İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CHERN-SİMONS TERİMİ OLMAKSIZIN ANYONLARIN KUANTUM ALANI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Sebahattin ÜNAL

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Haziran 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1995

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Mahmut HORTAÇSU

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Hasan R. KARADAYI

Prof.Dr.Jan KALAYCI

HAZİRAN

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyen sevgili eşime ve değerli hocam Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmamızda, 2+1 boyutlu bir relativistik ayar teorisinde chern-simons terimi kullanmadan anyon alanı kurmaya çalıştık. Zira bu çalışma ref (1)'de ele alınmıştır. Ayrıca referans (6)'da da bu çalışma chern-simons terimi varlığında kurulmuştur. Burda C-S teriminde var olan yenilik topolojik alanın benzer olarak farklı iki korunan dağılımın hesaba katılması ve $Q+ \Phi \approx N$ şeklinde gauss kanunu sağlamasına rağmen chern- simons terimi olamadığında bunun $Q \approx N$ olduğunu görmeye çalıştık bu işi yaparken örgü istatistiğinde, 2+1 boyutta relativistik ayar teorisi içinde yüklü alanları tanımlamak suretiyle yaptık.

Topolojik olarak ifade ettiğimiz Q,Φ ve χ yüklü alanlarının birbirleriyle komintasyon ilişkilerini gösterdik. Bu işi yaparken korunumlu akımları da hesaba katmayı ihmal etmedik.

Biz Chern-Simons terimi olmaksızın örgü istatistiklerin, 2+1 boyutlu relativistik kuantum ayar teorisinde geçerli olacağını ve de anyonların ortaya çıkmas 2+1 boyutta hem elektirik hemde magnetik akıyı taşıyan yüklü bölgelerin evrensel özelliği olduğunu göstermeye çalıştık.

ANYON QUANTUM FIELDS WITHOUT A CHERN-SİMONS TERM

SUMMARY

Braid-group statistics CS in (2+1)-dimentional quantum field theory represent a striking theoretical which has interesting, although not fully confirmed phenomenological applications to quasi-planar condensed matter systems. A riqorous analysis of braid statistics has been performed [2] in the framework of axiomatic field theory.

A comparison of the abstract results with the known quantum field realizations of anyons reveals however a sort of discrepancy. On the hand, all the known examples [9-6] make use at some stage of the Chern-Simon lagrangian

$$\mathcal{L}_{c\text{-}s}=\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\mu}A^{\nu}A^{\rho}$$

Which violates separately parity (P) and time reversal (T) invariance. So the natural question arises if it is possible to contruct anyon quantum fields without using the Cherm-Simons lagrangian. We give an affimative answer to this question.

Our strategy for avoiding $\mathcal{L}_{c\text{-}s}$ will be to generalize the construction of anyons recantly developed in ref [6]. The fundamental properties of anyon fields proposed are:

i) localization in space-like cones

ii) appearance of both "electric' and 'magnetic' cones.

We first show that these features can be implemented in 2+1 dimentional even in the absence of the Cherm-Simons term. Second we demonstrate that in many cases (i) and (ii) are actually sufficient for achieving anyon statisties.

The class of model we are going to consider in the Minkowski space-time is described by the classical action.

$$S=\int d^3x[-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-B\partial^{\mu}A_{\mu}+(1/2)\zeta B^2-\partial_{\mu}\varepsilon\partial^{\mu}+(D_{\mu}\varphi)^*(D^{\mu}\varphi)-U(\varphi^*\varphi)]$$

Poisson brackets will be convenient for what follows to express the BRS charge in term of canonical coordinats.

The following conserved currents

$$J_{\mu}=ie[\varphi(D_{\mu}\varphi)^*-\varphi^*D_{\mu}\varphi]$$

$$k_{\mu}=\partial^{\nu}F_{\mu\nu}, \qquad I_{\mu}=\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\nu}A^{\rho}$$

will enter our discussion below. With appropriate boundary conditions on the basic fields currents give rise to the conserved charges;

a) U(1) charge,

$$N=ie\int d^2x(\varphi\pi_\varphi-\rho^*\pi_{\varphi^*})$$

b) electric charge

$$Q=\int d^2x\partial_i\pi^i$$

c) magnetic fluxe

$$\phi=\int d^2x\varepsilon_{ij}\partial^i A^i \qquad (\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{oij})$$

in order to construct physical sectors carrying non-trivial electric charge or magnetic flux we introduce the fields

$$\rho(x,a)=\varphi(x)\exp[-ie\int d^2y a^i(x-y)A_i(x_o,y)]$$

$$\sigma(x,b)=\exp[ig\int d^2y b_i(x-y)\pi^i(x_o,y)$$

a^i and b_i are real-valued distributions. we impose the conditions

$$\{Q_{BRS}, \rho(x,a)\}=0$$

$$i\{\phi, \sigma(x,b)\}=\rho\sigma(x,b)$$

and

$$\partial_i a^i(x)=\delta(x) \qquad \text{(i)}$$

$$\int d^2x\varepsilon^{ij}\partial_i b_j(x)=1 \qquad \text{(j)}$$

Summarising, ρ and σ are BRS-invariant composite field. Whose charge content is determined by eqs (16), (19), (20) As expected the Gauss law Q=N is satisfied.

A fundamental role is played in what follows by the composite field;

$$\chi(x,\zeta)=\rho(x;a)\sigma(x;b)$$

Where ζ is a shorthand notation for set of variables

$\{a, b, e, \rho\}$

$b_i= -\varepsilon_{ij}.\ a^i$

The latter is easily solved; a convenient parametrization of the solutions in momentum space is

$$a^i(p)= i\int_0^{2\Pi} d\theta\tau(\theta)n^i 1/(np+i\varepsilon)$$

$$\int_0^{2\Pi} d\theta\,\tau(\theta)=1$$

Performing the inverse Fourier transform one finds.

$$a^i(x)=\int_0^{\infty} dse^{-s\varepsilon}\int_0^{2\Pi} d\theta\tau(\theta)n^i\delta(x-sn)$$

Summarizing, without using any Cherm-Simons lagrangian. We have shown that ζ-data exist, such that the classical composite field χ(x; ζ) has the properties (i) and (ii) mentioned in the introducition. The problem now is to determine the statistic of χ(x'; ζ). This is very instructive to compare already on the classical level the canonical PB,

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}\big|_{x_0=y_0}=0$$

with the equal-time PB of χ with itself. An easy computation gives

$$i\{\chi(x;\zeta),\chi(y;\zeta)\}\big|_{x_0=y_0}=i\theta r(x-y;\zeta)\chi(x_0,x,\zeta)\chi(x_0,y,\zeta)$$

where

$$r(x-y;\xi)=\int d^2z[a^i(x-z)b_i(y-z)-a^i(y-z)b_i(x-z)$$

and θ is the dimensionless parameter

θ=eg

Now we turn to the canocical quantization of the action (1) in the framework of renormalized perturbation theory.

We introduce the quantum fields

$$\rho(x;a)=\varphi(x)x\exp(-ie\int d^2ya^i(x-y)A_\mu(x_0,y))$$

$$\sigma(x;b)=x\exp(ig\int d^2yb_i(x-y)\pi^i(x_0,y)),$$

$$\chi(x,\zeta)=\rho(x;a)\sigma(x;b)$$

Let's determine the charge contant of ρ and σ and the statistic of χ. Using the Cherm-Simons, for the fields A_μ one finds

$$[Q,\rho(x;a)]=e\rho(x;a)$$

$$[\phi,\sigma(x;b)]=g\sigma(x;b)$$

We have shown in [1] that the fields χ admits a non-trivial monodromy. In agrement with the generalizal spin-statistic theorem [9], the spin of χ turns out to be

$$S=(\theta/2\pi)+k \qquad k\in z$$

since in 2+1 space-time dimensions the spin is not quantized, there are no restrictions on the parameter θ which can take orbitrary real values.

In conclusion, we have shown above braid statistics generally occur in (2+1) dimensional relativistic quantum quage theories even in the absence of a Chern-Simons term. Claerly. our consideration do not rule out the possibility to include this term; we rather demonstrates that the apperance of anyons is a universal feature of charged sectors carrying both electric charge and magnetic flux in 2+1 dimensions.

We first show that these features can be implemented in 2+1 dimentional even in the absence of the Cherm-Simons term. Second we demonstrate that in many cases (i) and (ii) are actually sufficient for achieving anyon statisties.

Summarizing, without using any Cherm-Simons lagrangian. We have shown that ζ-data exist, such that the classical composite field $\chi(x;\ \zeta)$ has the properties (i) and (ii) mentioned in the introducition. The problem now is to determine the statistic of $\chi(x';\ \zeta)$.

