

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SERİ ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Barış KÖPRÜLÜOĞLU

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

MAYIS 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SERİ ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Barış KÖPRÜLÜOĞLU
509111073**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

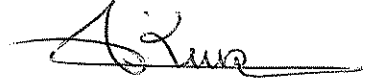
Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yar. Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ

MAYIS 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509111073 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Barış KÖPRÜLÜOĞLU**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ADI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yar. Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ**
İstanbul Teknik Üniversitesi



Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi



Doç. Dr. Nalan ANTAR
İstanbul Teknik Üniversitesi



Teslim Tarihi: 5 Mayıs 2014

Savunma Tarihi: 27 Mayıs 2014

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında Chebyshev polinomları ve bu polinomların adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılması incelenmiştir. Lisans eğitimimde aldığım Sayısal Yöntemler ve İleri Sayısal Yöntemler dersleri sayesinde matematiğin nümerik analiz kısmını çok sevdim ve bu alanda çalışmak istediğime karar verdim. Bu alanda çalışmamı sağlayan, bana bu tez konusunu vererek bu konuda bilgilenmemi ve tecrübe kazanmamı sağlayan Sayın Yar. Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ'a bana olan güvenini ve her türlü desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Mayıs 2014

Barış Köprülüoğlu

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	xi
SUMMARY.....	xv
1. CHEBYSHEV FONKSİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ.....	1
1.1 Taylor Polinomlarının Yetersizliği.....	1
1.2 Chebyshev Polinomunun Tanımı ve Özellikleri.....	3
1.2.1 Monik Chebyshev polinomları.....	6
1.2.2 Chebyshev polinomlarının $[0,1]$ aralığına uyarlanması.....	7
1.2.3 Bazı Chebyshev ifadelerinin serisel açılımları.....	8
2. CHEBYSHEV FONKSİYONLARININ İNTEGRAL VE TÜREVLERİ.....	15
2.1 Chebyshev Serilerinin İntegral ve Türevleri.....	15
3. POLİNOMLAR VE KUVVET SERİLERİ, EKONOMİKLEŞTİRME.....	47
4. REKÜRANS BAĞLANTILARINDA HATA ANALİZİ.....	59
4.1 n . Mertebe Fark Denklemleri ve Diferansiyel Denklemler.....	59
4.2 I. Mertebe Rekürans Bağlantısı.....	59
4.3 II. Mertebe Rekürans Bağlantısı.....	60
4.3.1 Başlangıç değer problemleri.....	64
4.3.2 Sınır değer problemleri.....	64
5. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SERİ ÇÖZÜMLER.....	71
6. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	103
KAYNAKLAR.....	105
EKLER.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	147

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : 1 x_k değerlerine karşılık gelen değerler.....	52
Çizelge 3.2 : Düğüm noktaları ve fonksiyonda karşılık gelen değerleri.	53
Çizelge 3.3 : Düğüm noktaları Chebyshev kökleri olarak seçimi	54
Çizelge 3.4: $[0,1.5]$ aralığındaki kökler ve fonksiyondaki değerleri.....	56
Çizelge 3.5 : Yaklaşım polinomlarının karşılaştırılması	57
Çizelge 5.1: Dört bağımsız çözüm taslağı	85
Çizelge 5.2: Dört bağımsız çözüm son hali	86
Çizelge 5.3: Dört bağımsız çözüm son hali	94
Çizelge 5.4: $\tilde{C}_r$ katsayıları	97
Çizelge 5.5: C_r katsayıları	98
Çizelge 5.6: $\tilde{C}_r$ ve $\tilde{C}'_r$ değerleri	101
Çizelge 5.7: C_r değerleri son hali	102

Chebyshev Polinomları ve Adı Diferansiyel Denklemlerin Serisi Çözümleri

ÖZET

Günümüzde başta fizik, mekanik ve kimya olmak üzere çok sayıda alandaki bilimsel problem diferansiyel denklem formunda ortaya çıkmaktadır. Bunların büyük kısmının kesin analitik çözümünü bulmak zordur. Dolayısıyla, kesin çözüme son derece yakın sayısal çözümler bulmak adına birçok teknik denenmiştir. Örnek olarak; Euler, Taylor, Runge-Kutta ve asimptotik açılımlar sayılabilir. Euler, Taylor ve Runge-Kutta metodlarında büyük x değerleri için başlangıç koşullarını sağlamak oldukça zordur. Asimptotik açılımlar bu hususta daha çok kolaylık sağlasa da, sınırlı derecede doğruluğa sahip olup önemli sayıda basamak kaybına yol açar. Bir diğer teknik ise bu olumsuzluklardan sıyrılabilen ve sayısal hesaplamalarda sıklıkla kullanılan Chebyshev yöntemidir. Chebyshev yöntemi, fonksiyona belirli bir aralıkta yaklaşım yaparken, hatayı mümkün olduğunca az yapacak noktalar seçerek bunlara karşılık gelen interpolasyonları arar. Chebyshev yaklaşımı olarak adlandırılan bu interpolasyonları bulmanın en verimli yolu Chebyshev polinomlarını ($T_n(x)$) kullanmaktır. Verilen aralık

$[-1,1]$ aralığına uyarlanarak, fonksiyon $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$ serisi şeklinde açılır.

Chebyshev polinomlarının en büyük avantajlarından biri sayısal diferansiyellenme ve sayısal integrasyonun çok hızlı gerçekleşmesidir. Bir diğeri ise fonksiyonu sonsuz diferansiyellenebilir yapan Chebyshev açılımları sayesinde düzgün (smooth) fonksiyonların iyi temsil edilebilmesidir. Açılım katsayıları a_n 'ler, n sonsuza giderken hızlıca sıfıra yakınsarlar. Bunun yanında, Chebyshev yönteminin sınır değer problemleri ve akışkanlar mekaniğinin sayısal çözümlerinde de başarılı olduğu kanıtlanmıştır. Chebyshev polinomları Rus matematikçi Chebyshev tarafından 1854 yılında tanıtılmış olup [1], diferansiyel denklemlerde kullanılmak üzere Lanczos [2] ve Clenshaw [3-7] tarafından tekrar ele alınmıştır. Konu hakkında geniş bilgi Fox ve Parker'ın kitabında

bulunabilir [8]. Son yıllarda ise; Sezer, Gülsu ve Tanay yüksek mertebe lineer adi diferansiyel denklemler [9] için, Elbarbary ve El Kady sınır değer problemleri [10] için, Khalifa, Elbarbary ve Elzarek ikinci ve dördüncü mertebe eliptik denklemler [11] için, Muite dördüncü mertebe yarı lineer başlangıç sınır değer problemleri [12] için Chebyshev polinomlarını kullanmışlardır. Bunun yanında Ramos ve Rubio, Runge-Kutta ile Chebyshev geri rekürsif diferansiyellenmesi arasındaki ilişkiyi [13]; Clenshaw ve Curtis, sayısal integrasyonda Chebyshev'in nasıl kullanılabileceğini [5]; Skogestad ve Kalisch, Korteweg-de Vries sınır değer probleminin çözümünde sonlu fark ve Chebyshev yönteminin karşılaştırmasını [14], Sezer ve Kaynak Chebyshev matrix yöntemini [15] ortaya koymuşlardır.

Bu çalışmada Birinci bölümde önce Taylor polinomlarının yetersizliği ve Chebyshev polinomlarına neden gerek duyulduğu anlatılıp, daha sonra Chebyshev polinomları tanımlanmış, kökleri ve ekstremum değerleri elde edilmiştir. Bununla birlikte yönetici katsayısı birim olan Monik Chebyshev polinomları takdim edilip, $[-1,1]$ aralığında tanımlı olan Chebyshev polinomunun diğer aralıklara nasıl uyarlandığı gösterilmiştir. Bu hususta özellikle $[0,1]$ aralığına uyarlanma önemli bir yer teşkil etmektedir. Bu bölümün sonunda bazı Chebyshev ifadelerinin seri açılımları daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere verilmiştir.

İkinci bölümde ise beşinci bölümde bahsedilecek olan diferansiyel denklem çözümlerinde sıklıkla kullanılan Chebyshev fonksiyonlarının integral ve türevleri verilerek, birinci bölümdeki tanım ve teoremler yardımıyla ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde herhangi bir fonksiyon yerine interpolasyon kullanmakla yapılan hata analizi ile, Lagrange interpolasyonları yerine, bu yöntemde düğüm noktalarının Chebyshev polinomlarının kökleri olarak seçilmesine dayanan Lagrange-Chebyshev interpolasyonunu kullanmanın daha az hataya neden olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu sonucun bir başka faydası olarak; verilen hata toleransı içinde kalacak şekilde interpolasyon polinomlarının mertebesi indirgenerek, gerçek problemlerin çözüm aşamalarında hesap ekonomikleştirmesi yapılabilmesi sayılabilir.

Dördüncü bölümde önce n . mertebe fark denklemi ve diferansiyel denklemler için, sonra birinci ve ikinci mertebe rekürans bağıntıları için hata analizi yapılmıştır. Burada ikinci mertebe rekürans bağıntılarında başlangıç ve sınır değer problemleri ayrı ayrı ele alınıp detaylandırılmış, geriye rekürans bağıntısı kullanmakla ortaya çıkan hatanın belirli bir değerden küçük kalacağı gösterilmiştir.

Son olarak, beşinci bölümde ise Chebyshev polinomlarının adi diferansiyel denklemlerin seri çözümleri için nasıl kullanıldığı ispatları ile gösterilmiştir. Bunun için, doğrudan hesap, geriye rekürsif ilişki ve geriye rekürsif ilişkinin biraz daha geliştirilmiş hali olan Clenshaw yöntemleri ile adi diferansiyel denklemlerin çözümleri verilmiş, karmaşık başlangıç değer ve sınır değer problemleri çözülmüştür.

Chebyshev Polynomials and Serial Solutions of Differential Equations

SUMMARY

In recent years, a huge number of scientific problems especially in mechanic, chemistry and physics have occurred in a differential equation form. The analytical exact solutions of most of these problems can't easily be found. Therefore, a lot of methods such as Euler, Taylor, Runge-Kutta and asymptotic expansions have been tried to get numerical solutions which are close to exact solutions. While using the methods of Euler, Taylor and Runge-Kutta, it is really hard to satisfy initial conditions for large x values. Although asymptotic expansions are more successful at that point, they have limited accuracy and cause in a significant amount of digit loss. Another method which has no negativities mentioned before and used frequently in numerical computations is called Chebyshev method. According to the Chebyshev method, the values of x where the functions are interpolated should be carefully chosen so as to make the error as small as possible. The most efficient way to find these x points (Chebyshev nodes) and corresponding interpolations (Chebyshev approximations) is the usage of Chebyshev polynomials ($T_n(x)$). Any given interval can be adapted to $[-1,1]$ and then, the function is expanded as

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \text{ series.}$$

One of the most important advantages of using Chebyshev polynomials is the fast performance of the numerical integration and differentiation. Another advantage is the good representation of smooth functions which are made infinitely differentiable by Chebyshev expansions. The coefficients of expansions converge fastly to the zero as the number of series terms go to infinity. Moreover, it has been proven that Chebyshev method is successful on numerical solutions of boundary value problems and fluid mechanics. Chebyshev polynomials has been introduced in 1854 by Chebyshev [1] and reconsidered to solve differential equations by Lanczos and Clenshaw [2]. There is huge information about this topic on the book of Fox and Parker [8] . Recently, there has been a lot of studies in which Chebyshev

polynomials are used: Sezer et al. used these polynomials for higher-order linear ordinary differential equations [9]. Elbarbary and El Kady solved boundary value problems by using Chebyshev method [10]. Khalifa et al. obtained the solution of second and fourth order elliptic equations by Chebyshev method [11]. Furthermore, Muite adapted this method to the fourth order semilinear initial boundary value problems. Besides, Ramos and Rubio pointed out the relation between Runge-Kutta and Chebyshev backward recursive differentiation [13], Clenshaw and Curtis explained how to use Chebyshev polynomials in numerical integration [5] and Sezer and Kaynak constructed the Chebyshev Matrix method which has been developed by Chebyshev polynomials [15].

In this study, firstly the insufficiency of Taylor series and why Chebyshev polynomials are needed has been declared in the first section. Then, the roots and the extremum points of Chebyshev polynomials has been calculated. Moreover, Monic Chebyshev polynomials whose the leading coefficient is unit has been represented. The adaptation of the Chebyshev polynomials which are defined in $[-1,1]$ to the any given interval has been shown. $[0,1]$ interval is really remarkable at this point. Finally, to be used in next sections, series expansions of some Chebyshev expressions has been given at the end of the section.

In the second section, the integrals and the derivatives of Chebyshev functions which are frequently used in solution of differential equations has been introduced by using the definitions and theorems given in the first section.

The error analyses of using interpolation and using Lagrange-Chebyshev interpolation whose nodes are choosen as the roots of Chebyshev polynomials instead of Lagrange interpolation have been demonstrated in the third section. At this point, it should be emphasized that Lagrange-Chebyshev method has smaller error. Moreover, another advantage of this result is the economization in calculations while computing real problems by reducing the order of interpolation polynomials in given error tolerance.

In fourth section, the error analyses for the n . order difference equation and differential equation, then the error analyses for first and second order recurrence relations have been made. The initial value and boundary value problems has been

separately investigated in detail in the second order recurrence relation and it has been proven that the error occurring in backward recurrence relation is always smaller than a certain value.

Finally, it has been illustrated how Chebyshev polynomials are used for serial solutions of ordinary differential equations with proofs in the last section. For the solutions of ordinary differential equations by using Chebyshev series expansion, the methods of direct calculation, backward recurrence relation and Clenshaw method which is the improved version of backward recurrence relation has been given. Besides, to illustrate them, some reasonably difficult initial value and mixed boundary value problems have been solved.

1. CHEBYSHEV FONKSİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

1.1 Taylor Polinomlarının Yetersizliği

Sayısal analizdeki en genel ve basit problemlerden biri $f(x)$ fonksiyonunun bir ya da daha fazla sayıda verilmiş x argümanı için hesaplanmasıdır. Fonksiyon açık form olarak; bir seri, bir belirli integral ya da başka bir hesaplanabilir form şeklinde veya bir diferansiyel ya da integral denklemin çözümü gibi kapalı bir formda tanımlanabilir. Alternatif olarak, verilen fonksiyondan seçilen bir sayısal yöntemle, verilen bir aralıkta x_r değerleri için $f(x_r)$ değerlerinden oluşan bir tabloda elde edilebilir. Dahası fonksiyonun açık veya kapalı bir formunun olmadığı durumlarda, deneylerden elde edilmiş böyle bir tablo da verilmiş olabilir. Matematiksel tablolar, hesaplamaların temel amaçlarından biridir ve bu tabloları üretmek özellikle fonksiyonun bir diferansiyel veya integral denklemin çözümü olacak şekilde kapalı formlarda verildiğinde zorlu bir aşamadır. $f(x)$ fonksiyonunu bir $p(x)$ yaklaşımıyla vermektense, geniş bir x aralığında kesin duyarlılıkla aramak daha gerçekçidir. Böyle bir polinom yaklaşımından “Hesaplamanın kolay olması” ve “hatasının problemin bilimsel içeriğine bağlı olarak bazı bilinen kriterlere” olarak iki özelliğe sahip olması beklenir. Bir polinom hesaplamasının muhtemelen en kolay formu olduğundan ilk olarak $f(x)$ ’e Taylor açılımı ile yaklaşıldığında,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) + \dots \left. \vphantom{\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)} \right\} \quad (0.1)$$

$x_0 \leq \xi \leq x$

Burada n . dereceden $p_n(x)$ polinomu, (1.1) ’in sağ tarafının son terimini hata terimi kabul edip ihmal edilerek tanımlanır ve bu hata terimi için

$$|e_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \quad (0.2)$$

kullanılır. Eğer x serinin yakınsaklık yarıçapının içindeyse, polinomun derecesi istenen kriterlere uygun kesme hatasını sağlayacak büyüklükte seçilir. Fakat Taylor serisinin “yakınsaklık aralığının küçük olması” ve “gerekli kriterleri sağlayacak terim sayısının x parametresine bağlı olması” gibi bazı kesin sınırlamaları vardır. Dolayısıyla yakınsaklık limitinin yakınlarında gerekli $p_n(x)$ derecesi çok büyük olabilir. Örneğin,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad (0.3)$$

serisi $x > 1$ için yakınsamaz ve $x = 1$ için 0.0001’ i aşmayan bir hatayı garanti etmek için 10^4 terime ihtiyaç olur. Bu duyarlılıkta $x = 0.1$ ‘ de sadece 3 terime gerek vardır. Taylor serisinin yakınsaklık aralığı sonsuz olsa bile yine de çok sayıda terime ihtiyaç duyulabilir. Bu, işaretlerde sıklıkla osilasyonlara yol açacaktır ve büyük negatif ya da pozitif terimleri elemek seri toplamında düşük kesinlik verecektir, örneğin $\cos 10x$ gibi periyodik fonksiyonlar ya da e^{-10x} gibi azalan üstel fonksiyonlar. Bu durumlarda Fourier serileri veya e^{-x} açılımları tercih edilebilir;

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{r=1}^n (a_r \cos rx + b_r \sin rx) + E_n(x) \\ f(x) &= a_0 + \sum_{r=1}^n a_r e^{-rx} + E_n(x) \end{aligned} \right\}. \quad (0.4)$$

Bu açılımlar Taylor serisinden çok daha küçük katsayılara sahiptir. Kabul edilen ve hesaplanması nispeten daha kolay olan yaklaşım kesme hatasını ihmal eden açılımın sonlu kısmıdır.

Son olarak, $f(x)$ fonksiyonunun hızlı değişimler gösterdiği bölgelerde x, e^{ix}, e^{-x} kuvvetindeki açılımların muhtemelen başarısız olacağı ya da çok büyük sayıda terime ihtiyaç duyacağı belirtilmelidir. Böyle durumlarda $f(x) = p(x)/q(x)$ formundaki açılımlar tercih edilebilir. Burada $p(x)$ ve $q(x)$ hesaplanması kolay

fonksiyonlar, özellikle $f(x)$ fonksiyonunun rasyonel olduğu durumlarda polinom bile olabilirler ki, bu durum Pade açılımlarına karşılık gelir.

Bu ve bundan sonraki bölümlerde Chebyshev polinomlarının teorik ve pratik özellikleri verilerek yaklaşım fonksiyonu üretmedeki önemi ortaya konacaktır.

1.2 Chebysev Polinomunun Tanımı ve Özellikleri

Chebyshev polinomları, $\forall n \geq 0, x \in [-1,1]$ olmak üzere,

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x) \quad (0.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ dir. $n \geq 1$ için

$$x = \cos \theta \quad (0.6)$$

alınarak,

$$T_n(\cos \theta) = \cos n(\arccos(\cos \theta)) = \cos n\theta \quad (0.7)$$

ifadesinde n yerine sırasıyla $n+1$ ve $n-1$ yazılırsa,

$$T_{n+1}(\cos \theta) = \cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta \quad (0.8)$$

$$T_{n-1}(\cos \theta) = \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \quad (0.9)$$

elde edilir. (1.8) ve (1.9) toplamında, $\theta = \arccos x$ dönüşümü kullanılırsa

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad n \geq 1 \quad (0.10)$$

olduğu görülür. $T_0(x) = 1$ ve $T_1(x) = x$ olduğuna dikkat edilirse, (1.10) ifadesinden

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{ve} \quad \text{benzer} \quad \text{şekilde} \quad T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - x \quad \text{ve}$$

$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ elde edilir ki, bu işlemler sonucunda her zaman bir üst derece polinomlar elde edilebileceği açıktır, sonuç olarak benzer işlemlerle

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots \quad (0.11)$$

yapısı elde edilir.

Teorem 1.1: $T_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ Chebyshev polinomları $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre $[-1, 1]$ aralığında ortogonaldirler.

İspat: 1.Durum: $n \neq m$ için,

$$\int_{-1}^1 w(x) T_n(x) T_m(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos x) \cos(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0.12)$$

ifadesinde

$$\arccos x = \theta \quad (0.13)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_{\pi}^0 -\cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \quad (0.14)$$

elde edilir ki, bu ifadenin

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+m)\theta}{(n+m)} + \frac{\sin(n-m)\theta}{(n-m)} \right)_0^{\pi} = 0 \quad (0.15)$$

olduğu kolayca görülür.

2.Durum: $n = m \neq 0$ için,

$$\int_{-1}^1 w(x) T_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos^2 n(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{\pi}^0 \cos^2 n\theta = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2n\theta}{2} d\theta \quad (0.16)$$

$$\int_{-1}^1 w(x) T_n^2(x) dx = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2n\theta}{2n} \right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \quad (0.17)$$

3.Durum: $n = m = 0$ için,

$$\int_{-1}^1 w(x) T_0^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{\pi}^0 d\theta = \pi. \quad (0.18)$$

Teorem 1.2: $n \geq 1$ için $T_n(x)$ polinomunun $[-1,1]$ aralığında

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (0.19)$$

noktalarında n tane sıfırı ve ayrıca

$$\bar{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (0.20)$$

noktalarında $(n+1)$ tane ekstrem değeri vardır ve bu ekstrem değerler

$$(-1)^k \quad (0.21)$$

dır. Kökleri için ise,

$$T_n(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \cos(n \arccos \bar{x}) = 0 \Rightarrow n \arccos \bar{x} = r \frac{\pi}{2} \quad (0.22)$$

Burada r tek olmak zorundadır dolayısıyla $r = (2k-1)$ olarak seçilirse,

$$\arccos \bar{x} = (2k-1) \frac{\pi}{2n} \quad (0.23)$$

$$\bar{x}_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{n} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (0.24)$$

ifadesi elde edilir. Chebyshev polinomlarının ekstremumları

$$T'_n(x) = -n \sin(n(\arccos x)) \frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0.25)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} n \sin(n(\arccos \bar{x}')) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \Rightarrow \sin(n(\arccos \bar{x}')) = 0 \\ \Rightarrow n \arccos \bar{x}' &= k\pi \Rightarrow \arccos \bar{x}' = \frac{k\pi}{n} \end{aligned} \quad (0.26)$$

sonuç olarak

$$\overline{x_k'} = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (0.27)$$

noktalarındadır ve bu ekstrem noktalarda, polinomların ekstrem değerleri

$$T_n(\overline{x_k'}) = \cos n \left(\arccos \left(\cos \frac{k\pi}{n} \right) \right) = \cos nk \frac{\pi}{n} = \cos k\pi \quad (0.28)$$

$$\Rightarrow T_n(\overline{x_k'}) = (-1)^k \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (0.29)$$

ile verilir.

1.2.1 Monik Chebyshev polinomları

$T_n(x)$ polinomunda en büyük derecenin (x^n) katsayısının 2^{n-1} olduğu (1.11)' da gösterilmiştir. Tüm polinomun bu katsayıya bölünmesiyle elde edilen, yani yönetici katsayısı 1 olan polinomuna Monik Chebyshev Polinomu denir. Dolayısıyla, Monik Chebyshev Polinomları;

$$\widetilde{T}_0(x) = 1 \quad n \leq 1 \quad \widetilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \quad (0.30)$$

ile tanımlanır. Ayrıca, (1.10) denkleminde $n=1$ için, $T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$ bulunur. (1.30) kullanılırsa,

$$2^{2-1}\widetilde{T}_2(x) = 2x\widetilde{T}_1(x) - \widetilde{T}_0(x) \Rightarrow \widetilde{T}_2(x) = x\widetilde{T}_1(x) - \frac{\widetilde{T}_0(x)}{2} \quad (0.31)$$

elde edilir. $n > 1$ için, yine (1.10) denkleminde (1.30) yardımıyla,

$$\widetilde{T}_{n+1}(x) = x\widetilde{T}_n(x) - \frac{\widetilde{T}_{n-1}(x)}{4} \quad (0.32)$$

bulunur. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_0(x) &= 1 & \widetilde{T}_1(x) &= x \\
\widetilde{T}_2(x) &= x\widetilde{T}_1(x) - \frac{\widetilde{T}_0(x)}{2} \\
\widetilde{T}_{n+1}(x) &= x\widetilde{T}_n(x) - \frac{\widetilde{T}_{n-1}(x)}{4} \quad n > 1
\end{aligned} \tag{0.33}$$

eşitlikleri ortaya çıkar.

Not 1.1: (1.30) ' dan görüldüğü üzere $T_n(x)$ ' ler ile $\widetilde{T}_n(x)$ ' ler arasındaki tek fark $\frac{1}{2^{n-1}}$ katsayısıdır, dolayısıyla $\widetilde{T}_n(x)$ ' in kökleri ve ekstremum değerleri aynı yerlerde yani sırasıyla $\overline{x}_k$ ve $\overline{x}_k$ ' noktalarında olacak, ancak bu ekstremum noktalarında aldığı değerler bu kez (1.29) ve (1.30) ' dan

$$\widetilde{T}_n(\overline{x}_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \tag{0.34}$$

olacaktır.

1.2.2 Chebyshev polinomlarının $[0,1]$ aralığına uyarlanması

(3.22) uygulanarak,

$$\overline{x} = \frac{1}{2}[(1-0)x + 0 + 1] = \frac{1}{2}(x+1) \in [0,1] \tag{0.35}$$

elde edilir. Böylece (1.35)' ten,

$$x = 2\overline{x} - 1 \tag{0.36}$$

bulunur ve $T_n^*(x) \in [0,1]$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$T_n^*(x) = T_n(2x-1) \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{0.37}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left. \begin{aligned} T_0^*(x) &= T_0(2x-1) = 1 \\ T_1^*(x) &= T_1(2x-1) = 2x-1 \\ T_2^*(x) &= T_2(2x-1) = 2 \cdot (2x-1)^2 - 1 = 8x^2 - 8x + 1 \\ T_3^*(x) &= T_3(2x-1) = 4 \cdot (2x-1)^3 - 3(2x-1) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1 \end{aligned} \right\} \quad (0.38)$$

Ayrıca,

$$\left. \begin{aligned} 1 &= T_0(x) \\ x &= T_1(x) \\ x^2 &= \frac{2x^2-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{T_2(x)}{2} + \frac{T_0(x)}{2} = \frac{1}{2}(T_0(x) + T_2(x)) \\ x^3 &= \frac{4x^3-3x}{4} + \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}(T_3(x) + 3T_1(x)) \end{aligned} \right\} \quad (0.39)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} 1 &= T_0^*(x) \\ x &= \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(T_1^*(x) + T_0^*(x)) \\ x^2 &= \frac{8x^2-8x+1}{8} + x - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}T_2^*(x) + \frac{4 \cdot (2x-1)}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{8}(T_2^*(x) + 4T_1^*(x) + 3T_0^*(x)) \end{aligned} \right\} \quad (0.40)$$

çıkarımları yapılabilir. Bu aralıkta tanımlanan Chebyshev polinomları için rekürsif ilişkiler, (1.10) ve (1.37) yardımıyla

$$T_{n+1}^*(x) = 2(2x-1)T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x) \quad (0.41)$$

şeklinde bulunur.

1.2.3 Bazı Chebyshev ifadelerinin serisel açılımları

(1.11), (1.38), (1.39) ve (1.40) gibi ifadeleri genellemek için $\sum_{k=0}^{\infty} p^k T_k(x)$ serisi

oluşturmak gerekir, en basit polinom üretici fonksiyon $\frac{1}{1-x}$, dir ki, McLaurin açılımı

ile,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \\
f'(x) &= (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2} \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3} \Rightarrow f''(0) = 2 \\
f'''(x) &= (-3)2(1-x)^{-4}(-1) = 3 \cdot 2(1-x)^{-4} \Rightarrow f'''(0) = 3! \\
&\vdots \\
f(x) &= 1 + \frac{1}{1}(x-0) + \frac{2}{2}(x-0)^2 + \frac{3!}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{n!}{n!}(x-0)^n + \dots
\end{aligned} \tag{0.42}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{0.43}$$

elde edilir. Benzer şekilde (1.43) ifadesinde $x = pe^{i\theta}$ alınıp,

$$\frac{1}{1-pe^{i\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty} (pe^{i\theta})^k = \sum_{k=0}^{\infty} p^k e^{ik\theta} \tag{0.44}$$

ifadesinde $\theta = \arccos x$ ataması yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-p(\cos \theta + i \sin \theta)} &= \frac{1}{1-p(x + i\sqrt{1-x^2})} \\
&= \frac{1}{(1-px - p\sqrt{1-x^2}i)} = \frac{1-px + p\sqrt{1-x^2}i}{(1-px)^2 + p^2(1-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} p^k e^{ik\theta}
\end{aligned} \tag{0.45}$$

elde edilir. Buradan

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} p^k e^{ik\theta} &= 1 + pe^{i\theta} + p^2 e^{i2\theta} + p^3 e^{i3\theta} + \dots + p^n e^{in\theta} + \dots \\
&= 1 + p(\cos \theta + i \sin \theta) + p^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \dots + p^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \\
&= 1 + p(T_1(x) + i \sin \theta) + p^2(T_2(x) + i \sin 2\theta) + \dots + p^n(T_n(x) + i \sin n\theta)
\end{aligned} \right\} \tag{0.46}$$

açılımının reel kısmı (1.45)' in reel kısmı ile eşitlenirse,

$$\frac{1-px}{1-2px+p^2} = 1 + pT_1(x) + p^2T_2(x) + \dots + p^nT_n(x) + \dots \tag{0.47}$$

sonucuna ulaşılır.

$$\left. \begin{aligned} 1 + pT_1(x) + p^2T_2(x) + \dots + p^nT_n(x) + \dots &= (1 - px) \frac{1}{1 + p^2 - 2px} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}p \cdot 2x\right) \frac{1}{1 - (p \cdot (2x - p))} \end{aligned} \right\} \quad (0.48)$$

ifadesinde (1.43) seri açılımı kullanılarak,

$$\begin{aligned} &(1 - \frac{1}{2}p \cdot 2x) \cdot (1 + p \cdot (2x - p) + p^2(2x - p)^2) + \dots \\ &= (1 - \frac{1}{2}p \cdot 2x) \left\{ p^0 \sum_{r=0}^0 \binom{0}{r} (2x)^{0-r} (-p)^r + p^1 \sum_{r=0}^1 \binom{1}{r} (2x)^{1-r} (-p)^r + \right. \\ &\quad \left. p^2 \sum_{r=0}^2 \binom{2}{r} (2x)^{2-r} (-p)^r + \dots + p^m \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (2x)^{m-r} (-p)^r + \dots \right\} \end{aligned} \quad (0.49)$$

p^k ' ların katsayılarını sabit hariç ($k \geq 1$) eşitlemek için ifade p^k ' lara göre yeniden yazılır,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left\{ p^k \binom{k}{0} (2x)^{k-0} \cdot (-p)^0 + p^{k-1} \binom{k-1}{1} (2x)^{k-2} \cdot (-p)^1 \right. \\ &\quad + p^{k-2} \binom{k-2}{2} (2x)^{k-4} \cdot (-p)^2 \\ &\quad + p^{k-3} \binom{k-3}{3} (2x)^{k-6} \cdot (-p)^3 + \dots \\ &\quad \left. + p^1 \binom{1}{k-1} (2x)^{k-(2k-2)} \cdot (-p)^{k-1} + \dots \right\} \\ &- \frac{1}{2} \cdot p \cdot (2x) \cdot \left\{ p^{k-1} \binom{k-1}{0} (2x)^{k-1} \cdot (-p)^0 + p^{k-2} \binom{k-2}{1} (2x)^{k-3} \cdot (-p)^1 \right. \\ &\quad + p^{k-3} \binom{k-3}{2} (2x)^{k-5} \cdot (-p)^2 + \dots + p^2 \binom{2}{k-3} (2x)^{k-(2k-5)} \cdot (-p)^{k-3} \\ &\quad \left. + p^1 \binom{1}{k-2} (2x)^{k-(2k-3)} \cdot (-p)^{k-2} \right\} \end{aligned} \quad (0.50)$$

ve son olarak p^k ' ların katsayıları eşitlenirse;

$$\begin{aligned}
T_k(x) = & \frac{1}{2} \left\{ 2 \cdot (2x)^k - (2x)^{k-1+1} - \left[2 \binom{k-1}{1} - \binom{k-2}{1} \right] (2x)^{k-2} \right. \\
& + \left[2 \binom{k-2}{2} - \binom{k-3}{2} \right] (2x)^{k-4} - \left[2 \binom{k-3}{3} - \binom{k-4}{3} \right] (2x)^{k-6} \\
& \left. + \dots + (-1)^{k-1} \left[2 \binom{1}{k-1} - \binom{0}{k-1} \right] (2x)^{k-(2k-2)} \right\}
\end{aligned} \tag{0.51}$$

elde edilir. x^k 'nin $T_j(x)$ 'ler cinsinden ifadesi daha basitçe,

$$\begin{aligned}
x^k &= (\cos \theta)^k = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^k = \frac{1}{2^k} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^k \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} e^{i(k-j)\theta} e^{-ij\theta} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k e^{i(k-2j)\theta} \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\cos(k-2j)\theta + i \sin(k-2j)\theta)
\end{aligned} \tag{0.52}$$

şeklinde yazılır.

Burada $\sum \cos((k-2j)\theta)$ toplamında, $j=0$ alınırsa $\cos k\theta$ ve $j=k$ alınırsa

$\cos(-k\theta) = \cos k\theta$ toplamları $2 \cos k\theta$, diğer yandan $\sum \sin((k-2j)\theta)$ ifadesinde,

$j=0$ için $\sin k\theta$ ve $j=k$ için $\sin(-k\theta) = -\sin k\theta$ toplamları ise sıfır olur.

$$\begin{aligned}
k=1; j=0,1 &\Rightarrow 2 \cos \theta \\
k=2; j=0,1,2 &\Rightarrow \cos 2\theta, \cos 0\theta, \cos(-2\theta) \\
k=3; j=0,1,2,3 &\Rightarrow \cos 3\theta, \cos \theta, \cos(-\theta), \cos(-3\theta) \\
k=4; j=0,1,2,3,4 &\Rightarrow \cos 4\theta, \cos 2\theta, \cos 0\theta, \cos(-2\theta), \cos(-4\theta)
\end{aligned} \tag{0.53}$$

ifadelerinde $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$ eşitliği değerlendirildiğinde tüm $\cos$ 'ların ikişer tane, sadece k çift olduğunda $\cos 0\theta$ ifadesinin bir tane olduğu gözlemlenir. Sonuç olarak,

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{k}{j} \cos(k-2j)\theta \tag{0.54}$$

yazılabilir. **(1.54)** ifadesinde k çift iken $j = \frac{k}{2}$ 'nin katsayısı T_0 ' a karşılık geldiğinden ve **(1.53)** ifadelerinde T_0 her zaman bir defa görüldüğünden **(1.54)**' te T_0 katsayısının yarısı alınması gerektiğine ve k tek iken T_0 ' ın ortaya çıkmadığına dikkat edilmelidir. **(1.54)** ifadesinden sonuç olarak

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{j} T_{k-2j}(x) \quad (0.55)$$

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ T_k(x) + \binom{k}{1} T_{k-2}(x) + \binom{k}{2} T_{k-4}(x) + \dots \right\} \quad (0.56)$$

bulunur. $0 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı $T_k^*(x)$ ' ler cinsinden sonuç **(1.51)** ve **(1.56)** denklemlerinde x yerine $(2x-1)$ alınarak elde edilebilir, ancak

$$\left. \begin{aligned} T_k(T_j(x)) &= \cos k \left(\arccos \left(\cos j \left(\arccos x \right) \right) \right) \\ &= \cos kj \left(\arccos x \right) = T_{kj}(x) = T_{jk}(x) = T_j(T_k(x)) \end{aligned} \right\} \quad (0.57)$$

denkleminde $k = 2$ seçilir

$$T_2(T_j(x)) = T_j(T_2(x)) = T_j(2x^2 - 1) \quad (0.58)$$

$$2(T_j(x))^2 - 1 = T_j(2x^2 - 1) = T_{2j}(x) \quad (0.59)$$

ve burada x^2 yerine x alınırsa

$$T_j(2x-1) = T_j^*(x) = 2(T_j(\sqrt{x}))^2 - 1 = T_{2j}(\sqrt{x}) \quad (0.60)$$

bulunur. Bu sonuc yardımıyla **(1.51)**,

$$\begin{aligned}
T_k^*(x) &= T_{2k}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \left\{ \left(2\sqrt{x} \right)^{2k} - \left[2 \cdot \binom{2k-1}{1} - \binom{2k-2}{1} \right] \left(2\sqrt{x} \right)^{2k-2} \right. \\
&\quad \left. + \left[2 \cdot \binom{2k-2}{1} - \binom{2k-3}{1} \right] \left(2\sqrt{x} \right)^{2k-4} + \dots - \underbrace{\left[2 \cdot \binom{1}{2k-1} - \binom{0}{2k-1} \right]}_{=2} \left(2\sqrt{x} \right)^{2k-2k} \right\} \quad (0.61) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 2^{2k} x^k - \left[2 \cdot \binom{2k-1}{1} - \binom{2k-2}{1} \right] 2^{2k-2} x^{k-1} \right. \\
&\quad \left. + \left[2 \cdot \binom{2k-2}{1} - \binom{2k-3}{1} \right] 2^{2k-4} x^{k-2} + \dots - 2 \right\}
\end{aligned}$$

bulunur ve (1.56) denkleminde k yerine $2k$ ve x yerine $\sqrt{x}$ alınır,

$$\left(\sqrt{x} \right)^{2k} = \frac{1}{2^{2k-1}} \left\{ T_{2k}(\sqrt{x}) + \binom{2k}{1} T_{2k-2}(\sqrt{x}) + \binom{2k}{2} T_{2k-4}(\sqrt{x}) + \dots \right\} \quad (0.62)$$

ve (1.60) kullanılırsa

$$x^k = \frac{1}{2^{2k-1}} \left\{ T_k^*(x) + \binom{2k}{1} T_{k-1}^*(x) + \binom{2k}{2} T_{k-2}^*(x) + \dots \right\} \quad (0.63)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca,

$$T_k(x) T_j(x) = \cos k\theta \cos j\theta = \frac{1}{2} \{ \cos(k+j)\theta + \cos(k-j)\theta \} = \frac{1}{2} \{ T_{k+j}(x) + T_{k-j}(x) \} \quad (0.64)$$

(1.64) ve (1.60)' den $T_j(x) = T_{-j}(x)$ olduğuna dikkat edilerek

$$\begin{aligned}
T_k^*(x) T_j^*(x) &= T_{2k}(\sqrt{x}) T_{2j}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \{ T_{2k+2j}(\sqrt{x}) + T_{2k-2j}(\sqrt{x}) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ T_{k+j}^*(x) + T_{k-j}^*(x) \} \quad (0.65)
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu formül $T_k(x)$ in (1.64) ile verilen ifadesiyle aynı yapıdadır.

