XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

DEĞİŞKEN EN KESİTLİ ÇUBUKLARIN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE BOYUNA TİTREŞİM ANALİZİ

Safiye Ecer[1], Fethi Kadıoğlu[2]
[1,2]İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

The vibrations can be categorized as longitudinal, transverse and torsional according to their directions. In this work, using the Gâteaux derivative and functional analysis, the longitudinal vibrations of elastic bars which has various boundary conditions and cross sections were researched. Firstly, the essential equations which will be used in the analysis were obtained. Then they were written in operator forms and so it was shown that they fit the potency conditions. Subsequently the related functionals of longitudinal vibrations of bars were obtained using the Gâteaux derivative method. In these functionals there exist two variables as normal force and longitudinal displacement. The longitudinal shape functions suitable for the problem were determined. Through the application of these shape functions to the existing functionals the element matrices were separately obtained for both functionals. With these element matrices the longitudinal vibration frequencies on the bars, which have various boundary conditions, were obtained. The results were compared and verified with the results in the related literature.

ÖZET

Titreşim problemlerini, titreşim hareketinin yönüne göre boyuna titreşim, enine titreşim ve burulma şeklinde birkaç başlık altında incelemek mümkündür. Bu çalışmada Gâteaux türevi ve fonksiyonel analiz ile farklı sınır koşullarına ve kesitlere sahip elastik çubuklara ait boyuna titreşim hareketi incelenmiştir.

İlk olarak analiz sırasında kullanılacak olan temel denklemler elde edilmiş ve bu denklemler operatör formda yazılarak potansiyellik koşulunu sağladığı gösterilmiştir. Daha sonra Gâteaux türevi yöntemi ile çubukların boyuna titreşim hareketine ait ilgili fonksiyoneller elde edilmiştir. Bu fonksiyonellerde normal kuvvet ve boyuna yer değiştirme olmak üzere iki değişken bulunmaktadır. Probleme uygun doğrusal şekil fonksiyonları belirlenmiş ve bu şekil fonksiyonları mevcut fonksiyonellere uygulanarak her iki fonksiyonel için de eleman matrisleri ayrı ayrı elde edilmiştir. Elde edilen eleman matrisleri ile farklı sınır koşullarına sahip çubuklar üzerinde boyuna titreşim frekansları elde edilmiştir. Titreşim frekanslarının, hesaplanması için Fortran programlama dili kullanılarak bir kod yazılmıştır. Hazırlanan program ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması için literatürde yer alan örnekler kullanılmıştır.

GİRİŞ

Çubukların boyuna titreşimleri ile ilgili literatürde bir çok çalışma bulmak mümkündür.

R.E.D. Bishop ve D.C. Johnson [1], S. Timoshenko [2], B. Rayleigh ve J. W. Strutt [3] tarafından yazılan kitaplarda boyuna titreşim ile ilgili ayrıntılı bilgiler mevcuttur. M. Eisenberger [4] tarafından değişken kesitli çubuklarda titreşim frekansı incelenmiştir. B. M. Kumar ve R. I. Sujith [5] tarafından yapılan çalışmada üniform olmayan çubukların boyuna titreşimleri için kesin çözümler elde edilmiştir. B. Yardımoğlu [6] referans [5]'de bulunan iki ucu serbest çubuğun frekans denklemindeki hatayı düzelterek doğru frekans denklemini elde etmiştir. Q. S. Li [7] tarafından yapılan çalışmada sürekli değişen kesite sahip çubukların boyuna serbest titreşimleri için kesin çözümleri elde edilmiştir. Yine Q. S. Li [8] tarafından kesitleri ani değişen çubukların parçalı analitik çözümüne dayalı serbest boyuna titreşimlerini incelenmiştir. Z. Girgin, E. Demir ve C. Kol [9] tarafından genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile bir ucu ankastre diğer ucu serbest çubuğun boyuna titreşim frekansı elde edilmiştir. B. Yardımoğlu ve L. Aydın [10] tarafından değişken kesitli çubukların boyuna titreşim karakteristikleri üzerine bir çalışma yapılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ VE GÂTEAUX TÜREVİ

Çubuklarda boyuna titreşim hareketine ait diferansiyel denklem aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{z}^2} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{E}} . \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}^2} \tag{1}$$

Bu denklemde E sistemin elastisite modülünü, ρ cismin birim kütlesini ifade etmektedir.