Let us analyse finally the behaviour of κ - field under space and time reflection and under charge - conjugation. Denote by ψ the field algebra generated by the basic fields. Since the dynamics defined by the action preserves separetely P. T. and C invariance. β_P β_C and an anti - linear automorphism β_T which implement these transformations on ψ. This is one crucial difference between our present construction and the popular Cherm - Simons approach in the later β_P and β_T do not exist at all, because the dynamics explicitly breaks down space and time - reflection invariance. Further more, the absance of anomalies implies that the perturbative renormalized correlation-functions of the model are separetly P, D and C-invariant. Therefore, the automorphismis βp, βt and βc are unitarily implacementable in the perturbative phase i.e. there exist unitary operators c and p and anti-unitary operators T. which leave invariant the perturbative vacuum.

In models possessing states whith non-trivial magnetic flux. The operators C, P and T interplate between the sectors with flux $\Phi$and -Φ. In particulary, it is not possible to restrict C, P and T within a sector with fixed magnetic flux.

After these general observations. we concentrate on the transformation properties of the field $\chi(x,\ \alpha,\ e,\ g)$.

At this stage the quantum fields ρ, σ, and κ can be introduced.

This thesis is fully dependent on the work of A.Liguori Mintchev, and M.Rossi in Ref.(1).

BÖLÜM.1 CHERN - SIMONS LAGRANGE FONKSİYONU VE TANIMI

Chern - Simons terimleri olmaksızın, 2+1 boyutlu relativistik ayar teorisinde Anyon alanı kuruldu ve bu alanın esas özellikleri incelendi. Bu çalışmada baz olarak Ref(1) alındı. 2+1 boyutlu kuantum teorisinde, örgü istatistikleri düzlem gibi yoğun madde sistemlerine teorik olarak uygulanabilir (Kuantum Hall etkisi ve yüksek sıcaklıklarda süper iletkenlik). Ancak bu durum henüz deneylerle doğrulanmamıştır.

Aksiyomatik alan teorisi üzerinde Braid istatistiklerinin ciddi analizi yapılmıstır. Alanın, Uzay-Zaman' a göre sınırlanması bu analizden elde edilen kesin yapısal bir özelliktir. Bu da gösterir ki örgü istatistikleri, Alanlar yalnızca koni biçiminde sonsuz uzay gibi bir çokluk üzerine lokalize edilmiş olduğunda uygulanabilir. 2+1 boyutlarda Uzay- Zaman sınırlanmış ise 4 boyuttaki simetrik anti simetrik istatistikleri zorunlu olarak kullanacağız[1]

Relativistik Ayar teorilerinin standart olmayan böyle sınırlanmamış özelliklere sahip olduğu gerçeği, örgü istatistikleri için, 2+1 boyutlarında ayar modeli aranmasını düşündürür.

Yukarıda belirttiğimiz aksiyomatik çalışmalara paralel olarak ayar teorisinin genel durumları üzerinde komutatif (anyonik) istatistiklerle alanların kesin ve açık yapıları için çok önemli çalışmalar F. Wilczek ve S. Forte tarafindan yapılmıstır[5]Bilinen Kuantum Alan Teorisi' nin anyonlar üzerinde gerçekleşmesiyle elde edilen sonuçlarla soyut sonuçları karşılaştırdığımızda, bir tür belirsizlik görülür. Bilinen tüm örneklerde Cherm - Simons lagrange fonksiyonu bir biçimde kullanılır.[2]

$$\varphi_{c-s} = \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\mu} A^{\nu} A^{\rho}$$

Bu terim (P) parite ve (T) zamanın tersine çevirme simetrilerini bozar. Diğer taraftan Braid istatistikleri ele alındığında C- S terimini zorunlu olarak ele alma düşüncesi ile sınırlı kalmak gerekmez. Dolayısıyla eğer, anyon-kuantum alanlarını Chern- Simons lagrange fonksiyonu kullanmadan kurabilir miyiz sorusu ortaya çıkar. Burada yukarıdaki makaleye dayanarak bu soruya olumlu cevap vereceğiz.

"C-S teriminin varlığında yüklü alanlar ve gaus kanununda" Chern-Simon terimi varlığında bir abelyen (2+1) boyutunda bir çift cismin ölçümünü fiziksel olarak yüklü bir alanda araştırdık. Açıkça Gauss kanununa uygunluğunun gözlemlemesini yaparız ve Q elektrik Φ manyetik akısını saptarız. Diğer bir ifade ile gözlemler arasındaki değişen faz faktörlerinin hesap ederiz ve önceden belirtilen istatistik parametrelerden bağımsız Q elektrik yükünü spektrum üzerinden tespit ederiz ve uygun bir elektron sistemi üzerinde ayrıca gösterildi. Klasik Langrangian

$$S = -(1/4)\, F\ F_{\mu\nu} + \mu\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial\ A\ A\ - B\partial A_\mu + (1/2\varepsilon)B\ + \Psi(\, i\partial\ - eA - m\,)\Psi$$

Burada

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ dir.

S den hareket denklemi

$\partial\ F_{\nu\mu} + \mu F_\mu + \partial_\mu B = e\ \Psi\gamma_\mu\Psi = j_\mu$ dir.

burada,

$F_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho}F$ iyi bilindiğinden $\partial\ j_\mu = 0$ dır.

$\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial\ A\ A$

ifadesi ise Chern - Simons terimi olarak adlandırılır.

Q, Φ ve N hareket integralinde Gauss kanununa uygulandı ve Q + Φ = N olarak gözlendi. Biz bu ifadeler ışığında bir C - S terimi olmadan Q = N olduğunu göstereceğiz [7]

Biz [3] referansını kullanarak Chern - Simons terimi olmadan bir takım şeyleri göstermeye çalışacağız.

$J_\mu = ie[\varphi(D_\mu\varphi)^* - \varphi^* D_\mu\varphi]$

$k_\mu = \partial^\nu F_{\mu\nu}$, $\quad I_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu A^\rho$

$\varphi_{C\text{-}S}$' yi göz ardı edebilmek için bizim stratejimiz M. Mintchev ve M. Rossi tarafından araştırılmış olan "Gauss kanunu ve C- S terimi var olduğunda yüklü alanlar"' da anyonlar yapısını genelleştirmektedir.

Önerilen, anyon alanının esas özellikleri:

i) Uzayı bir koni (veya sicim) şeklinde düşünmek

ii) Hem elektrik hem de manyetik koniler (sicimler)' in ortaya çıkmasıdır.

Bu çalışmada ilk olarak bu özellikler 2+1 boyutlarda Cherm - Simons terimi olmaksızın geçerli olabileceği gösterilir. İkinci olarak çoğu durumlarda (i) ve (ii)'nin anyon istatistikleri elde etmek için gerçekten yeterli olacaklarını ispat edecegiz. Sonuç olarak (P) ve (T)'nin korunması problemini tartışacağız. Bu problem (i) noktasına bağlıdır ve yoğun madde alanları olan relativistik alan teorisininde anti parçacıklarının varlığından dolayı ortaya çıkar. Modellerimizi Minkowski Uzay - Zamanında (dia g_{μ} =(±)) inceleyeceğiz.

Modellerimizi aşağıda gösterilen lagrange fonksiyonu ile ifade edebiliriz.

$$s=\int d^3x\left[-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-B\,\partial^{\mu}A_{\mu}+(1/2)\varepsilon B^2-\partial_{\mu}\overline{C}\,\partial^{\mu}C+(D_{\mu}\varphi)^*(D^{\mu}\varphi)-u\right]F_{\mu\nu}$$

$$s=\int d^3x[-(1/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-B\partial^{\mu}A_{\mu}+(1/2)\varepsilon B^2-\partial_{\mu}\varepsilon\partial\mu+(D_{\mu}\varphi)^*(D^{\mu}\varphi)-U(\varphi^*\varphi)] \tag{1.1}$$

burada

$$F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu};\varphi=(1/\sqrt{2})(\varphi_1+i\varphi_2)$$

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}-ieA_{\mu}$$

ξ sıfir olmayan gerçel bir parametredir, ve etkileşme sabitidir. M' in kütle birimi cinsinden boyutları vardır $[e]=\sqrt{M}$ dir. Potansiyel Formu olarak tanımlanan U' ya şu anda gerek yoktur ve şimdilik kullanılmayacaktır. S eylemi ayrıca (P),(T) ve (C) altında değişmez ve bu ayrık simetriler, Kuantum seviyesinde "anomali"lerden etkilenmez (en az pertürbasyon teorisinde).