$x^k T_j(x)$ açılımı için (1.56) ve (1.63) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
x^k T_j(x) &= \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ T_k(x) + \binom{k}{1} T_{k-2}(x) + \binom{k}{2} T_{k-4}(x) + \dots \right\} T_j(x) \\
&= \frac{1}{2^{k-1}} \left\{ T_k(x) T_j(x) + \binom{k}{1} T_{k-2}(x) T_j(x) + \binom{k}{2} T_{k-4}(x) T_j(x) + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{2^k} \left\{ T_{j+k}(x) + T_{j-k}(x) + \binom{k}{1} (T_{j+k-2}(x) + T_{j-k+2}(x)) \right. \\
&\quad \left. + \binom{k}{2} (T_{j+k-4}(x) + T_{j-k+4}(x)) + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{0.66}$$

$$\begin{aligned}
x^k T_j(x) &= \frac{1}{2^k} \left\{ \binom{k}{0} T_{j-k+2 \cdot 0}(x) + \binom{k}{0} T_{j+k+2 \cdot 0}(x) + \binom{k}{1} T_{j-k+2 \cdot 1}(x) + \binom{k}{1} T_{j+k+2 \cdot 1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \binom{k}{2} T_{j-k+2 \cdot 2}(x) + \binom{k}{2} T_{j+k+2 \cdot 2}(x) + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{0.67}$$

elde edilir, burada $\binom{k}{i} = \binom{k}{k-i}$ özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
x^k T_j(x) &= \frac{1}{2^k} \left\{ \binom{k}{0} T_{j-k+2 \cdot 0}(x) + \binom{k}{k} T_{j-k+2 \cdot k}(x) + \binom{k}{1} T_{j-k+2 \cdot 1}(x) \right. \\
&\quad \left. + \binom{k}{k-1} T_{j-k+2 \cdot (k-1)}(x) + \binom{k}{2} T_{j-k+2 \cdot 2}(x) + \binom{k}{k-2} T_{j-k+2 \cdot (k-2)}(x) + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} T_{j-k+2i}(x)
\end{aligned} \tag{0.68}$$

şeklinde yazılabilir. **(1.68)** denklemi ile birlikte **(1.60)** kullanıldığında ise

$$\begin{aligned}
x^k T_j^*(x) &= x^k T_{2j}(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^{2k} T_{2j}(\sqrt{x}) \\
&= \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} T_{2j-2k+2i}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} T_{j-k+i}^*(\sqrt{x})
\end{aligned} \tag{0.69}$$

sonucuna ulaşılır. Burada yine T_0^* ın katsayısının yarısı alınmalıdır. **(1.69)** denkleminde katsayılar daha küçük ama **(1.68)** denklemine göre iki kat daha fazla terim içermektedir.

2. CHEBYSHEV FONKSİYONLARININ İNTEGRAL VE TÜREVLERİ

Bu bölümde diferansiyel denklem çözümlerinde sıklıkla kullanılan Chebyshev fonksiyonlarının integral ve türev ifadelerinin çıkarımları ispatları ile birlikte verilmiştir. İlk olarak Chebyshev polinomu $T_r(x)$ ' in integrali

$$\begin{aligned}\int T_r(x)dx &= \int \cos r(\theta)dx = -\int \cos r(\theta) \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \int \{ \sin(r+1)\theta - \sin(r-1)\theta \} d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r+1} \cos(r+1)\theta + \frac{1}{r-1} \cos(r-1)\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}(x) \right)\end{aligned}\tag{0.70}$$

elde edilir. $r = 0$ ve $r = 1$ özel durumları için,

$$\begin{aligned}\int T_0(x)dx &= \int 1dx = x = T_1(x) \\ \int T_1(x)dx &= \int xdx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{4} (2x^2 - 1 + 1) = \frac{1}{4} (T_2(x) + T_0(x))\end{aligned}\tag{0.71}$$

çıkarımları yapılabilir.

2.1 Chebyshev Serilerinin İntegral ve Türevleri

Bir $p(x)$ polinomunun Chebyshev polinomları cinsinden seri ifadesinin aşağıdaki gibi verildiği varsayalım:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 'a_i T_i(x),\tag{0.72}$$

burada (') işareti ile ilk terimin yarısının alınacağı ve $p(x)$ polinomunun ise

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 'a_i T_i(x)\tag{0.73}$$

sonsuz serisine bir yaklaşım polinomu olduğu bilinmelidir. x ' in belirli bir değeri için $p(x)$ ' i bulmak adına, (2.3) ifadesi

$$p(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad (0.74)$$

polinomun formuna çevrilerek iç içe çarpım “nested multiplication” şu şekilde uygulanır:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= \dots \left(\left(\left((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2} \right) x + a_{n-3} \right) x + \dots + a_1 \right) + a_0 \\ q_r(x) &= x \cdot q_{r+1}(x) + C_r \quad q_{n+1}(x) = 0 \\ q_n(x) &= x \cdot 0 + C_n = C_n \\ q_{n-1}(x) &= x \cdot C_n + C_{n-1} \\ q_{n-2}(x) &= x \cdot (x C_n + C_{n-1}) + C_{n-2} \\ q_{n-3}(x) &= x \cdot (x (x C_n + C_{n-1}) + C_{n-2}) + C_{n-3} \\ &\vdots \\ q_{n-i}(x) &= x (x \dots (x C_n + C_{n-1}) + \dots + C_{n-i+1}) + C_{n-i} \\ &\vdots \\ q_0(x) &= q_{n-n}(x) = x (x \dots (x C_n + C_{n-1}) + \dots + C_1) + C_0 \\ \Rightarrow q_0(x) &= C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0 \end{aligned} \quad (0.75)$$

(2.5) polinomu (2.6) ile verilen iç içe çarpım kullanılarak, geri rekürans bağıntısı

$$q_i(x) = x q_{i+1}(x) + C_i, \quad q_{i+1}(x) = 0 \quad (0.76)$$

bağıntısı ile

$$q_0(x) = p(x) \quad (0.77)$$

verecek şekilde hesaplanabilir. $T_n(x)$ için tanım aralığı $|x| \leq 1$ olduğundan, (2.5) işlemi karardlıdır. Ancak (2.5) ifadesinin iki dezavantajı vardır; birincisi, $p(x)$ çok küçük olsa bile, (2.5) ifadesinde C_i katsayıları (2.3) ifadesindeki a_i katsayılarına göre çok büyük olabilir ki, bu durum istenilen yaklaşıklıkla ulaşılmasını güçleştirir. İkinci olarak ise, (2.3) ifadesinde küçük n ' ler için kesme işlemi, (2.5) ifadesine

nazaran daha kabul edilebilirdir. Bu nedenle **(2.5)** polinomunu kullanmayan bir yöntem aranır, bu ise **(1.10)** rekürsif ilişkisi ile sağlanabilir.

Clenshaw (1955)

$$\phi_{i+1}(x) + \alpha_i(x)\phi_i(x) + \beta_i(x)\phi_{i-1}(x) = 0 \quad (0.78)$$

lineer ilişkisini sağlayan $\phi_i(x)$ fonksiyonlarının serilerinin sonlu bir toplamının

$$\sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) = b_0(x)\phi_0(x) + b_1(x)\{\phi_1(x) + \alpha_0(x)\phi_0(x)\} \quad (0.79)$$

ile verilebileceğini göstermiştir, burada

$$\left. \begin{aligned} b_i(x) + \alpha_i(x)b_{i+1}(x) + \beta_{i+1}(x)b_{i+2}(x) &= a_i \\ b_{n+1}(x) &= b_{n+2}(x) = \dots = 0 \end{aligned} \right\} \quad (0.80)$$

şeklindedir. Bu durum aşağıdaki şekilde ispatlanabilir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) &= a_n \phi_n(x) + a_{n-1} \phi_{n-1}(x) + a_{n-2} \phi_{n-2}(x) + \dots \\ &+ a_i \phi_i(x) + a_{i-1} \phi_{i-1}(x) + a_{i-2} \phi_{i-2}(x) + \dots + a_2 \phi_2(x) + a_1 \phi_1(x) + a_0 \phi_0(x) \\ &= \left(b_n(x) + \underbrace{\alpha_n b_{n+1}(x)}_{=0} + \underbrace{\beta_{n+1} b_{n+2}(x)}_{=0} \right) \phi_n(x) \\ &+ \left(b_{n-1}(x) + \alpha_{n-1}(x)b_n(x) + \underbrace{\beta_n b_{n+1}(x)}_{=0} \right) \phi_{n-1}(x) \\ &+ (b_{n-2}(x) + \alpha_{n-2}(x)b_{n-1}(x) + \beta_{n-1}(x)b_n(x)) \phi_{n-2}(x) \\ &+ \dots \\ &+ (b_i(x) + \alpha_i(x)b_{i+1}(x) + \beta_{i+1}(x)b_{i+2}(x)) \phi_i(x) \\ &+ (b_{i-1}(x) + \alpha_{i-1}(x)b_i(x) + \beta_i(x)b_{i+1}(x)) \phi_{i-1}(x) \\ &+ (b_{i-2}(x) + \alpha_{i-2}(x)b_{i-1}(x) + \beta_{i-1}(x)b_i(x)) \phi_{i-2}(x) \\ &+ \dots \\ &+ (b_2(x) + \alpha_2(x)b_3(x) + \beta_3(x)b_4(x)) \phi_2(x) \\ &+ (b_1(x) + \alpha_1(x)b_2(x) + \beta_2(x)b_3(x)) \phi_1(x) \\ &+ (b_0(x) + \alpha_0(x)b_1(x) + \beta_1(x)b_2(x)) \phi_0(x) \end{aligned} \quad (0.81)$$

(2.12) ifadesinde örneğin $b_i(x)$ ' lerin katsayılarını bulmak için;

$$\phi_i(x) + \alpha_{i-1}(x)\phi_{i-1}(x) + \beta_{i-1}(x)\phi_{i-2}(x) \quad (0.82)$$

$i \rightarrow i+1$ uygulanırsa,

$$\phi_{i+1}(x) + \alpha_i(x)\phi_i(x) + \beta_i(x)\phi_{i-1}(x) = 0 \quad (0.83)$$

ifadesi (2.9) uyarınca sıfır olacaktır. Dolayısıyla (2.12) ifadesinden kalan

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) &= b_1(x)\phi_1(x) + (b_0(x) + \alpha_0(x)b_1(x))\phi_0(x) \\ &= b_0(x)\phi_0(x) + b_1(x)(\phi_1(x) + \alpha_0(x)\phi_0(x)) \end{aligned} \quad (0.84)$$

olarak bulunur. Clenshaw yöntemi Chebyshev fonksiyonları (2.3) için kullanılırsa; (2.9) ile (1.10) ' un karşılaştırılmasından,

$$\alpha_i(x) = -2x \quad \beta_i(x) = 1 \quad i \geq 1 \quad (0.85)$$

yazılır ve böylece (2.15) ve (2.3) ' ten,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) &= b_0(x)T_0(x) + b_1(x)(T_1(x) - 2xT_0(x)) \\ \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) + \frac{1}{2}a_0 T_0(x) &= \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) = b_0(x)T_0(x) + b_1(x)(T_1(x) - 2xT_0(x)) \end{aligned} \quad (0.86)$$

(2.3) ifadesinden,

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x) = \left(b_0(x) - \frac{1}{2}a_0 \right) T_0 + b_1(x)(T_1(x) - 2xT_0(x)) \quad (0.87)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x = x \cdot 1 = xT_0(x) \end{aligned} \quad (0.88)$$

(2.11) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0(x) + \alpha_0(x)b_1(x) + \beta_1(x)b_2(x) \\ a_0 &= b_0(x) - 2x \cdot b_1(x) + b_2(x) \\ b_0(x) &= a_0 + 2x \cdot b_1(x) - b_2(x) \end{aligned} \quad (0.89)$$

çıkarımı yapılır. (2.18) ifadesinden, (2.19) ve (2.20) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n 'a_i T_i(x) &= \left(a_0 + 2xb_1 - b_2 - \frac{1}{2}a_0 \right) T_0 + b_1 x T_0 - b_1 2x T_0 \\
&= \frac{a_0}{2} T_0 + 2xb_1 T_0 - b_2 T_0 - b_1 x T_0 = \left(\frac{a_0}{2} + xb_1 - b_2 \right) T_0
\end{aligned} \tag{0.90}$$

ve (2.20) kullanılarak,

$$xb_1 = \frac{b_0 + b_2 - a_0}{2} \tag{0.91}$$

eşitliği bulunur. (2.21) ve (2.22)' ten,

$$\sum_{i=0}^n 'a_i T_i(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \frac{b_0 - b_2 - a_0}{2} - b_2 \right) T_0 = \frac{1}{2} (b_0(x) - b_2(x)) \tag{0.92}$$

olduğu görülür. (2.11) ve (2.16)' den,

$$\left. \begin{aligned} b_i(x) &= 2xb_{i+1}(x) - b_{i+2} + a_i \\ b_{n+1}(x) &= b_{n+2}(x) = 0 \end{aligned} \right\} \tag{0.93}$$

eşitlikleri bulunur.

$T_i^*(x)$ için ise, (2.9) ve (1.41) karşılaştırmasından,

$$\alpha_i(x) = -2(2x-1) \quad \beta_i(x) = 1 \tag{0.94}$$

elde edilir. (2.15)' den,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n a_i T_i^*(x) &= b_0(x) T_0^*(x) + b_1(x) (T_1^*(x) + \alpha_0(x) T_0^*(x)) \\
\sum_{i=0}^n 'a_i T_i^*(x) &= \left(b_0(x) - \frac{1}{2}a_0 \right) T_0^*(x) + b_1(x) (T_1^*(x) - 2(2x-1)T_0^*(x))
\end{aligned} \tag{0.95}$$

denklemlerine ulaşılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1 \\ T_1^*(x) &= (2x-1) \cdot 1 = (2x-1)T_0^*(x) \end{aligned} \tag{0.96}$$

ve (2.11) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0(x) + \alpha_0(x)b_1(x) + \beta_1(x)b_2(x) = b_0(x) - 2(2x-1)b_1(x) + b_2(x) \\ b_0(x) &= a_0 + 2(2x-1)b_1(x) - b_2(x) \end{aligned} \tag{0.97}$$

eşitliğine varılır. (2.26) ifadesi (2.27) ve (2.28) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n 'a_i T_i^*(x) &= \left(a_0 + 2(2x-1)b_1 - b_2 - \frac{1}{2}a_0 \right) T_0^*(x) + b_1 T_1^*(x) - 2(2x-1)b_1 T_0^*(x) \\
&= \frac{a_0}{2} T_0^* + 2(2x-1)b_1 T_0^*(x) - b_2 T_0^*(x) + b_1(2x-1)T_0^*(x) - 2(2x-1)b_1 T_0^*(x) \quad (0.98) \\
\sum_{i=0}^n 'a_i T_i^*(x) &= \left(\frac{a_0}{2} + b_1(2x-1) - b_2 \right) T_0^*(x)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (2.28)'dan,

$$(2x-1)b_1 = \frac{b_0 + b_2 - a_0}{2} \quad (0.99)$$

(2.29) ve (2.30)' den,

$$\sum_{i=0}^n 'a_i T_i^*(x) = \left(\frac{a_0}{2} + \frac{b_0 + b_2 - a_0}{2} - b_2 \right) T_0^*(x) = \frac{1}{2}(b_0 - b_2) \quad (0.100)$$

ayrıca (2.11) ile (2.25)' den,

$$\begin{aligned}
b_i(x) &= 2(2x-1)b_{i+1}(x) - b_{i+2}(x) + a_i \\
b_{n+1}(x) &= b_{n+2}(x) = 0
\end{aligned} \quad (0.101)$$

eşitlikleri bulunur.

(2.32) rekürans ilişkisinden $b_0(x)$ ve $b_2(x)$ elde edilirken, mümkün hataların hesaplanması önemlidir. Bireysel hatalar; a_r katsayılarında muhtemel yuvarlama hataları, depolama hataları ve (2.32) denkleminde $b_i(x)$ ifadelerinin hesaplanmasına dahil edilen ek yuvarlama hataları olarak ortaya çıkar. Tüm bunların birleşimi, b_{i+1} , b_{i+2} ve a_i ' den b_i ' lerin hesabında maksimum değeri belirlenebilen bir yerel hata, ε_r olarak ortaya çıkar.

b_i ' lerin hesaplanan değeri $\overline{b_i}$ ' deki toplam hata, $(r+1)$. adımdaki sıfır hata ve r . adımdaki birim hatadan kaynaklanan i . adımdaki hatanın gerçek değeri $E_i(r)$ olmak üzere, (4.32) ' e benzer şekilde,

$$b_i - \overline{b_i} = \varepsilon_n E_i(n) + \varepsilon_{n-1} E_i(n-1) + \dots + \varepsilon_i E_i(i) \quad (0.102)$$

ile verilir. Burada her bir $E_i(r)$ rekürans ilişkisi (2.24)' ten,

$$\begin{aligned}
\bar{b}_i(x) &= 2x\bar{b}_{i+1}(x) - \bar{b}_{i+2}(x) + a_i \\
b_i + E_i &= 2x(b_{i+1} + E_{i+1}) - (b_{i+2} + E_{i+2}) + a_i \\
b_i - 2xb_{i+1} + b_{i+2} - a_i + E_i &= 2xE_{i+1} - E_{i+2}
\end{aligned} \tag{0.103}$$

ve buradan (2.24) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
E_i(r) &= 2xE_{i+1}(r) - E_{i+2}(r) & i \leq r \\
E_r(r) &= 1 & E_{r+1}(r) = 0
\end{aligned} \tag{0.104}$$

iteratif bağıntısına ulaşılır. (2.35) ilişkisi ileri rekürans bağıntısı olarak da aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$E_i(r) = AZ_i + B\bar{Z}_i \tag{0.105}$$

ifadesinde

$$\begin{aligned}
E_{r+1}(r) &= AZ_{r+1} + B\bar{Z}_{r+1} = 0 \\
E_r(r) &= AZ_r + B\bar{Z}_r = 1
\end{aligned} \tag{0.106}$$

koşulları kullanılırsa, sabitler

$$A = \frac{\bar{Z}_{r+1}}{\bar{Z}_{r+1}Z_r - \bar{Z}_rZ_{r+1}}, \quad B = -\frac{Z_{r+1}}{\bar{Z}_{r+1}Z_r - \bar{Z}_rZ_{r+1}} \tag{0.107}$$

olarak bulunur ve (2.36) içinde kullanılırsa

$$E_i(r) = \frac{\bar{Z}_{r+1}Z_i - \bar{Z}_iZ_{r+1}}{\underbrace{\bar{Z}_{r+1}Z_r - \bar{Z}_rZ_{r+1}}_{W_r}} \tag{0.108}$$

elde edilir. Burada hem Z_r hem de $\bar{Z}_r$ homojen fark denkleminin çözümü olduğundan (2.35) denkleminde,

$$\begin{aligned}
Z_i &= 2xZ_{i+1} - Z_{i+2} \\
\bar{Z}_i &= 2x\bar{Z}_{i+1} - \bar{Z}_{i+2}
\end{aligned} \tag{0.109}$$

elde edilir. (2.39)' tan

$$\begin{aligned}
W_r &= Z_r \bar{Z}_{r+1} - \bar{Z}_r Z_{r+1} \\
W_{r-1} &= Z_{r-1} \bar{Z}_r - \bar{Z}_{r-1} Z_r = W_{r-1} = (2xZ_r - Z_{r+1})\bar{Z}_r - (2x\bar{Z}_r - \bar{Z}_{r+1})Z_r \\
&= -\bar{Z}_r Z_{r+1} + Z_r \bar{Z}_{r+1}
\end{aligned} \tag{0.110}$$

yani $W_r = W_{r-1}$ eşitliğine ulaşılır. Eğer rekürans ilişkisinin,

$$E_i(r+2) = \alpha_r E_i(r+1) + \beta_r E_i(r) \tag{0.111}$$

yapısında olduğu varsayılırsa ve (2.39) uygulanır,

$$\frac{\bar{Z}_{r+3}Z_i - Z_{r+3}\bar{Z}_i}{W_{r+2}} = \alpha_r \frac{\bar{Z}_{r+2}Z_i - Z_{r+2}\bar{Z}_i}{W_{r+1}} + \beta_r \frac{\bar{Z}_{r+1}Z_i - Z_{r+1}\bar{Z}_i}{W_r} \tag{0.112}$$

elde edilir ve burada (2.41) kullanılarak, Z_i , $\bar{Z}_i$ parantezlerine alınır,

$$\bar{Z}_i(-Z_{r+3} + \alpha_r Z_{r+2} + \beta_r Z_{r+1}) + Z_i(\bar{Z}_{r+3} - \alpha_r \bar{Z}_{r+2} - \beta_r \bar{Z}_{r+1}) = 0 \tag{0.113}$$

ortaya çıkar. Bu ifade yine Z_i ve $\bar{Z}_i$ homojen sistemin lineer bağımsız çözümleri olduğundan, ancak ve ancak katsayıları sıfır ise (2.44) denklemini sağlarlar, yani

$$\begin{aligned}
Z_{r+3} &= \alpha_r Z_{r+2} + \beta_r Z_{r+1} \\
\bar{Z}_{r+3} &= \alpha_r \bar{Z}_{r+2} + \beta_r \bar{Z}_{r+1}
\end{aligned} \tag{0.114}$$

bulunur. Ayrıca (2.35) denkleminin iki lineer bağımsız çözüm Z_i ve $\bar{Z}_i$ olduğundan, bu çözümler (2.35)'yi sağlar, yani

$$\begin{aligned}
Z_r &= 2xZ_{r+1} - Z_{r+2} \Rightarrow Z_{r+2} = 2xZ_{r+1} - Z_r \\
\bar{Z}_r &= 2x\bar{Z}_{r+1} - \bar{Z}_{r+2} \Rightarrow \bar{Z}_{r+2} = 2x\bar{Z}_{r+1} - \bar{Z}_r
\end{aligned} \tag{0.115}$$

şeklinde olur. (2.45) ve (2.46) birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
2xZ_{r+2} - Z_{r+1} &= \alpha_r Z_{r+2} + \beta_r Z_{r+1} \\
2x\bar{Z}_{r+2} - \bar{Z}_{r+1} &= \alpha_r \bar{Z}_{r+2} + \beta_r \bar{Z}_{r+1}
\end{aligned} \tag{0.116}$$

elde edilir ki, her iki denklemden de,

$$\begin{aligned}
\alpha_r &= 2x \\
\beta_r &= -1
\end{aligned} \tag{0.117}$$

bulunur. Bu sonuç (2.42)'te kullanılırsa,

$$\begin{aligned} E_i(r+2) &= 2xE_i(r+1) - E_i(r) \\ E_i(i) &= 1 \quad E_i(i-1) = 0 \end{aligned} \quad (0.118)$$

rekürans bağıntısı ortaya çıkar. (2.49) ile (1.10) kıyaslanırsa $T_r(x)$ ' in ve ikinci cins Chebyshev fonksiyonu $U_r(x) = \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta}$ ile tanımlanan ve benzer şekilde (1.10) özelliğini sağlayan $U_r(x)$ ' in (2.49) bağıntısının çözümleri olduğu görülür, yani $Z_i(x) = T_i(x)$ $\bar{Z}_i(x) = U_i(x)$ alınabilir. Dolayısıyla (2.49) ' nin genel çözümü

$$E_i(r) = AT_r(x) + BU_r(x) \quad (0.119)$$

ve (2.39) ' tan başlangıç koşullarının sağlanması için

$$\begin{aligned} E_i(i-1) &= AT_{i-1}(x) + BU_{i-1}(x) = 0 \\ E_i(i) &= AT_i(x) + BU_i(x) = 1 \end{aligned} \quad (0.120)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{U_{i-1}(x)}{U_{i-1}(x)T_i(x) - U_i(x)T_{i-1}(x)} \\ B &= -\frac{T_{i-1}(x)}{U_{i-1}(x)T_i(x) - U_i(x)T_{i-1}(x)} \end{aligned} \quad (0.121)$$

eşitliklerine varılır ve A, B (2.50) ' de (-) ile çarpılarak yerlerine konulur ve gösterilen trigonometrik işlemler uygulanırsa,

$$\begin{aligned} E_i(r) &= \frac{U_r(x)T_{i-1}(x) - T_r(x)U_{i-1}(x)}{U_i(x)T_{i-1}(x) - T_i(x)U_{i-1}(x)} \\ &= \frac{\frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta} \cos(i-1)\theta - \cos r\theta \frac{\sin i\theta}{\sin \theta}}{\frac{\sin(i+1)\theta}{\sin \theta} \cos(i-1)\theta - \cos i\theta \frac{\sin i\theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\sin(r+1+i-1)\theta + \sin(r+1-i+1)\theta - \sin(i+r)\theta - \sin(i-r)\theta}{\sin(i+1+i-1)\theta + \sin(i+1-i+1)\theta - \sin(i+i)\theta - \sin(i-i)\theta} \\ &= \frac{\sin(r-i+2)\theta - \sin(i-r)\theta}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{r-i+2-i+r}{2}\right)\theta \cos\left(\frac{i-r+r-i+2}{2}\right)\theta}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{\sin(r-i+1)\theta}{\sin \theta} = U_{r-i}(x) \end{aligned} \quad (0.122)$$

$$E_i(r) = \frac{U_r(x)T_{i-1}(x) - T_r(x)U_{i-1}(x)}{U_i(x)T_{i-1}(x) - T_i(x)U_{i-1}(x)} = U_{r-i}(x) \quad (0.123)$$

sonucuna varılır.

$$|U_j(x)| = \left| \frac{\sin(j+1)\theta}{\sin \theta} \right| = \left| \frac{\sin(j+1) \arccos x}{\sin(\arccos x)} \right| \quad (0.124)$$

ifadesinin max. değerini alması için $x \rightarrow 1$ yani $\theta \rightarrow 1$ 'e gitmelidir: (Bkz. EK A).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} |U_j(x)| &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(j+1) \arccos x}{\sin(\arccos x)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(j+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{0}{0} \\ &\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(j+1)\cos(j+1)\theta}{\cos \theta} = j+1 \end{aligned} \quad (0.125)$$

Yani (2.54) denklemindeki hata çok büyük olabilir ki, bu (2.33) ifadesinde hesaplanan her $\bar{b}_i$ değerinin oldukça büyük olabileceğini gösterir.

$i = (n+1)$. adımda sıfır hata $\bar{b}_{n+1} = b_{n+1}$

$i = n$. adımda birim hata $\bar{b}_n = b_n + \varepsilon_n$

$$\begin{aligned} b_i(x) &= 2(2x-1)b_{i+1}(x) - b_{i+2}(x) + a_i \\ &\Rightarrow b_i = f_i b_{i+1} + g_i b_{i+2} + a_i \end{aligned} \quad (0.126)$$

$i = (n-1)$. adımda, $\bar{b}_{n-1}$ hatalı hesaplanmış b_{n-1} değerini göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \bar{b}_{n-1} &= f_{n-1} \bar{b}_n + g_{n-1} \bar{b}_{n+1} + a_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \\ &= f_{n-1} (b_n + \varepsilon_n) + g_{n-1} b_{n+1} + a_{n-1} + \varepsilon_{n-1} \\ &= \underbrace{f_{n-1} b_n + g_{n-1} b_{n+1} + a_{n-1}}_{b_{n-1}} + f_{n-1} \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \\ &= b_{n-1} + f_{n-1} \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \\ &= b_{n-1} + \varepsilon_n \underset{E_n(n)}{f_{n-1}} \cdot \underset{E_n(n)}{\frac{1}{\downarrow}} + \varepsilon_{n-1} \cdot \underset{E_{n-1}(n-1)}{\frac{1}{\downarrow}} \\ &= b_{n-1} + \varepsilon_n E_{n-1}(n) + \varepsilon_{n-1} E_{n-1}(n-1) \end{aligned} \quad (0.127)$$

$i = (n-2)$. adımda, $\bar{b}_{n-2}$ hatalı hesaplanmış b_{n-2} değeri olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{n-2} &= f_{n-2}\bar{b}_{n-1} + g_{n-2}\bar{b}_n + a_{n-2} + \varepsilon_{n-2} \\
&= f_{n-2}(b_{n-1} + \varepsilon_n E_{n-1}(n) + \varepsilon_{n-1} E_{n-1}(n-1)) + g_{n-2}(b_n + \varepsilon_n) + a_{n-2} + \varepsilon_{n-2} \\
&= \underbrace{f_{n-2}b_{n-1} + g_{n-2}b_n + a_{n-2}}_{b_{n-2}} + f_{n-2}\varepsilon_n E_{n-1}(n) + f_{n-2}\varepsilon_{n-1} E_{n-1}(n-1) \\
&\quad + g_{n-2}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-2} \\
&= b_{n-2} + \varepsilon_n \left(f_{n-2} E_{n-1}(n) + g_{n-2} \cdot \frac{1}{E_n(n)} \right) + \varepsilon_{n-1} f_{n-2} E_{n-1}(n-1) + \varepsilon_{n-2} \cdot \frac{1}{E_{n-2}(n-2)} \\
&= b_{n-2} + \varepsilon_n E_{n-2}(n) + \varepsilon_{n-1} E_{n-2}(n-1) + \varepsilon_{n-2} E_{n-2}(n-2)
\end{aligned} \tag{0.128}$$

$i = (n-3)$. adımda, $\bar{b}_{n-3}$ hatalı hesaplanmış b_{n-3} değeri olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\bar{b}_{n-3} &= f_{n-3}\bar{b}_{n-2} + g_{n-3}\bar{b}_{n-1} + a_{n-3} + \varepsilon_{n-3} \\
&= f_{n-3}(b_{n-2} + \varepsilon_n E_{n-2}(n) + \varepsilon_{n-1} E_{n-2}(n-1) + \varepsilon_{n-2} E_{n-2}(n-2)) + \\
&\quad g_{n-3}(b_{n-1} + \varepsilon_n E_{n-1}(n) + \varepsilon_{n-1} E_{n-1}(n-1)) + a_{n-3} + \varepsilon_{n-3} \cdot \frac{1}{E_{n-3}(n-3)} \\
&= \underbrace{f_{n-3}b_{n-2} + g_{n-3}b_{n-1} + a_{n-3}}_{b_{n-3}} + \varepsilon_n (f_{n-3} E_{n-2}(n) + g_{n-3} E_{n-1}(n)) \\
&\quad + \varepsilon_{n-1} (f_{n-3} E_{n-2}(n-1) + g_{n-3} E_{n-1}(n-1)) + \varepsilon_{n-2} f_{n-3} E_{n-2}(n-2) \\
&\quad + \varepsilon_{n-3} E_{n-3}(n-3) \\
&= b_{n-3} + \varepsilon_n E_{n-3}(n) + \varepsilon_{n-1} E_{n-3}(n-1) + \varepsilon_{n-2} E_{n-3}(n-2) \\
&\quad + \varepsilon_{n-3} E_{n-3}(n-3)
\end{aligned} \tag{0.129}$$

ve devam edilirse $i = 1, 2, 3$ değerleri için $\bar{b}_i$ 'ler

$$\begin{aligned}
i = 3 &\Rightarrow \bar{b}_3 = b_3 + \varepsilon_n E_3(n) + \varepsilon_{n-1} E_3(n-1) + \dots + \varepsilon_3 E_3(3) \\
i = 2 &\Rightarrow \bar{b}_2 = b_2 + \varepsilon_n E_2(n) + \varepsilon_{n-1} E_2(n-1) + \dots + \varepsilon_2 E_2(2) \\
i = 1 &\Rightarrow \bar{b}_1 = f_1 \bar{b}_2 + g_1 \bar{b}_3 + a_1 + \varepsilon_1 \\
&= f_1 (b_2 + \varepsilon_n E_2(n) + \varepsilon_{n-1} E_2(n-1) + \dots + \varepsilon_2 E_2(2)) \\
&\quad + g_1 (b_3 + \varepsilon_n E_3(n) + \varepsilon_{n-1} E_3(n-1) + \dots + \varepsilon_3 E_3(3)) + a_1 + \varepsilon_1
\end{aligned} \tag{0.130}$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}
\bar{b}_1 &= \underbrace{f_1 b_2 + g_1 b_3 + a_1}_{b_1} + \varepsilon_n \left(\underbrace{f_1 E_2(n) + g_1 E_3(n)}_{E_1(n)} \right) + \varepsilon_{n-1} \left(\underbrace{f_1 E_2(n-1) + g_1 E_3(n-1)}_{E_1(n-1)} \right) \\
&\quad + \dots + \varepsilon_3 (f_1 E_2(3) + g_1 E_3(3)) + \underbrace{\varepsilon_2 f_1 E_2(2)}_{E_1(2)} + \varepsilon_1 \cdot 1
\end{aligned} \tag{0.131}$$

Dolayısıyla,

$$\bar{b}_1 = b_1 + \varepsilon_n E_1(n) + \varepsilon_{n-1} E_1(n-1) + \dots + \varepsilon_2 E_1(2) + \varepsilon_1 E_1(1) \quad (0.132)$$

$i = 0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= f_0 \bar{b}_1 + g_0 \bar{b}_2 + a_0 + \varepsilon_0 \\ &= f_0 (b_1 + \varepsilon_n E_1(n) + \varepsilon_{n-1} E_1(n-1) + \dots + \varepsilon_2 E_1(2) + \varepsilon_1 E_1(1)) \\ &\quad + g_0 (b_2 + \varepsilon_n E_2(n) + \varepsilon_{n-1} E_2(n-1) + \dots + \varepsilon_2 E_2(2)) + a_0 + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (0.133)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= \underbrace{f_0 b_1 + g_0 b_2 + a_0}_{b_0} + \varepsilon_n \underbrace{\left(f_0 E_1(n) + g_0 E_2(n) \right)}_{E_0(n)} + \varepsilon_{n-1} \underbrace{\left(f_0 E_1(n-1) + g_0 E_2(n-1) \right)}_{E_0(n-1)} \\ &\quad + \dots + \varepsilon_2 (f_0 E_1(2) + g_0 E_2(2)) + \varepsilon_1 f_0 E_1(1) + \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{E_0(0)} \end{aligned} \quad (0.134)$$

$$\bar{b}_0 = b_0 + \varepsilon_n E_0(n) + \varepsilon_{n-1} E_0(n-1) + \dots + \varepsilon_2 E_0(2) + \varepsilon_1 E_0(1) + \varepsilon_0 E_0(0) \quad (0.135)$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 - \bar{b}_2 &= b_0 - b_2 + \varepsilon_n (E_0(n) - E_2(n)) + \varepsilon_{n-1} (E_0(n-1) - E_2(n-1)) \\ &\quad + \dots + \varepsilon_2 (E_0(2) - E_2(2)) + \varepsilon_1 E_0(1) + \varepsilon_0 E_0(0) \end{aligned} \quad (0.136)$$

$(\bar{b}_0 - \bar{b}_2) - (b_0 - b_2) = 2\varepsilon$ kabul edilirse,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &= \varepsilon_n (E_0(n) - E_2(n)) + \varepsilon_{n-1} (E_0(n-1) - E_2(n-1)) \\ &\quad + \dots + \varepsilon_2 (E_0(2) - E_2(2)) + \varepsilon_1 E_0(1) + \varepsilon_0 E_0(0) \end{aligned} \quad (0.137)$$

sonucuna ulaşılır. Bu yüzden (2.31) ilişkisini hesaplamak için gerekli olan

$\frac{1}{2} \{b_0(x) - b_2(x)\}$ ifadesinin hatası

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2} \left[\sum_{r=n}^2 |\varepsilon_r (E_0(r) - E_2(r))| + |\varepsilon_1 E_0(1)| + |\varepsilon_0 E_0(0)| \right] \quad (0.138)$$

ile sınırlıdır. Ayrıca (2.54)' ten

$$\begin{aligned} E_0(r) - E_2(r) &= U_r(x) - U_{r-2}(x) = \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(r-1)\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2 \sin\left(\frac{r+1-r-1}{2}\right) \theta \cos\left(\frac{r-1+r+1}{2}\right) \theta}{\sin \theta} = 2 \cos r \theta \end{aligned} \quad (0.139)$$

$$E_0(r) - E_2(r) = U_r(x) - U_{r-2}(x) = 2 \cos r\theta = 2T_r(x) \quad (0.140)$$

elde edilir ki, (2.69) ifadesi (2.54) ile birlikte kullanılırsa,

$$\varepsilon \leq \sum_{r=n}^2 \left| \varepsilon_r \underbrace{T_r(x)}_{\leq 1} \right| + \frac{1}{2} |\varepsilon_1 U_1(x)| + \frac{1}{2} \left| \varepsilon_0 \underbrace{U_0(x)}_{=1} \right| \quad (0.141)$$

eşitsizliği ortaya konabilir, burada da $U_1(x) = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta$ ve maksimum değerinin 2 ve $T_r(x)$ 'in maksimum değerinin 1 olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \sum_{r=n}^2 |\varepsilon_r| + \frac{1}{2} |\varepsilon_1 2| + \frac{1}{2} |\varepsilon_0| \\ \varepsilon &\leq \sum_{r=1}^n |\varepsilon_r| + \frac{1}{2} |\varepsilon_0| \end{aligned} \quad (0.142)$$

eşitsizliğine ulaşılır ki bu sonuç (2.32) rekürsif ilişkisinin tam kararlı (perfect stable) olduğunu, yani lokal yuvarlama hatalarının büyük olmadığını ve hatanın üst sınırının her adımdaki lokal yuvarlama hatalarının aritmetik toplamını aşamayacağını gösterir. $T_r^*(x)$ içinde aynı sonucun elde edileceği açıktır. (2.3) ifadesine dönülürse,

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i(x) \text{ ifadesinin bazı özel değerleri}$$

$$\left. \begin{aligned} p(1) &= \frac{1}{2} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ p(-1) &= \frac{1}{2} a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n \\ p(0) &= \frac{1}{2} a_0 - a_2 + a_4 - \dots + (-1)^n a_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (0.143)$$

olarak kolayca bulunabilir. $T_r^*(x)$ cinsinden açılımda ise; $T_r^*(x) = T_r(2x-1)$

ilişkisinden $T_r(x) = T_r^*\left(\frac{x+1}{2}\right)$ elde edileceğinden, $\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i^*(x)$ olmak üzere,

(2.74)' in sağ tarafları,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n &= p(1) = \bar{p}(1) \\ \frac{1}{2}a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n &= p(-1) = \bar{p}(0) \\ \frac{1}{2}a_0 - a_2 + a_4 - \dots + (-1)^n a_{2n} &= p(0) = \bar{p}(1/2) \end{aligned} \right\} \quad (0.144)$$

olarak elde edilecektir. Bu formüller adi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri için faydalı olacaktır.

