac{2P}{L} & -\frac{2}{L} & -\frac{2P}{L} & \frac{2}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{L} & \frac{L}{6EI} & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & 0 & 0 \\ -\frac{2P}{L} & \frac{2}{L} & \frac{4P}{L} & -\frac{4}{L} & -\frac{2P}{L} & \frac{2}{L} \\ \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & -\frac{4}{L} & \frac{L}{3EI} & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} \\ 0 & 0 & -\frac{2N}{L} & \frac{2}{L} & \frac{2P}{L} & -\frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & -\frac{2}{L} & \frac{L}{6EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

Sınır koşulları olan $v_1 = M_3 = 0$, olduğu bilindiğine göre, v_1 ve M_3 'ün bulunduğu satır ve sütunlar sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} M_1 & v_2 & M_2 & v_3 \\ \frac{L}{6EI} & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & 0 \\ \frac{2}{L} & \frac{4P}{L} & -\frac{4}{L} & -\frac{2P}{L} \\ \frac{L}{12EI} & -\frac{4}{L} & \frac{L}{3EI} & \frac{2}{L} \\ 0 & -\frac{2P}{L} & \frac{2}{L} & \frac{2P}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = 7L^4 P^2 - 240L^2 EIP + 576E^2 I^2 = 0 \quad (4.152)$$

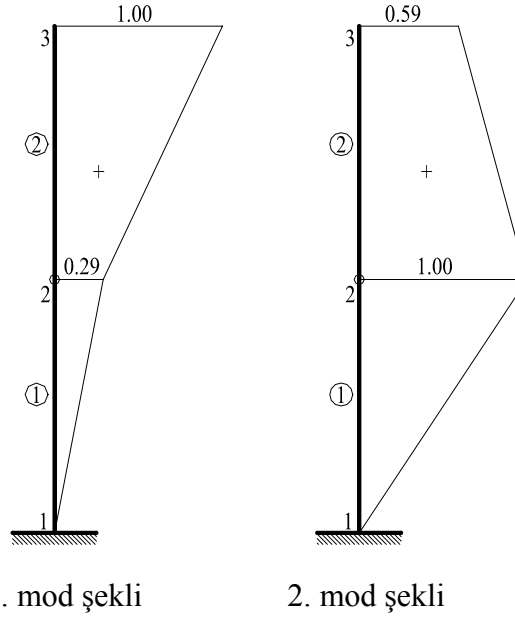
Bu fonksiyonun P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 2.5967 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 31.69 \frac{EI}{L^2} \quad (4.153)$$

$$P_{kr} = 2.5967 \frac{EI}{L^2} \quad (4.154)$$

olarak elde edilir. Euler burkulma yükü $P_{ger} = 2.4674(EI/L^2)$ ile arasındaki bağıl hata oranı % 5.24' dür. Eleman sayısını artırmakla hata oranının azaldığı

görülmektedir. (4.153) de elde edilen iki farklı burkulma kökü, sırasıyla (4.151) deki sistem matrisinde P'in yerine konup, elde edilen denklem takımı çözülürse, iki farklı burkulma yüküne ait, mod şekilleri elde edilir.



Şekil 4.10 1. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

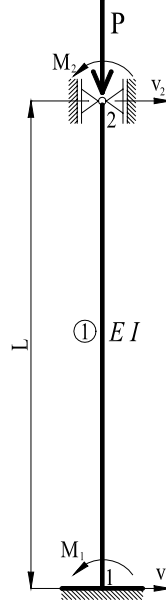
$P_1 = 2.5967(EI / L^2)$ köküne karşılık 1. mod ve $P_2 = 31.69(EI / L^2)$ kökü için de 2. mod şekli, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş halde Şekil 4.10 da çizilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi, 1.mod şekli, sistemin ilk kararlı denge durumunu yansıtmaktadır. Diğer köke karşı gelen 2.mod şekli ise diğer kararlı denge durumuna aittir. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözüm araştırılmıştır. Tablo 4.5 de, farklı sayıda elemanlar kullanılması halinde, elde edilen sonuçlar özet halinde verilmiştir.

Tablo 4.5 1.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	1	2	3.0000	2.4674	21.59
2	2	4	2.5967		5.24
3	3	6	2.5243		2.31
4	4	8	2.4993		1.29
5	5	10	2.4878		0.83
6	7	12	2.4815		0.57
7	9	14	2.4778		0.42

Tablodan da görüleceği gibi, eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. 6 dan fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) yada sanal köklere rastlanmıştır.

4.2.1.2 İkinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.11 2.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüm

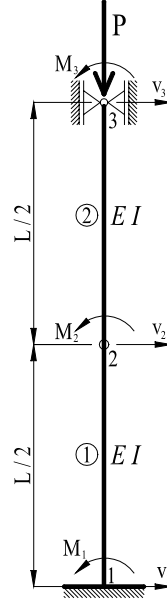
Şekil 4.11 de elemanın 1 ve 2 noktalarına ait düğüm noktası bilinmeyenleri gösterilmiştir. Eleman matrisi (4.144) de yazılmıştı. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 2 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad M_2 = 0 \quad (4.155)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır şartları koşullarıdır. Bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar matrislerden yokedilirse, (4.144) eşitliği,

$$\begin{bmatrix} \frac{M_1}{L} \\ \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} [M_1] = [0] \quad (4.156)$$

biçimine dönüşür. Normal kuvvete bağlı terimler sınır koşulları yüzünden yokolduğundan çözümü elde etmek mümkün değildir. Bu yüzden daha fazla sayıda eleman kullanmak gerekmektedir. 2 eleman kullanılması halinde, L/2 uzunluğundaki, ① ve ② no'lu elemanlara ait eleman matrisler, (4.149) de, sistem matrisi ise (4.150) de ifade edilmiştir.



Şekil 4.12 2.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüm

(4.155) deki sınır koşullarını girmek için; v_1 , v_3 ve M_3 'ün bulunduğu satır ve sütunlar silinirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{M_1}{6EI} & \frac{v_2}{L} & \frac{M_2}{12EI} \\ \frac{2}{L} & \frac{4P}{L} & -\frac{4}{L} \\ \frac{L}{12EI} & -\frac{4}{L} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.157)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = 7L^2P - 192EI = 0 \quad (4.158)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağlı tek kökü,

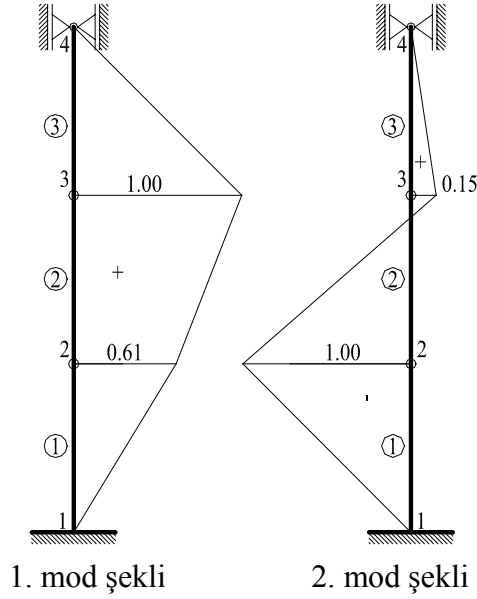
$$P_1 = P_{kr} = 27.4286 \frac{EI}{L^2} \quad (4.159)$$

kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü (4.55) de verildiği gibi, $P_{ger} = 20.1420(EI/L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 36.18 gibi oldukça yüksek bir orandır. Aynı problemin 3 eleman kullanarak çözülmesi halinde ise, burkulma kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 24.0463 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 83.95 \frac{EI}{L^2} \quad (4.160)$$

$$P_{kr} = 24.0463 \frac{EI}{L^2} \quad (4.161)$$

olarak elde edilir. Hata oranı % 19.38'e düşmüştür. (4.160) daki burkulma köklerine karşılık gelen, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri, Şekil 4.13 de verilmiştir. Şekil 4.13 den de görüleceği gibi minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumunu yansıtmaktadır.



Şekil 4.13 2. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

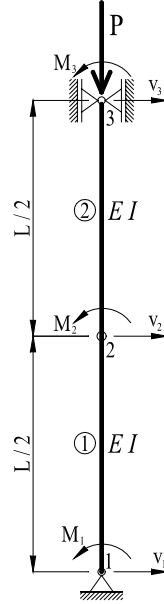
Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar özet halinde Tablo 4.6 da verilmiştir.

Tablo 4.6 2. Tip burkulma problemine ait L.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	-	1	-	20.1420	-
2	1	3	27.4286		39.18
3	2	5	24.0463		19.38
4	3	7	22.3636		11.03
5	4	9	21.5737		7.11
6	5	11	21.1469		4.99
7	8	13	20.8911		3.72
8	10	15	20.7258		2.90
9	12	17	20.6129		2.34

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı düşmektedir. Ancak, bu burkulma problemi tipinde elde edilen hata oranlarının pek tatmin edici değildir. 6 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.1.3 Üçüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.14 3.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüm

Tek eleman kullanılması halinde her iki uçtaki sınır koşulları yokedildikten sonra sistem matrisinde herhangi bir terim kalmadığından, çözüme ulaşmak mümkün değildir. Bu yüzden, ancak, iki eleman kullanarak çözümün araştırılmasına başlanabilir. Düğüm noktası bilinmeyenleri Şekil 4.14 de gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad M_1 = 0 \quad M_3 = 0 \quad (4.162)$$

2 eleman kullanılması halinde, $L/2$ uzunluğundaki, ① ve ② no'lu elemanlara ait eleman matrisleri, (4.149) de, sistem matrisi ise (4.150) de ifade edilmişti. (4.162) deki sınır koşullarını girmek için; v_1 , v_3 , M_1 ve M_3 'ün bulunduğu satır ve sütunlar sistem matrisinden silinirse, sadece 2 no'lu düğüm noktasındaki bilinmeyenlere bağlı,

$$\begin{bmatrix} \frac{4P}{L} & -\frac{4}{L} \\ -\frac{4}{L} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.163)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = L^2 P - 12EI = 0 \quad (4.164)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağlı tek kökü olan,

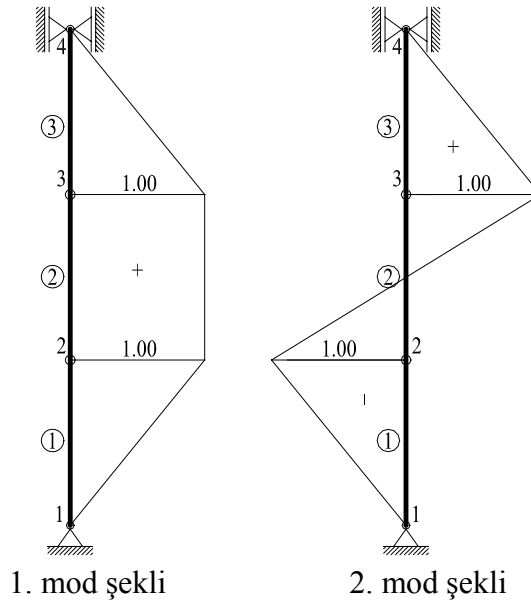
$$P_1 = P_{kr} = 12.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.165)$$

değeri kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü (4.78) de verildiği gibi, $P_{ger} = 9.8696(EI/L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 21.59 dur. Aynı problemin 3 eleman kullanılarak çözülmesi halinde, burkulma kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 10.80 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 54.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.166)$$

$$P_{kr} = 10.80 \frac{EI}{L^2} \quad (4.167)$$

olarak elde edilir. Hata oranı % 9.43'e düşmüştür. Bu köklere karşılık gelen, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri ise Şekil 4.15 de verilmiştir.



Şekil 4.15 3. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile Üç Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

Şekil 4.15 den de görüleceği gibi, minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumunu yansıtmaktadır. Daha fazla sayıda eleman

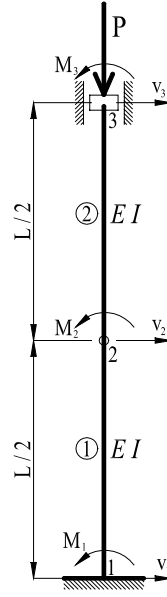
kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar ise özet halinde Tablo 4.7 de verilmiştir.

Tablo 4.7 3.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F’lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. Sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	-	-	-	9.8696	-
2	1	2	12,0000		21,59
3	2	4	10,8000		9,43
4	3	6	10,3867		5,24
5	4	8	10,1984		3,33
6	5	10	10,0971		2,31
7	8	12	10,0364		1,69
8	10	14	9,9971		1,29

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. Ancak, yine de bu burkulma problemi tipinde elde edilen hata oranlarının pek tatmin edici olduğu söylenemez. 6 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.1.4 Dördüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.16 4.Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüm

Bu tip burkulma probleminde de, tek eleman kullanılması halinde, her iki uçta çökmeye bağlı satır ve sütunlardaki P'ye bağlı terimler yokolduğundan, burkulma kökü elde edilemez. Bu yüzden, ancak, iki eleman kullanarak çözümün araştırılmasına başlanabilir. Düğüm noktası bilinmeyenleri Şekil 4.16 da gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökmenin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (4.168)$$

probleme ait geometrik sınır şartlarıdır. 2 eleman kullanılması halinde, L/2 uzunluğundaki, ① ve ② no'lu elemanlara ait eleman matrisleri, (4.149) da, sistem matrisi ise (4.150) de ifade edilmişti. (4.168) deki sınır koşullarını sisteme girmek için; v_1 ve v_3 'ün bulunduğu satır ve sütunlar sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{6EI} & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & 0 \\ \frac{2}{L} & \frac{4P}{L} & -\frac{4}{L} & \frac{2}{L} \\ \frac{L}{12EI} & -\frac{4}{L} & \frac{L}{3EI} & \frac{L}{12EI} \\ 0 & \frac{2}{L} & \frac{L}{12EI} & \frac{L}{6EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.169)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127)

$$\det \mathbf{K} = L^2 P - 48EI = 0 \quad (4.170)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağlı tek kökü olan,

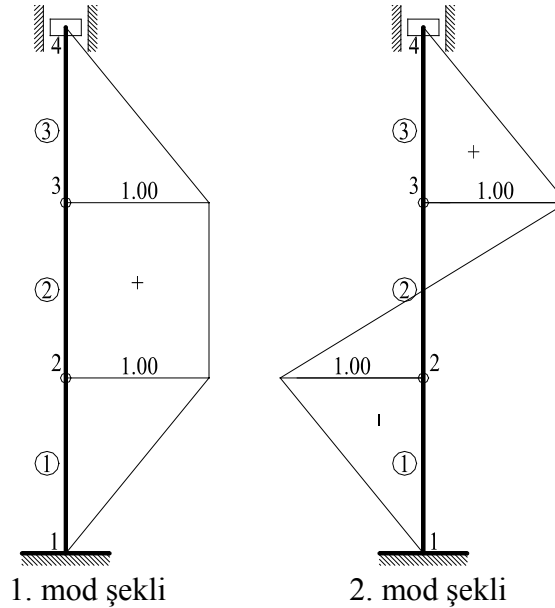
$$P_1 = P_{kr} = 48.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.171)$$

değeri kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü (4.102) de verildiği gibi, $P_{ger} = 39.4784(EI / L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 21.59 dur. Aynı problem 3 eleman kullanılarak çözümlerse, burkulma kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 54.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 97.20 \frac{EI}{L^2} \quad (4.172)$$

$$P_{kr} = 54.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.173)$$

olarak elde edilir. 3 elemanlı çözümde hata oranı % 36.78'e çıkmıştır. Eleman sayısı artırılmasına rağmen, elde sonucun daha kötü olduğu görülmektedir. Bu köklere karşılık gelen, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri ise Şekil 4.17 de verilmiştir. Şekil 4.17 den de görüleceği gibi, elastik eğrisi simetrik olduğu bilinen çubuğun ilk kararlı dengesi, sadece minimum köke karşılık gelen burkulma mod şeklinde ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.17 4. Tip Burkulma Çubuğunda L.Ş.F ile Üç Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar özet halinde Tablo 4.8 de verilmiştir.

Bu burkulma tipinde de, 5 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır. Eleman sayısının artırılması ile hata oranı düşmektedir. Ancak, yine de bu burkulma problemi tipinde de elde edilen hata oranlarının, fazla eleman alınmasına rağmen pek de tatmin edici olduğu söylenemez.

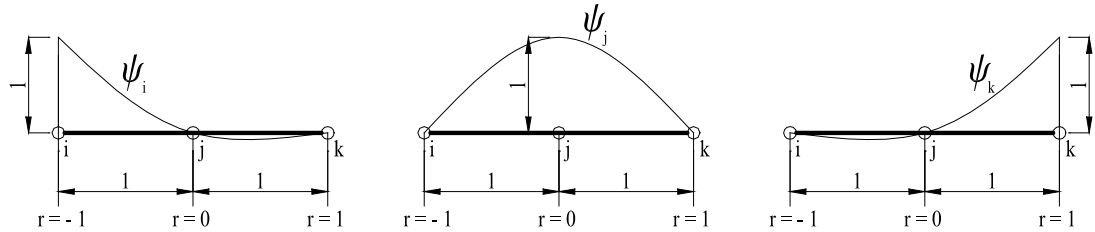
Tablo 4.8 4.Tip burkulma problemine ait L.Ş.F’lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	-	2	-	39.4784	-
2	1	4	48,0000		21,59
3	2	6	54,0000		36,78
4	3	8	48,0000		21,59
5	4	10	44,8883		13,70
6	6	12	43,2002		9,43
7	8	14	42,1936		6,88
8	10	16	41,5467		5,24
9	12	18	41,1067		4,12
10	14	20	40,7937		3,33
11	16	22	40,5632		2,75

4.2.2 Kuadratik Şekil Fonksiyonları (K.Ş.F.) ile Çözüm

Lineer şekil fonksiyonlarından elde edilen eleman matrisleri ile yapılan çözümlerde, eleman sayısı artırıldıkça hata oranları belirgin bir şekilde azalmaktadır. Ancak yine de mühendislikçe kabul edilebilir hata oranlarına ulaşmak için, çok fazla sayıda eleman kullanmak gerekmektedir.

Tamlık ve süreklilik koşullarını sağlayan şekil fonksiyonları ile çözüm yapılması halinde eleman boyutları küçüldükçe kesin sonuca daha çok yaklaşılr. Ancak eleman boylarının küçülmesi, bilinmeyen sayısının ve buna paralel olarak kesme hatalarının artmasına yol açmaktadır. Bu yüzden daha büyük elemanlar ve daha az bilinmeyenle çalışma yoluna gitmek gerekmektedir. Bu sakıncaları ortadan kaldırmak için kuadratik şekil fonksiyonlarını kullanmak çözümde büyük kolaylık sağlar. Bu amaçla Şekil 4.18 de gösterilen kuadratik şekil fonksiyonları seçilmiştir.



