

**PARALEL OLMAYAN AZ EĞİMLİ EKSENEL SİMETRİK PLAKLAR
ARASINDA HIZIN DÜŞEY BİLEŞENİNİN RADYAL AKIMA ETKİSİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Şûle C. ERSOY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27 Mayıs 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 1996

Tezin Danışmanı : Prof. Dr. Gülgün YALÇINKAYA

Diğer Jüri Üyeleri

: Doç. Dr. İ. Bedii ÖZDEMİR

Doç. Dr. Kadir KIRKKÖPRÜ

G. Yalçinkaya 14.6.1996

B. Özdemir 14/6/1996

K. Kırkköprü 14.6.1996

HAZİRAN 1996

ÖNSÖZ

Eldeki bu ilginç araştırma konusunu bana veren ve çalışmalarımı yakından izleyerek yol gösteren danışmanım Sayın Prof. Dr. Gülgün YALÇINKAYA'ya, diğer Anabilim Dalı hocalarıma ve bana destek olan arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Şûle Celasun Ersoy



İÇİNDEKİLER

KULLANILAN SEMBOLLER	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
TABLO LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
BÖLÜM 1 : GİRİŞ	1
BÖLÜM 2 : GÖZLEMLER	7
BÖLÜM 3 : ANALİZ	8
3.1 Lineer Analiz	12
3.1.1 Basınç belirlenmesi	15
3.1.2 Kuvvet belirlenmesi	17
3.2 Karşılaştırma	20
3.3 Nonlineer Düzeltme Terimleri	23
3.3.1 Hız düzeltmesi	23
3.3.2 Kuvvet düzeltmesi	38
BÖLÜM 4 : LİTERATÜR İLE UYUM	39
4.1 Kullanılacak Formüller	39
4.2 z Düzleminde Radyal Hız Dağılımı	46
4.3 Basınç Diyagramı (Gans)	48
4.4 Basınç Karşılaştırması	50
SONUÇLAR	52
YARARLANILAN KAYNAKLAR	53
EK. A VİSKOZ SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞKANLARIN SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA DENKLEMLERİ	54
EK. B BÜYÜKLÜKLERİN BOYUTLARI	61
ÖZGEÇMİŞ	62

KULLANILAN SEMBOLLER

R_i	: Girinti yarıçapı
R_0	: Yatak bütününün yarıçapı
h	: Yatak yüzeyleri arası aralık
h_0	: $r = R_0$ daki aralık
h_c	: Yatak merkezinde tasarlanan aralık
r	: Radyal koordinat
p	: Basınç
d	: İçbükeylik için ek yükseklik
u	: Radyal hız
v	: Eksenel hız
q	: Debi
$\dot{m}$	: Yatak içinden geçen kütleli debi
	: Taşınan ağırlık
F	: Kaldırma kuvveti
ρ	: Havanın yoğunluğu
μ	: Havanın viskozitesi

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	Sistem Şeması	8
Şekil 3.2	Silindirik koordinatlar ve hızlar	8
Şekil 3.3	$\frac{\partial p_1}{\partial x}$ eğrisi	37
Şekil 3.4	p_1 eğrisi	38
Şekil 4.1	u_0 eğrisi	42
Şekil 4.2	u eğrisi	43
Şekil 4.3	$0,574(u_0 + u_1)$ eğrisi	44
Şekil 4.4	Karşılaştırmalı u eğrisi	45
Şekil 4.5	Radyal hız dağılımı eğrisi	47
Şekil 4.6	Basınç diyagramı (Ş.C)	48
Şekil 4.7	Basınç diyagramı (Gans)	49
Şekil 4.8	Karşılaştırmalı basınç diyagramı	51
Şekil A.1	Silindirik koordinatlar	54
Şekil A.2	Silindirik eleman üzerinde hızlar	55
Şekil A.3	Silindirik eleman üzerinde gerilmeler	55
Şekil A.4	Silindirik eleman ve deforme şekli	58

TABLO LİSTESİ

Tablo 3-1	p_0^* (Ş.C.) / p_0^* (Gans) oranı	16
Tablo 3-2	$0,574 p_0$ değerleri	17
Tablo 3-3	$\frac{\partial p_1}{\partial x}$ değerleri	36
Tablo 3-4	$0,574 p_1$ değerleri	36
Tablo 3-5	p_1 değerleri	37
Tablo 4-1	u_0 değerleri	41
Tablo 4-2	u değerleri	42
Tablo 4-3	$0,574(u_0 + u_1)$ değerleri	43
Tablo 4-4	Karşılaştırmalı $u\left(x, \frac{1}{2}\right)$ değerleri	44
Tablo 4-5	z düzleminde radyal hız dağılımı	47
Tablo 4-6	p_0, p_1 (Gans) basınç değerleri	50
Tablo 4-7	Karşılaştırmalı basınç değerleri	50

ÖZET

Eksenel simetrik plaklar arasında radyal akım bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Basit teori, hareket denklemlerinde atalet terimlerini ve hızın eksenel bileşenini ihmal etmektedir. Peube, incelemesinde atalet terimlerini ve eksenel hızı gözönünde tutarak paralel plaklar arasındaki akımı ele almıştır. Katsayıları, sınır şartlarını ve süreklilik denklemine göre belirlenen bir geometrik diziye dayalı kapsamlı bir metod vermiştir. Gans, deneylerde basınçların basit analizin öngördüğü değerlere göre, yaklaşık iki kat daha büyük olduğunu gözlemlemiş ve bu olayı yatağın küçük ortalama yüzey eğimine bağlamıştır. Peube'ün çalışmasında, plak içbükeyliğinin gözönüne alınmadığını ve Gans'ın eksenel hızı hesaba katmadığını burada belirtmek ilginç olacaktır. Eldeki tez, bu iki özelliği analize dahil etmeyi ve ilgili sonuçları çıkarmayı amaçlamaktadır. Tez çalışmasında, içbükeyliğe ilaveten eksenel hız da hareket denklemlerine dahil edildikten sonra fark almak suretiyle iteratif yöntem kullanılarak, bu eksenel hızın daimi radyal akım üzerindeki etkisi, radyal hızlar ve basınçlar hesaplanarak ortaya konmuştur. sonuçta, eksenel hızın basınçları ortalama %43 arttırdığı anlaşılmış ve deneylerde, basit analize göre gözlenen iki kat artışın sadece içbükeylikten değil ve fakat aynı zamanda eksenel hızdan da ileri geldiği belirlenmiştir.

SUMMARY

RADIAL FLOW BETWEEN AXISYMMETRIC NONPARALLEL PLATES OF SMALL SLOPE TAKING INTO ACCOUNT THE AXIAL VELOCITY

The radial flow between axisymmetric plates was investigated by several authors. The simple theory neglects the axial component of the velocity and the inertia terms in the motion equation. Peube, in his study took care of the axial velocity and the inertia terms and considered the flow between the parallel plates. He gave a comprehensive method based on geometric series whose coefficients are determined according to the boundary conditions and the continuity equation. Gans observed in the experiments that the pressures are approximately two times greater than the values predicted by the conventional analysis and ascribed this fact to the slight mean face slope of the bearing. Thus, it is interesting to note that the work of Peube lacks the concavity of the plates and Gans omits the axial velocity. This thesis attempts gathering these two particularities in the analysis and deducing the related consequences.

The calculations are performed conforming to the Gans pattern, using an iterative process. The pressures and the uplift forces are expressed in the form of a series. Its first term that is achieved at the end of the first step of the iteration is denoted as linear term (p_0). The second obtained at the following step is called the nonlinear term (p_1). Added to the first one it leads to a better approximated result and would be theoretically followed by other nonlinear correction terms constituting the normal approach to the solution of a convergent series. Unfortunately, the obtention even of the second term is confronted with mathematical difficulties and only a numerical but not analytical solution was attainable. The effect of the vertical component of the velocity is enormous. Disregarding it caused to Gans an incomplete judgement, that is, the reason of the two times greater pressures observed in the experiments compared to the results of the simplified analysis are due only to the very slight mean face slope of the bearing, whereas in fact the axial velocity also contributed to it in a great extent. A comparison with the Gans formula at the end of

the iterations first step, showed an excess of forty percent regarding the pressures. In the analysis it is dealt with a nondimensional representation. The inclusion of the axial velocity, resulted in the differential equation of the motion in two supplementary terms, which cause the resolution, being not mathematically practical to attain. That's why only the governing term was kept, the other being left temporarily with the intention to evaluate its effect later. After getting in this way the solution, it is recognized that it has the opposite sign to the first term and reduces it approximately in the ratio of forty-three percent. As a result, the values given by the analysis were assigned in the following the factor 0,574.

Peube, in his analysis expressed forcefully, the necessity to satisfy the three conditions below in order to make his formulas valid:

- the radius of the disks must be large enough.
- the flow must be laminar
- the boundary conditions must be appropriately realized.

The second condition implies that the fraction $\frac{A}{r^2}$ be smaller than 22. This constraint translated into our notation means that $x \geq 0,754$. When investigating the compliance of the conclusions of our analysis with the technical literature and especially with Peube's work, which involves the vertical component of the velocity, it is of prime importance to consider this lower limit for x . Thus, it becomes possible to certify the parallelism between the curves for the pressures and the velocity, drawn accordingly to the present analysis and those of Peube and Gans.

The distribution of the radial velocity along the vertical axis is exactly parabolic when the axial component of the velocity is disregarded. This is the case in the Gans analysis. Peube states that, due to the consideration of the axial velocity, the distribution is not anymore parabolic. To have a distribution curve near the parabolic shape it is necessary to the flow to be laminar. The turbulent flow makes this curve to move away from the parabolic shape. The concavity of the upper plate also deforms somewhat the symmetry of the parabola.

Under these considerations, the results of the present analysis, illustrated with tables, diagrams and curves are in conformity with those of Gans and Peube, except understandable small differences due to the effects of the concavity and the axial velocity.

It is thus proved, that the omission of the axial velocity is not admissible and it should be included in the calculations, despite it makes them lengthy and difficult to cope with.

On the subject of integration of the Navier-Stokes equations, it would be pertinent to discuss some of their general properties. In our study we have restricted ourselves to incompressible viscous fluids. Until the present time no general methods have become available for the integration of these equations. Furthermore, solutions which are valid for all values of viscosity are known only for some particular cases, as Poiseuille or Couette flows. In order to simplify considerably the mathematical problem, it was attacked by first tackling limiting cases concerning the viscosities. However, the case of moderate viscosities cannot be interpolated between extreme values. That's why, due to these great mathematical difficulties, the research into viscous fluid motion proceeded to a large extent by experiment. In this connexion the Navier-Stokes equations furnish very useful hints which point to a considerable reduction in the quantity of experimental work required. We remind that the Gans experiments were carried out in the wake of the observations concerning the pressures in the radial flow between two discs. The Navier-Stokes equations become further simplified in the case of incompressible fluids ($\rho = \text{constant}$) even if the temperature is not constant. Since temperature variations are, generally speaking, small, the viscosity may be taken constant ($\mu = \text{constant}$). This condition is more nearly satisfied in gases than in fluids. The equation of state as well as the energy equation become superfluous as far as the calculation of the field of flow is concerned. The field of flow can be considered independently from the equations of thermodynamics. The solutions of the mentioned equations become fully determined physically when the boundary and initial conditions are specified. In the derivation of the motion equations it is assumed that the normal and shearing stresses are linear

functions of the rate of deformation, which is evidently completely arbitrary and not certain a priori, but confirmed later by experiments. The enormous mathematical difficulties encountered when solving the Navier-Stokes equations have so far prevented from obtaining a single analytical solution in which the convective terms interact in a general way with the friction terms. In my thesis, I departed from the simplified form of the motion equation, but added the axial component of the velocity which led to a more realistic solution and made clear the explanation given by Gans about his observation on the pressures, precisising the respective parts of the concavity and the axial velocity in the results obtained. It is necessary to remark that also the dynamic properties, oscillations and stability of the system considered have to be investigated, despite the casual observations made by Gans, suggest great stability, which tentatively was ascribed by him to lift off at minimum pressure, rather than at an excess over running one. Finally Gans noted that the behaviour of this system is not particularly sensitive to the exact form of the concavity. This is in marked contrast to the care that must be taken to insure parallelism when that is the aim. Later, concerning this conclusion, Hayashi specified that for the purpose of insuring parallelism of two plates, it is useful to measure the central pressure and /or the lift off pressure by the system shown and compare them with the predicted values. It should be recognized that the insensitivity of the central pressure or the lift off pressure, i.e., the load carrying capacity, to the exact form of concavity, only comes from the average effect. The pressure distribution will be remarkably influenced by the exact form of the surface. From the view point of stability, it is recommended that the bearing has no recess. In this case, in order to realize the small lift off pressure, i.e., the large load carrying capacity, which is one of the main aims of this bearing, it becomes necessary to increase the concavity of surface, i.e., to increase the additional spacing at the center of the bearing. On the other hand, the coefficient of damping may decrease and become negative at all as the additional spacing increases. Therefore the form of concavity should be carefully chosen. Moreover, the bearing performances may be sensitive to the imperfection of the outer rim of plate, so its recommended giving some extent parallel region in the outer part of bearing.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Paralel diskler arasında daimi radyal akım birçok, araştırmacının ilgisini çekmiş ve yayınlara konu teşkil etmiştir. Bu konuda yapılan bir dizi deneyden sonra Peube, $\frac{\rho q h}{\mu r^2} < 1$ şartı gerçekleşmediği takdirde hız dağılımının parabolik olmadığını ve artık atalet terimlerinin ihmal edilemeyeceğini ve dolayısı ile hızın sıfırdan farklı bir eksenel bileşeninin işe girdiğini belirtti [1]. Savage, paralel plaklar arasındaki radyal akım analizinin prensiplerini verdi [2]. Lee ve Lin bunu devam ettirdiler [3]. Hayashi, stabilite bakımından yatakta çukur bulunmaması gerektiğini ve küçük kaldırma basıncı, yani büyük yük taşıma kapasitesi sağlamak için, yüzeyin konkavlığını arttırmak yani d ilave yüksekliğini büyütmek gerektiğini ve fakat bunda çok ileri gidilirse sönüm katsayısının küçüleceğini ve hatta negatif olabileceğini belirtti. Ayrıca yatağın dış uçlarında paralel bir bölge tavsiye etti [4],[5]. Gans, küçük eğimli, paralel olmayan eksenel simetrik plaklar arasındaki radyal akımı etüd etti [6] ve yağlayıcı(hava) nın kütleli debisi ve yatak yükünün fonksiyonu olarak, böyle hafif konkav eksenel simetrik basınçlı bir yatakta, ayrılma miktarını ve merkezi basıncı ölçtü. Bunlara dayanarak, Gans, $1,6 \cdot 10^{-3}$ gibi çok küçük bir ortalama yüzey eğiminin, merkezi basıncı iki kere küçülterek, aşırı start basıncı ihtiyacını ortadan kaldırdığını belirtti ve sistemin davranışını analitik yoldan etüd ederek, teori ve deneyler arasında uyum bulunduğunu gösterdi.

Analiz, klasik, Süreklilik-Kütle korunması ve Hareket-Momentum korunması (Navier - Stokes) denklemlerine dayanmaktadır. Hareket denklemlerinin bütün terimlerini gözönüne alarak tam bir çözüme gitmenin matematik güçlükler sebebi ile sağlanamadığı bilinmektedir. Buna karşın bazı terimler ihmal edilerek pratikte uygulanabilir çözümler elde edilegelmektedir. Hareket denklemlerini oluşturan atalet kuvvetleri, hacim kuvvetleri ve yüzey kuvvetlerinden genellikle hacim kuvvetleri ihmal edilmektedir. Bazan atalet kuvvetleri de hesaba katılmamaktadır. Örneğin Yuan [7], “Hydrodynamics of Bearing Lubrication” konusunda, Couette akımının hidrodinamik teorisini, iki boyutlu olarak ele aldığında, hız bileşenlerini

$$w = 0, \quad v < u \quad (1.1)$$

kabul ederek

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

denkleminde, kayıcı blok boyu (l) ve blok ile yatak arasındaki yağlayıcı ile dolu aralığın kalınlığını (h) ile göstermek üzere

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \approx \frac{\frac{u}{l^2}}{\frac{u}{h^2}} = \frac{h^2}{l^2} \ll 1 \text{ ve dolayısı ile}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

gene

$$\frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \approx \frac{\frac{u^2}{l}}{\nu \frac{u}{h^2}} = \frac{ul}{\nu} \left(\frac{h^2}{l^2} \right) \ll 1 \text{ ve dolayısı ile}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.4)$$

ve çoğunlukla yağlama problemlerinde $\frac{h}{l} \approx 10^{-3}$ mertebesinde olduğundan, hareket

denklemindeki atalet kuvveti terimini emniyetle ihmal ederek, bu denklemi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

basit şekline indirgemektedir.

Gans [6], $\rho u u_x$ atalet terimini kullanmakta ve p basıncını, dolayısı ile F kaldırma kuvvetini seriye açarak, R açınım çarpanı olmak üzere

$$p = p_0 + R p_1' + \dots \quad (1.6)$$

şeklinde göstermektedir. Yazar, bu seride, sadece baştaki iki terimle yetinmekte ve çözümde fark almak sureti ile iteratif yöntem kullanmaktadır. Serinin yakınsaklık hızı ve derecesi belirtilmemiştir. Diferansiyel denklemin iterasyonla çözümü sonucunda elde edilen değerlerin, Savage [2] tarafından verilenler ile $d \rightarrow 0$ için uyumlu olduğunu ifade etmektedir. Bu sonuçlara göre, aynı bir W yükü için basit teoremin öngördüğünden iki defa daha küçük çıkan merkezi basınçları, aralığın konik olmasına bağlamaktadır. p_1 ve izleyen terimler ile ifade edilen non lineer tesir, evvelce Peube [1] ve Savage [2] tarafından da etüd edilmiştir. Gans, sıfır olmayan bu non lineer tesirleri ele almış ve fakat p_1 teriminden daha ileriye gidemeyerek non lineer analizi tam değerlendirememiştir. Yaptığı deneyler sadece lineer terim p_0 ifadesini doğrulamakta ve böylece teori ancak lineer bölgede kontrol edilmiş olmaktadır.