(2.3) ifadesinin terim terime belirsiz integrasyonu için (2.1) ve (2.2) ilişkisi kullanılıp aşağıdaki cebirsel işlem yapılırsa,

$$\begin{aligned} \int_1^x p(x)dx &= \int_1^x \left(\sum_{r=0}^n 'a_r T_r(x) \right) dx = \sum_{r=0}^n ' \int_{-1}^x a_r T_r(x) dx \\ &= \sum_{r=2}^n \left[a_r \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}(x) \right) \right]_{-1}^x \\ &\quad + a_1 \frac{1}{4} (T_0(x) + T_2(x))_{-1}^x + \frac{1}{2} a_0 T_1(x)_{-1}^x \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{r=2}^n \frac{a_r}{r+1} T_{r+1}(x) - \frac{1}{2} \sum_{r=2}^n \frac{a_r}{r-1} T_{r-1}(x) + \frac{a_1}{4} (T_0(x) + T_2(x)) + \frac{a_0}{2} T_1(x) \right)_{-1}^x \\ &= \left(\frac{1}{2} \sum_{r=3}^{n+1} \frac{a_{r-1}}{r} T_r(x) - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{a_{r+1}}{r} T_r(x) + \frac{a_1}{4} (T_0(x) + T_2(x)) + \frac{a_0}{2} T_1(x) \right)_{-1}^x \\ &= \left(\underbrace{\frac{1}{2} \frac{a_{n-1}}{n} T_n(x)}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{a_n}{n+1} T_{n+1}(x)}_{b_{n+1}} + \sum_{r=3}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{a_{r-1}}{r} - \frac{a_{r+1}}{r} \right)}_{b_r} T_r(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} a_2 T_1(x) - \frac{1}{2} \frac{a_3}{2} T_2(x) + \frac{a_1}{4} T_0(x) + \frac{a_1}{4} T_2(x) + \frac{a_0}{2} T_1(x) \right)_{-1}^x \\ &= \left(\sum_{r=3}^{n+1} b_r T_r(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{2} (a_1 - a_3)}_{b_2} T_2(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{2} (a_0 - a_2)}_{b_1} T_1(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{a_1}{2}}_{b_0} T_0(x) \right)_{-1}^x \end{aligned} \quad (0.145)$$

ve sadeleştirildiğinde

$$\int_{-1}^x p(x)dx = \left(\sum_{r=0}^{n+1} 'b_r T_r(x) \right)_{-1}^x = \sum_{r=0}^{n+1} 'b_r T_r(x) - \sum_{r=0}^{n+1} 'b_r T_r(-1) \quad (0.146)$$

eşitliğine ulaşılır. (2.77) ifadesinde son terim, $\sum_{r=0}^{n+1} b_r T_r(-1)$ sıfır olduğu kabul edilirse,

$$\int_{-1}^x p(x) dx = \sum_{r=0}^{n+1} b_r T_r(x) \quad (0.147)$$

bulunur. Burada,

$$\left. \begin{aligned} b_r &= \frac{1}{2r} (a_{r-1} + a_{r+1}) \quad r=1, 2, \dots, n-1 \\ b_n &= \frac{a_{n-1}}{2n} \quad b_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)} \end{aligned} \right\} \quad (0.148)$$

ve bu kabulden ötürü $\sum_{r=0}^{n+1} b_r T_r(-1)$ sıfır olması gerektiğinden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_0 T_0(-1) + b_1 T_1(-1) + b_2 T_2(-1) + \dots + b_{n+1} T_{n+1}(-1) &= 0 \\ \frac{1}{2} b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 + \dots + b_{n+1} (-1)^{n+1} &= 0 \\ \frac{1}{2} b_0 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + b_{n+1} (-1)^n \end{aligned} \quad (0.149)$$

Üst limit bir alındığında,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(x) dx &= \sum_{r=0}^{n+1} b_r T_r(1) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 T_1(1) + b_2 T_2(1) + \dots + b_{n+1} T_{n+1}(1) \\ &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^n b_{n+1} + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n+1} \\ &= 2(b_1 + b_3 + b_5 + \dots) \end{aligned} \quad (0.150)$$

ve burada (2.79) uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &= 2 \left(\frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2 \cdot 3} a_2 - \frac{1}{2 \cdot 3} a_4 + \frac{1}{2 \cdot 5} a_4 - \frac{1}{2 \cdot 5} a_6 + \dots + \frac{1}{2 \cdot (2k+1)} (a_{2k} - a_{2k+2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2 \cdot (2k+3)} (a_{2k+2} - a_{2k+4}) + \dots \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} a_0 - \left(\frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) a_2 - \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5} \right) a_4 - \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{2 \cdot 7} \right) a_6 - \dots \right) \end{aligned} \quad (0.151)$$

sonuç olarak

$$\int_{-1}^1 p(x)dx = 2 \left[\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{1 \cdot 3}a_2 - \frac{1}{3 \cdot 5}a_4 - \frac{1}{5 \cdot 7}a_6 - \dots - \frac{1}{(2k-1) \cdot (2k+1)}a_{2k} - \dots \right] \quad (0.152)$$

$$\int_{-1}^1 p(x)dx = a_0 - \sum_{r=2}^n \left(\frac{1+(-1)^r}{r^2-1} \right) a_r \quad (0.153)$$

elde edilir.

$-0 \leq x \leq 1$ aralığı için; (1.37) yardımıyla işlem yapılarak,

$$\begin{aligned} \int T_r^*(x)dx &= \int T_r(2x-1)dx = \int \cos r \left(\underbrace{\arccos(2x-1)}_{=u} \right) dx \\ [u &= \arccos(2x-1) \Rightarrow \cos u = 2x-1 \Rightarrow -\sin u du = 2dx] \\ &= -\frac{1}{2} \int \cos(ru) \sin u du = -\frac{1}{4} \int \{ \sin(r+1)u - \sin(r-1)u \} du \\ &= -\frac{1}{4} \left(-\frac{\cos(r+1)u}{r+1} + \frac{\cos(r-1)u}{r-1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+1} \cos[(r+1)\arccos(2x-1)] - \frac{1}{r-1} \cos[(r-1)\arccos(2x-1)] \right) \end{aligned} \quad (0.154)$$

sonucunda

$$\int T_r^*(x)dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}^*(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}^*(x) \right) \quad (0.155)$$

ifadesine ulaşılır. Bununla birlikte,

$$\int T_0^*(x)dx = \int T_0(2x-1)dx = \int 1dx = x = \frac{1}{2} (T_1^*(x) + T_0^*(x)) \quad (0.156)$$

$$\begin{aligned} \int T_1^*(x)dx &= \int T_1(2x-1)dx = \int (2x-1)dx = x^2 - x \\ &= \frac{1}{8} (T_2^*(x) + 4T_1^*(x) + 3T_0^*(x)) - \frac{1}{2} (T_1^*(x) + T_0^*(x)) \\ \int T_1^*(x)dx &= \frac{1}{8} (T_2^*(x) - T_0^*(x)) \end{aligned} \quad (0.157)$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen integral ifadelerinden faydalanarak Chebyshev serisi ile verilen

$p(x) = \sum_{r=0}^n a_r T_r^*(x)$ polinomunun belirsiz integrali ise,

$$\int_0^x p(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{r=0}^n {}'a_r T_r^*(x) \right) dx = \sum_{r=0}^n {}' \int_0^x a_r T_r^*(x) dx \quad (0.158)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x p(x)dx &= \sum_{r=2}^n \left[a_r \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}^*(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}^*(x) \right) \right]_0^x \\ &+ \left[a_1 \frac{1}{8} (T_2^*(x) - T_0^*(x)) + \frac{1}{2} a_0 \frac{1}{2} (T_1^*(x) + T_0^*(x)) \right]_0^x \end{aligned} \quad (0.159)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \sum_{r=3}^{n+1} \frac{a_{r-1}}{r} T_r^*(x) - \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{a_{r+1}}{r} T_r^*(x) + \frac{a_1}{8} (T_2^*(x) - T_0^*(x)) + \frac{1}{4} a_0 (T_1^*(x) + T_0^*(x)) \right)_0^x \quad (0.160)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{r=3}^{n-1} \underbrace{\frac{1}{4r} (a_{r-1} - a_{r+1}) T_r^*(x)}_{b_r} + \underbrace{\frac{1}{4} \frac{a_{n-1}}{n} T_n^*(x)}_{b_n} + \underbrace{\frac{1}{4} \frac{a_n}{n+1} T_{n+1}^*(x)}_{b_{n+1}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} a_2 T_1^*(x) - \frac{1}{4} \frac{a_3}{2} T_2^*(x) + \frac{a_1}{8} T_2^*(x) - \frac{a_1}{8} T_0^*(x) + \frac{1}{4} a_0 T_1^*(x) + \frac{1}{4} a_0 T_0^*(x) \right)_0^x \end{aligned} \quad (0.161)$$

$$= \left(\sum_{r=3}^{n+1} \underbrace{b_r T_r^*(x)}_{b_2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \underbrace{(a_1 - a_3) T_2^*(x)}_{b_2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1} \underbrace{(a_0 - a_2) T_1^*(x)}_{b_1} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{4} \right) T_0^*(x)}_{b_0} \right)_0^x$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$\int_0^x p(x)dx = \sum_{r=0}^{n+1} {}'b_r T_r^*(x) - \sum_{r=0}^{n+1} {}'b_r T_r^*(0) \quad (0.162)$$

bulunur. Burada

$$\sum_{r=0}^{n+1} {}'b_r T_r^*(0) = 0 \quad (0.163)$$

kabul edilirse

$$\int_0^x p(x)dx = \sum_{r=0}^{n+1} {}'b_r T_r^*(x) \quad (0.164)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{1}{4r} (a_{r-1} - a_{r+1}) \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \\ b_n &= \frac{a_{n-1}}{4n} \quad b_{n+1} = \frac{a_n}{4(n+1)} \end{aligned} \quad (0.165)$$

ve (2.94) şartından;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}b_0T_0^*(0) + b_1T_1^*(0) + b_2T_2^*(0) + \dots + b_{n+1}T_{n+1}^*(0) &= 0 \\
\frac{1}{2}b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 + \dots + b_{n+1}(-1)^{n+1} &= 0 \\
\frac{1}{2}b_0 &= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^n b_{n+1}
\end{aligned} \tag{0.166}$$

b_n ' ler yerine a_n ' ler konarak ve T_n^* değerleri hesaplanarak;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}b_0 &= \frac{1}{4}(a_0 - a_2) - \frac{1}{4}\frac{1}{2}(a_1 - a_3) + \frac{1}{4}\frac{1}{3}(a_2 - a_4) + \dots \\
&+ \frac{1}{4(k-1)}(-1)^k(a_{k-2} - a_2) + \frac{1}{4k}(-1)^k(a_{k-1} - a_{k+1}) \\
&+ \frac{1}{4(k+2)}(-1)^{k+3}(a_{k+1} - a_{k+3}) + \dots + (-1)^n \frac{1}{4(n+1)}(a_n - a_{n+2}) \\
&= \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{8}a_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 1\right)a_2 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{(-1)^{k+2}}{k+2}\right)a_k \\
&+ \dots (-1)^n \frac{1}{4(n+1)}(a_n - a_{n+2}) \\
&= \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{8}a_1 + \dots + \frac{1}{4}\left(\frac{k-1-k-1}{k^2-1}\right)(-1)^k a_k + (-1)^n \frac{1}{4(n+1)}(a_n - a_{n+2})
\end{aligned} \tag{0.167}$$

elde edilir, n . terimde kesilen son hali,

$$\frac{1}{2}b_0 = \frac{1}{4}a_0 - \frac{1}{8}a_1 - \frac{1}{2}\sum_{r=2}^n \frac{(-1)^r}{r^2-1}a_r \tag{0.168}$$

şeklinde olur. Üst limit bir alındığında,

$$\left. \begin{aligned}
\int_0^1 p(x)dx &= \frac{1}{2}b_0T_0^*(1) + b_1T_1^*(1) + b_2T_2^*(1) + \dots + b_{n+1}T_{n+1}^*(1) \\
&= \frac{1}{2}b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n+1} \\
&= b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^n b_{n+1} + b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n+1} \\
&= 2(b_1 + b_3 + b_5 + \dots)
\end{aligned} \right\} \tag{0.169}$$

işlemlerinden görüleceği gibi,

$$\int_0^1 p(x)dx = 2(b_1 + b_3 + b_5 + \dots) = \frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{1 \cdot 3}a_2 - \frac{1}{3 \cdot 5}a_4 \dots \tag{0.170}$$

sonucuna varılır ki; **(2.84)'** ten farkı iki çarpanının burada olmamasıdır.

Bu integrasyon formülleri, bir Chebyshev serisi ile ifade edilebilecek herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun sonlu bir aralıkta belirli ya da belirsiz integralleri için Clenshaw ve Curtis [5] tarafından genel bir yöntem olarak önerilmiştir. Bu makalede örneğin Simpson ve Gauss yöntemleri gibi standart “quadrature” formülleri ile karşılaştırıldığında, verilen yöntemin garanti edilen doğruluk anlamında daha avantajlı olduğu belirtilmiştir. Gauss yönteminde farklı sayıda pivot noktalarının seçimiyle hesaplanan sonuçların tutarlılığı ile erişilen doğruluğu yorumlamak yaygındır ve yazarlar bu yöntemin tehlikelerini vurgulamışlardır. Örneğin,

$\int_{-1}^1 (0,92 \cosh x - \cos x) dx$ integralinin doğru değeri 0.479428226688 iken 0.5 aralıkla 0.47955506085 olarak; 0.25 aralıkla 0.47938010531 olarak hesaplanır.

(Bkz. EK B). Benzer şekilde $\int_{-1}^1 (x^4 + x^2 + 0.9)^{-1} dx$ integrali için üç ve dört noktalı

Gauss kuadratürü uygulandığında sırasıyla 1.585026 ve 1.585060 değerleri elde edilir ki, doğru sonuç 1.582233' tür. Bu nedenle, quadrature formülünün hata tahmini yerine, integrali alınan fonksiyon için Chebyshev serisinin yeterli sayıda terimi ile vermişler ve bu serilerin yakınsaklığının hızının çok daha güvenilir bir garanti sağladığını belirtmişlerdir.

Sonlu Chebyshev serilerinin terim terime integrasyonuna dönüldüğünde ise $T_r'(x)$ ' in

$$\begin{aligned} T_r'(x) &= (\cos r\theta)' = -r \sin r\theta \cdot \theta' = -r \sin r\theta \left(-\frac{1}{\sin \theta} \right) \\ &= r \frac{\sin r\theta}{\sin \theta} = r U_{r-1}(x) \end{aligned} \quad (0.171)$$

ile verilen türevinde görünen $U_{r-1}(x)$ fonksiyonu kullanılmayacak, ancak $T_r(x)$ ' in terimleri cinsinden $(n-1)$. derece polinomdan türetilmiş seri, yani

$$p'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r T_r'(x) \quad (0.172)$$

tercih edilecektir. **(2.103)** ifadesinde görünen C_r katsayıları $p(x) = \sum_{r=0}^n a_r T_r(x)$ ifadesinde görünen a_r katsayıları cinsinden hesaplanacaktır. Bu amaçla **(2.103)** integre edilir ve her $T_r(x)$ integrali için de **(2.1)** ve **(2.2)** ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int p'(x) dx &= \int \sum_{r=0}^{n-1} C_r T_r(x) dx \\
\Rightarrow p(x) &= \sum_{r=2}^{n-1} C_r \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r+1} T_{r+1}(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}(x) \right] \right) \\
&+ C_1 \frac{1}{4} (T_2(x) + T_0(x)) + \frac{1}{2} C_0 T_1(x) \\
\Rightarrow p(x) &= \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) = \frac{1}{4} C_1 T_0(x) + \frac{1}{2} C_0 T_1(x) + \frac{1}{4} C_1 T_2(x) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{n-1} C_r \left(\frac{T_{r+1}(x)}{r+1} - \frac{T_{r-1}(x)}{r-1} \right)
\end{aligned} \tag{0.173}$$

ve cebirsel işlemlere devam edilirse,

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{4} C_1 T_0(x) + \frac{1}{2} C_0 T_1(x) + \frac{1}{4} C_1 T_2(x) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r=3}^n C_{r-1} \frac{T_r(x)}{r} - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n-2} C_{r+1} \frac{T_r(x)}{r} \\
&= \frac{1}{4} C_1 T_0(x) + \frac{1}{2} C_0 T_1(x) + \frac{1}{4} C_1 T_2(x) + \sum_{r=3}^{n-2} \frac{1}{2r} (C_{r-1} - C_{r+1}) T_r(x) \\
&+ \frac{1}{2} C_{n-2} \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} + \frac{1}{2} C_{n-1} \frac{T_n(x)}{n} - \frac{1}{2} C_2 \frac{T_1(x)}{1} - \frac{1}{2} C_3 \frac{T_2(x)}{2} \\
&= \frac{1}{4} C_1 T_0(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} (C_0 - C_2) T_1(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (C_1 - C_3) T_2(x) \\
&+ \sum_{r=3}^{n-2} \frac{1}{2r} (C_{r-1} - C_{r+1}) T_r(x) + \frac{1}{2} C_{n-2} \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} + \frac{1}{2} C_{n-1} \frac{T_n(x)}{n} \\
&= \frac{1}{4} C_1 T_0(x) + \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{2r} (C_{r-1} - C_{r+1}) T_r(x) + \frac{1}{2} C_{n-2} \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} + \frac{1}{2} C_{n-1} \frac{T_n(x)}{n}
\end{aligned} \tag{0.174}$$

sonuç olarak

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0(x) + \frac{1}{2} C_0 T_1(x) + \frac{1}{4} C_1 T_2(x) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{n-1} C_r \left(\frac{T_{r+1}(x)}{r+1} - \frac{T_{r-1}(x)}{r-1} \right)
\end{aligned} \tag{0.175}$$

olur. İki tarafta katsayıların eşitlenmesiyle;

$$a_r = \frac{1}{2r}(C_{r-1} - C_{r+1}) \quad r = 1, 2, \dots, n-2$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)}C_{n-2} \quad a_n = \frac{1}{2n}C_{n-1}$$
(0.176)

elde edilir. Dolayısıyla (2.107) ilişkilerinde azalan r ' ler için C_r ' ler,

$$C_{r-1} = C_{r+1} + 2ra_r$$
(0.177)

ile hesaplanabilir ki, başlangıç koşulları (2.107)' in son iki ifadesidir, yani

$$C_{n-1} = 2na_n$$

$$C_{n-2} = 2(n-1)a_{n-1}$$

$$C_{n-3} = 2(n-2)a_{n-2} + C_{n-1} = 2(n-2)a_{n-2} + 2na_n$$

$$C_{n-4} = 2(n-3)a_{n-3} + C_{n-2} = 2(n-3)a_{n-3} + 2(n-1)a_{n-1}$$

$$C_{n-5} = 2(n-4)a_{n-4} + C_{n-3} = 2(n-4)a_{n-4} + 2(n-2)a_{n-2} + 2na_n$$

$$C_{n-6} = 2(n-5)a_{n-5} + C_{n-4} = 2(n-5)a_{n-5} + 2(n-3)a_{n-3} + 2(n-1)a_{n-1}$$

$$\vdots$$
(0.178)

$$C_1 = 4a_2 + 8a_4 + 12a_6 + 16a_8 + \dots$$

$$C_0 = 2a_1 + 6a_3 + 10a_5 + 14a_7 + \dots$$
(0.179)

bulunur ki, burada her serinin son terimi a_n veya a_{n-1} ' dir. $p(x) = \sum_{r=0}^n a_n T_r^*(x)$ ' in türevi için benzer işlemler yapılarak ve (2.86) ilişkisinden faydalanılarak, (2.109) rekürans ilişkisinin $C_{r-1} = C_{r+1} + 4ra_r$ şeklinde olduğu şu şekilde görülür:

$$p'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r T_r^*(x)$$

$$\int p'(x) dx = \int \sum_{r=0}^{n-1} C_r T_r^*(x)$$

$$p(x) = \sum_{r=2}^{n-1} C_r \left(\frac{1}{4} \left[\frac{1}{r+1} T_{r+1}^*(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}^*(x) \right] \right)$$

$$+ C_1 \frac{1}{8} (T_2^*(x) - T_0^*(x)) + \frac{1}{2} C_0 \frac{1}{2} (T_1^*(x) + T_0^*(x))$$
(0.180)

ifadesinde cebirsel işlemlerle

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{r=0}^n 'a_r T_r^*(x) = \left(\frac{1}{4} C_0 - \frac{1}{8} C_1 \right) T_0^*(x) + \frac{1}{4} C_0 T_1^*(x) \\
&+ \frac{1}{8} C_1 T_2^*(x) + \frac{1}{4} \sum_{r=2}^{n-1} C_r \left(\frac{T_{r+1}^*(x)}{r+1} - \frac{T_{r-1}^*(x)}{r-1} \right) \\
&= \left(\frac{1}{4} C_0 - \frac{1}{8} C_1 \right) T_0^*(x) + \frac{1}{4} C_0 T_1^*(x) + \frac{1}{8} C_1 T_2^*(x) \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{r=3}^n C_{r-1} \frac{T_r^*(x)}{r} - \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{n-2} C_{r+1} \frac{T_r^*(x)}{r} \\
&= \left(\frac{1}{4} C_0 - \frac{1}{8} C_1 \right) T_0^*(x) + \frac{1}{4} C_0 T_1^*(x) + \frac{1}{8} C_1 T_2^*(x) \\
&+ \sum_{r=3}^{n-2} \frac{1}{4r} (C_{r-1} - C_{r+1}) T_r^*(x) + \frac{1}{4} C_{n-2} \frac{T_{n-1}^*(x)}{n-1} + \frac{1}{4} C_{n-1} \frac{T_n^*(x)}{n} \\
&- \frac{1}{4} C_2 T_1^*(x) - \frac{1}{4} C_3 \frac{T_2^*(x)}{2} \\
&= \left(\frac{1}{4} C_0 - \frac{1}{8} C_1 \right) T_0^*(x) + \frac{1}{4} (C_0 - C_2) T_1^*(x) + \frac{1}{4} \frac{1}{2} (C_1 - C_3) T_2^*(x) \\
&+ \sum_{r=3}^{n-2} \frac{1}{4r} (C_{r-1} - C_{r+1}) T_r^*(x) + \frac{1}{4} C_{n-2} \frac{T_{n-1}^*(x)}{n-1} + \frac{1}{4} C_{n-1} \frac{T_n^*(x)}{n}
\end{aligned} \tag{0.181}$$

sonuç olarak

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{r=0}^n 'a_r T_r^*(x) = \left(\frac{1}{4} C_0 - \frac{1}{8} C_1 \right) T_0^*(x) \\
&+ \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{4r} (C_{r-1} - C_{r+1}) T_r^*(x) + \frac{1}{4} C_{n-2} \frac{T_{n-1}^*(x)}{n-1} + \frac{1}{4} C_{n-1} \frac{T_n^*(x)}{n}
\end{aligned} \tag{0.182}$$

ifadesine ulaşılır ve benzer şekilde katsayıların eşitlenmesiyle,

$$\begin{aligned}
a_r &= \frac{1}{4r} (C_{r-1} - C_{r+1}) \quad r = 1, 2, \dots, n-2 \\
a_{n-1} &= \frac{1}{4(n-1)} C_{n-2} \quad a_n = \frac{1}{4n} C_{n-1}
\end{aligned} \tag{0.183}$$

elde edilir. Böylece $C_{r-1} = C_{r+1} + 4ra_r$ ifadesi gösterilmiş olur.

Bu sonucu genelleştirmek için (2.103) ' e benzer şekilde,

$$p^{(s)}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} 'D_r^{(s)} T_r(x) \tag{0.184}$$

tanımı yapılırsa, $s = 0$ için (2.115) tanımı,

$$f(x) = \frac{1}{2}D_0 + D_1T_1(x) + D_2T_2(x) + \dots + D_{n-1}T_{n-1}(x) + D_nT_n(x) + D_{n+1}T_{n+1}(x) + \dots \quad (0.185)$$

ve $s=1$ için

$$f'(x) = \frac{1}{2}D_0^{(1)} + D_1^{(1)}T_1(x) + \dots + D_{n-1}^{(1)}T_{n-1}(x) + D_n^{(1)}T_n(x) + D_{n+1}^{(1)}T_{n+1}(x) + \dots \quad (0.186)$$

olarak elde edilir. Chebyshev polinomlarının türevleri arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} T_0(x) &= T_1'(x) \\ T_1(x) &= \frac{1}{4}T_2'(x) \\ T_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}'(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}'(x)}{n-1} \right) \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (0.187)$$

ve

$$(1-x^2)T_n'(x) = n[xT_n(x) - T_{n+1}(x)] = n[T_{n-1}(x) - xT_n(x)] \quad (0.188)$$

bağıntıları ile verilir.

(2.117) ifadesi (2.118) yardımı ile integre edilirse

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\bar{D}_0 + \frac{1}{2}D_0^{(1)}T_1(x) + \frac{1}{4}D_1^{(1)}T_2(x) + \dots + \frac{1}{2}D_{n-1}^{(1)} \left(\frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_{n-2}(x)}{n-2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}D_n^{(1)} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right) + \frac{1}{2}D_{n+1}^{(1)} \left(\frac{T_{n+2}(x)}{n+2} - \frac{T_n(x)}{n} \right) + \dots \end{aligned} \quad (0.189)$$

elde edilir. (2.120) ile (2.116) denklemleri eşitlenirse

$$2rD_r^{(s)} = D_{r-1}^{(s+1)} - D_{r+1}^{(s+1)} \quad r \geq 1 \quad (0.190)$$

eşitliği elde edilir. $s=0$ için (2.121) ifadesinin

$$2rD_r = D_{r-1}' - D_{r+1}' \quad (0.191)$$

olduğu görülür.

Bu genel ifadede $D_r^{(0)} = a_r$, 'ye ve $D_r^{(1)} = C_r$ karşılık gelmektedir. Bu sonuçlar yardımıyla herhangi bir $g(x)$ ifadesinde $T_r(x)$ ' in katsayıları

$$\begin{aligned} D_r(g(x)), \quad r > 0 \\ D_r(g(x))/2, \quad r = 0 \end{aligned} \quad (0.192)$$

olarak gösterilirse, $x^p f^{(s)}$ terimi içinde $T_r(x)$ in katsayısı

$$D_r(x^m f^{(s)}) = \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} C_{|r-m+2j|}^{(s)} \quad (0.193)$$

şeklinde verilebileceği görülür.

Burada türevin tüm aşamalarında olduğu gibi verilen fonksiyonun a_r katsayılarında mümkün yuvarlama hatalarının büyümesi not edilmelidir. Daha önemlisi, belki de sonsuz Chebyshev serilerinin terim terime türevi için (2.2) formülünün sonsuz seri olmasıdır. Gerçekte $-1 \leq x \leq 1$ aralığı için

$$\begin{aligned} C_{2r} &= \sum_{s=r}^{\infty} 2(2r+1)a_{2s+1} \\ C_{2r+1} &= \sum_{s=r}^{\infty} 2(2s+2)a_{2s+2}, \quad r = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (0.194)$$

genel ifadelerinin yakınsak olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda bile, yakınsaklık yavaş ve türevde kesme hataları oldukça çok olabilir. Öte yandan, integrasyon için kesme hatası n . mertebeden bir çarpandan küçüktür. Hem hesaplama zamanını azaltma, hem de hatanın üst sınırının doğru tahmininde Chebyshev fonksiyonlarının genelde hızlı yakınsaması önemli avantajlara sahiptir.

Açık formda verilmiş fonksiyonlar için Chebyshev serisi yaklaşımını elde etmek için; $f(x)$ $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı ise, Chebyshev serisi,

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) \quad (0.195)$$

ile verilir. Her iki taraf $w(x)T_s(x)$ ile çarpılır ve integre edilirse;

$$\int_{-1}^1 w(x) f(x) T_s(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int_{-1}^1 w(x) T_r(x) T_s(x) dx \quad (0.196)$$

burada $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ dir ve (1.17) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
a_r \frac{\pi}{2} &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) T_r(x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} f(x) T_r(x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos r\theta d\theta
\end{aligned} \tag{0.197}$$

elde edilir. Sayısal uygulamalarda uygun bir terim sayısında (2.126) serisi kesilerek,

$$p_n(x) = \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) \tag{0.198}$$

polinomuna ulaşılır. Burada hata

$$\begin{aligned}
e_n(x) &= f(x) - p_n(x) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) = \sum_{r=n+1}^{\infty} a_r T_r(x)
\end{aligned} \tag{0.199}$$

dir ve (1.29) ifadesi kullanılarak

$$|e_n(x)| \leq \sum_{r=n+1}^{\infty} |a_r| \tag{0.200}$$

eşitsizliği ortaya çıkar. (2.128) ifadesi eğer integrasyonlar analitik olarak basit sonuç vermezse uygulanabilir değildir. Bu nedenle aşağıdaki interpolasyon formüllerinden biri kullanılabilir;

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{r=0}^n b_r T_r(x) \\
b_r &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_r(x_k) \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n}
\end{aligned} \tag{0.201}$$

ve

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{r=0}^n C_r T_r(x) \\
C_r &= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_r(x_k) \quad x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}.
\end{aligned} \tag{0.202}$$

Bu polinomlar $f(x)$ fonksiyonu ile x_k noktalarında çakışır, ancak diğer noktalarda farklılıkların derecesi önemlidir.