S'in aşağıdaki temel alanların dejenere olmayan fonksiyonu olduğu gözlenmiştir.

$$A_\mu, c, \bar{c}, \varphi, \varphi^* \tag{1.2}$$

bu alanları faz uzayında kanonik koordinatlar olarak seçtik. Konjuge momentumlar sırasıyla;

$$\prod^\mu = F^{\mu 0} - g^{\mu 0}, \prod_{\bar{c}} = -\partial^0 C, \prod_\varphi = (D^0\varphi), \prod_{\varphi^*} = D^0\varphi \tag{1.3}$$

(1.2),(1.3) kanonik çiftlerinin standart kanonik eşit - zaman Poisson braketleri (PBs) ne uygunluk gösterdiğini kabul ettik. BRS değişmezliği kullanılarak A_{phy} teorilerinin nitelikleri kullanılarak, fiziksel uzay standart biçimde tanımlandı.

$$A_{phy} = A'(\Gamma)/A''(\Gamma) \tag{1.4}$$

Gösterilen korunumlu akımlar aşağıdaki tartışmaya dahil olacaklardır.

$$J_\mu = ie[\varphi(D_\mu\varphi)^* - \varphi^* D_\mu\varphi] \tag{1.5}$$

$$K_\mu = \partial^\nu F_{\nu\mu}, \quad I_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^\nu A^\rho \tag{1.6}$$

J_μ dinamik olarak korunmuştur. U(1) dönüşümleri yapıldığında, S global olarak değişmez halbuki K_μ ve I_μ özdeş olarak korunmuştur. uygun sınır koşulları altında temel alanlar ve akımlar (1.5) ve (1.6) korunmuş yükler haline geleceklerdir.

a) U(1) yükü

$$N = ie\int d^2x(\varphi\prod_\varphi - \rho^* \prod \varphi^*) \tag{1.7}$$

b) Elektrik yükü

$$Q = \int d^2x \partial_i \Pi_i \tag{1.8}$$

c) Manyetik akı

$$\Phi = \int d^2x \varepsilon_{ij} \partial^i A^j \quad (\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{oij}) \tag{1.9}$$

sıfir olmayan elektrik akımı veya manyetik akı taşıyan fiziksel bölgeleri kurmak için, alanları bu şekilde tanımlarız.

$$\rho(x,a) = \varphi(x)\exp(-ie\int d^2y a^i(x-y)A_i(x_o,y)), \tag{1.10}$$

$$\sigma(x,b) = exb(ig\int d^2y b_i(x-y)\Pi^i(x_o,y)), \tag{1.11}$$

burada $[g] = l\sqrt{M}$ ve a^i ve b_i ; gerçel değerli dağılımlardır. Ayrıca BRST değişmezliğin ek olarak bu koşulları istiyoruz

$i\{Q, \psi(x,\zeta)\} = -\lambda e \psi$

C - S terimi varlığında anyon kuantum alanındaki ç alışmadan Q akımile $\psi(x,\zeta)$ fonsiyonundan yaralandık. İntegralde ∂ $F_{i\nu}$ yerine değerini yazdık ve bunu aşağıdaki biç imde aç tık.

$Q = \int k_0 d^3x = \int \partial^i F_{i\nu} \partial^3 x$

$= \int \partial^i [\pi_i - \mu\varepsilon_{oi\nu} A^\nu + g_{10} B] \partial^3 x$

$= \int [\partial^i \pi_i - \mu\varepsilon_{oi\nu} \partial_i A^\nu] \partial^3 x$

$$\int \left[\partial^i \pi_i - \mu\varepsilon_{oi\nu} \partial_i A^\nu, \psi(x) \exp\left(\frac{ie}{2} \int d^2y (1+\lambda) f^i(\bar{x}-\bar{y}) A_i(y) - (1-\lambda) g^i(\bar{x}-\bar{y}) \varepsilon_{ij} \frac{\pi^i(x_0,y)}{\mu} \right) \right]$$

$[\pi^i, A_j] = -\delta^{ij}$ komütatörü δ fonksiyonuna eşittir.

$$[\partial_i \pi^i, A_j f^j(1+\lambda)] = -\partial_i f^j (1+\lambda) + \left[\mu\varepsilon_{oi\nu} \partial_i A^\nu, \frac{(1-\lambda) g^i(\bar{x}-\bar{y}) \varepsilon_{ij} \pi^i(x_0,y)}{\mu} \right]$$

$= (1-\lambda)\varepsilon_{oi\nu} \partial_i g^i \varepsilon_{ij}$ yukarda gerekli işlemleri

yaptıktan sonra her bir komütatörden $-(1+\lambda)$ ve $(1-\lambda)$ gelir. Bunlar toplandığında,

$= -(1+\lambda) + (1-\lambda)$

$= -2\lambda$ elde edilir.

$i\{Q,\psi\} = -\lambda e\psi$ bizde bundan yaralanarak $i\{\phi,\sigma(x',b)\} = \rho\sigma(x',b)$ olduğunu gösterdik.

$$i\{\phi,\sigma(x';b)\} = g\sigma(x';b) \tag{1.12}$$

ki bu da sırasıyla

$$\partial_i a^i(x) = \delta(x) \tag{1.13}$$

$$\int d^2x\varepsilon^{ij}\partial_i b_j(x) = 1 \tag{1.14}$$

gerektirir.Kanonik PBs ve (1.13),(1114) kolayca aşağıdaki eşitlikleri türetebiliriz

$$i\{Q,\rho(x;a)\} = i\{N,\rho(x;a)\} = e\rho(x;a) \tag{1.15}$$

$$\{Q_{BRS},\sigma(x;b)\} = \{Q,\sigma(x;b)\} = \{N,\sigma(x;b)\} = 0 \tag{1.16}$$

Özet olarak ρ ve σ birleşik alanlardır. Bunların ihtiva ettiği yük (1.12), (1.15) ve (1.16) eşitlikleri ile belirlenir. Beklendiği gibi Gauss kanunu Q = N 'in geçerliliğini görürüz. Burada ρ ve σ aynı zamanda BRST değişmez olarak inşa edildi. Biz bu konuya hiç girmiyoruz. ρ alanı sıfır olmayan elektrik yükü taşıyor ve denklem (1.10) 'un sağ tarafindaki exponansiyel faktör φ yük alanındaki radyasyonu da hesaba katıyor. σ alanı sıfır olmayan manyetik akıya sahip; Higgs modelinin 2+1 boyutundaki Nielsen- Olesen girdap akımına bağlı olarak E. C. Marino tarafindan b_i nin özel seçimi için göze alınmıştır[4]Burada şunu vurgulamak istiyoruz ki genelde ρ ve σ, BRS değişmez düzen yada düzensizlik değişkenleri olarak düşünülebilir. Bu gerçeğin sonucunu ve 3+1 boyutlarda genelleştirilmesini burada incelemiyoruz. [8]

Bölüm.2 χ-BİLEŞİK ALANININ İNŞAASI

ρ, σ yüklü alanlar χ-alanının kurulmasında temel rol oynayacaktır. Dolayısıyla χ, ρ ve σ' ya bağlı olacaktır.

$$\{Q_{BRS},\sigma(x;b)\} = \{Q,\sigma(x;b)\} = \{N,\sigma(x;b)\} = 0 \quad (2.1)$$

Burada ξ, (a,b,c,g) belirli değişkenleri özet olarak gösteren bir semboldür. χ-in 'nin sınırlanması a^i ve b_i dağılımlarının sıfır olmadıkları bölgenin özellikleri ile yöneltilmektedir. Basit olarak;

$$b_i = -\varepsilon_{ij} a^j \quad (2.2)$$

aldık, ama a^i ve b_i 'nin bağımsız olduğu, genelleşmiş durumda (1.13) ve (1.14) eşitlikleri çözülebilir.(2.2) ve (1.14) eşitliklerinin,(1.13) eşitliğinin bir sonucu olarak düsünülür ve ondan sonra kolayca çözülür.Momentum uzayındaki çözümün uygun parametrizasyonu

$$a^i(p) = i\int_0^{2\Pi} d\theta\tau(\theta)n^i 1/(np + i\varepsilon) \quad (2.3)$$

ki burada n=(cos0,sin0) ve τ aşağıdaki eşitliğe göre normalize olmuş yoğunluktur.