Gans'dan bir adım daha ileriye giderek, Peube'ün işaret ettiği aksel (v) hızlarını da analize dahil etmek sureti ile, diferansiyel denklemi çözmek ve Gans'a göre olan farkları ortaya çıkarmak, eldeki bu çalışmanın amacını teşkil etmektedir. İlerde görüleceği üzere, bulunan p_0 değerlerinin Gans tarafından verilenlere oranı, $b = 0$ durumu, yani paralel plaklar için, ortalama 1,4 civarındadır. Bu sonuç aksel hızın ihmal edilmesinin sağlıklı olmadığını göstermektedir. $p = p_0 + R p_1' + \dots$ serisinde, p_1 non lineer terimi, Gans örneğinde olduğu gibi, negatif ve lineer p_0 terimine göre mutlak değerce çok küçük değildir. Artılı eksili ve mutlak değerce birbirinden çok farklı terimlerden oluşan yakınsak serilere örnek olarak $\cos x$ serisi gösterilebilir. $|x| < \infty$ için yakınsak olan bu seri, $x = 1,5 + 2\pi = 7,783185307$ radyan için açılırsa yavaş yakınsadığı görülebilir. İlk 13 terimle yetinilerek:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \frac{x^{14}}{14!} + \frac{x^{16}}{16!} - \frac{x^{18}}{18!} + \frac{x^{20}}{20!} - \frac{x^{22}}{22!} + \frac{x^{24}}{24!}$$

Tam değer ise :

$$\cos(1,5 + 2\pi) = 0,0707372 \quad (1.7)$$

Seriye açılarak :

$$\begin{aligned} \cos(1,5 + 2\pi) = & 1 - 30,28898676 + 152,9037865 - 308,7533844 + 333,9938276 - \\ & -224,8074361 + 103,1695372 - 34,33956864 + 8,6675895 - 1,715898717 + \\ & +0,273541229 - 0,035867041 + 3,936146217 \cdot 10^{-3} = 0,071076572 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Eldeki bu çalışmada (v) aksenal hızının işe dahil edilmesi sebebi ile ifadeler çok daha uzun çıkmaktadır. u_0 , p_0 , u_1 hesabından sonra $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ için bulunan uzun parametrik ifadenin integrali güç görüldüğünden “Mathematica” programı kullanılmak istenmiş, fakat netice vermemiştir. Bunun üzerine nümerik integrasyona baş vurmak zorunluğu doğmuştur. Görüldüğü gibi non lineer terimleri çoğaltmak matematik engellere takılmaktadır.

Gans’ın uyguladığı fark almak sureti ile iterasyona aşağıdaki örnek verilebilir:

$$2x + 3 = x^2 \text{ denklemini verilmiş olsun (kökleri 3 ve -1)}$$

$$x = x_0 + x_1 + \dots \text{ yazalım}$$

1.adım:

$$x = 0$$

$$3 = x_0^2 \quad (1.9)$$

$$2x_0 + 3 = x^2 \quad (1.10)$$

$$(1.10)-(1.9): \quad 2x_0 = x^2 - x_0^2 = (x_0 + x_1)^2 - x_0^2 = x_1^2 + 2x_0x_1$$

$$\text{buradan:} \quad x_1^2 + 2x_0x_1 - 2x_0 = 0$$

$$x_1 = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0} = -\sqrt{3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} = 0,81$$

2 adımla yetinerek:

$$x = x_0 + x_1 = \pm\sqrt{3} + 0,81 = \begin{cases} 2,54 \dots \dots (3 \text{ yerine}) \\ -0,92 \dots \dots (-1 \text{ yerine}) \end{cases}$$

Denklem direk iterasyon ile çözülsedyi:

x_i	0	$\sqrt{3}$	2,54	2,84	2,95	2,98	2,994	2,998	2,999	2,99978
x_{i+1}	$\sqrt{3}$	2,54	2,84	2,95	2,98	2,994	2,998	2,999	2,99978	2,9999

Gans'ın kullandığı iteratif yöntemin açıklanması:

Kısmi diferansiyel denklem:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.11)$$

$$u = u_0 + R u_1' + \dots \quad (1.12)$$

$$p = p_0 + R p_1' + \dots \quad (1.13)$$

$$R = \frac{\dot{m} h_c}{2 \pi \mu R_0^2} \quad (1.14)$$

olmak üzere $R p_1' = p_1$ ve $R u_1' = u_1$ ile gösterelim.

1.adım: $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ alalım ve bu ilk değerleri “0” indisi ile gösterelim.

(1.11) denklemi :

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \quad (1.15)$$

şeklini alır.

2.adım: (1.15) den bulunan $\rho u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}$ değerini (1.11) denkleminde taşıyalım:

$$\rho u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.16)$$

(1.16)-(1.15)şunu verir:

$$\rho u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(p - p_0) = R_0 \mu \frac{\partial^2 (u - u_0)}{\partial z^2}$$

veya

$$\rho u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (1.17)$$

İstenen yaklaşıklık sağlanıncaya kadar iterasyon adımlarına devam edilebilir:

$$\rho(u_0 + u_1) \frac{\partial(u_0 + u_1)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.18)$$

(1.18)-(1.17)-(1.15) :

$$\rho(u_0 + u_1) \frac{\partial(u_0 + u_1)}{\partial x} - \rho u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \quad (1.19)$$

böylece devam edilerek:

$$\rho(u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial(u_0 + u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.20)$$

(1.20)-(1.19)-(1.17)-(1.15):

$$\rho(u_0 + u_1 + u_2) \frac{\partial(u_0 + u_1 + u_2)}{\partial x} - \rho(u_0 + u_1) \frac{\partial(u_0 + u_1)}{\partial x} + \frac{\partial p_3}{\partial x} = R_0 \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \quad (1.21)$$

Çalışmanın analiz kısmında bütün hesaplar (in extenso) verilecektir. Nümerik uygulamalar, Comolet ve Gans deneyleri gözönüne alınarak, geometrik ve akışkan karakteristikleri olarak aşağıdaki değerler ile yapılacaktır. Akışkan olarak hava alınmıştır.

$$R_0 = 0,10m ; h_c = 0,001m ; b = 0,2$$

$$\dot{m} = 4,375.10^{-3} \frac{Ns}{m} ; \mu = 1,75.10^{-5} \frac{Ns}{m^2} ; \rho = 1,3 \frac{Ns^2}{m^4} \quad \left(\frac{\dot{m}}{\mu} = 250 \right) \quad (1.22)$$

$x = 0$ noktası singular olduğundan hesaplarda gözönüne alınmayacaktır. Nümerik entegrasyon “Matlab” programı ile yapılacaktır.

BÖLÜM 2. GÖZLEMLER [6]

Eksenel simetrik ve basınç altındaki bir yatağın merkezi basıncı ve plakların birbirinden ayrılması, yağlayıcının (hava) kütleli debisi ve yatak yükünün fonksiyonu olarak ölçülmüştür. $1,6 \cdot 10^{-3}$ lük bir ortalama yüzey eğiminin, merkezi basıncı ikiden büyük bir katsayı ile küçülterek ve sistemi harekete geçirmek için aşırı basınç ihtiyacını ortadan kaldırarak, yatağın davranışında çarpıcı bir fark meydana getirdiği gözlenmiştir. Sistemin davranışı analitik ve deneysel olarak etüd edilmiştir.

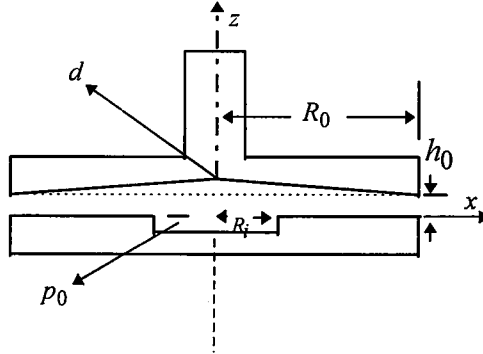
Varılan sonuçlar şöyledir :

- Bir havalı taşıyıcı sistemde, hafifçe içbükey bir aralık, basınç ihtiyacını önemli bir oranda azaltmaktadır.
- Sistemin kalkış ayrılması, yaklaşık olarak yükün toplam yüzey alanına bölünmesi ile bulunan çok düşük basınçlarda meydana gelmektedir.
- Düzensiz bir içbükeylik, basit bir koniklik yaklaşımı ile temsil edilmektedir.

Dinamik özellikler, titreşimler ve stabilite ilerde ele alınmak gerekir.

BÖLÜM 3. ANALİZ

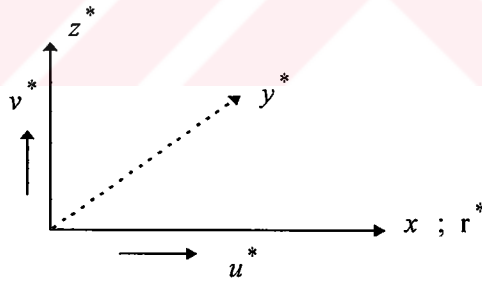
Savage tarafından verilen, paralel plaklar arası radyal akım analiz prensipleri izlenmiştir. Problemin geometrisi Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Sistem Şeması

Silindirik koordinatlar kullanılacaktır.

Boyutlu değerler (*) üst indisi ile, boyutsuz değerler düz olarak yazılacaktır. Radyal hız (u) dan başka eksenel (düşey) hız (v) de hesaba katılacaktır. Akışkan viskoz ve sıkıştırılamaz kabul edilecektir. Akım daimidir.



Şekil 3.2 Silindirik koordinatlar ve hızlar

Hareket denklemleri, boyutlu değişkenler ile:

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \rho v^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.1)$$

$$\rho u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \rho v^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \mu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.2)$$

$x = r^* / R_0$ yazarsak :

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + \rho R_0 v^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + R_0 \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.3)$$

$$\rho u^* \frac{\partial v^*}{\partial x} + \rho R_0 v^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = - R_0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + R_0 \mu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.4)$$

Akışkan sıkıştırılamaz olduğu için:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{u^*}{r^*} = 0 \quad (3.5)$$

veya

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + R_0 \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{u^*}{x} = 0 \quad (3.6)$$

(3.6) denkleminde:

$$R_0 \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{u^*}{x} \quad (3.7)$$

ve dolayısı ile

$$R_0 v^* = - \int \frac{\partial u^*}{\partial x} dz^* - \frac{1}{x} \int u^* dz^* = - \frac{\partial u^*}{\partial x} z^* + \int \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z^*} z^* dz^* - \frac{1}{x} \int u^* dz^* \quad (3.8)$$

Debi

$$q^* = \frac{\dot{m}}{\rho} = \int_0^h 2\pi r^* u^* dz^* = 2\pi R_0 x \int_0^h u^* dz^* \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{x} \int_0^h u^* dz^* = \frac{\dot{m}}{2R_0 x^2 \rho \pi} \quad (3.10)$$

yazılarak:

$$R_0 v^* = - z^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\dot{m}}{2\pi \rho R_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \int \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z^*} z^* dz^* \quad (3.11)$$

(3.11) ifadesi (3.3) ve (3.4) denklemlerine taşınarak

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \rho z^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \rho \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \int \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z^*} z^* dz^* - \frac{\dot{m}}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} =$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x} + R_0 \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \rho u^* \frac{\partial v^*}{\partial x} - \rho z^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \rho \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \int \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z^*} z^* dz^* - \frac{\dot{m}}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = \\ - R_0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + R_0 \mu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Halbuki:

$$\begin{aligned} \rho z^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \rho \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \int \frac{\partial^2 u^*}{\partial x \partial z^*} z^* dz^* = \\ - \rho z^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \rho \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \left(z^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \int \frac{\partial u^*}{\partial x} dz^* \right) = \rho \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \int \frac{\partial u^*}{\partial x} dz^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

Bu son $\rho \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \int \frac{\partial u^*}{\partial x} dz^*$ terimi şimdilik ihmal edilecek ve etkisi ilerde gösterilecektir. Aynı şekilde $\rho \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \int \frac{\partial u^*}{\partial x} dz^*$ terimi de ihmal edilecektir. O halde diferansiyel denklemler:

$$\rho u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\dot{m}}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = - \frac{\partial p^*}{\partial x} + R_0 \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.15)$$

$$\rho u^* \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\dot{m}}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = - R_0 \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + R_0 \mu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \quad (3.16)$$

(3.15) denkleminin (u) elde edildikten sonra (3.16) denkleminin (v) elde edilebilir. Amaç (u) radyal hızı vasıtası ile (p) basınçlarını ve (F) kaldırma kuvvetlerini elde etmek olduğundan, sadece (3.15) denkleminin integrasyonu ile yetinilecektir. Çözümde iteratif yöntem kullanılacaktır.

Boyutsuz değişkenler kullanılması:

$$u = u^* \frac{h_c^2}{q} = u^* \frac{\rho h_c^2}{\dot{m}} ; v = v^* \frac{h_c^2 \rho}{\dot{m}} ; z = \frac{z^*}{h_c}$$

$$p = p^* \frac{h_c^4}{\rho q^2} = p^* \frac{\rho h_c^4}{\dot{m}^2} ; F = F^* \frac{\rho h_c^4}{2\pi R_0^2 \dot{m}^2} \quad (3.17)$$

$$\text{Tarif olarak: } \zeta = \frac{h}{h_c} = 1 - bx ; b = \frac{d}{h_c} \quad (3.18)$$

Boyutsuz denklem:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_c}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \int \frac{\partial u}{\partial x} dz = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{R_0 \mu}{\dot{m}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \int \frac{\partial u}{\partial x} dz \text{ terimi } \frac{h_c}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \text{ terimi yanında şimdilik ihmal edildiğinden}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_c}{2\pi R_0 x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{R_0 \mu}{\dot{m}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (3.20)$$

İteratif yöntem kullanılarak, (3.20) denkleminde başlamak suretiyle, aşağıdaki iki denklem takımı arka arkaya çözülür.

$$\text{I. } \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{h_c}{2\pi R_0 x^2} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{R_0 \mu}{\dot{m}} \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} ; z = 0 ; \zeta \text{ için } u_0 = 0 \quad (3.21)$$

$$= 2\pi \frac{R_0}{h_c} x \int_0^{\zeta} u_0 dz ; \quad x = \text{ için } p_0 = 0 \quad (3.22)$$

$$F_0^* = 2\pi \frac{R_0^2 \dot{m}^2}{\rho h_c^4} \int_0^1 p_0 x \cdot dx \quad (3.23)$$

$$\text{II. } u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{h_c}{2\pi R_0 x^2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{R_0 \mu}{\dot{m}} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} ; z = 0 ; \zeta \text{ için } u_1 = 0 \quad (3.24)$$

$$0 = 2\pi \frac{R_0}{h_c} x \int_0^{\zeta} u_1 dz ; \quad x = \text{ için } p_1 = 0 \quad (3.25)$$

$$F_1^* = 2\pi \frac{R_0^2 \dot{m}^2}{\rho h_c^4} \int_0^1 p_1 x \cdot dx \quad (3.26)$$

I ve II takımları arasındaki bağıntı:

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + R u_1' + \dots \\
p &= p_0 + R p_1' + \dots \\
W &= F_0^* + R F_1'^* + \dots
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Boyutlar:

$$[\dot{m}] = \frac{Ns}{m} ; [F^*] = N ; [\mu] = \frac{Ns}{m^2} ; [\rho] = \frac{Ns^2}{m^4} \tag{3.28}$$

3.1 Lineer Analiz

(3.21) denklemi:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\dot{m}}{R_0 \mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0 \tag{3.29}$$

Şunları koyalım:

$$\alpha = \frac{\dot{m} h_c}{2 R_0^2 x^2 \mu \pi} \quad \beta = \frac{\dot{m}}{R_0 \mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} \tag{3.30}$$

p_0 sadece x ile değiştiğinden ve β sadece x in fonksiyonlarıdır.

(3.21) denklemi şu şekli alır:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial u_0}{\partial z} - \beta = 0 \tag{3.31}$$

$$\text{Buradan} \quad u_0 = C e^{-\alpha z} + \frac{\beta}{\alpha} z + D \tag{3.32}$$

bulunur.

Kontrol edelim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_0}{\partial z} &= -C \alpha e^{-\alpha z} + \frac{\beta}{\alpha} ; & \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} &= C \alpha^2 e^{-\alpha z} \\
C \alpha^2 e^{-\alpha z} - C \alpha^2 e^{-\alpha z} + \beta - \beta &= 0
\end{aligned}$$

Integral sabitleri:

$$z = 0 \text{ için } u_0 = C + D = 0 \dots \dots \dots D = -C$$

$$z = \zeta \text{ için } u_0 = Ce^{-\zeta\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\zeta - C = 0$$

buradan
$$C = \frac{\frac{\beta}{\alpha}\zeta}{1 - e^{-\alpha\zeta}}$$

O halde:

$$u_0 = -\frac{\beta}{\alpha}\zeta \cdot \frac{(1 - e^{-\alpha\zeta})}{1 - e^{-\zeta\alpha}} + \frac{\beta}{\alpha}z \quad (3.33)$$

Halbuki

$$\zeta = 1 - bx \quad (3.34)$$

$$u_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(1 - bx) \cdot \frac{1 - e^{-\frac{mh_c}{2\pi R_0^2 \mu x^2} z}}{\frac{mh_c(1 - bx)}{1 - e^{-\frac{mh_c}{2\pi R_0^2 \mu x^2}}}} + 2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} z \quad (3.35)$$

veya

$$u_0 = -2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 (1 - bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot \frac{\left(1 - e^{-\frac{mh_c}{2\pi R_0^2 \mu x^2} z}\right)}{\left(\frac{mh_c(1 - bx)}{1 - e^{-\frac{mh_c}{2\pi R_0^2 \mu x^2}}}\right)} + 2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} z \quad (3.36)$$

Kontrol:

$$z = 0 \text{ için } u_0 = 0$$

$$z = \zeta = 1 - bx \text{ için ;}$$

$$u_0 = -2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 (1 - bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} + 2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 (1 - bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$$

(3.33) ifadesi (3.22) denklemine konulursa:

$$2\pi \frac{R_0}{h_c} x \int_0^{\zeta} \frac{\beta}{\alpha} \left(-\zeta \frac{1 - e^{-\alpha z}}{1 - e^{-\alpha\zeta}} + z \right) dz =$$

$$2\pi \frac{R_0}{h_c} x \frac{\beta}{\alpha} \left| -\frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha\zeta}} \left(z + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \right) + \frac{z^2}{2} \right|_0^{\zeta} = 1$$

$$2\pi \frac{R_0}{h_c} x \frac{\beta}{\alpha} \left[\frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha\zeta}} \left(-\zeta + \frac{1 - e^{-\alpha\zeta}}{\alpha} \right) + \frac{\zeta^2}{2} \right] = \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{1}{2\pi^2 \frac{R_0^2}{h_c^2} x^3 (1 - bx) \left[\frac{4\pi R_0^2 \mu x^2}{\dot{m} h_c} - \frac{2(1 - bx)}{1 - e^{-\frac{\dot{m} h_c (1 - bx)}{2\pi R_0^2 \mu x^2}}} + (1 - bx) \right]} \quad (3.38)$$

Şöyle gösterelim:

$$\gamma = \frac{4\pi R_0^2}{\frac{\dot{m}}{\mu} h_c} \quad (3.39)$$

Seçilen tipik örnek için:

$$\frac{\dot{m} h_c (1 - bx)}{2\pi R_0^2 \mu x^2} = \frac{4,375 \cdot 10^{-3} \cdot 0,001 (1 - 0,2x)}{2\pi \cdot 0,10^2 \cdot 1,75 \cdot 10^{-5} x^2} = 3,98 \frac{(1 - 0,2x)}{x^2}$$

Bu oranın en küçük değeri $x=1,0$ için meydana gelir:

$$\frac{3,98 \cdot 0,8}{1,0^2} = 3,183$$

$$- e^{-3,183} = 0,96 \approx 1,0 \text{ kabul edilebilir.}$$

O halde:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{1}{2\pi^2 \frac{R_0^2}{h_c^2}} \cdot \frac{1}{x^3 (1 - bx) (\gamma x^2 + bx - 1)} \quad (3.40)$$