Şekil 4.18 Kuadratik Şekil Fonksiyonları

L uzunluğundaki herhangi bir elemanın sol düğüm noktası i, sağ düğüm noktası k ve çubuğun tam ortasında seçilen yeni nokta ise j ile gösterilsin. Bölge üzerinde 2. dereceden parabolik değişim gösteren şekil fonksiyonları, Şekil 4.18 de koordinatları verilen ve toplam 2 birim boy için r değişkenine bağlı olarak, [7] de

$$\psi_i = -\frac{r}{2}(1-r) \quad \psi_j = 1-r^2 \quad \psi_k = \frac{r}{2}(1+r) \quad (4.174)$$

biçiminde verilmiştir. L boylu eleman için ve z değişkenine bağlı olarak yazılan ve değişken dönüşümü yapılmamış haldeki z değişkeni ile, toplam 2 birim boylu çubuğun r değişkeni arasındaki ilişki,

$$r = \frac{2}{L}z - 1 \quad \frac{dr}{dz} = \frac{2}{L} \quad dz = \frac{L}{2}dr \quad (4.175.a)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dM}{dr} \frac{dr}{dz} \quad (4.175.b)$$

biçimindedir. (4.121) eşitliği gereğince, fonksiyoneldeki bağımsız değişkenler olan v ve M' nin herhangi bir noktadaki değeri, şekil fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$v = v_i \psi_i + v_j \psi_j + v_k \psi_k \quad (4.176)$$

$$M = M_i \psi_i + M_j \psi_j + M_k \psi_k \quad (4.177)$$

şeklinde yazılabilir. (4.176) ve (4.177) ifadelerinde, şekil fonksiyonlarının (4.174) de tarif edilen değerleri yerlerine konursa,

$$v = v_i \left(-\frac{r}{2}(1-r) \right) + v_j (1-r^2) + v_k \left(\frac{r}{2}(1+r) \right) \quad (4.178)$$

$$M = M_i \left(-\frac{r}{2}(1-r) \right) + M_j (1-r^2) + M_k \left(\frac{r}{2}(1+r) \right) \quad (4.179)$$

elde edilir. (4.2.a) ifadesinin r değişkenine bağlı olarak düzenlenmiş yeni hali,

$$I = -\frac{L}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{dM}{dr} \frac{dr}{dz} \right) \left(\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \right) dr + \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \frac{M^2}{EI} dr + \frac{PL}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \right)^2 dr \quad (4.180.a)$$

$$I = -\frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dM}{dr} \frac{dv}{dr} dr + \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \frac{M^2}{EI} dr + \frac{P}{L} \int_{-1}^1 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 dr \quad (4.180.b)$$

şeklinde yazılabilir. v, M, dv/dr, dM/dr' in değerleri (4.180.b) de yerine konup, gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned} I = & -\frac{(M_i - M_k)(v_i - v_k)}{L} - \frac{4(M_i - 2M_j + M_k)(v_i - 2v_j + v_k)}{3L} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{L(M_i^2 + 4M_i M_j - 8M_j^2 - 2M_i M_k + 4M_j M_k + M_k^2)}{12EI} \right. \\ & \left. + \frac{LM_j^2}{EI} + \frac{L(M_i - 2M_j + M_k)^2}{20EI} \right) + \frac{P}{2} \left(\frac{(v_i - v_k)^2}{L} + \frac{4(v_i - 2v_j + v_k)^2}{3L} \right) \end{aligned} \quad (4.181)$$

ifadesi elde edilir. I ile ifade edilmiş olan fonksiyonelin düğüm noktası bilinmeyenlerine göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, eleman denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v_j} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial M_j} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v_k} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_k} = 0 \end{aligned} \quad (4.182)$$

olmalıdır. (4.181) ifadesi üzerinde (4.182) kısmi türevleri uygulanırsa,

$$\frac{\partial I}{\partial v_i} = \frac{7P}{3L}v_i - \frac{7}{3L}M_i - \frac{8P}{3L}v_j + \frac{8}{3L}M_j + \frac{P}{3L}v_k - \frac{1}{3L}M_k = 0 \quad (4.183.a)$$

$$\frac{\partial I}{\partial M_i} = -\frac{7}{3L}v_i + \frac{2L}{15EI}M_i + \frac{8}{3L}v_j + \frac{L}{15EI}M_j - \frac{1}{3L}v_k - \frac{L}{30EI}M_k = 0 \quad (4.183.b)$$

$$\frac{\partial I}{\partial v_j} = -\frac{8P}{3L}v_i + \frac{8}{3L}M_i + \frac{16P}{3L}v_j - \frac{16}{3L}M_j - \frac{8P}{3L}v_k + \frac{8}{3L}M_k = 0 \quad (4.183.c)$$

$$\frac{\partial I}{\partial M_j} = \frac{8}{3L}v_i + \frac{L}{15EI}M_i - \frac{16}{3L}v_j + \frac{8L}{15EI}M_j + \frac{8}{3L}v_k + \frac{L}{15EI}M_k = 0 \quad (4.183.d)$$

$$\frac{\partial I}{\partial v_k} = \frac{P}{3L}v_i - \frac{1}{3L}M_i - \frac{8P}{3L}v_j + \frac{8}{3L}M_j + \frac{7P}{3L}v_k - \frac{7}{3L}M_k = 0 \quad (4.183.e)$$

$$\frac{\partial I}{\partial M_k} = -\frac{1}{3L}v_i - \frac{L}{30EI}M_i + \frac{8}{3L}v_j + \frac{L}{15EI}M_j - \frac{7}{3L}v_k + \frac{2L}{15EI}M_k = 0 \quad (4.183.f)$$

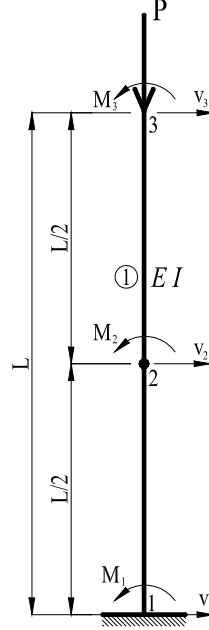
homojen denklem takımı elde edilir. Tüm bu eşitlikleri, (4.142) deki gibi matris formunda yazılırsa,

$$\begin{array}{l} \frac{\partial I}{\partial v_i} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial M_i} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial v_j} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial M_j} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial v_k} = 0 \rightarrow \\ \frac{\partial I}{\partial M_k} = 0 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} v_i \quad M_i \quad v_j \quad M_j \quad v_k \quad M_k \\ \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \frac{7P}{3L} & -\frac{7}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{P}{3L} & -\frac{1}{3L} \\ -\frac{7}{3L} & \frac{2L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{1}{3L} & -\frac{L}{30EI} \\ \hline -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{16P}{3L} & -\frac{16}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} \\ \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{16}{3L} & \frac{8L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} \\ \hline \frac{P}{3L} & -\frac{1}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{7P}{3L} & -\frac{7}{3L} \\ -\frac{1}{3L} & -\frac{L}{30EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{7}{3L} & \frac{2L}{15EI} \end{array} \right] \begin{array}{c} v_i \\ M_i \\ \hline v_j \\ M_j \\ \hline v_k \\ M_k \end{array} \right] = \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array} \quad (4.184)$$

biçiminde, kuadratik şekil fonksiyonlarına bağlı, eleman matrisi ve düğüm noktası bilinmeyenleri ifade edilmiş olur. Daha çok sayıda elemanla çözüme gidilmek istenirse, eleman matrisleri arasında birleştirme işlemi yapılarak, sistem matrisi elde edilir.

Artık, elde edilmiş olan bu eleman matrisi kullanılarak, önceki bölümlerde sınıflandırılmış olan burkulma tiplerine ait, kritik burkulma yükü çözümleri araştırılabilir.

4.2.2.1 Birinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.19 1.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.19 da EI eğilme rijitliğine sahip L boyundaki elemanın, 1, 2 ve 3 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. (3.184) de elde edilmiş olan eleman matrisi yardımıyla,

$$\begin{bmatrix} v_1 & M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 \\ \frac{7P}{3L} & -\frac{7}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{P}{3L} & -\frac{1}{3L} \\ -\frac{7}{3L} & \frac{2L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{1}{3L} & -\frac{L}{30EI} \\ -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{16P}{3L} & -\frac{16}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} \\ \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{16}{3L} & \frac{8L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} \\ \frac{P}{3L} & -\frac{1}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{7P}{3L} & -\frac{7}{3L} \\ -\frac{1}{3L} & -\frac{L}{30EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{7}{3L} & \frac{2L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

şeklinde, ① elemanına ait eşitlik elde edilir.

Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (4.186)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır şartları koşullarıdır. v_1 ve M_3 'nin bulunduğu satır ve sütunlar matrislerden yokedilirse, (4.185) eşitliği,

$$\begin{bmatrix} M_1 & v_2 & M_2 & v_3 \\ \frac{2L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{1}{3L} \\ \frac{8}{3L} & \frac{16P}{3L} & -\frac{16}{3L} & -\frac{8P}{3L} \\ \frac{L}{15EI} & -\frac{16}{3L} & \frac{8L}{15EI} & \frac{8}{3L} \\ -\frac{1}{3L} & -\frac{8P}{3L} & \frac{8}{3L} & \frac{7P}{3L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.187)$$

biçimine dönüşür. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

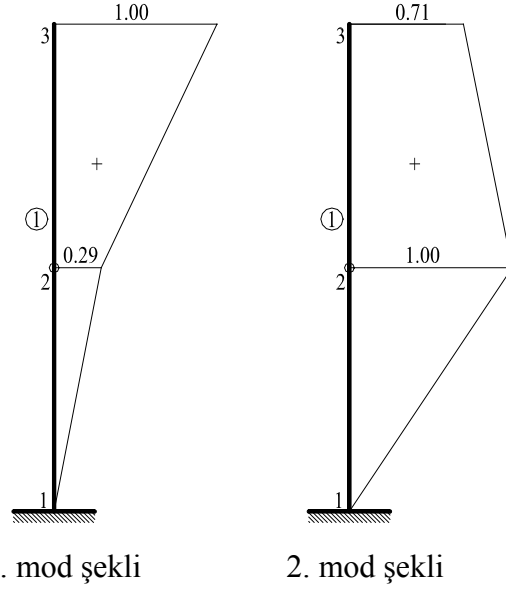
$$\det \mathbf{K} = 3L^4 P^2 - 104L^2 EIP + 240E^2 I^2 = 0 \quad (4.188)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 2.4860 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 32.18 \frac{EI}{L^2} \quad (4.189)$$

$$P_{kr} = 2.4860 \frac{EI}{L^2} \quad (4.190)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü ($P_{ger} = 2.4674(EI/L^2)$) idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 0.75 gibi oldukça düşük bir değerdir. L.Ş.F kullanarak 5 den fazla eleman kullanılması halinde ulaşılacak hata mertebesine, K.Ş.F. ile sadece tek elemanda erişilmiştir. (4.189) da elde edilen iki farklı burkulma köküne karşılık gelen, mod şekilleri Şekil 4.20 de verilmiştir.



Şekil 4.20 1. Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekilleri

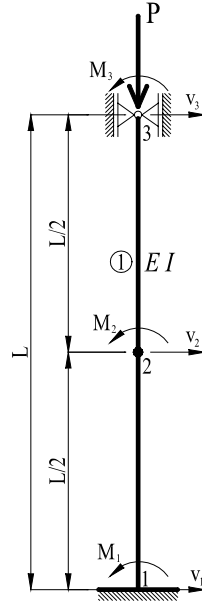
Şekilden de görüleceği gibi, minimum köke karşılık gelen 1.mod şekli, sistemin ilk kararlı denge konumuna yansıtmaktadır. Diğer köke karşı gelen 2.mod şekli ise sistemin diğer kararlı denge konumuna aittir. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, yapılan çözümler sonucu elde edilen sonuçlar Tablo 4.9 da özet halinde verilmiştir.

Tablo 4.9 1.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. Sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	2	4	2,4860	2.4674	0,753
2	4	8	2,4687		0,051
3	8	12	2,4677		0,010
4	14	16	2,4675		0,003

Tablodan da görüleceği gibi, eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. 2 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) yada sanal köklere rastlanmıştır.

4.2.2.2 İkinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.21 2.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.21 de tek eleman kullanılması halinde, 1, 2 ve 3 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (4.191)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır şartları koşullarıdır. Bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar, (4.185) de tek eleman için yazılmış olan sistem matrisinden silinirse,

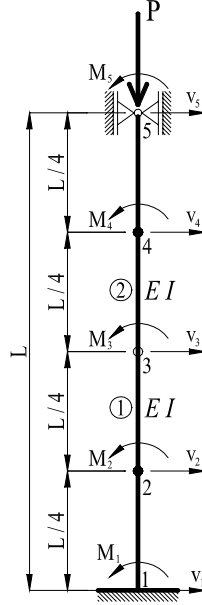
$$\begin{bmatrix} \frac{2L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} \\ \frac{8}{3L} & \frac{16P}{3L} & -\frac{16}{3L} \\ \frac{L}{15EI} & -\frac{16}{3L} & \frac{8L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.192)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = 3L^2 P - 80EI = 0 \quad (4.193)$$

$$P_1 = P_{kr} = 26.6666 \frac{EI}{L^2} \quad (4.194)$$

kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü $P_{ger} = 20.1420(EI / L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 32.39 gibi oldukça yüksek bir orandır. Aynı sistem, uzunluğu birbirine eşit olan 2 eleman olarak çözülmesi halinde ise, (Şekil 4.22) sistem matrisi,



Şekil 4.22 2.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm

$$\begin{bmatrix}
 v_1 & M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 & v_4 & M_4 & v_5 & M_5 \\
 \frac{14P}{3L} & -\frac{14}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{2P}{3L} & -\frac{2}{3L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{14}{3L} & \frac{L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{2P}{3L} & -\frac{2}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{28P}{3L} & -\frac{28}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{2P}{3L} & -\frac{2}{3L} \\
 -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{28}{3L} & \frac{2L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2P}{3L} & -\frac{2}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{14P}{3L} & -\frac{14}{3L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{14}{3L} & \frac{L}{15EI}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 M_1 \\
 v_2 \\
 M_2 \\
 v_3 \\
 M_3 \\
 v_4 \\
 M_4 \\
 v_5 \\
 M_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (4.195)$$

biçiminde yazılabilir. Sınır koşullarını girmek için; v_1 , v_5 ve M_5 'in bulunduğu satır ve sütunlar (4.195) deki sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix}
M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 & v_4 & M_4 \\
\frac{L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} & 0 & 0 \\
\frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & 0 & 0 \\
\frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & 0 & 0 \\
-\frac{2}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{28P}{3L} & -\frac{28}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} \\
-\frac{L}{60EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{28}{3L} & \frac{2L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} \\
0 & 0 & 0 & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_1 \\
v_2 \\
M_2 \\
v_3 \\
M_3 \\
v_4 \\
M_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (4.196)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

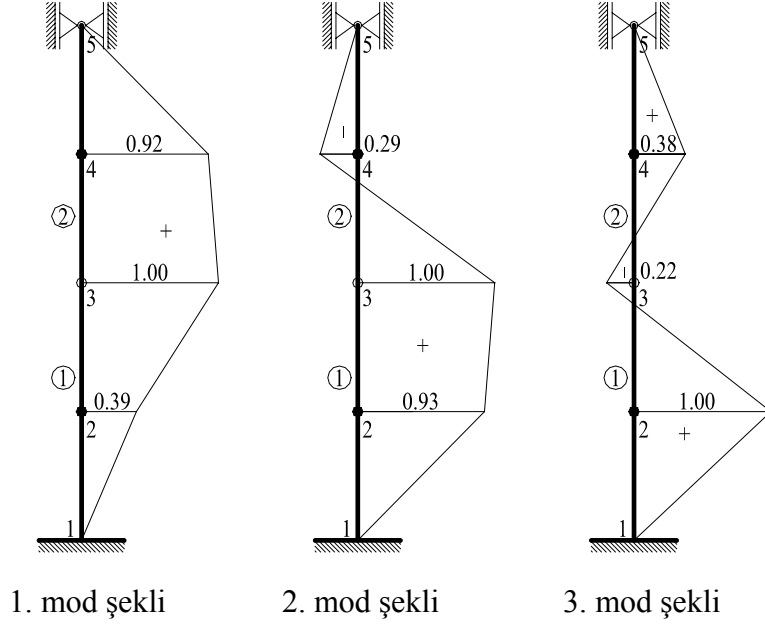
$$\det \mathbf{K} = 17L^6P^3 - 4832L^4EIP^2 + 328960L^2E^2I^2P - 4915200E^3I^3 = 0 \quad (4.197)$$

Bu fonksiyonun P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 20.8692 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 72.64 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 190.73 \frac{EI}{L^2} \quad (4.198)$$

$$P_{kr} = 20.8692 \frac{EI}{L^2} \quad (4.199)$$

olarak elde edilir. Euler burkulma yükü, ($(P_{ger} = 20.1420(EI / L^2))$) ile arasındaki bağıl hata oranı % 3.61 dir. (4.198) de elde edilen köklere karşılık gelen, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri, Şekil 4.23 de verilmiştir.



Şekil 4.23 2.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm Ait Burkulma Mod Şekilleri

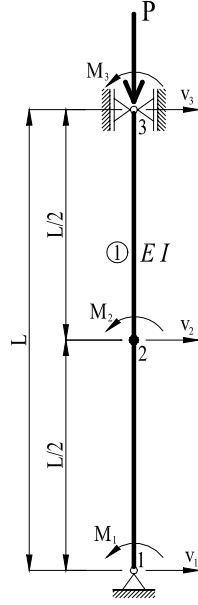
Şekil 4.23 den de görüleceği gibi, minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumunu yansıtmaktadır. Diğer mod şekilleri ise, sistemin diğer kararlı denge konumlarına aittir. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar özet halinde Tablo 4.10 da verilmiştir.

Tablo 4.10 2.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	1	3	26,6666	20.1420	32,39
2	3	7	20,8692		3,61
3	5	11	20,3332		0,95
4	14	15	20,2373		0,47

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. Ancak, yine de bu burkulma problemi tipinde elde edilen hata oranlarının pek tatmin edici olduğu söylenemez. 3 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.2.3 Üçüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.24 3.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.24 de tek eleman kullanılması halinde, 1, 2 ve 3 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad M_1 = 0 \quad M_3 = 0 \quad (4.200)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır koşullarıdır. (4.200) de verilen şartları sağlamak için, bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar, (4.185) de tek eleman için yazılmış olan sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{16P}{3L} & -\frac{16}{3L} \\ -\frac{16}{3L} & \frac{8L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

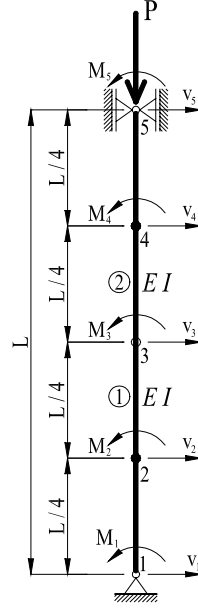
eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = L^2 P - 10EI = 0 \quad (4.202)$$

Bu fonksiyonun P'ye bağlı tek kökü olan,

$$P_1 = P_{kr} = 10.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.203)$$

değeri kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler yükü, $P_{ger} = 9.8696(EI / L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 1.32 dir.



Şekil 4.25 3.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm

2 eleman kullanılması halinde (Şekil 4.25), $L/2$ uzunluğundaki, ① ve ② no'lu elemanlara ait eleman matrislerinin birleştirilmesi ile daha önceden (4.195) de elde edilmiş olan sistem matrisinden, 1 ve 5 düğüm noktalarında sıfır olduğu bilinen çökme ve moment ifadelerine ait satır ve sütunlar yok edilirse,

$$\begin{bmatrix}
 v_2 & M_2 & v_3 & M_3 & v_4 & M_4 \\
 \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & 0 & 0 \\
 -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & 0 & 0 \\
 -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{28P}{3L} & -\frac{28}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} \\
 \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{28}{3L} & \frac{2L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} \\
 0 & 0 & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} \\
 0 & 0 & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 M_2 \\
 v_3 \\
 M_3 \\
 v_4 \\
 M_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (4.204)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

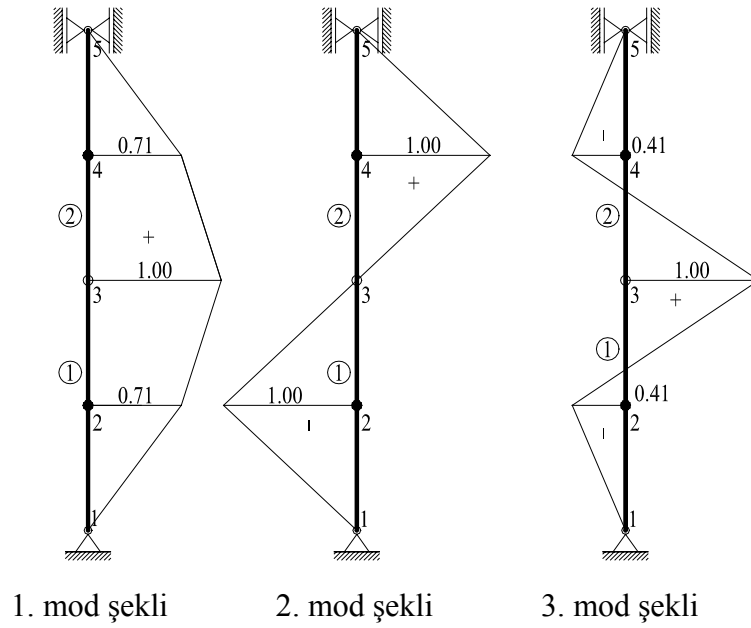
$$\det \mathbf{K} = 3L^6 P^3 - 536L^4 EIP^2 + 20480L^2 E^2 I^2 P - 153600E^3 I^3 = 0 \quad (4.205)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağılı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 9.9438 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 40.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 128.72 \frac{EI}{L^2} \quad (4.206)$$

$$P_{kr} = 9.9438 \frac{EI}{L^2} \quad (4.207)$$

olarak elde edilir. 2 elemanlı çözümde hata oranı % 0.75'e düşmüştür. Bu köklere karşılık gelen, çökmeye bağılı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri, Şekil 4.26 da verilmiştir.



Şekil 4.26 3. Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

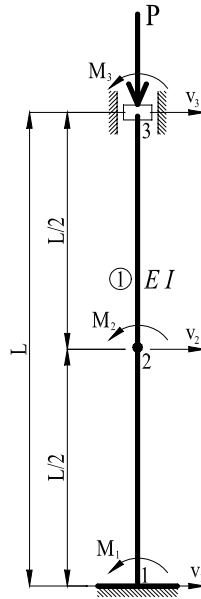
Şekil 4.26 dan da görüleceği gibi minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumuna aittir. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar ise özet halinde Tablo 4.11 de verilmiştir.

