EŞDEĞER TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ

Ahmet Yalçın AKÖZ
Maltepe Üniversitesi, İstanbul
yakoz@maltepe.edu.tr

ÖZET

Eğilme çubuklarında tpe nin hesabı çubuğun elastik eğrisinin bilinmesini gerektirir. Elastik eğri başlangıçta bilinmediği için tpe keyfi dış yükler altındaki eğilme çubuklarındaki çubuklarda kullanılamaz. Bu çalışmada çubuğun gerçek elastik eğrisine ihtiyaç duyulmayan bir fonksiyonel geliştirilmiş ve fonksiyonele *eşdeğer toplam potansiyel enerji* adı verilmiştir. $\overline{\pi}$ ile göstertilen yeni fonksiyonel enerji teoremlerinin uygulama alanını genişletmiş ve hiperstatik problemlere çözüm kolaylığı getirmiştir.

ABSTRACT

In this study a new functional is developed which is called equivalent total potential energy (etpe) and shown by $\overline{\pi}$. This functional expressed in terms of nodal displacements and external loads. Etpe theorem expand on the application field of existing the energy theorems and brings the big simplicity to the solution of the hyperstatics problems.

1.GİRİŞ

Çubuk teorisi; denge denklemleri, çubuk kinematiğini belirleyen Bernoulli-Navier hipotezi ile bünye bağıntılarından oluşur. Çubuk mukavemeti ve çubuk teorisi için kaynaklara başvurulabilir. [1,2].

Çubuklar, diferansiyel denklemler yerine bazı fonksiyonelleri ekstramum yaparak da analiz edilebilir. Çubuklar için anahtar teorem virtüel iş teoremidir. Virtüel iş teoremi kullanılarak diğer bütün teoremler elde edilebilir. π tpe ifadesi yer değiştirmelerin fonksiyonudur. Bunun ekstramum yapılması denge denklemlerine karşı gelirken π^* tamamlayıcı enerji iç kuvvetlerin fonksiyonudur. Bunun ekstramum yapılması ise uygunluk koşullarına karşı gelir. Bu konuda daha geniş bilgi için kaynaklara baş vurulabilir.[1,3,4]

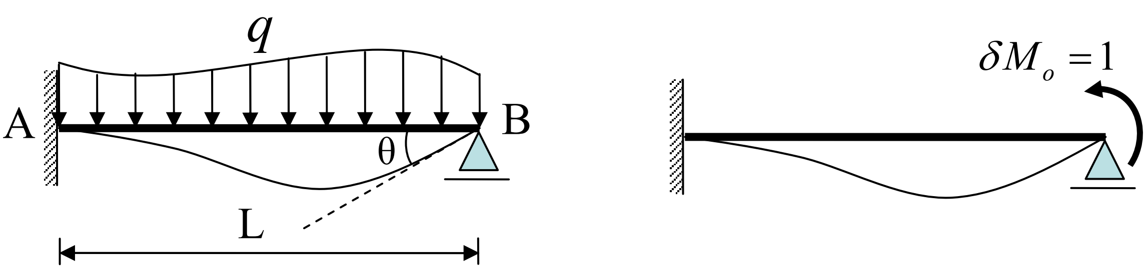
π tpe elastik eğrinin fonksiyonudur. İşin başında elastik eğri bilinmezse bu teorem, elastik eğri için yaklaşık fonksiyonlar seçilerek, sonlu elemanlar ve Ritz metodunda olduğu gibi, yaklaşık çözümlere ulaşılabilir. Çubuğun iç enerjisinin hesabında elastik eğriye ihtiyaç duyulmayan kafes sistemler gibi yapılarda tpe yöntemi büyük kolaylıklar sağlar.

Bu çalışmada, virtüel iş teoremi kullanılarak, çubuğun kendi üzerinde de dış yükler bulunduğu hallere ait fonksiyonel geliştirilecektir. Diferansiyel denklemlerden fonksiyonele geçmek için Mikhlin teoremi doğrusal ve kendine eş sistemlerde kullanılabilen bir yöntemdir. Doğrusal olamayan halleri de içine alan problemlerde Gateaux yöntemi kullanılabilir. Bu iki yöntem için kaynaklara başvurulabilir [5,6].