Sağ taraf kısmi kesirlere ayrılarak:

$$\frac{1}{x^3 (1 - bx) (\gamma x^2 + bx - 1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Db}{1 - bx} + \frac{E\gamma}{x - x_1} + \frac{F\gamma}{x - x_2} \quad (3.41)$$

Burada:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left(-b + \sqrt{b^2 + 4\gamma} \right) / (2\gamma) \\ \left(-b - \sqrt{b^2 + 4\gamma} \right) / (2\gamma) \end{matrix} \right\} \quad (3.42)$$

$$A = - \quad ; \quad B = -2b \quad ; \quad C = -\gamma - 3b^2 \quad ; \quad D = -b^4 / \gamma$$

$$E\gamma = - \frac{3\gamma b + 4b^3 + b^5 / \gamma + (\gamma^2 + 3\gamma b^2 + b^4)x_1}{\gamma(x_2 - x_1)}$$

$$F\gamma = \frac{3\gamma b + 4b^3 + b^5 / \gamma + (\gamma^2 + 3\gamma b^2 + b^4)x_2}{\gamma(x_2 - x_1)}$$

3.1.1 Basınç belirlenmesi

Kısmî kesirler entegre edilerek:

$$\int \frac{A}{x^3} dx = -\frac{A}{2x^2} \quad ; \quad \int \frac{B}{x^2} dx = -\frac{B}{x} \quad ; \quad \int \frac{C}{x} dx = C \log x$$

$$\int -\frac{Db}{1-bx} dx = D \log(1-bx) \quad ; \quad \int \frac{E\gamma}{x-x_1} dx = E\gamma \log(x-x_1)$$

$$\int \frac{F\gamma}{x-x_2} dx = F\gamma \log(x-x_2)$$

$$p_0 = \frac{2\mu h_c}{\gamma \pi \dot{m}} \left[-\frac{A}{2x^2} - \frac{B}{x} + C \log x + D \log(1-bx) + E\gamma \log(x-x_1) + F\gamma \log(x-x_2) + K \right]$$

$x =$ için $p_0 = 0$

$$p_0 = \frac{2\mu h_c}{\gamma \pi \dot{m}} \left(-\frac{A}{2} \cdot \frac{1-x^2}{x^2} - B \frac{1-x}{x} + C \log x + D \log \frac{1-bx}{1-b} + E\gamma \log \frac{x-x_1}{1-x_1} + F\gamma \log \frac{x-x_2}{1-x_2} \right)$$

$$\Gamma_0 = -\frac{A}{2} \cdot \frac{1-x^2}{x^2} - B \frac{1-x}{x} + C \log x + D \log \frac{1-bx}{1-b} +$$

$$E\gamma \log \frac{x-x_1}{1-x_1} + F\gamma \log \frac{x-x_2}{1-x_2} \quad (3.43)$$

dersek:

$$p_0 = \frac{2\mu h_c}{\gamma\pi\dot{m}} \cdot \Gamma_0(\gamma, b, x) = \frac{h_c^2}{2\pi^2 R_0^2} \Gamma_0(\gamma, b, x) \quad (3.44)$$

$b=0$ yani disklerin aralığı sabit $= h_0$ olması durumunda

$$\Gamma_0 = \frac{1-x^2}{2x^2} - \gamma \log x - \gamma \frac{x_1}{x_2 - x_1} \log \frac{x-x_1}{1-x_1} + \gamma \frac{x_2}{x_2 - x_1} \log \frac{x-x_2}{1-x_2}$$

halbuki $x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1-x^2}{2x^2} - \gamma \log x + \frac{\gamma}{2} \log \frac{x-x_1}{1-x_1} + \frac{\gamma}{2} \log \frac{x-x_2}{1-x_2} = \\ &= \frac{1-x^2}{2x^2} - \frac{\gamma}{2} \log \frac{x^2(1-x_1)(1-x_2)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1-x^2}{2x^2} - \frac{\gamma}{2} \log \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}{x^2 - \frac{1}{\gamma}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Boyutlu değer:

$$p_0^* = \frac{\dot{m}^2}{\rho h_c^4} \cdot \frac{2\mu h_c}{\gamma\pi\dot{m}} \Gamma_0 = \frac{2\mu\dot{m}}{\gamma\pi\rho h_c^3} \left[\frac{1-x^2}{2x^2} - \frac{\gamma}{2} \log \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}{x^2 - \frac{1}{\gamma}} \right] \quad (3.46)$$

Gans'ın verdiği değer:

$$p_0^* = \frac{6\mu\dot{m}}{\pi\rho h_c^3} (-\log x) \quad (3.47)$$

$$i = \frac{p_0^*(S.C.)}{p_0^*(Gans)} = \frac{1}{6\log x} \left[\log \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)}{x^2 - \frac{1}{\gamma}} - \frac{1-x^2}{\gamma x^2} \right] \quad (3.48)$$

Tablo 3-1 $b=0$ için (i) değerleri

x	0,01	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,22
i	720,22	14,63	12,65	11,09	9,84	8,83	7,99	7,28	6,68	6,17	5,73	5,35	4,71
x	0,24	0,26	0,28	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,999		
i	4,21	3,81	3,48	3,21	2,34	1,90	1,65	1,50	1,40	1,35	1,33		

$$\frac{1}{1,0} \int_{0,1}^{1,0} i \cdot dx = 2,5$$

Tipik örnekte:

$$\begin{aligned} A &= - & B &= -0,4 & C &= -0,62265482 & D &= -3,18309886 \cdot 10^{-3} \\ E\gamma &= 0,502615912 & F\gamma &= 0,123222008 & \gamma &= 0,502654824 \\ x_1 &= 1,225491429 & x_2 &= -1,62337878 \end{aligned}$$

Tablo 3-2 p_0 ve $0,574 p_0$ değerleri

(İleride görüleceği üzere $0,574$ indirgeme katsayısı kullanılarak, $b = 0,2$ için)

x	p_0	$0,574 p_0$
0,1	$2,800991026 \cdot 10^{-4}$	$160,7768849 \cdot 10^{-6}$
0,2	$7,760191425 \cdot 10^{-5}$	$44,54349878 \cdot 10^{-6}$
0,3	$3,753698844 \cdot 10^{-5}$	$21,54623136 \cdot 10^{-6}$
0,4	$2,236832771 \cdot 10^{-5}$	$12,83942011 \cdot 10^{-6}$
0,5	$,465353012 \cdot 10^{-5}$	$8,411126289 \cdot 10^{-6}$
0,6	$9,9585126 \cdot 10^{-6}$	$5,716186232 \cdot 10^{-6}$
0,7	$6,707294193 \cdot 10^{-6}$	$3,849986867 \cdot 10^{-6}$
0,8	$4,201824378 \cdot 10^{-6}$	$2,411847193 \cdot 10^{-6}$
0,9	$2,06163917 \cdot 10^{-6}$	$1,183380884 \cdot 10^{-6}$
1,0	0	0

3.1.2 Kuvvet belirlenmesi

(3.44) denklemini (3.23) ifadesine taşıyalım: Boyut $[F_0^*] = N$

$$F_0^* = \frac{2\pi R_0^2 \dot{m}^2}{\rho h_c^4} \int_0^1 p_0 x \cdot dx = \frac{4\mu R_0^2 \dot{m}}{\gamma \rho h_c^3} \int_0^1 \Gamma_0 x \cdot dx =$$

$$\frac{4\mu R_0^2 \dot{m}}{\gamma \rho h_c^3} \left[-\frac{A}{2} \int \frac{1-x^2}{x} dx - B \int (1-x) dx + C \int x \log x dx + \right. \\ \left. + D \int x \log \frac{1-bx}{1-b} dx + E\gamma \int x \log \frac{x-x_1}{1-x_1} dx + \right. \\ \left. + F\gamma \int x \log \frac{x-x_2}{1-x_2} dx \right] \quad (3.49)$$

İntegralleri çözelim:

$$\frac{A}{2} \int \frac{1-x^2}{x} dx = -\frac{A}{2} \left(\log x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$B \int (1-x) dx = -Bx \left(1 - \frac{x}{2} \right)$$

$$C \int x \log x dx = C \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right)$$

$$D \int x \log \frac{1-bx}{1-b} dx = D \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{1-bx}{1-b} - \frac{1}{2b^2} \log(1-bx) + \right. \\ \left. + \frac{3-2bx-b^2x^2}{4b^2} \right]$$

$$E\gamma \int x \log \frac{x-x_1}{1-x_1} dx = E\gamma \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{x-x_1}{1-x_1} - \frac{x_1^2}{2} \log(x-x_1) - x_1(x-x_1) - \right. \\ \left. - \frac{(x-x_1)^2}{4} \right]$$

$$F\gamma \int x \log \frac{x-x_2}{1-x_2} dx = F\gamma \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{x-x_2}{1-x_2} - \frac{x_2^2}{2} \log(x-x_2) - x_2(x-x_2) - \right. \\ \left. - \frac{(x-x_2)^2}{4} \right]$$

$$F_0^* = \frac{4R_0^2 \dot{m} \mu}{\gamma \rho h_c^3} \cdot \phi_0(\gamma, b, x) \quad (3.50)$$

ile gösterirsek:

$$\phi_0 = -\frac{A}{2} \left(\log x - \frac{x^2}{2} \right) - Bx \left(1 - \frac{x}{2} \right) + C \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& D \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{1-bx}{1-b} - \frac{1}{2b^2} \log(1-bx) + \frac{3-2bx-b^2x^2}{4b^2} \right] + \\
& E \gamma \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{x-x_1}{1-x_1} - \frac{x_1^2}{2} \log(x-x_1) - x_1(x-x_1) - \frac{(x-x_1)^2}{4} \right] + \\
& F \gamma \left[\frac{x^2}{2} \log \frac{x-x_2}{1-x_2} - \frac{x_2^2}{2} \log(x-x_2) - x_2(x-x_2) - \frac{(x-x_2)^2}{4} \right] + K
\end{aligned}$$

$x = 1,0$ için $\phi_0 = 0$ kabulü ile:

$$\begin{aligned}
\phi_0(\gamma, b, x) = & -\frac{A}{4}(1+2\log x-x^2) + \frac{B}{2}(1-x)^2 + \frac{C}{4}(1+2x^2\log x-x^2) - \\
& -D \left\{ \frac{1-b^2x^2}{2b^2} \cdot \log \frac{1-bx}{1-b} - \frac{1-x}{4b} [2+b(1+x)] \right\} + \\
& +E\gamma \left[\frac{x^2-x_1^2}{2} \log \frac{x-x_1}{1-x_1} + x_1(1-x) + \frac{1-x}{4}(1-2x_1+x) \right] + \\
& +F\gamma \left[\frac{x^2-x_2^2}{2} \log \frac{x-x_2}{1-x_2} + x_2(1-x) + \frac{1-x}{4}(1-2x_2+x) \right] \quad (3.51)
\end{aligned}$$

$x = 0$ singüler bir nokta olduğundan, alt limit olarak $x_i < <$ alalım:

$$F_0^* = \frac{4\mu\dot{m}R_0^2}{\gamma\rho h_c^3} \left[(\phi_0)_{x=1} - (\phi_0)_{x=x_i} \right] = -\frac{4\mu\dot{m}R_0^2}{\gamma\rho h_c^3} (\phi_0)_{x=x_i} \quad (3.52)$$

Seçilen tipik örnek için:

$$\frac{4\mu\dot{m}R_0^2}{\gamma\rho h_c^3} = \frac{\dot{m}^2}{\pi\rho h_c^2} = 4,686653973$$

$$(\phi_0)_{x=x_i=0,1} = -1,405326318$$

$$F_0^* = 4,686653973 \cdot 1,405326318 = 6,58627817 \quad N$$

Gans şöyle vermektedir :

$$(F_0^*)_{Gans} = \frac{3\mu\dot{m}R_0^2}{\rho h_c^3} \left\{ 1 - x_i^2 + \frac{2}{1-b} - \frac{2x_i^2}{1-bx_i} + \frac{1}{(1-b)^2} - \frac{x_i^2}{(1-bx_i)^2} - \right. \\
\left. - \frac{1-x_i}{(1-b)(1-bx_i)} [3(1+x_i) - b(1+4x_i) + b^2x_i] \right\} \quad (3.53)$$

Tipik örnek ve $x_i = 0$, için :

$$(F_0^*)_{Gans} = \frac{3\mu m R_0^2}{\rho h_c^3} \cdot 1,550250937$$

$$\frac{F_0^*(\text{Ş.C})}{F_0^*(Gans)} = \frac{4}{3\gamma} \cdot \frac{1,405326318}{1,550250937} = 2,40$$

3.2 Karşılaştırma

(3.19) denklemindeki ihmal edilen $I = -\frac{\partial u}{\partial z} \int \frac{\partial u}{\partial x} dz$ terimi ile korunan

$J = -\frac{h_c}{2\pi R_0} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial z}$ terimi arasındaki oranı etüd edelim :

Evvelce belirtildiği gibi $-e^{-\frac{mh_c(1-bx)}{2\pi R_0^2 \mu x^2}} \approx 1,0$ olduğunu gözönünde tutarak (3.36) ve (3.40) denklemlerinden ve u serisinin sadece ilk lineer terimi ile yetinilerek:

$$u = 2\pi \frac{R_0}{h_c} \cdot \frac{1}{2\pi^2 \frac{R_0^2}{h_c^2}} \cdot \frac{1}{x^3(1-bx)(\gamma x^2 + bx - 1)} \left[-x^2(1-bx) \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) + x^2 z \right] \quad (3.54)$$

$b \approx 0$ alındığı takdirde $(\gamma x^2 - 1)$ in ortalama değeri :

$$\frac{1}{(1-0,1)} \int_{0,1}^{1,0} (\gamma x^2 - 1) dx = \frac{1}{0,9} \left[\frac{\gamma x^3}{3} - x \right]_{0,1}^{1,0} = \frac{1}{0,9} \left(\frac{\gamma}{3} - 1 - \frac{\gamma}{3} \cdot 10^{-3} + 0,1 \right) = \frac{\gamma}{2,7} - 1$$

Tipik örnek için $\frac{\gamma}{2,7} - 1 = 0,186 - 1 = -0,814 \approx -1,0$

Bu yaklaşıklıkla :

$$u = -\frac{h_c}{\pi R_0} \cdot \frac{1}{x} \left(-1 + e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} + z \right) \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{h_c}{\pi R_0 x} \cdot \left(-\frac{2}{\gamma x^2} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} + 1 \right) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{h_c}{\pi R_0} \left[\left(-\frac{1}{x^2} \right) - 1 + e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} + z + \frac{1}{x} \left(\frac{2z}{\gamma} \cdot \frac{2}{x^3} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) \right] = \\
&= -\frac{h_c}{\pi R_0 x^2} \left[1 - z - \left(1 - \frac{4z}{\gamma x^2} \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right] \\
\int \frac{\partial u}{\partial x} dz &= -\frac{h_c}{\pi R_0 x^2} \left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{\gamma x^2}{2} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} + \frac{4}{\gamma x^2} \int z e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} dz \right]
\end{aligned}$$

Halbuki:

$$\int z e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} dz = -\frac{\gamma x^2}{2} \left(z + \frac{\gamma x^2}{2} \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}}$$

O halde :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial u}{\partial x} dz &= -\frac{h_c}{\pi R_0 x^2} \left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{\gamma x^2}{2} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} - 2 \left(z + \frac{\gamma x^2}{2} \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right] = \\
&= -\frac{h_c}{\pi R_0 x^2} \left[z - \frac{z^2}{2} - \left(\frac{\gamma x^2}{2} + 2z \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right] \tag{3.56}
\end{aligned}$$

$$I = -\frac{\partial u}{\partial z} \int \frac{\partial u}{\partial x} dz = -\frac{h_c^2}{\pi^2 R_0^2 x^3} \left(1 - \frac{2}{\gamma x^2} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) \left[z - \frac{z^2}{2} - \left(\frac{\gamma x^2}{2} + 2z \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right] \tag{3.57}$$

$$J = -\frac{h_c}{2\pi R_0 x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{h_c^2}{2\pi^2 R_0^2 x^3} \left(1 - \frac{2}{\gamma x^2} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) \tag{3.58}$$

Oran:

$$i = \frac{I}{J} = -2z + z^2 + (\gamma x^2 + 4z) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\zeta} idz &= \left[-z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{\gamma^2 x^4}{2} e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} - 2\gamma x^2 \left(\frac{\gamma x^2}{2} + z \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right]_0^{\zeta} = \\ &= \left[-z^2 + \frac{z^3}{3} - \gamma x^2 \left(\frac{3}{2} \gamma x^2 + 2z \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right]_0^{\zeta} = \\ &= -\zeta^2 + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{3}{2} \gamma^2 x^4 - \gamma x^2 \left(\frac{3}{2} \gamma x^2 + 2\zeta \right) e^{\frac{-2\zeta}{\gamma x^2}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

burada $\zeta = 1 - bx$ olduğunu hatırlayalım.

Tipik örnekte:

$$\gamma x^2 \left(\frac{3}{2} \gamma x^2 + 2\zeta \right) e^{\frac{-2\zeta}{\gamma x^2}} \text{ değeri çok küçüktür:}$$

$x = 0,1$ için bu değer0

$x = 1,0$ için-0,049

Bu terim ihmal edilerek:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1,0} \int_{0,1}^1 \left(\int_0^{\zeta} idz \right) dx &= \frac{1}{1,0} \int_{0,1}^1 \left[-\frac{1}{3} (1 - bx)^2 (2 + bx) + \frac{3}{2} \gamma^2 x^4 \right] dx = \\ \frac{1}{1,0} \int_{0,1}^1 \left(-\frac{2}{3} + bx - \frac{b^3 x^3}{3} + \frac{3}{2} \gamma^2 x^4 \right) dx &= \frac{1}{1,0} \left[-\frac{2}{3} x + \frac{bx^2}{2} - \frac{b^3 x^4}{12} + 0,3 \gamma^2 x^5 \right]_{0,1}^1 = -0,426 \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, I teriminin etkisi, J teriminin ters yönünde ve mutlak değerce onun % 43 ü kadardır. Halbuki J terimi, bu çalışmanın, Gans değerlerine göre farkını oluşturmaktadır. Demek ki p_0 ve F_0^* değerlerinde, Gans değerlerine nazaran,

gözlenen 2,5 ve 2,4 kat fazlalıkların $1-0,426=0,574$ oranında azaltılarak, yaklaşık ortalama bir fazlalık elde edilmesi düşünülebilir.

