

## DEĞİŞKEN KESİTLİ KOMPOZİT ÇUBUKLARIN DİNAMİK DAVRANIŞINI ETKİLEYEN FAKTÖRLERİN İNCELENMESİ

Faruk Fırat Çalım ve Murat Bingöl

Mustafa Kemal Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Hatay  
e-mail: ffcetim@mku.edu.tr

### ÖZET

Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiştir. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve anizotropik kabul edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini kesin olarak hesaplamak için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Elde edilen çözümler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmektedir. Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak incelenmiştir. Sınır şartları, kesit değişim parametresi,  $E_1/E_2$  oranı, tabaka açısının serbest ve zorlanmış titreşime etkileri araştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

### ABSTRACT

The dynamic behavior of composite straight rods with variable cross-section is theoretically investigated in the Laplace domain. The governing equations for composite straight beams with variable cross-section are obtained using Timoshenko beam theory. The effect of the rotary inertia, axial and shear deformations are considered in the formulations. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and anisotropic. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically using the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem accurately. The solutions obtained are transformed to the real space using the Durbin's numerical inverse Laplace transform method. The free and forced vibrations of composite straight rods with variable cross-section are analyzed. The free vibration is then taken into account as a special case of forced vibration. The effects of boundary conditions, non-uniformity parameter, ratio of  $E_1/E_2$  and lamination angle on free and forced vibrations are

investigated. The results obtained in this study are found to be in good agreement with those obtained from ANSYS.

## 1. GİRİŞ

Değişken kesitli çubuklar önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Modern mühendislik yapılarında yüksek mukavemet, hafif malzeme gibi özelliklerden dolayı kompozit çubukların davranışı ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Kompozit malzemeler kiriş, plak ve kabuk gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Taber ve Viano [1], değişken kesite sahip Timoshenko kirişi için frekanları ve mod şekilleri taşıma matrisi yöntemi ile hesaplamışlardır. Dong ve ark. [2], değişken kesitli tabakalı bir kompozit Timoshenko kirişinin titreşim karakteristiğini araştırmışlardır. Birinci mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı tabakalı bir kirişin eğilme ve kayma rijitliklerini hesaplamışlardır. Singh ve ark. [3], üniform olmayan kompozit kirişlerin analizi için yeni bir analitik model geliştirmişlerdir. Bernoulli kiriş teorisini kullanarak üniform olmayan kompozit kirişlerin analizini yapmışlardır. Ganesan ve Zabihollah [4, 5], sonlu elemanlar yöntemi kullanarak değişken kesitli kompozit kirişlerin serbest titreşim davranışlarını incelemişlerdir. Çalım [6] değişken kesitli simetrik tabakalı kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimini Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Formülasyonda; malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır.

Kompozit doğru eksenli çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen zamanla değişen yükler altında zorlanmış titreşimi ile ilgili çalışmalara literatürde çok az rastlanmaktadır.

Bu çalışmada, değişken kesitli, doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Laplace uzayında incelenmiştir. Timoshenko çubuk teorisi kullanarak doğru eksenli çubukları idare eden denklemler elde edilmiştir. Formülasyonda, malzeme anizotropisi, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Kanonik formda Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklemlere tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi uygulanarak [6-8] problemin dinamik rijitlik matrisi hesaplanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır [6-9].

## 2. FORMÜLASYON

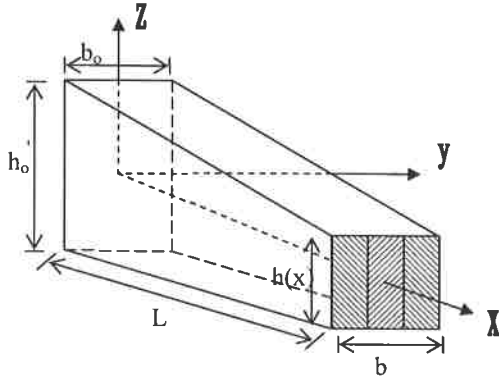
Çubuk eksenini üzerinde herhangi bir  $x$  noktasında yer değiştirme  $U^o(x, t)$  ve bu noktadaki kesitin dönmesi  $\Omega^o(x, t)$  olarak gösterilsin.  $T(x, t)$  vektörü ile  $t$  anında  $x$  noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve  $M(x, t)$  ile bunların ağırlık merkezi olan  $G$  noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet  $p^{ex}(x, t)$  ve moment  $m^{ex}(x, t)$  olsun. Çubuk malzemesi lineer elastik ve anizotropiktir. Kompozit uzaysal çubuğu idare eden denklemler vektörel formda elde edilmektedir.