Tablo 4.11 3.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	1	2	10,0000	9.8696	1,32
2	3	6	9,9438		0,75
3	5	10	9,8852		0,16
4	11	14	9,8747		0,05

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. Ancak, yine de bu burkulma problemi tipinde elde edilen hata oranlarının pek tatmin edici olduğu söylenemez. 3 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.2.4 Dördüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.27 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Tek Elemanlı Çözüm

Tek eleman kullanılması hali için, düğüm noktası bilinmeyenleri Şekil 4.27 de gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökmenin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0 \quad (4.208)$$

probleme ait geometrik sınır şartlarıdır. (4.208) de verilen şartları sağlamak için, bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar, (4.185) de tek eleman için yazılmış olan sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} \frac{2L}{15EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} \\ \frac{8}{3L} & \frac{16P}{3L} & -\frac{16}{3L} & \frac{8}{3L} \\ \frac{L}{15EI} & -\frac{16}{3L} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} \\ -\frac{L}{30EI} & \frac{8}{3L} & \frac{L}{15EI} & \frac{2L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.209)$$

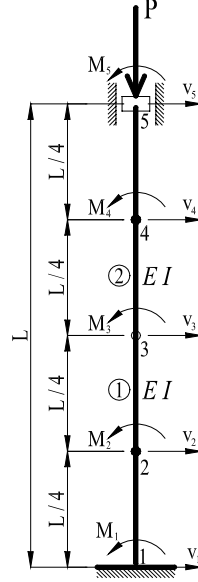
eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = L^2 P - 60EI = 0 \quad (4.210)$$

Bu fonksiyonun P'ye bağlı tek kökü olan,

$$P_1 = P_{kr} = 60.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.211)$$

değeri kritik burkulma yükü olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler yükü, $P_{ger} = 39.4784(EI / L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 51.98 dir.



Şekil 4.28 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile İki Elemanlı Çözüm

2 eleman kullanmamız halinde (Şekil 4.28), $L/2$ uzunluğundaki, ① ve ② no'lu elemanlara ait eleman matrislerinin birleştirilmesi ile daha önceden (4.195) de elde edilen sistem matrisinden, 1 ve 5 düğüm noktalarında sıfır olduğu bilinen çökme ifadelerine ait satır ve sütunlar yok edilirse,

$$\begin{bmatrix} M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 & v_4 & M_4 & M_5 \\ \frac{L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{28P}{3L} & -\frac{28}{3L} & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & -\frac{2}{3L} \\ -\frac{L}{60EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{28}{3L} & \frac{2L}{15EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{L}{60EI} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{16P}{3L} & \frac{16}{3L} & \frac{32P}{3L} & -\frac{32}{3L} & \frac{16}{3L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & -\frac{32}{3L} & \frac{4L}{15EI} & \frac{L}{30EI} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3L} & -\frac{L}{60EI} & \frac{16}{3L} & \frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \\ v_4 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.212)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

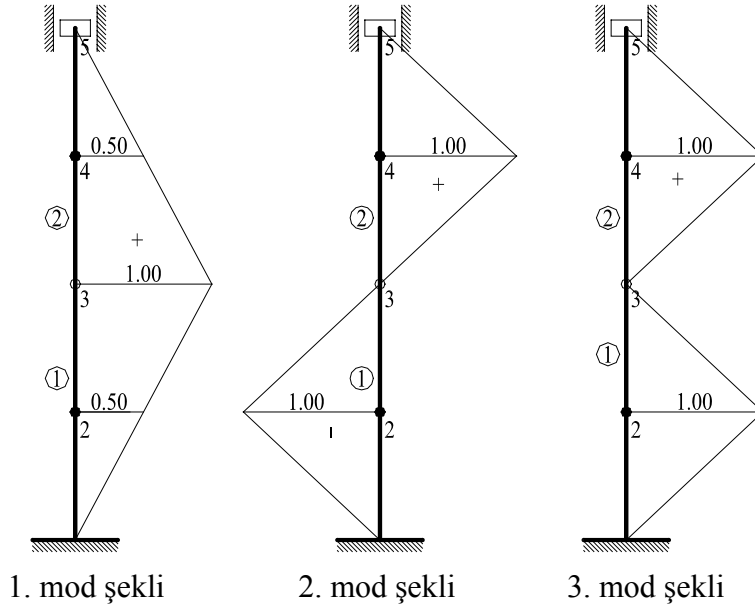
$$\det \mathbf{K} = 3L^6 P^3 - 1184L^4 EIP^2 + 126720L^2 E^2 I^2 P - 3686400E^3 I^3 = 0 \quad (4.213)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 48.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 106.67 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 240.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.214)$$

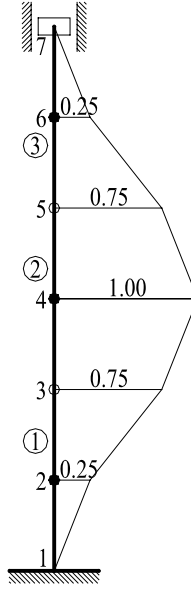
$$P_{kr} = 48.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.215)$$

olarak elde edilir. 2 elemanlı çözümde hata oranı % 21.59'a düşmüştür. Elde edilen hata oranı yine de çok kötüdür. Bu köklere karşılık gelen, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri, Şekil 4.29 da verilmiştir.



Şekil 4.29 4. Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. İle İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

Şekil 4.29 dan da görüleceği gibi, minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli, sistemin ilk kararlı denge konumuna aittir. Ancak, minimum kök, yüksek bir hata oranı ile bulunduğundan, iki ucu ankastre bir çubuğun elastik eğrisini tam olarak vermemektedir.



1. mod şekli

Şekil 4.30 4.Tip Burkulma Çubuğunda K.Ş.F. ile Üç Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekillleri

Şekil 4.30 da ise 3 eleman kullanarak yapılan çözümden elde edilen değerlerle, 1. mod şekli çizilmiştir. Görüldüğü gibi, elastik eğri daha gerçekçi bir forma dönüşmüştür. Bu çözümde bulunan kritik burkulma yükünün, gerçek değeri ile arasındaki hata oranı ise % 2.19 dur. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar özet halinde Tablo 4.12 de verilmiştir.

Tablo 4.12 4.Tip burkulma problemine ait K.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümleri

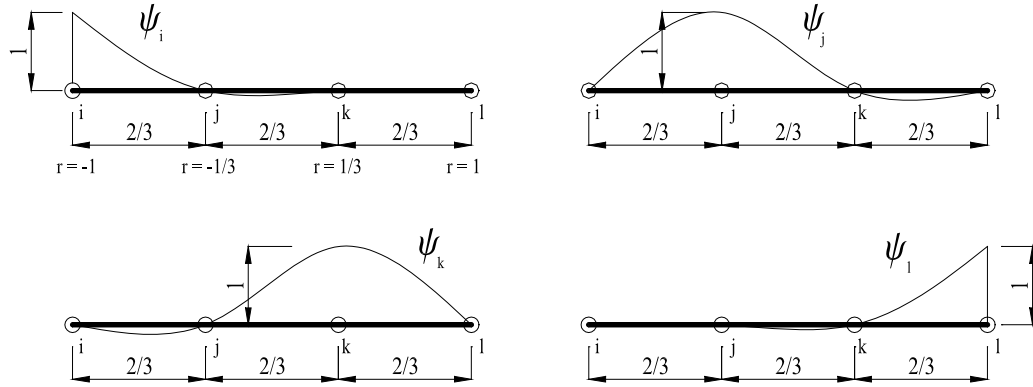
Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	1	4	60.0000	39.4784	51.98
2	3	8	48.0000		21.59
3	7	12	40.3432		2.19
4	14	16	39.7754		0.75
5	19	20	39.6050		0.32

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. 2 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.3 Kübik Şekil Fonksiyonları (C.Ş.F) ile Çözüm

Lineer ve kuadratik şekil fonksiyonlarını kullanarak elde edilen eleman matrisleri ile yapılan çözümlerde, eleman sayısı artırıldıkça hata oranları belirgin bir şekilde azalmakta idi. Özellikle, KŞ.F. ile elde edilen sonuçlar, L.Ş.F ile elde edilen sonuçlara göre oldukça iyiydi. Ancak, mühendislikçe kabul edilebilir hata oranlarına ulaşmak için, bazı burkulma tiplerinde, fazla sayıda eleman kullanmak zorunda kalınmıştır.

Daha öncede belirtildiği gibi, kesme hatalarını azaltmanın tek yolu, eleman boyu uzun ama üzerinde sık aralıklı düğüm noktası seçilmiş elemanlar kullanmaktır. Bir önceki bölümde, orta noktasında da ilave bir düğüm noktası teşkil edilmiş ve eleman üzerinde 2 dereceden parabolik değişim gösteren kuadratik şekil fonksiyonları ile çözüm araştırılmıştı. Bu bölümde ise, elemanı 3 eşit parçaya bölmek suretiyle elde edilen dört düğüm noktasından geçen ve eleman üzerinde kübik değişim gösteren, kübik şekil fonksiyonları (C.Ş.F) kullanılacaktır. Bu amaçla Şekil 4.31 de gösterilen şekil fonksiyonları seçilmiştir.



Şekil 4.31 Kübik Şekil Fonksiyonları

L uzunluğundaki herhangi bir elemanın sol düğüm noktası i, sağ düğüm noktası l, çubuğun üç eşit parçaya bölünmesiyle arada oluşan iki nokta da j ve k ile gösterilmiştir. Bölge üzerinde 3. dereceden değişim gösteren şekil fonksiyonları, Şekil 4.31 de koordinatları verilen ve toplam 2 birim boy için r değişkenine bağlı olarak,

$$\psi_i = \frac{1}{2}(1-r) + \frac{1}{16}(-9r^3 + r^2 + 9r - 1) \quad (4.216.a)$$

$$\psi_j = (1-r^2) + \frac{1}{16}(27r^3 + 7r^2 - 27r - 7) \quad (4.216.b)$$

$$\psi_k = \frac{1}{16}(-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9) \quad (4.216.c)$$

$$\psi_l = \frac{1}{2}(1+r) + \frac{1}{16}(9r^3 + r^2 - 9r - 1) \quad (4.216.d)$$

biçiminde ifade edilebilir. [7]

L boylu eleman için ve z değişkenine bağlı olarak yazılan ve değişken dönüşümü yapılmamış haldeki, z değişkeni ile, toplam 2 birim boylu çubuğun r değişkeni arasındaki ilişki,

$$r = \frac{2}{L}z - 1 \quad \frac{dr}{dz} = \frac{2}{L} \quad dz = \frac{L}{2}dr \quad (4.217.a)$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dM}{dr} \frac{dr}{dz} \quad (4.217.b)$$

biçimindedir. (4.121) eşitliği gereğince, fonksiyoneldeki bağımsız değişkenler olan v ve M' nin herhangi bir noktadaki değeri, şekil fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$v = v_i\psi_i + v_j\psi_j + v_k\psi_k + v_l\psi_l \quad (4.218)$$

$$M = M_i\psi_i + M_j\psi_j + M_k\psi_k + M_l\psi_l \quad (4.219)$$

elde edilir. (4.2.a) ifadesinin r değişkenine bağlı olarak düzenlenmiş yeni hali,

$$I = -\frac{L}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{dM}{dr} \frac{dr}{dz} \right) \left(\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \right) dr + \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \frac{M^2}{EI} dr + \frac{PL}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{dv}{dr} \frac{dr}{dz} \right)^2 dr \quad (4.220.a)$$

$$I = -\frac{2}{L} \int_{-1}^1 \frac{dM}{dr} \frac{dv}{dr} dr + \frac{L}{4} \int_{-1}^1 \frac{M^2}{EI} dr + \frac{P}{L} \int_{-1}^1 \left(\frac{dv}{dr} \right)^2 dr \quad (4.220.b)$$

şeklinde yazılabilir. v, M, dv/dr, dM/dr' in değerleri (4.220.b) de yerine konup, gerekli integrasyon işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}
I = & -\frac{729(M_i - 3M_j + 3M_k - M_l)(v_i - 3v_j + 3v_k - v_l)}{320L} - \\
& -\frac{(M_i - 27M_j + 27M_k - M_l)(v_i - 27v_j + 27v_k - v_l)}{64L} - \\
& -\frac{1}{96L}(-25M_i v_i + 387M_j v_i - 423M_k v_i + 29M_l v_i + 387M_i v_j - \\
& - 2025M_j v_j + 2349M_k v_j - 423M_l v_j - 423M_i v_k + 2349M_j v_k - \\
& - 2025M_k v_k + 387M_l v_k + 29M_i v_l - 423M_j v_l + 387M_k v_l - 25M_l v_l) + \\
& + \frac{1}{2EI} \left(\frac{17LM_i^2}{70} + \frac{117LM_i M_j}{280} + \frac{27LM_j^2}{70} + \frac{9LM_i M_k}{35} - \frac{27LM_j M_k}{280} + \right. \\
& + \frac{27LM_k^2}{70} + \frac{299LM_i M_l}{840} + \frac{9LM_j M_l}{35} + \frac{117LM_k M_l}{280} + \left. \frac{17LM_l^2}{70} \right) + \\
& + \frac{N}{2} \left(\frac{729(v_i - 3v_j + 3v_k - v_l)^2}{320L} + \frac{(v_i - 27v_j + 27v_k - v_l)^2}{64L} + \right. \\
& + (-25v_i^2 + 774v_i v_j - 2025v_j^2 - 846v_i v_k + 4698v_j v_k - 2025v_k^2 + \\
& \left. + 58v_i v_l - 846v_j v_l + 774v_k v_l - 25v_l^2) \frac{1}{96L} \right)
\end{aligned} \tag{4.221}$$

ifadesi elde edilir. I ile ifade edilen fonksiyonelin bilinmeyenlere göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse, eleman denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v_j} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_j} = 0 \\
\frac{\partial I}{\partial v_k} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_k} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial v_l} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial M_l} = 0
\end{aligned} \tag{4.222}$$

olmalıdır. (4.221) ifadesi üzerinde (4.222) kısmi türevleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial v_i} = \frac{61P}{30L}v_i - \frac{61}{30L}M_i - \frac{129P}{40L}v_j + \frac{129}{40L}M_j + \frac{57P}{20L}v_k - \frac{57}{20L}M_k - \\
- \frac{239P}{120L}v_l + \frac{239}{120L}M_l = 0
\end{aligned} \tag{4.223.a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial M_i} = -\frac{61}{30L}v_i + \frac{17L}{70EI}M_i + \frac{129}{40L}v_j + \frac{117L}{560EI}M_j - \frac{57}{20L}v_k + \frac{9L}{70EI}M_k - \\
+ \frac{239}{120L}v_l + \frac{299L}{1680EI}M_l = 0
\end{aligned} \tag{4.223.b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial v_j} = & -\frac{129P}{40L}v_i + \frac{129}{40L}M_i + \frac{54P}{5L}v_j - \frac{54}{5L}M_j - \frac{297P}{40L}v_k + \frac{297}{40L}M_k - \\ & + \frac{57P}{20L}v_l - \frac{57}{20L}M_l = 0\end{aligned}\quad (4.223.c)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial M_j} = & \frac{129}{40L}v_i + \frac{117L}{560EI}M_i - \frac{54}{5L}v_j + \frac{27L}{70EI}M_j + \frac{297}{40L}v_k - \frac{27L}{560EI}M_k - \\ & - \frac{57}{20L}v_l + \frac{9L}{70EI}M_l = 0\end{aligned}\quad (4.223.d)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial v_k} = & \frac{57P}{20L}v_i - \frac{57}{20L}M_i - \frac{297P}{40L}v_j + \frac{297}{40L}M_j + \frac{54P}{5L}v_k - \frac{54}{5L}M_k - \\ & - \frac{129P}{40L}v_l + \frac{129}{40L}M_l = 0\end{aligned}\quad (4.223.e)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial M_k} = & -\frac{57}{20L}v_i + \frac{9L}{70EI}M_i + \frac{297}{40L}v_j - \frac{27L}{560EI}M_j - \frac{54}{5L}v_k + \frac{27L}{70EI}M_k - \\ & + \frac{129}{40L}v_l + \frac{117L}{560EI}M_l = 0\end{aligned}\quad (4.223.f)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial v_l} = & -\frac{239P}{120L}v_i + \frac{239}{120L}M_i + \frac{57P}{20L}v_j - \frac{57}{20L}M_j - \frac{129P}{40L}v_k + \frac{129}{40L}M_k + \\ & + \frac{61P}{30L}v_l - \frac{61}{30L}M_l = 0\end{aligned}\quad (4.223.g)$$

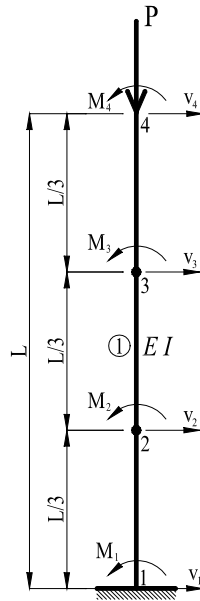
$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial M_l} = & \frac{239}{120L}v_i + \frac{299L}{1680EI}M_i - \frac{57}{20L}v_j + \frac{9L}{70EI}M_j + \frac{129}{40L}v_k + \frac{117L}{560EI}M_k - \\ & - \frac{61}{30L}v_l + \frac{17L}{70EI}M_l = 0\end{aligned}\quad (4.223.h)$$

homojen denklem takımı elde edilir. Tüm bu eşitlikleri, (4.142) deki gibi matris formunda yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial v_i} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{61P}{30L} & -\frac{61}{30L} & -\frac{129P}{40L} & \frac{129}{40L} & \frac{57P}{20L} & -\frac{57}{20L} & -\frac{239P}{120L} & \frac{239}{120L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial M_i} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{61}{30L} & \frac{17L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} & \frac{239}{120L} & \frac{299L}{1680EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial v_j} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{129P}{40L} & \frac{129}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{57P}{20L} & -\frac{57}{20L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial M_j} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial v_k} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{57P}{20L} & -\frac{57}{20L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{129P}{40L} & \frac{129}{40L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial M_k} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial v_l} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{239P}{120L} & \frac{239}{120L} & \frac{57P}{20L} & -\frac{57}{20L} & -\frac{129P}{40L} & \frac{129}{40L} & \frac{61P}{30L} & -\frac{61}{30L} \end{bmatrix} \\
\frac{\partial I}{\partial M_l} = 0 \rightarrow & \begin{bmatrix} \frac{239}{120L} & \frac{299L}{1680EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & -\frac{61}{30L} & \frac{17L}{70EI} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\begin{bmatrix} v_i \\ M_i \\ v_j \\ M_j \\ v_k \\ M_k \\ v_l \\ M_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\quad (4.224)$$

biçiminde, kübik şekil fonksiyonlarına bağlı, eleman matrisi ve düğüm noktası bilinmeyenleri ifade edilmiş olur. Daha çok sayıda elemanla çözüme gidilmek istenirse, eleman matrisleri arasında birleştirme işlemi yapılarak, sistem matrisi elde edilir. Artık, elde edilen bu eleman matrisi kullanılarak, önceki bölümlerde sınıflandırılmış olan burkulma tiplerine ait, kritik burkulma yükü çözümleri araştırılabilir.

4.2.3.1 Birinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.32 1.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.32 de EI eğilme rijitliğine sahip L boyundaki elemanın, 1, 2, 3 ve 4 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. (4.224) de ifade edilen eleman matrisinden, çökme ve momentin, 1 ve 4 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad M_4 = 0 \quad (4.225)$$

geometrik ve dinamik sınır şartları çıkarılırsa,

$$\begin{bmatrix} M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 & v_4 \\ \frac{17L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} & \frac{239}{120L} \\ \frac{129}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{57P}{20L} \\ \frac{117L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{57}{20L} \\ -\frac{57}{20L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{129P}{40L} \\ \frac{9L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{129}{40L} \\ \frac{239}{120L} & \frac{57P}{20L} & -\frac{57}{20L} & -\frac{129P}{40L} & \frac{129}{40L} & \frac{61P}{30L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.226)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

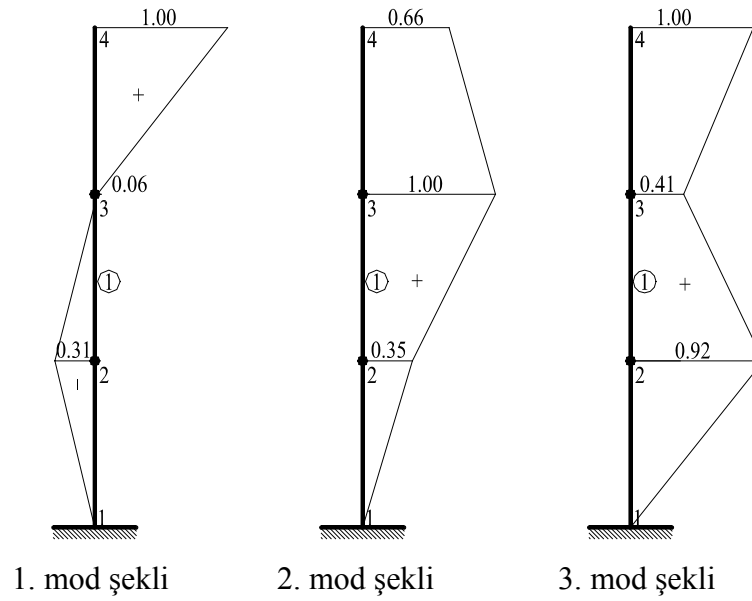
$$\det \mathbf{K} = L^6 P^3 - 135L^4 EIP^2 + 2880L^2 E^2 I^2 P - 6300E^3 I^3 = 0 \quad (4.227)$$

Bu fonksiyonun P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 2.4677 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 23.39 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 109.14 \frac{EI}{L^2} \quad (4.228)$$

$$P_{kr} = 2.4677 \frac{EI}{L^2} \quad (4.229)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü ise, $P_{ger} = 2.4674(EI/L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata % 0.014 gibi oldukça düşük bir değerdir. (4.228) de elde edilen üç farklı burkulma köküne karşılık gelen, mod şekilleri ise Şekil 4.33 de verilmiştir.