Böylece:

$$p_0 \text{ için } \dots\dots\dots 0,574 \cdot 2,5 = 1,43$$

$$F_0^* \text{ için } \dots\dots\dots 0,574 \cdot 2,4 = 1,38$$

3.3 Nonlinear Düzeltme Terimleri

3.3.1 Hız düzeltmesi : (3.24) denklemi:

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{h_c}{2\pi R_0 x^2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{R_0 \mu}{\dot{m}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}$$

Sınır şartları : $z = 0$; ζ için $u_1 = 0$

(3.36) denklemi :

$$u_0 = -2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 (1-bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \frac{z}{x^2}}}{1 - e^{-\frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \frac{(1-bx)}{x^2}}} + 2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot z - e^{-\frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \frac{(1-bx)}{x^2}} \approx 1,0 \text{ olduğu hatırlanarak ve } \frac{2}{\gamma} = \frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \text{ işe dahil edilerek}$$

:

$$u_0 = 2\pi \frac{R_0}{h_c} \left[-x^2 (1-bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{2z}{\gamma x^2}} \right) + x^2 \cdot \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot z \right] \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 2\pi \frac{R_0}{h_c} \left[-2x(1-bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{2z}{\gamma x^2}} \right) + bx^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} \left(1 - e^{-\frac{2z}{\gamma x^2}} \right) - \right.$$

$$\left. -x^2 (1-bx) \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \left(1 - e^{-\frac{2z}{\gamma x^2}} \right) + \frac{4z}{\gamma x} (1-bx) \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot e^{-\frac{2z}{\gamma x^2}} + \right.$$

$$\left[2x \frac{\partial p_0}{\partial x} \cdot z + x^2 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \cdot z \right] \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = & 4\pi^2 \frac{R_0^2}{h_c^2} \left\{ 2x^3 (1-bx)^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right)^2 - \right. \\ & -bx^4 (1-bx) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right)^2 + \\ & \left. \frac{x^4}{2} (1-bx)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right)^2 - \right. \\ & - \frac{4}{\gamma} x (1-bx)^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \cdot z - \\ & - 4x^3 (1-bx) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) z + bx^4 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) z - \\ & - x^4 (1-bx) \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 - e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} \right) z + \frac{4}{\gamma} x (1-bx) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 e^{\frac{-2z}{\gamma x^2}} z^2 + \\ & \left. 2x^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 z^2 + \frac{x^4}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] z^2 \right\} = 4\pi^2 \frac{R_0^2}{h_c^2} \cdot F(z) \end{aligned} \quad (3.63)$$

(3.24) denklemi :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\dot{m}}{R_0 \mu} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\dot{m}}{R_0 \mu} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (3.64)$$

Eskisi gibi gene : $\gamma = \frac{4\pi R_0^2}{h_c \frac{\dot{m}}{\mu}}$ ve $\zeta = 1 - bx$

$$\alpha(x) = \frac{\dot{m} h_c}{2\pi R_0^2 \mu} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{\gamma x^2} \quad ; \quad \beta(x) = \frac{\dot{m}}{R_0 \mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad ;$$

ve şimdi ilaveten $\delta = \frac{4\pi^2 R_0 \dot{m}}{\mu h_c^2} = \frac{\pi \frac{\dot{m}^2}{\mu^2}}{R_0 h_c} \gamma$ (3.65)

dersek :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial z} - \delta \cdot F(z) - \beta = 0 \quad (3.66)$$

$$Z(z) = \delta \cdot F(z) + \beta \text{ yazarsak} \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial z} = Z(z) \quad (3.68)$$

bulunur. Bu, 2. mertebeden, lineer ve sabit katsayılı, sağ taraflı (homogen olmayan) bir diferansiyel denklemdir.

Homogenin genel çözümü :

$$(u_1)_\lambda = e^{r_\lambda z} \text{ ile}$$

$$r_\lambda^2 + \alpha r_\lambda = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -\alpha \end{cases}$$

$$u_1 = C_1 e^{-\alpha z} + C_2$$

burada C_1 ve C_2 sabit olmayıp (z) in fonksiyonlarıdır ve türevleri şu ifadelerle bulunur:

$$C_1 e^{-\alpha z} + C_2 = 0$$

$$C_1 \alpha e^{-\alpha z} = Z(z)$$

buradan :

$$C_1 = -\frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz + D$$

$$C_2 = \frac{1}{\alpha} \int Z(z) dz + E$$

ve

$$u_1 = -\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz + D e^{-\alpha z} + \frac{1}{\alpha} \int Z(z) dz + E \quad (3.62)$$

Kontrol:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \cdot e^{\alpha z} \cdot Z(z) + e^{-\alpha z} \int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz - D \alpha e^{-\alpha z} + \frac{1}{\alpha} \cdot Z(z) \\ &= e^{-\alpha z} \left[\int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz - D \alpha \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = e^{-\alpha z} \cdot e^{\alpha z} \cdot Z(z) - \alpha e^{-\alpha z} \int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz + D \alpha^2 e^{-\alpha z} =$$

$$Z(z) - \alpha e^{-\alpha z} \left[\int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz + D \alpha^2 \cdot e^{-\alpha z} \right]$$

Bunlar (3.68) de yerine konulursa :

$$\alpha \cdot e^{-\alpha z} \cdot \int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz - D \alpha^2 e^{-\alpha z} + Z(z) - \alpha e^{-\alpha z} \int e^{\alpha z} \cdot Z(z) dz + D \alpha^2 \cdot e^{-\alpha z} = Z(z)$$

Şimdi $\int F(z) dz$ ve $\int e^{\alpha z} \cdot F(z) dz$, (3.63) denklemindeki $F(z)$ ifadesinden giderek hesaplanmalıdır. x fonksiyonu katsayılar ayrık tutularak şu integraller bulunacaktır :

$$1) \int (1 - e^{-\alpha z})^2 dz = \int (1 - 2e^{-\alpha z} + e^{-2\alpha z}) dz = z + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha z} - \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha}$$

$$2) \int e^{\alpha z} (1 - e^{-\alpha z})^2 dz = \int (e^{\alpha z} - 2 + e^{-\alpha z}) dz = \frac{e^{\alpha z}}{\alpha} - 2z - \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha}$$

$$3) \int (1 - e^{-\alpha z}) z \cdot dz = \int (z - z e^{-\alpha z}) dz = \frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2}$$

$$4) \int e^{\alpha z} (1 - e^{-\alpha z}) z \cdot dz = \int (z e^{\alpha z} - z) dz = -\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{\alpha z} - \frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2}$$

$$5) \int z^2 dz = \frac{z^3}{3}$$

$$6) \int e^{\alpha z} \cdot z^2 \cdot dz = \frac{z^2}{\alpha} e^{\alpha z} - \frac{2z}{\alpha^2} e^{\alpha z} + \frac{2e^{\alpha z}}{\alpha^3}$$

$$7) \int e^{-\alpha z} \cdot z^2 \cdot dz = -\frac{z^2}{\alpha} e^{-\alpha z} - \frac{2z}{\alpha^2} e^{-\alpha z} - \frac{2e^{-\alpha z}}{\alpha^3}$$

$$8) \int e^{-\alpha z} \cdot z^2 \cdot e^{\alpha z} \cdot dz = \frac{z^3}{3}$$

$$9) \int (1 - e^{-\alpha z}) e^{-\alpha z} \cdot z \cdot dz = -\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \left(z + \frac{1}{2\alpha} \right)$$

$$10) \int (1 - e^{-\alpha z}) e^{-\alpha z} \cdot z \cdot e^{\alpha z} \cdot dz = \frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2}$$

K_1 ve K_2 integral sabitleri olmak üzere (3.69) denklemi:

$$u_1 = -e^{-\alpha z} \left[\frac{\delta}{\alpha} \int e^{\alpha z} \cdot F(z) dz + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha z} + K_1 \right] + \frac{\delta}{\alpha} \int F(z) dz + \frac{\beta}{\alpha} z + K_2 \quad (3.70)$$

(3.63) denkleminde giderek $F(z)$ ifadesi :

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 - e^{-\alpha z})^2 \left\{ 2x^3 \zeta^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 - bx^4 \cdot \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x^4}{2} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \\ & (1 - e^{-\alpha z}) e^{-\alpha z} \left[\frac{4}{\gamma} x \zeta^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] - (1 - e^{-\alpha z}) z \left\{ 4x^3 \zeta \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 - bx^4 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. x^4 \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + e^{-\alpha z} z^2 \left[\frac{4}{\gamma} x \zeta \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] + z^2 \left\{ 2x^3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x^4}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = \\ & (1 - e^{-\alpha z})^2 x^3 \zeta \left\{ (2 - 3bx) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - z(1 - e^{-\alpha z}) e^{-\alpha z} x \frac{4}{\gamma} \zeta^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 - \\ & z(1 - e^{-\alpha z}) x^3 \left\{ \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 (4 - 5bx) + x \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + z^2 \cdot e^{-\alpha z} \cdot x \cdot \frac{4}{\gamma} \zeta \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$z^2 x^3 \left\{ 2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}. \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha z} \cdot F(z) dz = & x^3 \zeta \left\{ (2 - 3bx) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left(\frac{e^{\alpha z}}{\alpha} - 2z - \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \right) - \\ & x \frac{4}{\gamma} \zeta^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2} \right) - \\ & x^3 \left\{ \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 (4 - 5bx) + x \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{\alpha z} - \frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2} \right) + \\ & x \frac{4}{\gamma} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{z^3}{3} + x^3 \left\{ 2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left(\frac{z^2}{\alpha} e^{\alpha z} - \frac{2z}{\alpha^2} e^{\alpha z} + \frac{2e^{\alpha z}}{\alpha^3} \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \int F(z) dz = & x^3 \zeta \left\{ (2 - 3bx) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left(z + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha z} - \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \right) - \\ & \frac{4}{\gamma} \zeta^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left[-\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \left(z + \frac{1}{2\alpha} \right) \right] - \\ & x^3 \left\{ \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 (4 - 5bx) + x \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \cdot \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2} \right) + \\ & x \frac{4}{\gamma} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \cdot \left(-\frac{z^2}{\alpha} e^{-\alpha z} - \frac{2z}{\alpha^2} e^{-\alpha z} - \frac{2e^{-\alpha z}}{\alpha^3} \right) + \\ & x^3 \left\{ 2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \cdot \frac{z^3}{3} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Şunları koyalım:

$$H_1(x) = x^3 \zeta \left\{ \left(-1 + 3\zeta \right) \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} H'_1(x)$$

$$H_2(x) = -x \frac{4}{\gamma} \zeta^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} H'_2(x)$$

$$H_3(x) = -x^3 \left\{ \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 (-1 + 5\zeta) + x \zeta \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} H'_3(x)$$

$$H_4(x) = x \frac{4}{\gamma} \zeta \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} H'_4(x)$$

$$H_5(x) = x^3 \left\{ 2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} H'_5(x) \quad (3.74)$$

(3.70) denklemi

$$\begin{aligned} u_1 = -e^{-\alpha z} & \left\{ \frac{\delta}{\alpha} \left[H_1(x) \left(\frac{e^{\alpha z}}{\alpha} - 2z - \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \right) + H_2(x) \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2} \right) + \right. \right. \\ & + H_3(x) \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{\alpha z} - \frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2} \right) + H_4(x) \cdot \frac{z^3}{3} + \\ & \left. \left. + H_5(x) \left(\frac{z^2}{\alpha} e^{\alpha z} - \frac{2z}{\alpha^2} e^{\alpha z} + \frac{2e^{\alpha z}}{\alpha^3} \right) \right] + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha z} + K_1 \right\} + \\ & + \frac{\delta}{\alpha} \left\{ H_1(x) \left(z + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha z} - \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \right) + H_2(x) \left[-\frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \left(z + \frac{1}{2\alpha} \right) \right] + \right. \\ & + H_3(x) \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} e^{-\alpha z} + \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha^2} \right) + H_4(x) \left(-\frac{z^2}{\alpha} e^{-\alpha z} - \frac{2z}{\alpha^2} e^{-\alpha z} - \frac{2e^{-\alpha z}}{\alpha^3} \right) + \\ & \left. \left. + H_5(x) \frac{z^3}{3} \right\} + \frac{\beta}{\alpha} z + K_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\alpha} \left\{ H_1(x) \left[z - \frac{1}{\alpha} + 2 \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha z} + \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \right] - \right. \\
& - H_2(x) \left[\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} \left(1 + \frac{e^{-\alpha z}}{2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \frac{3}{4} e^{-\alpha z} \right) \right] e^{-\alpha z} + \\
& + H_3(x) \left[\frac{z^2}{2} \left(1 + e^{-\alpha z} \right) - \frac{1}{\alpha} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha z} \right] - \\
& - H_4(x) \left[z^2 \left(\frac{z}{3} + \frac{1}{\alpha} \right) + \frac{2}{\alpha^2} \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) \right] e^{-\alpha z} + \\
& \left. + H_5(x) \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{\alpha} + \frac{2z}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \right\} + \frac{\beta}{\alpha} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right) - K_1 e^{-\alpha z} + K_2
\end{aligned} \tag{3.75}$$

β yerine konarak ve

$$\begin{aligned}
G(x, z) = & \frac{\delta}{\alpha} \left\{ H_1(x) \left[z - \frac{1}{\alpha} + 2 \left(z + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha z} + \frac{e^{-2\alpha z}}{2\alpha} \right] - \right. \\
& - H_2(x) \left[\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} \left(z + \frac{3}{2\alpha} \right) e^{-\alpha z} \right] e^{-\alpha z} + \\
& + H_3(x) \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha z} \right] - \\
& - H_4(x) \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{\alpha} + \frac{2z}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{-\alpha z} + \\
& \left. + H_5(x) \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{\alpha} + \frac{2z}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

ile göstererek :

$$u_1 = G(x, z) + \frac{\dot{m}}{\alpha R_0 \mu} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - K_1 e^{-\alpha z} + K_2 \tag{3.77}$$

yazılabilir.

$K_1(x)$ ve $K_2(x)$ sabitlerini bulmak için:

$z = 0$; $\zeta, \dots, u_1 = 0$ şartını uygularsak:

$$K_1 - K_2 = G(x, 0) - \frac{\dot{m}}{\alpha^2 R_0 \mu} \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$K_1 e^{-\alpha \zeta} - K_2 = G(x, \zeta) + \frac{\dot{m}}{\alpha R_0 \mu} \left(\zeta - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

Buradan:

$$K_1 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha \zeta}} \left[G(x, 0) - G(x, \zeta) - \frac{\dot{m}}{\alpha R_0 \mu} \zeta \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] \quad (3.78)$$

$$K_2 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha \zeta}} \left[e^{-\alpha \zeta} G(x, 0) - G(x, \zeta) + \frac{\dot{m}}{\alpha^2 R_0 \mu} (1 - \alpha \zeta - e^{-\alpha \zeta}) \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] \quad (3.79)$$

bulunur.

$\zeta = 1 - bx$ ve $b = \frac{d}{h_0 + d} = \frac{d}{h_c}$ olduğunu hatırlatalım.

(3.40) denklemi

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{2\mu h_c}{\gamma \pi \dot{m}} \cdot \frac{\partial \Gamma_0}{\partial x} = \frac{2\mu h_c}{\gamma \pi \dot{m}} \left(\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} - \frac{Db}{1 - bx} + \frac{E\gamma}{x - x_1} + \frac{F\gamma}{x - x_2} \right) \quad (3.80)$$

$\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} T_1^2$ ile gösterilerek :

$$T_1 = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} - \frac{Db}{1 - bx} + \frac{E\gamma}{x - x_1} + \frac{F\gamma}{x - x_2} \quad (3.81)$$

$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \right] = \frac{4\mu^2 h_c^2}{\gamma^2 \pi^2 \dot{m}^2} (-2T_1 T_2)$ ile gösterilerek:

$$T_2 = 3 \frac{A}{x^4} + 2 \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{Db^2}{(1 - bx)^2} + \frac{E\gamma}{(x - x_1)^2} + \frac{F\gamma}{(x - x_2)^2} \quad (3.82)$$

$A, B, C, D, E\gamma, F\gamma, x_1, x_2$ katsayıları (3.42) denkleminden alınmaktadır.

T_1 ve T_2 notasyonu kullanılarak (3.74) denklemi şöyle yazılır:

$$H'_1(x) = x^3 \zeta T_1 [(-1 + 3\zeta) T_1 - x \zeta T_2]$$

$$H'_2(x) = -x \frac{4}{\gamma} \zeta^2 T_1^2$$

$$\begin{aligned}
H_3'(x) &= -x^3 T_1 [(-1 + 5\zeta) T_1 - 2x\zeta T_2] \\
H_4'(x) &= x \frac{4}{\gamma} \zeta T_1^2 \\
H_5'(x) &= x^3 T_1 (2T_1 - xT_2)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

(3.25) denklemi:

$$\begin{aligned}
2\pi \frac{R_0}{h_c} x \int_0^{\zeta} u_1 \cdot dz &= 0 \quad x=1 \text{ için } p_1 = 0 \\
2\pi \frac{R_0}{h_c} x \int_0^{\zeta} \left[G(x, z) + \frac{\dot{m}}{\alpha R_0 \mu} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - K_1 e^{-\alpha z} + K_2 \right] dz &= 0 \tag{3.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int G(x, z) dz &= \frac{\delta}{\alpha} \left\{ H_1(x) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z}{\alpha} - \frac{2ze^{-\alpha z}}{\alpha} - \frac{4e^{-\alpha z}}{\alpha^2} - \frac{e^{-2\alpha z}}{4\alpha^2} \right) + \right. \\
&H_2(x) \left(\frac{z^2}{2} + \frac{2z}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} + \frac{ze^{-\alpha z}}{4\alpha} + \frac{e^{-\alpha z}}{2\alpha^2} \right) \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} + \\
&H_3(x) \left[\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{2\alpha} (1 + e^{-\alpha z}) + \frac{z}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha z}) - \frac{3e^{-\alpha z}}{\alpha^3} \right] + \\
&H_4(x) \left(\frac{z^3}{3} + \frac{2z^2}{\alpha} + \frac{6z}{\alpha^2} + \frac{8}{\alpha^3} \right) \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha} + \\
&\left. H_5(x) \left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^3}{3\alpha} + \frac{z^2}{\alpha^2} - \frac{2z}{\alpha^3} \right) \right\} \tag{3.85}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\dot{m}}{\alpha R_0 \mu} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} \cdot dz = \frac{\dot{m}}{2\alpha R_0 \mu} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{\partial p_1}{\partial x} \tag{3.86}$$

$$\int -K_1 e^{-\alpha z} dz = \frac{K_1}{\alpha} e^{-\alpha z} ; \quad \int K_2 \cdot dz = K_2 \cdot z \tag{3.87}$$

(3.84) denklemi şu şekli alır:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\alpha} \left\{ H_1(x) \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{\alpha} - \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha\zeta}) + \frac{1}{4\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha\zeta}) \right] + \right. \\
& H_2(x) \left[\frac{\zeta^2 \cdot e^{-\alpha\zeta}}{2\alpha} + \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta e^{-2\alpha\zeta}}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^3} (1 - e^{-2\alpha\zeta}) \right] + \\
& H_3(x) \left[\frac{\zeta^3}{6} - \frac{\zeta^2}{2\alpha} (1 + e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha\zeta}) + \frac{3}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha\zeta}) \right] + \\
& H_4(x) \left[\frac{\zeta^3 e^{-\alpha\zeta}}{3\alpha} + \frac{2\zeta^2 e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} + \frac{6\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^3} - \frac{8}{\alpha^4} (1 - e^{-\alpha\zeta}) \right] + \\
& \left. + H_5(x) \zeta \left(\frac{\zeta^3}{12} - \frac{\zeta^2}{3\alpha} + \frac{\zeta}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \right\} + \frac{\dot{m}}{2\alpha R_0 \mu} \zeta \left(\zeta - \frac{2}{\alpha} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{K_1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\zeta}) + \\
& + K_2 \cdot \zeta = 0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