Enerji teoremlerinin bugünkü düzeye ulaşmasında kuşkusuz birçok araştırmacının katkısı vardır. İlk akla gelen isimler John Bernoulli öğrencisi Euler, Castigliano, Lagrange, Hilbert, Gateaux isimleri sayılabilir. Bu konuda tam bilgi literatürden bulunabilir. [7,8].

2. DÖNME ÇUBUĞU

Keyfi yükler altında, bir ucu ankastre diğer ucu mafsal olan çubuğu dönme çubuğu olarak isimlendirelim. Bu çubuğun ucundaki θ dönmesini hesaplamak için aynı taşıyıcı sistemin mafsallı ucuna $\delta M = 1$ momenti etkiyen sistemi virtüel sistem olarak alalım. Şekil(2.1.ab)



Gerçek sistem (a) Virtüel sistem (b)

Şekil(2.1)

Gerçek sistemin iç kuvvetleri (T,M) yer değiştirmeleri (v,Ω) eğriliği ω ile, virtüel sistemde aynı büyüklükler üstü çizgili simgelerle gösterilsin. Virtüel iş teoreminden

$$\int_0^L \omega.\overline{M}\, dz = \theta \tag{2.1}$$

Yazılabilir. Çubukların doğrusal elastik malzemeden yapıldıklarını düşünerek

$$\int_0^L \overline{\omega}.M\, dz = \theta \tag{2.2}$$

yazılabilir. Virtüel sistemin eğriliği yerdeğiştirme cinsinden

$$\overline{\omega} = -\overline{v}'' \tag{2.3}$$

ifade edilip Denklem (2.2) te yerine konup iki kez ardışık integral alınırsa

$$-\overline{v}'M\Big|_0^L + \dot{v}M'\Big|_0^L - \int_0^L M''\overline{v}dz = \theta \tag{2.4}$$

elde edilir. Denge koşulundan

$$M'' = -q \tag{2.5}$$

olduğu ve integral terimlerinin her sınır koşulu için sıfır olduğu düşünülürse

$$\theta = \int_0^L \bar{v} q dz \tag{2.6}$$

gibi basit bir ifade elde edilir ki burada $\bar{v}$ virtüel sisteme ait elastik eğri, q ise gerçek sistemin dış yükleridir. Bir ucunda birim moment taşıyan sistemin elastik eğrisi

$$\bar{v}(z) = \frac{1}{4EI}\frac{z^2}{L}(L-z) \tag{2.7}$$

olarak hesaplanabilir. Bu değer Denklem(2.7) de yerine konursa dönme

$$\theta = \frac{L}{4EI}\int_0^L q(z)\frac{z^2}{L^2}(L-z)dz \tag{2.8}$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı her türlü yük için çok basit bir biçimde uç dönmeyi verir. Buradan asıl amaçladığımız enerji bağıntısına geçebilmek için, sağda integral dışındaki çarpan katsayıyı sola geçirip, her iki yanı $\delta\theta$ ile çarparsak

$$\frac{4EI}{L}\theta\delta\theta = \int_0^l q(z)\frac{z^2}{L^2}(l-z)\delta\theta dz \tag{2.9}$$

bulunur. Aşağıdaki tanımları yapalım

$$\delta\bar{U} = \frac{4EI}{L}\theta\delta\theta$$

$$\delta\bar{v} = \frac{z^2}{L^2}(l-z)\delta\theta \tag{2.10}$$

$$\delta\bar{V} = \int_0^L q\delta\bar{v}\, dz$$

elde edilir. Bu değerler kullanılarak Denklem (2.19)

$$\delta\bar{U} = \delta\bar{V} \tag{2.11}$$

haline gelir. δ varyasyon (değişim) operatörünün dağılma özelliği kullanılarak yukarıdaki bağıntı

$$\delta(\bar{U} - \bar{V}) = 0 \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\bar{\pi} = \bar{U} - \bar{V} \tag{2.13}$$