Denklem (1) alan üzerinde integre edildiğinde normal kuvvet cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{z}} = \boldsymbol{\rho}.\mathbf{A}.\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{t}^2} \tag{2}$$

Yer değiştirme ve normal kuvvet

$$\mathbf{U}(\mathbf{z},\mathbf{t}) = \mathbf{u}.\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}} \tag{3}$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{z},\mathbf{t}) = \mathbf{N}.\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}} \tag{4}$$

şeklinde yazılır ve (3) ve (4) denklemi $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}$ parantezine alınacak şekilde düzenlenirse denklemler aşağıdaki hale gelir:

$$\boldsymbol{\rho}.\mathbf{A}.\boldsymbol{\omega}^2.\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0} \tag{5}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} + \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{E}.\mathbf{A}} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Alan denklemleri operatör formda aşağıdaki şekilde gösterilmektedir [11,12]:

$$Q=Lu-f \tag{7}$$

Burada L türev operatörünü, u bilinmeyenleri ve f dış yükleri temsil etmektedir.

Q operatörü sınır koşullarını da içerecek şekilde matris formda yazılacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \rho A\omega^2 & \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 \quad 0 & & 0 & -1 \\ 0 \quad 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ N \\ u \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\widehat{N} \\ \hat{u} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Eğer **Q** operatörü potansiyel ise

$$\langle \mathbf{dQ}(\mathbf{u}, \overline{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^* \rangle = \langle \mathbf{dQ}(\mathbf{u}, \mathbf{u}^*), \overline{\mathbf{u}} \rangle \tag{9}$$

koşulunu sağlamalıdır. Yukarıdaki şart sağlatıldıktan sonra aşağıdaki fonksiyonel elde edilir [13]:

$$I(u) = \int_0^1 \langle Q(su, u), u \rangle ds \tag{10}$$

Denklem (7) denklem (10)'da yerine yerleştirilir ve Normal Kuvvet (N) üzerinde kısmi türev uygulanırsa;

$$I_1 = \frac{1}{2}\rho A\omega^2[u, u] - [N, u'] + \frac{1}{2EA}[N, N] + [u, N]_\varepsilon + [\widehat{N}, u]_\sigma - [\hat{u}, N]_\varepsilon \tag{11}$$

fonksiyoneli, Yer Değiştirme (u) üzerinde kısmi türev uygulanırsa;

$$I_2 = \frac{1}{2}\rho A\omega^2[u, u] + [N', u] + \frac{1}{2EA}[N, N] - [u, N]_\sigma + [\widehat{N}, u]_\sigma - [\hat{u}, N]_\varepsilon \tag{12}$$

fonksiyoneli elde edilir.

Fonksiyonellerde [,] iç çarpımı ifade etmektedir.

ŞEKİL FONKSİYONLARI

Fonksiyonellerde bulunan değişkenleri karakterize eden şekil fonksiyonları aşağıdaki şekilde seçilmiştir:

$$\Psi_i = \frac{z_j - z}{z_j - z_i} = \frac{z_{j-z}}{L_e} \tag{13}$$

$$\Psi_j = \frac{z - z_i}{z_j - z_i} = \frac{z - z_i}{L_e} \tag{14}$$

Fonksiyonele ait tüm bilinmeyenler interpolasyon formunda yazılırsa çubuk içinde herhangi bir noktadaki değişkenler:

$$u = u_i.\Psi_i + u_j.\Psi_j \tag{15}$$

$$u' = u_i.\Psi_i' + u_j.\Psi_j' \tag{16}$$

$$N = N_i.\Psi_i + N_j.\Psi_j \tag{17}$$

$$N' = N_i.\Psi_i' + N_j.\Psi_j' \tag{18}$$

şeklinde yazılabilirler.

Elde edilen denklemler fonksiyonellerde yerlerine yerleştirilirse I_1 fonksiyoneli için;

$$\begin{bmatrix} (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{3} & \frac{1}{2} & \rho.A.\omega^2.\frac{L}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} \\ (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{6} & -\frac{1}{2} & (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_i \\ N_i \\ u_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

eleman matrisi, I_2 fonksiyoneli için;