Şekil 4.33 1. Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F İle Tek Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

Şekilden de görüleceği gibi, minimum köke karşılık gelen 1.mod şekli, sistemin ilk kararlı denge durumunu yansıtmaktadır. Diğer köklere karşı gelen mod şekilleri ise sistemin diğer kararlı denge konumlarına aittir.

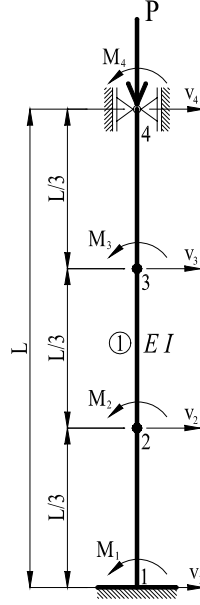
Daha fazla sayıda eleman kullanarak, yapılan çözümler sonucu elde edilen sonuçlar Tablo 4.13 de özet halinde verilmiştir.

Tablo 4.13 1.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F’lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	3	6	2,4677	2.4674	0,0137
2	7	12	2,4674		0
3	19	18	-		-
4	22	24	2,4674		0
5	17	30	2,4674		0

Tablodan da görüleceği gibi, 3 eleman ile yapılan çözümde sonuç elde edilememiştir. 2, 4 ve 5 elemanla yapılan çözümlerde ise Euler burkulma yüğü değeri, sıfır hata ile elde edilmiştir. 2 den fazla elemanla yapılan çözümlerde çok sayıda (-) ve sanal kök elde edilmiştir.

4.2.3.2 İkinci Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.34 2.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.34 de tek eleman kullanılması halinde, 1, 2, 3 ve 4 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 4 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_4 = 0, \quad M_4 = 0 \quad (4.230)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır şartları koşullarıdır. Bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar, (4.224) de tek eleman için yazılmış olan sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 \\ \frac{17L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} \\ \frac{129}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} \\ \frac{117L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} \\ -\frac{57}{20L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} \\ \frac{9L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.231)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

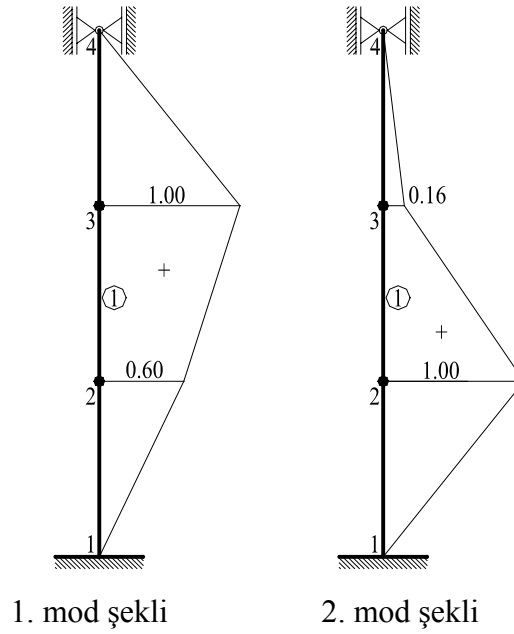
$$\det \mathbf{K} = L^4 P^2 - 120L^2 EIP + 2100E^2 I^2 = 0 \quad (4.232)$$

Bu fonksiyonun P 'ye bağılı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 21.2701 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 98.73 \frac{EI}{L^2} \quad (4.233)$$

$$P_{kr} = 21.2701 \frac{EI}{L^2} \quad (4.234)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü, $P_{ger} = 20.1420(EI / L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 5.60 dır. (4.233) da elde edilen köklere karşılık gelen, çökmeye bağılı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri, Şekil 4.35 de verilmiştir.



Şekil 4.35 2. Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

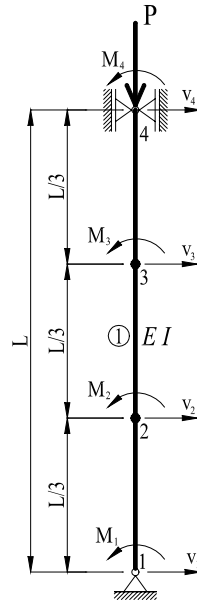
Şekil 4.35 den da görüleceği gibi minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumunu yansıtmaktadır. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar özet halinde Tablo 4.14 de verilmiştir.

Tablo 4.14 2.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilim. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	2	5	21.2701	20.1420	5.601
2	5	11	20.2104		0.339
3	19	17	-		-
4	32	23	20.1911		0.244
5	46	29	20.1908		0.242

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. 2 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.3.3 Üçüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.36 3.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüm

Şekil 4.36 da tek eleman kullanılması halinde, 1, 2, 3 ve 4 düğüm noktalarına ait sistem bilinmeyenleri gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökme ve momentin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_4 = 0, \quad M_1 = 0 \quad M_4 = 0 \quad (4.235)$$

probleme ait geometrik ve dinamik sınır koşullarıdır. (4.235) de verilen şartları sağlamak için, bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar, (4.224) de tek eleman için yazılmış olan sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} v_2 & M_2 & v_3 & M_3 \\ \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} \\ -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} \\ -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} \\ \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.236)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = L^4 P^2 - 52L^2 EIP + 420E^2 I^2 = 0 \quad (4.237)$$

Bu fonksiyonun P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 10.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 42.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.238)$$

$$P_{kr} = 10.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.239)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü, $P_{ger} = 9.8696(EI / L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 1.32 dir. 2 eleman kullanılması halinde ise, P'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$\begin{aligned} P_1 &= 9.8709 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 40.00 \frac{EI}{L^2} & P_3 &= 93.57 \frac{EI}{L^2} \\ P_4 &= 168.00 \frac{EI}{L^2} & P_5 &= 436.56 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (4.240)$$

$$P_{kr} = 9.8709 \frac{EI}{L^2} \quad (4.241)$$

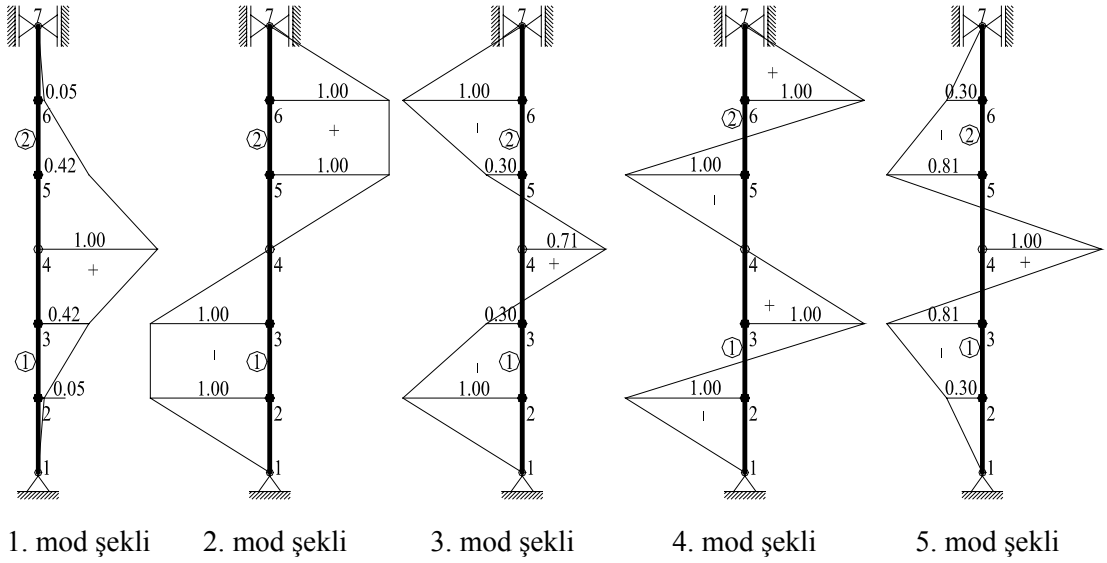
olarak elde edilir. Hata oranı % 0.013'e düşmüştür. Bu köklere ait, çökmeye bağlı ve normalize edilmiş burkulma mod şekilleri ise, Şekil 4.37 de verilmiştir.

Şekil 4.37 den de görüleceği gibi minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumuna aittir. Diğer mod şekilleri ise daha yüksek köklere ait mod şekilleridir. 2'den fazla sayıda eleman kullanarak yapılan çözümlerde elde edilen sonuçlar, Euler burkulma yükünden oldukça farklıdır. Sadece tek ve iki eleman kullanarak elde edilen sonuçlar Tablo 4.15 de tekrar verilmiştir.

Tablo 4.15 3.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri

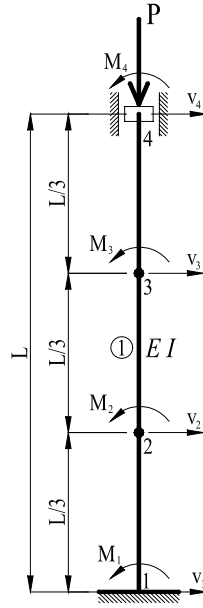
Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	2	4	10,0000	9,8696	1,321
2	5	10	9,8709		0,013

2 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır.



Şekil 4.37 3.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

4.2.3.4 Dördüncü Tip Burkulma Problemi



Şekil 4.38 4.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile Tek Elemanlı Çözüm

Tek eleman kullanılması hali için, düğüm noktası bilinmeyenleri Şekil 4.38 de gösterilmiştir. Bu burkulma probleminde çökmenin, 1 ve 3 noktasında bilinen değerleri olan,

$$v_1 = 0, \quad v_4 = 0 \quad (4.242)$$

probleme ait geometrik sınır şartlarıdır. (4.242) de verilen şartları sağlamak için, bu terimlerin bulunduğu satır ve sütunlar, (4.224) de tek eleman için yazılmış olan sistem matrisinden silinirse,

$$\begin{bmatrix} M_1 & v_2 & M_2 & v_3 & M_3 & M_4 \\ \frac{17L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} & \frac{299L}{1680EI} \\ \frac{129}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & -\frac{57}{20L} \\ \frac{117L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & \frac{9L}{70EI} \\ -\frac{57}{20L} & -\frac{297P}{40L} & \frac{297}{40L} & \frac{54P}{5L} & -\frac{54}{5L} & \frac{129}{40L} \\ \frac{9L}{70EI} & \frac{297}{40L} & -\frac{27L}{560EI} & -\frac{54}{5L} & \frac{27L}{70EI} & \frac{117L}{560EI} \\ \frac{299L}{1680EI} & -\frac{57}{20L} & \frac{9L}{70EI} & \frac{129}{40L} & \frac{117L}{560EI} & \frac{17L}{70EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ v_2 \\ M_2 \\ v_3 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.243)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.127) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K} = L^4 P^2 - 200L^2 EIP + 8400E^2 I^2 = 0 \quad (4.244)$$

Bu fonksiyonun P'ye bağlı kökleri ve kritik burkulma yükü,

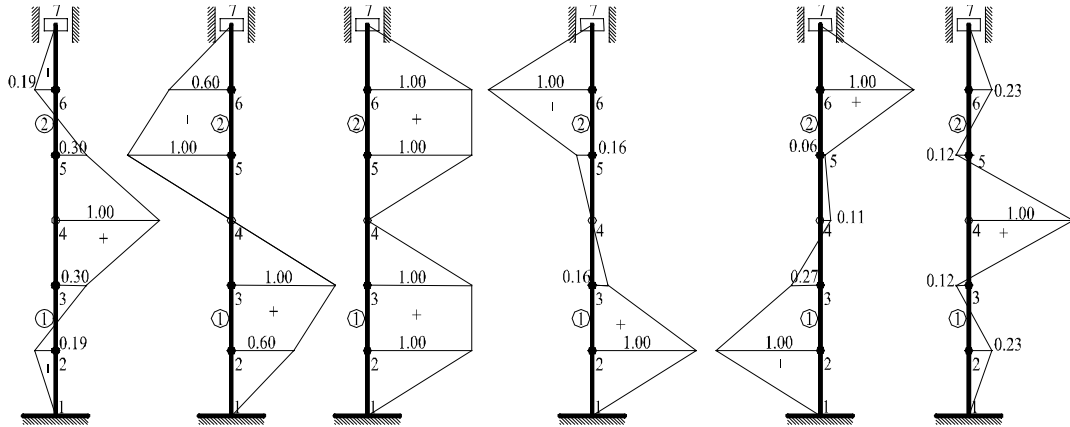
$$P_1 = 60.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 140.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.245)$$

$$P_{kr} = 60.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.246)$$

olarak elde edilir. Bu burkulma tipine ait Euler burkulma yükü, $P_{ger} = 39.4784(EI/L^2)$ idi. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 51.98 gibi oldukça yüksek bir orandır. 2 eleman kullanılması halinde ise, P'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$\begin{aligned} P_1 &= 39.5004 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 85.08 \frac{EI}{L^2} & P_3 &= 240.00 \frac{EI}{L^2} \\ P_4 &= 394.92 \frac{EI}{L^2} & P_5 &= 420.00 \frac{EI}{L^2} & P_6 &= 680.50 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (4.247)$$

$$P_{kr} = 39.5004 \frac{EI}{L^2} \quad (4.248)$$



1. mod şekli 2. mod şekli 3. mod şekli 4. mod şekli 5. mod şekli 6. mod şekli

Şekil 4.39 4.Tip Burkulma Çubuğunda C.Ş.F ile İki Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

Şekil 4.39 dan da görüleceği gibi sadece, minimum köke karşılık gelen burkulma mod şekli, sistemin ilk kararlı denge konumuna aittir. Bununla birlikte, seçilen çubuk rijitliğine bağlı olarak, (-) yönde de çökme oluşmuştur. Bu çözümde bulunan kritik

burkulma yükünün, gerçek değeri ile arasındaki hata oranı ise % 0.056 dır. Daha fazla sayıda eleman kullanarak, çözümün araştırılması neticesinde elde edilen sonuçlar özet halinde Tablo 4.16 da verilmiştir.

Tablo 4.16 4.Tip burkulma problemine ait C.Ş.F'lu sonlu eleman çözümleri

Eleman Sayısı	Kök sayısı	Bilinm. sayısı	Kritik burkulma Yüğü (EI/L^2)	Euler burkulma Yüğü (EI/L^2)	Hata Oranı (%)
1	2	6	60.0000	39.4784	51.982
2	6	12	39.5004		0.056
3	20	18	39.5067		0.072
4	22	24	39.4838		0.014
5	17	30	39.4799		0.004

Eleman sayısının artırılması ile hata oranı oldukça düşmektedir. 2 elemandan daha fazla elemanla yapılan çözümlerde ise, (-) ve sanal köklere de rastlanmıştır.

4.2.4 Eleman ve Sistem Matrislerinde İndirgeme İşlemi

Önceki bölümlerde, değişik tipte şekil fonksiyonları kullanarak, eleman ve sistem matrisleri, çökme ve momente bağlı olarak ifade edilmişti. Yapılan uygulamalarda da görüldüğü gibi, eleman sayısının artmasıyla birlikte, sistem matrisinin boyutları da oldukça büyümektedir. Bu da özellikle bilgisayar uygulamalarında önemli bir sorun teşkil etmektedir.

n, eleman sayısını göstermek üzere, sistem matrisinin satır ve sütun sayıları,

Lineer şekil fonksiyonları ile oluşturulmuş ise: $2n + 2$

Kuadratik şekil fonksiyonları ile oluşturulmuş ise: $4n + 2$

Kübik şekil fonksiyonları ile oluşturulmuş ise: $6n + 2$

boyutlarına ulaşmaktadır. Bu sorunu ortadan kaldırmanın tek yolu, sistem matrisini, bir indirgeme işlemine tabi tutarak, küçültme yoluna gitmektir. Böylelikle, determinantı alınacak sistem matrisi daha basit bir tarzda ifade edilebilir.

Öncelikle, sistem matrisinde, çökmeye ve momente bağlı olan terimler ayrılıp, burkulma terimlerini de P parantezi altında bırakılırsa, sistem matrisi,

$$\left\{ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{array} \right] - P \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{K}_g \end{array} \right] \right\} \left\{ \begin{array}{c} M \\ v \end{array} \right\} = 0 \quad (4.249)$$

şeklinde yazılabilir. Böylelikle, sistem matrisi, alt matrisler cinsinden ifade edilmiş olur. Bu tarzda yazılmış sistem matrisinde, problemin tipine bağlı sınır koşulları da girilip, gerekli satır ve sütunlar yokedildikten sonra, indirgenmiş sistem matrisi $\mathbf{K}^*$ ve sistem eşitliği, sadece çökme terimlerine bağlı olarak,

$$(\hat{\mathbf{K}} - N\bar{\mathbf{K}}_g) \mathbf{v} = 0 \quad (4.250.a)$$

$$\mathbf{K}^* \mathbf{v} = 0 \quad (4.250.b)$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\hat{\mathbf{K}}$ terimi,

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{12}^T \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \quad (4.251)$$

eşitliği ile bulunur. Sistemin trivial olmayan çözümü için,

$$\det \mathbf{K}^* = 0 \quad (4.252)$$

olmalıdır. (3.252) eşitliğinden, P'ye bağlı burkulma yükleri elde edilebilir.

4.2.4.1 L.Ş.F Kullanılarak Elde Edilen Matrislerde İndirgeme İşlemi

Bölüm 4.2.1 de L.Ş.F kullanarak, eleman matrisi (4.143) de ifade edilmişti. (4.249) eşitliğindeki alt matrisler,

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{M_i}{\frac{L}{3EI}} & \frac{M_j}{\frac{L}{6EI}} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_i \\ M_j \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{-\frac{1}{L}} & \frac{v_j}{\frac{1}{L}} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_i \\ M_j \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{0} & \frac{v_j}{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ v_j \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{-\frac{1}{L}} & \frac{v_j}{\frac{1}{L}} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ v_j \end{matrix} \quad (4.253)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi, $\mathbf{K}_{22}$ matrisi sadece sıfır terimlerinden oluşur. Tek eleman için yazılan bu matrisler, daha fazla sayıda eleman kullanılması halinde, tüm ortak sistem bilinmeyenlerini kapsayacak şekilde birleştirme işlemine tabi tutulur. Bu matrislerde, ilgili sınır koşulları uyarınca, gerekli satır ve sütunlar yokedildikten sonra, (4.250), (4.251) ve (4.252) eşitlikleri ile kritik burkulma yükü değeri elde edilebilir.