$$\frac{\partial U^o}{\partial x} = A'T + B'M + \Omega^o \times i, \quad \frac{\partial \Omega^o}{\partial x} = F'T + D'M \quad (1)$$

$$\frac{\partial T^o}{\partial x} + p^{(ex)} = p^{(in)}, \quad \frac{\partial M^o}{\partial x} + i \times T^o + m^{(ex)} = m^{(in)} \quad (2)$$

$\mathbf{p}^{in}$  kütleli atalet kuvveti ve  $\mathbf{m}^{in}$  kütleli atalet momenti ifadeleri

$$p_i^{(in)} = -\rho A \frac{\partial^2 U_i^o}{\partial t^2}, \quad m_i^{(in)} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \Omega_i^o}{\partial t^2} \quad (i = x, y, z) \quad (3)$$



Şekil 1. Kompozit kirişin geometrisi ve koordinat takımı

olmak üzere, burada  $\rho$ , kütleli yoğunluğu göstermektedir.  $I_x$  burulma ve  $I_y, I_z$  ise eğilme atalet momentleridir.  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}$  ve  $\mathbf{D}$  matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir (Şekil 1).  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}$  ve  $\mathbf{D}$  matrislerinin açık ifadeleri Çalım [7,8]'de verilmektedir.

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü kabul edilmektedir. Seçilen kesitin geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse, dik koordinat takımında  $N$  adet kompozit tabakadan oluşan değişken kesitli doğru eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_x}{dx} = A'_{11} \bar{T}_x \quad (4a)$$

$$\frac{d\bar{U}_y}{dx} = \Omega_z + \alpha_y A'_{22} \bar{T}_y \quad (4b)$$

$$\frac{d\bar{U}_z}{dx} = -\Omega_y + \alpha_z A'_{33} \bar{T}_z \quad (4c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_x}{dx} = D'_{11} \bar{M}_x \quad (4d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_y}{dx} = D'_{22} \bar{M}_y \quad (4e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_z}{dx} = D'_{33} \bar{M}_z \quad (4f)$$

$$\frac{d\bar{T}_x}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_x + \bar{V}_7 \quad (4g)$$

$$\frac{d\bar{T}_y}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_y + \bar{V}_8 \quad (4h)$$

$$\frac{d\bar{T}_z}{dx} = s^2 \tilde{A} \bar{U}_z + \bar{V}_9 \quad (4i)$$

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = s^2 \tilde{I}_x \bar{\Omega}_x + \bar{V}_{10} \quad (4j)$$

$$\frac{d\bar{M}_y}{dx} = s^2 \tilde{I}_y \bar{\Omega}_y + \bar{T}_z + \bar{V}_{11} \quad (4k)$$

$$\frac{d\bar{M}_z}{dx} = s^2 \tilde{I}_z \bar{\Omega}_z - \bar{T}_y + \bar{V}_{12} \quad (4l)$$

$\bar{V}(x, s)$  kolon matrisinin elemanları (5) denkleminde verilmiştir. Laplace dönüşümünden gelen başlangıç şartları,  $\bar{V}(x, s)$  yük vektörüne dahil edilmektedir.

$$\bar{V}_i(x, s) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$$\bar{V}_{6+j}(x, s) = -(\bar{p}_j^{(cx)}) - \rho \tilde{A} \left[ sU_j^*(x, 0) + \frac{\partial U_j^*(x, 0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3) \quad (5)$$

$$\bar{V}_{9+j}(x, s) = -(\bar{m}_j^{(cx)}) - \rho \tilde{I}_j \left[ s\Omega_j^*(x, 0) + \frac{\partial \Omega_j^*(x, 0)}{\partial t} \right]$$

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} A^{(k)} \quad , \quad \tilde{I}_2 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_3)^2 dA \quad , \quad \tilde{I}_3 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_2)^2 dA \quad (6)$$

Problem, hem serbest hem de zorlanmış titreşim analizi için dinamik rijitlik matrisi ve yük vektörleri tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile elde edilmektedir [6-8].

### 3. SAYISAL UYGULAMA

Anizotropik malzemeden yapılmış değişken kesitli kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimini analiz etmek için Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. Laplace uzayından zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi uygulanmıştır.

Bu bölümde, çeşitli örnekler sunulmuştur. Geliştirilen bilgisayar programı ile değişken kesitli doğru eksenli kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır. Aynı zamanda mümkün olduğu takdirde elde edilen değerler, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile de karşılaştırılmıştır. Değişken kesitli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşimini etkileyen faktörler incelenmiştir. Değişken kesitli kompozit çubuklar için; sınır şartları, kesit değişim parametreleri,  $E_1/E_2$  oranı, tabaka açısının serbest ve zorlanmış titreşimine etkileri araştırılmıştır.