$$\int_0^{2\Pi} d\theta\,\tau(\theta) = 1 \quad (2.4)$$

ters fourier transformasyonunu uygulayarak

$$a^{\mu}(p) = \int d^3n\left[ig^{\mu\nu}\rho(n) + \varepsilon^{\mu\nu\rho}P_{\rho}\sigma(n)\right]n_{\nu}\frac{1}{np+i\varepsilon}$$

$\dfrac{1}{np+i\varepsilon} = \dfrac{1}{i}\int\limits_0^{\infty} ds.e^{i(np+i\varepsilon)s} \rightarrow$ Fourier dönüşümünden

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\ \mathrm{e}^{\mathrm{ipx}}\left[ig^{\mu\nu}\rho(n) + \varepsilon^{\mu\nu\rho}P_{\rho}\sigma(n)\right]n_{\nu}\frac{1}{i}\int\limits_0^{\infty} ds.e^{i(np+i\varepsilon)s}$$

yukarıdaki ifadede bazı integral kısımları bize δ fonksiyonunu verir.
Aşağıdaki gibi

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp\ \mathrm{e}^{\mathrm{-ipx+inps}} = \delta(x-ns)$$

$\int e^{-ipx}P_{\rho} \Rightarrow$ bu integralde türeve eşit olur. Yani $\int e^{-ipx}P_{\rho} = \dfrac{\partial}{\partial x}$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds\theta(s) = \int\limits_0^{\infty} ds$ şeklinde tanımladıktan sonra ifade en son biç imyle aşağıdaki gibi gösterildi,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds\theta(s)[g^{\mu\nu}\rho(n) + \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial\rho]n_{\nu}.\delta(x-ns)$$

bağıntıyı C-S terimi var olduğu durumda yaptığımız a (p)şeklinde olduğunu gösterdikten sonra a (x) şeklinde tanımladık,

$$a^i(x) = \int\limits_0^{\infty} dse^{-s\varepsilon}\int\limits_0^{2\Pi} d\theta\tau(\theta)n^i\delta(x-sn) \tag{2.5}$$

a^i nin destek özellikleri (2.5) eşitliğinden okunabilir. Örneğin eğer

$$\operatorname{supp}\tau(\theta) = [\alpha_1, \alpha_2] \quad , \quad 0\langle\alpha_2 - \alpha_1\langle\Pi \tag{2.6}$$

ise a^i nin desteği aşağıda verilen "KAMA" dır.

$$\bar{W} = \{y = (|y|\cos\theta, |y|\sin\theta)\} \in \mathbb{R}^2; \tag{2.7}$$

(Tepesine göre) yansıtan W şeklini tanıtalım;

$$W = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 ; -y \in \bar{W} \right\} \qquad (2.8)$$

Ve a^i ve b_i ,(2.2),(2.5),(2.6) eşitliklerinden elde edilsin. W'yi X doğrultusunda çevirmekle elde edilen W_X, $x^\circ = 0$ yüzeyinde, (1.10),(1.11),(2.1) eşitliklerine göre, X alanının sıfir olmadığı bölgededir. Özel olarak W_X, ayar teorisinin yüklü bölgelerinde sınırlamadaki en uç ihtimal olan S_X (uzaya benzer sicimi) şeklinde dejenere olabilir.[5]

Özet olarak, C-S lagrange fonksiyonu kullanmadan, χ (x, ζ) önsözde de vurguladığımız (i) ve (ii) özelliklere sahip olan bir klasik alan olarak inşa edilebilir. Problem şimdi χ (x, ζ) istatistiklerinin belirlenmesidir. Bu kuantum teorisinin problemidir. Ama bununla beraber kanonik PB'nin klasik seviyede eşit zamanlı PB'nin X ile kendisini mukayese etmesi öğretici olacaktır.

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}\Big|_{x_0=y_0} = 0 \qquad (2.9)$$

$$[\varphi(x),\varphi(y)]_{DB} = \left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\varphi(x)} \cdot \frac{\partial\varphi(y)}{\partial(\partial_t\varphi(y))} - \frac{\partial\varphi(x)}{\partial(\partial_t\varphi(x))} \cdot \frac{\partial\varphi(y)}{\partial\varphi(x)} \right]$$

$$[A,B] = \frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial q_i}$$

kanonik Paision Braket bağıntısı kullanarak vede $\varphi(x,t)$ fonksiyonu şeklinde tanımladık.

$$[\Pi(x),\varphi(y)] = \delta(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\varphi(x,t) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2W_k}} \left[a(k)\cdot e^{ikx-iWt} + a^+(k)\cdot e^{-ikx+iWt} \right]$$

$$= \int d^3k \left[a(k) f_k(x) + a^+(k) f_k{}^*(x) \right]$$

$$[a(k),a^+(k')] = i\int d^3x f_k{}^*(x,t)\partial_0 f_{k'}(x,t) = \delta^3(k-k')$$

$$\left[a_k, a_k^+\right] = \partial_{kk'} \quad \left[a_k, a_{k'}\right] = \left[a_k^+, a_{k'}^+\right] = 0$$

$$\left[\varphi(\mathrm{x}), \varphi(y)\right] = \int \frac{d^3k d^3k'}{2\pi^3\sqrt{2W_k 2W_{k'}'}}\left(\left[a(k), a^+(k)\right]e^{-ikx+iky} + \left[a^+(k), a(k')\right]e^{ikx-iky}\right)$$

Gerekli komintasyonları alarak şu şekilde yazdık.

$$= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2W_k}}\left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{W_k}e^{ik(x-y)}\sin W_k\left(x_0 - y_0\right) \equiv i\Delta(x-y)$$

veya bu gösterimi şu şekilde ifade edebiliriz.

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2a)^3 2W_k}}\left(e^{-i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})+iw(t-t')} - e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})-iw(t-t')}\right)$$

$$\bar{k} \to -\bar{k} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_x} \int dk_y \int dk_z = \int d^3k$$

$$k_z \to -k_z$$

$$k_y \to -k_y$$

$$k_x \to -k_x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_z} = -\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{dk_x} \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{dk_y} \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{dk_z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_y} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{dk_z}$$

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2a)^3 2W_k}}\left(e^{-i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\left[e^{iw(t-t')} - e^{-iw(t-t')}\right]\right)$$

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2a)^3 2W_k}}\left(e^{-i\bar{k}(\bar{x}-\bar{y})}\right) \cdot \sin w(t-t')$$

Yukardaki $\left[\mathrm{e}^{\mathrm{iw(t-t')}} - e^{-\mathrm{iw(t-t')}}\right]$ ifadesi bize Sinw(t - t′) nü verir.

Burdan şu şekilde yazarak

$\sin w(t-t') \Rightarrow t = t'$

$\sin w(t-t') = 0$ gösteririz.

Kolay bir hesaplamayla

$$i\{\chi(x;\zeta),\chi(y;\zeta)\}\big|_{x_0=y_0} = i\theta r(x-y;\zeta)\chi(x_0,x,\zeta)\chi(x_0,y,\zeta) \qquad (2.10)$$

$$\left[e^A e^B, e^A e^B\right] = [A,B]e^A e^B$$

Baker - Haussdorf bağıntısını kullanarak aşağıdaki ifadeyi gösterdik,

$$[\rho(x;a)\sigma(x;b),\rho(y;a)\sigma(y;b)] = (\rho(x;a)\sigma(y;b) - \sigma(y;b)\rho(x;a))$$

$$\int ig\int d^2z'b(y-z')(-ie)\int d^2z.a^i(x-z)\left[A_i(x_0,z),\Pi^i(x_0,\bar{z}')\right]$$

$$\int d^2z.\left[a^i(x-z)b(y-z) - a^i(y-z)b(x-z)\right]$$

$$-ie\int d^2z a^i(y-z)ig\int d^2z'b(x-z')\left[\Pi^i(x_0,z'),A(x_0,z)\right]$$

$$\left(\int ig\int d^2z'b(y-z')(-ie)\int d^2z.a^i(x-z)\left[A_i(x_0,z),\Pi^i(x_0,\bar{z}')\right]\right.$$
$$\left. -(-ie)\int d^2z a^i(y-z)ig\int d^2z'b(x-z')\left[\Pi^i(x_0,z'),A(x_0,z)\right]\right)$$

$\left[A_i(x_0,z),\ \Pi^i(x_0,\bar{z}')\right] = \delta(\bar{z}-\bar{z}')$ komütatörleri δ fonksiyonlarına eşit olduğunu gösterdik. Bu bağıntılar ışığında sonuç uaşağıdaki şekilde gösterdik.[6]

$$\left[\Pi^i(x_0,z'),A(x_0,z)\right] = -\delta(\bar{z}'-\bar{z})$$

$$\int d^2z.\left[a^i(x-z)b(y-z) - a^i(y-z)b(x-z)\right]$$

$$= i\theta r(x-y,\zeta)\chi(x_0,x,\zeta)\chi(x_0,y,\zeta)$$

elde edilir. Burada

$$r(x-y;\xi) = \int d^2z[a^i(x-z)b_i(y-z) - a^i(y-z)b_i(x-z) \qquad (2.11)$$

ve θ boyutsuz bir parametredir.