K ve K_2 açık olarak yazılırsa:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\alpha} \left\{ H_1(x) \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{\alpha} - \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha} + \frac{4}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha\zeta}) + \frac{1}{4\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha\zeta}) \right] + \right. \\
& H_2(x) \left[\frac{\zeta^2 \cdot e^{-\alpha\zeta}}{2\alpha} + \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta e^{-2\alpha\zeta}}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^3} (1 - e^{-2\alpha\zeta}) \right] + \\
& H_3(x) \left[\frac{\zeta^3}{6} - \frac{\zeta^2}{2\alpha} (1 + e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta}{\alpha^2} (1 - 2e^{-\alpha\zeta}) + \frac{3}{\alpha^3} (1 - e^{-\alpha\zeta}) \right] + \\
& H_4(x) \left[\frac{\zeta^3 e^{-\alpha\zeta}}{3\alpha} + \frac{2\zeta^2 e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} + \frac{6\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^3} - \frac{8}{\alpha^4} (1 - e^{-\alpha\zeta}) \right] + \\
& \left. H_5(x) \zeta \left(\frac{\zeta^3}{12} - \frac{\zeta^2}{3\alpha} + \frac{\zeta}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right) \right\} + \frac{\dot{m}}{2\alpha R_0 \mu} \zeta \left(\zeta - \frac{2}{\alpha} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - \\
& \frac{G(x,0)}{\alpha} + \frac{G(x,\zeta)}{\alpha} + \frac{\dot{m}}{\alpha^2 R_0 \mu} \zeta \frac{\partial p_1}{\partial x} + \\
& \frac{\zeta e^{-\alpha\zeta}}{1 - e^{-\alpha\zeta}} G(x,0) - \frac{\zeta}{1 - e^{-\alpha\zeta}} G(x,\zeta) + \frac{\dot{m}}{\alpha^2 R_0 \mu} \zeta \cdot \frac{(1 - \alpha\zeta - e^{-\alpha\zeta})}{1 - e^{-\alpha\zeta}} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Buradan :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_1}{\partial x} = & \frac{\alpha \cdot R_0}{\zeta \cdot \frac{\dot{m}}{\mu}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta}{2} \cdot \frac{1+e^{-\alpha\zeta}}{1-e^{-\alpha\zeta}} \right)} \left\{ -\frac{\delta}{\alpha} \left[H_1(x) \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{\alpha} - \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha} + \frac{4(1-e^{-\alpha\zeta})}{\alpha^2} + \frac{(1-e^{-2\alpha\zeta})}{4\alpha^2} \right] + \right. \\
 & H_2(x) \left[\frac{\zeta^2 \cdot e^{-\alpha\zeta}}{2\alpha} + \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^3} (1-e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta e^{-2\alpha\zeta}}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^3} (1-e^{-2\alpha\zeta}) \right] + \\
 & H_3(x) \left[\frac{\zeta^3}{6} - \frac{\zeta^2}{2\alpha} (1+e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta}{\alpha^2} (1-2e^{-\alpha\zeta}) + \frac{3}{\alpha^3} (1-e^{-\alpha\zeta}) \right] + \\
 & H_4(x) \left[\frac{\zeta^3 e^{-\alpha\zeta}}{3\alpha} + \frac{2\zeta^2 e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} + \frac{6\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^3} - \frac{8}{\alpha^4} (1-e^{-\alpha\zeta}) \right] + \\
 & \left. + H_5(x) \left[\frac{\zeta^3}{12} - \frac{\zeta^2}{3\alpha} + \frac{\zeta}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right] + G(x,0) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta e^{-\alpha\zeta}}{1-e^{-\alpha\zeta}} \right) - \right. \\
 & \left. - G(x,\zeta) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta}{1-e^{-\alpha\zeta}} \right) \right\} \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

Şunları yazalım:

$$\begin{aligned}
 G(x,0) &= \frac{2h_c}{\pi R_0} x^2 \cdot G'(x,0) \\
 G(x,\zeta) &= \frac{2h_c}{\pi R_0} x^2 \cdot G'(x,\zeta) \quad (3.91)
 \end{aligned}$$

Burada :

$$\begin{aligned}
 G'(x,0) &= \frac{3}{2\alpha} H_1'(x) - \frac{7}{4\alpha^2} H_2'(x) + \frac{2}{\alpha^2} H_3'(x) - \frac{2}{\alpha^3} H_4'(x) - \frac{2}{\alpha^3} H_5'(x) \\
 G'(x,\zeta) &= H_1'(x) \left[\zeta - \frac{1}{\alpha} + 2 \left(\zeta + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha\zeta} + \frac{e^{-2\alpha\zeta}}{2\alpha} \right] - \\
 & H_2'(x) \left[\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha} \left(\zeta + \frac{3}{2\alpha} \right) e^{-\alpha\zeta} \right] e^{-\alpha\zeta} + \\
 & H_3'(x) \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha\zeta} \right] - \\
 & - H_4'(x) \left(\frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^2}{\alpha} + \frac{2\zeta}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) e^{-\alpha\zeta} +
 \end{aligned}$$

$$+H'_5(x)\left(\frac{\zeta^3}{3}-\frac{\zeta^2}{\alpha}+\frac{2\zeta}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha^3}\right) \quad (3.92)$$

Buna göre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x} = & \frac{h_c^2}{\pi^2 R_\theta^2 \zeta} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta}{2} \cdot \frac{1+e^{-\alpha\zeta}}{1-e^{-\alpha\zeta}}\right)} \left\{ -H'_1(x) \left[\frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta}{\alpha} - \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha} + \frac{4(1-e^{-\alpha\zeta})}{\alpha^2} + \frac{(1-e^{-2\alpha\zeta})}{4\alpha^2} \right] - \right. \\ & H'_2(x) \left[\frac{\zeta^2 \cdot e^{-\alpha\zeta}}{2\alpha} + \frac{2\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha^3} (1-e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta e^{-2\alpha\zeta}}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^3} (1-e^{-2\alpha\zeta}) \right] - \\ & H'_3(x) \left[\frac{\zeta^3}{6} - \frac{\zeta^2}{2\alpha} (1+e^{-\alpha\zeta}) + \frac{\zeta}{\alpha^2} (1-2e^{-\alpha\zeta}) + \frac{3}{\alpha^3} (1-e^{-\alpha\zeta}) \right] - \\ & H'_4(x) \left[\frac{\zeta^3 e^{-\alpha\zeta}}{3\alpha} + \frac{2\zeta^2 e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^2} + \frac{6\zeta e^{-\alpha\zeta}}{\alpha^3} - \frac{8}{\alpha^4} (1-e^{-\alpha\zeta}) \right] - \\ & H'_5(x) \left[\frac{\zeta^3}{12} - \frac{\zeta^2}{3\alpha} + \frac{\zeta}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} \right] + G'(x,0) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta e^{-\alpha\zeta}}{1-e^{-\alpha\zeta}} \right) - \\ & \left. G'(x,\zeta) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta}{1-e^{-\alpha\zeta}} \right) \right\} \quad (3.93) \end{aligned}$$

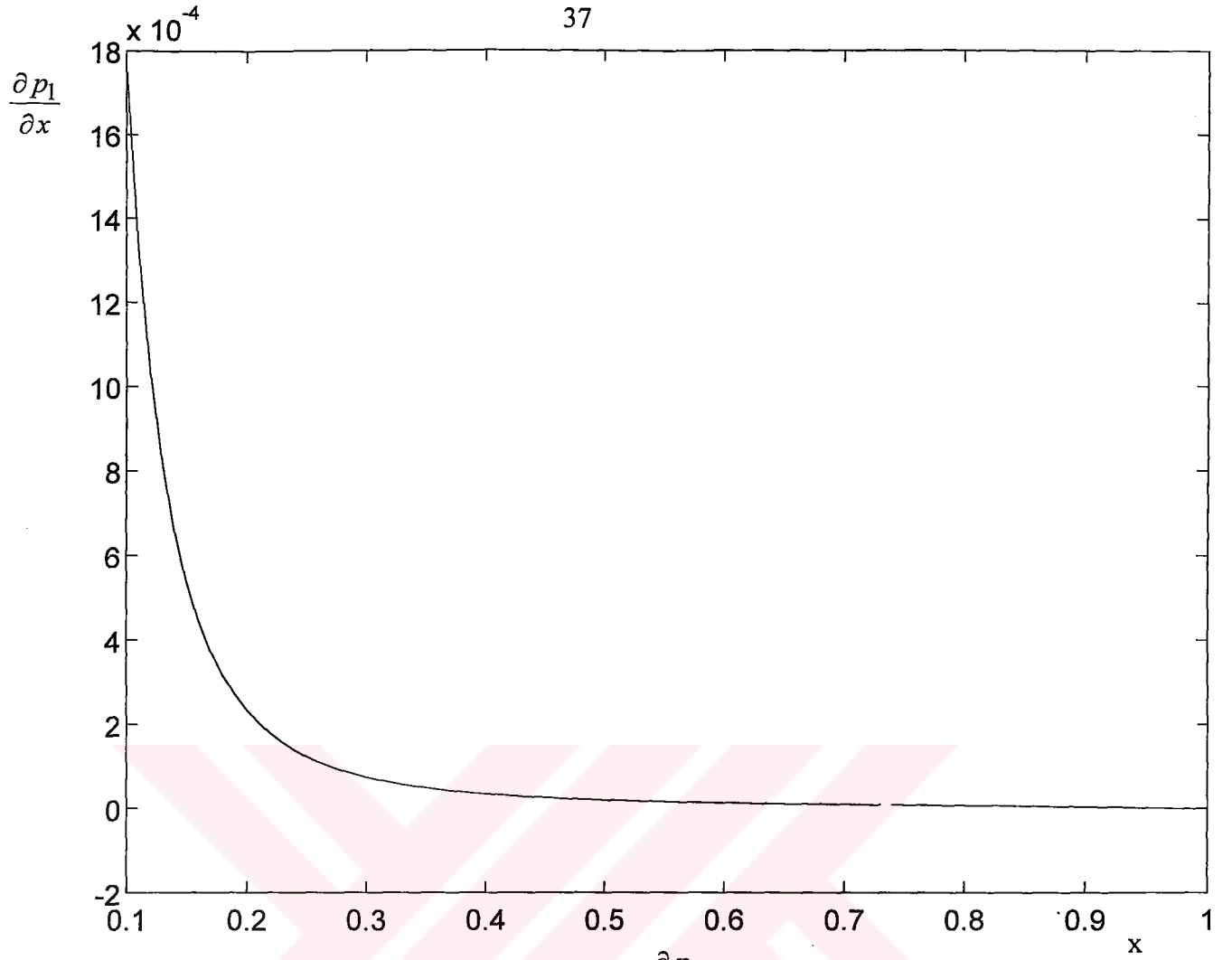
Buna göre izleyen sahifelerde görüleceği üzere $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ değerleri, (x) 0,1 ile 1,0 arasında onda bir aralıklarla değiştirilerek hesaplanmış ve eğrisi çizilmiştir. Bundan sonra integral alınarak, (x) için aynı aralıklarla hesaplanan p_1 değerleri çıktıda gösterilmiş ve eğrisi çizilmiştir. p_0 değerleri ile karşılaştırmak üzere p_1 değerleri onda bir aralıklarla aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3-3 $b=0,2$ için $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ değerleri

x	$\partial p_1 / \partial x$
0.1	0,00176729924750
0.2	0,00023396156546
0.3	0,00007449508481
0.4	0,00003441955717
0.5	0,00001977476104
0.6	0,00001318513246
0.7	0,00000962168582
0.8	0,00000699001155
0.9	0,00000401759532
1.0	-0,00000168280504

Tablo 3-4 $b=0,2$ için p_1 ve $0,574 p_1$ değerleri

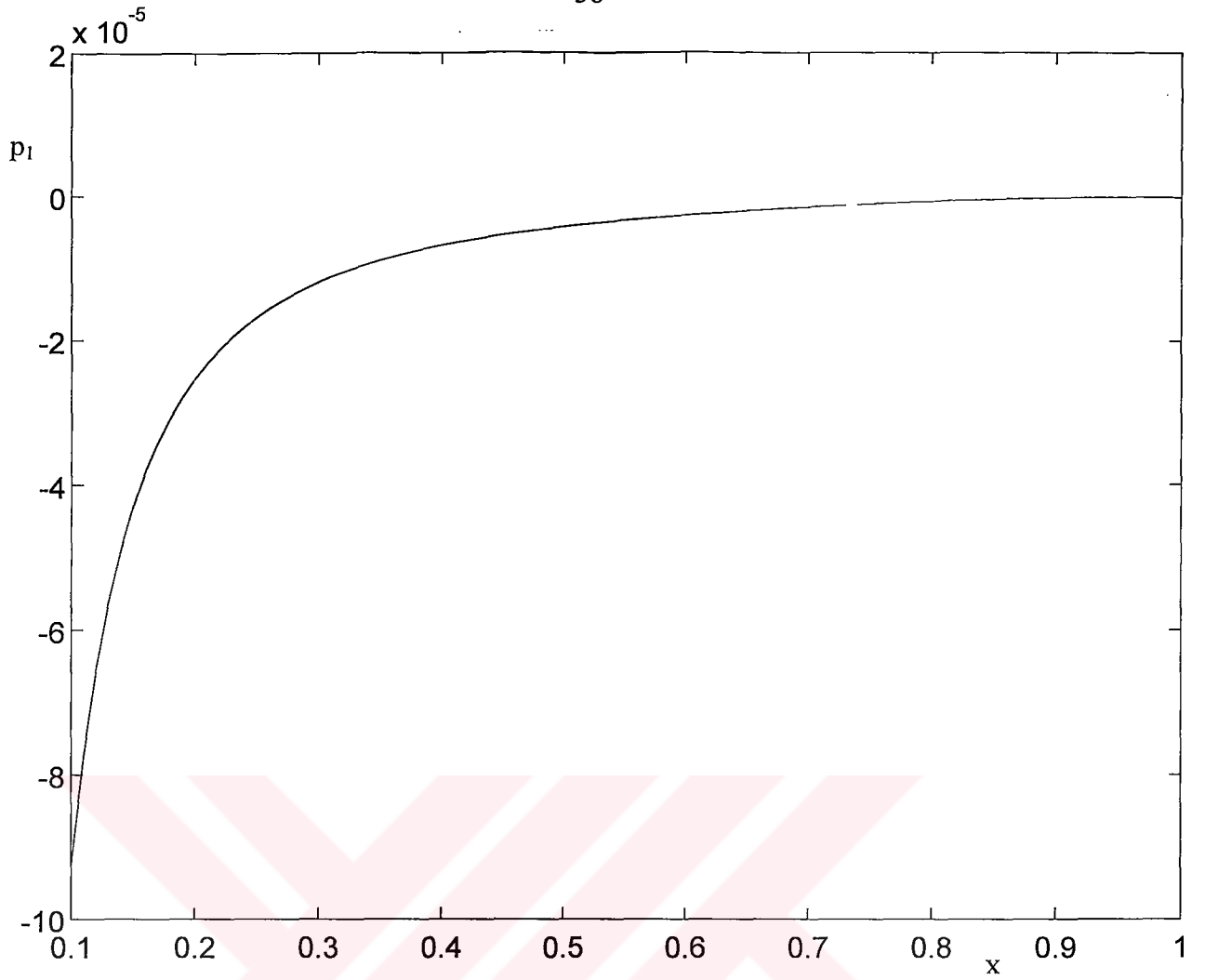
x	p_1	$0,574 p_1$
0,1	-0,928224689. 0^{-4}	-53,28009715. 0^{-6}
0,2	-2,532663778. 0^{-5}	-14,53749009. 0^{-6}
0,3	-1,196415579. 0^{-5}	-6,867425423. 0^{-6}
0,4	-0,688839462. 0^{-5}	-3,953938512. 0^{-6}
0,5	-0,42843306. 0^{-5}	-2,459205764. 0^{-6}
0,6	-2,67509675. 0^{-6}	-1,535505535. 0^{-6}
0,7	-1,54904709. 0^{-6}	-0,889153029. 0^{-6}
0,8	-0,72060381. 0^{-6}	-0,413626586. 0^{-6}
0,9	-0,16173793. 0^{-6}	-0,092837571. 0^{-6}
1,0	0	0



Şekil 3-3 $\frac{\partial p_1}{\partial x}$ eğrisi

Tablo 3-5 $b=0.2$ için p_1 değerleri

x	P_1
0.1	-0,00009282246890
0.2	-0,00002532663778
0.3	-0,00001196415579
0.4	-0,00000688839462
0.5	-0,00000428433060
0.6	-0,00000267509675
0.7	-0,00000154904709
0.8	-0,00000072060381
0.9	-0,00000016173793
1.0	-0,000000000000096

Şekil 3-4 p_1 eğrisi

3.3.2 Kuvvet düzeltmesi

$$F_1^* = 2\pi R_0^2 \frac{\dot{m}^2}{\rho h_c^4} \int_{0,1}^{1,0} p_1 \cdot x \cdot dx$$

Hesaptan görüleceği üzere :

$$\int_{0,1}^{1,0} p_1 \cdot x \cdot dx = 2,096092106 \cdot 10^{-6}$$

Seçilen tipik örnekte :

$$2\pi R_0^2 \frac{\dot{m}^2}{\rho h_c^4} = 925108,4136$$

$$F_1^* = 925108,4136 \left(-2,096092106 \cdot 10^{-6} \right) = -1,9391124 \text{ N}$$

BÖLÜM 4. LİTERATÜR İLE UYUM

Bulunan sonuçların literatür ile uyum derecesini araştırmak için, Gans ve Peube çalışmalarına göre değerlendirme yapılacaktır. Hipotezler bakımından Gans ile olan farkımız, eksenel hızın gözönüne alınmasıdır. Bu da boyutsuz (3.19)

$$\text{diferansiyel denkleminde, } J = -\frac{h_c}{2\pi R_0 x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{ve} \quad I = -\frac{\partial u}{\partial z} \int \frac{\partial u}{\partial x} dz \quad \text{terimlerinin}$$

ilave edilmesi ile ifadesini bulmaktadır. Yalnız J nin gözönüne alınması ile bulunan sonuçların, I nin etkisi de katılırsa yaklaşık 0,574 katsayısı ile çarpılması gerekeceği evvelce belirtilmişti. Bu her iki J ve I terimleri kaldırılırsa, (3.19) denklemi, Gans'ın kullandığı diferansiyel denklem ile aynı olacağından, aynı sonuçların bulunacağı aşıkardır. Gans, eksenel hızı hesaba katmadığından, asıl belirleyici karşılaştırmanın, bu hızı gözönüne alan Peube ile yapılması gerektiği anlaşılmaktadır. Peube, basınçların, Gans'ın yaptığı gibi sadece radyal koordinatın (r veya x) değil, aynı zamanda, az fark vermesine rağmen düşey koordinatın (y veya z) da fonksiyonu olduğunu belirtmiştir. Yalnız Peube, sınır şartlarının işe soktuğu integral sabitini gözönüne almak mecburiyetinden kurtulmak için türev değer $\frac{dp}{dr}$ üzerine

$$\text{işlem yapmakta ve } A = \frac{\rho q}{\mu h} = \frac{2\dot{m}}{\mu h_c} \quad \text{değerinin pozitif veya negatif olması durumlarını}$$

ayırarak, $\frac{dp}{dr}$ pozitif veya negatif için bazı sonuçlar çıkarmakta ve yalnız çeperdeki basınç değerlerini vermektedir. Basınç dağılımındaki hipotez farkı yüzünden, sağlıklı bir karşılaştırmanın, basınçlar üzerine değil ve fakat radyal hız üzerine yapılması icabettiği gerektiği böylece anlaşılmaktadır. Peube paralel diskler üzerinde çalıştığından, bu karşılaştırmada $b = \frac{d}{h_c}$ değerinin sıfır alınması lazımdır.