Kompozit kirişler için iki tip değişken kesit ele alınmıştır. Bunlar, kesit yüksekliği lineer değişen ve kesit genişliği exponansiyel değişen kirişler kullanılmıştır.  $b_o$  ve  $h_o$  eleman başlangıcındaki kesit genişliği ve kesit yüksekliği olmak üzere kesit yüksekliği veya kesit genişliği eleman boyunca azalmaktadır. Bu durumda, kesit alanı,  $A(x)$ , ve atalet momenti,  $I(x)$ , çubuk elemanı boyunca kesit yüksekliği veya kesit genişliğine bağlı olarak değişmektedir. Çubuk boyunca kesit yüksekliği ve kesit genişliğinin değişim fonksiyonu aşağıdaki ifade yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$h(x) = h_o [1 - \beta(x/L)] \quad (\text{Kesit yüksekliği lineer değişen})$$

$$b(x) = b_o e^{\beta(1-x/L)} \quad (\text{Kesit genişliği exponansiyel değişen})$$

Burada,  $h_o$  ve  $b_o$  başlangıçtaki kesit yüksekliği ve kesit genişliği,  $\beta$  kesit değişim parametresi,  $x$  çubuk üzerindeki herhangi bir nokta ve  $L$  ise çubuk uzunluğunu göstermektedir. Tüm problemlerde kullanılan malzeme özellikleri Tablo 1'de verilmektedir. Ayrıca problemlerde, çubuk uzunluğu  $L = 0.381\text{m}$  olup  $L/h = 15$  olarak alınmıştır.

**Tablo 1.** Malzeme özellikleri

|                              | $E_1$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $E_2=E_3$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $G_{12}=G_{13}$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $G_{23}$<br>(N/m <sup>2</sup> ) | $\nu_{12}$ | $\rho$<br>(kg/m <sup>3</sup> ) |
|------------------------------|------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------|------------|--------------------------------|
| Carbon epoxy<br>(AS4/3501-6) | 144.8x10 <sup>9</sup>        | 9.65x10 <sup>9</sup>             | 4.14x10 <sup>9</sup>                   | 3.45x10 <sup>9</sup>            | 0.3        | 1389.23                        |

### 3.1. Kesit Değişim Parametresinin Dinamik Davranışa Etkisi

Kesit değişim parametresinin dinamik davranışa etkisini inceleyebilmek için farklı sınır şartlarına sahip tek eksenli kompozit kiriş (0°) problemi ele alınmıştır. Farklı sınır şartları, ankastre uç-ankastre uç (AA), ankastre uç-boş uç (AB) ve sabit uç-sabit uç (SS) olarak ele alınmaktadır. Farklı değişken kesitli ve sınır şartlarına sahip kompozit kiriş problemine ait serbest titreşim frekansları Tablo 2 ve Tablo 3'de verilmektedir. Ayrıca projede önerilen yöntemin geçerliliğini test etmek amacı ile sonlu elemanlar yöntemine dayalı çözüm yapan ANSYS programı ile de çözümler yapılmaktadır.

**Tablo 2.** Kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişe ait temel frekanslar (Hz)

| Sınır Şartları |            | $\beta=0$<br>(Uniform) | $\beta=0.25$ | $\beta=0.5$ | $\beta=0.75$ |
|----------------|------------|------------------------|--------------|-------------|--------------|
| AB             | Bu çalışma | 278.43                 | 288.52       | 304.04      | 332.79       |
|                | ANSYS      | 278.43                 | 288.52       | 304.04      | 332.79       |
| AA             | Bu çalışma | 1376.46                | 1267.57      | 1125.86     | 928.81       |
|                | ANSYS      | 1376.51                | 1267.59      | 1125.89     | 928.93       |
| SS             | Bu çalışma | 753.22                 | 665.36       | 560.88      | 427.28       |
|                | ANSYS      | 753.22                 | 665.36       | 560.88      | 427.27       |