Son olarak sonsuz serinin a_r katsayıları ile sonlu yaklaşımların b_r ve C_r katsayıları arasındaki ilişki bulunmalıdır, (2.126) ve (2.132) kullanılarak,

$$b_r = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_r(x_k) \quad (0.203)$$

$$b_r = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \left(T_r(x_k) \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x_k) \right), \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$T_r(x_k) = \cos r \arccos x_k = \cos r \frac{k\pi}{n} = \cos \left((2pn \pm r) \frac{k\pi}{n} \right) = T_{(2pn \pm r)}(x_k) \quad (0.204)$$

ilişkisi sağlanır. (2.134) ifadesini basitleştirmek için,

$$1 + 2 \cos x + 2 \cos 2x + \dots + 2 \cos nx = -1 + 2[1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx] \quad (0.205)$$

ifadesinde

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{nix} = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} \quad (0.206)$$

toplamı

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \quad (0.207)$$

ve açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} & 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) \\ &= 1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx} = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{1 - (\cos(n+1)x + i \sin(n+1)x)}{1 - (\cos x + i \sin x)} \\ &= \frac{((1 - \cos(n+1)x) + i \sin(n+1)x)((1 - \cos x) - i \sin x)}{((1 - \cos x) + i \sin x)((1 - \cos x) - i \sin x)} \quad (0.208) \\ &= \frac{1}{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} \left\{ ((1 - \cos(n+1)x)(1 - \cos x) + \sin(n+1)x \sin x) + \right. \\ & \quad \left. + i(-(1 - \cos(n+1)x) \sin x + \sin(n+1)x(1 - \cos x)) \right\} \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos x)} \left\{ 1 - \cos x - \cos(n+1)x + \cos x \cos(n+1)x + \sin x \sin(n+1)x \right. \\ & \quad \left. + i(-\sin x + \sin x \cos(n+1)x + \sin(n+1)x - \sin(n+1) \cos x) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(1-\cos x)} \{1 - \cos x - \cos(n+1)x + \cos(x - (n+1)x) \\
&\quad + i(-\sin x + \sin(n+1)x + \sin(x - (n+1)x))\} \\
&= \frac{\{1 - \cos x - \cos(n+1)x + \cos nx + i(-\sin x + \sin(n+1)x - \sin nx)\}}{2(1-\cos x)}
\end{aligned}$$

elde edilir, bu ifade ile (2.139)' in solunun reel kısımları eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx &= \frac{1 - \cos x - \cos(n+1)x + \cos nx}{2(1-\cos x)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{1-\cos x} \right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x \sin\left(\frac{-x}{2}\right)}{1-\cos x} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)x \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\left(\sin nx \cos \frac{x}{2} + \cos nx \sin \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} \\
\Rightarrow \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x + \cos nx &= \frac{1}{2} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos nx \tag{0.209}
\end{aligned}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \frac{1}{2} \cos nx = \frac{1}{2} \sin nx \cot \frac{x}{2} \tag{0.210}$$

eşitliğine varılır. Dikkat edilirse burada $x = \frac{k\pi}{n}$ alındığında her k tamsayısı için sağ taraf sıfır olur yani;

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \frac{1}{2} \cos nx = \frac{1}{2} \sin nx \cot \frac{x}{2} \tag{0.211}$$

ve $x_k = \frac{k\pi}{n}$ için,

$$S_n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=0. \quad (0.212)$$

Ayrıca,

$$\sum_{k=0}^n {}'' \cos(rx_k) \cos(sx_k) = \sum_{k=0}^n {}'' \frac{1}{2} \left(\cos[(r+s)x_k] + \cos[(r-s)x_k] \right) \quad (0.213)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n {}'' \cos(rx_k) \cos(sx_k) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n {}'' \left(\cos[(r+s)x_k] \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n {}'' \left(\cos[(r-s)x_k] \right) \\ &= \frac{1}{2} S_n\left(\frac{(r+s)k\pi}{n}\right) + \frac{1}{2} S_n\left(\frac{(r-s)k\pi}{n}\right) = 0 \quad (r \neq s) \end{aligned} \quad (0.214)$$

bulunur, yani $\psi_r(\theta) = \cos r\theta$ tanımlanırsa, (2.144)' nin solundan,

$$\sum_{k=0}^n {}'' \psi_r(\theta_k) \psi_s(\theta_k) = 0 \quad \theta_k = \frac{k\pi}{n} \quad r \neq s \quad (0.215)$$

ortogonallik şartı elde edilir. Burada '' işareti toplamda ilk ve son terimlerin katsayılarının $\frac{1}{2}$ ile çarpılacağını ifade etmektedir. Ayrıca $r = s \neq 0, n$ için (2.145) ve (2.142)' in solu birleştirilirse,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n {}'' \psi_r^2(\theta_k) &= \frac{n}{2} \quad r = s \neq 0, n \\ \sum_{k=0}^n {}'' \psi_r^2(\theta_k) &= n \quad r = 0, n \end{aligned} \quad (0.216)$$

sonucuna varılır.

(2.134) ifadesinde elde edilen bu ortogonallik şartları ve (2.135) kullanılarak

$$\begin{aligned} b_r &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n {}'' \left(T_r(x_k) \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x_k) \right) \\ &= \frac{2}{n} \left[\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(\sum_{k=0}^n {}'' T_r(x_k) T_r(x_k) \right) \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left(\sum_{k=0}^n {}'' T_r(x_k) T_{2pn \pm r}(x_k) \right) \right] \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (0.217)$$

bulunur. Burada $\bar{r}$ ' nin ∞ ' a kadar gittiği ve her $p = 1, 2, \dots$ için sonucun tekrarlanacağına ve $\bar{r} \neq 2pn \pm r$ iken sonucun sıfır olacağına dikkat edilirse,

$$b_r = \frac{2}{n} \left[\sum_{r=0}^{\infty} a_r \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & \bar{r} \neq 0, n \\ n & \bar{r} = 0, n \end{pmatrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \bar{r} = 2pn \pm r \end{matrix} \right\} = \frac{2}{n} \left(\frac{1}{2} a_r n + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n}{2} a_{2pn \pm r} \right) \quad (0.218)$$

yani

$$b_r = a_r + (a_{2n-r} + a_{2n+r} + a_{4n-r} + a_{4n+r} + \dots) \quad (0.219)$$

elde edilir ki, bu ifade her r için geçerlidir. Benzer işlemler,

$$\begin{aligned} T_r(x_k) &= \cos\left(\frac{2k+1}{n+1} \frac{r\pi}{2}\right) = (-1)^p \cos\left[2p(n+1) \pm r \left(\frac{2k+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= (-1)^p T_{2p(n+1) \pm r}(x_k) \end{aligned} \quad (0.220)$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$c_r = a_r - (a_{2n+2-r} + a_{2n+2+r}) + (a_{4n+4-r} + a_{4n+4+r}) - \dots \quad (0.221)$$

ile bulunabilir. Eğer (2.126) ifadesinde terim sayısı (2.129) fonksiyonuna yaklaşım için yeterli ise, $r > n$ için a_r katsayıları ihmal edilebilir. Bu durum b_r ve c_r katsayılarının a_r katsayılarından ihmal edilebilir ölçüde farklı olduğunu gösterir ki, bu katsayılar (2.132) ve (2.133) ifadelerinden rahatlıkla hesaplanabilir.

Daha genel olarak, hata ifadeleri için;

$$\begin{aligned} f(x) - \sum_{r=0}^n b_r T_r(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^n b_r T_r(x) \\ &= \sum_{r=n+1}^{\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (a_{2pn-r} + a_{2pn+r}) \right\} T_r(x) - \sum_{p=1}^{\infty} a_{2pn+n} T_n(x) \end{aligned} \quad (0.222)$$

ve

$$f(x) - \sum_{r=0}^n c_r T_r(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^n b_r T_r(x) \quad (0.223)$$

$$= \sum_{r=n+1}^{\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p (a_{2p(n+1)-r} + a_{2p(n+1)+r}) T_r(x) \right\} \quad (0.224)$$

eşitliğine ulaşılır, buradan her iki tarafın mutlak değeri alınıp sağ taraf daha da büyütülürse,

$$\left| f(x) - \sum_{r=0}^n b_r T_r(x) \right| \leq 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} |a_r| \quad (0.225)$$

ve

$$\left| f(x) - \sum_{r=0}^n C_r T_r(x) \right| \leq 2 \sum_{r=n+1}^{\infty} |a_r| \quad (0.226)$$

bulunur ki, bu ifade (2.132) ve (2.133) ifadeleri ile hesap sonucu, hatanın asla (2.126)' nin hatasının iki katından büyük olamayacağını gösterir.

Sonsuz serinin yakınsaklığının $a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$ terimlerinin ihmal edilebileceği kadar hızlı olduğu durumda, (2.150) ifadesinden $r = n-1$ durumu hariç b_r ' nin a_r ' ye çok yakın olduğu görülür ve $r = n-1$ için

$$b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n+1} \quad (0.227)$$

elde edilir.

(2.153) ifadesinde $a_{n+1} \{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)\}$ ifadesi maksimum $2|a_{n+1}|$ değeri ile hatayı baskın kılar. C_r katsayılarından ise hiçbir a_r ' lerden çok farklı değildir ve maksimum fark $r = n$ ' de

$$C_n = a_n - a_{n+2} \quad (0.228)$$

olarak gözlenir. (2.154) ifadesi maksimum değeri $|a_{n+1}|$ kadar küçük olan, $a_{n+1} T_{n+1}(x)$ ile domine edilir.

Bu sonuçları bir örnek üzerinde açıklamak için e^x ' in $(-1 \leq x \leq 1)$ bazı açılımları hesaplanacaktır. Burada (2.126) Chebyshev serileri için katsayılar, (2.128) yardımıyla,

$$a_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\cos \theta} \cos r \theta d\theta = 2I_r(1) \quad (0.229)$$

$$a_0 = 2.5321317555, \quad a_1 = 1.1303182079, \dots$$

şeklinde (Bkz. EK C) hesaplanarak,

$$\begin{aligned} e^x &= 1.266065878T_0 + 1.130318208T_1 + 0.271495T_2 \\ &+ 0.04433684T_3 + 0.00547424T_4 + 0.00054292T_5 \\ &+ 0.000044977322T_6 + 0.000003198436T_7 \end{aligned} \quad (0.230)$$

yazılabilir. (2.132) ifadesinde $n = 4$ alınarak hesaplandığında,

$$b_r = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_r(x_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 e^{\cos \frac{k\pi}{4}} T_r \left(\cos \frac{k\pi}{4} \right) \left[x_k = \cos \frac{k\pi}{n} \right] \quad (0.231)$$

ve $b_0 = 2.532132154$, $b_1 = 1.130321417, \dots$ elde edilir.

(2.132)' den

$$\begin{aligned} e^x &= 1.266066077T_0 + 1.130321417T_1 + 0.27154031T_2 \\ &+ 0.04487977T_3 + 0.00547424T_4 + 0.00054292T_5 \\ &+ 0.000044977322T_6 + 0.000003198436T_7 \end{aligned} \quad (0.232)$$

bulunur. (2.133) ifadesiyle $n = 4$ alınarak hesaplandığında ise;

$$C_r = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_r(x_k) \quad x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \quad (0.233)$$

ve sonuç olarak $C_0 = 2.532131754$, $C_1 = 1.1303181969, \dots$ olarak hesaplanır. Bu sonuçlar (2.133) ifadesinde kullanıldığında

$$\begin{aligned} e^x &= 1.266065877T_0 + 1.130318197T_1 + 0.271495140T_2 \\ &+ 0.0443365T_3 + 0.00542926T_4 \end{aligned} \quad (0.234)$$

elde edilir. b_r katsayıları (2.150) ifadesinden hesaplandığı takdirde,

$$\begin{aligned} b_r &= a_r + (a_{2n-r} + a_{2n+r} + a_{4n-r} + a_{4n+r} + \dots) \\ b_0 &= 2.532132153 \quad b_1 = 1.1303214173 \quad b_2 = 0.271540257 \\ b_3 &= 0.0448797761 \quad b_4 = 0.0109332 \quad b_5 = 0.0448797761 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (0.235)$$

ve C_r katsayıları (2.152)' tan,

$$\begin{aligned} c_r &= a_r - (a_{2n+2-r} + a_{2n+2+r}) + (a_{4n+4-r} + a_{4n+4+r}) - \dots \\ C_0 &= 2.53213187 \quad C_1 = 1.130318197 \quad C_2 = 0.271510399 \\ C_3 &= 0.0443336514121 \quad C_4 = 0.0054292311 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (0.236)$$

olarak hesaplanır. Buradaki tüm hesaplamalar EK C' de verilmiştir. Bu yaklaşımlarla hatalar (2.153) ve (2.154)' den,

$$\begin{aligned}
e^x - \sum_{r=0}^4 {}''b_r T_r(x) &= a_5 T_5 - a_5 T_3 + a_6 T_6 - a_6 T_2 + a_7 T_7 - a_7 T_1 \\
&= 10^{-6} [543(T_5 - T_3) + 45(T_6 - T_2) + 3(T_7 - T_1)] \\
e^x - \sum_{r=0}^4 {}'C_r T_r(x) &= a_5 T_5 + a_6 T_6 - (-1)^1 a_6 T_4 \\
&= 10^{-6} [543T_5 + 45(T_6 + T_4) + 3(T_7 + T_3)]
\end{aligned} \tag{0.237}$$

ve hesaplanmış maksimum değerleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
2|a_{n+1}| &= 2|a_5| = 2 \cdot 0,000543 = 0,001086 \\
|a_{n+1}| &= |a_5| = 0,000543
\end{aligned} \tag{0.238}$$

olarak bulunur. (2.132) ve (2.133) ifadelerinde $n = 1$ alınarak hesap yapılırsa;

$$\begin{aligned}
e^x &\sim 1.543080635T_0 + 1.489205938T_1 \\
e^x &\sim 1.266065877T_0 + 1.085441641T_1
\end{aligned} \tag{0.239}$$

ve maksimum hataları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
2|a_2| &= 0.542991 \\
|a_2| &= 0.271495
\end{aligned} \tag{0.240}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde $\sinh x$ ve $\cosh x$ için e^x açılımlarında sırasıyla tek ve çift terimler çıkarılarak bulunabilir.

Pratikte, maksimum hatalar arasındaki fark çok küçüktür ve (2.132) ifadesinde noktaların çakışmasının pratik avantajı en önemli sebeptir. İstenilen doğruluğun sağlanması için n değeri sonlu yaklaşımda katsayıların yakınsaklık oranı gözlenerek deneysel olarak belirlenebilir. Örneğin, (2.163) ve (2.165)' de ardışık katsayıların oranı birinciden sonra, yaklaşık olarak 4, 6, 8 seviyesindedir ve bir sonraki terimde oranın yaklaşık 16 kat olacağı beklenebilir. Kontrol, daha büyük n değerleri için yapılabilir.

3. POLİNOMLAR VE KUVVET SERİLERİ, EKONOMİKLEŞTİRME

n . derece bir polinom için (2.126) Chebyshev serisi elbette sonlu bir toplamdır ve (2.129) ifadesinde kesme ile elde edilen ve (2.132) ve (2.133) ile verilen eşleştirme yöntemlerinin sonuçları ile özdeşdir. Katsayıların hesaplanmasında pratik olarak

hiçbir yöntem efektif değildir; $f(x) = \sum_{r=0}^n \alpha_r x^r$ için (2.126)' in kullanımı,

$$a_r = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos r\theta \left(\sum_{r=0}^n a_r \cos^r \theta \right) d\theta \quad (1.1)$$

ifadesinin hesabını gerektirir ki, $\cos r\theta$ ve $\cos s\theta$ fonksiyonlarının $(0, \pi)$ aralığında ortogonalliğinden ve

$$\begin{aligned} \cos^{2s} \theta &= \frac{1}{2^{2s-1}} \sum_{r=0}^{s-1} \binom{2s}{r} \cos(2s-2r)\theta + \frac{1}{2^{2s}} \frac{(2s)!}{(s!)^2} \\ \cos^{2s+1} \theta &= \frac{1}{2^{2s}} \sum_{r=0}^s \binom{2s+1}{r} \cos(2s-2r+1)\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

özdeşliklerinden uzun işlemlerle hesaplanabilir, b_r ve C_r katsayılarının (2.132) ve (2.133) denklemlerinden hesabı benzer şekilde uzun işlemler gerektirir. Gerçekte x^r kuvvetleri için Chebyshev polinomları $T_r(x)$ cinsinden açılımı (1.56) ifadesinden kolayca hesaplanabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 &= \frac{1}{2^{-1}} \left(\frac{1}{2} T_0(x) \right) - \frac{1}{2^0} (T_1(x)) \\ &+ \frac{1}{2^{2-1}} \left\{ T_2(x) + \binom{2}{1} \frac{1}{2} T_0(x) \right\} - \frac{1}{2^{3-1}} \left\{ T_3(x) + \binom{3}{1} T_1(x) \right\} \\ &+ \frac{1}{2^{4-1}} \left\{ T_4(x) + \binom{4}{1} T_2(x) + \binom{4}{2} \frac{1}{2} T_0(x) \right\} \\ &= T_0(x) - T_1(x) + \frac{1}{2} \{ T_0(x) + T_2(x) \} - \frac{1}{4} \{ 3T_1(x) + T_3(x) \} \\ &+ \frac{1}{8} \{ 3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x) \} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ve sonuç olarak

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{15}{8}T_0(x) - \frac{7}{4}T_1(x) + T_2(x) - \frac{1}{4}T_3(x) + \frac{1}{8}T_4(x) \quad (1.4)$$

yazılabilir, bu ifade $-1 \leq x \leq 1$ aralığında geçerlidir.

Chebyshev formu polinom formuna göre bazı avantajlara sahiptir. Örneğin (3.4)

ifadesi bize 4. derece bir polinoma maksimum hatası $\left|\frac{1}{8}\right|$ olan 3. derece ile yaklaşılabilirini söyler. Dahası, büyük katsayılı ancak değer kümesi küçük bir polinom için Chebyshev formu daha küçük katsayılı ve kesme hatasının daha küçük olduğu bir yapı verecektir. Örneğin;

$$(1 - x^2)^{10} = \dots = \frac{1}{524288}(92378T_0(x) + \dots) \quad (1.5)$$

elde edilir ki (Bkz. EK D), katsayılar çok daha küçüktür, hatta en büyüğü $\frac{167960}{524288} \approx 0.3$ mertebesinde. Dahası son 3 terimin alınmamasından kaynaklanan

hata $\frac{190}{524288} \approx 0.000362396$ ' dan büyük olmayacaktır.

Bu işlem Lanczos tarafından ekonomikleştirme olarak ifade edilir ve temel olarak sonsuz serilere sonlu Chebyshev serileri önermek amacıyla kullanılır.

Örneğin, e^x ' in Taylor açılımı $n = 6$ için yapılırsa,

$$e^x = \sum_{r=0}^n \frac{x^r}{r!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (1.6)$$

hata $\frac{e}{(6+1)!} \approx 0.0005$ olacaktır, Chebyshev formunda yazıldığında ise,

$$e^x = \sum_{r=0}^6 \frac{x^r}{r!} = 1.26606T_0 + 1.13021T_1 + \dots \quad (1.7)$$

bulunur ki, hata yine 0.0005 mertebesinde, ancak T_6 ' lı terim alınmazsa çok fazla bir ek hata gözlenmez. Hatta T_5 de alınmazsa hata 0.001 ' den fazla olmaz.

Bu yöntemin dezavantajı ekonomikleştirilmiş durumun en azından Taylor serisinin neden olduğu kadar hataya neden olacağı, yani serinin kesileceği özel noktaya karar

vermektedir. Taylor serisi hızlı yakınsarsa, hata küçük olabilir. Ancak burada önemli olan Taylor serisinin bu anlamda genelde kötü performans göstermesidir. Örneğin (3.7) ' te $n=6$ için kesme hatası 5.10^{-4} kadar büyükken, (2.163) ' de Chebyshev serilerinin kesme hatası 3.10^{-6} ' yı çok zor aşar. (2.163) ' nin ekonomikliği, (3.7) ' e göre çok daha değerlidir çünkü sadece daha küçük terimi yok etmesi nedeniyle değil, ayrıca burada başlangıç hatası da çok daha küçüktür.

Taylor serisi yavaş yakınsadığında, örneğin

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.8)$$

kesme hatasını küçük kılmak için çok sayıda terim gereklidir. Ekonomikleştirmeye uygun $\sum a_r T_r^*(x)$ serisi için çok sayıda Chebyshev terimi eklenebilir ancak küçük bir kazanç karşılığı, harcanan emek çok daha fazladır. Dahası Taylor serisi yakınsamayabilir, örneğin $(1+2x^2)^{-1}$ ' in açılımı

$$(1+2x^2)^{-1} = 1 - 2x^2 + (2x^2) + \dots \quad (1.9)$$

$|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ için yakınsamaz. Bu durumda 'Pade Yaklaşıtları' gibi yöntemler kullanılabilir.

Yukarıda verilen açıklama ve örneklere dayanarak, aşağıdaki genelleştirme yapılabilir:

Teorem 3.1: $\tilde{\Pi}_n(x)$ n . dereceden monik polinomlar kümesi olmak üzere $n \geq 1$ ve $\forall P_n(x) \in \tilde{\Pi}_n(x)$ için,

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \quad (1.10)$$

eşitliği ancak $P_n(x) = \tilde{T}_n(x)$ sağlanırsa sağlanır.

Teorem, $[-1,1]$ aralığında n . dereceden Monik Chebyshev Polinomlarının mutlak değerce maksimum değerinin $\frac{1}{2^{n-1}}$ olduğunu ve bu maksimum değerin aynı aralıkta diğer tüm n . derece monik polinomların mutlak değerce maksimum değerinden küçük olduğunu ifade eder.

İspat: $P_n(x) \in \widetilde{\Pi}_n(x)$ ve teoremin tersine

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \leq \max_{x \in [-1,1]} |\widetilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (1.11)$$

olduğunu kabul edelim. $Q(x) \equiv \widetilde{T}_n(x) - P_n(x)$ olarak tanımlanırsa, $\widetilde{T}_n(x)$ ve $P_n(x)$ monik polinomlar olduğuna göre $Q(x)$ 'in en fazla $(n-1)$. derecede bir polinom olduğu görülür, oysa

$$Q(\overline{x_k}') = \widetilde{T}_n(\overline{x_k}') - P_n(\overline{x_k}') = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P_n(\overline{x_k}') \quad (1.12)$$

elde edilir.

(3.11) varsayımından $\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan $k = 0, 1, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} Q(\overline{x_k}') &\leq 0, & k = 2n+1 \\ Q(\overline{x_k}') &\geq 0, & k = 2n \end{aligned} \quad (1.13)$$

olduğu görülür. $Q(x)$ polinom olduğundan her yerde süreklidir, dolayısıyla $Q(x)$ 'in $\overline{x_i}'$ ile $\overline{x_{i+1}}'$ arasında en az bir tane sıfırı vardır, yani $\overline{x_0}' - \overline{x_1}'$ arasında 1. kök, $\overline{x_1}' - \overline{x_2}'$ arasında 2.kök, $\dots$ $\overline{x_{n-1}}' - \overline{x_n}'$ arasında n . kök olmak üzere toplamda $[-1,1]$ aralığında n tane kökü vardır. Oysa $Q(x)$, $(n-1)$.dereceden bir polinomdur, yani n tane kökü olamaz.

Ortaya çıkan çelişkinin nedeni (3.11) varsayımının yanlış olmasıdır, dolayısıyla (3.10) doğrudur.

Not 3.1 : Bu teorem $f(x)$ ile yaklaşım polinomu $p_n(x)$ arasında hatanın minimize edilmesinde kullanılabilir, yani $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $[-1,1]$ aralığında $n+1$ tane ayrık nokta, $f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$ ve $\xi(x)$ $(-1,1)$ aralığında bir sayı olmak üzere, Lagrange polinomu $P_n(x)$ ise yapılan hatayı, yani

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad (1.14)$$

minimize etmek için ξ üzerinde hiçbir kontrol konulmadığına göre, hatanın minimize edilmesi için $|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)|$ kontrol edilmelidir. Ayrıca $(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$ ifadesinin $(n+1)$. dereceden bir polinom olduğuna dikkat edilirse, **Teorem 3.1** bu polinomun ancak ve ancak $\tilde{T}_{n+1}(x)$ olarak seçilirse mutlak değerce maksimumunun minimum olacağını söylüyordu yani,

$$(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \equiv \tilde{T}_{n+1}(x) \quad (1.15)$$

olarak seçilmelidir. Dolayısıyla, $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları $\tilde{T}_{n+1}(x)$ 'in kökleri olmalıdır. $\tilde{T}_n(x)$ 'in kökleri de **Not 1.1** uyarınca (1.19) ile şu şekilde verilir:

$$\overline{x_k} = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k=1, 2, ..., n \quad (1.16)$$

Bu ifade $k=0$ 'dan başlar hale getirilirse

$$\overline{x_k} = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n} \quad k=0, 1, 2, ..., n-1 \quad (1.17)$$

elde edilir. (3.16) yerine (3.17) kullanılmasının nedeni, (3.15)' de ilk kökün x_0 olmasından dolayı $x_0 = \overline{x_0}$, $x_1 = \overline{x_1}, ...$ eşitliğini sağlamaktır. $\tilde{T}_n(x)$ 'in kökleri (3.17) ile verilirse $\tilde{T}_{n+1}(x)$ 'in kökleri;

$$\overline{x_k} = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{n+1} \quad k=0, 1, 2, ..., n \quad (1.18)$$

ile verilir. Dolayısıyla (3.15) ifadesi (3.18) köklerine sahip olmalıdır yani,

$$(x-\overline{x_0})(x-\overline{x_1})(x-\overline{x_2})...(x-\overline{x_n}) \quad (1.19)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_{n+1}(x)| = \frac{1}{2^n} \quad (1.20)$$

çıkarımı yapılabilir.

Sonuç 3.1: $P_n(x)$ n . derece yaklaşım polinomu ve noktaları $\tilde{T}_{n+1}(x)$ 'in kökleri ise,

$$\max_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{2^n (n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \forall f \in C^{n+1}[-1,1] \quad (1.21)$$

Bu teknik sadece $[-1,1]$ aralığında değil, herhangi bir $[a,b]$ aralığına

$$\bar{x} = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b] \quad (1.22)$$

dönüşümü uygulanarak genişletilebilir. Lagrange-Chebyshev yöntemi ile interpolasyonu ve bu yaklaşımın Lagrange interpolasyonuna göre daha avantajlı olduğunu göstermek için aşağıdaki örnekler incelenebilir.

Örnek 3.1:

$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ için $x \in [-1, 2]$ aralığında 4 noktalı Chebyshev-Lagrange interpolasyonu ile bir yaklaşım fonksiyonu oluşturunuz.

x_k noktaları $\tilde{T}_4(x)$ polinomunun sıfırları olacak şekilde seçilmelidir. Burada $(n+1) = 4$ noktadan, $n = 3$ olduğu gözlenir ve x_k noktaları için

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right) = \cos\left(\frac{2k+1}{8}\pi\right) \quad (1.23)$$

kullanılır ve $[-1,1]$ aralığı $[-1, 2]$ aralığına (3.22) yardımıyla

$$\bar{x}_k = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b] = \frac{1}{2}[(2 - (-1))x + (-1) + 2] = \frac{1}{2}(3x + 1) \quad (1.24)$$

şeklinde dönüştürülürse,

Çizelge 3.1 x_k değerlerine karşılık gelen değerler.

x_k	$\bar{x}_k$	$f(\bar{x}_k)$
0.92388	1.88582	0.208675
0.382683	1.07403	0.408226
-0.382683	-0.07402	-0.07355
-0.92388	-0.88582	-0.433935

noktaları elde edilir, buradan Lagrange polinomları $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - \bar{x}_j)}{(\bar{x}_i - \bar{x}_j)}$ ifadesinden

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 0.226775x^3 - 0.025893x^2 - 0.218912x - 0.0159711 \\ L_1(x) &= -0.547484x^3 + 0.506957x^2 + 0.955097x + 0.0677012 \\ L_2(x) &= 0.547484x^3 - 1.1355x^2 - 0.326558x + 0.982271 \\ L_3(x) &= -0.226775x^3 + 0.65443x^2 - 0.409628x - 0.034 \end{aligned} \quad (1.25)$$

olarak bulunur, bu polinomlar yardımıyla Chebyshev-Lagrange yaklaşım polinomu

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) f(\bar{x}_i) = -0.118039x^3 + 0.00108879x^2 + 0.545985x - 0.0331917 \quad (1.26)$$

formunda elde edilir. İkinci örnek olarak ise,

Örnek 3.2: Lagrange – Chebyshev ile Lagrange interpolasyonlarının karşılaştırması

$f(x) = xe^x$ fonksiyonuna $x \in [0, 1.5]$ aralığında Lagrange ve Lagrange-Chebyshev polinomları ile interpolasyonlar oluşturularak, her iki yöntemde yapılan hatayı karşılaştırınız.

İlk olarak Chebyshev polinomları kullanılmadan sadece Lagrange interpolasyonu yöntemi ile $h = 0.5$ eşit aralıklı noktalarla yaklaşım fonksiyonu oluşturulmak istenirse düğüm noktaları

Çizelge 3.2 Düğüm noktaları ve fonksiyonda karşılık gelen değerleri.

i	x_i	$f_i(x_i) = x_i e^{x_i}$
0	0	0
1	0.5	0.824361
2	1	2.71828
3	1.5	6.72253

olarak elde edilir. Bu noktalar kullanılarak $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$ ifadesinden

Lagrange polinomları

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{(0-0.5)(0-1)(0-1.5)} = -1.333x^3 + 4x^2 - 3.6667x + 1 \\
L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)}{(0.5-0)(0.5-1)(0.5-1.5)} = 4x^3 - 10x^2 + 6x \\
L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1.5)}{(1-0)(1-0.5)(1-1.5)} = -4x^3 + 8x^2 - 3x \\
L_3(x) &= \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(1.5-0)(1.5-0.5)(1.5-1)} = 1.333x^3 - 2x^2 + 0.6667x
\end{aligned} \tag{1.27}$$

şeklinde elde edilir ve $P_n(x)$ yaklaşım polinomu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \tag{1.28}$$

ifadesinden

$$P_3(x) = 1.38769x^3 + 0.0575811x^2 + 1.27301x \tag{1.29}$$

olarak elde edilir. İkinci olarak x_i noktaları teoremden iddia edildiği üzere

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = \tilde{T}_{3+1}(x) = \tilde{T}_4(x) \text{ Chebyshev polinomunun kökleri olarak seçilirse } \tag{3.18}$$

yardımı ile noktalar

Çizelge 3.3 Düğüm noktaları Chebyshev kökleri olarak seçimi.

i	x'_i
0	0.92388
1	0.38268
2	-0.38268
3	-0.92388

şeklinde bulunur. Ancak bu noktalar $[-1,1]$ aralığından $[0,1.5]$ aralığına aktarılmalıdır. (3.22) dönüşümünden yararlanarak bu aralıktaki noktalar ve fonksiyonun karşı gelen değerleri **Çizelge 3.4** ' te verilmiştir:

Çizelge 3.4 [0,1.5] aralığındaki kökler ve fonksiyondaki değerleri.

i	x_i	$f_i(x_i) = x_i e^{x_i}$
0	1.4429	6.10783
1	1.03701	2.92581
2	0.46299	0.735601
3	0.05709	0.060444

(3.27) yardımı ile Lagrange polinomları

$$\begin{aligned}
 \bar{L}_0(x) &= 1.81419x^3 - 2.82486x^2 + 1.0264x - 0.0497277 \\
 \bar{L}_1(x) &= -4.3799x^3 + 8.59768x^2 - 3.40257x - 0.167045 \\
 \bar{L}_2(x) &= -4.3799x^3 - 11.1118x^2 + 7.17378x - 0.37415 \\
 \bar{L}_3(x) &= -1.81419x^3 - 5.33901x^2 + 4.79762x + 1.25683
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

şeklinde elde edilir ve (3.28) tanımından yaklaşım polinomu

$$\bar{P}_3(x) = 1.38109x^3 + 0.044652x^2 + 1.30309x - 0.0143519 \tag{1.31}$$

olarak elde edilir. Her iki fonksiyon için hataya bakılırsa (**Çizelge 3.5**), her ne kadar Lagrange interpolasyonu ile elde edilen $P_3(x)$ bazı noktalarda Lagrange-Chebyshev interpolasyonu $\bar{P}_3(x)$ ' göre daha iyi sonuç verse de, verilen aralıkta maksimum hataya bakıldığında Lagrange polinomları ile elde edilen yaklaşım polinomunda maksimum hata 0.0308983 ve Lagrange-Chebyshev polinomları ile elde edilen yaklaşım polinomunda ise maksimum hatanın 0.0205903 olduğu görülür ki, bu sonuç Lagrange-Chebyshev polinomları ile aynı dereceden daha iyi yaklaşım polinomu elde edildiğini göstermektedir.

Not 3.1: Chebyshev polinomları yaklaşım polinomunun hatasını minimum yapmak için kullanılabileceği gibi, istenilen hata aralığında yaklaşım polinomunun derecesinin düşürülmesi için de kullanılabilir;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{1.32}$$

ile tanımlansın. Amaç, $P_{n-1}(x)$ polinomunu

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)| \tag{1.33}$$

Çizelge 3.5 Yaklaşım polinomlarının karşılaştırılması.

x_i	$ f(x) - P_3(x) $	$ f(x) - \tilde{P}_3(x) $
0	0	0.0143519
0.1	0.0187472	0.0072677
0.2	0.02372	0.01482
0.3	0.01959	0.012926
0.4	0.01049	0.005689
0.5	0	0.003367
0.6	0.008995	0.0113774
0.7	0.0143282	0.0162202
0.8	0.0146759	0.0166142
0.9	0.00966702	0.012227
1	0	0.00379661
1.1	0.0124185	0.00673066
1.2	0.0243196	0.0160463
1.3	0.0308983	0.019306
1.4	0.0256199	0.00993508
1.5	0	0.0205903

ifadesini minimum olacak şekilde seçmektir. $\frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{a_n}$ ifadesi n . dereceden

monik bir polinomdur. Dolayısıyla **Teorem 3.1** hatırlanırsa, ancak

$$\frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{a_n} = \tilde{T}_n(x) \quad (1.34)$$

seçilirse (3.33) minimum olur. Buradan

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n \tilde{T}_n(x) \quad (1.35)$$

olarak seçilebilir ki,

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x) - P_{n-1}(x)| \geq \max_{x \in [-1,1]} |a_n \tilde{T}_n(x)| = |a_n| \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{T}_n(x)| = |a_n| \frac{1}{2^{n-1}} \quad (1.36)$$

elde edilir. Burada istenilen hata toleransı içinde kalacak şekilde daha küçük mertebeden polinomlar yaklaşım polinomu olarak seçilerek ekonomikleştirme yapılabilir.

Örnek 3.3 : Polinom mertebesi düşürme

$f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$ fonksiyonuna $x \in [0,1]$ aralığında Maclaurin serisi ile

$P_5(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}$ şeklinde yaklaşıldığında yapılan kesme hatası yaklaşık

0.0176 olarak elde edilir. Kabul edilebilir hatanın 0.03 olduğu varsayılırsa, bu hata sınırı içinde yaklaşım fonksiyonunun mertebesi ne kadar düşürülebilir?

(1.33) ‘ ten

$$\begin{aligned}\tilde{T}_0(x) &= 1 & \tilde{T}_1(x) &= x & \tilde{T}_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\ \tilde{T}_3(x) &= x^3 - \frac{3}{4}x & \tilde{T}_4(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \\ \tilde{T}_5(x) &= x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x\end{aligned}\tag{1.37}$$

elde edilir ve (3.35) ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}P_4(x) &= P_5(x) - a_5 \tilde{T}_5(x) = \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \right) - \left(-\frac{1}{30} \right) \cdot \left(x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x \right) \\ &= \frac{7}{24}x^3 - x^2 + \frac{97}{96}x\end{aligned}\tag{1.38}$$

elde edilir, burada seçilen örnekten dolayı $P_3(x) = P_4(x)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Dolayısıyla beşinci dereceden polinom almak yerine (3.38) ile verilen polinomu kullanarak yapılan hata

$$|P_5(x) - P_3(x)| = |a_5 \tilde{T}_5(x)| \leq \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{2^{5-1}} = 0.00208\tag{1.39}$$

olarak bulunur. Buradan toplam hata $0.0176 + 0.002083 = 0.019683 \leq 0.03$ çıkar, sonuç hala hata toleransı içinde kaldığından, mertebe düşürmeye devam edilirse,

$$\begin{aligned}P_2(x) &= P_3(x) - a_3 \tilde{T}_3(x) = \left(\frac{7}{24}x^3 - x^2 + \frac{97}{96}x \right) - \frac{7}{24} \cdot \left(x^3 - \frac{3}{4}x \right) \\ &= -x^2 + \frac{59}{48}x\end{aligned}\tag{1.40}$$

polinomu ve $|P_3(x) - P_2(x)| = |a_3 \tilde{T}_3(x)| \leq \frac{7}{24} \cdot \frac{1}{2^{3-1}} = 0.0729167$ hatası elde edilir, bu durumda da toplam hata = $0.019683 + 0.0729167 = 0.0926$ olarak elde edilir ki, bu istenilen tolerans seviyesi olan 0.03'ten büyüktür, dolayısıyla kullanılamaz. Sonuç olarak 0.03 kabul edilebilir hata için en az $P_3(x)$ kullanılmalıdır.

4. REKÜRANS BAĞLANTILARINDA HATA ANALİZİ

4.1 n . Mertebe Fark Denklemi ve Diferansiyel Denklemler

Lineer fark denklemleri adi diferansiyel denklemlere benzerdir. Öyle ki, n . mertebe lineer bir diferansiyel denklem,

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n y^{(0)}(x) = b \quad (2.1)$$

ile verilir ve burada genel olarak a_i ler ve b x ' in fonksiyonlarıdır. Genel çözüm,

$$y(x) = z(x) + \sum_{r=1}^n A_r z_r(x) \quad (2.2)$$

şeklindedir. Burada; $z(x)$ özel çözüm, $z_r(x)$ homojen denklemin lineer bağımsız çözümleri ve A_r ' ler n tane y koşulundan elde edilebilecek katsayılarıdır.