Aşağıda plak boyunca 10 noktada her iki teoriye göre, tipik örnek için, orta düzlemdeki $\left(z = \frac{1}{2}\right)$, karşılaştırmalı radyal hız değerleri verilmektedir:

4.1 Kullanılacak Formüller

$$b = 0 \cdots \zeta = 1 \quad \text{ve} \quad z = \frac{1}{2} \quad \text{için :}$$

Ş.C.:

(3.40) formülünden $\frac{\partial p_0}{\partial x}$ ve (3.36) denkleminde u_0 elde edilerek

$$u_0 = - \frac{1}{\pi \frac{R_0}{h_c} x \zeta (\gamma x^2 + bx - 1)} \left(\zeta \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \zeta}}{1 - e^{-\alpha \zeta}} - z \right) \quad (4.1)$$

ve tipik örneğe uygulanarak : $\gamma = 0,502654824$; $\alpha = \frac{2}{\gamma x^2} = \frac{3,978873582}{x^2}$

$$u_0 \left(x, \frac{1}{2} \right) = - \frac{1}{100\pi x (\gamma x^2 - 1)} \left(\frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}}{1 - e^{-\alpha}} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.2)$$

bulunur.

$u_1 \left(x, \frac{1}{2} \right)$ ise (33),(34),(35),(36) ve (37) ifadelerinden tipik örnek için MatLab ile hesaplanarak, $u_0 \left(x, \frac{1}{2} \right)$, $u_1 \left(x, \frac{1}{2} \right)$ ve $u \left(x, \frac{1}{2} \right) = 0,574(u_0 + u_1)$ değerleri ve diyagramları ilerleyen sahypelerdeki gibi gösterilmiştir.

Peube : Notasyon dönüşümü yapılarak :

$$A = \frac{\rho q}{\mu h} = \frac{2\dot{m}}{\mu h_c} = 5.10^5 \quad r_+ = \frac{r}{h} = \frac{2R_0}{h_c} x = 200x$$

Buna göre :

$$u \left(x, \frac{1}{2} \right) = \frac{5,968310366.10^{-4}}{x} (1 + \alpha) \quad (4.3)$$

Burdaki α düzeltme terimi, Peube tarafından :

$$\alpha = \frac{1}{112\pi} \left(\frac{A}{r_+^2} \right) + 9,106.10^{-4} \cdot \frac{9}{16\pi^2} \left(\frac{A}{r_+^2} \right)^2 \quad (4.4)$$

olarak verilmektedir. Peube, verdiği ifadelerin, ancak, pratik olarak aşağıdaki üç şart gerçekleştiği takdirde, geçerli olabileceğini belirtmektedir :

r_+ çok büyük ; akım laminar ; sınır şartları uygun olarak sağlanıyor.

Ayrıca türbülans limitini $\left(\frac{A}{r_+^2}\right) = 22$ olarak vermektedir.

$$\text{Dolayısı ile } \alpha \leq \frac{1}{112\pi} \cdot 22 + 9,106 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{9}{16\pi^2} \cdot (22)^2 = 0,087643776$$

$$\text{Bu limitten sonra } \left(x \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^4}} : 22 = 0,754 \right)$$

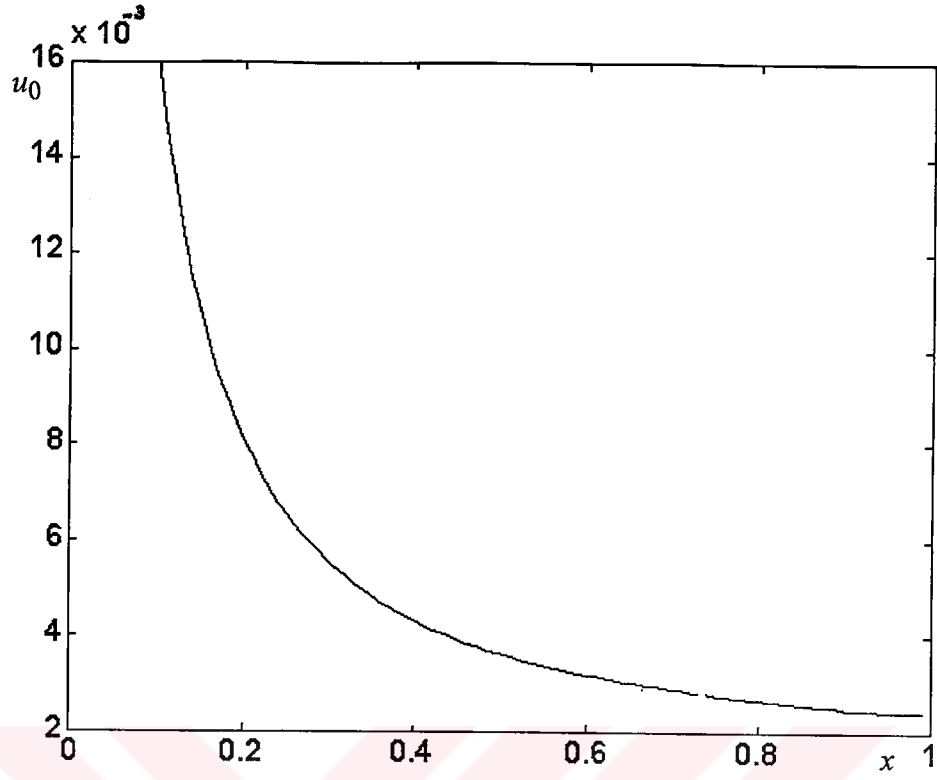
$$\alpha = \frac{0,035525656}{x^2} + \frac{8,109058871 \cdot 10^{-3}}{x^4}$$

ile hesaplanacaktır.

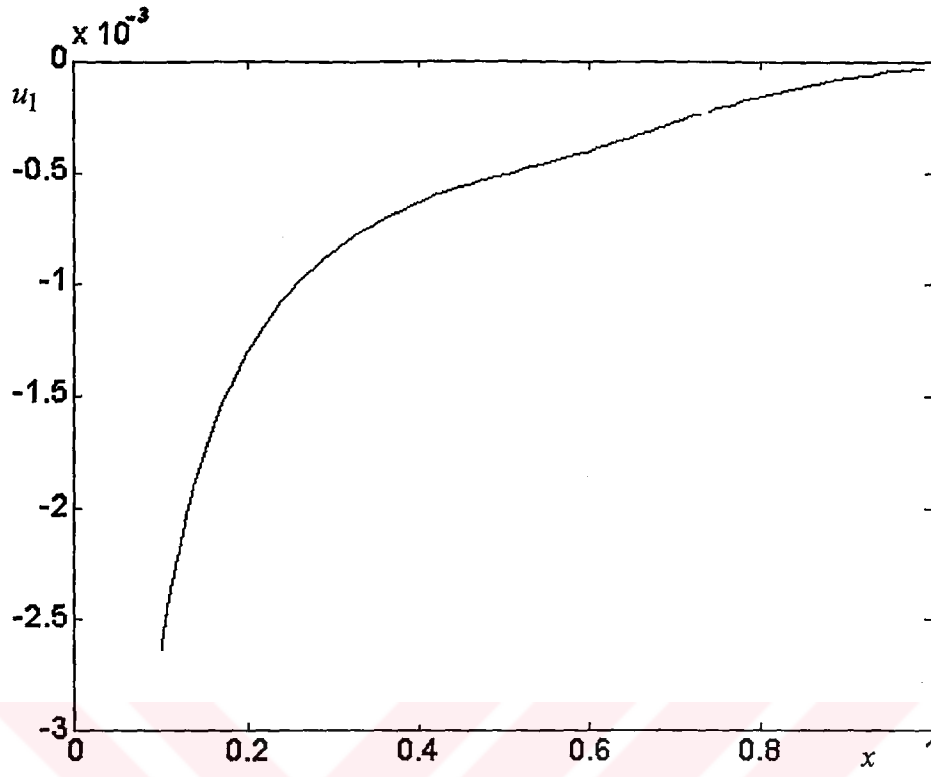
Bu neticeler, aşağıdaki tablo ve diyagramda gösterilmiştir.

Tablo 4-1 $b=0$ için u_0 değerleri

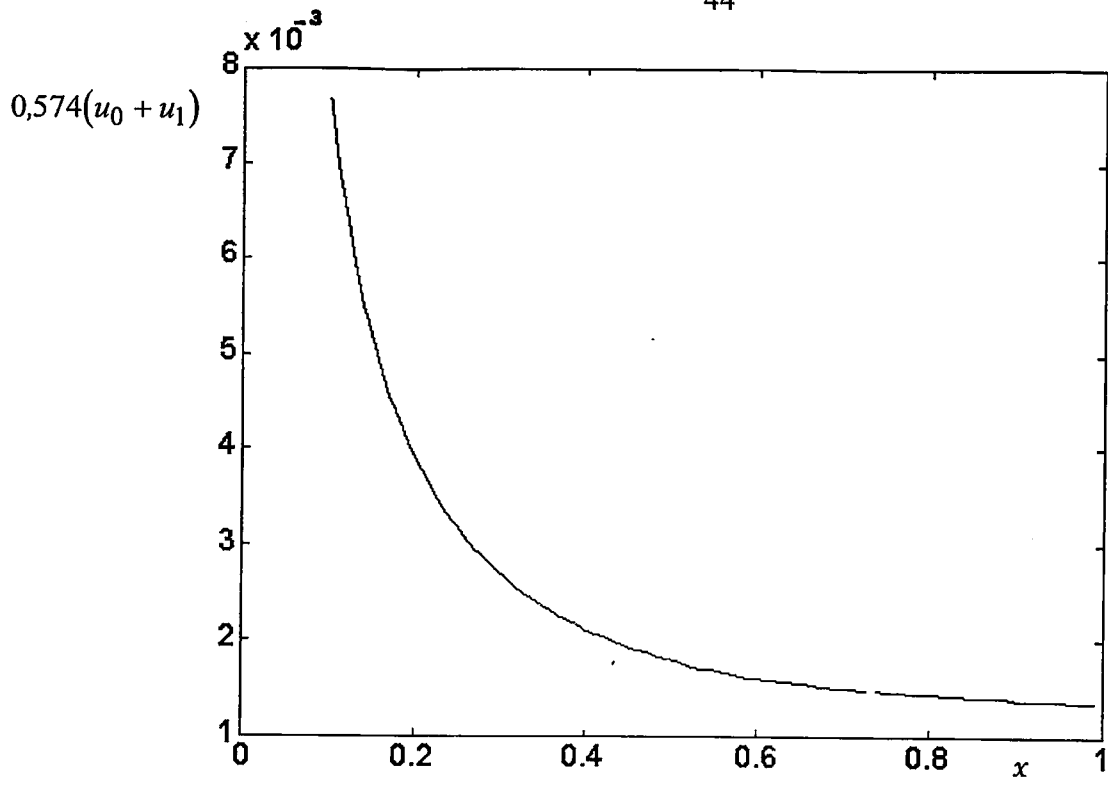
x	u_0
0,1	0,01599589846456
0,2	0,00812103015409
0,3	0,00555653655890
0,4	0,00432682588250
0,5	0,00363804164657
0,6	0,00321294733375
0,7	0,00291434797512
0,8	0,00268215370947
0,9	0,00251160528940
1,0	0,00243004316314

Şekil 4-1 u_0 eğrisiTablo 4-2 $b=0$ için u_1 değerleri

x	u_1
0,1	-0,00264025249737
0,2	-0,00130212153167
0,3	-0,00085262103670
0,4	-0,00063322067518
0,5	-0,00050946816744
0,6	-0,00040198713011
0,7	-0,00027600484498
0,8	-0,00015780292364
0,9	-0,00007465611190
1,0	-0,00003039716494

Şekil 4-2 u_1 eğrisiTablo 4-3 $b=0$ için $0,574 (u_0+u_1)$ değerleri

x	$0,574 (u_0+u_1)$
0,1	0,00766614078517
0,2	0,00391404354927
0,3	0,00270004750974
0,4	0,00212012938900
0,5	0,00179580117702
0,6	0,00161349115689
0,7	0,00151440895670
0,8	0,00144897735107
0,9	0,00139880882789
1,0	0,00137739680297



Şekil 4-3 $0,574(u_0 + u_1)$ eğrisi

Tablo 4-4 $b=0$ için orta düzlemde u değerleri

x	Ş.C. $u(x,0.5)$	Peube $u(x,0.5)$
0,1	$7,666140785 \cdot 10^{-3}$	$6,491395 \cdot 10^{-3}$
0,2	$3,914053549 \cdot 10^{-3}$	$3,245697 \cdot 10^{-3}$
0,3	$2,70004751 \cdot 10^{-3}$	$2,163798 \cdot 10^{-3}$
0,4	$2,120129389 \cdot 10^{-3}$	$1,622848 \cdot 10^{-3}$
0,5	$1,795801177 \cdot 10^{-3}$	$1,298279 \cdot 10^{-3}$
0,6	$1,613491157 \cdot 10^{-3}$	$1,081899 \cdot 10^{-3}$
0,7	$1,514408957 \cdot 10^{-3}$	$0,927342 \cdot 10^{-3}$
0,8	$1,448977351 \cdot 10^{-3}$	$0,80222 \cdot 10^{-3}$
0,9	$1,398808828 \cdot 10^{-3}$	$0,700426 \cdot 10^{-3}$
1,0	$1,377396803 \cdot 10^{-3}$	$0,62287 \cdot 10^{-3}$

Ortalama değerler aranırsa :

Ş.C.

$$\frac{1}{(1,0-0,1)} \int_{0,1}^{1,0} u\left(x, \frac{1}{2}\right) dx = 2,27156041 \cdot 10^{-3}$$

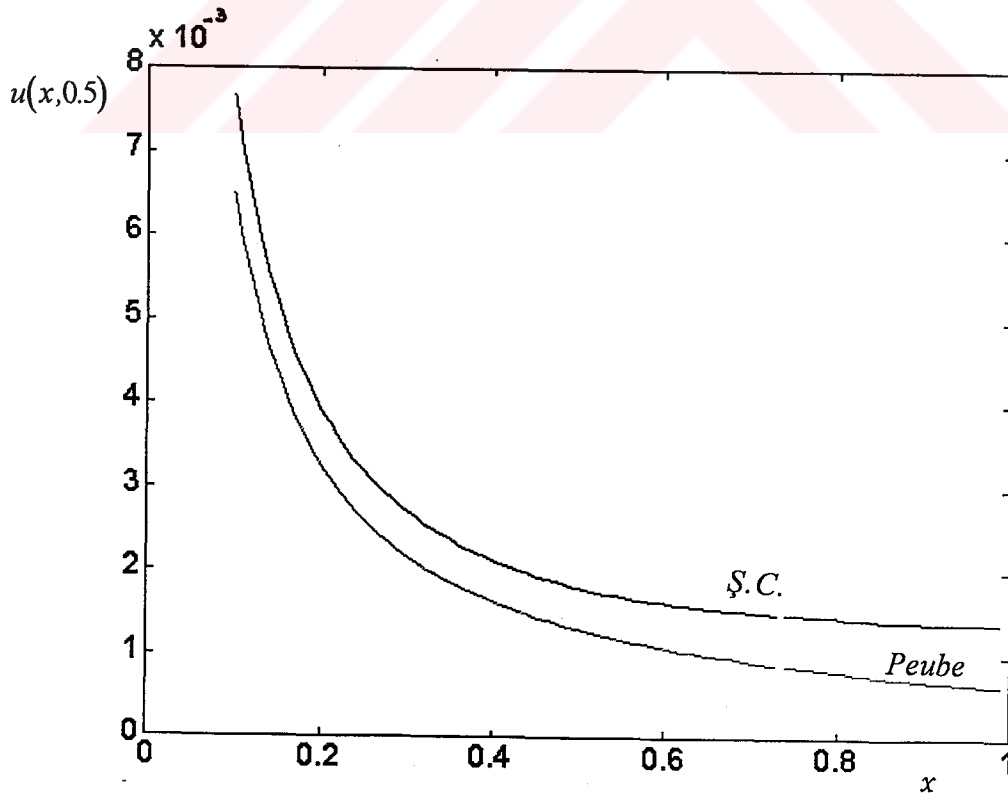
Peube

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1,0-0,1)} \int_{0,1}^{1,0} u\left(x, \frac{1}{2}\right) dx = \\ & \frac{1}{(1,0-0,1)} \left\{ \left[5,968310366 \cdot 10^{-4} \cdot 1,087643776 \log x \right]_{0,1}^{0,7} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{0,80222 \cdot 10^{-3}}{2} + 0,700426 \cdot 10^{-3} + \frac{0,62287 \cdot 10^{-3}}{2} \right) \right\}_{0,1} = 1,560515958 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Fark :

$$- \frac{1,560515958 \cdot 10^{-3}}{2,27156041 \cdot 10^{-3}} = \%31$$

Basınç dağılımındaki farklı kabullere, çeşitli yaklaşıklıklara rağmen, ayrı yöntemler uygulayan bu iki metodun ortalama hız değerleri birbirine yakın çıkmaktadır.