$\bar{\pi}$ ye *eşdeğer toplam potansiyel* adını verelim ve bundan sonra kısaca etpe kısaltmasını kullanacağız. Değişim hesabı ve denklem (2.10) kullanılarak

$$\bar{U} = \frac{4EI}{L}\theta^2$$

$$\bar{v} = \frac{z^2}{L^2}(l-z)\theta \tag{2.14}$$

$$\bar{V} = \int_0^L q\delta\bar{v}\, dz$$

yazılabilir. Bu tanımlardan sonra etpe ifadesi

$$\bar{\pi} = \frac{2EI}{L}\theta^2 - \theta\int_0^L q\frac{z^2}{L^2}(L-z)dz \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen sonucu

Teorem: ***Dönme çubuğunun gerçek uç dönmesi eşdeğer toplam potansiyel enerji ifadesini ekstramum yapar***.

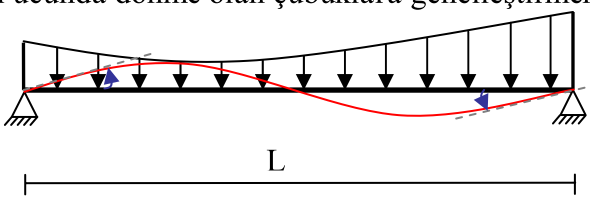
şeklinde ifade edebiliriz. Bu ekstramum değerin en küçük değer olduğunu göstermek çok kolaydır. θ nın Denklem (2.9) veya (2.11) ü sağladığını kabul edelim. Diğer bir deyişle θ gerçek çözüm olsun. Şimdi $\delta\theta$ keyfi küçük bir değer olmak üzere etpe nin $\theta+\delta\theta$ deki değeri ile θ deki değeri arasında farkı alırsak (tabii Denklem (2.12) ün sağlandığını düşünerek)

$$\bar{\pi}(\theta+\delta\theta) - \bar{\pi}(\theta) = \frac{2EI}{L}\delta\theta^2 > 0 \tag{2.16}$$

farkının her zaman pozitif olduğu görülür. Bu sonuçtan sonra yukarıdaki Teorem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem: : ***Dönme çubuğunun gerçek uç dönmesi eşdeğer toplam potansiyel enerji ifadesini en küçük yapar***.

Yukarıdaki sonuçları iki ucunda dönme olan çubuklara genelleştirmek çok kolaydır.



Şekil (2.2)

Şekil (2.2) de gösterilen dönmeler pozitif olmak üzere, solda θ_1 sağda θ_2 dönmesi yapan elastik eğri denklemi

$$v = -\theta_1\frac{(L-z)^2}{L^2}z + \theta_2\frac{z^2}{L^2}(L-z) \tag{2.17}$$

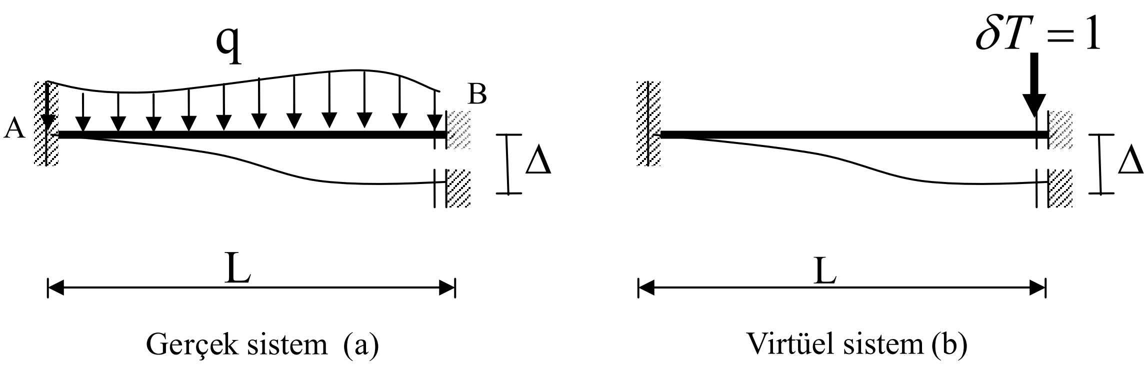
Bu elastik eğri tpe ifadesinde yerine konursa etpe

$$\bar{\pi} = \frac{2EI}{L}(\theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \theta_2^2) - \int_0^L qvdz \tag{2.18}$$

elde edilir.