Öte yandan, n . mertebe lineer fark denklemi

$$y_{n+r} + a_1 y_{n+r-1} + \dots + a_{n-1} y_{r+1} + a_n y_r = b_r \quad (2.3)$$

ile verilir ve genel çözümü

$$y_r = p_r + \sum_{s=1}^n A_s q_r^{(s)} \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada; p_r özel çözüm $q_r^{(s)}$ homojen sistemin n tane kompleks çözümü ve benzer şekilde A_s ' ler n tane koşul ile belirlenebilen katsayılarıdır.

Eğer katsayılar sabitse diferansiyel denklemler $e^{m_i x}$, fark denklemleri ise m_i^r homojen çözümlerinde sahiplerdir ve m_i^r ' ler,

$$m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0 \quad (2.5)$$

denkleminin kökleridir.

4.2 Birinci Mertebe Rekürans Bağıntısı

(4.5) bağıntısının basit bir formu için

$$I_r = e^{-\frac{4}{3}x} \int_0^1 e^{\frac{4x}{3}} x^{r+3} dx \quad (2.6)$$

kısmi integrasyon uygulanarak,

$$I_r = 0.75 - 0.75(r+3)I_{r-1} \quad (2.7)$$

iteratif bağıntısı bulunur. Bu integrale ileride tekrar geri dönülecektir.

İleri hata analizini uygularken neler olduğu birinci mertebe genel

$$y_{r+1} = a_r y_r + b_r, \quad y_0 = p \quad (2.8)$$

rekürsif sisteminin incelenmesiyle görülebilir. Gerçekte $y_0 = p$ olan başlangıç değerinin bilgisayarda yuvarlama hatasıyla birlikte $\overline{y_0} = p + \varepsilon_0$ olarak depolandığını kabul edildiğinde, hesaplanan $\overline{y_1}$ değeri, hem ε_0 ' ın varlığından hem de yeni adımda yapılacak bir ε_1 yuvarlama hatasına sahiptir. Bunların her ikisi de sonraki $\overline{y_2}$ ' ye etki edecek ve belki $\overline{y_2}$ ' de bir yuvarlama hatasına sahip olacak ve bu şekilde devam edecektir. Dolayısıyla son hesaplanan $\overline{y_n}$ değeri;

$r = 0$ için ε_0 ,

$r = 1$ için (4.8) işlenerek,

$$\begin{aligned} \overline{y_1} &= a_0 \overline{y_0} + b_0 + \varepsilon_1 = a_0(p + \varepsilon_0) + b_0 + \varepsilon_1 \\ \overline{y_1} &= a_0 p + b_0 + a_0 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \overline{y_1} &= y_1 + a_0 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \overline{y_1} - y_1 &= \varepsilon_0 E_1(0) + \varepsilon_1 E_1(1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ve $r = 2$ için (4.8) işlenerek,

$$\begin{aligned}
\overline{y_2} &= a_0 \overline{y_1} + b_1 + \varepsilon_2 \\
&= a_1 (y_1 + \varepsilon_0 E_1(0) + \varepsilon_1 E_1(1)) + b_1 + \varepsilon_2 \cdot 1 \\
&= a_1 y_1 + b_1 + \varepsilon_0 a_1 E_1(0) + \varepsilon_1 a_1 E_1(1) + \varepsilon_2 E_2(2) \\
&= y_2 + \varepsilon_0 E_2(0) + \varepsilon_1 E_2(1) + \varepsilon_2 E_2(2) \\
\Rightarrow \overline{y_2} - y_2 &= \varepsilon_0 E_2(0) + \varepsilon_1 E_2(1) + \varepsilon_2 E_2(2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

benzer şekilde $r = n$ için,

$$\overline{y_n} - y_n = \varepsilon_0 E_n(0) + \varepsilon_1 E_n(1) + \varepsilon_2 E_n(2) + \dots + \varepsilon_n E_n(n) \tag{2.11}$$

elde edilir. (4.11) 'den hatanın üst sınırı,

$$|\overline{y_n} - y_n| \leq |\varepsilon_0 E_n(0)| + |\varepsilon_1 E_n(1)| + \dots + |\varepsilon_n E_n(n)| \tag{2.12}$$

olarak görülür. Bu formülde $E_n(s)$ S . adımdaki birim hatadan kaynaklanan n . adımdaki hatadır. S . adımdaki bir birim hata nedeniyle r ve $r+1$ ardışık adımlarında üretilen $E_r(s)$, $E_{r+1}(s)$ arasındaki ilişki, $s < r$ için:

$$E_{r+1}(s) = a_r E_r(s) \tag{2.13}$$

homogen denklemi ile verilir, burada $E_s(s) = 1$ ve $s > r$ için $E_r(s) = 0$ 'dır. Bu ilişki, (4.11) ve (4.8) kullanılarak şu şekilde de bulunabilir:

$$\begin{aligned}
y_{r+1} &= a_r y_r + b_r \\
y_{r+1} + E_{r+1} &= a_r (y_r + E_r) + b_r \\
E_{r+1} &= a_r E_r.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Böylece (4.13)' ten $E_s(s) = 1$ $s = 0, \dots, n$ başlangıç koşulları ile,

$$\begin{aligned}
0 &\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{E_0(0)} \\
1 &\Rightarrow E_1(0) \quad \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{E_1(1)} \\
2 &\Rightarrow E_2(0) \quad E_2(1) \quad \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{E_2(2)} \\
&\vdots \\
n &\Rightarrow E_n(0) \quad E_n(1) \quad E_n(2) \quad \dots \quad \varepsilon_n \cdot \frac{1}{E_n(n)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$E_n(s)$ ve $E_n(s-1)$ bağlantısından da alternatif bir rekürans ilişkisi, **(4.9)**' dan,

$$E_1(0) = a_0 \cdot 1 = a_0 E_1(1) \quad (2.16)$$

ve **(4.10)**' dan,

$$\begin{aligned} E_2(0) &= a_1 E_1(0) = a_1 a_0 E_1(1) = a_0 a_1 E_1(1) \\ E_2(0) &= a_0 E_2(1) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} E_3(0) &= a_2 E_2(0) = a_2 a_1 E_1(0) = a_2 a_0 a_1 E_1(1) \\ &= a_0 a_2 a_1 E_1(1) = a_0 a_2 E_2(1) = a_0 E_3(1) \\ &= a_0 E_3(1) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.18)$$

elde edilebilir. Bu ilişki sadece $E_n(0)$ için değil, diğer değerler için de

$$\begin{aligned} E_1(1) &= 1 \\ E_2(1) &= a_1 E_1(1) = a_1 \cdot 1 = a_1 E_2(2) \\ E_3(1) &= a_2 E_2(1) = a_2 a_1 E_2(2) = a_1 a_2 E_2(2) \\ a_1 E_3(2) &= a_1 E_3(2) \\ E_4(1) &= a_3 E_3(1) = a_3 a_1 E_3(2) = a_1 a_3 E_3(2) \\ a_1 E_4(2) &= a_1 E_4(2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde uygulanabilir. Genelleme yapılacak olursa,

$$\begin{aligned} E_n(s-1) &= a_{n-1} E_{n-1}(s-1) = a_{n-1} a_{n-2} E_{n-2}(s-1) \\ &= a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} E_{n-3}(s-1) \\ &= a_{n-1} a_{n-2} \dots a_{n-(n-s+1)} E_{n-(n-s+1)}(s-1) \\ &= a_{n-1} a_{n-2} \dots a_{n-(n-s+1)} \underbrace{E_{s-1}(s-1)}_{=1} \\ &= a_{n-1} a_{n-2} \dots a_{n-(n-s)} a_{n-(n-s+1)} E_s(s) \\ &= a_{s-1} a_{n-1} a_{n-2} \dots a_{n-(n-s-1)} \underbrace{a_{n-(n-s)} E_s(s)}_{E_{s+1}(s)} \\ &= a_{s-1} a_{n-1} a_{n-2} \dots \underbrace{a_{s+1} E_{s+1}(s)}_{E_{s+2}(s)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

işlemleriyle

$$E_n(s-1) = a_{s-1} \cdot E_n(s) \quad E_n(n) = 1 \quad (2.21)$$

sonucuna varılır ki, **(4.15)** ' e benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
0 &\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{\underbrace{}_{E_0(0)}} \\
1 &\Rightarrow E_1(0) - \varepsilon_1 \cdot \frac{1}{\underbrace{}_{E_1(1)}} \\
2 &\Rightarrow E_2(0) - E_2(1) - \varepsilon_2 \cdot \frac{1}{\underbrace{}_{E_2(2)}} \\
&\vdots \\
n &\Rightarrow E_n(0) - E_n(1) - E_n(2) - \dots - \varepsilon_n \cdot \frac{1}{\underbrace{}_{E_n(n)}}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

olarak hesap yapılabilir. Burada hesap sırası $s = n$ ' den 0 ' a doğrudur. Bu ilişki daha uygulanabilir ve hata ifadesi **(4.12)** ' den,

$$\begin{aligned}
\left| \overline{y_n} - y_n \right| &\leq \left| \varepsilon_0 E_n(0) \right| + \left| \varepsilon_1 E_n(1) \right| + \dots + \left| \varepsilon_n E_n(n) \right| \\
&\leq \left| \varepsilon_n \right| + \left| \varepsilon_{n-1} a_{n-1} E_n(n) \right| + \dots + \left| \varepsilon_1 a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 \right| + \left| \varepsilon_0 a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0 \right|
\end{aligned} \tag{2.23}$$

olarak bulunur. **(4.6)** integral örneğine ve **(4.7)** iteratif bağıntısına dönüldüğünde, hatanın **(4.23)** yardımıyla

$$\left| I_5 - \overline{I_5} \right| \leq \left| \varepsilon_5 \right| + 0.75 \cdot 8 \left| \varepsilon_4 \right| + \underbrace{a_4}_6 \underbrace{a_3}_{0.75 \cdot 7} \varepsilon_3. \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Dolayısıyla

$$y_r = 0.75 - 0.75(r+3)y_{r-1} \tag{2.25}$$

denklemini **(4.12)** ' ye benzetilirse, p_r özel q_r homojen çözüm olmak üzere;

$$y_r = p_r + Aq_r \tag{2.26}$$

elde edilir ki, $q_0 = 1$ başlangıç değeri ve burada homojen durum olduğundan $b_r = 0.75$ olarak değil $b_r = 0$ alındığında, yani;

$$\begin{aligned}
q_r &= -0.75(r+3)q_{r-1} \quad q_1 = -0.75(1+3) \\
q_2 &= (-0.75)^2(1+3)(2+3) \\
&\vdots \\
q_r &= (-0.75)^r \prod_{s=1}^r (3+s)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

çok hızlı büyüdüğü için başlangıç koşulunun sağlanması için homojen çözümlerin katsayısı sıfır olmalı ve sadece özel çözüm kalmalıdır. Bu durumda hataya neden olur. Ancak

$$I_r = 0.75 - 0.75(r+3)I_{r-1} \quad (2.28)$$

ifadesinde örneğin I_5 doğru verilir ve geriye ilişki kullanılırsa aynı hata görünmez, hatta geriye rekürsif ilişki de $\bar{I}_5 = 0$ alınsa bile $\bar{I}_0$ için tatminkar bir sonuç elde edilir. Geriye iteratif bağıntı iyi sonuç verdiği için integral örneğinde çözüme ulaşmak için iki farklı geriye iteratif ilişki kullanılabilir. Yeterince büyük n değerleri için $y_n' = 0$ ' dan başlayıp $y_r^{(1)}$ çözümü ve $y_n'' = 1$ ' den başlayıp $y_r^{(2)}$ çözümü elde edilebilir. Dolayısıyla $Ay_r^{(1)} + By_r^{(2)}$ kombinasyonu, $A + B = 1$ ve $Ay_0^{(1)} + By_0^{(2)} = I_0$ koşulları sağlanırsa doğru çözüm olur.

4.3 İkinci Mertebe Rekürans Bağıntısı

Birinci mertebeye benzer şekilde,

$$y_{r+1} = f_r y_r + g_r y_{r-1} + h_r \quad (2.29)$$

verilsin, dolayısıyla tek çözüm için iki koşula ihtiyaç vardır ve bu ancak başlangıç ve sınır değer problemleri olmak üzere iki farklı şekilde verilebilir.

4.3.1 Başlangıç değer problemleri

Başlangıç değer problemlerinde, hata (4.12)' e benzer şekilde (4.29) denkleminde y_0 ' da sıfır hata yani $\bar{y}_0 = y_0$ ve y_1 ' de ε_1 hata, yani $\bar{y}_1 = y_1 + \varepsilon_1$ olmak üzere, $r = 1$ için,

$$\begin{aligned} \bar{y}_2 &= f_1 \bar{y}_1 + g_1 \bar{y}_0 + h_2 + \varepsilon_2 = f_1(y_1 + \varepsilon_1) + g_1 y_0 + h_2 + \varepsilon_2 \\ &= f_1 y_1 + g_1 y_0 + h_2 + f_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = y_2 + \varepsilon_1 f_1 \cdot 1 + \varepsilon_2 \cdot 1 \end{aligned} \quad (2.30)$$

ve buradan

$$\bar{y}_2 - y_2 = \varepsilon_1 E_2(1) + \varepsilon_2 E_2(2) \quad (2.31)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$|\bar{y}_n - y_n| \leq |\varepsilon_1 E_n(1)| + |\varepsilon_2 E_n(2)| + \dots + |\varepsilon_n E_n(n)| \quad (2.32)$$

elde edilir ki, bu $(s-1)$. adımda sıfır, S . adımda bir birim hatadan kaynaklanan n . adımdaki hata $E_n(s)$ ile gösterilmek üzere, hesaplanan $\bar{y}_n$ ile gerçek y_n arasındaki

hata için üst sınırdır. Dolayısıyla geriye rekürans bağıntısı ile $E_n(s)$, birinci mertebeye benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
E_1(1) &= 1 \\
E_2(1) &= f_1 \cdot 1 + g_2 \cdot 0 = f_1 E_2(2) + g_2 E_2(3) \\
&\vdots \\
E_n(s-1) &= f_{s-1} E_n(s) + g_s E_n(s+1) \\
E_n(n+1) &= 0 \quad E_n(n) = 1
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ifadesinden bulunabilir. Bu şu şekilde ispatlanabilir:

Herhangi bir s değeri için (4.29) denkleminde bakılacak olursa

$$\begin{aligned}
\overline{y_{r+1}} &= f_r \overline{y_r} + g_r \overline{y_{r-1}} + h_r \\
y_{r+1} + E_{r+1} &= f_r (y_r + E_r) + g_r (y_{r-1} + E_{r-1}) + h_r
\end{aligned} \tag{2.34}$$

buradan

$$\begin{aligned}
E_{r+1}(s) &= f_r E_r(s) + g_r E_{r-1}(s) \\
E_r(s) &= 0 \quad r < s \\
E_r(s) &= 1 \quad r = s
\end{aligned} \tag{2.35}$$

çıkar. Bu üç terimli yani ikinci mertebe bir fark denklemdir, dolayısıyla iki bağımsız çözümü; Z_r , $\overline{Z_r}$ vardır ve genel çözümü $AZ_r + B\overline{Z_r}$ ' dir. A ve B ' yi bulmak için,

$$\begin{aligned}
r = s-1 &\Rightarrow E_r(s) = 0 \\
r = s &\Rightarrow E_r(s) = 1
\end{aligned} \tag{2.36}$$

koşullarından,

$$E_r(s) = AZ_r + B\overline{Z_r} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}
E_{s-1}(s) &= AZ_{s-1} + B\overline{Z_{s-1}} = 0 \\
E_s(s) &= AZ_s + B\overline{Z_s} = 1
\end{aligned} \tag{2.38}$$

elde edilir ve A ve B yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned}
AZ_s Z_{s-1} + B\overline{Z_{s-1}} Z_s &= 0 \\
-AZ_s Z_{s-1} - B\overline{Z_s} Z_{s-1} &= -Z_{s-1}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$B = \frac{-Z_{s-1}}{Z_{s-1} Z_s - \overline{Z_s} Z_{s-1}} \quad A = \frac{\overline{Z_{s-1}}}{Z_{s-1} Z_s - \overline{Z_s} Z_{s-1}} \tag{2.40}$$

bulunur ve (4.37)'da kullanılırsa,

$$E_r(s) = \frac{\overline{Z}_{s-1}Z_r - Z_{s-1}\overline{Z}_r}{\underbrace{\overline{Z}_{s-1}Z_s - \overline{Z}_sZ_{s-1}}_{=W_s}} \quad (2.41)$$

olur ve düzenlenirse,

$$E_n(s) = \frac{Z_n\overline{Z}_{s-1} - \overline{Z}_nZ_{s-1}}{W_s} \quad (2.42)$$

yazılabilir. Ayrıca Z_r ve $\overline{Z}_r$ her ikisinde (4.35) homojen sisteminin çözümü olduğundan

$$\begin{aligned} Z_{s+1} &= f_s Z_s + g_s Z_{s-1} \\ \overline{Z}_{s+1} &= f_s \overline{Z}_s + g_s \overline{Z}_{s-1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

elde edilir. (4.41)' de kullanılan $W_s = \overline{Z}_{s-1}Z_s - \overline{Z}_sZ_{s-1}$ eşitliğinden ve (4.43)' ten faydalanılarak

$$\begin{aligned} W_{s+1} &= \overline{Z}_s Z_{s+1} - \overline{Z}_{s+1} Z_s \\ &= (f_s Z_s + g_s Z_{s-1})\overline{Z}_s - (f_s \overline{Z}_s + g_s \overline{Z}_{s-1})Z_s \\ &= -g_s (\overline{Z}_{s-1}Z_s - \overline{Z}_sZ_{s-1}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

ve buradan

$$W_{s+1} = -g_s W_s \quad (2.45)$$

sonucuna varılır.

(4.33) ifadesine benzetilerek, eğer $E_n(s+1)$ için aranılan rekürans ilişkisi,

$$E_n(s+1) = \alpha_s E_n(s) + \beta_s E_n(s-1) \quad (2.46)$$

formunda ise, burada (4.42) kullanılarak,

$$\frac{Z_n\overline{Z}_s - \overline{Z}_nZ_s}{W_{s+1}} = \alpha_s \left(\frac{Z_n\overline{Z}_{s-1} - \overline{Z}_nZ_{s-1}}{W_s} \right) + \beta_s \left(\frac{Z_n\overline{Z}_{s-2} - \overline{Z}_nZ_{s-2}}{W_{s-1}} \right) \quad (2.47)$$

bulunur ve her taraf W_s ile çarpılıp (4.45) kullanılır ve $\overline{Z}_n$ ve Z_n parantezlerine alınır,

$$\overline{Z}_n \left(\frac{Z_s}{g_s} + \alpha_s Z_{s-1} - \beta_s g_{s-1} Z_{s-2} \right) - Z_n \left(\frac{\overline{Z}_s}{g_s} + \alpha_s \overline{Z}_{s-1} - \beta_s g_{s-1} \overline{Z}_{s-2} \right) = 0 \quad (2.48)$$

denklemini ortaya çıkar. Bu ifade, $\overline{Z}_n$ ve Z_n homojen sistemin lineer bağımsız çözümleri olduğundan ancak ve ancak $\overline{Z}_n$ ve Z_n terimlerinin katsayıları sıfırlanarak bulunabilir, yani her taraf g_s ile çarpıldıktan sonra katsayılar sıfıra eşitlenirse,

$$\begin{aligned} Z_s + \alpha_s g_s Z_{s-1} - \beta_s g_s Z_{s-2} &= 0 \\ \overline{Z}_s + \alpha_s g_s \overline{Z}_{s-1} - \beta_s g_s \overline{Z}_{s-2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

bulunur ki, (4.43) ile birlikte düşünülürse,

$$f_{s-1} Z_{s-1} + g_{s-1} Z_{s-2} + \alpha_s g_s Z_{s-1} + \alpha_s g_s Z_{s-1} - \beta_s g_s Z_{s-2} = 0 \quad (2.50)$$

ve Z_{s-1} ve Z_{s-2} parantezlerine alınarak parantez içleri sıfıra eşitlendiğinde,

$$\alpha_s g_s = -f_{s-1} \quad \beta_s g_s = 1 \quad (2.51)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde Z_{s-1} ve Z_{s-2} kullanılarak da bu sonuç elde edilebilmektedir. (4.51), (4.46)' te işlenirse,

$$E_n(s+1) = -\frac{f_{s-1}}{g_s} E_n(s) + \frac{1}{g_s} E_n(s-1) \quad (2.52)$$

dolayısıyla (4.33) ifadesine ulaşılır. Bu hata analizinin başlangıç değer problemine etkisi değerlendirilecek olursa (4.29) denkleminin çözümü

$$y_r = p_r + A_1 q_r^{(1)} + A_2 q_r^{(2)} \quad (2.53)$$

ile verilir ve doğru çözüm için ancak teorik olarak başlangıç koşulları ile kontrol edilen, hızla artan homojen çözümlerle etkisi yok edilmediğinde anlamlı bir sonuca ulaşılabilir. Bu tip durumlarda rekürsif ilişkiyi y_n ve y_{n-1} başlangıç değerleriyle geri rekürsif ilişkiye çevirmekte sorunu çözmeyebilir. Ancak iyi tanımlı problemler için bu sorun görünmeyecektir.

4.3.2 Sınır değer problemleri

Bu kez (4.29) denkleminin çözümü için gerekli koşulun $y_0 = \alpha$ ve $y_n = \beta$ olarak belirlendiğini varsayalım. Teorik olarak iki başlangıç değer çözümü $y_r^{(1)}$ ve $y_r^{(2)}$, nin bir kombinasyonu olarak çözülebilir. Bunlardan ilki (4.29) rekürans ilişkisini sağlar ve $y_0^{(1)} = \alpha$, $y_1^{(1)} = 0$ başlangıç koşullarına sahiptir, ikincisi ise (4.29) rekürans

ilişkisinin homojen kısmını sağlar ve $y_0^{(2)} = 0$, $y_1^{(2)} = 1$ başlangıç koşullarına sahiptir. Böylece sınır değer probleminin çözümü,

$$y_r = y_r^{(1)} + Ay_r^{(2)} \quad (2.54)$$

ile verilebilir ki, bu hem (4.29) ilişkisini hem de birinci sınır koşulu olan $y_0 = \alpha$ ifadesini sağlar. A sabiti ise,

$$y_n = \beta = y_n^{(1)} + Ay_n^{(2)} \quad (2.55)$$

ikinci sınır koşulunu sağlayacak şekilde seçilir. Ancak bu yöntem sınır değer problemi iyi tanımlı olduğunda bile genelde işlemez. Dolayısıyla tamamlayıcı fonksiyonların yapısına göre, rekürans işlemi tersine işletilerek, yani $y_n = \beta$ otomatik sağlanacak şekilde seçip $y_0 = \alpha$ olmasını sağlamak daha iyi sonuç verebilir. Fakat bu da $r + A_1 10^r + A_2 10^{-r}$ gibi durumlarda işlemeyebilir. Sınır değer probleminde ileri hata analizi ile bunu göstermek zordur, ancak geriye analiz daha uygulanabilir ve ayrıca sınır değer probleminin çözümü için bir başka teknik de ortaya çıkarır. Sınır değer probleminin

$$y_{r+1} + a_r y_r + b_r y_{r-1} = c_r \quad y_0 = \alpha \quad y_n = \beta \quad (2.56)$$

formunda olduğu kabul edildiğinde,

$$\begin{aligned} r=1 &\Rightarrow a_1 y_1 + y_2 &= c_1 - b_1 \alpha \\ r=2 &\Rightarrow b_2 y_1 + a_2 y_2 + y_3 &= c_2 \\ r=3 &\Rightarrow b_3 y_2 + a_3 y_3 + y_4 &= c_3 \\ &\vdots \\ r=n-2 &\Rightarrow b_{n-2} y_{n-3} + a_{n-2} y_{n-2} + y_{n-1} &= c_{n-2} \\ r=n-1 &\Rightarrow b_{n-1} y_{n-2} + a_{n-2} y_{n-1} &= c_{n-1} - \beta \end{aligned} \quad (2.57)$$

$(n-1)$ bilinmeyenli $(y_i (i=1, \dots, n-1))$, $(n-1)$ lineer cebrik denklem verir. Sınır değer problemi iyi tanımlı oldukça, bize iyi bir çözüm verir, yani kararlı bir yöntemdir. Önceki bölümde uygulanan hata analizi tekniği lineer denklem sistemini çözmek için şu şekilde uygulanabilir:

Gerçek $y_r^{(1)}$ değeri, hesaplanırken yapılan hata ile birlikte $\bar{y}_r^{(1)}$ ile gösterilirse

$$b_r \bar{y}_{r-1}^{(1)} + a_r \bar{y}_r^{(1)} + \bar{y}_{r+1}^{(1)} = C_r + \varepsilon_r^{(1)} \quad (2.58)$$

bulunur, $y_r^{(1)}$ (4.56) rekürans ilişkisini ve $y_0^{(1)} = \alpha$, $y_1^{(1)} = 0$ şartlarını sağlayan çözüm olmak üzere, (4.57) denkleminin benzer olarak elde edilen (4.58)' in ilk $n-2$ denklemini sağlar ve son denklem için de,

$$r = n-1 \Rightarrow b_{n-1} \bar{y}_{n-2}^{(1)} + a_{n-1} \bar{y}_{n-1}^{(1)} + \bar{y}_n^{(1)} = C_{n-1} + \varepsilon_{n-1}^{(1)} \quad (2.59)$$

denklemini üretir. Benzer şekilde, $y_r^{(2)}$ (4.56) ilişkisinin homojen kısmını ($C_r = 0$) ve $y_0^{(2)} = 0$, $y_1^{(2)} = 1$ başlangıç koşullarını sağlamalıdır. Yani ilk $n-1$ denklem için (4.58)' den;

$$b_r \bar{y}_{r-1}^{(2)} + a_r \bar{y}_r^{(2)} + \bar{y}_{r+1}^{(2)} = \varepsilon_r^{(2)} \quad (2.60)$$

ve son denklem için (4.59)' dan;

$$b_{n-1} \bar{y}_{n-2}^{(2)} + a_{n-1} \bar{y}_{n-1}^{(2)} + \bar{y}_n^{(2)} = \varepsilon_{n-1}^{(2)} \quad (2.61)$$

elde edilir. Sınır değer problemi için $\bar{y}_r = \bar{y}_r^{(1)} + \bar{A} \bar{y}_r^{(2)}$ kombinasyonu (4.58) ve (4.60) ifadelerinden $\left(\bar{y}_0^{(1)} = \alpha \quad \bar{y}_0^{(2)} = 0 \right)$ şartları gözönünde tutularak

$$b_r \left(\underbrace{\bar{y}_{r-1}^{(1)} + \bar{A} \bar{y}_{r-1}^{(2)}}_{\bar{y}_{r-1}} \right) + a_r \left(\underbrace{\bar{y}_r^{(1)} + \bar{A} \bar{y}_r^{(2)}}_{\bar{y}_r} \right) + \underbrace{\bar{y}_{r+1}^{(1)} + \bar{A} \bar{y}_{r+1}^{(2)}}_{\bar{y}_{r+1}} = C_r + \varepsilon_r^{(1)} + \bar{A} \varepsilon_r^{(2)} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} r=1 \Rightarrow & a_1 \bar{y}_1 + \bar{y}_2 & = c_1 - b_1 \bar{\alpha} + \varepsilon_1^{(1)} + \bar{A} \varepsilon_1^{(2)} \\ r=2 \Rightarrow & b_2 \bar{y}_1 + a_2 \bar{y}_2 + \bar{y}_3 & = c_2 + \varepsilon_2^{(1)} + \bar{A} \varepsilon_2^{(2)} \\ & \vdots & \\ r=n-2 \Rightarrow & b_{n-2} \bar{y}_{n-3} + a_{n-2} \bar{y}_{n-2} + \bar{y}_{n-1} & = c_{n-2} + \varepsilon_{n-2}^{(1)} + \bar{A} \varepsilon_{n-2}^{(2)} \\ r=n-1 \Rightarrow & b_{n-1} \bar{y}_{n-2} + a_{n-1} \bar{y}_{n-1} + \bar{y}_n & = c_{n-1} + \varepsilon_{n-1}^{(1)} + \bar{A} \varepsilon_{n-1}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

denklemlerini sağlar, son olarak

$$\bar{y}_n = \bar{y}_n^{(1)} + \bar{A} \bar{y}_n^{(2)} = \bar{\beta} = \beta - \eta_{n-1} \quad (2.64)$$

olacak şekilde $\bar{A}$ seçilir. Sonuç olarak sınır değer problemi $\mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{q}$ yapısında denklemlerin çözümünü gerçekleştirdiğinde, başlangıç değer tekniği

$$\begin{aligned}\delta q_r &= \varepsilon_r^{(1)} + \overline{A}\varepsilon_r^{(2)} & r = 1, \dots, n-2 \\ \delta q_{n-1} &= \varepsilon_{n-1}^{(1)} + \overline{A}\varepsilon_{n-1}^{(2)} + \eta_{n-1} & r = n-1\end{aligned}\tag{2.65}$$

olmak üzere

$$\mathbf{P} \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{q} + \delta \mathbf{q}\tag{2.66}$$

sisteminin çözümüne eşdeğerdir.

Bu bölümde yapılan hata analizleri sonucunda

1. ε ve η_{n-1} çok büyük olabileceğinden, kombine başlangıç değer yöntemi işlemeyebilir.
2. İleri hata analizi ile çok zor görülebilecek olan ancak geriye analizde görülen $y_r^{(1)}$ ve $y_r^{(2)}$ ‘de biriken hatalar çok az öneme sahiptir.

çıkarımları yapılabilir.

5. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SERİ ÇÖZÜM

Üçüncü bölümde $-1 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ aralığında rasyonel fonksiyonlar için Chebyshev serilerinin bulunması tartışılmış ve temelde Chebyshev serilerinin katsayıları için lineer cebrik denklemlerin sonsuz bir kümesi üretilmiştir. Üretilen bu küme sabit katsayılı ve belirli koşullar ile bir rekürans ilişkisi olarak verilebilir. Bu bölümde ise başlangıç ve karışık sınır değer problemlerinin benzer şekilde hesaplanabileceği gösterilecektir.

Oransal bir fonksiyona yaklaşım olarak Pade yaklaşıtlarını

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad (3.1)$$

ile verilebilir. Burada Chebyshev polinomları cinsinden yaklaşım polinomu bu ifadeye eşitlenirse

$$p_n(x) = \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{E(x)}{Q(x)} \quad E(x) = \sum_{s=p}^q \tau_s T_s(x) \quad (3.2)$$

elde edilir. Burada p ve q sırasıyla $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının dereceleridir. Hatanın mutlak maksimumu,

$$e_n(x) = p_n(x) - f(x) = \max \left| \frac{E(x)}{Q(x)} \right| \quad (3.3)$$

şeklindeir. Polinom katsayılı lineer denklem sistemi için de benzer bir $p_n(x)$ bulunabilir.

Lineer diferansiyel denklem daha genel katsayılarla sahipse iki yol uygulanabilir. Birinci olarak katsayılarla sonlu Chebyshev polinomları ile yaklaşıtlr ve böylece problem daha basit bir forma gelir. İkinci olarak ise Lagrange interpolasyon formülünden,

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= p_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \pi(x) \\ \pi(x) &= (x-x_0) \dots (x-x_n) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

faaydalanılır, burada tüm x_r noktaları ve ξ $-1 \leq x \leq 1$ arasındadır ve $p_n(x)$ ile $f(x)$ fonksiyonunun çakıştığı x_r düğüm noktaları için iyi bir seçim önceki bölümlerde gösterildiği üzere $T_{n+1}(x)$ Chebyshev polinomunun sıfırlarıdır. Böylece, $f(x) - p_n(x)$ hatasının çarpanlarından en azından biri mümkün olduğunca küçük yapılabilir. Kapalı problemler için Chebyshev polinomunun sıfırlarının diferansiyel denklemi sağladığı, böylece yaklaşım polinomunun katsayılarının belirlenmesi için cebrik denklemlerin üretilebildiği benzer bir analogi uygulanacaktır.

Kesirli fonksiyonlar için (5.1) ile verilen $f(x)$ fonksiyonu için Chebyshev serisi

$$Q(x) \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) = P(x) \quad (3.5)$$

açılımından her iki tarafın Chebyshev katsayıları eşitlenerek bulunabilir ve a_r katsayıları için her birinde sonsuz terim olan, sonsuz lineer denklem kümesi elde edilir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{1+x} \quad (3.6)$$

için $P(x) = 1$, $Q(x) = 1+x$ alınarak,

$$1 = (1+x) \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) + \sum_{r=0}^{\infty} a_r x T_r^*(x) \quad (3.7)$$

(1.69) ifadesinde, kullanılırsa $k=1$ ve $j=r$ alınır

$$\begin{aligned} x T_r^*(x) &= \frac{1}{2^2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} T_{|r-1+i|}^*(x) \\ &= \frac{1}{4} \left[\binom{2}{0} T_{r-1}^*(x) + \binom{2}{1} T_r^*(x) + \binom{2}{2} T_{r+1}^*(x) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[T_{|r-1|}^*(x) + 2T_r^*(x) + T_{r+1}^*(x) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve bu ifadenin (5.7)' de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{4} \left[T_{|r-1|}^*(x) + 2T_r^*(x) + T_{r+1}^*(x) \right] \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) + \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{a_{r+1}}{4} T_r^*(x) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r^*(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_{r-1}}{4} T_r^*(x) \\
&= \frac{1}{2} a_0 T_0^*(x) + \frac{1}{8} \underbrace{a_0 T_{-1}^*(x)}_{=0} + \frac{a_1}{4} T_0^*(x) + \frac{a_0}{4} T_0^*(x) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_r + \frac{a_{r+1}}{4} + \frac{a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{4} \right) T_r^*(x) \\
&= \left(\frac{3}{4} a_0 + \frac{a_1}{4} \right) T_0^*(x) + \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{a_{r+1}}{4} + \frac{3a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{4} \right) T_r^*(x)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir ki ifadenin sol ve sağında Chebyshev polinomlarının katsayıları eşitlenirse

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4} a_0 + \frac{1}{4} a_1 &= 1 \\ \frac{1}{4} a_{r-1} + \frac{3}{2} a_r + \frac{1}{4} a_{r+1} &= 0 \quad r=1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \tag{3.10}$$

bağıntılarına ulaşılır. Benzer şekilde örneğin

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{3.11}$$

fonksiyonu için

$$1 = (1+x+x^2) \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) \tag{3.12}$$

yazılıp, burada **(1.68)** ifadesinden $k=1$ ve $k=2$ için sırasıyla

$$\begin{aligned} x T_r(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} T_{r-1+2i}(x) \\ x^2 T_r(x) &= \frac{1}{2^2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} T_{r-2+2i}(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilen ifadeler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{2} [T_{r-1}(x) + T_{r+1}(x)] \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{4} [T_{r-2}(x) + 2T_r(x) + T_{r+2}(x)] = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) + \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{a_{r+1}}{2} T_r(x) + \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{a_{r-1}}{2} T_r(x) \\
&+ \sum_{r=-2}^{\infty} \frac{a_{r+2}}{4} T_r(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{2} T_r(x) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{a_{r-2}}{4} T_r(x) \tag{3.14} \\
&= \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_0}{4} \right) T_0(x) + \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{4} \right) T_1(x) \\
&+ \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{a_{r-2}}{4} + \frac{a_{r-1}}{2} + \frac{3}{2} a_r + \frac{a_{r+1}}{2} + \frac{a_{r+2}}{4} \right) T_r(x) = 0
\end{aligned}$$

işlemlerinden,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_2 &= 1 \\
\frac{1}{2} a_0 + \frac{7}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4} a_3 &= 0 \\
\frac{1}{4} a_{r-2} + \frac{1}{2} a_{r-1} + \frac{3}{2} a_r + \frac{1}{2} a_{r+1} + \frac{1}{4} a_{r+2} &= 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

sonucuna varılır.