Şekil 4-4 Karşılaştırmalı u eğrisi

4.2 z Düzleminde Radyal Hız Dağılımı

Akımın laminar olması için $x \geq 0,8$

$x = 1,0$ kesiti esas alınarak ve tipik örnek uygulanarak:

u_0 : (3.36) denklemi:

$$u_0 = -2\pi \frac{R_0}{h_c} x^2 \frac{\partial p_0}{\partial x} \left(\zeta \cdot \frac{1 - e^{-\alpha z}}{1 - e^{-\alpha \zeta}} - z \right)$$

(3.43) formülünden:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{1}{2\pi^2 \frac{R_0^2}{h_c^2}} \cdot \frac{1}{x^3 \zeta (\gamma x^2 + bx - 1)}$$

$$\alpha = 3,978873582 \quad ; \quad \zeta = 1 - bx = 1 - 0,2 \cdot 1,0 = 0,80 \quad ; \quad \gamma = 0,502654824$$

Bunlara göre:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = -2,12970462 \cdot 10^{-5}$$

$$u_0 = 0,013381328 \left[0,8346 \left(1 - e^{-\alpha z} \right) - z \right] \quad (4.5)$$

u_1 : (3.77) denklemi:

$$u_1 = G(x, z) + \frac{\dot{m}}{\alpha R_0 \mu} \left(z - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} - K_1 e^{-\alpha z} + K_2$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = -1,68280504 \cdot 10^{-6} \text{ (tablodan)}$$

$$T_1 = -4,2038684 \quad ; \quad T_2 = 5,480039118; \quad H_1'(1,0) = 34,53712355;$$

$$H_2'(1,0) = -90,0053533; \quad H_3'(1,0) = -89,8773108; \quad H_4'(1,0) = 112,5066916;$$

$$H_5'(1,0) = 58,38238 \quad ; \quad H_1(1,0) = 2,566495569 \cdot 10^{-11}; \quad H_1'(1,0) = 8,863937457 \cdot 10^{-10}$$

$$H_2(1,0) = -2,3099834 \cdot 10^{-9}; \quad H_3(1,0) = -2,3066972 \cdot 10^{-9};$$

$$H_4(1,0) = 2,887479255 \cdot 10^{-9}; \quad H_5(1,0) = 1,498381273 \cdot 10^{-9};$$

$$G'(1,0;0) = 6,189255858; \quad G'(1,0;0,80) = 8,080781635$$

$$G(1,0;0) = 6,366197724 \cdot 10^{-3}; \quad G'(1,0;0) = 0,039402026$$

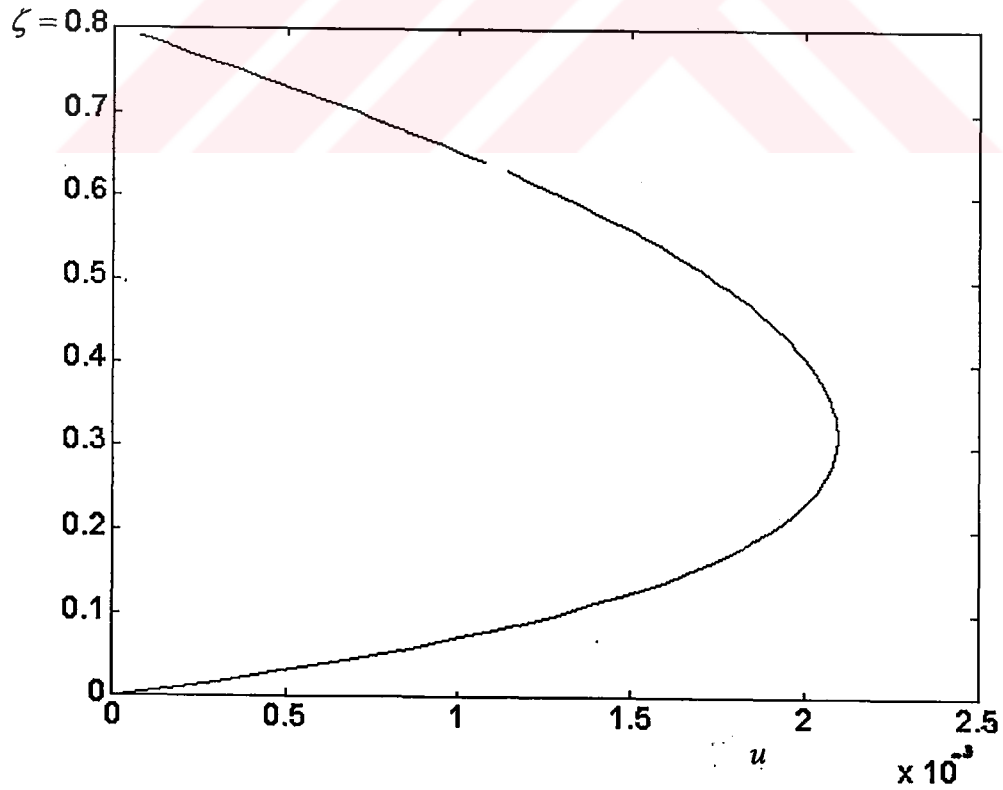
$$G(1,0;0,80) = 0,051443853; \quad K_1 = -0,01168018; \quad K_2 = -0,05134794;$$

$$\delta = 986960439;$$

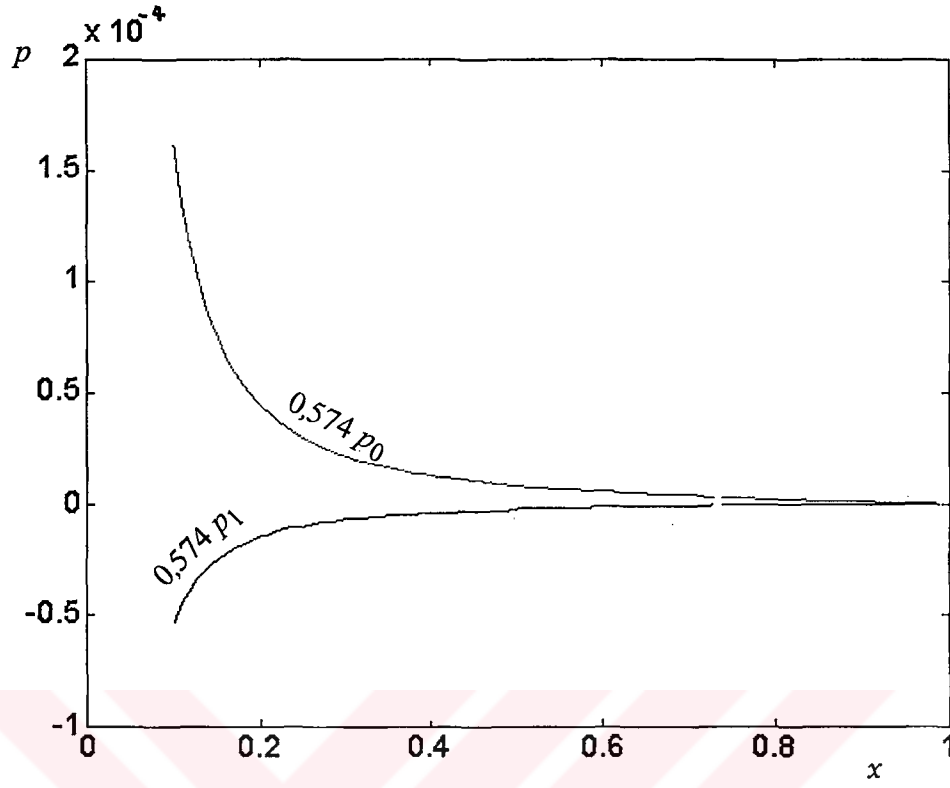
$$G(1,0;z) \dots (3.76) \text{ denkleminde } \delta/\alpha = 248050212,9$$

Tablo 4-5 $b=0,2$ için z düzleminde radyal hız dağılımı

z	$u_0(1,0;z)$	$G(1,0;z)$	$u_1(1,0;z)$	$0,574(u_0 + u_1)$
0	0	0,039402026	0	0
0,1	$2,327919184 \cdot 10^{-3}$	0,043260905	$-8,1013718 \cdot 10^{-5}$	$1,289723738 \cdot 10^{-3}$
0,2	$3,452411673 \cdot 10^{-3}$	0,045884966	$-1,38238188 \cdot 10^{-4}$	$1,902335581 \cdot 10^{-3}$
0,3	$3,768517094 \cdot 10^{-3}$	0,047739416	$-1,19617102 \cdot 10^{-4}$	$2,094468595 \cdot 10^{-3}$
0,4	$3,541598453 \cdot 10^{-3}$	0,049105265	$-2,1671982 \cdot 10^{-5}$	$2,020437795 \cdot 10^{-3}$
0,5	$2,949910085 \cdot 10^{-3}$	0,050109445	$9,6100787 \cdot 10^{-5}$	$1,748410241 \cdot 10^{-3}$
0,6	$2,113192143 \cdot 10^{-3}$	0,050797268	$1,53782234 \cdot 10^{-4}$	$1,301243292 \cdot 10^{-3}$
0,7	$1,1118786 \cdot 10^{-3}$	0,051210019	$1,08535 \cdot 10^{-4}$	$7,005174064 \cdot 10^{-4}$
$\zeta = 0,8$	0	0,051443853	0	0



Şekil 4-5 Radyal hız dağılımı eğrisi



Şekil 4-6 Basınç diyagramı (Ş.C.)

4.3 Basınç Diyagramı (Gans)

$$p_0^* = \frac{6\mu\dot{m}}{\pi\rho h_c^3} \left[-\log \frac{x(1-b)}{1-bx} - \frac{1}{2(1-bx)^2} + \frac{1}{2(1-b)^2} - \frac{1}{1-bx} + \frac{1}{1-b} \right]$$

$$p_0 = \frac{6\mu h_c}{\pi\dot{m}} \left[-\log \frac{x(1-b)}{1-bx} - \frac{1}{2(1-bx)^2} + \frac{1}{2(1-b)^2} - \frac{1}{1-bx} + \frac{1}{1-b} \right]$$

$$p_1^* = \frac{27}{140} \cdot \frac{\dot{m}^2}{\pi^2 \rho R_0^2 h_c^2} \left\{ -\frac{1}{x^2(1-bx)^2} + \frac{1}{(1-b)^2} - 4b \left[3b \log x + 1 - \frac{1}{x} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3b \log \frac{1-b}{1-bx} + \frac{2b}{1-bx} - \frac{2b}{1-b} + \frac{b}{2(1-bx)^2} - \frac{b}{2(1-b)^2} \right] \right\}$$

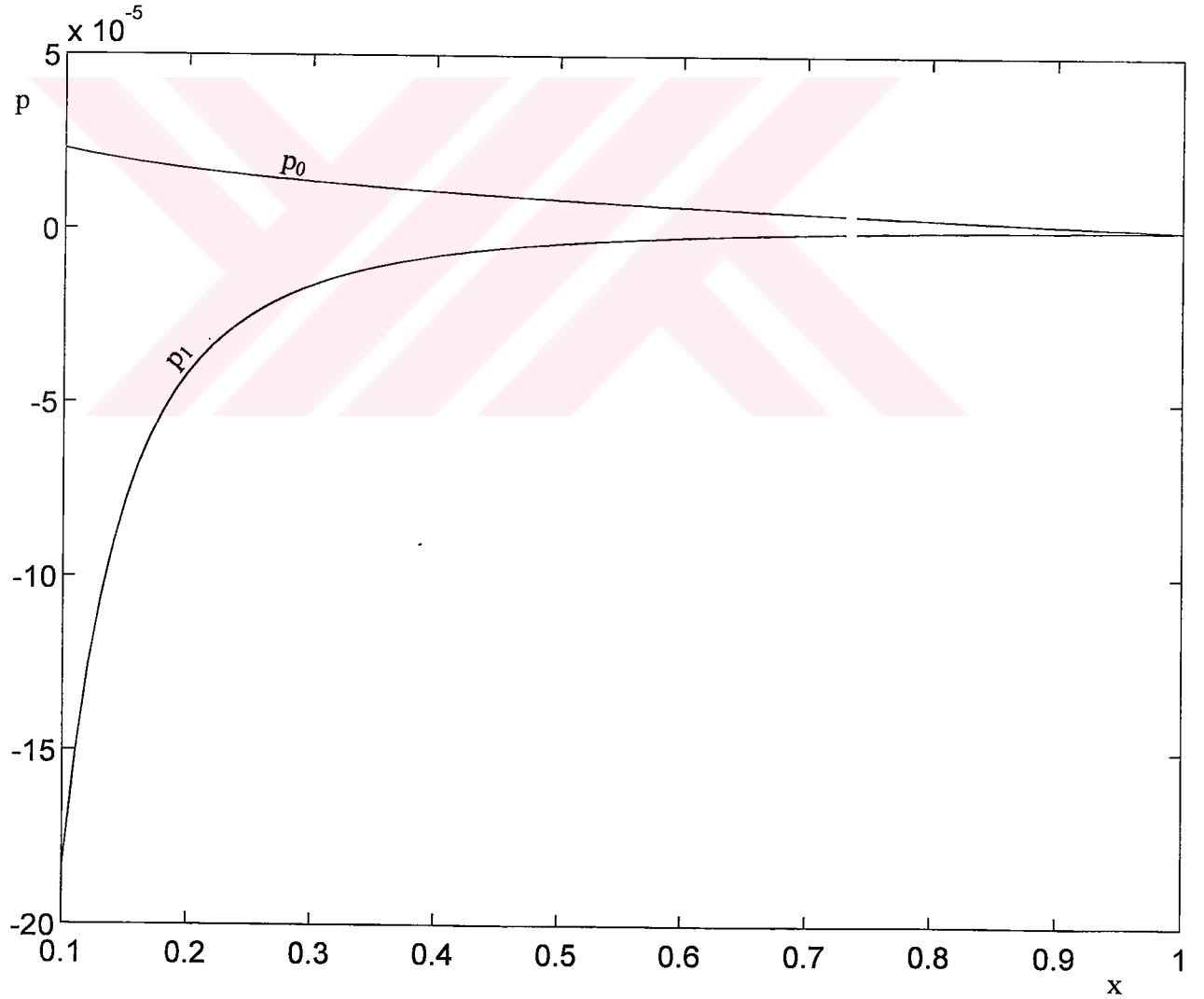
$$p_1 = \frac{27}{140} \cdot \frac{h_c^2}{\pi^2 R_0^2} \left\{ -\frac{1}{x^2(1-bx)^2} + \frac{1}{(1-b)^2} - 4b \left[3b \log x + 1 - \frac{1}{x} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3b \log \frac{1-b}{1-bx} + \frac{2b}{1-bx} - \frac{2b}{1-b} + \frac{b}{2(1-bx)^2} - \frac{b}{2(1-b)^2} \right] \right\}$$

Tipik örneğe uygulayarak : $b = 0,2$

$$p_0 = 7,639437268 \cdot 10^{-6} \left[-\log \frac{x(1-b)}{1-bx} - \frac{1}{2(1-bx)^2} + \frac{1}{2(1-b)^2} - \frac{1}{1-bx} + \frac{1}{1-b} \right]$$

$$p_1 = 1,954051399 \cdot 10^{-6} \left\{ -\frac{1}{x^2(1-bx)^2} + \frac{1}{(1-b)^2} - 4b \left[3b \log x + 1 - \frac{1}{x} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3b \log \frac{1-b}{1-bx} + \frac{2b}{1-bx} - \frac{2b}{1-b} + \frac{b}{2(1-bx)^2} - \frac{b}{2(1-b)^2} \right] \right\}$$



Şekil 4-7 Basınç diyagramı (Gans)

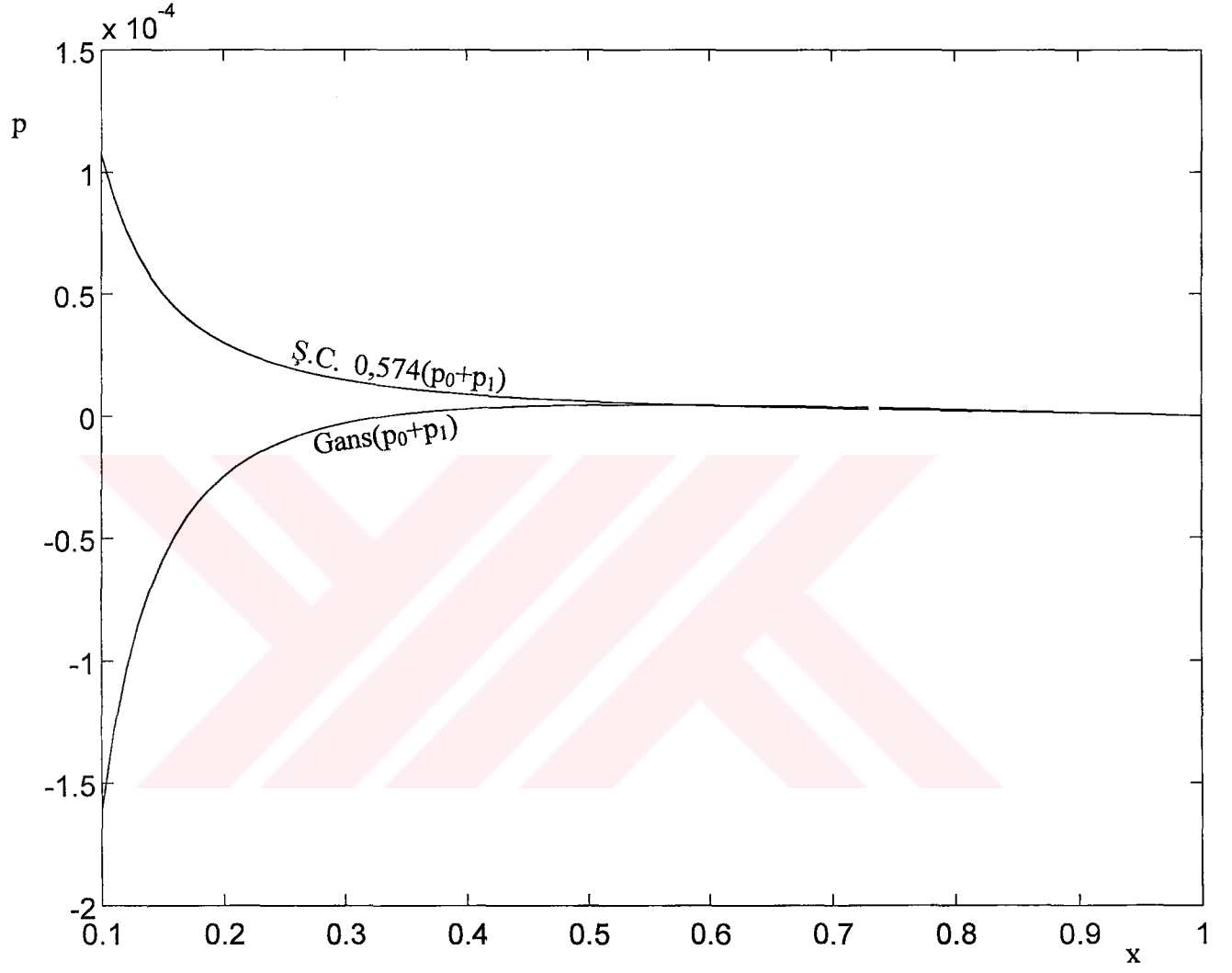
Tablo 4-6 $b=0.2$ için p_0 , p_1 (Gans) basınç değerleri

x	p_0	p_1
0,1	$2,288585462 \cdot 10^{-5}$	$-1,83764775 \cdot 10^{-4}$
0,2	$1,710323389 \cdot 10^{-5}$	$-4,18153916 \cdot 10^{-5}$
0,3	$1,349731389 \cdot 10^{-5}$	$-1,64068058 \cdot 10^{-5}$
0,4	$1,076861886 \cdot 10^{-5}$	$-7,87903667 \cdot 10^{-6}$
0,5	$8,508691818 \cdot 10^{-6}$	$-4,13447201 \cdot 10^{-6}$
0,6	$6,534476779 \cdot 10^{-6}$	$-2,23185899 \cdot 10^{-6}$
0,7	$4,747251778 \cdot 10^{-6}$	$-1,17894957 \cdot 10^{-6}$
0,8	$3,087025898 \cdot 10^{-6}$	$-5,68101988 \cdot 10^{-7}$
0,9	$1,514029027 \cdot 10^{-6}$	$-2,08044007 \cdot 10^{-7}$
1,0	0	0