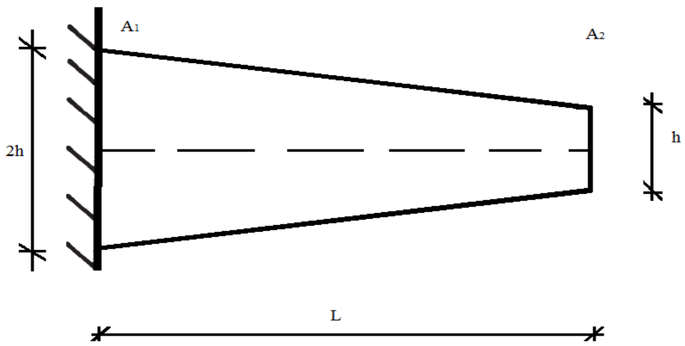
$$\begin{bmatrix} (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{3} & -\frac{1}{2} & (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} \\ (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{6} & -\frac{1}{2} & (\rho.A.\omega^2).\frac{L}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{6EA} & \frac{1}{2} & \frac{L}{3EA} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_i \\ N_i \\ u_j \\ N_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

eleman matrisi elde edilir.

SAYISAL ÖRNEKLER

Bir Ucu Ankastre Bağlı Diğer Ucu Serbest Lineer Değişken Kesitli Çubuk

Lineer değişken kesitli çubuk için titreşim frekansını hesaplayabilmek amacıyla $E/\rho=1$, L=1m, $A_1=2m^2$ ve $A_2=1m^2$ olarak belirlenmiştir. Eisenberger [14]'de yer alan alan için A=2-z bağıntısı kullanılmıştır. Sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür.



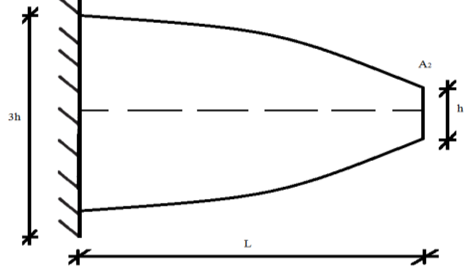
Şekil 1. Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest lineer değişken kesitli çubuk

Çizelge 1. Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest lineer değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı

Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Eisenberger
1	1.5	1.73205
2	1.70854	1.79334
5	1.77092	1.79473
10	1.78422	1.79422
25	1.79053	1.79405
50	1.79244	1.79402
Kesin Sonuç		1.79401

Bir Ucu Ankastre Bağlı Diğer Ucu Serbest Lineer Değişken Kesitli Çubuk

Parabolik değişen kesitli çubuk için titreşim frekansını hesaplayabilmek amacıyla, $E/\rho=1$, L=1m, Alan için Eisenberger [15]'de örneğinde yer alan $A=3-4z+2z^2$ bağıntısı kullanılmıştır. Sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür. Sonuçlar Eisenberger [15] ile karşılaştırılmıştır. Lineer değişken kesitli çubuk için titreşim frekansını hesaplayabilmek amacıyla $E/\rho=1$, L=1m, $A_1=2m^2$ ve $A_2=1m^2$ olarak belirlenmiştir. Eisenberger [15]'de yer alan için A=2-z bağıntısı kullanılmıştır. Sistem 1, 2, 5, 10, 25, 50 eşit parçaya bölünmüştür.



Şekil 2. Bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest parabolik değişken kesitli çubuk

Çizelge 2. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest parabolik değişen kesitli çubuğa ait titreşim frekansı

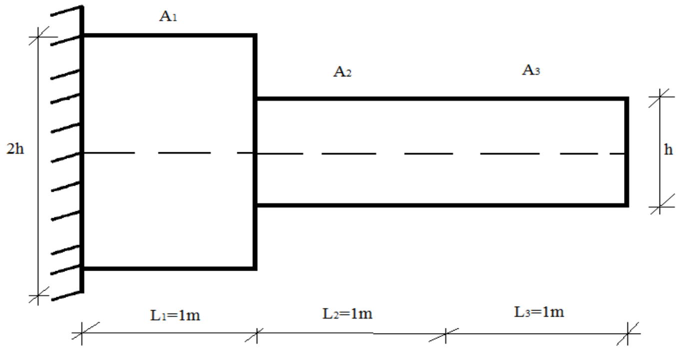
Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Eisenberger
1	1.5	l.73205
2	1.90078	1.95371
5	1.98845	1.96945
10	1.98651	1.97058
25	1.978799	1.97085
50	1.97498	1.97088
Kesin Sonuç		1.97090