3.ÇÖKME ÇUBUĞU

Bir ucu ankastre diğer ucu dönmeden çökebilen çubuğa çökme çubuğu adını verelim.
Şekil (3.1)



Şekil(3.1)

Bu çubuğun keyfi dış yükler altındaki Δ çökmesini hesaplayabilmek için aynı taşıyıcı sistemin ucuna $\delta T = 1$ etkiyen sistemi virtüel sistem olarak tanımlayalım. Şekil(3.1.b). Virtüel iş teoremi kullanılarak çökme

$$\Delta = \int_0^L \omega \overline{M} dz \tag{3.1}$$

olarak hesaplanır. Çubuğun doğrusal elastik malzemeden yapıldığını kabul ederek virtüel ve gerçek büyüklükler yer değiştirir Ayrıca eğrilik yerine elastik eğrinin ikinci türevi konursa çökme

$$\Delta = -\int_0^L \bar{v}'' M dz \tag{3.2}$$

elde edilir.Yukarıdaki bağıntının ardışık integrali alınırsa

$$\Delta = -\bar{v}' M\Big|_0^L + \bar{v} M'\Big|_0^L - \int_0^L M'' \bar{v} dz \tag{3.3}$$

bulunur. Şekil (3.1) den görüleceği gibi integral terimleri her hal için sıfırdır. Momentin ikinci türevinin de dış yükün eksi işaretine eşit olduğu düşünülürse çökme aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Delta = \int_0^L q \bar{v} dz \tag{3.4}$$

Burada elastik eğri Şekil (3.1.b) nin sınır koşullarını sağlayacak eğri olup kolayca aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\bar{v} = \frac{z^2}{12EI}(3L - 2z)\delta T \tag{3.5}$$

Bu sonuç Denklem (3.3) te yerine konup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{12EI}{L^3}\Delta\delta\Delta = \int_0^L q \frac{z^2}{L^3}(3L - 2z)\delta\Delta \, dz \tag{3.6}$$

elde edilir. Aşağıdaki kısaltmalar kullanılarak

$$\delta\overline{U} = \frac{12EI}{L^3}\Delta\delta\Delta$$

$$\delta\overline{v} = \frac{z^2}{L^3}(3L - 2z)\,\delta\Delta \qquad (3.7)$$

$$\delta\overline{V} = \int_0^L q\frac{z^2}{L^3}(3L - 2z)\delta\Delta\, dz$$

Denklem (3.6) dönme halinde olduğu gibi Denklem (2.11)-Denklem (2.13) lerini izleyerek çökme halinde etpe ifadesi elde edilir.

$$\overline{\pi} = \overline{U} - \overline{V} \qquad (3.8)$$

Burada

$$\overline{U} = \frac{6EI}{L^3}\Delta^2 = \int_0^L \frac{1}{2}EI\overline{v}''^2 dz$$

$$\overline{V} = \int_0^L q\overline{v}dz \qquad (3.9)$$

$$\overline{v} = \frac{z^3}{L^3}(3L - 2z)\Delta$$

olarak tanımlanmıştır.

Elde edilen bu sonuç iki ucunda çökme olan hale kolaylıkla genişletilebilir. Bunun için sol ucu Δ_1 sağ ucu Δ_2 kadar çöken çubuğun elastik eğrisi

$$\overline{v}(z) = \left(1 - 3\frac{z^2}{L^2} + 2\frac{z^3}{L^3}\right)\Delta_1 + \frac{z^2}{L^3}(3L - 2z)\Delta_2 \qquad (3.10)$$

olarak bulunabilir. Bu elastik eğri ifadesi klasik tpe ifadesinde yerine konursa

$$\overline{\pi} = \overline{U} - \overline{V}$$

$$\overline{U} = \frac{6EI}{L^3}(\Delta_1 - \Delta_2)^2 = \int_0^L \frac{1}{2}EI\overline{v''}^2 dz \qquad (3.11)$$

$$\overline{V} = \int_0^L q\,\overline{v}(z)dz$$

olarak elde edilir.