Teoride (5.10) ve (5.15)' e benze denklemlerin çözümü için sabit katsayılı fark denklemleri kullanılır, örneğin (5.15)' in genel çözümü $a_r = p^r$ çözüm önerisinden,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} p^{r-2} + \frac{1}{2} p^{r-1} + \frac{3}{2} p^r + \frac{1}{2} p^{r+1} + \frac{1}{4} p^{r+2} &= 0 \\
p^{r-2} \left(\underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} p + \frac{3}{2} p^2 + \frac{1}{2} p^3 + \frac{1}{4} p^4}_{=0} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$p_{1,2} = -0.840625 \mp 2.13726i$$

$$p_{3,4} = -0.159376 \pm 0.405204i$$

ve genel çözüm

$$a_r = A_1 p_1^r + A_2 p_2^r + A_3 p_3^r + A_4 p_4^r \tag{3.17}$$

şeklinde verilir, burada p_1, p_2, p_3, p_4

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} p + \frac{3}{2} p^2 + \frac{1}{2} p^3 + \frac{1}{4} p^4 = 0 \tag{3.18}$$

denkleminin kökleridir. Bu denklemin iki kökünün modülü $|p_{1,2}|$ 1' den büyüktür, ve burada yakınsak bir Chebyshev serisi arandığından (5.17)' te karşı gelen katsayılar sıfır olmalıdır. Diğer iki katsayı A_3, A_4 gerekli çözümün başlangıç koşulları gibi işlem gören (5.15)' in ilk iki katsayısında (5.17)' nin yerine konulması ile hesaplanacaktır.

(5.18) yapısındaki denklemlerin çözümü yerine (5.15) gibi sonsuz denklem kümeleri için alternatif yöntemler aranır. İlk yöntem sonsuz matrisin ardışık alt matrislerini içeren ardışık alt denklem kümelerini çözmektir ve ispatsız olarak yakınsak bir Chebyshev serisi kullanıldığı müddetçe bu işlemin yakınsadığı kabul edilecektir. Hesaplar ilk $n+1$ denklemin çözümü için harcanan emek n denklemini çözmekten çok büyük olmayacak şekilde düzenlenir.

Yöntemi açıklamak için genellikle bir şey kaybetmeksizin aynı işlem zincirinin genel yapıda da kullanılabileceği söylenerek daha basit olan (5.10) üzerinde işlemleri açıklamak kolaydır; Birinci denklem çözülerek, yani

$$\frac{3}{4}a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = \frac{4}{3} \quad (3.19)$$

başlanır,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{4}a_1 &= 1 \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

İfadesinin ikinci denkleminde a_0 elimine edilirse

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{4}a_1 &= 1 \\ \frac{17}{12}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

ve a_2 ihmal edilerek çözüm yapılırsa,

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{17} = -\frac{4}{17} \\ a_0 &= \left[1 - \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{17} \right) \frac{4}{3} \right] = \frac{24}{17} \end{aligned} \quad (3.22)$$

değerlerine ulaşılır, yeni bir satır eklenmesiyle ifade

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{4}a_1 &= 1 \\
\frac{17}{12}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= -\frac{1}{3} \\
\frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

haline gelir. Burada ikinci satırdan a_1 çekilip 3. satırda kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{4}a_1 &= 1 \\
\frac{17}{12}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= -\frac{1}{3} \\
+\frac{99}{68}a_2 + \frac{1}{4}a_3 &= \frac{1}{17}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

ve yeniden a_3 ihmal edilerek 3x3 sistem çözülürse,

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{17} \cdot \frac{68}{99} = \frac{4}{99} \\
a_1 &= \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{99} \right] \cdot \frac{12}{17} = -\frac{8}{33} \\
a_0 &= \left(1 - \frac{1}{4}a_1 \right) \cdot \frac{4}{3} = \frac{140}{99}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir. (5.19), (5.22) ve (5.25) doğru Chebyshev çözümlerine hızla yakınsar. (5.15) ise yukarıda ki işlem zincirlerinin ardışık uygulanmasıyla açık ve kolayca yapılabilir. Yukarıda belirtildiği üzere yöntem genellikle kaybetmeksizin daha karmaşık problemlere de uygulanabilir ki, ardışık yaklaşımlarla kazanılan ekonomikleştirme önemlidir.

İkinci yöntem klasik geriye rekürsif ilişkiyi kullanır. Eğer

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0 \quad a_n = 1 \tag{3.26}$$

alınır ve (5.10)' un ikincisinde kullanılırsa, (5.10)₁' i kullanmadan $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ elde edilebilir. (5.10)₁' in sağlanması sonucun sadece hesaplanabilir bir çarpanla çarpılması ile gerçekleştirilebilir, örneğin $a_2 = a_3 = \dots = 0$ ve $a_1 = 1$ alınırsa (5.10)₂ den $r=1$ için

$$\frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{2}\underset{=1}{a_1} + \frac{1}{4}\underset{=0}{a_2} = 0 \Rightarrow a_0 = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 1 = -6 \tag{3.27}$$

elde edilir. $(5.10)_1$ ' in bu çarpanı,

$$\frac{1}{\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{4}a_1} = \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot (-6) + \frac{1}{4} \cdot 1} = -\frac{4}{17} \quad (3.28)$$

bulunur ve sonuç olarak

$$\begin{aligned} a_0 &= -6 \cdot \left(\frac{-4}{17} \right) = \frac{24}{17} \\ a_1 &= 1 \cdot \left(-\frac{4}{17} \right) = -\frac{4}{17} \end{aligned} \quad (3.29)$$

elde edilir ki; bu sonuç (5.22) ile aynıdır. Yeni yaklaşımı bulmak için tüm hesaplar tekrar edilir, yani $a_3 = a_4 = \dots = 0$ $a_2 = 1$ alınarak (5.10)' ifadesinde sırasıyla $r = 2$ ve $r = 1$ alınarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_3 &= 0 \Rightarrow a_1 = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \cdot 1 = -6 \\ \frac{1}{4}a_0 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 &= 0 \Rightarrow a_0 = 4 \cdot \left[\left(-\frac{3}{2} \right) \cdot (-6) - \frac{1}{4} \cdot 1 \right] = 35 \end{aligned} \quad (3.30)$$

işlemleriyle

$$a_2 = 1 \quad a_1 = -6 \quad a_0 = 35 \quad (3.31)$$

sonucuna varılır ve yine (5.10)₁ kullanılarak

$$\frac{1}{\frac{3}{4}a_0 + \frac{1}{4}a_1} = \frac{1}{\frac{3}{4} \cdot 35 + \frac{1}{4} \cdot (-6)} = \frac{4}{99} \quad (3.32)$$

çarpanına ulaşılır ve buradan

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 \cdot \frac{4}{99} = \frac{4}{99} \\ a_1 &= -6 \cdot \frac{4}{99} = -\frac{8}{33} \\ a_0 &= 1 \cdot \frac{4}{99} = \frac{4}{99} \end{aligned} \quad (3.33)$$

çözümü elde edilir ki bu sonuç (5.25)' deki değerler ile tamamen aynıdır. (5.10) katsayıları r ' den bağımsız olduğundan, $-1, -6, 35$ sayıları her durumda aynı aşkar çözümlerdir ve hesaplarda ayrıca bir ekonomizasyon sağlamaktadır.

(5.15) için her adımda iki bağımsız çözüm vardır ve gerekli lineer kombinasyon (5.15)' in ilk iki denklemini sağlatılarak elde edilebilir, örneğin

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= 1 & a_n &= a_{n+1} = \dots = 0 \\ a_n &= 1 & a_{n+1} &= a_{n+2} = \dots = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

başlangıç koşullarını sağlayacak iki çözüm alınabilir ki, kesinlikle lineer bağımsızdırlar. Aşıkâr çözümlerin sayısı, üst üçgen formun oluşumundan önce sonsuz matristeki başlangıç satırlarının sayısına bağlıdır. Üst üçgen denklemlerden herhangi biri sıfır olmayan sağ tarafa sahipse, rekürans ilişkisinin özel çözümüne karşı gelen bir başka çözüm alınmalıdır. Eğer iki homojen genel çözüm I ve II olarak ve özel çözüm III olarak işaretlenirse, genel çözüm $A_1I + A_2II + III$ olur, burada A_1 ve A_2 başlangıç denklemleri sağlanacak şekilde seçilmelidir.

“Geri rekürsif ilişki” kullanılarak, istenmeyen terimler elimine edilebilir, örneğin $p_1^r, p_2^r, p_3^r, p_4^r$ çözümlerinde $|p_{3,4}| > 1$ ise A_3 ve A_4 katsayıları küçük olmalıdır. Geri rekürsif ilişkide bu istenmeyen terimlerden kaynaklanan yuvarlama hataları büyümeyiz ve aşıkâr çözümlerden elde edilen küçük çarpanlarla hataları daha da bastırılır.

Diferansiyel denklemler için Chebyshev serileri,

$$p_1(x)y' + p_2(x)y = p_3(x) \quad (3.35)$$

ve

$$q_1(x)y'' + q_2(x)y' + q_3(x)y = q_4(x) \quad (3.36)$$

genel birinci ve ikinci mertebe lineer diferansiyel denklemleri ile incelenecektir. Ancak yöntemin n . mertebe diferansiyel denkleme genellikle kaybetmeksizin uygulanabileceği yine belirtilmelidir. Burada $p_i(x)$ ve $q_i(x)$ ' ler polinomdurlar.

Eğer $-1 \leq x \leq 1$ aralığında $y = \sum_{r=0}^{\infty} T_r(x)$ ve $0 \leq x \leq 1$ aralığında $T_r(x)$ ' li form

şeklinde çözümler aranırsa, Chebyshev serilerinin türevlerinin belirlenmesi problemi ortaya çıkar. Birinci mertebe problem için

$$(p_1(x)y)' - p_1' y + p_2(x)y = p_3(x) \quad (3.37)$$

yardımıyla,

$$p_1 y + \int (p_2 - p_1') y dx = \int p_3 dx + A \quad (3.38)$$

yazılabilir. İkinci merteye problem ise, benzer şekilde

$$\begin{aligned} (q_1 y)'' - q_1'' y - 2q_1' y' + q_2 y' + q_3 y &= q_4 \\ (q_1 y)'' + (q_2 - 2q_1') y' + (q_3 - q_1'') y &= q_4 \\ (q_1 y)'' + [(q_2 - 2q_1') y]' + (q_3 + q_1'' - q_2') y &= q_4 \end{aligned} \quad (3.39)$$

işlemleriyle

$$(q_1 y)' + (q_2 - 2q_1') y + \int (q_3 + q_1'' - q_2') y dx = \int q_4 dx + A \quad (3.40)$$

dönüştürülerek,

$$q_1 y + \int (q_2 - 2q_1') y dx + \int \left(\int (q_1'' - q_2' + q_3) y dx \right) dx = \int \left(\int q_4 dx \right) dx + Ax + B \quad (3.41)$$

yapısında yazılabilir, burada A ve B integral sabitleridir ve başlangıç koşullarından belirlenmelidir.

$x^r T_s(x)$ çarpanlarının Chebyshev polinomları cinsinden bilinen formüller ve bunların integralleri (5.37) ve (5.41) gibi denklemlerinin sol tarafında $T_r(x)$ ' in katsayılarının, a_r katsayılarının sonlu lineer kombinasyonu olduğu sonsuz Chebyshev serileri cinsinden yazılmasına izin verir. Sağ tarafları ise sonlu seridir ve karşı gelen terimlerin karşılaştırılması (5.15) problemine çok benzer formda sonsuz bir lineer denklemler kümesi üretilir. (5.15)₂ ' de olduğu gibi sonlu sayıda terim içeren özel denklemlerde görülebilir.

Son olarak sonsuz sayıda terim içeren koşullardan kaynaklanan ek denklemler vardır. Lineer koşulların herhangi bir formunun uygulanabilir olduğu özellikle belirtilmelidir. Özelde,

$$\alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0) + \alpha_2 y(1) + \alpha_3 y'(-1) = \alpha_4 \quad (3.42)$$

formunda karışık koşullarda olabilir ki bu durum adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılan birçok sayısal yöntemi oldukça güçleştirmesine rağmen bu yöntemde tek kriter, koşulların Chebyshev katsayılarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilmeleridir.

Tezin bu bölümünde son olarak, bu bağlamda doğrudan hesap yöntemi, geriye rekürsif ilişki ve geriye rekürsif ilişkinin bir modifikasyonu olan Clenshaw yöntemi ile çeşitli örnekler çözülecektir.

Örnek 5.1: $(1+x)y' + (1+x+x^2)y = 1-x \quad y(0) - \frac{3}{4}y(1) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$

Bu birinci mertebe denklem, koşulun karışıklığı nedeniyle zor bir problemdir.

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r^*(x) \quad (3.43)$$

çözüm önerisi ve (5.37) yardımıyla,

$$(1+x) \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r^*(x) + \int (1+x+x^2-1) \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r^*(x) dx = \int (1-x) dx + A \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \int (x+x^2) \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r^*(x) dx &= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \int (x+x^2) T_r^*(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left[\int x T_r^*(x) dx + \int x^2 T_r^*(x) dx \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir, burada (1.69)

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left[\int \frac{1}{2^2} \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} T_{r-1+i}^*(x) dx + \int \frac{1}{2^4} \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} T_{r-2+i}^*(x) dx \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left[\frac{1}{4} \int (T_{r-1}^*(x) + 2T_r^*(x) + T_{r+1}^*(x)) dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16} \int (T_{r-2}^*(x) + 4T_{r-1}^*(x) + 6T_r^*(x) + 4T_{r+1}^*(x) + T_{r+2}^*(x)) dx \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

ve sonrasında (2.86) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r} T_r^*(x) - \frac{1}{r-2} T_{r-2}^*(x) \right) + 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}^*(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}^*(x) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+2} T_{r+2}^*(x) - \frac{1}{r} T_r^*(x) \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{r-1} T_{r-1}^*(x) - \frac{1}{r-3} T_{r-3}^*(x) \right) + 4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r} T_r^*(x) - \frac{1}{r-2} T_{r-2}^*(x) \right) \right. \\
&\quad \left. + 6 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}^*(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}^*(x) \right) + 4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+2} T_{r+2}^*(x) - \frac{1}{r} T_r^*(x) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+3} T_{r+3}^*(x) - \frac{1}{r+1} T_{r+1}^*(x) \right) \right\} \quad (3.47)
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r^*(x) + \sum_{r=0}^{\infty} ' \frac{a_r}{4} (T_{r-1}^*(x) + 2T_r^*(x) + T_{r+1}^*(x)) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(-\frac{1}{8} \cdot \frac{T_{r-2}^*(x)}{r-2} + \frac{13}{64} \cdot \frac{T_{r+1}^*(x)}{r+1} - \frac{13}{64} \cdot \frac{T_{r-1}^*(x)}{r-1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{T_{r+2}^*(x)}{r+2} \right. \\
&\quad \left. + -\frac{1}{64} \cdot \frac{T_{r-3}^*(x)}{r-3} + \frac{1}{64} \cdot \frac{T_{r+3}^*(x)}{r+3} \right) = x - \frac{x^2}{2} + B \quad (3.48)
\end{aligned}$$

işlemleriyle ve (1.40) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r^*(x) + \sum_{r=-1}^{\infty} ' \frac{a_{r+1}}{4} T_r^*(x) + \sum_{r=0}^{\infty} ' \frac{a_r}{2} T_r^*(x) + \sum_{r=1}^{\infty} ' \frac{a_{r-1}}{4} T_r^*(x) \\
&\quad - \frac{1}{8} \sum_{r=-2}^{\infty} 'a_{r+2} \frac{T_r^*(x)}{r} + \sum_{r=1}^{\infty} 'a_{r-1} \frac{13T_r^*(x)}{64r} + \sum_{r=-1}^{\infty} 'a_{r+1} \frac{-13T_r^*(x)}{64r} \\
&\quad + \sum_{r=2}^{\infty} ' \frac{a_{r-2}}{8} \frac{T_r^*(x)}{r} + \sum_{r=-3}^{\infty} 'a_{r+3} \frac{-T_r^*(x)}{64r} + \sum_{r=3}^{\infty} 'a_{r-3} \frac{T_r^*(x)}{64r} \\
&\quad = \frac{1}{2} (T_1^*(x) + T_0^*(x)) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} (T_2^*(x) + 4T_1^*(x) + 3T_0^*(x)) + BT_0^*(x) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (Bkz. EK E) Burada daha ileri gitmeden önce bazı yerlere açıklık getirilmelidir;

1. (1.68) ve (1.69) numaralı denklemlerde $\cos(x)$ çift fonksiyon olduğundan $T_{-j} = T_j$ olacağına, dolayısıyla bu denklemlerde indislerin mutlak değerinin alınmasının gerektiğine yani a_{-i} katsayılarının a_i ' lerin katsayıları ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir.
2. (2.86) numaralı denklemden $T_2^*(x)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\int T_2^*(x)dx &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} T_3^*(x) - T_1^*(x) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} (32x^3 - 48x^2 + 18x - 1) - (2x - 1) \right) \\ &= \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + \frac{1}{6}\end{aligned}\quad (3.50)$$

doğrudan hesaplandığında ise;

$$\int (8x^2 - 8x + 1)dx = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + A \quad (3.51)$$

elde edildiğinde A katsayısı uygun bir şekilde seçilebilecektir. Benzer şekilde (5.44) ifadesi de $T_0(x)$ ' in katsayısı olarak sabit terim içerdiğinden (5.44)' ün solu ve sağ bu sabitlerin uygun seçimiyle her zaman eşitlenebilir, dolayısıyla $T_0(x)$ ' in katsayılarını eşitlemek yerine;

$$y(0) - \frac{3}{4}y(1) = 1 \quad (3.52)$$

şartını doğrudan çözümden sağlamak gerektiğine dikkat edilmelidir, yani (5.43) yapısında çözüm arandığında,

$$\begin{aligned}y(0) &= \frac{a_0}{2} + a_1 T_1^*(0) + a_2 T_2^*(0) + a_3 T_3^*(0) + \dots + a_n T_n^*(0) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + (-1)^n a_n + \dots \\ y(1) &= \frac{a_0}{2} + a_1 T_1^*(1) + a_2 T_2^*(1) + a_3 T_3^*(1) + \dots + a_n T_n^*(1) + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots\end{aligned}\quad (3.53)$$

olduğundan, (5.52) koşulunda yerine yazılarak

$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \right) + a_1 \left(-1 - \frac{3}{4} \right) + a_2 \left(1 - \frac{3}{4} \right) + a_3 \left(-1 - \frac{3}{4} \right) + a_4 \left(1 - \frac{3}{4} \right) \\ &+ a_5 \left(-1 - \frac{3}{4} \right) \dots = 1\end{aligned}\quad (3.54)$$

sonuç olarak

$$\frac{a_0}{8} - \frac{7}{4}a_1 + \frac{a_2}{4} - \frac{7}{4}a_3 + \frac{a_4}{4} - \frac{7}{4}a_5 + \dots = 1 \quad (3.55)$$

denklemini elde edilmekte ve böylece (5.52) koşulu sonsuz terimli lineer bir denklem olarak yazılabilmektedir.

3. (2.86) denkleminde de ikinci notta belirtilen keyfi sabitlerin eşitlenebilmesinden dolayı T_0 ' lı terimin anlamı olmayacağına yani, (2.86) ifadesi $r=0$ için yazılıp, T_0 ' ın katsayısı düşünülmezse elde edilen $T_2^*(x)$ katsayısının $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} T_2^*(x) \right) = \frac{1}{8} T_2^*(x)$ olduğuna, bunun da (2.88) denkleminde elde edilen terim ile aynı olduğuna, benzer şekilde (2.86)' de $r=0$ için $\frac{1}{4} (T_1^*(x) + T_{-1}^*(x))$ ve çift fonksiyon olmaları nedeniyle bunun da $\frac{1}{2} T_1^*(x)$ ve (2.87)' deki katsayı ile aynı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu açıklamadaki amaç (2.86) ve (2.88) ile verilen ifadelerde T_1^* ve T_2^* katsayılarını bulmak için hiç rekürsif ilişki kullanmadan (2.86)' nin kullanılabileceğini belirtmektir.

Bunlara dikkat edilerek açılım yapıldığında, $r=3,4,\dots$ için $T_r^*(x)$ teriminin katsayısı

$$\begin{aligned} a_r + \frac{a_{r+1}}{4} + \frac{a_r}{2} + \frac{a_{r-1}}{4} - \frac{a_{r+2}}{8r} + \frac{13a_{r-1}}{64r} - \frac{13a_{r+1}}{64r} + \frac{a_{r-2}}{8r} - \frac{a_{r+3}}{64r} + \frac{a_{r-3}}{64r} \\ = \frac{a_{r-3}}{64r} + \frac{a_{r-2}}{8r} + \left(\frac{1}{4} + \frac{13}{64r} \right) a_{r-1} + \frac{3a_r}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{64r} \right) a_{r+1} - \frac{a_{r+2}}{8r} - \frac{a_{r+3}}{64r} = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

olarak bulunur. Burada belirtildiği gibi T_0 katsayısı sabiti belirleyeceğinden hesaplanmasına gerek yoktur, bunun yerine sınır değer koşulundan elde edilen (5.54) kullanılacaktır. Ayrıca (5.56) bağıntısının özel durumları yukarıda anlatılan nedenlerden dolayı $r=1,2$ için de açılabilir, yani, $r=1$ için (5.49)' in sağ tarafındaki T_1^* katsayısına eşitlenir ve çift fonksiyon olma özelliğine dikkat edilirse

$$\frac{29}{64} a_0 + \frac{13}{8} a_1 + \frac{1}{16} a_2 - \frac{a_3}{8} - \frac{a_4}{64} = \frac{1}{4}, \quad (3.57)$$

Benzer şekilde (5.56) $r=2$ için açılıp (5.49)' de $T_2^*(x)$ katsayısına eşitlenirse;

$$\frac{a_0}{16} + \frac{23}{64} a_1 + \frac{3}{2} a_2 + \frac{19}{128} a_3 - \frac{a_4}{16} - \frac{a_5}{128} = -\frac{1}{16} \quad (3.58)$$

elde edilir, diğerlerine ise doğrudan (5.56) rekürsif bağıntısının $r = 3, 4, \dots$ açılımından ulaşılır. Sonuç olarak veirilen koşulla (5.55) birlikte tüm denklemler yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{a_0}{8} - \frac{7}{4}a_1 + \frac{a_2}{4} - \frac{7}{4}a_3 + \frac{a_4}{4} - \frac{7}{4}a_5 + \dots = 1 \\
& \frac{29}{64}a_0 + \frac{13}{8}a_1 + \frac{1}{16}a_2 - \frac{a_3}{8} - \frac{a_4}{64} = \frac{1}{4} \\
& \frac{a_0}{16} + \frac{23}{64}a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \frac{19}{128}a_3 - \frac{a_4}{16} - \frac{a_5}{128} = -\frac{1}{16} \\
& \frac{a_0}{192} + \frac{a_1}{24} + \frac{61}{192}a_2 + \frac{3}{2}a_3 + \frac{35}{192}a_4 - \frac{a_5}{24} - \frac{a_6}{192} = 0 \quad (3.59) \\
& \quad + \frac{a_1}{256} + \frac{1}{32}a_2 + \frac{77}{256}a_3 + \frac{3}{2}a_4 + \frac{51}{256}a_5 - \frac{a_6}{32} - \frac{a_7}{256} = 0 \\
& \quad \quad \frac{a_2}{320} + \frac{a_3}{40} + \frac{93}{320}a_4 + \frac{3}{2}a_5 + \dots = 0 \\
& \quad \quad \quad \frac{a_3}{384} + \dots = 0
\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem örnekten önce belirtildiği gibi doğrudan yöntemle veya geriye rekürsif ilişki kullanarak iki şekilde çözülebilir. Yok etme yöntemi birinciye göre satırlarda sonsuz terim üretir ancak bu sorun değildir. Dahası, bu yöntemle çarpımlar ve satır değişiklikleri hatırlanırsa ek bir satır eklendiğinde ek bir sütun da eklenebilir ve ardışık yaklaşık çözümler için ek hesap sayısı yine minimum tutulur. Hatta, bir matrisi alt üçgen ve üst üçgen olarak iki matrisin çarpımı şeklinde ayrıştırmaya dayanan kompakt yok etme metodu kullanmak daha iyidir. Nümerik stabiliteyi korumak için satır değişiklikleri yapılmalı, köşegen elemanları dominant oluncaya kadar bu işlem sadece ilk birkaç satır için yapılır. Örneğin, (5.59) ‘ da sadece ilk iki satırı değiştirmek yeterlidir. Dolayısıyla ortaya

$$\begin{pmatrix} 0.453125 & 1.625 & 0.0625 & -0.125 \\ 0.125 & -1.75 & 0.25 & -1.75 \\ 0.0625 & 0.359375 & 1.5 & 0.1484375 \\ 0.05208 & 0.416667 & 0.317708 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \\ -0.0625 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

matris sistemi çıkar ve buradan örneğin “LU ayrıştırmı” ile çözüm

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2.1164 \\
a_1 &= -0.434477 \\
a_2 &= -0.0267855 \\
a_3 &= 0.0103935
\end{aligned} \tag{3.61}$$

olarak bulunur (Bkz. Ek F).

İkinci yöntem ortaya çıkan homojen denklemlerin bağımsız çözümlerini hesaplamak için geriye rekürans bağıntısı kullanılır. Açıkçası, üç çözüm gereklidir ve bunların lineer kombinasyonu (5.59)' da ilk üç başlangıç denkleminin sağlanmasından ortaya çıkar. Aşağıda **Çizelge 5.1** ile verilen başlangıç şartları

Çizelge 5.1 Dört bağımsız çözüm taslağı.

r	$a_r(IV)$	$a_r(III)$	$a_r(II)$	$a_r(I)$
5	0	0	0	0
4	1	0	0	0
3		1	0	0
2			1	0
1				1
0				

altında dört bağımsız çözüm için bu tablonun boş olan kısımları (5.56) rekürsif ilişkisinden doldurulmalıdır. Birinci sütun $a_r(IV)$ için, $(a_5 = a_6 = a_7 = \dots 0, a_4 = 1)$ $r = 6$ alındığında

$$\frac{a_3}{64 \cdot 6} + \frac{a_4}{8 \cdot 6} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{13}{64 \cdot 6} \right) a_5 + \frac{3a_6}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{64 \cdot 6} \right) a_7 - \frac{a_8}{8 \cdot 6} - \frac{a_9}{64 \cdot 6}}_{=0} = 0 \Rightarrow a_3 = -8 \tag{3.62}$$

$r = 5$ alındığında,

$$\frac{a_2}{64 \cdot 5} + \frac{\underbrace{a_3}_{=-8}}{8 \cdot 5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{13}{64 \cdot 5} \right) \underbrace{a_4}_{=1} = 0 \Rightarrow a_2 = -29 \tag{3.63}$$

$r = 4$ alındığında

$$\frac{a_1}{64 \cdot 4} + \frac{\underbrace{a_2}_{=-29}}{8 \cdot 4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{13}{64 \cdot 4} \right) \cdot (-8) + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow a_1 = 464 \tag{3.64}$$

ve son olarak $r = 3$ alındığında,

$$\frac{a_0}{64 \cdot 3} + \frac{\overset{a_1}{=464}}{8 \cdot 3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{13}{64 \cdot 3} \right) \cdot (-29) + \frac{3}{2} \cdot (-8) + \left(\frac{1}{4} - \frac{13}{64 \cdot 3} \right) \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_0 = 326 \quad (3.65)$$

elde edilmektedir. Benzer işlemler ikinci sütun, yani $a_r(III)$ için yapılırsa, $(a_4 = a_5 = \dots 0, a_3 = 1)$ başlangıç şartları altında, sırasıyla $r = 5, 4, 3$ için

$$\begin{aligned} a_2 &= -8 \\ a_1 &= -13 \\ a_0 &= 304 \end{aligned} \quad (3.66)$$

ve yine benzer şekilde ikinci sütun, yani $a_r(II)$ için yapılırsa, $(a_3 = a_4 = \dots 0, a_2 = 1)$ başlangıç şartları altında, sırasıyla $r = 4, 3$ için

$$\begin{aligned} a_1 &= -8 \\ a_0 &= 3 \end{aligned} \quad (3.67)$$

ve son olarak birinci sütun, yani $a_r(I)$ $(a_2 = a_3 = \dots 0, a_1 = 1)$ başlangıç şartları altında, $r = 3$ için

$$a_0 = -8 \quad (3.68)$$

değerleri ortaya çıkar. Tüm bu değerler tabloya işlendiğinde

Çizelge 5.2 Dört bağımsız çözüm son hali.

r	$a_r(IV)$	$a_r(III)$	$a_r(II)$	$a_r(I)$
5	0	0	0	0
4	1	0	0	0
3	-8	1	0	0
2	-29	-8	1	0
1	464	-13	-8	1
0	326	304	3	-8

elde edilir. Üç başlangıç koşulu için **Çizelge 5.2** son üç sütunu, üç bağımsız çözüm olarak ele alınıp (5.59) ifadesinin ilk denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& A_3 a_r(III) + A_2 a_r(II) + A_1 a_r(I) = 1 \\
& A_3 \left(\frac{a_0}{8} - \frac{7}{4} a_1 + \frac{a_2}{4} - \frac{7}{4} a_3 \right) a_r(III) + A_2 \left(\frac{a_0}{8} - \frac{7}{4} a_1 + \frac{a_2}{4} - \frac{7}{4} a_3 \right) a_r(II) \\
& + A_1 \left(\frac{a_0}{8} - \frac{7}{4} a_1 + \frac{a_2}{4} - \frac{7}{4} a_3 \right) a_r(I) = 1 \quad (3.69) \\
& A_3 \left(\frac{304}{8} - \frac{7}{4}(-13) + \frac{(-8)}{4} - \frac{7}{4} \cdot 1 \right) + A_2 \left(\frac{3}{8} - \frac{7}{4}(-8) + \frac{1}{4} - \frac{7}{4} \cdot 0 \right) \\
& + A_1 \left(\frac{(-8)}{8} - \frac{7}{4} \cdot 1 + \frac{0}{4} - \frac{7}{4} \cdot 0 \right) = 1
\end{aligned}$$

ve paydayı ortadan kaldıracak uygun bir sabitle çarpılırsa

$$456A_3 + 117A_2 - 22A_1 = 8 \quad (3.70)$$

sonucuna ulaşılır. Benzer işlemler (5.59)' un ikinci ve üçüncü denklemlerinde kullanılırsa, toplu olarak bu üç denklem

$$\begin{aligned}
456A_3 + 117A_2 - 22A_1 &= 8 \\
7424A_3 - 741A_2 - 128A_1 &= 16 \\
317A_3 - 152A_2 - 18A_1 &= -8
\end{aligned} \quad (3.71)$$

olarak elde edilir. Bu denklemlerin çözümü

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0.151537 \\
A_2 &= 0.0563623 \\
A_3 &= 0.0103935
\end{aligned} \quad (3.72)$$

verir, (Bkz. EK G) bu katsayılar genel çözüm olan $A_3 a_r(III) + A_2 a_r(II) + A_1 a_r(I)$ ifadesinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
a_3 &= A_3 a_3(III) + A_2 a_3(II) + A_1 a_3(I) \\
&= 0.0103935 \cdot 1 + A_2 \cdot 0 + A_1 \cdot 0 = 0.0103935 \\
a_2 &= A_3 a_2(III) + A_2 a_2(II) + A_1 a_2(I) \\
&= 0.0103935 \cdot (-8) + 0.0563623 \cdot 1 + A_3 \cdot 0 = -0.0267855 \\
a_1 &= A_3 a_1(III) + A_2 a_1(II) + A_1 a_1(I) \\
&= 0.0103935 \cdot (-13) + 0.0563623 \cdot (-8) + 0.151537 \cdot 1 = -0.434477 \\
a_0 &= A_3 a_0(III) + A_2 a_0(II) + A_1 a_0(I) \\
&= 0.0103935 \cdot (304) + 0.0563623 \cdot 3 + 0.151537 \cdot (-8) = 2.11641
\end{aligned} \quad (3.73)$$

sonuçlarına ulaşılır ki, bu sonuçlar (5.61) ile özdeştir. Bir sonraki daha yakınsak çözüm **Çizelge 5.2** de $a_r(IV)$, $a_r(III)$, $a_r(II)$ alınarak bulunabilir. Bu durumda

(5.71) formunda yeni denklemler için sadece bir ekstra rekürans ve sadece bir yeni katsayı gelecektir. Bu durumun $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ayrıştırımına göre hesaptan büyük kazanım olduğu açıktır.

Örnek 5.2: (İkinci mertebe sistem)

İkinci mertebe sistem için teknik farklı değildir, sadece burada iki koşul gereklidir ve bunlara karşı gelen cebrik denklemlerde sonsuz sayıda terim içeren iki başlangıç denklemi olacaktır. Örneğin,

$$\begin{aligned} y'' + xy' + xy &= 1 + x + x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ y(0) &= 1 & y'(0) + 2y(1) - y(-1) = -1 \end{aligned} \quad (3.74)$$

probleminin oldukça farklı bir ikinci koşul içermesi, problemi zorlaştırmasına rağmen, bahsedilen yöntemde, hiç sorun teşkil etmeyecektir. İki kez integrasyonla, (5.41) denkleminde,

$$\begin{aligned} y + \int (x-2) y dx + \iint (-1+x) y dx dx &= \iint (1+x+x^2) dx dx + A + Bx \\ \Rightarrow y + \int xy dx + \iint (xy-y) dx dx &= A + Bx + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$y = \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x)$ çözüm önerisiyle;

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) + \int x \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) dx + \iint x \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) dx dx \\ = A + Bx + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} \end{aligned} \quad (3.76)$$

seri denklemini ortaya çıkar, burada integraller (1.68) ve (2.1) yardımıyla tek tek hesaplanır

$$\begin{aligned} \int x \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) dx &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int x T_r(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} T_{r-1+2i}(x) \right) dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int \left(\frac{1}{2} (T_{r-1}(x) + T_{r+1}(x)) \right) dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r+2} T_{r+2}(x) - \frac{1}{r-2} T_{r-2}(x) \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\int \sum_{r=0}^{\infty} a_r T_r(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int T_r(x) dx = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}(x) \right) \right) dx \quad (3.78)$$

(5.76) ifadesinde görülen (5.77) ve (5.78) in integralleri bir kez daha alınırsa

$$\begin{aligned}
\iint x \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r(x) dx dx &= \int \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+2} T_{r+2}(x) - \frac{1}{r-2} T_{r-2}(x) \right) dx \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+3} T_{r+3}(x) - \frac{1}{r+1} T_{r+1}(x) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{r-2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r-1} T_{r-1}(x) - \frac{1}{r-3} T_{r-3}(x) \right) \right) \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{8} \left(\frac{1}{(r-2)(r-3)} T_{r-3}(x) - \frac{1}{(r-2)(r-1)} T_{r-1}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{(r+2)(r+1)} T_{r+1}(x) + \frac{1}{(r+2)(r+3)} T_{r+3}(x) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

ve

$$\begin{aligned}
\iint \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r(x) dx dx &= \int \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+1} T_{r+1}(x) - \frac{1}{r-1} T_{r-1}(x) \right) \right) dx \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r+2} T_{r+2}(x) - \frac{1}{r} T_r(x) \right) - \frac{1}{r-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} T_r(x) - \frac{1}{r-2} T_{r-2}(x) \right) \right) \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(r-1)(r-2)} T_{r-2}(x) - \left(\frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{r(r-1)} \right) T_r(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{(r+2)(r+1)} T_{r+2}(x) \right) \right) \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{4} \left(\frac{T_{r-2}(x)}{(r-1)(r-2)} - \frac{2}{(r-1)(r+1)} T_r(x) + \frac{T_{r+2}(x)}{(r+2)(r+1)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

elde edilir. (5.77), (5.79) ve (5.80) integralleri (5.76)' da yerine konursa ve (1.39) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r(x) + \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{r+2} T_{r+2}(x) - \frac{1}{r-2} T_{r-2}(x) \right) \right) \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left[\left(\frac{T_{r-3}(x)}{(r-2)(r-3)} - \frac{T_{r-1}(x)}{(r-2)(r-1)} \right) - \frac{T_{r+1}(x)}{(r+2)(r+1)} + \frac{T_{r+3}(x)}{(r+2)(r+3)} \right] \\
&- \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r \left[\frac{T_{r-2}(x)}{(r-1)(r-2)} - \frac{2}{(r-1)(r+1)} T_r(x) + \frac{T_{r+2}(x)}{(r+2)(r+1)} \right] \\
&= AT_0(x) + BT_1(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} (T_0(x) + T_2(x)) + \frac{1}{6} \frac{1}{4} (3T_1(x) + T_3(x)) \\
&+ \frac{1}{12} \left[\frac{1}{8} (T_4(x) - T_0(x)) + \frac{1}{2} (T_0(x) + T_2(x)) \right]
\end{aligned} \tag{3.81}$$

bulunur. Tüm ifadeler $T_r(x)$ cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r(x) + \sum_{r=0}^{\infty} ' \frac{a_{r-2}}{4} \frac{1}{r} T_r(x) - \sum_{r=-2}^{\infty} \frac{a_{r+2}}{4} \frac{1}{r} T_r(x) + \sum_{r=-3}^{\infty} ' \frac{a_{r+3}}{8} \frac{1}{(r+1)r} T_r(x) \\
& - \sum_{r=-1}^{\infty} ' \frac{a_{r+1}}{8} \frac{1}{(r-1)r} T_r(x) - \sum_{r=1}^{\infty} ' \frac{a_{r-1}}{8} \frac{1}{(r+1)r} T_r(x) - \sum_{r=3}^{\infty} ' \frac{a_{r-3}}{8} \frac{1}{(r-1)r} T_r(x) \\
& - \sum_{r=-2}^{\infty} ' \frac{a_{r+2}}{4} \frac{1}{(r+1)r} T_r(x) + \sum_{r=0}^{\infty} ' \frac{a_r}{2} \frac{1}{(r+1)(r-1)} T_r(x) - \sum_{r=2}^{\infty} ' \frac{a_{r-2}}{4} \frac{1}{r(r-1)} T_r(x) \quad (3.82) \\
& = \left(A + \frac{1}{4} - \frac{1}{96} + \frac{1}{24} \right) T_0(x) + \left(B + \frac{3}{24} \right) T_1(x) \\
& + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) T_2(x) + \frac{1}{24} T_3(x) + \frac{1}{96} T_4(x)
\end{aligned}$$

elde edilir, burada önceki örnekte verilen uyarılara benzer şekilde çift fonksiyon özelliğine, $T_0(x)$ ve $T_1(x)$ katsayılarını ortaya çıkan keyfi sabitler nedeniyle ele almaya gerek olmadığına, verilen koşullardan doğrudan sağlatılması gerektiğine dikkat edilmelidir.