Bir Ucu Ankastre Diğer Ucu Serbest Ani Değişken Kesitli Çubuk

Ani değişken kesitli çubuğa ait titreşim frekansının hesaplanabilmesi amacıyla sistemdeki çubuğa ait , toplam boy L=3m, olarak verilmiş ve çubuk $A_1=2A$ ve L=1m, $A_2=A$ ve L=1m $A_3=A$ ve L=1m olacak şekilde birbirine eşit 3 parçaya bölünmüştür. Sonuçların karşılaştırılabilmesi için Bishop [16]'da yer alan örneğe ait sonuçlardan faydalanılmıştır ve sisteme ait frekans hesabı için;

$$\frac{A_1.\tan\frac{\omega L_2}{\frac{E}{\rho}}+A_2.\tan\frac{\omega L_1}{\frac{E}{\rho}}}{A_1-A_2.\tan\frac{\omega L_1}{\frac{E}{\rho}}.\tan\frac{\omega L_2}{\frac{E}{\rho}}}=\frac{A_2}{A_3}.\cot\frac{\omega L_3}{\frac{E}{\rho}} \tag{19}$$

bağıntısı verilmiştir.



Şekil 3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest ani değişken kesitli çubuk

Çizelge 3. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest ani değişen kesitli çubuğa ait titreşim titreşim

Eleman Sayısı	Bu Çalışma	Bishop
3	0.61497	0.61548

SONUÇLAR

Bu çalışmada Gâteaux türevi yöntemi ile değişken en kesitli çubuklara ait fonksiyoneller elde edilmiştir. Fonksiyonellerde normal kuvvet ve boyuna yer değiştirme olarak iki parametre bulunmaktadır. Elde edilen fonksiyonellerin çözümü için karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Fonksiyonellerde bulunan değişkenlerin yalnızca birinci türevlerinin bulunması dolayısı ile doğrusal şekil fonksiyonları seçilmiştir.

İki düğüm noktalı tek elemanlı çubuk için elaman matrisleri elde edilmiştir. Karışık sonlu elaman formülasyonu kullanılarak farklı sınır koşulları ve değişken en kesitlere sahip çubuklara ait titreşim frekansları bulunmuştur. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürde yer alan çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

KAYNAKLAR

[1,16] Bishop, R. E. D. ve Johnson, D. C. (1969). The Mechanics of Vibration, 1st Ed., Cambridge Univerity Press.

[2] Timoshenko, S. (1928). Vibration Problems İn Engineering, 1st Ed., D. Van Nostrand Company, Inc.

[3] Strutt, J. W. ve Rayleigh, B. (1877). The Theory Of Sound, Macmillan And Co.

[4,14,15] Eisenberger, M. (1991). Exact longitudinal vibration frequencies of a variable cross-section rod, *Applied Acoustics,34*, 123-130.

[5] Kumar, B. M. ve Sujith, R. I. (1997). Exact Solutıons For The Longıtudınal Vıbratıon Of Non-Unıform Rods, *Journal Of Sound And Vibration, 207,* 721-729.

[6] Yardımoğlu, B. (2010). Exact Solutions For The Longitudinal Vibration Of Non-Uniform Rods, *Journal Of Sound And Vibration, 329,* 4107-4107.

[7] Li, Q. S. (2000). Exact Solutions For Free Longitudinal Vibrations Of Non-Uniform Rods, *Journal Of Sound And Vibration, 234,* 1-19.

[8] Li, Q. S. (2000). Free Longitudinal Vibration Analysis Of Multi-Step Non-Uniform Bars Based On Piecewise Analytical Solutions, *Engineering Structures, 22,* 1205-1215.

[9] Girgin, Z. ve Demir, E. ve Kol, C. (2004). Genelleştirilmiş Diferansiyal Quadrature Metodunun Kirişlerin Serbest Titreşim Analizine Uygulanması, *Journal Of Engineering Sciences, 10,* 347-352.

[10] Yardımoğlu, B. ve Aydın, L. (2011). Exact Longitudinal Vibration Characteristics Of Rods With Variable Cross-Sections, *Shock And Vibration, 18,* 555-562.

[11] Aköz, Y. (1984). Şekil Değiştiren Cisimler Mekaniği, TÜBİTAK.

[12] Kadıoğlu, F. (1994). Elastik Zemine Oturan Doğru Ve Daire Eksenli Çubuklar, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

[13] Oden, J.D. ve Reddy, J.N. (1976). Variational Methods In Theoretical Mechanics, Springer, Berlin.