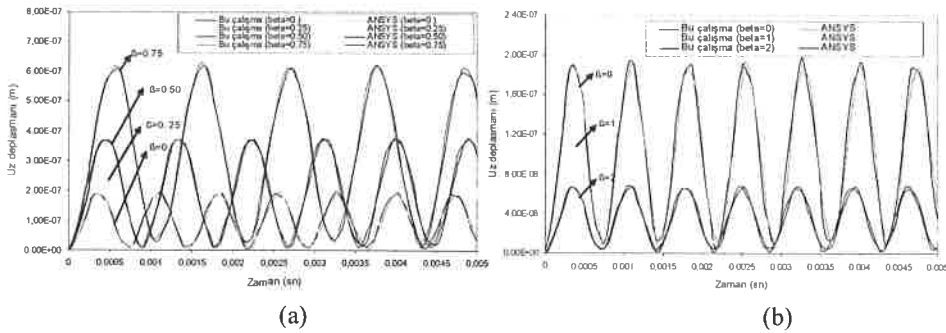
**Tablo 3** Farklı sınır şartlarına sahip kesit genişliği exponansiyel değişen kompozit kirişe ait temel frekanslar (Hz)

| Sınır Şartları |            | $\beta=0$<br>(Uniform) | $\beta=1$ | $\beta=2$ |
|----------------|------------|------------------------|-----------|-----------|
| AB             | Bu çalışma | 278.43                 | 371.88    | 486.84    |
|                | ANSYS      | 278.43                 | 371.88    | 486.83    |
| AA             | Bu çalışma | 1376.46                | 1383.59   | 1406.07   |
|                | ANSYS      | 1376.49                | 1383.61   | 1406.09   |
| SS             | Bu çalışma | 753.22                 | 744.04    | 717.09    |
|                | ANSYS      | 753.22                 | 744.05    | 717.10    |

Tablo 2 ve Tablo 3 incelendiğinde, bu çalışmada elde edilen temel frekanslar ile ANSYS sonuçlarının uyumlu oldukları görülmektedir. Problem, önerilen yöntemle sadece iki elemanla modellenirken, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile çözüm yapılırken yüz elemanla modellenmiştir. Farklı kesit değişim parametreleri ( $\beta$ ) ve mesnet şartları serbest titreşim frekanslarını etkilemektedir. En düşük temel frekans değeri ankastre-boş ve en yüksek temel frekans ankastre-ankastre mesnetlenme şartında meydana gelmektedir. Serbest titreşim analizinden sonra zorlanmış titreşim analizi için çubuk elemana, z-doğrultusunda  $P_0 = 1\text{N}$  şiddetinde adım tipi dinamik tekil yük uygulanmıştır. Dinamik yük, kompozit kirişin orta noktasına uygulanmaktadır. Farklı kesit değişim parametresi ( $\beta$ ) oranları için kompozit kirişteki deplasmanın zamanla değişimleri gösterilmektedir. Grafiklerden de

görülebileceği gibi, önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar ile sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile edilen sonuçların birbirleri ile uyumlu oldukları görülmektedir (Şekil 2-3).

Zorlanmış titreşim analizinde, kesit değişim parametresi titreşim periyodu ve genliği etkilemektedir. Kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişte kesit değişim parametresi artarken hem deplasman genliği hem de titreşim periyodu artmaktadır (Şekil 2). Kesit genişliği exponansiyel değişen kompozit kirişte, kesit değişim parametresi artarken titreşim periyodu hemen hemen aynı kalırken deplasman genliği azalmaktadır.



Şekil 2. a) Kesiti lineer değişen kompozit kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi, b) Kesiti exponansiyel değişen kompozit kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (AA)

### 3.2. $E_1/E_2$ Oranının Dinamik Davranışa Etkisi

Farklı  $E_1/E_2$  oranına sahip değişken kesitli, tek eksenli kompozit kiriş ( $0^\circ$ ) problemi ele alınmıştır. Malzeme sabitleri; kayma modülleri  $G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2$ ,  $G_{23} = 0.5 E_2$ ,  $\nu_{12} = 0.25$  ve  $\rho = 1389.23 \text{ kg/m}^3$  olarak seçilmiştir. İlgili tablolar incelendiğinde, elde edilen sonuçların ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları gözlenmektedir.

Tablo 4. Farklı  $E_1/E_2$  oranlarına sahip kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişe ait temel frekanslar (Hz)