4. EKSENEL ÇUBUK

Bütün yer değiştirmeleri sisteme katabilmek için benzer işlemleri eksenel çubuk diye adlandırdığımız Şekil(4.1) deki p eksenel yükleri etkisindeki çubuğun q_4 hesaplamak için Şekil(4.1.b) deki $\delta N = 1$ uç kuvveti etkiyen çubuğu virtüel sistem olarak alırsak

Gerçek sistem (a)

Virtüel sistem (b)

Şekil(4.1)

yine virtüel iş denklemini yazarsak

$$\int_0^L \varepsilon\overline{N}dz = q_4 \tag{4.1}$$

Doğrusal elastik malzeme kabulü ile

$$q_4 = \int_0^L N\overline{\varepsilon}dz \tag{4.2}$$

yazılabilir.

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{u}}{dz} \tag{4.3}$$

tanımı yerine konur ve ardışık integral alınırsa

$$q_4 = \overline{u}N\Big|_0^L - \int_0^L N'\overline{u}dz \tag{4.4}$$

integral sabitinin sıfır olduğu ve eksenel denge denkleminden iç kuvvetin türevi yerine eksenel dış yük yazılırsa

$$q_4 = \int_0^L p\overline{u}dz \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada

$$\overline{u} = \frac{z}{EA} \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanır. Bu sonuç Denklem (4.5) te yerine konur daha önceki bölümlerdekine benzer işlemler yapılırsa eksenel zorlamalar için etpe ifadesi

$$\overline{U} = \int_0^L \frac{EA}{2}u'^2dz$$

$$u = \frac{z}{L}q_4 \tag{4.7}$$

$$\overline{\pi} = \frac{EA}{2L}q_4{}^2 - \int_0^L pudz$$

Bu sonuçlar benzer şekilde iki ucunda yer değiştirme yapan çubuklara da kolayca genelleştirilebilir. Bundan sonraki bölümde en genel hali topluca vereceğiz.

5.GENEL HAL

Keyfi dış yükler altında mümkün olan bütün yer değiştirmeleri yapabilen çubuğun pozitif uç yer değiştirmelerini Şekil(5.1)deki gbi gösterelim.

Şekil (5.1)

Yüksüz çubuğun uçlarında q_i yer değiştirmelerinin toplamı çubuğun genel yer değiştirmesi olarak alınır ve bu değer kullanarak iç enerji ve dış kuvvetlerin potansiyeli hesaplanırsa sistemin eşdeğer toplam potansiyel enerji ifadesi elde edilmiş olur. Öyleyse öncelikle U iç enerji ifadesini bulmamız gerekir. Şekil (5.1) deki uç yer değiştirmelerinin, birisi eksenel diğeri eğilmeden kaynaklanan ve kesit kalınlığı boyunca doğrusal değişen iki şekil değiştirme içerdiğini görürüz. Bu şekil değiştirme

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \omega y \tag{5.1}$$

olarak yazılabilir. Bu şekil değiştirme ifadesi çubuğun toplam iç enerjisini bulmak için kullanılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$U = \int_0^L dz \int_A \frac{E\varepsilon^2}{2} dA$$

$$U = \int_0^L \frac{E}{2} dz \int_A \left\{ \varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0 \omega y + \omega^2 y^2 \right\} dA \tag{5.2}$$

$$U = \int_0^L \left\{ \frac{EA}{2} u'^2 + \frac{EI}{2} v''^2 \right\} dz$$

Buradaki u(z), v(z) elastik eğri fonksiyonları buraya kadar ayrı ayrı bulunan fonksiyonlar olup şimdi hepsini toplu olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$u = (1 - \frac{z}{L}) q_1 + \frac{z}{L} q_4$$

$$v = \left(-1 + 3\frac{z^2}{L^2} - 2\frac{z^3}{L^3} \right) q_2 - \frac{(L-z)^2}{L^2} z q_3 + \frac{z^2}{L^3} (2z - 3L) q_5 + \frac{z^2}{L^2} (L - z) q_6 \tag{5.3}$$