$$\theta = eg \qquad (2.12)$$

(2.11) eşitliğinden elde edilir.

$$r(x-y,\zeta) = -r(y-x;\zeta) \qquad (2.13)$$

ve sonuçta PB jakobi özdeşliğini gerçekler. (2.2) örnek için ele aldığımız durumda

$$r(x-y;\zeta) = -2\varepsilon_{ij}\int d^2za^i(x-z)a^j(y-z) \qquad (2.14)$$

(2.10) eşitliğinin RHS'de bulunan r (x-y; ζ) faktörü, kuantize olmuş alanın acaip istatistikler için gerçekten ilk işarettir. Ama bu durumda, genelde r (x-y; ζ) sıfır olmadığını göstermek esastır. Gerçekten (2.5) eşitliğinin (2.14) eşitliğinde yerleştirmek ve δ fonksiyonunu integre etmekle,

$$r(x-y;\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta\tau(\theta)\varepsilon[\sin(\gamma-\theta)] \qquad (2.15)$$

Aynı ifade C-S terimi ihtiva eden modelde de çıkarılmıştır. Burada ε işaret fonksiyonudur ve γ, (x-y) vektörünün kutupsal açısıdır. (2.6) eşitliğine göre τ yoğunluğunun sıfır olmadığı bölge ele alınıp ve (3.4)'ün normalizasyon koşulları kullanılmasıyla şu sonuçlar elde edilir [7]

$$r(x-y;\zeta) = -1+2\int_{\alpha_1}^{\gamma} d\theta\tau(\theta) \quad \text{eğer} \quad \alpha_1 \le \gamma \le \alpha_2$$

$$= +1 \quad \text{eğer} \quad \alpha_2 \langle \gamma \langle \alpha_1 + \pi$$

$$= +1-2\int_{\alpha_1}^{\gamma-\pi} d\theta\tau(\theta) \quad \text{eğer} \quad \alpha_1+\pi \le \gamma \le \alpha_2+\pi$$

$$=-1 \quad \text{eğer} \quad \alpha_2+\pi\langle\gamma\langle\alpha_1+2\pi \qquad (2.16)$$

(2.16) eşitliğinden r(x-y;ζ) nin sürekli γ ya bağlı olduğu sonucu elde edilir. W_x ve $\overline{W_x}$ dışında γ için, gerçekten r(x-y;ζ) faktorü yoğunluktan bagımsızdır. Dikkat etmeliyiz ki ayrıca W_x ve $\overline{W_x}$, r(x-y;ζ) sürekli, 1 ve -1 arasında değişen bölgeyi temsil ediyorlar. W_x sicim şeklinde dejenere olduğu durumların incelenmesi için ardışık yoğunluk dizilerinin zayıf olarak yakınsadığı gerçeği $\{\tau_\nu(\theta);\ \nu=1\}$ kullanılabilir.

Örneğin, $\gamma \to \infty$ için;

$\tau_V(\theta) \to \delta(\theta - \alpha) \qquad 0 \le \alpha \le 2\pi$ (2.17)

α, S_X in yönünü belirler. Şimdi τ değişkeni yerine, sadece α-yi kullanacağız. (2.17) eşitliği, (2.16) eşitliğinde yerine koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$r(x-y;\alpha) = +1, \qquad$ eğer $\quad \alpha < \gamma < \alpha + \pi$

$\qquad = -1, \qquad$ eğer $\quad \alpha + \pi < \gamma < \alpha + 2\pi$ (2.18)

Dolayısıyla, sicim üzerinde yerleştirilmek için $\alpha = \gamma$ ve $\gamma = \alpha + \pi$ noktalarında $r(x-y;\alpha)$ faktörü artık sürekli değildir. Bu noktalar S_X ve S_Y sıfır olmayacak derecede çakıştığında γ değerlidir. Bu süreksizlik anyon dalga fonksiyonununçoklu değer vermesi nedenidir.

Bu aşamada ρ, θ ve χ ile kuantum alanları tarif edilebilir. Biz bunları klasik olarak tarif ediyoruz. Yapılan hersey kuantum teorisinde yapılabilir.

$$\rho(x;a) = \varphi(x) x \exp(-ie\int d^2 y a^i (x-y) A_\mu (x_0, y)) \qquad (2.19)$$

$$\sigma(x;b) = x \exp(ig\int d^2 y b_i (x-y) \pi^i (x_0, y)), \qquad (2.20)$$

$\chi(\mathrm{x}, \zeta_1, \zeta_2) = \overline{\psi}(x, \zeta_1)\psi(x, \zeta_2)$ bu ifadede C - S terimi varlığında yapılan ç áışmadandır. Biz buç alşmadan yararlandık, χ bileşik alanın kurulmasına yardım eden ψ i aşağıdaki gibi tanımladık,

$$\psi(x, \zeta) = \psi(x) \exp\left[\frac{ie}{2}\int d^2 y (1+\lambda) f^i (x-y) A_i (x_0, y) - (1-\lambda) g^i (x-y) \varepsilon_{ij} \frac{\pi^i (x_0, y)}{\mu}\right]$$

$i\{Q, \chi(\mathrm{x}', \zeta_1, \zeta_2)\} = (\lambda_2 - \lambda_1) e \chi(\mathrm{x}', \zeta_1, \zeta_2) \Rightarrow$ komütatörü

$$\frac{dAB}{dx} = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}$$

$$[Q, AB] = [QA - AQ]B + A[QB - BQ]$$

$= [Q, A]B + A[Q, B]$ şeklinde aç tık.

Buna göre, $Q = \int \partial^i F_{iv} \partial^3 x$ akımını kulanarak bileşik alanı

$= -i(\lambda_1 - 1)\psi + i(\lambda_2 - 1)\psi$

$= (\lambda_2 - \lambda_1) i\psi$ elde ederiz.

Burada $\rho(x,a)$'a $\sigma(x,b)$'dan $\chi(x,\zeta)$ bileşik alanı yukardaki çalışmadan yaralanarak aynı şekilde kurduk.

$$\chi(x,\zeta)=\rho(x;a)\sigma(x;b) \tag{2.21}$$

ρ ve σ içerdiği yükü ve χ istatistiğinde belli edilir. A_μ alanı için kullanılan kanonik Poisson parametreleri veya bunlardan soyutlanmış kanonik komünitasyon bağıntıları kullanılırsa aşağıdaki denklemler ortaya çıkar.

$$[Q,\rho(x;a)]=e\rho(x;a) \tag{2.22}$$

$$[\phi,\sigma(x;b)]=g\sigma(x;b) \tag{2.23}$$

Analog olarak, değişme bağıntısı çıkarılabilir.

$$\chi(x_0, x ; \zeta)\, \chi(x_0,y;\zeta)=R(x-y;\zeta)\chi(x_0, y;\zeta)\chi(x_0, y ,\zeta) \tag{2.24}$$

Burada değişim faktörü, (2.11) eşitliğinde ayrıntılı olarak verilir. (2.22) ve (2.23) eşitlikleri, beklenen kuantum değerlerini doğruluyor. (2.24) eşitliğinden eşit zaman komütatörü elde edilir.

$$[\chi(x;\zeta), \chi(y;\zeta)]\,|_{x_0=y_0}=[R(x-y;\zeta)-1]\chi(x_0,y;\zeta)\chi(x_0,x,;\zeta) \tag{2.25}$$

(2.25) eşitliğinin RHS'inde θ kuvveti ile $R(x-y;\zeta)$ açmak ile 1.dereceden dağılımın PB-nin RHS-ini tekrar meydana getirir. Bu durumda, $r(x-y;\zeta)$ kuantize şekli $R(x-y;\zeta)$ dir. Bu 1+1 Uzay-Zaman boyutlarında integre edilebilen sistemler için (örneğin Toda Alan Teorisi) tipik bir örnektir.[8]

Biz şimdi $R(x-y;\zeta)$ nin bazi temel özellikleri anlatacağız. (2.13) eşitlikleri birleştirilerek aşağıdaki ifade elde edilebilir.