Çözüm önerisi olarak $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı Chebyshev fonksiyonları cinsinden seri açılım, yani

$$y(x) = \sum_{r=0}^{\infty} 'a_r T_r(x) \quad (3.83)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
y(0) &= \frac{a_0}{2} \underbrace{T_0(0)}_{=1} + a_1 \underbrace{T_1(0)}_{=0} + a_2 \underbrace{T_2(0)}_{=-1} + a_3 \underbrace{T_3(0)}_{=0} + \dots + a_n T_n(0) + \dots \\
&= \frac{a_0}{2} - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 + \dots + (-1)^k a_{2k} + \dots \quad (3.84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(1) &= \frac{a_0}{2} \underbrace{T_0(1)}_{=1} + a_1 \underbrace{T_1(1)}_{=1} + a_2 \underbrace{T_2(1)}_{=1} + a_3 \underbrace{T_3(1)}_{=1} + \dots + a_n T_n(1) + \dots \\
&= \frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (3.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(-1) &= \frac{a_0}{2} \underbrace{T_0(-1)}_{=1} + a_1 \underbrace{T_1(-1)}_{=-1} + a_2 \underbrace{T_2(-1)}_{=1} + a_3 \underbrace{T_3(-1)}_{=-1} + \dots + a_n T_n(-1) + \dots \\
&= \frac{a_0}{2} - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k + \dots \quad (3.86)
\end{aligned}$$

ifadelerinden verilen (5.74) probleminin birinci koşulu

$$y(0) = \frac{a_0}{2} - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - \dots = 1 \quad (3.87)$$

ve $y'(x)$ türevi için ise **(2.103)** ve **(2.107)** ifadelerinden faydalanılırsa,

$$y'(x) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r T_r(x) = \frac{C_0}{2} T_0(x) + C_1 T_1(x) + C_2 T_2(x) + \dots + C_n T_n(x) + \dots \quad (3.88)$$

ve başlangıç noktası kullanıldığında

$$\begin{aligned} y'(0) &= \frac{C_0}{2} \underbrace{T_0(0)}_{=1} + C_1 \underbrace{T_1(0)}_{=0} + C_2 \underbrace{T_2(0)}_{=-1} + C_3 \underbrace{T_3(0)}_{=0} + \dots + C_n T_n(0) + \dots \\ &= \frac{C_0}{2} - C_2 + C_4 - C_6 + C_8 - C_{10} + \dots + (-1)^k C_{2k} + \dots \end{aligned} \quad (3.89)$$

elde edilen bu ifadede **(2.109)** yardımıyla

$$\begin{aligned} y'(0) &= \frac{1}{2} (2a_1 + 6a_3 + 10a_5 + 14a_7 + \dots) - (6a_3 + 10a_5 + 14a_7 + 18a_9 + \dots) \\ &\quad + (10a_5 + 14a_7 + 18a_9 + \dots) - (14a_7 + 18a_9 + \dots) + \dots \\ &= a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7 + \dots \end{aligned} \quad (3.90)$$

elde edilir (Bkz. EK H). Dolayısıyla son olarak problemin ikinci koşulu $y'(0) + 2y(1) - y(-1) = -1$ için **(5.90)**, **(5.86)**, **(5.85)** göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} &a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7 + \dots + 2 \left(\frac{a_0}{2} + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \right) \\ &\quad - \left(\frac{a_0}{2} - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^k a_k + \dots \right) = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a_0}{2} + 4a_1 + a_2 + a_4 + 8a_5 + a_6 + \dots = -1 \end{aligned} \quad (3.91)$$

sonsuz terimli lineer koşulu bulunur.

(2.1) ifadesinin $T_0(x)$ ve $T_1(x)$ katsayıları dışında diğer katsayılarını bulmak için $r=0$ ve $r=1$ içinde kullanılabileceğine dikkat edilerek **(5.82)** ifadesinde $T_r(x)$ katsayıları sol taraf için;

$$\begin{aligned}
& a_r + \frac{a_{r-2}}{4r} - \frac{a_{r+2}}{4r} + \frac{a_{r+3}}{8r(r+1)} - \frac{a_{r+1}}{8r(r-1)} + \frac{a_{r-1}}{8r(r+1)} + \frac{a_{r-3}}{8r(r-1)} \\
& - \frac{a_{r+2}}{4r(r+1)} + \frac{a_r}{2r(r-1)(r+1)} - \frac{a_{r-2}}{4r(r-1)} \\
& = \frac{a_{r-3}}{8r(r-1)} + \frac{a_{r-2}}{4r} \frac{r-2}{r-1} - \frac{a_{r-1}}{8r(r+1)} + \left(1 + \frac{1}{2(r-1)(r+1)}\right) a_r \\
& - \frac{a_{r+1}}{8r(r-1)} - \frac{a_{r+2}}{4r} \frac{r+2}{r+1} + \frac{a_{r+3}}{8r(r+1)}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

sıfıra ve $r = 2, 3, \dots$ için sağ tarafın katsayılarına eşitlenmelidir. Buradan çift fonksiyonun getirdiği özellik te göz önünde bulundurularak ($a_{-r} = a_r$), $r = 2, 3, 4, 5$ için ise sırasıyla,

$$\frac{1}{16} \underbrace{a_{-1}}_{a_1} - \frac{1}{48} a_1 + \frac{7}{6} a_2 - \frac{1}{16} a_3 - \frac{1}{6} a_4 + \frac{1}{48} a_5 = \frac{7}{24} \tag{3.93}$$

$$\frac{1}{48} a_0 + \frac{1}{24} a_1 - \frac{1}{96} a_2 + \frac{17}{16} a_3 - \frac{1}{48} a_4 - \frac{5}{48} a_5 + \frac{1}{96} a_6 = \frac{1}{24} \tag{3.94}$$

$$\frac{1}{96} a_1 + \frac{1}{24} a_2 - \frac{1}{160} a_3 + \frac{31}{30} a_4 - \frac{1}{96} a_5 - \frac{3}{40} a_6 + \frac{1}{160} a_7 = \frac{1}{96} \tag{3.95}$$

$$\frac{1}{160} a_2 + \frac{3}{80} a_3 - \frac{1}{240} a_4 + \frac{49}{48} a_5 - \frac{1}{160} a_6 - \frac{7}{120} a_7 + \frac{1}{240} a_8 = 0 \tag{3.96}$$

ilişkilerine ulaşılır. Problemin verilen şartları (5.87) ve (5.91) ile birlikte son dört denklem yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{a_0}{2} - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 + \dots = 1 \\
& \frac{a_0}{2} + 4a_1 + a_2 + a_4 + 8a_5 + a_6 + \dots = -1 \\
& \frac{1}{24} a_1 + \frac{7}{6} a_2 - \frac{1}{16} a_3 - \frac{1}{6} a_4 + \frac{1}{48} a_5 = \frac{7}{24} \\
& \frac{1}{48} a_0 + \frac{1}{24} a_1 - \frac{1}{96} a_2 + \frac{17}{16} a_3 - \frac{1}{48} a_4 - \frac{5}{48} a_5 + \frac{1}{96} a_6 = \frac{1}{24} \\
& \frac{1}{96} a_1 + \frac{1}{24} a_2 - \frac{1}{160} a_3 + \frac{31}{30} a_4 - \frac{1}{96} a_5 - \frac{3}{40} a_6 + \frac{1}{160} a_7 = \frac{1}{96} \\
& \frac{1}{160} a_2 + \frac{3}{80} a_3 - \frac{1}{240} a_4 + \frac{49}{48} a_5 - \frac{1}{160} a_6 - \frac{7}{120} a_7 + \frac{1}{240} a_8 = 0
\end{aligned} \tag{3.97}$$

denklemleri elde edilir. Önceki örneğe benzer şekilde öncelikle $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ ayrıştırımı ile

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{96} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{96} & \frac{1}{110} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{984} & \frac{7}{220} & \frac{-15}{3742} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{55}{48} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1871}{1760} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{310853}{299360} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

ve $\mathbf{Ua} = \mathbf{c} = \left(1 \quad -2 \quad \frac{5}{16} \quad \frac{19}{1056} \quad \frac{689}{119744}\right)^T$ olmak üzere çözüm

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{788903}{310853} = 2.53787 & a_1 &= -\frac{198087}{310853} = -0.637237 \\ a_2 &= \frac{85321}{310853} = 0.274474 & a_3 &= \frac{5360}{310853} = 0.0172429 \\ a_4 &= \frac{3445}{621706} = 0.0055412 \end{aligned} \quad (3.99)$$

olarak elde edilebilir. Geriye rekürans yönteminde bir husus açığa kavuşturulmalıdır. Önceki problemde (5.59) denklemlerinde üst üçgen matris 4. denklemle başladığı ve 4. Denklemden itibaren tüm denklemlerin homojen olduğuna, burada ise (5.97) denklemlerinin üst üçgen yapısında görünen denklemlerin homojen olmadığına dikkat edilmelidir. Dolayısıyla bahsedilen üst üçgen yapının üç bağımsız çözümüne ihtiyaç vardır. Bu nedenle bu kümenin üç lineer bağımsız homojen çözümü (I), (II), (III) olarak sağ tarafları sıfır olacak şekilde alınır. Ayrıca bu denklemler homojen olmadıklarından, homojen olmayan kümenin de burada (S) olarak isimlendirilen bir özel çözümü alınmalıdır. Bu özel çözüm $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, ve diğerleri $a_2 = a_3 = \dots = 0$ olarak alınabilecek kadar basit olabilir. (Bu basit seçimin 4. ve 5. denklemleri sağlayacak şekilde alınmasına dikkat edilmelidir.) Sonrasında genel çözüm

$$A_1 a_r(I) + A_2 a_r(II) + A_3 a_r(III) + a_r(S) \quad (3.100)$$

şeklinde bunların lineer kombinasyonu olarak alınabilir. Burada homojen çözümler (5.97)'nin ilk üç denklemini sağlayacak şekilde belirlenir. Bir önceki örnekle paralel olarak benzer bir tabloyu oluşturmak için,

$a_r(IV)$ sütununu için $a_4 = 1, a_5 = a_6 = \dots = 0$ başlangıç koşulları ile (5.92) sırasıyla $r = 6$ için yazılırsa

$$\frac{1}{240}a_3 + \frac{1}{4}\underbrace{a_4}_{=1} - \frac{1}{336}\underbrace{a_5}_{=0} + \frac{71}{70}\underbrace{a_6}_{=0} - \frac{1}{240}\underbrace{a_7}_{=0} - \frac{1}{21}\underbrace{a_8}_{=0} + \frac{1}{240}\underbrace{a_9}_{=0} = 0 \Rightarrow a_3 = -8 \quad (3.101)$$

elde edilir. Benzer şekilde $r = 5, 4, 3$ için sırasıyla $a_2 = \frac{146}{3}, a_1 = -\frac{896}{3}$ ve

$a_0 = \frac{3092}{3}$ değerlerine ulaşılır. Aynı işlem sırası $a_r(III)$ sütunu için $a_3 = 1,$

$a_4 = a_5 = \dots = 0$ başlangıç koşulları ile $r = 5, 4, 3$ için sırasıyla $a_2 = -6, a_1 = \frac{123}{5},$

$a_0 = -\frac{516}{5}$ sonuçlarını, $a_r(II)$ sütunu için $a_2 = 1, a_3 = a_4 = \dots = 0$ başlangıç koşulları

ile $r = 4, 3$ için sırasıyla $a_1 = -4$ ve $a_0 = \frac{17}{2}$ sonuçlarını ve son olarak $a_r(I)$ sütunu

için $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = 0$ başlangıç koşulları ile $r = 3$ için $a_0 = -2$ sonucunu verir.

Bulunan tüm değerler Çizelge 5.3 te gösterilmiştir.

Çizelge 5.3 Dört bağımsız çözüm son hali.

r	$a_r(IV)$	$a_r(III)$	$a_r(II)$	$a_r(I)$
5	0	0	0	0
4	1	0	0	0
3	-8	1	0	0
2	146/3	-6	1	0
1	-896/3	123/5	-4	1
0	3092/3	-516/5	17/2	-2

Üç başlangıç koşulu için bu tablonun ilk üç sütunu bağımsız çözümler olarak ele alınır ve özel çözümde $a_r(S)$ ($a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = 0$) eklenir ve genel çözüm ifadesi bu üç homojen çözüm ve özel çözümün süperpozisyonu olarak

$$A_1 a_r(II) + A_2 a_r(III) + A_3 a_r(IV) + a_r(S) \quad (3.102)$$

yazılır. Bu çözümün katsayıları için (5.97) denklemlerinin ilk üçü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1403}{3}A_3 - \frac{228}{5}A_2 + \frac{13}{4}A_1 + \boxed{0} &= 1 \\
-\frac{1889}{3}A_3 + \frac{204}{5}A_2 - \frac{43}{4}A_1 + \boxed{4} &= -1 \\
\frac{134}{3}A_3 - \frac{483}{80}A_2 + A_1 + \boxed{\frac{1}{24}} &= \frac{7}{24}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

elde edilir. Burada kutu içine alınan değerler özel çözümün değerleridir. **(5.103)** sisteminin çözümü

$$A_1 = 0.374237, \quad A_2 = 0.0615725, \quad A_3 = 0.0055412 \tag{3.104}$$

olarak bulunur. Son olarak önerilen seri çözümün katsayıları **(5.102)** yardımıyla

$$\begin{aligned}
a_4 &= A_3a_4(IV) + A_2a_4(III) + A_1a_4(II) + a_4(S) \\
&= 0.0055412 \cdot 1 + A_2 \cdot 0 + A_1 \cdot 0 + 0 \\
&= 0.0055412
\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= A_3a_3(IV) + A_2a_3(III) + A_1a_3(II) + a_3(S) \\
&= 0.0055412 \cdot (-8) + 0.0615725 \cdot 1 + A_1 \cdot 0 + 0 \\
&= 0.0172429
\end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= A_3a_2(IV) + A_2a_2(III) + A_1a_2(II) + a_2(S) \\
&= 0.0055412 \cdot \left(\frac{146}{3}\right) + 0.0615725 \cdot (-6) + 0.374237 \cdot 1 + 0 \\
&= 0.274474
\end{aligned} \tag{3.107}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= A_3a_1(IV) + A_2a_1(III) + A_1a_1(II) + a_1(S) \\
&= 0.0055412 \cdot \left(-\frac{986}{3}\right) + 0.0615725 \cdot \left(\frac{123}{5}\right) + 0.374237 \cdot (-4) + \boxed{1} \\
&= -0.637237
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= A_3a_0(IV) + A_2a_0(III) + A_1a_0(II) + a_0(S) \\
&= 0.0055412 \cdot \left(\frac{3092}{3}\right) + 0.0615725 \cdot \left(-\frac{516}{5}\right) + 0.374237 \cdot \left(\frac{17}{2}\right) + 0 \\
&= 2.53787
\end{aligned} \tag{3.109}$$

sonuçlarına ulaşılır ki, bu **(5.99)** ile tamamen aynıdır.

Geriye rekürsif ilişkinin biraz geliştirilmiş benzeri Clenshaw yöntemidir. Bu yöntemde **(2.124)** yardımıyla diferansiyel denklemde her tarafın $T_r(x)$ terimlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıda belirtilen rekürsif yöntem kullanılır:

1. N sayısı çözümün doğruluğu istenilen hata aralığında kalacak şekilde yeterince büyük olmak üzere,

$$\begin{aligned} C_N^{(s)} &= \text{keyfi} & r &= N \\ C_r^{(s)} &= 0 & r &> N \end{aligned} \quad (3.110)$$

şeklinde keyfi N ve $C_N^{(s)}$ değerleri seçilir.

2. $r = N$ sayısından başlanarak $C_{N-1}^{(s)}$ katsayıları, $s = 1, \dots, m$ için (2.121) ifadesi ile hesaplanır.
3. Önceki adımdaki ifadelerle birlikte $C_{N-1}^0 = C_{N-1}$ olmak üzere verilen diferansiyel denklemden (2.124) yardımıyla elde edilecek rekürsif ilişkiler elde edilir.
4. (2) adımından başlayarak (3)' te elde edilen rekürsif ilişki $r = 0$ oluncaya kadar devam ettirilir.

Örnek 5.3:

$$(5 + 3x)y' = \frac{3}{2}y, \quad y(-1) = \sqrt{2}$$

denkleminin çözümü için dördüncü dereceden bir yaklaşım polinomu oluşturunuz. Bu problem Clenshaw yöntemini anlatmak için diğerlerine oranla basit bir problem olarak seçilmiştir [16] .

Çözümün Chebyshev polinomları cinsinden seriye açıldığı kabul edilerek, denklemin her iki tarafının Chebyshev polinomlarının karşı gelen katsayılarını bulmak ve eşitlemek için

$$5C_r(y') + 3C_r(xy') = \frac{3}{2}C_r(y) \quad (3.111)$$

yazılır. (2.124) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} C_r(y') &= \frac{1}{2^0} \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} C_{|r-0+2j|}^{(1)} = C'_r, \\ C_r(xy') &= \frac{1}{2^1} \sum_{j=0}^1 \binom{0}{j} C_{|r-1+2j|}^{(1)} = \frac{1}{2}(C'_{r+1} + C'_{r-1}), \\ C_r(y) &= \frac{1}{2^0} \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} C_{|r-0+2j|}^{(1)} = C_r \end{aligned} \quad (3.112)$$

değerleri bulunur. Bu değerler **(5.111)** ifadesinde yerine yazılırsa

$$5C'_r + \frac{3}{2}(C'_{r+1} + C'_{r-1}) = \frac{3}{2}C_r \quad (3.113)$$

olur. **(2.122)** yardımıyla **(5.113)** ifadesi basitleştirilmek istenirse

$$(3 - 6r)C_r = 10C'_r + 6C'_{r+1} \quad (3.114)$$

elde edilir.

(5.110) ifadesinde $N = 7$ olarak seçilir $\tilde{C}_7 = 10$ ve daha büyük dereceli katsayılar sıfır olarak belirlenirse **(2.122)** ve **(5.114)** ifadelerinden katsayılar

Çizelge 5.4 $\tilde{C}_r$ katsayıları.

r	$\tilde{C}_r$	$\tilde{C}'_r$
7	-3	10
6	11	-42
5	-43	142
4	184	-472
3	-887	1614
2	5362	-5794
1	-65285	23062
0	-408423	-136364

olarak belirlenir. Bulunan değerler en yakın tamsayıya yuvarlanmıştır. Ayrıca $T_i(-1) = (-1)^i$ olduğundan

$$\bar{y}(-1) = \frac{1}{2}\tilde{C}_0 - \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - \dots - \tilde{C}_7 = -132436 \quad (3.115)$$

olarak bulunur. Bu değer verilerin gerçek $y(-1)$ değerine yani $\sqrt{2}$ ye eşit olması

için tüm $\tilde{C}_r$ katsayıları $-\frac{\sqrt{2}}{132436}$ sayısı ile çarpılmalıdır. Buradan C_r değerleri

Çizelge 5.5 C_r katsayıları.

r	C_r
7	0.00003
6	-0.00012
5	0.00046
4	-0.00196
3	0.00947
2	- 0.05726
1	0.69714
0	4.36133

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak çözüm

$$y_4(x) = 2.1807 T_0(x) + 0.6971 T_1(x) - 0.0573 T_2(x) + 0.0095 T_3(x) - 0.0020 T_4(x) \quad (3.116)$$

olarak elde edilir.

Örnek 5.4:

$$xy'' + y' + 16xy = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad (3.117)$$

denkleminin çözümünü ve $y(1)$ değerini Chebyshev polinomları cinsinden seriye açarak elde ediniz [16].

Chebyshev serileri ile çözüm yöntemlerinin özellikle karışık koşullar verildiği zaman analitik veya diğer sayısal yöntemlerle çözümü çok zor olan başlangıç veya sınır değer problemlerinde başarı ile kullanılabildiği, özellikle zor olarak seçilen ilk iki problemde gösterilmiştir. Daha öncede değinildiği gibi koşullar ne kadar karmaşık olursa olsun tek şart bunların Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılabilirdiği kabulüdür, bu kabul altında bu karmaşık şartlar sonsuz terimli lineer denklemlere dönüşeceklerdir. Bu problem verilen iki karışık koşullu problemden sonra, işlemleri çok uzatmamak adına basit bir problem olarak seçilmiştir.

Çözümün Chebyshev polinomları cinsinden seriye açıldığı kabul edilerek, denklemin her iki tarafının Chebyshev polinomlarının karşı gelen katsayılarını bulmak ve eşitlemek için

$$C_r(xy'') + C_r(y') + 16C_r(xy) = 0 \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.118)$$

yazılır. (2.124) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} C_r(xy'') &= \frac{1}{2^1} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} C_{|r-1+2j|}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\binom{1}{0} C_{|r-1|}^{(2)} + \binom{1}{1} C_{|r+1|}^{(2)} \right] = \frac{1}{2} (C_{r-1}'' + C_{r+1}''), \\ C_r(y') &= \frac{1}{2^0} \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} C_{|r-0+2j|}^{(1)} = C_r', \\ C_r(xy) &= \frac{1}{2^1} \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} C_{|r-1+2j|}^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\binom{1}{0} C_{|r-1|}^{(0)} + \binom{1}{1} C_{|r+1|}^{(0)} \right] = (C_{r-1} + C_{r+1}) \end{aligned} \quad (3.119)$$

$T_r^*(x)$ katsayıları elde edilir. Bu katsayılar (5.118) denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{2} (C_{r-1}'' + C_{r+1}'') + C_r' + 8(C_{r-1} + C_{r+1}) = 0 \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.120)$$

ifadesi elde edilir.

(5.120) ifadesinde rekürsif ilişkileri düzgün yapılandırmak amacıyla r yerine $r-1$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2} (C_{r-2}'' + C_r'') + C_{r-1}' + 8(C_{r-2} + C_r) = 0 \quad r = 2, 3, 4, \dots \quad (3.121)$$

$r+1$ yazılırsa

$$\frac{1}{2} (C_r'' + C_{r+2}'') + C_{r+1}' + 8(C_r + C_{r+2}) = 0 \quad r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.122)$$

ifadeleri elde edilir.

(5.122) ifadesinden (5.121) ifadesi çıkarılırsa

$$\frac{1}{2} (C_{r-2}'' - C_{r+2}'') + (C_{r-1}' - C_{r+1}') + 8(C_{r-2} - C_{r+2}) = 0 \quad r = 2, 3, 4, \dots \quad (3.123)$$

sonucuna ulaşılır.

(5.123) ifadesini basitleştirmek için (2.121) ifadesinde r yerine $r-1$ yazılırsa

$$2(r-1)C_{r-1}^{(s)} = C_{r-2}^{(s+1)} - C_r^{(s+1)} \quad (3.124)$$

$r+1$ yazılırsa

$$2(r+1)C_{r+1}^{(s)} = C_r^{(s+1)} - C_{r+2}^{(s+1)} \quad (3.125)$$

ifadeleri elde edilir ve (5.124) ile (5.125) ifadeleri toplanır

$$2(r-1)C_{r-1}^{(s)} + 2(r+1)C_{r+1}^{(s)} = C_{r-2}^{(s+1)} - C_{r+2}^{(s+1)} \quad (3.126)$$

elde edilir. $s=1$ için (5.126) ifadesinin

$$C_{r-2}'' - C_{r+2}'' = 2(r-1)C_{r-1}' + 2(r+1)C_{r+1}' \quad (3.127)$$

şekline gelir. (5.123) ifadesinde (5.127) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (r-1)C_{r-1}' + (r+1)C_{r+1}' + (C_{r-1}' - C_{r+1}') + 8(C_{r-2} - C_{r+2}) &= 0 \\ r(C_{r-1}' + C_{r+1}') + 8(C_{r-2} - C_{r+2}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$C_{r-2} = -\frac{r(C_{r-1}' + C_{r+1}')}{8} + C_{r+2} \quad (3.129)$$

ifadesine ulaşılır.

(5.110) ifadesinde $N=20$ ve $\tilde{C}_{20}=1$ olarak seçilir ve daha büyük dereceli katsayılar sıfır olarak belirlenirse, (2.122) ve (5.129) ifadeleri ile hesaplanan katsayılar **Çizelge 5.6** da verilmiştir.

Çizelge 5.6 $\tilde{C}_r$ ve $\tilde{C}'_r$ değerleri.

$\underline{r}$	$\underline{\tilde{C}_r}$	$\underline{\tilde{C}'_r}$	$\underline{r}$	$\underline{\tilde{C}_r}$	$\underline{\tilde{C}'_r}$
20	1	0	9	0	-15413803680
19	0	40	8	18609052225	0
18	-100	0	7	0	28231031920
17	0	-3560	6	-267715177744	0
16	7921	0	5	0	-2930251101008
15	0	249912	4	2004549104041	0
14	-492804	0	3	0	13106141731320
13	0	-13548600	2	-5355660492900	0
12	23280625	0	1	0	-8316500240280
11	0	545186400	0	807138731281	0
10	-797949504	0			

Koşullar için

$$\begin{aligned} T_{2i}(0) &= (-1)^i \\ T_{2i+1}(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

olduğuna göre

$$\bar{y}(0) = \frac{1}{2} \tilde{C}_0 - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_4 - \dots + \tilde{C}_{20} = 8050924923505.5 \quad (3.131)$$

olarak bulunur. Problemde verilen $y(0) = 1$ başlangıç koşulunun sağlanması için bu değer kendisine yani $\bar{y}(0)$ değerine bölünmelidir. Bu durumda gerçek C_r değerleri

$$C_r = \frac{\tilde{C}_r}{\bar{y}(0)} \quad (3.132)$$

ifadesi kullanılarak hesaplanır. Sonuçlar **Çizelge 5.7** ' de verilmiştir.

Çizelge 5.7 C_r değerleri son hali.

r	C_r	r	C_r
20	0.00000000000001	9	0
19	0	8	0.00231141
18	0.0000000000012	7	0
17	0	6	-0.0332527231
16	0.0000000000983	5	0
15	0	4	0.248983703
14	0.000000061210	3	0
13	0	2	-0.665223007
12	0.000002891670	1	0
11	0	0	0.100254161
10	-0.00009911277		

Çizelge 5.7' den elde edilen C_r değerleri ile $y(1)$

$$y(1) = \frac{C_0}{2} + \sum_{i=1}^{20} C_i T_i(1) = -0.39714980986386982001 \quad (3.133)$$

olarak hesaplanır. Burada ikinci koşul olan $y'(0) = 0$ (5.130) ifadeleri nedeniyle doğrudan sağlandığına dikkat edilmelidir. Son olarak **Çizelge 5.7** hesaplanan değerler seri çözümde yazılarak

$$\begin{aligned} y_4(x) = & 0.100254161 T_0^*(x) - 0.665223007 T_2^*(x) + 0.248983703 T_4^*(x) \\ & - 0.0332527231 T_6^*(x) + 0.00231141 T_8^*(x) - 0.00009911277 T_{10}^*(x) \\ & + 0.00000289167 T_{12}^*(x) + 0.00000006121 T_{14}^*(x) + 0.000000000983 T_{16}^*(x) \\ & + 0.00000000012 T_{18}^*(x) + 0.000000000001 T_{20}^*(x) \end{aligned} \quad (3.134)$$

elde edilir.

6.SONUÇ VE TARTIŞMA

- 1- Bu çalışmada Chebyshev polinomlarının çeşitli özellikleri, türevleri ve integralleri verilmiştir.
- 2- Bu özellikler kullanılarak adi diferansiyel denklem 1. ve 2. Mertebe karışık koşullu denklemler çözülmüştür. Doğrudan metod, geriye rekürsif ilişki ve Clenshaw metodu kullanılmıştır.
- 3- Kullanılan terim sayıları ve ihtiyaç duyulan zaman anlamında bu çözümler karşılaştırıldığında geriye rekürsif ve daha gelişmiş olan Clenshaw yönteminin çok daha ekonomik olduğu söylenebilir.
- 4- Verilen yöntemlerin n. Mertebe ve nonlinear problemlere uygulanabileceği açıktır.
- 5- Sonraki çalışmalar olarak bu yöntemlerin diğer sayısal yöntemlerle karşılaştırılması; denklem sistemlerine ve kısmi türevli diferansiyel denklemlere uyarlanması

sayılabılır

KAYNAKLAR

- [1] **Chebyshev, P. L.** (1854). Théorie Des Mécanismes Connus Sous Le Nom De Parallélogrammes, St. Petersburg Academy, Russia.
- [2] **Lanczos, C.** (1952). Tables of Chebyshev Polynomials, Appl. Math. Ser. U.S. Bur. Stand. **9**, Washington, Government Printing Office.
- [3] **Clenshaw, C. W.** (1955). A Note on the Summation of Chebyshev Series, *Math. Tab.*, **9**, 118-120.
- [4] **Clenshaw, C. W.** (1957). The Numerical Solution of Linear Differential Equations in Chebyshev Series , Proc. Camb. Phil. Soc. **53**, 134-149
- [5] **Clenshaw, C. W. ve Curtis, A. R.** (1960). A Method for Numerical Integration on an Automatic Computer, *Nümerische Mathematik*, **2**, 197-205.
- [6] **Clenshaw, C. W.** (1962). Chebyshev Series for Mathematical Functions, Math. Tab. Nat. Phys. Lab., **5**, London.
- [7] **Clenshaw, C. W.** (1963). The Solution of Non-linear Ordinary Differential Equations in Chebyshev Series, Computer J. **6**, 88-92.
- [8] **Fox, L., Parker, I. B.** (1968). Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London, England.
- [9] **Sezer, M., Gülsu M., Tanay B.** (2009). Rational Chebyshev Collocation Method for Solving Higher-Order Linear Ordinary Differential Equations, Mugla University, Turkey.
- [10] **Elbarbary, E., Kady,M.** (2002). Chebyshev Finite Difference Approximation for The Boundary Value Problems, Elsevier Science, Egypt.
- [11] **Khalifa, Elbarbary, E., Elzarek** (2003). Chebyshev Expansion Method for Solving Second and Fourth-Order Elliptic Equations, Elsevier Science, Egypt.
- [12] **Muite, B.K.** (2010). A Numerical Comparison of Chebyshev Methods for Solving Fourth Order Semilinear Initial Boundary Value Problems, University of Oxford, United Kingdom.
- [13] **Ramos, H., Rubio, R. G.** (2009). Analysis of a Chebyshev-basedbackward Differentiation Formulae Andrelation with Runge–Kutta Collocation Methods, Spain.
- [14] **Skogestad, J. O., Kalisch, H.** (2009). A Boundary Value Problem for the KdV Equation: Comparison of Finite-Difference and Chebyshev Methods, University of Bergen, Norway.
- [15] **Sezer, M., Kaynak M.** (1996). Chebyshev Polynomial Solutions of Linear Differential Equations, Dokuz Eylul University , Turkey
- [16] **Ernek, S.** (2012). Adi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Başlangıç Değer Problemlerinin Chebyshev Polinomları ile Çözümü , İstanbul Teknik University , Turkey

EKLER

EK A

EK B

EK C

EK D

EK E

EK F

EK G

EK H

EK A

$$\text{pay} = \sin[(r+1)T] \cos[(i-1)T] - \cos[rT] \sin[iT]$$

$$- \cos[rT] \sin[iT] + \cos[(-1+i)T] \sin[(1+r)T]$$

$$\text{payda} = \sin[(i+1)T] \cos[(i-1)T] - \cos[iT] \sin[iT]$$

$$- \cos[iT] \sin[iT] + \cos[(-1+i)T] \sin[(1+i)T]$$

$$a1 = \text{pay} / \text{payda}$$

$$(-\cos[rT] \sin[iT] + \cos[(-1+i)T] \sin[(1+r)T]) / (-\cos[iT] \sin[iT] + \cos[(-1+i)T] \sin[(1+i)T])$$

$$a2 = \text{FullSimplify}[a1]$$

$$-\text{Csc}[2T] (\sin[(-2+i-r)T] + \sin[(i-r)T])$$

$$a3 = \sin[(r-i+1)T] / \sin[T]$$

$$\text{Csc}[T] \sin[(1-i+r)T]$$

$$\text{FullSimplify}[a2 - a3]$$

$$0$$

$$\text{Limit}[\sin[(k+1) \arccos[x]] / \sin[\arccos[x]], x \rightarrow 0]$$

$$\cos[(k\pi)/2]$$

$$\text{Limit}[\sin[(k+1) \arccos[x]] / \sin[\arccos[x]], x \rightarrow 1]$$

$$1+k$$

EK B

fonk[x_]:=92/100 Cosh[x]-Cos[x] (* f degerlerini olusturmak icin kullandim,
Programda x, f noktaları verileceginden olmayacak *)

A1=N[Integrate[fonk[x],{x,-1,1}]]

0.479428

b=1;a=-1;

A2=NIntegrate[fonk[x],{x,a,b}]

0.479428

A3=NIntegrate[fonk[x],{x,a,b},WorkingPrecision □24]

0.479428226688801667358578

xbas=a;xbit=b;n=4;h=(xbit-xbas)/n;

BS05=N[Sum[h/3 (fonk[xbas+i h]+4 fonk[xbas+(i+1) h]+fonk[xbas+(i+2) h]),{i,0,n-2,2}],24]

0.479555060853291661322040

xbas=a;xbit=b;n=8;h=(xbit-xbas)/n;

BS025=N[Sum[h/3 (fonk[xbas+i h]+4 fonk[xbas+(i+1) h]+fonk[xbas+(i+2) h]),{i,0,n-2,2}],24]