Bu değerler Denklem(3.2) nin son bağıntısında yerine konursa eşdeğer iç enerji uç yer değiştirmeleri cinsinden

$$\overline{U} = \frac{EA}{L} (q_1 - q_4)^2 + \frac{2EI}{L} \left(q_3^2 + q_3 q_6 + q_6^2 \right) + \frac{6EI}{L^3} \left\{ (q_2 - q_5)^2 + L (q_2 - q_5)(q_3 + q_6) \right\} \tag{5.4}$$

elde edilir. Bu elde edilenlerden sonra çubuğun düzlem hal için eşdeğer toplam potansiyel enerjisi:

$$\overline{\pi} = \overline{U} - \int_0^L q v dz - \int_0^L p u dz \tag{5.5}$$

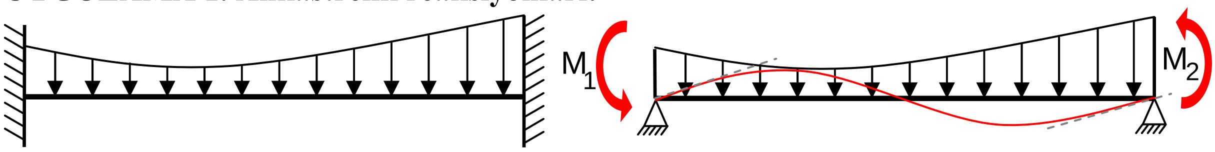
olarak yazılabilir. En genel halde sonuç:

Teorem: ***Çubuğun gerçek uç yer değiştirmeleri eşdeğer toplam potansiyel enerji ifadesini en küçük yaparlar.***

6.UYGULAMALAR

Ortaya konan bu teorem, ilk defa keyfi dış yük etkisindeki çubuk veya çubuk sistemlerinin uç yer değiştirmeler cinsinden toplam potansiyel enerji benzeri bir enerji teoremi ile çözülmesini mümkün kılmıştır. Toplam potansiyel enerji teoreminin uygulama alanı genişletilmiş yorumu yapılabilir. Teoremin problem çözümlerine getirdiği kolaylığı birkaç tipik örnekte gösterelim.

UYGULAMA 1. Ankastrelik reaksiyonları:



Şekil (6.1)

Önce keyfi yükler altındaki çubuğun bulunmak istenen etkiler ve bunlara ait yer değiştirmeler (dönmeler) serbesgt bırakılacak şekilde serbst cisim diyagramı çizilir. Şekil (6.1b) Sonra bunua ait etpe ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\pi} &= \frac{2EI}{L}\theta_1^2 + \frac{2EI}{L}\theta_2^2 + \frac{2EI}{L}\theta_1\theta_2 - M_1\theta_1 - M_2\theta_2 \\ &-\int_0^L q\left\{-\frac{(L-z)^2}{L^2} z\theta_1 + \frac{z^2}{L^2}(L-z)\right\}dz\end{aligned} \qquad (6.1)$$

ifadesinin değişimi (varyasyonu) alınır ve değişim ifadesi üzerinde $\theta_1 = \theta_2 = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned}M_1 &= \int_0^L q\frac{(L-z)^2}{L^2} zdz \\ M_2 &= -\int_0^L q\frac{z^2}{L^2}(L-z)dz\end{aligned} \qquad (6.2)$$

elde edilir. Uç kuvvetler de bulunmak istenirse moment değerler ve denge denklemleri kullanılarak sonuca gidilebileceği gibi çok daha kısa yoldan sonuca gitmek için yukarıdaki gibi sadece uç kuvvetleri açıkta tutan serbest cisim diyagramı çizilir ve buna ait etpe ifadesi yazılarak bunun değişimi alınırsa

$$\begin{aligned}T_1 &= \int_0^L q\left(1-3\frac{z^2}{L^2}+2\frac{z^3}{L^3}\right)dz \\ T_2 &= \int_0^L q(3L-2z)\frac{z^2}{L^3}dz\end{aligned} \qquad (6.3)$$

bulunmuş olur. Bu bağıntıların denge denklemlerini sağladığını görmek çok kolaydır. Bu sonuçlara bilinen yöntemlerle özel yükler halinde bile ulaşmak oldukça zor olduğu düşünülecek olursa yöntemin getirdiği kolaylığı görmek mümkündür.