Buna bir uygulama olmak üzere, 1.Tip burkulma çubuğu, 4 elemanla ve de indirgeme işlemi yapılarak tekrar çözülmüştür. L, çubuğun toplam uzunluğu olmak üzere, birbirine eşit her bir parça ($L_1=L / 4$) için yazılan eleman matrislerinin birleştirilmesi ile elde edilen, $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$ ve $\bar{\mathbf{K}}_g$ alt matrisleri, sınır koşulları da ($v_1 = M_5 = 0$) girildikten sonra,

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{M_1}{\frac{L_1}{3EI}} & \frac{M_2}{\frac{L_1}{6EI}} & \frac{M_3}{0} & \frac{M_4}{0} \\ \frac{L_1}{6EI} & \frac{2L_1}{3EI} & \frac{L_1}{6EI} & 0 \\ 0 & \frac{L_1}{6EI} & \frac{2L_1}{3EI} & \frac{L_1}{6EI} \\ 0 & 0 & \frac{L_1}{6EI} & \frac{2L_1}{3EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{\frac{1}{L_1}} & \frac{v_3}{0} & \frac{v_4}{0} & \frac{v_5}{0} \\ -\frac{2}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{2}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{2}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \frac{2}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{2}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_1} & \frac{2}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad (4.254)$$

biçiminde elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{2P}{L_1} - \frac{1824EI}{97L_1^3} & -\frac{P}{L_1} + \frac{1146EI}{97L_1^3} & -\frac{432EI}{97L_1^3} & \frac{72EI}{97L_1^3} \\ -\frac{P}{L_1} + \frac{1146EI}{97L_1^3} & \frac{2P}{L_1} - \frac{1392EI}{97L_1^3} & -\frac{P}{L_1} + \frac{930EI}{97L_1^3} & -\frac{252EI}{97L_1^3} \\ -\frac{432EI}{97L_1^3} & -\frac{P}{L_1} + \frac{930EI}{97L_1^3} & \frac{2P}{L_1} - \frac{960EI}{97L_1^3} & -\frac{P}{L_1} + \frac{354EI}{97L_1^3} \\ \frac{72EI}{97L_1^3} & -\frac{252EI}{97L_1^3} & -\frac{P}{L_1} + \frac{354EI}{97L_1^3} & \frac{P}{L_1} - \frac{156EI}{97L_1^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.255)$$

olarak yazılır. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = 97L_1^8 P^4 - 1704L_1^6 EIP^3 + 7992L_1^4 E^2 I^2 P^2 - 9504L_1^2 E^3 I^3 P + 1296E^4 I^4 = 0 \quad (4.256)$$

$L = 4L_1$ dönüşümü yapılarak P 'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$\begin{aligned} P_1 &= 2.4993 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 24.87 \frac{EI}{L^2} \\ P_3 &= 82.07 \frac{EI}{L^2} & P_4 &= 171.63 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (4.257)$$

$$P_{kr} = 2.4993 \frac{EI}{L^2} \quad (4.258)$$

olarak elde edilir. Elde edilen kritik burkulma yükü değeri, Tablo 4.5 de 4 eleman için verilen değerle aynıdır. Ancak, sistem matrisinin boyutu, yarıya inmiştir. Bu da özellikle, nümerik çalışmalarda büyük bir kolaylık sağlar.

4.2.4.2 K.Ş.F. Kullanılarak Elde Edilen Matrislerde İndirgeme İşlemi

Bölüm 4.2.2. de K.Ş.F. kullanarak, eleman matrisi (4.184) de ifade edilmişti. Bu eleman matrisi kullanılarak, (4.249) eşitliğindeki alt matrisler,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{M_i}{\frac{2L}{15EI}} & \frac{M_j}{\frac{L}{15EI}} & \frac{M_k}{-\frac{L}{30EI}} \\ \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} \\ -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{2L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_i \\ M_j \\ M_k \end{matrix} & \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{-\frac{7}{3L}} & \frac{v_j}{\frac{8}{3L}} & \frac{v_k}{-\frac{1}{3L}} \\ \frac{8}{3L} & -\frac{16}{3L} & \frac{8}{3L} \\ -\frac{1}{3L} & \frac{8}{3L} & -\frac{7}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_i \\ M_j \\ M_k \end{matrix} \\
 \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{v_i}{0} & \frac{v_j}{0} & \frac{v_k}{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{matrix} & \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{-\frac{7}{3L}} & \frac{v_j}{\frac{8}{3L}} & \frac{v_k}{-\frac{1}{3L}} \\ \frac{8}{3L} & -\frac{16}{3L} & \frac{8}{3L} \\ -\frac{1}{3L} & \frac{8}{3L} & -\frac{7}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{matrix} \quad (4.259)
 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. 2.Tip burkulma çubuğu, 2 elemanla ve de indirgeme işlemi yapılarak tekrar çözülmüştür. L çubuğun toplam uzunluğu olmak üzere, birbirine eşit her bir parça ($L_1=L / 2$) için yazılan eleman matrislerinin birleştirilmesi ile elde edilmiş olan, $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$ ve $\bar{\mathbf{K}}_g$ alt matrisleri, sınır koşulları da ($v_1 = v_5 = M_5 = 0$) girildikten sonra,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{M_1}{\frac{2L_1}{15EI}} & \frac{M_2}{\frac{L_1}{15EI}} & \frac{M_3}{-\frac{L_1}{30EI}} & \frac{M_4}{0} \\ \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & 0 \\ -\frac{L_1}{30EI} & \frac{L_1}{15EI} & \frac{4L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} \\ 0 & 0 & \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} & \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{\frac{8}{3L_1}} & \frac{v_3}{-\frac{1}{3L_1}} & \frac{v_4}{0} \\ -\frac{16}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & 0 \\ \frac{8}{3L_1} & -\frac{14}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} \\ 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{16}{3L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} \\
 \mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{v_2}{0} & \frac{v_3}{0} & \frac{v_4}{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{-\frac{16}{3L_1}} & \frac{v_3}{\frac{8}{3L_1}} & \frac{v_4}{0} \\ \frac{8}{3L_1} & -\frac{14}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} \\ 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{16}{3L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \quad (4.260)
 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri kullanılarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{16P}{3L_1} - \frac{3840EI}{17L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{7600EI}{51L_1^3} & -\frac{3200EI}{51L_1^3} \\ -\frac{8P}{3L_1} + \frac{7600EI}{51L_1^3} & \frac{14P}{3L_1} - \frac{2736EI}{17L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{5360EI}{51L_1^3} \\ -\frac{3200EI}{51L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{5360EI}{51L_1^3} & \frac{16P}{3L_1} - \frac{5120EI}{51L_1^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.261)$$

olarak yazılır. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = 17L_1^6 P^3 - 1208L_1^4 EIP^2 + 20560L_1^2 E^2 I^2 P - 76800E^3 I^3 = 0 \quad (4.262)$$

$L = 2L_1$ dönüşümü yapılarak P 'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 20.8692 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 72.64 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 190.73 \frac{EI}{L^2} \quad (4.263)$$

$$P_{kr} = 20.8692 \frac{EI}{L^2} \quad (4.264)$$

olarak elde edilir. Elde edilen kritik burkulma yükü değeri, Tablo 4.10 da 2 eleman için verilen değerle aynıdır. Ancak, sistem matrisinin boyutu, yarıya inmiştir.

4.2.4.3 C.Ş.F Kullanılarak Elde Edilen Matrislerde İndirgeme İşlemi

Bölüm 4.2.3 de C.Ş.F kullanarak, eleman matrisi (4.224) de ifade edilmişti. (4.249) eşitliğindeki alt matrisler,

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{17L}{70EI} & \frac{117L}{560EI} & \frac{9L}{70EI} & \frac{299L}{1680EI} \\ \frac{117L}{560EI} & \frac{27L}{70EI} & -\frac{27L}{560EI} & \frac{9L}{70EI} \\ \frac{9L}{70EI} & -\frac{27L}{560EI} & \frac{27L}{70EI} & \frac{117L}{560EI} \\ \frac{299L}{1680EI} & \frac{9L}{70EI} & \frac{117L}{560EI} & \frac{17L}{70EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i \\ M_j \\ M_k \\ M_l \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} v_i & v_j & v_k & v_l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_l \end{bmatrix} \quad (4.265)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{30L} & \frac{v_j}{40L} & \frac{v_k}{20L} & \frac{v_l}{120L} \\ \frac{129}{40L} & \frac{54}{5L} & \frac{297}{40L} & \frac{57}{20L} \\ \frac{57}{20L} & \frac{297}{40L} & \frac{54}{5L} & \frac{129}{40L} \\ \frac{239}{120L} & \frac{57}{20L} & \frac{129}{40L} & \frac{61}{30L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_i \\ M_j \\ M_k \\ M_l \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{30L} & \frac{v_j}{40L} & \frac{v_k}{20L} & \frac{v_l}{120L} \\ \frac{129}{40L} & \frac{54}{5L} & \frac{297}{40L} & \frac{57}{20L} \\ \frac{57}{20L} & \frac{297}{40L} & \frac{54}{5L} & \frac{129}{40L} \\ \frac{239}{120L} & \frac{57}{20L} & \frac{129}{40L} & \frac{61}{30L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_l \end{matrix}$$

olarak elde edilir. Uygulama olarak, 4.Tip burkulma çubuğu, tek elemanla ve de indirgeme işlemini yapılarak tekrar çözülmüştür. $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$ ve $\bar{\mathbf{K}}_g$ alt matrisleri, sınır koşulları da ($v_1 = v_4 = 0$) girildikten sonra,

$$\bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{5L} & \frac{v_3}{40L} \\ \frac{297}{40L} & \frac{54}{5L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{0} & \frac{v_3}{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{M_1}{70EI} & \frac{M_2}{560EI} & \frac{M_3}{70EI} & \frac{M_4}{1680EI} \\ \frac{117L}{560EI} & \frac{27L}{70EI} & \frac{27L}{560EI} & \frac{9L}{70EI} \\ \frac{9L}{70EI} & \frac{27L}{560EI} & \frac{27L}{70EI} & \frac{117L}{560EI} \\ \frac{299L}{1680EI} & \frac{9L}{70EI} & \frac{117L}{560EI} & \frac{17L}{70EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{v_2}{40L} & \frac{v_3}{20L} \\ \frac{54}{5L} & \frac{297}{40L} \\ \frac{297}{40L} & \frac{54}{5L} \\ \frac{57}{20L} & \frac{129}{40L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} \quad (4.266)$$

olarak elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{54P}{5L} - \frac{1377EI}{L^3} & -\frac{297P}{40L} + \frac{2349EI}{2L^3} \\ -\frac{297P}{40L} + \frac{2349EI}{2L^3} & \frac{54P}{5L} - \frac{1377EI}{L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.267)$$

olarak yazılır. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = L^4 P^2 - 200L^2 EIP + 8400E^2 I^2 = 0 \quad (4.268)$$

P'ye bağılı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 60.00 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 140.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.269)$$

$$P_{kr} = 60.00 \frac{EI}{L^2} \quad (4.270)$$

olarak elde edilir. Elde edilen kritik burkulma yükü değeri, Tablo 4.16 da tek eleman için verilen değerle aynıdır. Ancak, sistem matrisinin boyutu, yarıya inmiştir.

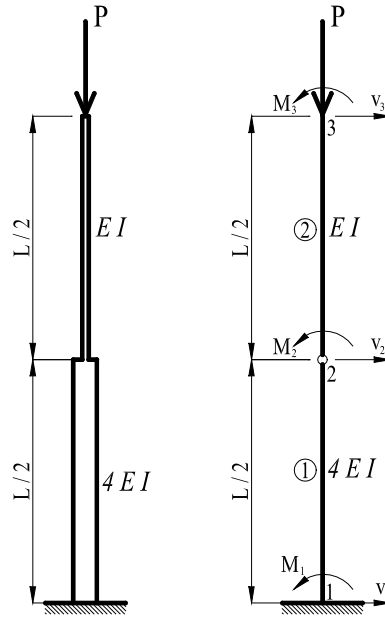
5. UYGULAMALAR

5.1 Değişken Kesitli Çubuk Problemi

Öncelikle, atalet momentleri $4I$ ve I olan eşit uzunluklu, konsol çubuk problemi ele alınmıştır. Sistem bilinmeyenleri ve kesit özellikleri Şekil 5.1 de verilmiştir. Sınır koşulları ise,

$$v_1 = 0, \quad M_3 = 0 \quad (5.1)$$

olarak yazılabilir. Herbir farklı kesit özelliğine sahip çubuk parçası için eleman matrisleri oluşturulması gerekir. Bu amaçla, öncelikle, L.Ş.F ile elde edilen indirgenmiş eleman matrislerini kullanılarak, sistem matrisi oluşturulmuştur.



Şekil 5.1 Değişken Kesitli Çubukta L.Ş.F ile Birer Elemanlı Çözüm

(5.253) de verilen alt matrislerde gerekli sınır koşulları girilerek, ($L_1=L/2$)

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{M_1}{12EI} & \frac{M_2}{24EI} \\ \frac{L_1}{24EI} & \frac{5L_1}{12EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ -\frac{2}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{2}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \quad (5.2)$$

ifadeleri elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri kullanılarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{2P}{L_1} - \frac{528EI}{19L_1^3} & -\frac{P}{L_1} + \frac{120EI}{19L_1^3} \\ -\frac{P}{L_1} + \frac{120EI}{19L_1^3} & \frac{P}{L_1} - \frac{48EI}{19L_1^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

olarak yazılır. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = 19L_1^4 P^2 - 384L_1^2 EIP + 576E^2 I^2 = 0 \quad (5.4)$$

$L = 2L_1$ dönüşümü yapılarak P 'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 6.527 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 74.32 \frac{EI}{L^2} \quad (5.5)$$

$$P_{kr} = 6.527 \frac{EI}{L^2} \quad (5.6)$$

olarak elde edilir. Bu problemin gerçek çözümü [1] de,

$$P_{ger} = 6.052 \frac{EI}{L^2} \quad (5.7)$$

olarak verilmiştir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 7.85 dir.

Aynı problemin, K.Ş.F 'lu sonlu eleman matrisleri ile ve yine birer eleman kullanılarak çözülmesi halinde ise, sistem matrisi ve burkulma kökleri, (4.259) de verilen alt matrisler yardımıyla, ($L = 2L_1$)

$$\begin{bmatrix}
\frac{16P}{3L_1} - \frac{7680EI}{11L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{11200EI}{33L_1^3} & -\frac{3200EI}{33L_1^3} & \frac{640EI}{33L_1^3} \\
-\frac{8P}{3L_1} + \frac{11200EI}{33L_1^3} & \frac{14P}{3L_1} - \frac{3112EI}{11L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{4880EI}{33L_1^3} & \frac{P}{3L_1} - \frac{1240EI}{33L_1^3} \\
-\frac{3200EI}{33L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{4880EI}{33L_1^3} & \frac{16P}{3L_1} - \frac{4160EI}{33L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{1360EI}{33L_1^3} \\
\frac{640EI}{33L_1^3} & \frac{P}{3L_1} - \frac{1240EI}{33L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{1360EI}{33L_1^3} & \frac{7P}{3L_1} - \frac{536EI}{33L_1^3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_2 \\
v_3 \\
v_4 \\
v_5
\end{bmatrix} = 0 \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= 6.079 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 39.89 \frac{EI}{L^2} \\
P_3 &= 150.58 \frac{EI}{L^2} & P_4 &= 587.46 \frac{EI}{L^2}
\end{aligned} \quad (5.9)$$

ve kritik burkulma yükü,

$$P_{kr} = 6.079 \frac{EI}{L^2} \quad (5.10)$$

olarak elde edilir. Bu problemin (5.7) de verilen gerçek çözümü ile arasındaki bağıl hata oranı % 0.45'e düşmüştür. Aynı problemin, C.Ş.F 'lu sonlu eleman matrisleriyle yapılan çözümünde ise kritik burkulma yükü,

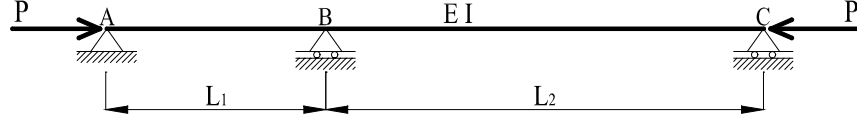
$$P_{kr} = 6.056 \frac{EI}{L^2} \quad (5.11)$$

olarak elde edilmiştir. Bağıl hata oranı ise % 0.06 gibi oldukça düşük bir değerdir.

Elde edilen hata oranları özellikle K.Ş.F ve C.Ş.F 'lu çözümlerde oldukça iyidir. Eleman sayısı artırılarak daha da iyi sonuçlar elde edilebilir.

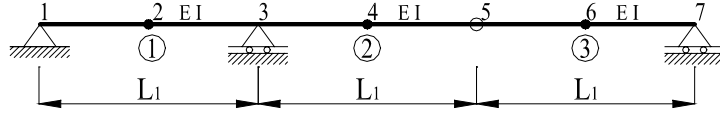
5.2 Sürekli Kiriş Problemi

Benzer işlemler kullanılarak, uçlarına sabit bir P yatay yükü etki ettirilmiş olan bir sürekli kirişin stabilitesini de araştırılabilir. Şekil 5.2 de, uçları mafsallı ve iki açıklıklı bir sürekli kirişe ait bilinmeyenler belirtilmiştir.



Şekil 5.2 Sürekli Kiriş Problemine Ait Değişkenler

$L_2=2L_1$ olduğu kabul edilmiş ve işlemlerde kolaylık sağlaması açısından, ikinci açıklık 2 eşit parçaya bölünüp, boyları birbirine eşit toplam 3 eleman alınmıştır. Çözümde ise, K.Ş.F ile elde edilmiş sonlu eleman matrisleri kullanılmıştır. Bu hale ait sistem bilinmeyenleri ise Şekil 5.3 de verilmiştir.



Şekil 5.3 Sürekli Kiriş Probleminin K.Ş.F 'lu Tek Elemanlı Çözümü

Probleme ait sınır koşulları,

$$v_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_7 = 0, \quad M_7 = 0 \quad (5.12)$$

olarak yazılır. (4.259) de verilen alt matrislerde, (5.12) de verilen sınır koşulları girildikten sonra,

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_1}{15EI} & \frac{4L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & -\frac{L_1}{30EI} & 0 \\ 0 & \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{30EI} & \frac{L_1}{15EI} & \frac{4L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} v_2 & v_4 & v_5 & v_6 \\ -\frac{16}{3L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & -\frac{1}{3L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{16}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{14}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{16}{3L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} v_2 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \frac{16}{3L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3L_1} & -\frac{8}{3L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3L_1} & \frac{14}{3L_1} & -\frac{8}{3L_1} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3L_1} & \frac{16}{3L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} \quad (5.13)$$

alt matrisleri elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{16P}{3L_1} - \frac{2080EI}{21L_1^3} & -\frac{160EI}{3L_1^3} & \frac{64EI}{3L_1^3} & -\frac{160EI}{21L_1^3} \\ -\frac{160EI}{3L_1^3} & \frac{16P}{3L_1} - \frac{160EI}{L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{368EI}{3L_1^3} & -\frac{160EI}{3L_1^3} \\ \frac{64EI}{3L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{368EI}{3L_1^3} & \frac{14P}{3L_1} - \frac{752EI}{5L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{304EI}{3L_1^3} \\ -\frac{160EI}{21L_1^3} & -\frac{160EI}{3L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{304EI}{3L_1^3} & -\frac{2080EI}{21L_1^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.14)$$

olarak elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = 35L_1^8 P^4 - 2662L_1^6 EIP^3 + 61760L_1^4 E^2 I^2 P^2 - 501600L_1^2 E^3 I^3 P + 1152000E^4 I^4 = 0 \quad (5.15)$$

Bu eşitlikte, P'ye bağlı kökler,

$$\begin{aligned} P_1 &= 3.793 \frac{EI}{L_1^2} & P_2 &= 10.00 \frac{EI}{L_1^2} \\ P_3 &= 21.06 \frac{EI}{L_1^2} & P_4 &= 41.20 \frac{EI}{L_1^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

ve kritik burkulma yükü,

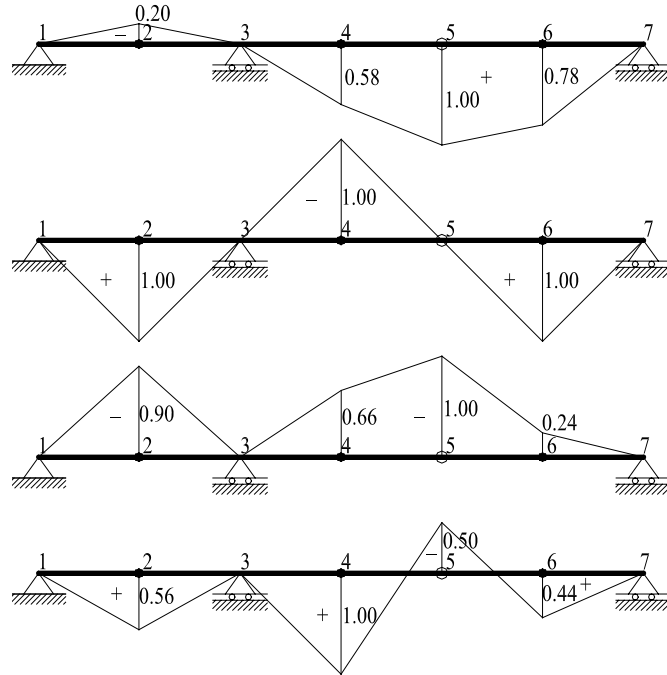
$$P_{kr} = 3.793 \frac{EI}{L_1^2} \quad (5.17)$$

olarak elde edilir. Bu problemin gerçek çözümü [11] de,

$$P_{ger} = 3.720 \frac{EI}{L_1^2} \quad (5.18)$$

olarak verilmiştir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 1.96 dır.

(5.16) daki burkulma köklerine ait mod şekilleri ise Şekil 5.4 de verilmiştir. Bu mod şekillerinden de görüleceği gibi, 1.mod şekli sistemin ilk kararlı denge konumunu yansıtmaktadır. Diğer mod şekilleri ise daha yüksek köklere ve kararlı denge konumlarına aittir.