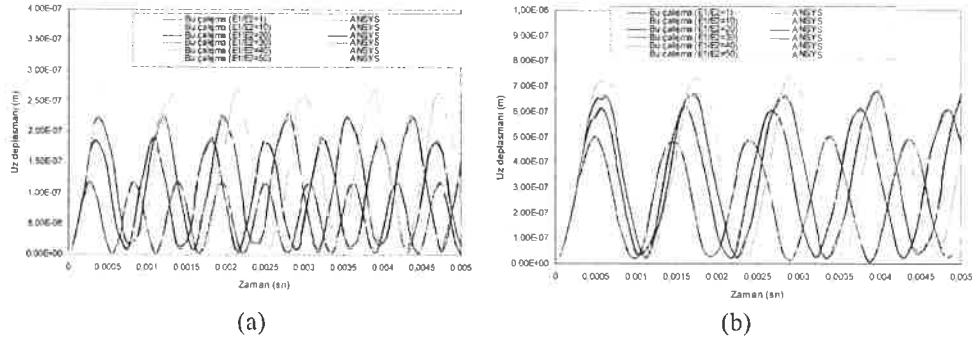
| Sınır şartları         |              | $E_1/E_2=1$ | $E_1/E_2=10$ | $E_1/E_2=20$ | $E_1/E_2=30$ | $E_1/E_2=40$ | $E_1/E_2=50$ |
|------------------------|--------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Ankastre-Ankastre (AA) | $\beta=0$    | Bu çalışma  | 1799.69      | 1567.61      | 1390.86      | 1262.48      | 1163.92      |
|                        |              | ANSYS       | 1799.70      | 1567.60      | 1390.90      | 1262.50      | 1163.90      |
|                        | $\beta=0.25$ | Bu çalışma  | 1574.72      | 1412.07      | 1278.79      | 1176.87      | 1095.79      |
|                        |              | ANSYS       | 1574.70      | 1412.10      | 1278.80      | 1176.90      | 1095.80      |
|                        | $\beta=0.50$ | Bu çalışma  | 1326.14      | 1224.08      | 1133.75      | 1060.50      | 999.64       |
|                        |              | ANSYS       | 1326.40      | 1224.10      | 1133.80      | 1060.50      | 999.67       |
|                        | $\beta=0.75$ | Bu çalışma  | 1034.34      | 982.82       | 933.31       | 890.31       | 852.56       |
|                        |              | ANSYS       | 1034.50      | 982.95       | 933.43       | 890.42       | 852.67       |
|                        |              |             |              |              |              |              |              |
|                        |              |             |              |              |              |              |              |

Tablo 5. Farklı  $E_1/E_2$  oranlarına sahip kesit genişliği exponansiyel değişen kompozit kirişe ait temel frekanslar (Hz)

| Sınır şartları         |           |            | $E_1/E_2=1$ | $E_1/E_2=10$ | $E_1/E_2=20$ | $E_1/E_2=30$ | $E_1/E_2=40$ | $E_1/E_2=50$ |
|------------------------|-----------|------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Ankastre-Ankastre (AA) | $\beta=0$ | Bu çalışma | 1799.69     | 1567.61      | 1390.86      | 1262.48      | 1163.92      | 1085.11      |
|                        |           | ANSYS      | 1799.70     | 1567.63      | 1390.89      | 1262.51      | 1163.95      | 1085.34      |
|                        | $\beta=1$ | Bu çalışma | 1810.52     | 1576.00      | 1398.06      | 1269.12      | 1170.27      | 1091.30      |
|                        |           | ANSYS      | 1810.51     | 1576.02      | 1398.09      | 1269.15      | 1170.30      | 1091.54      |
|                        | $\beta=2$ | Bu çalışma | 1843.89     | 1602.18      | 1420.76      | 1290.17      | 1190.45      | 1110.97      |
|                        |           | ANSYS      | 1843.90     | 1602.20      | 1420.78      | 1290.20      | 1190.49      | 1111.20      |

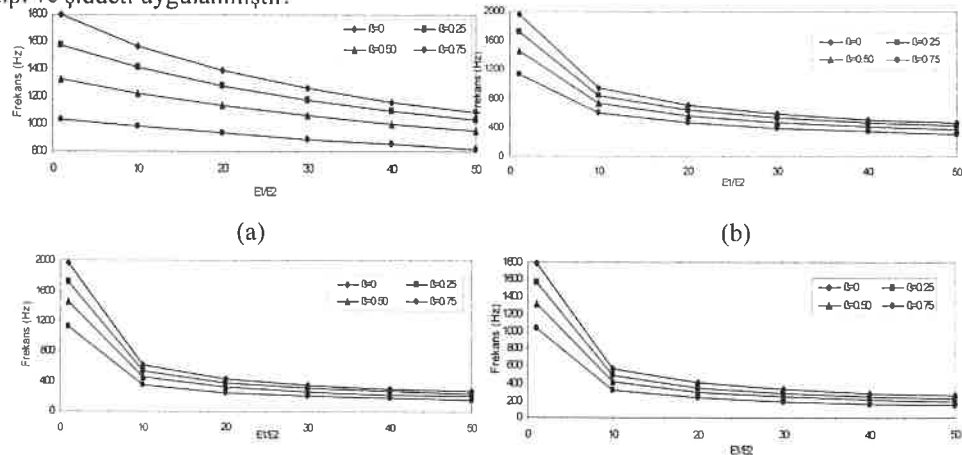
Tablo 4 ve Tablo 5 incelendiğinde, önerilen yöntemle elde edilen temel frekanslar ile ANSYS programından elde edilen sonuçların birbirleri ile uyum içinde oldukları görülmektedir. Kesit değişim parametresi ve  $E_1/E_2$  oranı arttığında temel frekans değeri azalmaktadır.