$$R(x-y;\zeta)R(y-x;\zeta)=1 \tag{2.26}$$

ama genel olarak

$$R(x-y;\zeta)\neq R(y-x;\zeta) \tag{2.27}$$

dir.

$$R(x-y;\zeta)=\exp[i\theta r(x-y;\zeta)] \tag{2.28}$$

Daha açık bir ifade elde edebilmek için, (2.2), (2.5), (2.17) eşitliklerine göre a^i ve b_i'yi tespit ediyoruz ve χ alanını, bu özel ζ dataları ile $\chi(x;\alpha,e,g)$şeklinde gösteriyoruz. Eşitlik (2.18) 'i (2.28) 'de yerleştirmek ile generik noktasında (örneğin, x ve y için $S_x \cap S_y = \varnothing$ gibi)

$$R(x-y;\alpha)=R_+(x-y;\alpha)=\exp(+i\theta), \quad \text{eğer} \quad \alpha<\gamma<\alpha+\pi$$

$$=R_-(x-y;\alpha)=\exp(-i\theta) \quad \text{eğer} \quad \alpha+\pi<\gamma<\alpha+2\pi \tag{2.29}$$

türetilebilir. 2+1 boyutta ayar teorisinde yüklü alanların açısal momentumunda χ alanının, basit olmayan monodromy özelliği (2π spatil rotasyonundaki davranış) kabul ettiğimizi gösterilmiştir. Genelleştirilmiş spin-istatistik teorisinin [1] anlayışı ile χ'in spini

$$S=(\theta/2\pi)+k \qquad k\in z$$

olacaktır. 2+1 Uzay-Zaman boyutlarında spinin kuantize olmadığından θ parametresinin üzerinde hiçbir sınırlama yoktur. θ parametresi keyfi olarak, gerçel bir değer olarak ele alabiliriz. Dolayısıyle, genelde $R\neq\pm1$ ve $\chi(x;\alpha,e,g)$ örgü istatistiğine uyuyor. Gerçekten, (2.24) ve (2.29) eşitliklerinden görülür ki χ alanının $[\chi(x_0,x_i;\alpha,c,g),\ i=1....n]$ değişme özellikleri generik noktalarında aşağıdaki örgü grubunun bir boyutlu gösterimi ile anlatilir.

$$\sigma_1\rightarrow R_+(x_i-x_{i+1};\alpha) \qquad \sigma_1^{-1}\rightarrow R_-(x_i-x_{i+1};\alpha) \tag{2.30}$$

(σ_i ; i=1 n-1), B_n'nin jeneratörüdür. Bu gösterim (2.30) 'i tamamen istatistik faz faktörü diye adlandırılan θ ile karakterize edilir. Θ (modul-2) ile tarif edilir.[6]

$$\exp(i\Theta\pi)=R_+(x-y;\alpha) \tag{2.31}$$

(2.29) ve (2.31) eşitliklerinden;

$$\Theta=(\theta/\pi)+2k \qquad k\in z \tag{2.32}$$

χ ile abelyen örgü istatistiği Θ istatisligi olarak bilinir ve uyarılmış bağlı parçacıklara anyon denir. Sırası ile Bose, Fermi ve p/q istatisliklerine göre özel durumlar;

$eg=2k\pi$. $eg=(2k+1)\pi$ $k\in z$

$$eg=(p/q)\pi \quad p,q\in z \qquad (2.33)$$

(2.32) eşitliği anyonlar arası Aharanov-Bohm tipi etkileşim düşüncesi ile [2] referansından türetilen bağıntıyı gösterir. Son olarak χ alanının davranışını Uzay-Zaman yansıması ve yük konjügesyonunda analiz edelim. Temel alanlar ile meydana gelen alanın cebri, $\mathcal{A}$ ile gösterilir. Dinamikler P, T ve C'nin ayrı olarak değişmezliğini koruyan bir işlemi ile tarif edildiğinden $\mathcal{A}$ 'de de bu transformasyonları yerine getiren zamanda bağımsız β_P ve β_C lineer automorfizmler ve β_P anti-lineer automorfizmler mevcuttur. Burada bizim yapımız ve herkesce kabul edilen Chern-Simons yaklaşımı arasında bir önemli farklılık var. β_P ve β_T tümüyle mevcut değil. Çünkü, dinamik parite ve zaman yansıması simetriklerini açıkca ortadan kaldırılıyor.[9] Ayrıca, biz de anomalilerin yokluğu modelimizi perturbatif ve normalize edilen düzeltilmiş fonksiyonların ayrı olarak değişmeyen P, T ve C oldugunu ortaya çıkarır. Dolayısıyle automorfizimler β_P,,β_C,β_T toplam olarak perturbatif fazda ortaya çıkabilir. Örneğin değişmeyen perturbatif vakumu değişmezler alanı C ve P uniter operatörleri ve T anti-uniter operatörleri mevcuttur. Böylece

$$CA_\mu(x)C^{-1}=-A_\mu(x), \qquad C\varphi(x)C^{-1}=\varphi^*(x) \qquad (2.33)$$

$$PA_\mu(x)P^{-1}=A'_\mu(x), \qquad P\varphi(x)P^{-1}=\varphi(x') \qquad (2.34)$$

$$TA_\mu(x)T^{-1}=-A''_\mu(x''), \qquad T\varphi(x)T^{-1}=\varphi(x'') \qquad (2.35)$$

Burada ;

$$v'\equiv(v_0,-v_1,v_2) \text{ ve } v''\equiv(-\upsilon_0,\upsilon_1,\upsilon_2) \quad ;\upsilon=(\upsilon_0,\upsilon_1,\upsilon_2)$$

vektörünün karşı parçalarının Uzay-Zaman yansımasını gösterir. (2.33) ve (2.35) eşitliklerinden

$$C\phi C^{-1}=P\phi P^{-1}=T\phi T^{-1}=-\phi \qquad (2.36)$$

bir anda elde edilir ki, bu da aşağıdaki temel sonuca sahiptir. Sıfır olamayanmagnetik akıya sahip modellerde, C, P ve T operatorleri ϕ ve -ϕ akı bölgeler arasında interpole edilir. C,P ve T' i sabit bir akıya sahip bir bölgede sınırlamak mümkün değildir. Bu genel gözlemlerden sonra biz χ alanının transformasyon özellikleri üzerine konsantre oluruz. (2.33), (2.35) eşitlikleri yerine aşağıdaki eşitlikler kolayca türetilir.

$$C\chi(x;\alpha,e,g)C^{-1}=\chi^*(x,\alpha,e,g), \quad (2.37)$$

$$P\chi(x;\alpha,eg)P^{-1}=\chi(x';\pi-\alpha,e,-g), \quad (2.38)$$

$$T\chi(x;\alpha,e,g)T^{-1}=\chi(x'';\alpha,e,-g) \quad (2.39)$$

Beklediğimiz gibi uzay yansımasında $\chi(x;\alpha,e,g)$'nin sicim desteği onun aynadaki görüntüsü ile yer değiştiriyor, örneğin $\alpha \to \pi-\alpha$. Basit ama ayrıntılı bir kontrol ile (2.29) eşiliği de hesaba katılarak, (2.) eşitliğinin her iki tarafina ayrı olarak C,P ve T tarnsformasyonunu uyguladığımızda (2.37)-(2.39) eşitliklerinin oluştuğunu gözleriz.[10]

Burada şunu eklemek yararlı olacaktır. İlke de perturbatif olmayan fazlarla P ve T'nin kendiliğinden bozulması hala olabilir. Yalnız buna P ve T'yi Chern-Simons terimi ile bozmamızla kesin olarak karıştırmamalıyız.

Sonuçta, biz Chern-Simons terimi yokluğunda, genellikle örgü istatistikleri, 2+1 boyutlu relativistik kuantum ayar teorisinde geçerli olabileceğini göstermeye çalıştık. Açıkca, bizim düşüncelerimiz bu terimi ihtiva eden ihtimalleri kural dışı etmiyor. Tersine gösterdik ki anyonların ortaya çıkması 2+1 boyutlarda hem elektrik yükü ve hem magnetik akıyı taşıyan yüklü bölgelerin evrensel özelliğidir. Bu çalışmamızda geliştirilmiş bölgelerin açık yapıları, Chern-Simons langrajyanına dayanmıyor ve C,P,T transformasyonları altında anyon alanlarının davranışını saptamaya ve incelemeye izin verir.