Şekil 5.4 Sürekli Kiriş Probleminde K.Ş.F'lu Tek Elemanda Mod Şekilleri

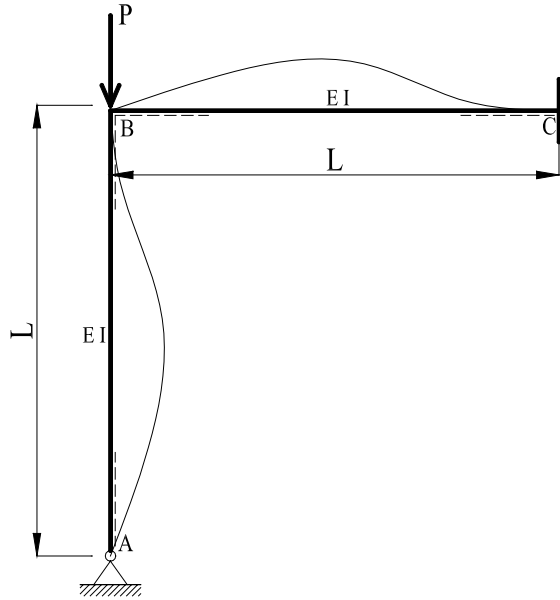
Aynı sürekli kirişin, C.Ş.F 'lu sonlu eleman matrisleriyle, yine 3 eleman kullanılarak yapılan çözümünden ise, kritik burkulma yükü olarak,

$$P_{kr} = 3.720 \frac{EI}{L_1^2} \quad (5.19)$$

değeri elde edilmiştir. Görüldüğü gibi bulunan değer, (5.18) de verilen gerçek çözüm ile aynıdır. Ancak sistem matrisinin boyutu ve işlem yoğunluğu daha fazladır.

5.3 Yarım Çerçeve Problemi

Önceki bölümlerde, sadece kendi eksenini doğrultusunda normal kuvvet etkisinde olan çubukların stabilitesi incelendi. Metodun, çerçeve problemlerinde nasıl bir sonuç vereceğini görmek için, öncelikle, Şekil 5.4 de verilen yarım çerçevenin stabilitesi araştırılmıştır. Kolon ve kirişin aynı uzunlukta, eğilme rijitliklerinin de eşit olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 5.5 Yarım Çerçeve Problemi

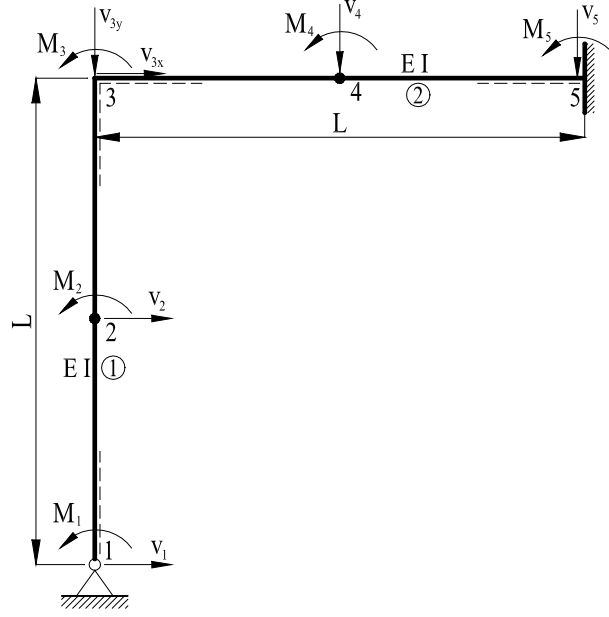
1. bölümde çubuğun P eksenel kuvveti etkisiyle yapacağı birim uzama (P / EA) miktarının oldukça küçük bir değer olması yüzünden, kritik burkulma yükü değerini veren (1.9) formülünde (P / EA) dan doğacak etkiler ihmal edilmişti. Zaten daha sonraki tüm uygulamalarda da kritik burkulma yükü sadece ($\pi^2 EI / L^2$) nin katları cinsinden ifade edilmişti.

Aynı düşünceyle, Şekil 5.5 da şekil ve boyutları verilen yarım çerçevenin kolon elemanında, P eksenel normal kuvveti etkisiyle, herhangi bir uzama yada kısalma olmaz. Ayrıca, sisteme etkiyen herhangi bir yatay kuvvet de olmadığına göre, kirişte de kendi eksenini doğrultusunda, bir uzama yada kısalma söz konusu değildir. Dolayısıyla sistemin elastik eğrisi, Şekil 5.5 deki gibi olur.

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli hususlardan biri, sistem eksenini ile eleman eksenlerinin çakışmadığı durumlarda, sistem matrisinin nasıl oluşturulacağı konusudur. Yarım çerçevenin, kolon ve kirişinin birleşim noktasında, kolonun yatay yer değiştirmesi ile, kirişin düşey çökmesi sıfırdır. Yani, sistem matrisi hangi eksen takımında yazılırsa yazılsın, birleşim noktasındaki kiriş ve kolona ait deplasman değerleri zaten yok olur.

Bununla birlikte, önceki bölümlerde, elde edilen eleman matrislerinde, P dış yükü çarpanı altında bulunan terimler, fonksiyonelin burkulma terimleri idi. Oysa, kirişte kendi normal kuvvet eksenine doğrultusunda bir dış yük olmadığına göre, kirişlerin eleman matrislerinde burkulma terimleri olmamalıdır. Kirişlerde sadece eğilmeye ait terimler dikkate alınmalıdır.

Öncelikle, K.Ş.F'lu sonlu eleman matrisleri kullanılarak ve kolon ve kiriş için birer eleman olarak çözüm yapılmıştır. Bu hale ait sistem bilinmeyenleri Şekil 5.6 da verilmiştir.



Şekil 5.6 Yarım Çerçeve Probleminin K.Ş.F'lu Birer Elemanlı Çözümü

Probleme ait sınır koşulları,

$$v_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad v_{3x} = 0, \quad v_{3y} = 0, \quad v_5 = 0 \quad (5.20)$$

olarak yazılır. 5 no'lu düğüm noktasının ankastre mesnet olması ve sisteme etkiyen herhangi bir yatay kuvvet olmaması yüzünden, kirişte bir uzama yada kısalmama olmaz. Ayrıca kolondaki uzamanın ihmal edilebileceği daha öncede belirtilmişti. Bu yüzden, 3 noktasının yatay ve düşey deplasmanı (v_{3x} ve v_{3y}) sıfır alınmıştır.

(4.259) de verilen alt matrislerde, (5.20) de verilen sınır koşulları girildikten sonra,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11} &= \begin{bmatrix} \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & 0 & 0 \\ \frac{L}{15EI} & \frac{4L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} \\ 0 & \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} \\ 0 & -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{2L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{matrix} & \mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3L} & 0 \\ \frac{8}{3L} & \frac{8}{3L} \\ 0 & -\frac{16}{3L} \\ 0 & \frac{8}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ M_3 \\ M_5 \end{matrix} \\
\mathbf{K}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \end{matrix} & \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{16}{3L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \end{matrix} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

alt matrisleri elde edilir. Dikkat edildiği gibi, P'ye bağlı terimlerin olduğu $\bar{\mathbf{K}}_g$ matrisinde, kirişten gelen herhangi bir terim yoktur. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{16P}{3L} - \frac{5120EI}{51L^3} & -\frac{3200EI}{51L^3} \\ -\frac{3200EI}{51L^3} & -\frac{3840EI}{17L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.22)$$

olarak elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = -9L^2 P + 140EI = 0 \quad (5.23)$$

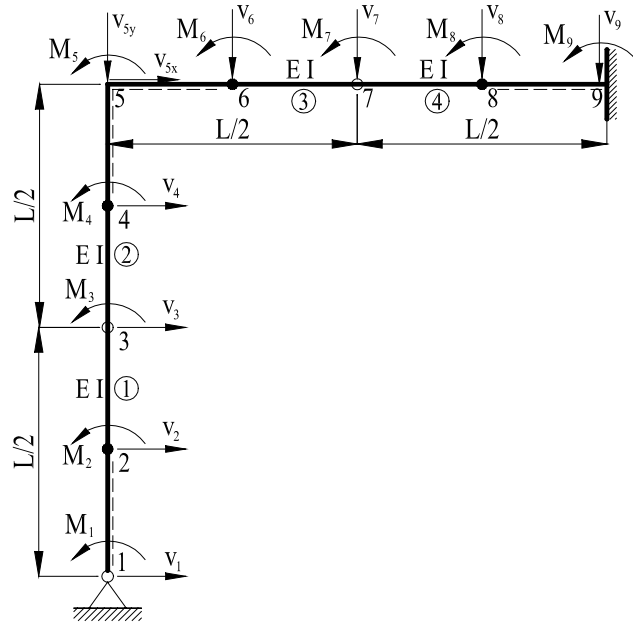
Buradan P'ye bağlı tek kök ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = P_{kr} = 15.556 \frac{EI}{L^2} \quad (5.24)$$

olarak elde edilir. Bu problemin gerçek çözümü [10] da,

$$P_{ger} = 14.700 \frac{EI}{L^2} \quad (5.25)$$

olarak verilmiştir. İki değer arasındaki bağıl hata oranı % 5.82 dir. Aynı problemin yine K.Ş.F'lu sonlu eleman matrisleriyle, bu sefer kolon ve kirişte ikişer eleman olarak çözülmüştür. Bu hale ait sistem bilinmeyenleri ise Şekil 5.7 de verilmiştir.



Şekil 5.7 Yarım Çerçeve Probleminin K.Ş.F'lu İkişer Elemanla Çözümü

Bu hale ait sınır koşulları ise,

$$v_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad v_{5x} = 0, \quad v_{5y} = 0, \quad v_9 = 0 \quad (5.26)$$

olarak yazılır. (4.259) de verilen alt matrislerde, (5.26) da verilen sınır koşulları girildikten sonra, $L_1=L/2$ olmak üzere,

$$\bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{16}{3L_1} & -\frac{8}{3L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3L_1} & \frac{14}{3L_1} & -\frac{8}{3L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8}{3L_1} & \frac{16}{3L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{11} = & \begin{bmatrix} M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 & M_8 & M_9 \\ \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L_1}{15EI} & \frac{4L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & -\frac{L_1}{30EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{30EI} & \frac{L_1}{15EI} & \frac{4L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & -\frac{L_1}{30EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{L_1}{30EI} & \frac{L_1}{15EI} & \frac{4L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} & -\frac{L_1}{30EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L_1}{15EI} & \frac{8L_1}{15EI} & \frac{L_1}{15EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_1}{30EI} & \frac{L_1}{15EI} & \frac{2L_1}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \end{matrix} \\
\mathbf{K}_{12} = & \begin{bmatrix} v_2 & v_3 & v_4 & v_6 & v_7 & v_8 \\ -\frac{16}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3L_1} & -\frac{14}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{16}{3L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & -\frac{1}{3L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{16}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{14}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3L_1} & -\frac{16}{3L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3L_1} & \frac{8}{3L_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \end{matrix} \tag{5.27}
\end{aligned}$$

alt matrisleri elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix}
\frac{16P}{3L_1} - \frac{171520EI}{1731L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{175600EI}{1731L_1^3} & -\frac{92800EI}{1731L_1^3} & -\frac{16000EI}{1731L_1^3} & \frac{2240EI}{577L_1^3} & -\frac{3200EI}{1731L_1^3} \\
-\frac{8P}{3L_1} + \frac{175600EI}{1731L_1^3} & \frac{14P}{3L_1} - \frac{86960EI}{577L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{213680EI}{1731L_1^3} & \frac{44800EI}{1731L_1^3} & -\frac{6272EI}{577L_1^3} & \frac{8960EI}{1731L_1^3} \\
-\frac{92800EI}{1731L_1^3} & -\frac{8P}{3L_1} + \frac{213680EI}{1731L_1^3} & \frac{16P}{3L_1} - \frac{93440EI}{577L_1^3} & -\frac{112000EI}{1731L_1^3} & \frac{15680EI}{577L_1^3} & -\frac{22400EI}{1731L_1^3} \\
-\frac{16000EI}{1731L_1^3} & \frac{44800EI}{1731L_1^3} & -\frac{112000EI}{1731L_1^3} & -\frac{286720EI}{1731L_1^3} & \frac{229360EI}{1731L_1^3} & -\frac{131200EI}{1731L_1^3} \\
\frac{2240EI}{577L_1^3} & -\frac{6272EI}{577L_1^3} & \frac{15680EI}{577L_1^3} & \frac{229360EI}{1731L_1^3} & -\frac{99504EI}{577L_1^3} & \frac{267440EI}{1731L_1^3} \\
-\frac{3200EI}{1731L_1^3} & \frac{8960EI}{1731L_1^3} & -\frac{22400EI}{1731L_1^3} & -\frac{131200EI}{1731L_1^3} & \frac{267440EI}{1731L_1^3} & -\frac{131840EI}{1731L_1^3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_2 \\
v_3 \\
v_4 \\
v_6 \\
v_7 \\
v_8
\end{bmatrix} = 0 \quad (5.28)$$

biçiminde elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

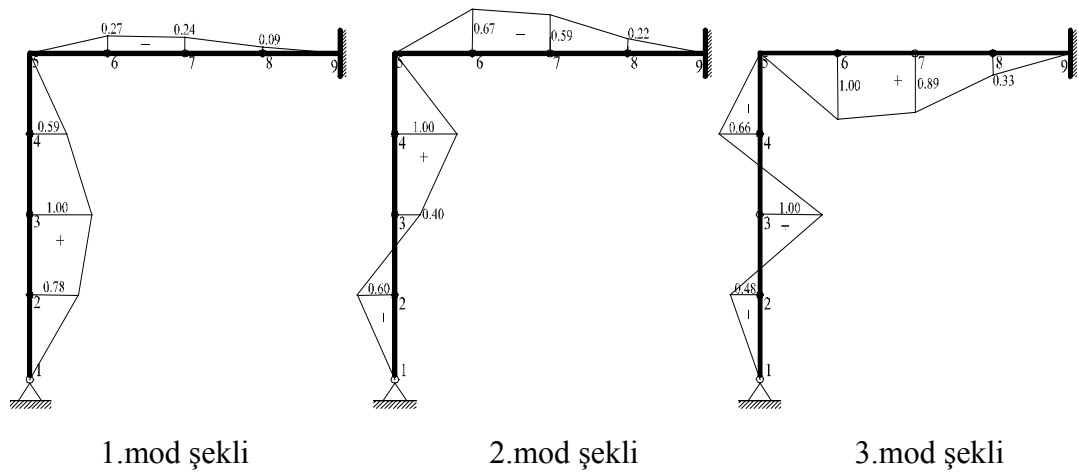
$$\det \mathbf{K}^* = -89L_1^6 P^3 + 4424L_1^4 EIP^2 - 51280L_1^2 E^2 I^2 P + 134400E^3 I^3 = 0 \quad (5.29)$$

$L = 2L_1$ dönüşümü yapılarak P 'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 14.930 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 47.43 \frac{EI}{L^2} \quad P_3 = 136.47 \frac{EI}{L^2} \quad (5.30)$$

$$P_{kr} = 14.930 \frac{EI}{L^2} \quad (5.31)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi bulunan kritik burkulma yükü, (5.25) de verilen gerçek değerine biraz daha yaklaşmış, hata oranı % 1.56'ya düşmüştür. (5.30) da bulunan burkulma köklerine karşılık gelen mod şekilleri ise Şekil 5.8 de verilmiştir.



Şekil 5.8 Yarım Çerçeve Probleminde K.Ş.F'lu İkişer Eleman İçin Mod Şekilleri

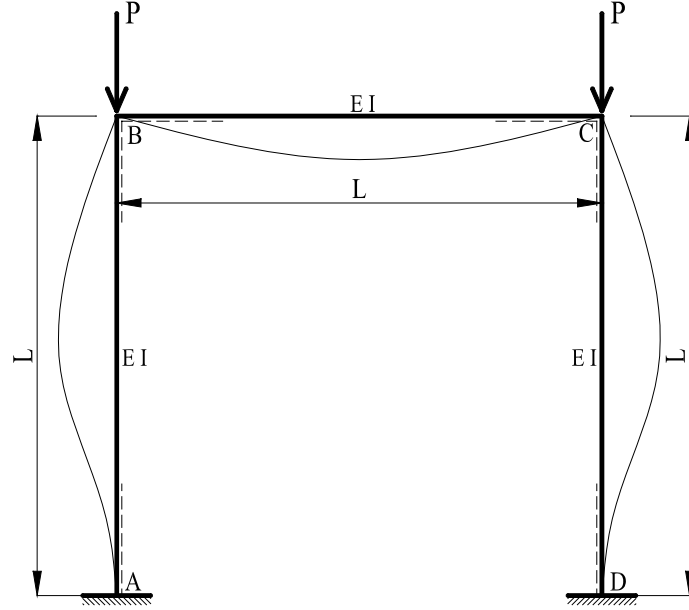
Bu mod şekillerinden de görüleceği gibi, sadece 1.mod şekli, Şekil 5.5 da çizilen sistemin elastik eğrisiyle tamamen örtüşmekte ve sistemin ilk kararlı denge durumunu yansıtmaktadır. Diğer mod şekilleri ise daha yüksek köklere ve sistemin diğer kararlı denge konumlarına aittir.

Aynı çerçevenin, C.Ş.F 'lu sonlu eleman matrisleriyle, birer eleman kullanılarak yapılan çözümünde % 2.78, ikişer eleman kullanarak yapılan çözümünde ise % 0.27 hata oranları elde edilmiştir.

5.4 Tam Çerçeve Problemi

Tabanından ankastre bağlı bir kat çerçevesinin stabilitesi de araştırılmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, iki kat kolonu arasındaki kirişin yanal deplasmanının kat düzleminde önlenip önlenmediği konusudur. Çünkü, her iki durum için de, kolonun elastik eğrisi ve dolayısıyla kritik burkulma yükleri farklı karakterler gösterir.

5.4.1 Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve



Şekil 5.9 Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve

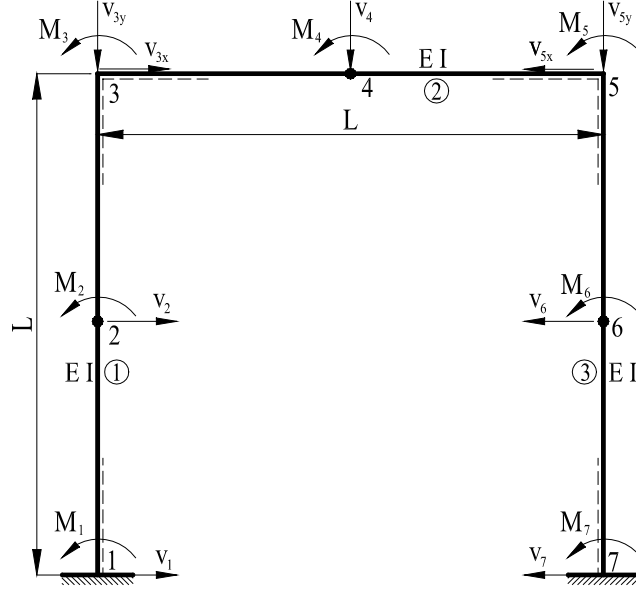
Şekil 5.9 da yanal deplasmanı önlenmiş kat çerçevesi görülmektedir. B ve C noktalarının yatay ve düşey deplasmanları sıfırdır. Kolon ve kirişleri eşit rijitlikte ve boyda tertip edilmiş bu çerçevenin gerçek çözümü [10] da,

$$P_{ger} = 25.20 \frac{EI}{L^2} \quad (5.32)$$

olarak verilmiştir. Kuadratik şekil fonksiyonlu sonlu eleman matrisleri yardımıyla ve kolon ve kirişin herbiri için birer tane olmak üzere toplam üç eleman kullanılması durumunda sistem bilinmeyenleri Şekil 5.10 deki gibi oluşur. Probleme ait sınır koşulları ise

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, & v_{3x} &= 0, & v_{3y} &= 0, \\ v_{5x} &= 0, & v_{5y} &= 0, & v_7 &= 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

şeklindedir.