Serbest titreşim analizinden sonra zorlanmış titreşim analizi için çubuk elemana, z-doğrultusunda  $P_0=1N$  şiddetinde adım tipi dinamik tekil yük uygulanmıştır. İlgili grafikler incelendiğinde, bu çalışmada elde edilen tüm sonuçların sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile elde edilen sonuçlarla uyumlu oldukları görülmektedir. Kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişte, kesit değişim parametresi ve  $E_1/E_2$  oranı arttıkça hem deplasman genliği hem de titreşim periyodu artmaktadır (Şekil 4).



Şekil 4. Kesiti lineer değişen kompozit kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi; a)  $\beta=0$ , b)  $\beta=0.75$

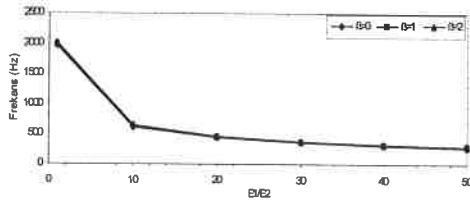
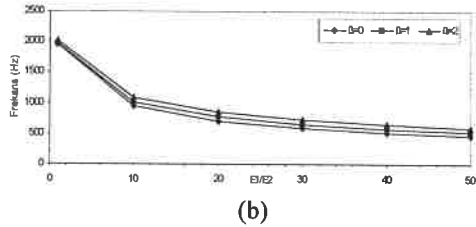
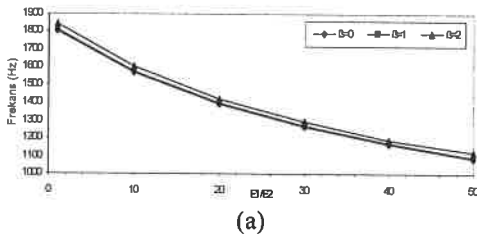
Aynı problem, kesiti üç tabakadan oluşan  $(\theta / \theta / \theta)$  farklı sınır şartları ve  $E_1/E_2$  oranları için tekrar ele alınmıştır. Tabaka açıları  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  alınmıştır. Kesit yüksekliği lineer değişen ve kesit genişliği eksponansiyel değişen kesit için elde edilen temel frekans değerleri grafik formda Şekil 5-6'da verilmektedir.  $E_1/E_2$  oranı arttıkça, temel frekans değerleri azaldığı görülmektedir. Zorlanmış titreşim analizi için daha önceki örneklerde uygulanan dinamik yük tipi ve şiddeti uygulanmıştır.



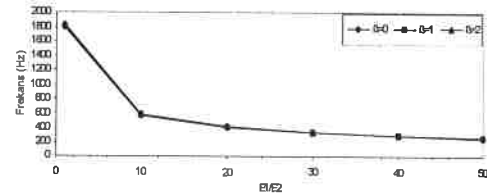
(c)

(d)

**Şekil 5.** İki ucu ankastre (AA) kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişin temel frekansları a)  $\theta = 0^\circ$ , b)  $\theta = 30^\circ$ , c)  $\theta = 60^\circ$ , d)  $\theta = 90^\circ$



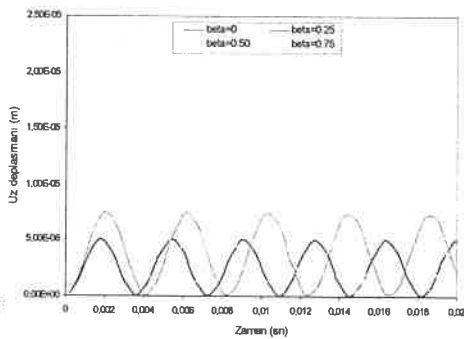
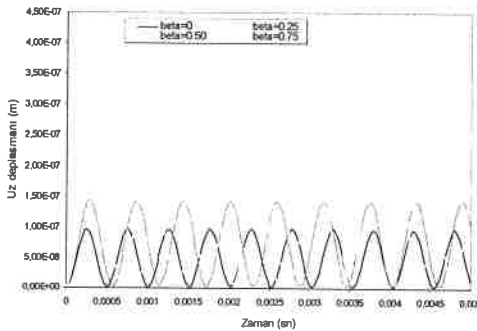
(c)