Özel olarak soldan a, sağdan b uzaklıkta çubuğa P tekil kuvveti etkilesin. Dış yük Drac fonksiyonu cinsinden

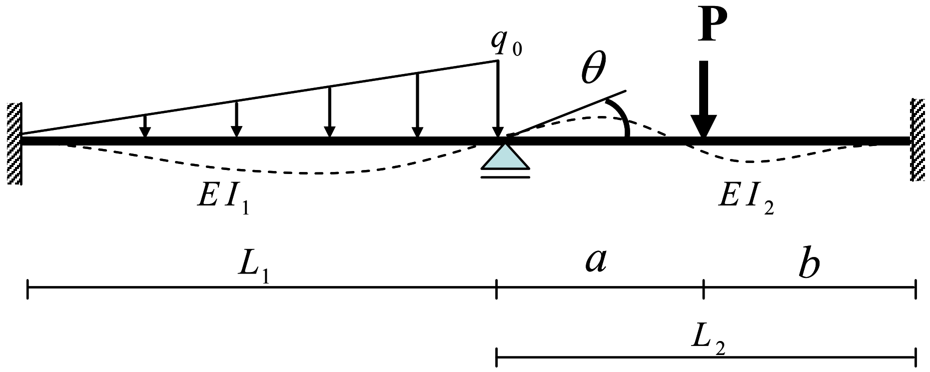
$$q = \delta(z-a) \qquad (6.4)$$

yazılıp Denklem (6.1) ve (6.3) te yerine konursa

$$M_1 = \frac{ab^2}{L^2}P \quad M_2 = -\frac{a^2b}{L^2}P \quad T_1 = \left(1-3\frac{a^2}{L^2}+2\frac{a^3}{L^3}\right)P \quad T_2 = (3L-2a)\frac{a^2}{L^3}P \qquad (6.5)$$

sonuçları bulunur.

UYGULAMA 2 . Sürekli sistemler



Şekil (6.2)

Sistemin etpe si yazılıp değişimi yazıldıktan sonra

$$\bar{\pi} = \frac{2EI_1}{L_1}\theta^2 + \frac{2EI_2}{L_2}\theta^2 - \int_0^{L_1} \frac{q_0 z}{L_1}\left\{\frac{z^2}{L_1^2}(L_1 - z)\theta\right\}dz + \frac{ab^2}{L_2^2}P\theta \tag{6.6}$$

$$L_1 = L_2 = L \qquad P = \frac{q_0 L}{2} \qquad a = b = \frac{L}{2}$$

özel hali için θ dönme açısı

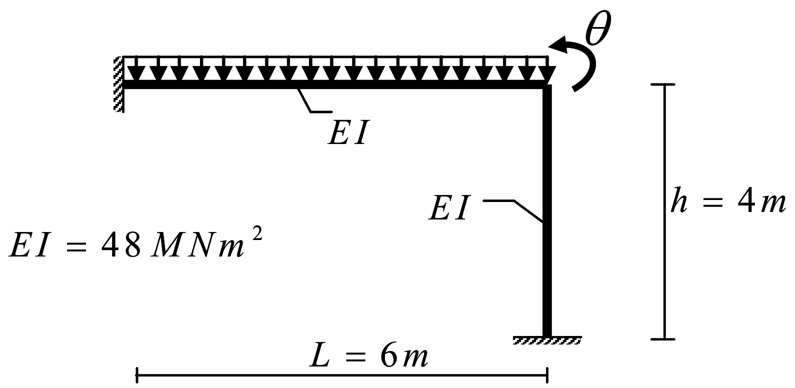
$$\theta = -\frac{L^2}{160(1+\alpha)}\frac{P}{EI} \tag{6.7}$$