Şekil 5.10 Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve K.Ş.F'lu Birer Elemanlı Çözüm

(4.259) de verilen alt matrislerde, (5.33) de verilen sınır koşulları girilerek, alt matrisler,

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{M_1}{15EI} & \frac{M_2}{15EI} & -\frac{M_3}{30EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{4L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{4L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{2L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3L} & 0 & 0 \\ -\frac{16}{3L} & 0 & 0 \\ \frac{8}{3L} & \frac{8}{3L} & 0 \\ 0 & -\frac{16}{3L} & 0 \\ 0 & \frac{8}{3L} & \frac{8}{3L} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3L} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{16}{3L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{matrix} \quad (5.34)$$

olarak elde edilir. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{16P}{3L} - \frac{1600EI}{7L^3} & -\frac{1600EI}{21L^3} & -\frac{320EI}{21L^3} \\ -\frac{1600EI}{21L^3} & -\frac{3520EI}{21L^3} & -\frac{1600EI}{21L^3} \\ -\frac{320EI}{21L^3} & -\frac{1600EI}{21L^3} & \frac{16P}{3L} - \frac{1600EI}{7L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_4 \\ v_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.35)$$

biçiminde elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = 11L^4 P^2 - 800L^2 EIP + 14400E^2 I^2 = 0 \quad (5.36)$$

Buradan P'ye bağlı kökler ve kritik burkulma yükü,

$$P_1 = 32.73 \frac{EI}{L^2} \quad P_2 = 40.00 \frac{EI}{L^2} \quad (5.37)$$

$$P_{kr} = 32.73 \frac{EI}{L^2} \quad (5.38)$$

olarak elde edilir.

Kritik burkulma yükü, ile (5.32) de verilen gerçek değeri arasındaki hata % 29.88 gibi oldukça yüksek bir orandır. Aynı sistem kiriş ve kolonlarda ikişer eleman kullanılarak çözüldüğünde ise, burkulma kökleri ve kritik burkulma yükü,

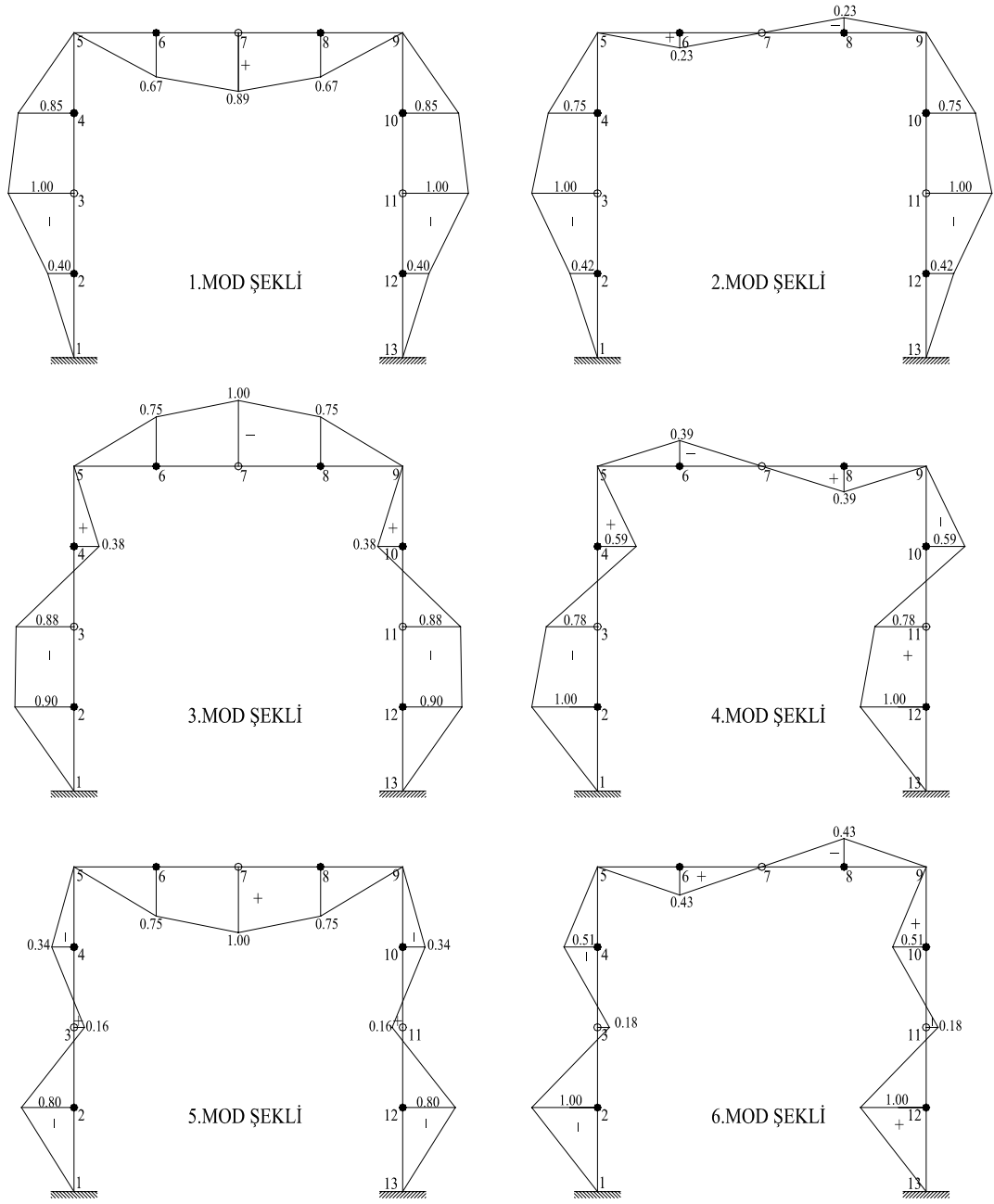
$$\begin{aligned} P_1 &= 26.569 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 33.46 \frac{EI}{L^2} & P_3 &= 75.28 \frac{EI}{L^2} \\ P_4 &= 80.00 \frac{EI}{L^2} & P_5 &= 194.01 \frac{EI}{L^2} & P_6 &= 199.58 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$P_{kr} = 26.569 \frac{EI}{L^2} \quad (5.40)$$

olarak elde edilir. Hata oranı % 5.44'e düşmüştür. 3'er elemanlı çözümde ise bu oran % 0.95 değerine kadar düşmektedir. Eleman sayısının artırılması ile birlikte gerçek değere gittikçe yaklaşıldığı ortadadır. (5.39) da bulunmuş olan köklere karşılık gelen burkulma mod şekilleri ise Şekil 5.11 de çizilmiştir.

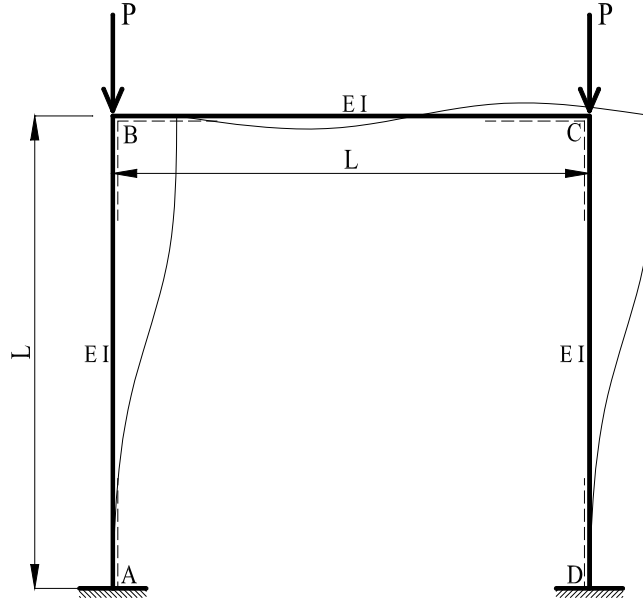
Bu mod şekillerinden de görüleceği gibi, 1.mod şekli, Şekil 5.9 deki sistem elastik eğrisiyle tamamen örtüşmekte ve sistemin ilk kararlı denge konumunu yansıtmaktadır. Diğer mod şekilleri ise daha yüksek köklere ve diğer kararlı denge konumlarına aittir. Burada dikkati çeken konu, yanal deplasmanı önlenmiş çerçevedeki kolonların davranışının, bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı (Tip 2) çubuğun davranışına benzediğidir. Zaten bu çerçevenin kesin çözümünden elde edilen kritik burkulma yükü olan $25.20(EI/L^2)$ değeri de, Tip 2 çubuğuna ait Euler burkulma yükü olan $20.142(EI/L^2)$ değerine yakındır.

Aynı çerçevenin, C.Ş.F 'lu sonlu eleman matrisleriyle, birer eleman kullanılarak yapılan çözümünden % 9.76, ikişer eleman kullanarak yapılan çözümünden ise % 0.04 hata oranları elde edilmiştir. Ancak bilinmeyen sayılarının daha fazla olduğu da unutulmamalıdır.



Şekil 5.11 Yanal Deplasmanı Önlenmiş Çerçeve K.Ş.F'lu
İkişer Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

5.1.2 Yanal Deplasmanı Önlenmemiş Çerçeve



Şekil 5.12 Yanal deplasmanı önlenmemiş çerçeve

Çerçevenin kat düzlemindeki hareketinin serbest bırakılması durumunda, Şekil 5.12 den de görüleceği gibi kolon uçları yatayda hareket eder, ancak, kirişte ise kendi rijitliğine bağlı olarak ya hiç deformasyon olmaz yada oluşan deformasyon kolona göre daha küçük mertebelerde oluşur.

Şekil 5.12 deki kolon ve kirişleri eşit rijitlikte ve boyda tertip edilmiş bu çerçevenin gerçek çözümü [10] da,

$$P_{ger} = 7.34 \frac{EI}{L^2} \quad (5.41)$$

olarak verilmiştir. Kuadratik şekil fonksiyonlu sonlu eleman matrisleri yardımıyla ve kolon ve kirişin herbiri için birer tane olmak üzere toplam üç eleman kullanılması durumunda sistem bilinmeyenleri Şekil 5.10 deki gibi oluşur. Probleme ait sınır koşulları ise

$$v_1 = 0, \quad v_{3y} = 0, \quad v_{5y} = 0, \quad v_7 = 0 \quad (5.42)$$

şeklinde. Sınır koşullarından da görüldüğü gibi, kolon uçları yatayda deplasman yaparken, kirişin kolonlara bağlandıkları noktalardaki çökmeler sıfırdır.

(4.259) de verilen alt matrislerde, (5.42) de verilen sınır koşulları girilerek, alt matrisler,

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{2L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{4L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{4L}{15EI} & \frac{L}{15EI} & -\frac{L}{30EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{15EI} & \frac{8L}{15EI} & \frac{L}{15EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{30EI} & \frac{L}{15EI} & \frac{2L}{15EI} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{matrix} \quad \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} v_2 & v_{3x} & v_4 & v_{5x} & v_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_{3x} \\ v_4 \\ v_{5x} \\ v_6 \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3L} & -\frac{1}{3L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{16}{3L} & \frac{8}{3L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3L} & -\frac{7}{3L} & \frac{8}{3L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{3L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3L} & -\frac{7}{3L} & \frac{8}{3L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3L} & -\frac{16}{3L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3L} & \frac{8}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \end{matrix} \quad \bar{\mathbf{K}}_g = \begin{bmatrix} \frac{16}{3L} & -\frac{8}{3L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3L} & \frac{7}{3L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3L} & -\frac{8}{3L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3L} & \frac{16}{3L} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_{3x} \\ v_4 \\ v_{5x} \\ v_6 \end{matrix} \quad (5.43)$$

şeklinde yazılır. (4.250) ve (4.251) eşitlikleri uygulanarak, sistem matrisi ve bilinmeyenleri indirgenmiş formda,

$$\begin{bmatrix} \frac{16P}{3L} - \frac{1600EI}{7L^3} & -\frac{8P}{3L} + \frac{704EI}{7L^3} & -\frac{1600EI}{21L^3} & \frac{208EI}{21L^3} & -\frac{320EI}{21L^3} \\ -\frac{8P}{3L} + \frac{704EI}{7L^3} & \frac{7P}{3L} - \frac{1868EI}{35L^3} & \frac{1040EI}{21L^3} & -\frac{676EI}{105L^3} & \frac{208EI}{21L^3} \\ -\frac{1600EI}{21L^3} & \frac{1040EI}{21L^3} & -\frac{3520EI}{21L^3} & \frac{1040EI}{21L^3} & -\frac{1600EI}{21L^3} \\ \frac{208EI}{21L^3} & -\frac{676EI}{105L^3} & \frac{1040EI}{21L^3} & \frac{7P}{3L} - \frac{1868EI}{35L^3} & -\frac{8P}{3L} + \frac{704EI}{7L^3} \\ -\frac{320EI}{21L^3} & \frac{208EI}{21L^3} & -\frac{1600EI}{21L^3} & -\frac{8P}{3L} + \frac{704EI}{7L^3} & \frac{16P}{3L} - \frac{1600EI}{7L^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_{3,x} \\ v_4 \\ v_{5,x} \\ v_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.44)$$

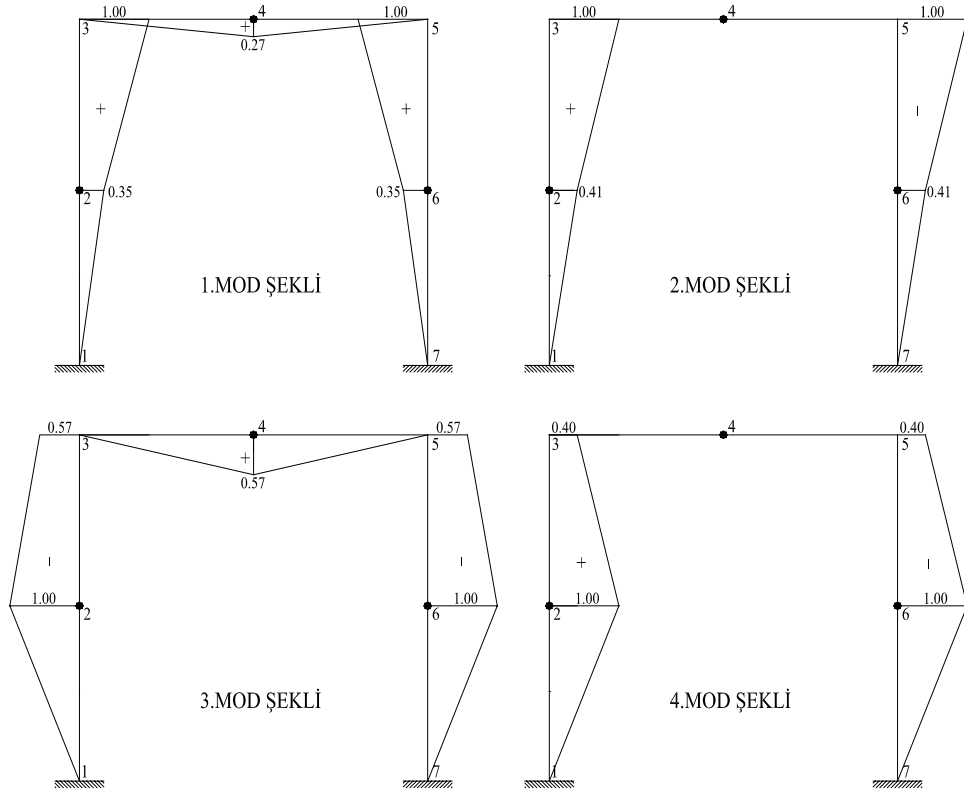
biçiminde elde edilir. Bu denklem takımının trivial olmayan çözümü için, (4.252) eşitliği sağlanmalıdır.

$$\det \mathbf{K}^* = 55L^8 P^4 - 5008L^6 EI P^3 + 142368L^4 E^2 I^2 P^2 - 1301760L^2 E^3 I^3 P + 3628800E^4 I^4 = 0 \quad (5.45)$$

Buradan P'ye bağlı kökler,

$$\begin{aligned} P_1 &= 5.455 \frac{EI}{L^2} & P_2 &= 8.095 \frac{EI}{L^2} \\ P_3 &= 36.00 \frac{EI}{L^2} & P_4 &= 41.50 \frac{EI}{L^2} \end{aligned} \quad (5.46)$$

olarak elde edilir. Burada dikkati çeken en önemli konu, birinci ve ikinci köklerin her ikisinin de (5.41) de verilen gerçek değere yakın oluşudur. Bu köklerden hangisinin kritik burkulma yükü olarak alınacağını anlayabilmek için mod şekillerine bakmak gerekmektedir.



Şekil 5.13 Yanal Deplasmanı Önlenmemiş Çerçeve K.Ş.F'lu
Birer Elemanlı Çözüme Ait Burkulma Mod Şekilleri

Şekil 5.13 den de görüleceği gibi, 1. mod şeklinde her iki kolondaki deformasyon simetrik olup, sistem genel olarak düşey düzlemde bir deformasyona uğramaktadır.

Sistemin bu şekildeki hareketini doğuran en önemli sebep kolon ve kiriş rijitlikleri arasındaki ilişkidir. Kirişin rijitliği arttıkça, kirişteki deformasyonlar azalır ve sistem yatayda bir harekete zorlanır.

Oysa 2. mod şeklinde sistem, yatay düzlem boyunca hareket etmekte, kirişteki deformasyonlar, kolonun yanında ya çok küçük kalmakta, yada sıfır olmaktadır. Dolayısıyla yanal deplasmanı önlenmemiş bu çerçeve için sistemin kritik burkulma yükü olarak ikinci kökü, yani,

$$P_{kr} = 8.095 \frac{EI}{L^2} \quad (5.47)$$

değerini almak gerekmektedir. (5.41) de verilen gerçek değeri ile arasındaki bağıl hata oranı % 10.29 gibi yüksek bir değerdir. Aynı sistem yine K.Ş.F 'lu sonlu eleman matrisleriyle ve, kiriş ve kolonlarda ikişer eleman kullanılarak çözüldüğünde ise, mod şekilleri çizildikten sonra, yine ikinci kökten,

$$P_{kr} = 7.412 \frac{EI}{L^2} \quad (5.48)$$

değeri elde edilir. Hata oranı % 0.99 gibi oldukça iyi bir değere düşmüştür. İki elemanlı K.Ş.F'lu çözümde sınır koşulları da girildikten sonra bilinmeyen sayısı 11' e düşmektedir. Onun yerine C.Ş.F'lu birer elemanlı çözüme gidilirse, bilinmeyen sayısı 8 dir. Bu hal için kritik burkulma yükü olarak,

$$P_{kr} = 7.379 \frac{EI}{L^2} \quad (5.49)$$

değeri elde edilir. Hata oranı ise % 0.54' dür. Daha az bilinmeyenle daha iyi bir sonuç edildiği görülmektedir.

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

3. bölümde elde edilen fonksiyonelin çözümü, önce Ritz, ardından da sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak, araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, problemin gerçek çözümü olarak kabul edilen Euler burkulma yükleri ile karşılaştırıldığında, genel olarak düşük hata oranları elde edilmiştir.

Ritz yöntemi kullanılarak yapılan çözümlerde elde edilen sonuçlar incelediğinde, genel olarak, yaklaşım fonksiyonlarının mertebeleri artırıldıkça, elde edilen kritik burkulma yükü değerleri, Euler burkulma yükü değerlerine gittikçe yaklaşmaktadır. Buna bir istisna olarak, bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı (Tip 2) çubuğa ait 7 bilinmeyenli çözümünde % 0.028, 9 bilinmeyenli çözümünde ise %0.251 hata oranı elde edilmiştir. Elde edilen hata oranları, mühendislik uygulamaları açısından kabul edilebilir mertebelerde olmalarına karşın, yine de daha yüksek mertebeden fonksiyonlarla daha iyi sonuçlar elde edileceğine ilişkin genel kanıya ters düşmektedir. Belirli bir mertebeden sonra sonuçların gerçek değerinden uzaklaşabileceği görülmektedir. Bu konuda daha ayrıntılı bilgi [2] de verilmiştir.

Yaklaşım fonksiyonlarının mertebeleri artırıldıkça elde edilebilecek olan kötü sonuçlar, ancak hesabın doğruluğuna ilişkin sınıra ulaşıldığı düşüncesiyle açıklanabilir. Bu kötü değerlerin elde edildiği çözümlerden bir önceki çözümlerde elde edilen sonuçların çok iyi olması bunun bir kanıtı olarak görülebilir.