4.4 Basınç Karşılaştırması

Tablo 4-7 $b=0,2$ için Karşılaştırmalı basınç değerleri

x	Ş.C. $0,574(p_0 + p_1)$	Gans $p_0 + p_1$
0,1	$10,74967878 \cdot 10^{-5}$	$-1,6087892 \cdot 10^{-4}$
0,2	$3,000600869 \cdot 10^{-5}$	$-2,47121577 \cdot 10^{-5}$
0,3	$14,67880594 \cdot 10^{-6}$	$-2,9136669 \cdot 10^{-6}$
0,4	$8,885481598 \cdot 10^{-6}$	$2,88958219 \cdot 10^{-6}$
0,5	$5,951920525 \cdot 10^{-6}$	$4,374219808 \cdot 10^{-6}$
0,6	$4,180680697 \cdot 10^{-6}$	$4,302617789 \cdot 10^{-6}$
0,7	$2,960833838 \cdot 10^{-6}$	$3,568302208 \cdot 10^{-6}$
0,8	$1,998220607 \cdot 10^{-6}$	$2,51892391 \cdot 10^{-6}$
0,9	$1,090543313 \cdot 10^{-6}$	$1,30598502 \cdot 10^{-6}$
1,0	0	0



Şekil 4-8 Karşılaştırmalı basınç diyagramı

SONUÇLAR

Eksenel simetrik ve hafifçe konik iki plak arasındaki radyal akımın incelenmesinde Gans tarafından kullanılan hareket denklemlerinde hızın eksenel bileşeni işe dahil edilmemişti. Bu bileşen de göz önüne alınarak yapılan analizde, bu yüzden ilave edilen iki terimden önemli olan birincisi hesaplarda kullanılmış, daha az önemli olan ikincisinin ters yönde etkisi, matematik güçlükler sebebi ile ancak hesapların sonunda yaklaşık olarak değerlendirilebilmiştir. Sonuçta, hızın eksenel bileşeninin de gözönüne alınması, basınçlarda, Gans değerlerine göre yaklaşık yüzde kırk kadar bir artış sağlamıştır. Böylelikle, bu bileşenin ihmal edilmesinin sağlıklı olmadığı anlaşılmıştır. Deneylerde, basit hesaplara göre, Gans tarafından gözlenen iki kat basınç artışının, kendisinin iddia ettiği gibi sadece, çok küçük ve adeta yüzey toleransı mertebesindeki $1,6 \cdot 10^{-3}$ lük bir eğime bağlanamayacağı ve hareket denklemlerinde hızın eksenel bileşeninin ihmal edilmesi yüzünden, basit hesabın, basıncı küçük gösterdiğinin düşünülmesi gerektiği ortaya çıkmıştır.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

- [1] PEUBE, J.L., “Sur L’écoulement Radial Permanent d’un Fluide Visqueux Incompressible Entre Deux Plans Parallèles Fixes”. J. Mécanique, Cilt 2, No.4, sh.377-395, (1963).
- [2] SAVAGE, S. B., “Laminar Radial Flow Between Parallel Plates”. ASME J. Appl. Mech., Cilt 31, No.4 , 1964, sh. 594-596, (1964).
- [3] LEE, P.W., and LIN, S., “Pressure Distribution for Radial Inflow Between Narrowly Spaced Disks”. ASME J. of Fluids Engng., Cilt 107, No.3, sh. 338-341, (Eylül 1985).
- [4] HAYASHI, K. “Investigation on Externally Pressurized, Gas-Lubricated, Circular Thrust Bearing With Flexible Surface”. 8th Intl. Gas Bearing Symposium Leicester UK, Nisan 8-10, Cranfield. UK., BHRA Fluid Engng., sh. 1-18, (1981)
- [5] HAYASHI, K., and HIRASATA, K., “Comparison of Theoretical Characteristics of Two Types of Externally Pressurized, Gas-Lubricated, Compliant Surface Thrust Bearings”, Proc. of 13th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Leeds UK, Eylül 8-12, (1986).
- [6] GANS, R.F., JOHNSON A.G., MALANOSKI S.B., “Radial Flow Between Axisymmetric Nonparallel Plates of Small Slope.” ASLE / ASME Tribology Conference, Transactions of the ASME, 342 / Cilt 110, (Nisan 1988).
- [7] YUAN, S. W., “Foundations of Fluid Mechanics”, Prentice-Hall, New Delhi, sh. 277-278, (1969).
- [8] YALÇINKAYA, G. “Reiner-Rivlin Akışkanının Gözenekli İki Disk Arasındaki Hareketine ait Çözüm”. İ.T.Ü. Makina Fak, İstanbul, (1974).
- [9] ERDOĞAN, M.E. “Dönen İki Silindir Arasında Magneto hidrodinamik Akım”. İ.T.Ü., İstanbul, (1974).

EK. A : VİSKOZ SIKIŞTIRILABİLİR AKIŞKANLARIN SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDAKİ DENKLEMLERİ [7]

A.1 Silindirik koordinatlarda esas denklemler

A.1.1 Süreklilik denklemi

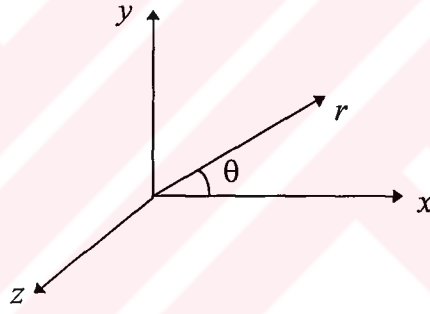
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\rho v_r}{r} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Sıkışmaz akışkan için : $\rho = s^t$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Hareket denklemleri



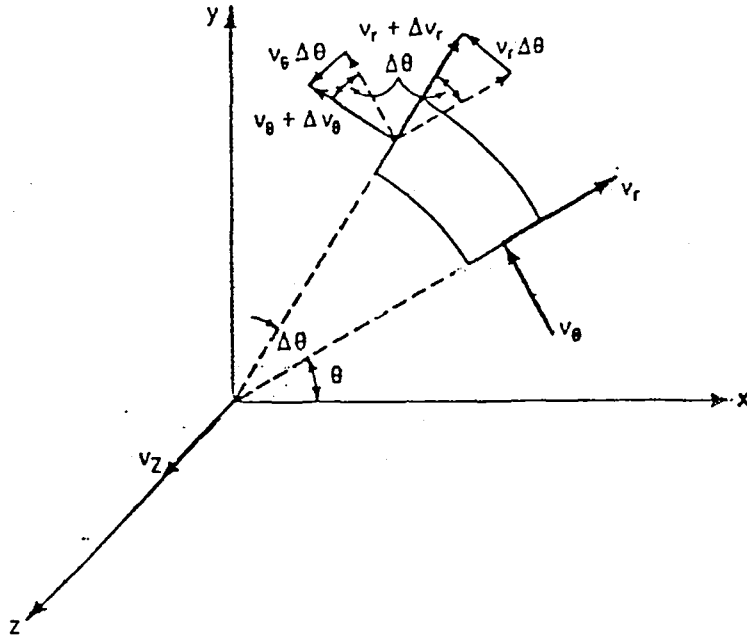
Şekil A.1 Silindirik Koordinatlar

Şekil A.1 de görülen r, θ, z silindirik koordinatlarda, atalet ve yüzey kuvvet terimleri incelenecektir. Şekil A.2 deki ivme vektörü bileşenleri, yüksek mertebe terimler ihmal edilerek şöyle yazılabilir:

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = i_r \left(\frac{Dv_r}{Dt} - v_\theta \frac{d\theta}{dt} \right) + i_\theta \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + v_r \frac{d\theta}{dt} \right) + i_z \frac{Dv_z}{Dt} \quad (\text{A.3})$$

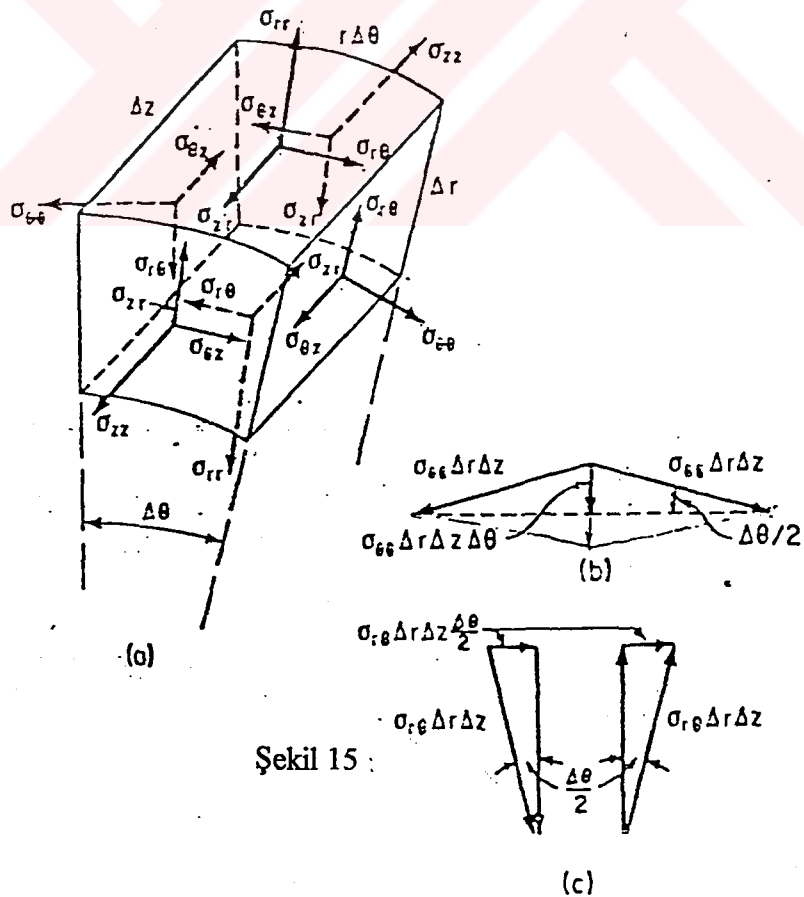
Burada v_r, v_θ, v_z hız bileşenleri ve i_r, i_θ, i_z birim vektörlerdir. $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$ yazarak

$$\iiint \rho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} d\tau = \iiint \left[i_r \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) + i_\theta \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r \cdot v_\theta}{r} \right) + i_z \frac{Dv_z}{Dt} \right] \rho d\tau \quad (\text{A.4})$$



Şekil A.2 Silindirik eleman üzerinde hızlar

Yüzey kuvvetlerinin bileşkesini yazmak için bir silindirik hacim elemanı alalım:



Şekil 15 :

Şekil A.3 Silindirik eleman üzerinde gerilmeler

$r - \theta$ düzleminde, $\sigma_{\theta\theta} \Delta r \Delta z$ normal kuvvetleri, r doğrultusunda $\sigma_{\theta\theta} \Delta r \Delta z \Delta \theta$ kuvvet bileşenlerini ve $\sigma_{r\theta} \Delta r \Delta z$ kayma kuvvetleri θ doğrultusunda bir $\sigma_{r\theta} \Delta r \Delta z \Delta \theta$ kuvvet bileşeni verirler (Şekil A.3b ve Şekil A.3c). Böylece yüzey kuvvetleri bileşeni :

$$F_s = i_r \left(\iint p_r \cdot dA - \iiint \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} r dr dz d\theta \right) + i_\theta \left(\iint p_\theta \cdot dA + \iiint \frac{\sigma_{r\theta}}{r} r dr dz d\theta \right) + i_z \left(\iint p_z \cdot dA \right) \quad (A.5)$$

Gauss diverjans teoremi uygulanarak :

$$F_s = i_r \iiint \left(\nabla \cdot p_r - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right) d\tau + i_\theta \iiint \left(\nabla \cdot p_\theta + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right) d\tau + i_z \iiint (\nabla \cdot p_z) d\tau \quad (A.6)$$

burada:

$$\begin{aligned} p_r &= i_r \sigma_{rr} + i_\theta \sigma_{r\theta} + i_z \sigma_{rz} \\ p_\theta &= i_r \sigma_{\theta r} + i_\theta \sigma_{\theta\theta} + i_z \sigma_{\theta z} \\ p_z &= i_r \sigma_{zr} + i_\theta \sigma_{z\theta} + i_z \sigma_{zz} \end{aligned}$$

Hacim kuvvetlerinin bileşkesi

$$F_B = \iiint (i_r X_r + i_\theta X_\theta + i_z X_z) d\tau \quad (A.7)$$

Silindirik koordinatlarda hareket denklemleri:

$$\nabla \cdot q = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \quad (A.8)$$

olduğu hatırlanarak^(*)

$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho X_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r \sigma_{rz})}{\partial z} \right] - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} = \quad (A.9)$$

$$\begin{aligned} &= \rho X_r + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) &= \rho X_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r \sigma_{\theta z})}{\partial z} \right] + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \quad (A.10) \\ &= \rho X_\theta + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \end{aligned}$$

^(*)Eğrisel koordinatlarda $\nabla \cdot A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 A_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial x_3} \right]$

Silindirik koordinatlar için

$$h_1 = 1; \quad h_2 = r; \quad h_3 = 1; \quad dx_1 = dz; \quad dx_2 = d\theta; \quad dx_3 = dr$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_z}{Dt} \right) &= \rho X_z + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial(r\sigma_{zz})}{\partial z} \right] = \\ &= \rho X_z + \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{aligned} \quad (A.11)$$

burada

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (A.12)$$

Gerilmelerle birim boy değişimi oranları arasındaki bağıntılar koordinat sistemlerinden bağımsız olduğundan, silindirik koordinatlarda şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\mu\epsilon_{rr} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot q \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu\epsilon_{\theta\theta} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot q \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu\epsilon_{zz} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot q \\ \sigma_{r\theta} &= \mu\gamma_{r\theta} \quad \sigma_{\theta z} = \mu\gamma_{\theta z} \quad \sigma_{zr} = \mu\gamma_{zr} \end{aligned} \quad (A.13)$$

Birim boy değişimi oranları, eğrisel koordinatlarda şöyle verilir:

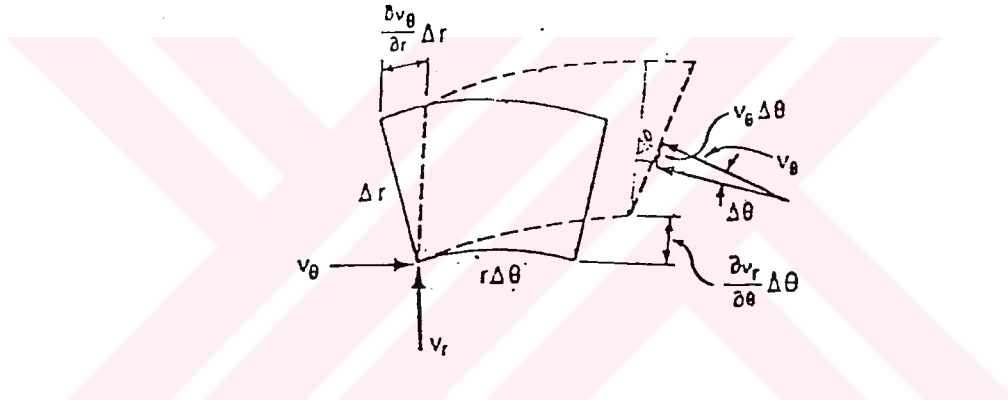
$$\begin{aligned} \epsilon_{x_1x_1} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial q_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{q_{x_2}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{q_{x_3}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \epsilon_{x_2x_2} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial q_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{q_{x_3}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{q_{x_1}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ \epsilon_{x_3x_3} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial q_{x_3}}{\partial x_3} + \frac{q_{x_1}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{q_{x_2}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\ \gamma_{x_1x_2} &= \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q_{x_2}}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{q_{x_1}}{h_1} \right) \\ \gamma_{x_2x_3} &= \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{q_{x_3}}{h_3} \right) + \frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{q_{x_2}}{h_2} \right) \\ \gamma_{x_3x_1} &= \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{q_{x_1}}{h_1} \right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{q_{x_3}}{h_3} \right) \end{aligned} \quad (A.14)$$

burada: q_{x_1} , q_{x_2} ve q_{x_3} sırası ile x_1 , x_2 ve x_3 doğrultusunda hız bileşenleridir.

Silindirik koordinatlarda:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \\
\gamma_{\theta z} &= r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\
\gamma_{zr} &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Şekil 16 daki dolu çizgili alan, $r-\theta$ düzlemindeki orijinal elemanı ve kesik çizgili alan deforme şeklini göstermektedir.



Şekil A.4 Eleman ve deforme şekli

Kayma deformasyonu oranı:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \Delta \theta}{r \Delta \theta} + \frac{\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) \Delta r}{\Delta r} - \frac{v_\theta \Delta \theta}{r \Delta \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \tag{A.16}$$

İlk iki terim karteziyen koordinatlardaki gibidir; üçüncü terim v_θ nın r doğrultusundaki hız deformasyonuna katkısıdır. Diğer beş deformasyon oranı bileşeni de benzer şekilde yorumlanabilir. Şimdi denklemlerdeki gerilme - deformasyon oranı ifadelerini ve deformasyon oranı - hız gradienti bağıntılarını hareket denklemlerine taşırsak, silindirik koordinatlarda sıkıştırılabilir viskoz akışkanların hareket denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = & \rho X_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot q \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = & \rho X_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{v_r}{r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot q \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{Dv_z}{Dt} \right) = & \rho X_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \nabla \cdot q \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Bazı özel durumlarda denklemler şu şekli alır:

Sabit viskoziteli, viskoz sıkıştırılabilir akışkan

$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho X_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot q) \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho X_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \cdot q) \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho X_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\nabla^2 v_z + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot q) \right] \quad (\text{A.22})$$

Burada:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.23})$$

Viskoz sıkıştırılmaz akışkan

$$\rho = \rho^t$$

$$\mu = \mu^t$$

$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho X_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho X_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (\text{A.25})$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho X_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v_z \quad (\text{A.26})$$

Viskoz olmayan akışkan

$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho X_r - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (\text{A.27})$$

$$\rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho X_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (\text{A.28})$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho X_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{A.29})$$

EK. B BÜYÜKLÜKLERİN BOYUTLARI

<u>Büyüklik</u>	<u>Senbol</u>	<u>Boyut</u>	<u>S.I.</u>
Yarıçap	R_0	L	m
Aralık	h_c	L	m
Eğim	b	1	1
Kütleli debi	$\dot{m}$	NTL^{-1}	Ns/m
Viskozite	μ	NTL^{-2}	Ns/m^2
Yoğunluk	ρ	NT^2L^{-4}	Ns^2/m^4

ÖZGEÇMİŞ

İstanbul’da 1967 yılında doğan Şûle Celasun, ilk öğreniminden sonra, Saint Benoit lisesini takdirle bitirerek girdiği İ.T.Ü. Makina Fakültesinden iyi derece ile mezun oldu. Stajlarını Fransa ve Polonya’da yaptı. Yüksek lisans öğrenimini İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Makina Teorisi ve Kontrol Programında başarı ile tamamlayarak Yüksek Lisans Tezini hazırladı. Halen İ.T.Ü. Makina Fakültesi Mekanik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