KAYNAKLAR

[1] FRÖHLICH,J.,in: Non-perturbative quantum field theory, eds. G.'t Hooft et al Plenum, New York 1988) FRÖHLICH,J. and GABBIANI,F.,Rev Math Phys.2, 251; (1990) FREDENHAGEN,K.,REHREN, K-H and SCHROER,B, Commun Math Phys. 125,201 (1990)

[2] WILEZEK,F., Phys.Rev.Lett. 48, 1144 (1982)

[3] LIGOUR,A.,MINTEHEV,M. and ROSSI,M,Phys.Lett.B 303,38,(1993).

[4] DIRAC,P.A.M., CAN,J.,Phys. 33, 650,(1995).

[5] WILEZEK,F., Fractional statistics and anyon supercon-ductivity (World Scientifie Sihgapore) (990) FORTE,S., Rev Mod. Phys.64,193,(1992)

[6] FRÖHLICH and MARCHETTI,P.A., Lett.Bath.Phys. 16(1988) 347 Nucl.Phys. B356,533, (1990)

[7] MINTEHEV, M. and ROSSI, M. Phys. Lett.B271,187,(1991)

[8] LIGOURI,A.,MINTEHEV, M. and ROSSI, M. in prepation.

[9] LEINNAAS,J.M.and MYRHEIM,J.,Nuovo Cimento 37B,1,(1977)

[10] LUSCHER,M.,Nucl. Phys. B 326,557, (1989), LECLAIR,A., Phys. Lett. B 264,355,(1991)

EKLER

Chern-Simons terimi varken lagranje fonsiyonu;

$$\Pi^{\mu} = F^{\mu o} + \mu\varepsilon^{o\mu\nu} A_{\nu} - g^{\mu o} B$$
$$\Pi = i\psi^{+}$$

$$S = [-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - B\partial^{\mu} A_{\mu} + \mu\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\mu} A^{\nu} A^{\rho} + \frac{1}{2\zeta} B^{2} + \overline{\psi}(i\partial - e\overline{A} - m)\psi]$$

Burada S lagrangian fonksiyonundan aşağıdaki ifadeleri elde ettik.

$$(i\partial - eA - m) = 0$$

$$\overline{\psi}(i\partial - e\overline{A} - m) = 0$$

$$\overline{\psi} i\partial\psi - i\partial\overline{\psi}\psi = 0$$

Buradan fonsiyonu şu şekilde yazdık;

$$s = \frac{1}{2}\overline{\psi} i\partial\psi - \frac{1}{2}\partial\overline{\psi} i\psi - e\overline{\psi}A\psi - m\overline{\psi}\psi$$

Eğer fonksiyondan

$$\frac{\partial S}{\partial\overline{\psi}} \quad ve \quad \frac{\partial S}{\partial\psi} \quad \text{türetilirse}$$

$$i\partial\psi - eA\psi - m\psi = 0$$

$$-i\partial\overline{\psi} - e\overline{\psi}A - m\overline{\psi} = 0$$

hareket denklemini elde ederiz.

S'den hareket denklemini şöyle yazılabilir.

$$\partial^{\nu} F_{\nu\mu} + \mu\widetilde{F}_{\mu} + \partial_{\mu} B = e\overline{\psi}\sigma_{\mu} + m\overline{\psi}$$

olur.

Burada;

$B = \zeta\partial^{\mu} A_{\mu}$ elde etmeye çalışıyoruz. S lagrange fonksiyonunu B'ye göre minimize ederek, yani

$$\frac{\partial S}{\partial B} = 0 \quad \text{dan}$$

$$-\partial^{\mu} A_{\mu} + \frac{1}{2\zeta}\, 2B\, \frac{dB}{dB} = 0$$

ifadesini elde ederiz, ve de B'yi burdan çekersek aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$B = \zeta\partial^{\mu} A_{\mu}$ elde edildi.

Şimdi de aşağıdaki eşitliği gösterelim.

$$\{B(x), A_{\mu}(y)\} = \partial_{\mu} D(x-y)$$

$$\begin{aligned}
\partial^{\rho}\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\mu}A^{\nu} &= \varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\mu}\partial^{\rho}A^{\nu} \\
&= \varepsilon_{\rho\nu\mu}\partial^{\rho}\partial^{\mu}A^{\nu} \\
&= \varepsilon_{\rho\nu\mu}\partial^{\mu}\partial^{\rho}A^{\nu} \\
&= -\varepsilon_{\mu\nu\rho}\partial^{\mu}\partial^{\rho}A^{\nu} \\
\varepsilon_{\rho\nu\mu} &= -\varepsilon_{\mu\nu\rho} \qquad \text{dır.}
\end{aligned}$$

yukardaki işlemi yaparken kontuvaryant türevler den yaralandık.Aynı biçimde aşağıdaki ifadeyi gösterdik,

$$\{B(x), \psi(y)\} = ieD(x-y)\psi(y)$$

$$A_{\mu} = \sum \int \sigma_{\mu}[ae^{ikx} + a^{+}e^{-ikx}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^{3}k.e^{ikx}}{k^{2}-m^{2}}$$

$$\int d^2k \int_0^{\infty} d\alpha . e^{i\alpha(k^2-m^2)} . e^{ikx}$$

$$\int e^{i\alpha(k^2+\frac{kx}{\alpha}+\frac{x^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha}}$$

$$= \int_0^{\infty} da [\int d^2k . e^{i\alpha k^2 + ikx}] e^{-i\alpha m^2}$$

$$= \int_0^{\infty} d\alpha . \frac{\pi^{3/2}}{i\alpha^{3/2}} \; e^{-i\frac{x^2}{4\alpha}-i\alpha m^2}$$

$$= \int_0^{\infty} d\alpha \frac{\pi^{3/2}}{\alpha^{3/2}} \; e^{-i\alpha m^2-\frac{ix^2}{4\alpha}}$$

$$\frac{1}{\beta} = \alpha \qquad \frac{d\alpha}{\alpha^2} = d\beta$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\beta}{\beta^{1/2}} \cdot e^{-\frac{imx}{2}\left[\frac{2m}{x\beta}+\frac{x\beta}{2m}\right]}$$

$$\frac{x\beta}{2m} = e^{-2}$$

$$-d\beta = \frac{2m}{x} e^{-z} dz$$

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{2m}{x}} \; e^{-z/2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2m}{x} e^{-z} dz}{\sqrt{\frac{2m}{x}} \; e^{-z/2}} \cdot \; e^{-\frac{imz}{2}} [e^{-z} + e^{z}]$$

$$\frac{x\beta}{2m} = e^{-2}$$

$$-d\beta = \frac{2m}{x} e^{-z} dz$$

$$\sqrt{\beta} = \sqrt{\frac{2m}{x}}\, e^{-z/2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2m}{x} e^{-z} dz}{\sqrt{\frac{2m}{x}}\, e^{-z/2}} \cdot e^{-\frac{imz}{2}} \left[e^{-z} + e^{z}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{x}} \int dz . e^{-imx\cosh z} . e^{-z/2}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{x}} \quad H^{(2)}{}_{1/2}[mx] \quad \text{dir.}$$

$$\mu = 0$$

$$\partial' F_{10} + \partial^2 F_{20} + \mu \varepsilon_{012} F^{12} + \mu \varepsilon_{021} F^{21} + \partial_o B = e \overline{\psi} \gamma_o \psi$$

$$\partial' F_{10} + \partial^2 F_{20} + 2\mu F^{12} + \partial_o B = e \overline{\psi} \gamma_o \psi$$

$$\{\partial_o B, \psi\} = e\{\overline{\psi} \gamma_o \psi, \psi\}$$

$$\partial_o \{B, \psi\} = e\left[\gamma_o \partial^o + \gamma_1 \partial^1 + \gamma_1 \partial^2\right] D \gamma_o \psi$$

$$= e \partial^o D$$

$$\{\overline{\psi}, \psi\} = \partial D$$

$$\partial = \left(\gamma_o \partial^o + \gamma_1 \partial^1 + \gamma_1 \partial^2\right) D$$

$$[\overline{A}, A] = D(x - y)$$

$$[\overline{\psi}, \psi] = \gamma^o D(x - y)$$

$$\partial^1[\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1] + \partial^2[\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2] + 2\mu[\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1] + [\partial_0 B, A] = 0$$
$$\partial^1\partial_1[A_0, A_0] + \partial^2\partial_2[A_0, A_0] = \partial_0[B, A]$$
$$\left(\partial^{1^2} + \partial^{2^2}\right) g^{00} D(x-y) = \partial_0[B, A]$$
$$\left[\partial_0{}^2 - \partial^{1^2} - \partial^{2^2}\right] D = 0$$
$$\partial_0{}^2 D = \partial_0[B, A]$$
$$\partial_0 D = [B, A]$$
$$\left\{B(x), \overline{\psi}(y)\right\} = -ieD(x-y)\overline{\psi}(y)$$
$$\left\{B, \overline{\psi}\right\} = \left[B, \psi\right]\exp(\;) + \psi\left\{B, \exp(\;)\right\}$$

yani

$$\left[B, AC\right] = BAC - ACB$$
$$= BAC - ABC + ABC - ACB$$
$$= \left[B, A\right]C + A\left[B, C\right]$$