elde edilir. Bir önceki örnekteki yöntemle her parçanın SCD çizilip etpe lerinin değişimleri alındıktan sonra açıların bilinen değerleri yerine konarak momentler

$$M_1 = \frac{(13+16\alpha)}{240(1+\alpha)}PL \qquad M_2 = -\frac{(5+4\alpha)}{40(1+\alpha)}PL$$
$$M_3 = \frac{(5+4\alpha)}{40(1+\alpha)}PL \qquad M_4 = -\frac{(11+10\alpha)}{80(1+\alpha)}PL \tag{6.8}$$

UYGULAMA 3 Yarım çerçeve

Sadece düğüm noktasındaki dönme bilinmeyen olarak alınır ve sistemin etpe'si yazılır. Sonra etpe'nin değişimi yazılarak sıfıra eşitlenir.



Şekil (6.4)

$$\overline{\pi} = \left(\frac{2EI}{L} + \frac{2EI}{h}\right)\theta^2 - \int_0^L q\frac{z^2}{L^2}(L-z)\theta dz \tag{6.9}$$

Bunun değişimi alınırsa

$$\delta\overline{\pi} = \left\{\left(\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{h}\right)\theta - \frac{qL^2}{2}\right\}\delta\theta = 0 \tag{6.10}$$

Buradan değerler yerine konarak dönme

$\theta = 0.375x10^{-3}$

Momentler, her elemanın SCD üzerinde etpe'si yazılarak daha önceki işlemlerin benzeri işlemler sonucu

$M_1 = 36\ kNm \quad M_2 = -18\ kNm \quad M_3 = 18\ kNm \quad M_4 = 9\ kNm$

bulunur. Eğer köşe noktanın yatay ve düşey yer değiştirmeleri de göz önüne alınıp üç bilinmeyen için Denklem(5.5) kullanılarak aynı işlemler tekrarlanırsa bukez dönme

$\theta = 0.374499x10^{-3}$

Momentlerse:

$M_1 = 36.23\ kNm \quad M_2 = -17.78\ kNm \quad M_3 = 17.78\ kNm \quad M_4 = 8.79\ kNm$

bulunur.

7.SONUÇLAR

- Çubuklar için, uç yer değiştirmelere bağlı bir fonksiyonel geliştirilmiştir. Bu fonksiyonele eşdeğer toplam potansiyel enerji adı verilmiştir. (etpe)
- Yüksüz çubuğun uçlarında q_i yer değiştirmelerinin toplamı çubuğun genel yer değiştirmesi olarak alınır ve bu değer kullanarak iç enerji ve dış kuvvetlerin potansiyeli hesaplanırsa sistemin eşdeğer toplam potansiyel enerji ifadesi elde edilmiş olur
- Gerçek uç yer değiştirmeleri (etpe) yi en küçük yaparlar.
- Ankastrelik reaksiyonlarının her türlü yük için basit bir biçimde elde edildiği görülmüştür.
- Etpe ifadesi kullanılarak çubuk sistemler kolayca çözülebilir.

Teşekkür: Bu bildirinin şekilleri İTÜ İnş. Fak. Araştırma Görevlisi Murat Yılmaz tarafından çizilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] M.İnan, "Cisimlerin Mukavemeti" Arı Kitapevi-1967
[2] M.İnan, "Elastik çubukların Genel Teorisi" İTÜ 1966
[5] A.Y.Aköz, H.Demiray, E.İnan"Şekil Değiştiren Cisimler Mekaniği" K.Ü.1987 A.Ertepınar, O.Aksoğan
[4] A.Y.Aköz, "Enerji Yöntemleri" Birsen Yayınevi 2005
[3] T.R. Tauchert, "Energy principles in structural mechanics" Mc-Graw-Hill 1974
[6] Oden, S.T.,J.N.Reddy, " Variational methods in theoretical mechanics" Springer-Verlag,1976
[7] Dugas R., "A history of mechanics Central Boo", New York 1955
[8] Smith D.E. ,"History of mathematics Vol 1 and Vol2" Dover New York 1951