Yaklaşım fonksiyonları seçilirken, hem dinamik hem de geometrik sınır koşullarının sağlanmasına özellikle dikkat edilmiştir. Fonksiyoneldeki $v(z)$ ve $M(z)$ değişkenlerine ait mesnet koşullarının her ikisinin birden sağlanması, hiç kuşkusuz sonucun güvenilirliği ve hassasiyeti açısından önemlidir. Ancak, bu koşulların her ikisinin birden sağlanması şart değildir. Ritz yönteminde, yaklaşım fonksiyonları dinamik sınır şartlarını değil, sadece geometrik sınır şartlarını kesin olarak sağlamak zorundadır. [2]

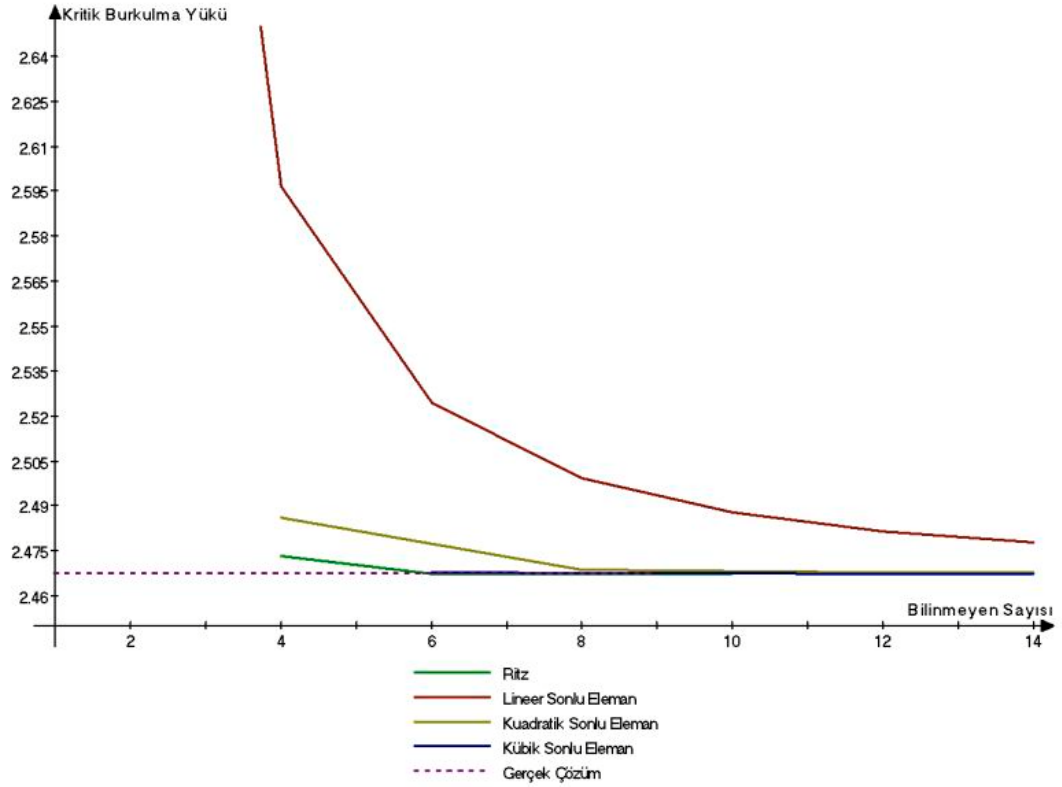
Sadece geometrik sınır şartlarını, yani ilgili düğüm noktalarındaki çökme değerlerini sağlayan yaklaşım fonksiyonlarını aynen alıp, dinamik sınır şartlarını, yani momenti ise çubuğun her noktasında sabit kabul edip çözümler tekrarlanınca, bulunan hata oranlarının, bu bölümde elde edilenlerden çok daha kötü olduğu görülmüştür.

Unutulmaması gereken bir diğer konuda, Ritz metodunun düşük mertebeli yaklaşım fonksiyonlarında bile iyi sonuçlar verdiği gerçeğidir. Sınır koşullarını sağlamak şartıyla, az sayıda fonksiyonla bile sonuca iyi bir oranda yaklaşmak, özellikle mühendislik uygulamalarında sonuca daha kolay ulaşmak açısından metodun önemli bir üstünlüğü olarak söylenebilir.

Çalışmanın ilerleyen kısımlarında ise, lineer, kuadratik ve kübik şekil fonksiyonları yardımıyla, Euler halleri olarak bilinen 4 farklı tipte çubuğa ait karışık sonlu eleman çözümleri araştırılmıştır. Bu çözümler sonrasında şu sonuçlara ulaşılmıştır.

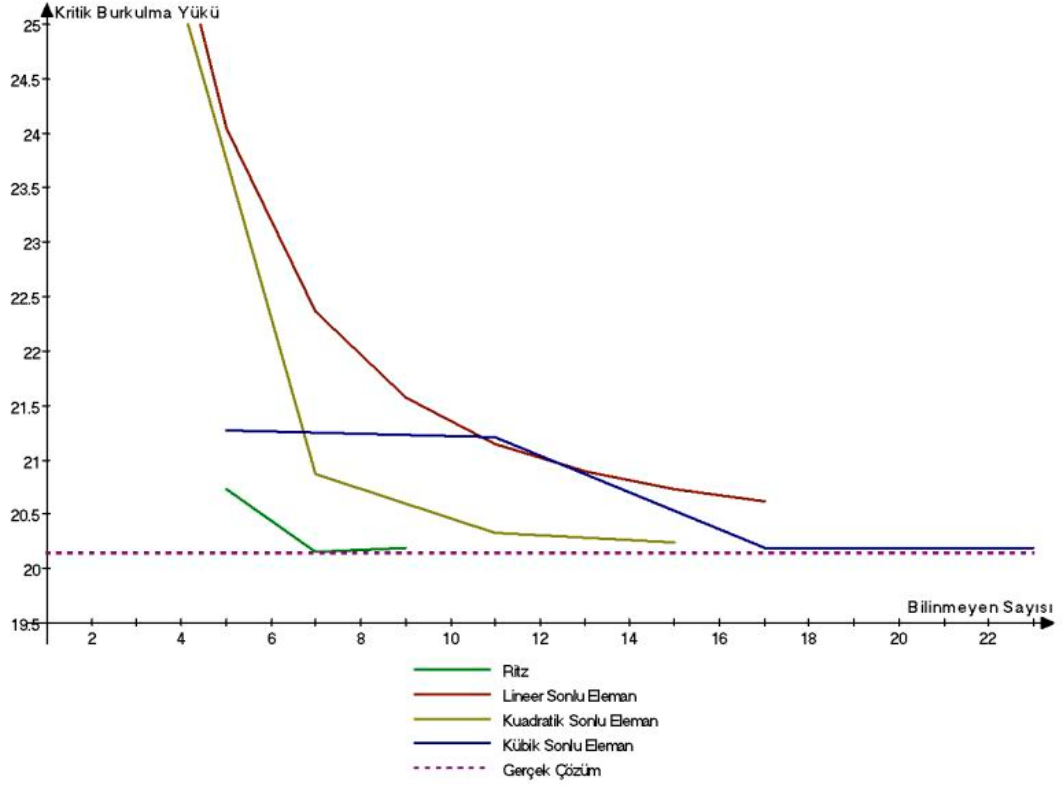
- Fonksiyonel içinde en yüksek 1. mertebeden türev barındırmaktadır. Dolayısıyla fonksiyonelin çözümü C^0 tipinde, yani lineer şekil fonksiyonlarıyla bile yapılabilmektedir. Bu da fonksiyonelin önemli bir üstünlüğüdür. Literatürde, toplam potansiyel enerji ifadesine bağlı olarak yazılan fonksiyonel ise minimum C^1 tipi şekil fonksiyonlarıyla çözülebilmektedir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki toplam potansiyel enerjiye bağlı diğer çözümlerle karşılaştırıldığında ise oldukça iyidir.
- Eleman sayısının artırılması ile hata oranları gözle görülür oranla düşmektedir. Ancak bu da beraberinde işlem yoğunluğunun artmasına yol açmaktadır. İndirgenmiş eleman matrisleri kullanmak şartıyla bu sorunun da önüne geçilebilir.
- L.Ş.F.'lu sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen değerlerin, gerçek değerlerden uzak kaldığı, bunun yerine K.Ş.F.'lu sonlu elemanlar kullanarak çözüme gidilmesinin daha doğru bir seçim olacağı söylenebilir. C.Ş.F.'lu sonlu elemanları ise, işlem yoğunluğu göze alınmak şartıyla, ancak çok hassas sonucun istendiği durumlarda kullanmak mantıklı görülmektedir.
- Düğüm noktalarının ankastreliği arttıkça, hata oranları da benzer şekilde artmaktadır. Ankastre mesnetli problem tiplerinde fazla sayıda eleman kullanılması gerekmektedir.

Her iki yöntemle ve sabit kesitli çubuklar için farklı tipte çözüm yolları ile elde edilen değerleri karşılaştırmak amacıyla, elde edilen kritik burkulma yükü değerleri ile bilinmeyen sayıları arasındaki ilişkiyi veren göre grafikler çizilmiştir.



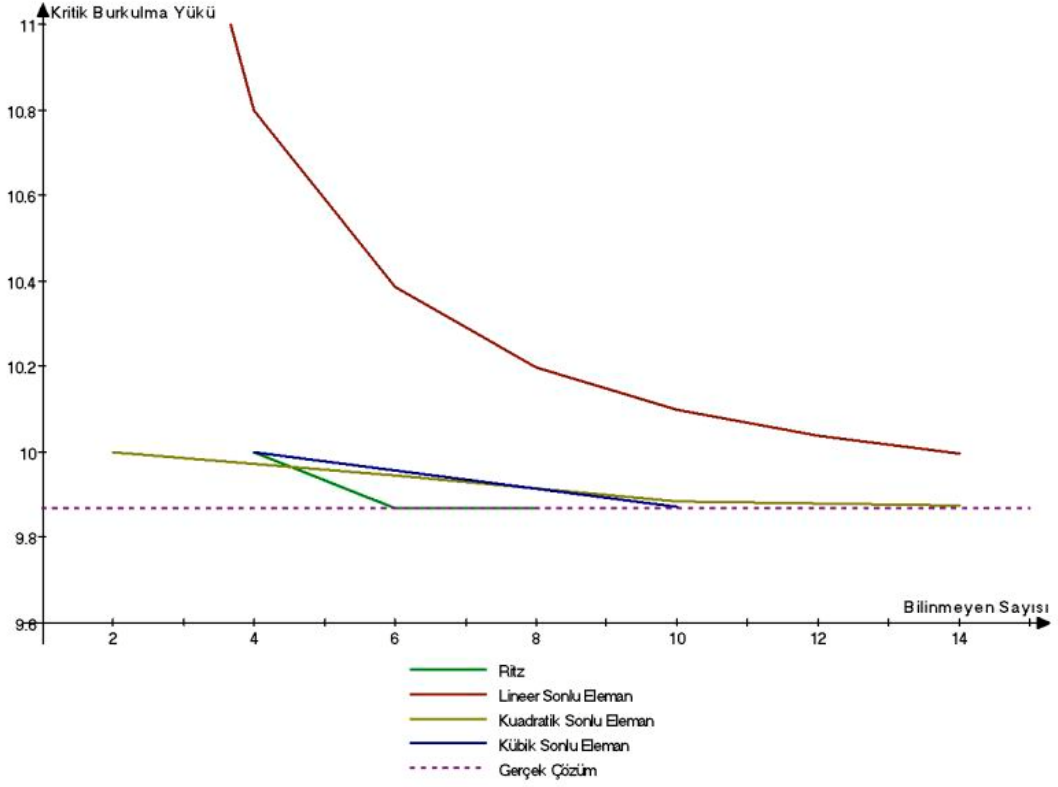
Şekil 6.1 1. Tip Burkulma Çubuğuna Ait Çözümlerin Karşılaştırılması

Şekil 6.1 de bir ucu ankastre, diğer ucu boş hale (Tip 1) ait çözümler görülmektedir. Kübik şekil fonksiyonlu sonlu eleman ve Ritz metodu uygulanarak elde edilen sonuçların diğerlerine oranla çok daha iyi olduğu görülmektedir. Lineer şekil fonksiyonlu sonlu eleman çözümünde, fazla sayıda eleman kullanılmasında bile, iyi sonuçlar elde edilememiştir. 7'den fazla bilinmeyen sayısında, lineer şekil fonksiyonlu çözümler hariç, elde edilen değerler problemin gerçek çözümüne oldukça yakındır. Bu tipe ait tüm çözümlerde dikkati çeken konu ise, sonuçların mühendislikçe kabul edilebilir değerlerde oluşudur.



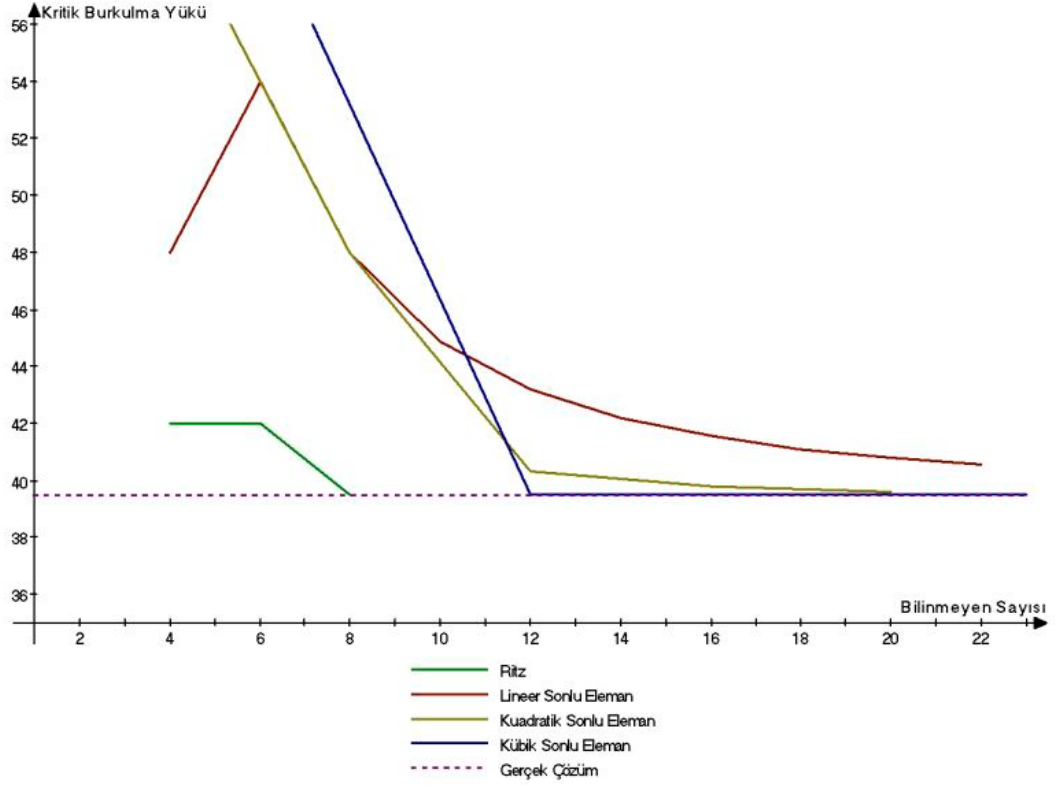
Şekil 6.2 2. Tip burkulma çubuğuna ait çözümlerin karşılaştırılması

Şekil 6.2 de ise bir ucu ankastre, diğer ucu mafsallı hale (Tip 2) ait çözümler görülmektedir. Özellikle Ritz yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçların çok iyi olduğu rahatlıkla söylenebilir. 1. Tip burkulma çubuğunda olduğu gibi bu halde de, L.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümünde, fazla sayıda eleman kullanılmasında bile, iyi sonuçlar elde edilememiştir. K.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümleri ise az bilinmeyende bile iyidir. Dikkati çeken en önemli konu ise, az bilinmeyenle daha iyi sonuç vermesi beklenen C.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümlerinin, ancak çok fazla sayıda bilinmeyende gerçek değerine sonuca yaklaştığıdır. Elde edilen hata oranlarının, Tip 1'e göre biraz daha kötü olduğu söylenebilir.



Şekil 6.3 3. Tip burkulma çubuğuna ait çözümlerin karşılaştırılması

Şekil 6.3 de ise her iki ucu mafsallı hale (Tip 3) ait sonuçlar görülmektedir. L.Ş.F.'lu sonlu eleman çözümü haricindeki diğer tüm çözümlerin genelde birbirine yakın ve mühendislikçe kabul edilebilir mertebede olduğu söylenebilir. K.Ş.F. ve C.Ş.F. çözümleri birbirine çok yakındır.



Şekil 6.4 4. Tip burkulma çubuğuna ait çözümlerin karşılaştırılması

Son olarak Şekil 6.4 de de her iki ucu ankastre hale (Tip 4) ait çözümler görülmektedir. Ritz metodu ile elde edilen değerlerin yine çok iyi olduğu, sonlu eleman çözümlerinin ise, mesnet şartlarının sıkılaşmasına paralel olarak, çok değişkenlik gösterdiği, kabul edilebilir hata oranlarına ancak fazla sayıda eleman kullanılması durumunda ulaşılabilirdiği görülmektedir.

Çalışmanın son bölümünde ise, çerçeve, sürekli kiriş ve değişken kesitli çubuklara ait sonlu eleman uygulamaları yapılmış ve elde edilen sonuçların genelde iyi olduğu görülmüştür. Bazı çerçeve çözümlerinde, elde edilen minimum kökler kritik burkulma yükünü vermemektedir. Bütün köklere ait burkulma mod şekillerinin çizilmesi ile elde edilen ve sistemin ilk kararlı dengesini veren burkulma kökü, problemin gerçek çözümüne oldukça yakındır.

KAYNAKLAR

- [1] **İnan, M.**, 1967. Cisimlerin Mukavemeti, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul.
- [2] **Pflüger, A.**, çev: Tameroğlu S., Cinemre V., Özbek T., 1970. Elastostatiğin Stabilité Problemleri, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.
- [3] **Oden, J. T., Reddy, J. N.**, 1976. Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer, Berlin
- [4] **Reddy, J. N.**, 1984. Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, Blacksburg, Virginia
- [5] **Reddy, J. N.**, 1987. Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering, McGraw-Hill Inc., Virginia
- [6] **Aköz, A. Y., Omurtag M. H. ve Doğruoğlu A. N.**, 1990, The Mixed Finite Element Formulation for Three-Dimensional Bars, *Solid Structures*, **28**, 225-234.
- [7] **Bathe, K. J.**, 1996. Finite Element Procedures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- [8] **Reddy, J. N.**, 1993. An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, Inc., Texas
- [9] **Zienkiewicz, O. C.**, 1971. The Finite Element Method in Engineering Science, London,
- [10] **Chajes, A.**, 1974. Principles of Structural Stability Theory, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- [11] **Timoshenko, S.**, çev: Şuhubi E., Deren H., 1963. Elastik Stabilité Teorisi, İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, İstanbul.
- [12] **Çakıroğlu, A.**, 1977. Çubuk Sistemlerin Burkulma Hesabı, İ.T.Ü. Kütüphanesi Matbaası, İstanbul.
- [13] **Li Q.S., Cao H. ve Li G.**, 1996, Static and Dynamic Analysis of Straight Bars with Variable Cross-Section, *Computers & Structures*, **59**, 1185-1191
- [14] **Li Q.S., Cao H. ve Li G.**, 1994, Stability Analysis of a Bar with Multi-Segments of Varying Cross-Section, *Computers & Structures*, **53**, 1085-1089

- [15] **Li Q.S.**, 2001, Analytical Solutions for Buckling of Multi-Step Non-Uniform Columns with Arbitrary Distribution of Flexural Stiffness or Axial Distributed Loading, *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**, 349-366.
- [16] **Li Q.S., Cao H. ve Li G.**, 1995, Stability Analysis of Bars with Varying Cross-Section, *International Journal of Solids & Structures*, **32**, 3217-3228
- [17] **Pi Y.L. ve Trahair N. S.**, 1998, Non-Linear Buckling and Postbuckling of Elastic Arches, *Engineering Structures*, **20**, 571-579
- [18] **Yokoyama T.**, 1991, Vibrations of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter elastic Foundations, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 355-370
- [19] **Chassie G. G., Becker L. E ve Cleghorn W.L.**, 1997, On the Buckling of Helical Springs under Combined Compression and Torsion, *International Journal of Mechanical Sciences*, **39**, 697-704
- [20] **Karamanlidis D. ve Prakash V.**, 1988, Buckling and Vibration Analysis of Flexible Bemas Resting on an Elastic Half-Space, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 1103-1114
- [21] **Arbabi F. ve Li F.**, 1991, Buckling of Variable Cross-Section Columns, Integral Equation Approach, *Journal of Structural Engineering, ASCE* **8**, 117
- [22] **Vaziri H. H. ve Xie J.**, 1991, Buckling of Columns under Variably Distributed Axial Loads, *Computers & Structures*, **3**, 45
- [23] **Lee S. Y. ve Kuo Y.H.**, 1991, Elastic Stability of Non-Uniform Columns, *Journal of Sound and Vibration*, **148**, 11-24
- [24] **Iyengar NGR**, 1988, Structural Stability of Columns and Plates, John Wiley and Sons, New York

ÖZGEÇMİŞ

Tuncay Gün, 1974 yılında İstanbul’da doğmuştur. İlköğrenimini İstanbul Altıekim İlkokulu’nda tamamlamış, 1988 yılında İstanbul Esentepe Ortaokulu’ndan, 1993 yılında ise İstanbul İnşaat Anadolu Teknik Lisesi’nden mezun olmuştur. 1994 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başlamıştır. 1998 yılında aynı okuldan İnşaat Mühendisi unvanı ile mezun olmuştur. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Mühendisliği-Mekanik bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başlamıştır. Halen Probi İnşaat Bilgi İşlem Merkezi A.Ş. de proje mühendisi olarak görev almaktadır.