(d)

**Şekil 6.** İki ucu ankastre mesnetli (AA) kesit genişliği exponansiyel değişen kompozit kirişin temel frekansları a)  $\theta = 0^\circ$ , b)  $\theta = 30^\circ$ , c)  $\theta = 60^\circ$ , d)  $\theta = 90^\circ$

Kesit değişim parametresi, tabaka açısı ve  $E_1/E_2$  oranlarının dinamik davranışa etkisi incelenmiştir. Kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişe ait deplasmanın zamanla değişimleri Şekil 7'de verilmektedir.



(a)

(b)

Şekil 7. Kesiti lineer değişen kompozit kirişin (60/60/60) orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (AA) (a)  $E_1 / E_2 = 1$ ; (b)  $E_1 / E_2 = 50$

### 3.3. Tabaka Dizilişi ve Tabaka Açılarının Dinamik Davranışa Etkisi

Değişken kesite sahip simetrik tabakalı kompozit çubuk problemi ele alınmıştır. Kesiti üç ve dört tabakadan oluşan  $(\theta/\theta/\theta)$  ve  $(\theta/-\theta/-\theta/\theta)$  kiriş problemi incelenmiş ve her tabaka eşit kalınlıkta alınmıştır. Farklı tabaka dizilişi, tabaka açısı ve kesit değişim parametreleri için problemin serbest titreşim frekansları Tablo 6 ve 7’de verilmektedir. Kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişin her iki tabaka dizilişinde, kesit değişim parametresi ( $\beta$ ) ve tabaka açısı ( $\theta$ ) arttıkça temel frekans değeri azalmaktadır. Ayrıca, tabaka açısının  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  olması durumunda her iki tabaka dizilişi için temel frekans değerleri değişmemektedir. Kesiti genişliği exponansiyel değişen kompozit kirişin her iki tabaka dizilişinde, kesit değişim parametresi ( $\beta$ ) arttıkça temel frekanslar artmakta, tabaka açısı ( $\theta$ ) arttıkça ise temel frekanslar azalmaktadır.

Tablo 6. Farklı tabaka dizilişi ve tabaka açısına sahip kesit yüksekliği lineer değişen kompozit kirişe ait temel frekanslar (Hz)

| Mesnet durumu | Tabaka dizilişi                   | Kesit değişimi | Tabaka açısı ( $\theta$ ) |         |        |        |        |        |        |
|---------------|-----------------------------------|----------------|---------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
|               |                                   |                | 0                         | 15      | 30     | 45     | 60     | 75     | 90     |
| AA            | $(\theta/\theta/\theta)$          | $\beta=0$      | 1376.46                   | 1054.67 | 692.38 | 517.48 | 461.65 | 456.38 | 459.16 |
|               |                                   | $\beta=0.25$   | 1267.57                   | 971.04  | 626.66 | 457.96 | 405.11 | 400.35 | 402.86 |
|               |                                   | $\beta=0.50$   | 1125.86                   | 868.34  | 551.60 | 391.23 | 342.15 | 337.97 | 340.14 |
|               |                                   | $\beta=0.75$   | 928.81                    | 724.78  | 454.57 | 310.39 | 267.63 | 264.22 | 265.95 |
|               | $(\theta/-\theta/-\theta/\theta)$ | $\beta=0$      | 1376.46                   | 1173.44 | 804.45 | 539.45 | 462.52 | 456.41 | 459.16 |
|               |                                   | $\beta=0.25$   | 1267.57                   | 1073.96 | 721.07 | 476.00 | 405.81 | 400.37 | 402.86 |
|               |                                   | $\beta=0.50$   | 1125.86                   | 951.03  | 625.15 | 404.84 | 342.66 | 337.99 | 340.14 |
|               |                                   | $\beta=0.75$   | 928.81                    | 784.50  | 505.18 | 319.38 | 267.96 | 264.23 | 265.95 |