Buradan

$$\left(B, 1 + A_\mu + \frac{A_\mu{}^2}{2i}\right)$$
$$\left[B, e^A\right] = \left[B, A\right]e^A$$
$$= -ie\int \partial_\mu D(x-y)d^3y . a^\mu(x-y)e^A$$
$$= -ie\int D(x-y)d^3y . \partial_\mu a^\mu(x-y)e^A$$
$$= -ieD(x-y)\overline{\psi}$$

$$a^\mu(p) = \int d^3n\left[ig^{\mu\nu}\rho(n) + \varepsilon^{\mu\nu\rho}P_\rho\sigma(n)\right]n_\nu \frac{1}{np + i\varepsilon}$$

$$\frac{1}{np + i\varepsilon} = \frac{1}{i}\int_0^\infty ds . e^{i(np+i\varepsilon)s} \rightarrow \text{Fourier dönüşümünden}$$

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{ipx}\left[ig^{\mu\nu}\rho(n) + \varepsilon^{\mu\nu\rho}P_\rho\sigma(n)\right]n_\nu \frac{1}{i}\int_0^\infty ds . e^{i(np+i\varepsilon)s}$$

yukarıdaki ifadede bazı integral kısımları bize δ fonksiyonunu verir. Aşağıdaki gibi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-ipx+inps} = \delta(x - ns)$$

$\int e^{-ipx}P_\rho \Rightarrow$ bu integralde türeve eşit olur. Yani $\int e^{-ipx}P_\rho = \frac{\partial}{\partial x}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\theta(s) = \int_0^\infty ds$ şeklinde tanımladıktan sonra ifade en son biç imyle aşağıdaki gibi gösterildi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\theta(s)\left[g^{\mu\nu}\rho(n) + \varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial\rho\right]n_\nu . \delta(x - ns)$$

$i\{Q,\psi(x,\zeta)\} = -\lambda e\psi$

C - S terimi varlığında anyon kuantum alanındaki ç alışmadan Q akımile $\psi(x,\zeta)$fonsiyonundan yaralandık.İntegralde ∂ $F_{i\nu}$ yerine değerini yazdık ve bunu aşağıdaki biç imde aç tık.

$$Q = \int k_0 d^3x = \int \partial^i F_{i\nu} \partial^3 x$$
$$= \int \partial^i [\pi_i - \mu\varepsilon_{oi\nu} A^\nu + g_{10} B] \partial^3 x$$
$$= \int [\partial^i \pi_i - \mu\varepsilon_{oi\nu} \partial_i A^\nu] \partial^3 x$$

$$\int \left[\partial^i \pi_i - \mu\varepsilon_{oi\nu} \partial_i A^\nu, \psi(x) \exp\left(\frac{ie}{2} \int d^2y (1+\lambda) f^i(\bar{x}-\bar{y}) A_i(y) - (1-\lambda) g^i(\bar{x}-\bar{y}) \varepsilon_{ij} \frac{\pi^i(x_{0,}y)}{\mu} \right) \right]$$

$[\pi^i, A_j] = -\delta^{ij}$ komütatörü δ fonksiyonuna eşittir.

$$[\partial_i \pi^i, A_j f^j(1+\lambda)] = -\partial_i f^j(1+\lambda) + \left[\mu\varepsilon_{oi\nu} \partial_i A^\nu, \frac{(1-\lambda) g^i(\bar{x}-\bar{y}) \varepsilon_{ij} \pi^i(x_{0,}y)}{\mu} \right]$$

$= (1-\lambda)\varepsilon_{oi\nu} \partial_i g^i \varepsilon_{ij}$ yukarda gerekli işlemleri yaptıktan sonra her bir komütatörden - $(1+\lambda)$ ve $(1-\lambda)$ gelir. Bunlar toplandığında,

$$= -(1+\lambda) + (1-\lambda)$$
$$= -2\lambda$$ elde edilir.

$i\{Q,\psi\} = -\lambda e\psi$ bizde bundan yaralanarak $i\{\phi, \sigma(x',b)\} = \rho\sigma(x',b)$ olduğunu gösterdik.

$\chi(x,\zeta_1,\zeta_2) = \bar{\psi}(x,\zeta_1)\psi(x,\zeta_2)$ bu ifadede C - S terimi varlığında yapılan ç alışmadandır. Biz buç alşmadan yararlandık, χ bileşik alanın kurulmasına yardım eden ψ i aşağıdaki gibi tanımladık,

$$\psi(x,\zeta) = \psi(x) \exp\left[\frac{ie}{2} \int d^2y (1+\lambda) f^i(x-y) A_i(x_0,y) - (1-\lambda) g^i(x-y) \varepsilon_{ij} \frac{\pi^i(x_{0,}y)}{\mu} \right]$$

$i\{Q,\chi(x',\zeta_1,\zeta_2)\} = (\lambda_2 - \lambda_1) e\chi(x',\zeta_1,\zeta_2) \Rightarrow$ komütatörü

$$\frac{dAB}{dx} = \frac{dA}{dx} B + A \frac{dB}{dx}$$

$$[Q,AB] = [QA - AQ]B + A[QB - BQ]$$
$$= [Q,A]B + A[Q,B]$$ şeklinde aç tık.

Buna göre , $Q = \int \partial^i F_{i\nu} \partial^3 x$ akımını kulanarak bileşik alanı

$$= -i(\lambda_1 - 1)\psi + i(\lambda_2 - 1)\psi$$
$$= (\lambda_2 - \lambda_1) i\psi$$ elde ederiz.

"(2+1) boyutda ayar teorisinde yüklü alanların açısal momentumu" ile yaptığımız çalışmadan ;

$$\kappa=\varepsilon_{ij}x^i\left(\pi^\mu\partial^j A_\mu+\pi_\varphi\partial^j\varphi+\pi_\varphi\partial^j\varphi^*+\pi_c\partial^j c+\pi_c\partial^j\bar{c}+\varepsilon_{ij}\pi^i A^j\right),$$

$$K_R=\int_{D_R} d^2y\kappa(y),$$

$$\{K,\varphi(x)\}=\lim_{R\to\infty}\{K_R,\psi(x)\}$$

$x_1=r\cos\theta$, $y_1=r\cos\theta$

$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x_1}$'ın' r ve θ ' ya göre kısmı türevi olarak tanımladık.

$r=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}$'i x_1 ve x_2 olarak tanımladık.

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}=\frac{x_1}{r}=\cos\theta$$

$\tan\theta=\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow$'ın tersini aldık. $\theta=\tan^{-1}\frac{x_2}{x_1}$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1}=\frac{1}{1+\frac{x_2^{\,2}}{x_1^{\,2}}}\left[-\frac{x_2}{x_1^{\,2}}\right]$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2}=\frac{x_2}{r}=\sin\theta;\quad\frac{\partial\theta}{\partial x_1}=\frac{1}{1+\frac{x_2^{\,2}}{x_1^{\,2}}}\left[-\frac{x_2}{x_1^{\,2}}\right]$$

$\frac{\partial}{\partial x_1}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$ yukarda aldığımız türevleri x_2 ve x_1 ç arpıp, yazdık ve aşagıdaki gibi bu ç arpımda gerekli ifadeleri yazdık. Sonuç olaak

$$\frac{\partial}{\partial x_2}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}=r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\sin^{\prime\prime 2}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$=\frac{d}{d\theta}\varphi(x_\theta)\Big|_{\theta=0}$,ifadenin bu şekilde olduğunu gösterdik.

ÖZGEÇMİŞ

1967 Kastamonu doğumlu. Orta ve lise öğrenimimi İstanbul'da Gaziosmanpaşa ilçesinde Vefa Poyraz lisesinde tamamladı. 1986 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik mühendisliği bölümüne girdi. 1991 yılında iyi dereceyle Fizik mühendisi olarak mezun oldu.Aynı yıl İTÜ Fen bilimleri enstitüsünün açmış olduğu yüksek lisans sınavını kazandı ve Fizik mühendisliğinde yüksek enerji dalında Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU danışmanlığında yüksek lisansını tamamladı. Öğrenimi esnasında İTÜ vakfının vermiş olduğu burstan yararlandı.