Tablo 7. Farklı tabaka dizilişi ve tabaka açısına sahip kesit genişliği exponansiyel değişen kompozit kirişe ait temel frekanslar (Hz)

| Mesnet durumu | Tabaka dizilişi                   | Kesit değişimi | Tabaka açısı ( $\theta$ ) |         |        |        |        |        |        |
|---------------|-----------------------------------|----------------|---------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
|               |                                   |                | 0                         | 15      | 30     | 45     | 60     | 75     | 90     |
| AA            | $(\theta/\theta/\theta)$          | $\beta=0$      | 1376.46                   | 1054.67 | 692.38 | 517.48 | 461.65 | 456.38 | 459.16 |
|               |                                   | $\beta=1$      | 1383.59                   | 1149.45 | 766.68 | 536.60 | 465.15 | 459.12 | 461.89 |
|               |                                   | $\beta=2$      | 1406.07                   | 1231.35 | 840.70 | 559.35 | 474.15 | 467.50 | 470.30 |
|               | $(\theta/-\theta/-\theta/\theta)$ | $\beta=0$      | 1376.46                   | 1054.67 | 692.38 | 517.48 | 461.65 | 456.38 | 459.16 |
|               |                                   | $\beta=1$      | 1383.59                   | 1220.82 | 842.41 | 551.33 | 465.69 | 459.13 | 461.89 |
|               |                                   | $\beta=2$      | 1406.07                   | 1272.70 | 888.35 | 568.49 | 474.48 | 467.51 | 470.30 |

#### 4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu projede, değişken kesitli kompozit doğru eksenli çubukların dinamik davranışları etkin bir yöntem olan Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak incelenmiştir. Değişken kesitli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Laplace uzayında incelenmiştir.

Farklı sınır şartlarına sahip, simetrik tabakadan yapılmış kesiti lineer ve exponansiyel olarak değişen kompozit kiriş problemi göz önüne alınmıştır. Değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların serbest ve zorlanmış titreşim frekanslarını etkileyen faktörler incelenmiştir. Değişken kesite sahip kompozit çubuklarda; kesit değişim parametresi,  $E_1/E_2$  oranı, tabaka açısı ve mesnet şartları dinamik davranışları etkilemektedir. Her iki kesit tipinde sınır şartlarına bağlı olarak temel frekanslar değişmektedir. Ayrıca, kesiti lineer değişen kompozit kirişte kesit değişim parametresi artarken hem deplasman genliği hem de titreşim periyodu artmaktadır. Kesiti exponansiyel değişen kompozit kirişte ise kesit değişim parametresi artarken deplasman genliği ve titreşim periyodu azalmaktadır. Değişken kesitli çubuklarda  $E_1/E_2$  oranının dinamik davranışa etkisi araştırılmıştır.  $E_1/E_2$  oranı artıkça temel frekans değeri azalmakta, deplasman genliği ve titreşim periyodu artmaktadır.

Farklı sınır şartlarında değişken kesitli kompozit kirişlerde tabaka dizilişi ve açısının dinamik davranışa etkisi incelenmiştir. Her iki tabaka dizilişinde olmak üzere tabaka açısı artıkça temel frekans değerleri azalmaktadır. Değişken kesitli kompozit kirişlerde zorlanmış titreşim durumu için tabaka açısı artıkça deplasman genliği ve titreşim periyodu artmaktadır.

#### 5. TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 107M640 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

#### KAYNAKLAR

- [1] Taber, L.A., and Viano, D.C., "Comparison of Analytical and Experimental Results for Free Vibration of Non-Uniform Composite Beams" *Journal of Sound and Vibration* 83(2), 219-28, 1982.
- [2] Dong, X.J., Meng, G., Li, H.G., and Ye, L., "Vibration Analysis of a Stepped Laminated Composite Timoshenko Beam" *Mechanics Research Communications* 32(5), 572-81, 2005.
- [3] Singh K.V., Li G., Pang S.S., Free vibration and physical parameter identification of non-uniform composite beams," *Composite Structures*, 74, 37-50, (2006).
- [4] Ganesan, R., and Zabiollah, A., "Vibration Analysis of Tapered Composite Beams using a Higher-Order Finite Element. Part I: Formulation" *Composite Structures* 77, 306-18, 2007.
- [5] Ganesan, R., and Zabiollah, A., "Vibration Analysis of Tapered Composite Beams using a Higher-Order Finite Element. Part II: Parametric Study" *Composite Structures* 77, 319-30, 2007.
- [6] Çalım, F.F., "Free and Forced Vibration of Non-Uniform Composite Beams" *Composite Structures* 88(3), 413-23, 2009.
- [7] Çalım, F.F., "Viskoelastik, Anizotropik Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi" ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana, 2003.
- [8] Çalım, F.F., "Değişken Kesitli Doğru Eksenli Kompozit Çubukların Serbest ve Zorlanmış Titreşimi" XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 265-274, Isparta, 2007.
- [9] Durbin, F., "Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method" *Computer Journal* 17, 371-6, 1974.
- [10] ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, U.S.A.