0.479438010531772471513397

BS05-A3

0.000126834164489993963462

BS025-A3

$9.783842970804154819 \times 10^{-6}$

EK C

```
Do[a[i]=N[2/Pi Integrate[E^Cos[t]
Cos[i t],{t,0,Pi}]];Print[StringForm["a[``]=``",i,a[i]],{i,0,20}]
a[0]=2.5321317555040164`
a[1]=1.13031820798497`
a[2]=0.27149533953407656`
a[3]=0.0443368498486638`
a[4]=0.005474240442090661`
a[5]=0.0005429263119154371`
a[6]=0.00004497732243180508`
a[7]=3.1984363886294886`*^-6
a[8]=1.9907020032405853`*^-7
a[9]=1.0943040251731873`*^-8
a[10]=-5.96046×10-8
a[11]=0.`
a[12]=-0.0000152588
a[13]=0.`
a[14]=0.`
a[15]=0.`
a[16]=-16.
a[17]=0.`
a[18]=-8192.
a[19]=0.`
a[20]=0.`
fonk=NumberForm[1/2 a[0],10] T[0] +Sum[NumberForm[a[i],10] T[i],{i,1,7}]
```

1.266065878 T[0]+1.130318208 T[1]+0.2714953395 T[2]+0.04433684985
T[3]+0.005474240442 T[4]+0.0005429263119 T[5]+0.00004497732243
T[6]+(3.198436389×10⁻⁶) T[7]

SUM1[f_,ind_,bas_,bit_]:=NumberForm[1/2
(f/.ind $\square$ bas),10]+Sum[NumberForm[f,10],{ind,

SUM1N[f_,ind_,bas_,bit_]:=NumberForm[1/2
(f/.ind $\square$ bas),10]+Sum[NumberForm[f,10],{ind,bas+1,bit}]

SUM2[f_,ind_,bas_,bit_]:=1/2 (f/.ind $\square$ bas)+Sum[f,{ind,bas
(f/.ind $\square$ bit)

SUM2N[f_,ind_,bas_,bit_]:=NumberForm[1/2
(f/.ind $\square$ bas),10]+Sum[NumberForm[f,10],{ind,b
(f/.ind $\square$ bit),

TC[r_,x_]:=ChebyshevT[r,x]

b[r_,n_]:=N[2/n SUM2[E^Cos[k Pi/n] TC[r,Cos[k Pi/4]],k,0,n],10]

b[0,4]

2.532132154

Do[Print[StringForm["b[``]:=``",r,b[r,4]]],{r,0,7}]

b[0]:=2.5321321539289779606`10.

b[1]:=1.13032141745820412538670869396`10.

b[2]:=0.27154031740762188923895281038`10.

b[3]:=0.04487977618559742772133299897`10.

b[4]:=0.01094848088626581787474098485`10.

b[5]:=0.0448797761855970428186936295`10.

b[6]:=0.27154031740762188923895281038`10.

b[7]:=1.13032141745820451028934806346`10.

fonk=SUM2N[b[i,4] T[i],i,0,4]

1.266066077 T[0]+1.130321417 T[1]+0.271540317 T[2]+0.044879776
T[3]+0.005474240 T[4]

```

c[r_,n_]:=N[2/(n+1)
Sum[E^Cos[(2k+1)/(n+1) Pi/2] TC[r,Cos[(2k+1)/(n+1) Pi/2]],{k,0,n}],10]
c[0,4]
2.532131754
Do[Print[StringForm["c[`]:=`",r,c[r,4]]],{r,0,7}]
c[0]:=2.5321317544028374552`10.
c[1]:=1.13031819692321876272822967619`10.
c[2]:=0.27149514032055674285666140319`10.
c[3]:=0.04433365141216149037200068232`10.
c[4]:=0.0054292631191380152257907097`10.
c[5]:=0`57.87565042595438
c[6]:=-0.005429263119
c[7]:=-0.04433365141
fonk=SUM1N[c[i,4] T[i],i,0,4]
1.266065877      T[0]+1.130318197      T[1]+0.271495140      T[2]+0.04433365
T[3]+0.00542926 T[4]
bnew[r_,n_]:=N[a[r] +Sum[a[2 p n-r]+a[2 p n+r],{p,1,1}],10]
bnew[0,4]
2.53213
Do[Print[StringForm["b[`]:=` bnew[`]=`",r,b[r,4],r,bnew[r,4]]],{r,0,7}]
b[0]:=2.5321321539289779606`10. bnew[0]=2.532132153644417`
b[1]:=1.13032141745820412538670869396`10. bnew[1]=1.130321417364399`
b[2]:=0.27154031740762188923895281038`10. bnew[2]=0.2715402572518636`
b[3]:=0.04487977618559742772133299897`10. bnew[3]=0.044879776160579234`
b[4]:=0.01094848088626581787474098485`10. bnew[4]=0.010933222095118822`
b[5]:=0.0448797761855970428186936295`10. bnew[5]=0.044879776160579234`

```

```

b[6]:=0.27154031740762188923895281038`10. bnew[6]=0.27154031685650837`
b[7]:=1.13032141745820451028934806346`10. bnew[7]=1.1303214064213587`
cnew[r_,n_]:=N[a[r] +Sum[ (-1)^p (a[2 p (n+1)-r]+a[2 p (n+1)+r]),{p,1,1}],10]
cnew[0,4]
2.53213
Do[Print[StringForm["c[`]:=`" cnew[`]=`",r,c[r,4],r,cnew[r,4]]],{r,0,4}]
c[0]:=2.5321317544028374552`10. cnew[0]=2.532131874713306`
c[1]:=1.13031819692321876272822967619`10. cnew[1]=1.1303181970419298`
c[2]:=0.27149514032055674285666140319`10. cnew[2]=0.27151039925293874`
c[3]:=0.04433365141216149037200068232`10. cnew[3]=0.04433365141227517`
c[4]:=0.0054292631191380152257907097`10. cnew[4]=0.005429263119658856`
2 0.000543
0.001086
b[0,1]/2
1.543080635
b[1,1]
2.978411876
Do[Print[StringForm["b[`]:=`",r,b[r,1]]],{r,0,1}]
b[0]:=3.0861612696304875569`10.
b[1]:=2.9784118759704896605`10.
fonk=SUM2N[b[i,1] T[i],i,0,1]
1.543080635 T[0]+1.489205938 T[1]
Do[Print[StringForm["c[`]:=`",r,c[r,1]]],{r,0,1}]
c[0]:=2.5211836730427121427`10.
c[1]:=1.08544164127260679389103553732`10.
fonk=SUM1N[c[i,1] T[i],i,0,1]

```

$1.260591837 T[0] + 1.085441641 T[1]$

$2 a[2]$

0.542991

$a[2]$

0.271495

EK D

```
XKat[k_]:=Block[{i,top,TC,top1,top2},
```

```
  i=0;top=0;
```

```
  While[2i <= k,
```

```
    top=top+ Binomial[k,i] TC[k-2 i];
```

```
    i=i+1];
```

```
  top1=top/.TC[0]->TC[0]/2;
```

```
  top2=top1 /2^(k-1);
```

```
  Return[top2]]
```

```
Do[Print[StringForm["x` =`",i,XKat[i]]],{i,0,10}]
```

$$x^0 = TC[0]$$

$$x^1 = TC[1]$$

$$x^2 = 1/2 (TC[0]+TC[2])$$

$$x^3 = 1/4 (3 TC[1]+TC[3])$$

$$x^4 = 1/8 (3 TC[0]+4 TC[2]+TC[4])$$

$$x^5 = 1/16 (10 TC[1]+5 TC[3]+TC[5])$$

$$x^6 = 1/32 (10 TC[0]+15 TC[2]+6 TC[4]+TC[6])$$

$$x^7 = 1/64 (35 TC[1]+21 TC[3]+7 TC[5]+TC[7])$$

$$x^8 = 1/128 (35 TC[0]+56 TC[2]+28 TC[4]+8 TC[6]+TC[8])$$

$$x^9 = 1/256 (126 TC[1]+84 TC[3]+36 TC[5]+9 TC[7]+TC[9])$$

$$x^{10} = 1/512 (126 TC[0]+210 TC[2]+120 TC[4]+45 TC[6]+10 TC[8]+TC[10])$$

```
ifade=ExpandAll[(1-x^2)^10]
```

$$1-10x^2+45x^4-120x^6+210x^8-252x^{10}+210x^{12}-120x^{14}+45x^{16}-10x^{18}+x^{20}$$

```
CoefficientList[ifade,x]
```

```
{1,0,-10,0,45,0,-120,0,210,0,-252,0,210,0,-120,0,45,0,-10,0,1}
```

```
DonCh[if_]:=Block[{kat,uz,top,x},
```

```
kat=CoefficientList[if,x];
```

```
uz=Length[kat];
```

```
top=Sum[kat[[i]] XKat[i-1],{i,1,uz}];Return[FullSimplify[top]]]
```

```
DonCh[ifade]
```

$$\frac{1}{524288} (92378 \text{ TC}[0] - 167960 \text{ TC}[2] + 125970 \text{ TC}[4] - 77520 \text{ TC}[6] + 38760 \text{ TC}[8] - 15504 \text{ TC}[10] + 5 (969 \text{ TC}[12] - 228 \text{ TC}[14] + 38 \text{ TC}[16] - 4 \text{ TC}[18]) + \text{TC}[20])$$

$$167960./524288$$

$$0.320358$$

$$190/524288.$$

$$0.000362396$$

```
ifade=Sum[x^i/i!,{i,0,6}]
```

$$1+x+x^2/2+x^3/6+x^4/24+x^5/120+x^6/720$$

```
DonCh[ifade]
```

$$\frac{(29170 \text{ TC}[0] + 3 (8680 \text{ TC}[1] + 2085 \text{ TC}[2] + 340 \text{ TC}[3] + 42 \text{ TC}[4] + 4 \text{ TC}[5]) + \text{TC}[6])}{23040}$$

```
N[ExpandAll[%]]
```

$$1.26606 \text{ TC}[0.] + 1.13021 \text{ TC}[1.] + 0.271484 \text{ TC}[2.] + 0.0442708 \text{ TC}[3.] + 0.00546875 \text{ TC}[4.] + 0.000520833 \text{ TC}[5.] + 0.0000434028 \text{ TC}[6.]$$

$N[E/5!]$

0.0226523

EK E

$T[n_]:=ChebyshevT[n,x]$

$TY[n_]:=Expand[ChebyshevT[n,2x-1]]$

$UstAcY[k_,j_]:=ExpandAll[1/2^{(2k)} \text{Sum}[(2k)!/((2k-i)! i!) TY[j-k+i],\{i,0,2k\}]]$

$Tm[x_]:=If[x<0,Ty[Abs[x]],Ty[x]]$

$UstAcy[k_,j_]:=ExpandAll[(1/2^{(2k)} \text{Sum}[(2k)!/((2k-i)! i!) Tm[j-k+i],\{i,0,2k\}]]]$

$Expand[x^{30} TY[171]-UstAcY[30,171]]$

0

$IntTY[0]=Integrate[TY[0],x]$

x

$UstAcY[1,0]$

x

$UstAcy[1,0]$

$Ty[0]/2+Ty[1]/2$

$IntTy[0]=UstAcy[1,0]$

$Ty[0]/2+Ty[1]/2$

$IntTY[1]=Integrate[TY[1],x]$

$-x+x^2$

$-UstAcY[1,0]+UstAcY[2,0]$

$-x+x^2$

$IntTy[1]=-UstAcy[1,0]+UstAcy[2,0]$

$-(Ty[0]/8)+Ty[2]/8$

$IntTY[i_]:=ExpandAll[Integrate[TY[i],x]]$

$IntTy[i_]:=1/4 (1/(i+1) Ty[i+1]-1/(i-1) Ty[i-1])$

$IntTy[0]$

$Ty[0]/2+Ty[1]/2$

IntTy[1]

-(Ty[0]/8)+Ty[2]/8

IntTy[2]

1/4 (-Ty[1]+Ty[3]/3)

Expand[IntTY[27]-Integrate[ChebyshevT[27,2x-1],{x,0,x}]]

0

yer1=Ty→TY

Ty→TY

Expand[IntTy[2]/.yer1]

1/6+x-4 x²+(8 x³)/3

IntTY[2]

x-4 x²+(8 x³)/3

ExpandAll[Integrate[ChebyshevT[12,2x-1],{x,0,x}]]

x-144 x²+4576 x³-64064 x⁴+494208 x⁵-2342912 x⁶+7241728 x⁷-15040512 x⁸+21168128 x⁹-19922944 x¹⁰+(132120576 x¹¹)/11-4194304 x¹²+(8388608 x¹³)/13

ExpandAll[Integrate[ChebyshevT[12,2x-1],x]]

72/143+x-144 x²+4576 x³-64064 x⁴+494208 x⁵-2342912 x⁶+7241728 x⁷-15040512 x⁸+21168128 x⁹-19922944 x¹⁰+(132120576 x¹¹)/11-4194304 x¹²+(8388608 x¹³)/13

Expand[IntTy[12]/.yer1]

1/286+x-144 x²+4576 x³-64064 x⁴+494208 x⁵-2342912 x⁶+7241728 x⁷-15040512 x⁸+21168128 x⁹-19922944 x¹⁰+(132120576 x¹¹)/11-4194304 x¹²+(8388608 x¹³)/13

ay[0]=a[0]/2;ay[i_]:=a[i]

Y=Expand[Sum[ay[i]ChebyshevT[i,2x-1],{i,0,7}]]

a[0]/2-a[1]+2 x a[1]+a[2]-8 x a[2]+8 x² a[2]-a[3]+18 x a[3]-48 x² a[3]+32 x³ a[3]+a[4]-32 x a[4]+160 T[n_] := ChebyshevT[n, x]

TY[n_] := Expand[ChebyshevT[n, 2 x - 1]]

UstAcY[k_, j_] :=

ExpandAll[

1/2^(2 k) Sum[(2 k)!/((2 k - i)! i!) TY[j - k + i], {i, 0, 2 k}]]

Tm[x_] := If[x < 0, Ty[Abs[x]], Ty[x]]

UstAcy[k_, j_] :=

ExpandAll[(1/

2^(2 k) Sum[(2 k)!/((2 k - i)! i!) Tm[j - k + i], {i, 0, 2 k}]]]

Expand[x^30 TY[171] - UstAcY[30, 171]]

0

IntTY[0] = Integrate[TY[0], x]

x

UstAcY[1, 0]

x

UstAcy[1, 0]

Ty[0]/2 + Ty[1]/2

$$\text{IntTy}[0] = \text{UstAcy}[1, 0]$$

$$\text{Ty}[0]/2 + \text{Ty}[1]/2$$

$$\text{IntTY}[1] = \text{Integrate}[\text{TY}[1], x]$$

$$-x + x^2$$

$$-\text{UstAcY}[1, 0] + \text{UstAcY}[2, 0]$$

$$-x + x^2$$

$$\text{IntTy}[1] = -\text{UstAcy}[1, 0] + \text{UstAcy}[2, 0]$$

$$-(\text{Ty}[0]/8) + \text{Ty}[2]/8$$

$$\text{IntTY}[i_]:= \text{ExpandAll}[\text{Integrate}[\text{TY}[i], x]]$$

$$\text{IntTy}[i_]:= 1/4 (1/(i + 1) \text{Ty}[i + 1] - 1/(i - 1) \text{Ty}[i - 1])$$

$$\text{IntTy}[0]$$

$$\text{Ty}[0]/2 + \text{Ty}[1]/2$$

$$\text{IntTy}[1]$$

$$-(Ty[0]/8) + Ty[2]/8$$

$$\text{IntTy}[2]$$

$$1/4 (-Ty[1] + Ty[3]/3)$$

$$\text{Expand}[\text{IntTY}[27] - \text{Integrate}[\text{ChebyshevT}[27, 2x - 1], \{x, 0, x\}]]$$

$$0$$

$$\text{yer1} = Ty \rightarrow TY$$

$$Ty \rightarrow TY$$

$$\text{Expand}[\text{IntTy}[2] /. \text{yer1}]$$

$$1/6 + x - 4x^2 + (8x^3)/3$$

$$\text{IntTY}[2]$$

$$x - 4x^2 + (8x^3)/3$$

$$\text{ExpandAll}[\text{Integrate}[\text{ChebyshevT}[12, 2x - 1], \{x, 0, x\}]]$$

$$x - 144x^2 + 4576x^3 - 64064x^4 + 494208x^5 - 2342912x^6 +$$

$$7241728 x^7 - 15040512 x^8 + 21168128 x^9 - 19922944 x^{10} + (132120576 x^{11})/11 - 4194304 x^{12} + (8388608 x^{13})/13$$

ExpandAll[Integrate[ChebyshevT[12, 2 x - 1], x]]

$$72/143 + x - 144 x^2 + 4576 x^3 - 64064 x^4 + 494208 x^5 - 2342912 x^6 + 7241728 x^7 - 15040512 x^8 + 21168128 x^9 - 19922944 x^{10} + (132120576 x^{11})/11 - 4194304 x^{12} + (8388608 x^{13})/13$$

Expand[IntTy[12] /. yer1]

$$1/286 + x - 144 x^2 + 4576 x^3 - 64064 x^4 + 494208 x^5 - 2342912 x^6 + 7241728 x^7 - 15040512 x^8 + 21168128 x^9 - 19922944 x^{10} + (132120576 x^{11})/11 - 4194304 x^{12} + (8388608 x^{13})/13$$

ay[0] = a[0]/2; ay[i_] := a[i]

Y = Expand[Sum[ay[i] ChebyshevT[i, 2 x - 1], {i, 0, 7}]]

$$\begin{aligned} &a[0]/2 - a[1] + 2 x a[1] + a[2] - 8 x a[2] + 8 x^2 a[2] - a[3] + \\ &18 x a[3] - 48 x^2 a[3] + 32 x^3 a[3] + a[4] - 32 x a[4] + \\ &160 x^2 a[4] - 256 x^3 a[4] + 128 x^4 a[4] - a[5] + 50 x a[5] - \\ &400 x^2 a[5] + 1120 x^3 a[5] - 1280 x^4 a[5] + 512 x^5 a[5] + a[6] - \\ &72 x a[6] + 840 x^2 a[6] - 3584 x^3 a[6] + 6912 x^4 a[6] - \\ &6144 x^5 a[6] + 2048 x^6 a[6] - a[7] + 98 x a[7] - 1568 x^2 a[7] + \\ &9408 x^3 a[7] - 26880 x^4 a[7] + 39424 x^5 a[7] - 28672 x^6 a[7] + \end{aligned}$$

$$8192 x^7 a[7]$$

$$\text{denksol} = \text{ExpandAll}[(1 + x) Y + \text{Integrate}[(x + x^2) Y, x]]$$

$$\begin{aligned} & a[0]/2 + 1/2 x a[0] + 1/4 x^2 a[0] + 1/6 x^3 a[0] - a[1] + x a[1] + \\ & 3/2 x^2 a[1] + 1/3 x^3 a[1] + 1/2 x^4 a[1] + a[2] - 7 x a[2] + \\ & 1/2 x^2 a[2] + 17/3 x^3 a[2] + 8/5 x^5 a[2] - a[3] + 17 x a[3] - \\ & 61/2 x^2 a[3] - 31/3 x^3 a[3] + 49/2 x^4 a[3] - 16/5 x^5 a[3] + \\ & 16/3 x^6 a[3] + a[4] - 31 x a[4] + 257/2 x^2 a[4] - 319/3 x^3 a[4] - \\ & 96 x^4 a[4] + 544/5 x^5 a[4] - 64/3 x^6 a[4] + 128/7 x^7 a[4] - \\ & a[5] + 49 x a[5] - 701/2 x^2 a[5] + 2209/3 x^3 a[5] - \\ & 495/2 x^4 a[5] - 624 x^5 a[5] + 1456/3 x^6 a[5] - 768/7 x^7 a[5] + \\ & 64 x^8 a[5] + a[6] - 71 x a[6] + 1537/2 x^2 a[6] - 8303/3 x^3 a[6] + \\ & 3520 x^4 a[6] + 1096/5 x^5 a[6] - 10624/3 x^6 a[6] + \\ & 15104/7 x^7 a[6] - 512 x^8 a[6] + 2048/9 x^9 a[6] - a[7] + \\ & 97 x a[7] - 2941/2 x^2 a[7] + 23617/3 x^3 a[7] - 35679/2 x^4 a[7] + \\ & 14112 x^5 a[7] + 7840 x^6 a[7] - 18688 x^7 a[7] + 9536 x^8 a[7] - \\ & 20480/9 x^9 a[7] + 4096/5 x^{10} a[7] \end{aligned}$$

$$\text{katdenksol} = \text{CoefficientList}[\text{denksol}, x]$$

$$\begin{aligned} & \{a[0]/2 - a[1] + a[2] - a[3] + a[4] - a[5] + a[6] - a[7], \\ & a[0]/2 + a[1] - 7 a[2] + 17 a[3] - 31 a[4] + 49 a[5] - 71 a[6] + \\ & 97 a[7], a[0]/4 + (3 a[1])/2 + a[2]/2 - (61 a[3])/2 + (257 a[4])/ \\ & 2 - (701 a[5])/2 + (1537 a[6])/2 - (2941 a[7])/2, \\ & a[0]/6 + a[1]/3 + (17 a[2])/3 - (31 a[3])/3 - (319 a[4])/3 + (\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2209 a[5])/3 - (8303 a[6])/3 + (23617 a[7])/3, \\
& a[1]/2 + (49 a[3])/2 - 96 a[4] - (495 a[5])/2 + 3520 a[6] - (\\
& 35679 a[7])/2, (8 a[2])/5 - (16 a[3])/5 + (544 a[4])/5 - \\
& 624 a[5] + (1096 a[6])/5 + 14112 a[7], (16 a[3])/3 - (64 a[4])/3 + (\\
& 1456 a[5])/3 - (10624 a[6])/3 + 7840 a[7], (128 a[4])/7 - (\\
& 768 a[5])/7 + (15104 a[6])/7 - 18688 a[7], \\
& 64 a[5] - 512 a[6] + 9536 a[7], (2048 a[6])/9 - (20480 a[7])/9, (\\
& 4096 a[7])/5\}
\end{aligned}$$

$$\text{denksol1} = \text{ExpandAll}[\text{Sum}[\text{katdenksol}[[i + 1]] \text{UstAcy}[i, 0], \{i, 0, 10\}]]$$

$$\begin{aligned}
& 43/48 a[0] \text{Ty}[0] + 233/768 a[1] \text{Ty}[0] - 71/480 a[2] \text{Ty}[0] - (\\
& 199 a[3] \text{Ty}[0])/3840 + 1/840 a[4] \text{Ty}[0] - (11 a[5] \text{Ty}[0])/10752 + (\\
& 11 a[6] \text{Ty}[0])/20160 - (7 a[7] \text{Ty}[0])/23040 + 29/64 a[0] \text{Ty}[1] + \\
& 13/8 a[1] \text{Ty}[1] + 1/16 a[2] \text{Ty}[1] - 1/8 a[3] \text{Ty}[1] - \\
& 1/64 a[4] \text{Ty}[1] + 1/16 a[0] \text{Ty}[2] + 23/64 a[1] \text{Ty}[2] + \\
& 3/2 a[2] \text{Ty}[2] + 19/128 a[3] \text{Ty}[2] - 1/16 a[4] \text{Ty}[2] - \\
& 1/128 a[5] \text{Ty}[2] + 1/192 a[0] \text{Ty}[3] + 1/24 a[1] \text{Ty}[3] + \\
& 61/192 a[2] \text{Ty}[3] + 3/2 a[3] \text{Ty}[3] + 35/192 a[4] \text{Ty}[3] - \\
& 1/24 a[5] \text{Ty}[3] - 1/192 a[6] \text{Ty}[3] + 1/256 a[1] \text{Ty}[4] + \\
& 1/32 a[2] \text{Ty}[4] + 77/256 a[3] \text{Ty}[4] + 3/2 a[4] \text{Ty}[4] + \\
& 51/256 a[5] \text{Ty}[4] - 1/32 a[6] \text{Ty}[4] - 1/256 a[7] \text{Ty}[4] + \\
& 1/320 a[2] \text{Ty}[5] + 1/40 a[3] \text{Ty}[5] + 93/320 a[4] \text{Ty}[5] + \\
& 3/2 a[5] \text{Ty}[5] + 67/320 a[6] \text{Ty}[5] - 1/40 a[7] \text{Ty}[5] + \\
& 1/384 a[3] \text{Ty}[6] + 1/48 a[4] \text{Ty}[6] + 109/384 a[5] \text{Ty}[6] + \\
& 3/2 a[6] \text{Ty}[6] + 83/384 a[7] \text{Ty}[6] + 1/448 a[4] \text{Ty}[7] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1/56 a[5] Ty[7] + 125/448 a[6] Ty[7] + 3/2 a[7] Ty[7] + \\
& 1/512 a[5] Ty[8] + 1/64 a[6] Ty[8] + 141/512 a[7] Ty[8] + \\
& 1/576 a[6] Ty[9] + 1/72 a[7] Ty[9] + 1/640 a[7] Ty[10]
\end{aligned}$$

kat[i_] := Coefficient[denksol1, Ty[i]]

Do[Print[StringForm["` . katsayi =` ", i, kat[i]]], {i, 0, 7}]

$$0 . \text{ katsayi} = (43 a[0])/48 + (233 a[1])/768 - (71 a[2])/480 - (199 a[3])/3840 + a[4]/840 - (11 a[5])/10752 + (11 a[6])/20160 - (7 a[7])/23040$$

$$1 . \text{ katsayi} = (29 a[0])/64 + (13 a[1])/8 + a[2]/16 - a[3]/8 - a[4]/64$$

$$2 . \text{ katsayi} = a[0]/16 + (23 a[1])/64 + (3 a[2])/2 + (19 a[3])/128 - a[4]/16 - a[5]/128$$

$$3 . \text{ katsayi} = a[0]/192 + a[1]/24 + (61 a[2])/192 + (3 a[3])/2 + (35 a[4])/192 - a[5]/24 - a[6]/192$$

$$4 . \text{ katsayi} = a[1]/256 + a[2]/32 + (77 a[3])/256 + (3 a[4])/2 + (51 a[5])/256 - a[6]/32 - a[7]/256$$

$$5 . \text{ katsayi} = a[2]/320 + a[3]/40 + (93 a[4])/320 + (3 a[5])/2 + (67 a[6])/320 - a[7]/40$$

$$6 . \text{ katsayi} = a[3]/384 + a[4]/48 + (109 a[5])/384 + (3 a[6])/2 + (83 a[7])/384$$

$$7 . \text{ katsayi} = a[4]/448 + a[5]/56 + (125 a[6])/448 + (3 a[7])/2$$

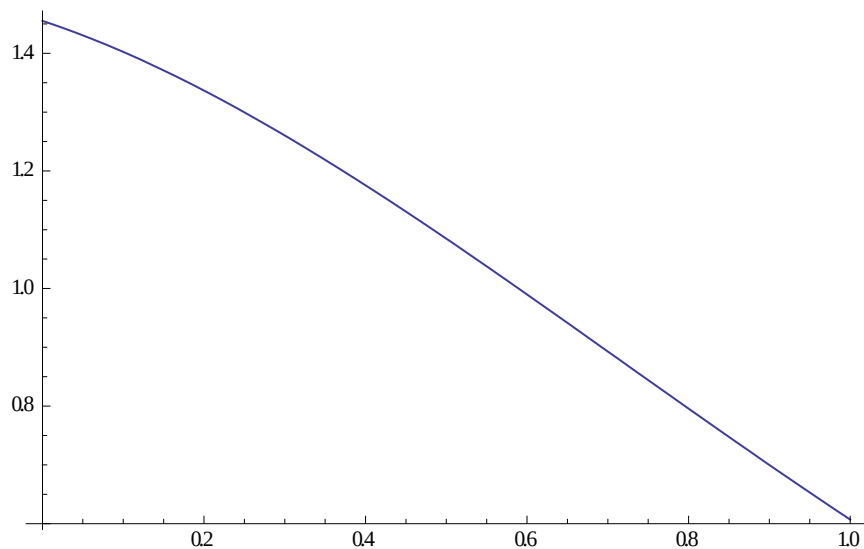
```
kat[0] = ExpandAll[(Y /. x -> 0) - 3/4 (Y /. x -> 1)]
```

```
a[0]/8 - (7 a[1])/4 + a[2]/4 - (7 a[3])/4 + a[4]/4 - (7 a[5])/4 +  
a[6]/4 - (7 a[7])/4
```

```
DSolve[{(1 + x) y'[x] + (1 + x + x^2) y[x] == 1 - x,  
y[0] - 3/4 y[1] == 1}, y[x], x][[1, 1, 2]]
```

```
(E^(x - 1/2 (1 + x)^2) (26 E + 6 E^(1/2 + x^2/2) - 16 E^(1 + x^2/2) +  
3 Sqrt[2 E \[Pi]] Erfi[1/Sqrt[2]] +  
8 E Sqrt[2 \[Pi]] Erfi[x/Sqrt[2]] -  
3 Sqrt[2 E \[Pi]] Erfi[x/Sqrt[2]]))/(2 (-3 + 8 Sqrt[E]) (1 + x))
```

```
Plot[%, {x, 0, 1}]
```



```
sol={1,1/4,-1/16,0,0,0,0}
```

```
{1,1/4,-(1/16),0,0,0,0}
```

```
Do[denk[i+1]=kat[i]sol[[i+1]],{i,0,6}];gec=denk[1];denk[1]=denk[2];denk[2]=gec;
```

```
Do[Print[StringForm["` . katsayi =` \n `",i,denk[i],N[denk[i]]]],{i,1,7}]
```

$$1 . \text{ katsayi} = (29 a[0])/64 + (13 a[1])/8 + a[2]/16 - a[3]/8 - a[4]/64 \square 1/4$$

$$0.453125 a[0.] + 1.625 a[1.] + 0.0625 a[2.] - 0.125 a[3.] - 0.015625 a[4.] \square 0.25$$

$$2 . \text{ katsayi} = a[0]/8 - (7 a[1])/4 + a[2]/4 - (7 a[3])/4 + a[4]/4 - (7 a[5])/4 + a[6]/4 - (7 a[7])/4 \square 1$$

$$0.125 a[0.] - 1.75 a[1.] + 0.25 a[2.] - 1.75 a[3.] + 0.25 a[4.] - 1.75 a[5.] + 0.25 a[6.] - 1.75 a[7.] \square 1.$$

$$3 . \text{ katsayi} = a[0]/16 + (23 a[1])/64 + (3 a[2])/2 + (19 a[3])/128 - a[4]/16 - a[5]/128 \square -(1/16)$$

$$0.0625 a[0.] + 0.359375 a[1.] + 1.5 a[2.] + 0.148438 a[3.] - 0.0625 a[4.] - 0.0078125 a[5.] \square -0.0625$$

$$4 . \text{ katsayi} = a[0]/192 + a[1]/24 + (61 a[2])/192 + (3 a[3])/2 + (35 a[4])/192 - a[5]/24 - a[6]/192 \square 0$$

$$0.00520833 a[0.] + 0.0416667 a[1.] + 0.317708 a[2.] + 1.5 a[3.] + 0.182292 a[4.] - 0.0416667 a[5.] - 0.00520833 a[6.] \square 0.$$

$$5 . \text{ katsayi} = a[1]/256 + a[2]/32 + (77 a[3])/256 + (3 a[4])/2 + (51 a[5])/256 - a[6]/32 - a[7]/256 \square 0$$

$$0.00390625 a[1.] + 0.03125 a[2.] + 0.300781 a[3.] + 1.5 a[4.] + 0.199219 a[5.] - 0.03125 a[6.] - 0.00390625 a[7.] \square 0.$$

$$6 . \text{ katsayi} = a[2]/320 + a[3]/40 + (93 a[4])/320 + (3 a[5])/2 + (67 a[6])/320 - a[7]/40 \square 0$$

$$0.003125 a[2.] + 0.025 a[3.] + 0.290625 a[4.] + 1.5 a[5.] + 0.209375 a[6.] - 0.025 a[7.] \square 0.$$

$$7 . \text{ katsayi} = a[3]/384 + a[4]/48 + (109 a[5])/384 + (3 a[6])/2 + (83 a[7])/384 \square 0$$

$$0.00260417 a[3.] + 0.0208333 a[4.] + 0.283854 a[5.] + 1.5 a[6.] + 0.216146 a[7.] \square 0.$$

EK F

(* dikkat denklemler oncesinde Ek E calistirilarak elde edilmistir *)

denklemler=Table[denk[i],{i,1,4}]/.{a[4]->0,a[5]->0,a[6]->0,a[7]->0}

{(29 a[0])/64+(13 a[1])/8+a[2]/16-a[3]/8->1/4,a[0]/8-(7 a[1])/4+a[2]/4-(7 a[3])/4->1,a[0]/16+(23 a[1])/64+(3 a[2])/2+(19 a[3])/128->-(1/16),a[0]/192+a[1]/24+(61 a[2])/192+(3 a[3])/2->0}

unk=Table[a[i],{i,0,3}]

{a[0],a[1],a[2],a[3]}

coza=Solve[denklemler,unk][[1]]

{a[0] ->1727728/816349,a[1]->-(6029636/13877933),a[2]->-(371728/13877933),a[3] ->144240/13877933}

N[coza]

{a[0.] ->2.11641,a[1.] ->-0.434477,a[2.] ->-0.0267855,a[3.] ->0.0103935}

denk[1]

(29 a[0])/64+(13 a[1])/8+a[2]/16-a[3]/8-a[4]/64->1/4

m=Table[Coefficient[denk[i][[1]],a[j]],{i,1,4},{j,0,3}]

{{29/64,13/8,1/16,-(1/8)},{1/8,-(7/4),1/4,-(7/4)},{1/16,23/64,3/2,19/128},{1/192,1/24,61/192,3/2}}

b=Table[denk[i][[2]],{i,1,4}]

{1/4,1,-(1/16),0}

```
Gen[A_,b_]:=Block[{A1},
```

```
  A1=Transpose[A];AppendTo[A1,b];Return[Transpose[A1]]]
```

```
Gen[m,b]
```

```
{ {29/64,13/8,1/16,-(1/8),1/4},{1/8,-(7/4),1/4,-(7/4),1},{1/16,23/64,3/2,19/128,-  
(1/16)},{1/192,1/24,61/192,3/2,0}}
```

```
MatrixForm[%]
```

```
(_{
```

```
  {29/64, 13/8, 1/16, -(1/8), 1/4},
```

```
  {1/8, -(7/4), 1/4, -(7/4), 1},
```

```
  {1/16, 23/64, 3/2, 19/128, -(1/16)},
```

```
  {1/192, 1/24, 61/192, 3/2, 0}
```

```
}_)
```

```
LUD[A1_,b_]:=Block[{A=A1,n1=Length[A1],kont,k,el0,el1,el2,l,u,L,U,piv,lab1,de  
ne,ind,y},
```

```
  If[Det[A]
```

```
    0,Print["Tekil Matris"];
```

```
    kont=1;
```

```
    Label[lab1];
```

```
    If[kont==0,
```

```
el0=Random[Integer,{1,n1}];el1=Random[Integer,{1,n1}];While[el1
                                □el0,el1=Rand
om[Integer,{1,n1}]];
```

```
el2=A[[el0]];A[[el0]]=A[[el1]];A[[el1]]=el2;
```

```
Print[StringForm["Hesaplarda U nun bir kosegeni sifir cikarsa, Sifira bolmeyi
engellemek icin satir degisikligi :: S` <-> S`, A=`",el0,el1,MatrixForm[A]]];
```

```
Do[l[i,j]=u[i,j]=0,{i,1,n1},{j,1,n1}];
```

```
Do[
```

```
l[i,i]=1;
```

```
Do[
```

```
If[i □ j ,
```

```
u[i,j]=A[[i,j]]-Sum[l[i,k] u[k,j] ,{k,1,i-1}];
```

```
If[u[i,i] □0,kont=0;Goto[lab1]];
```

```
, l[i,j]=(A[[i,j]]-Sum[l[i,k] u[k,j],{k,1,j-1}])/u[j,j]];
```

```
,{j,1,n1}]
```

```
,{i,1,n1}];
```

```
L=Table[l[i,j],{i,1,n1},{j,1,n1}];U=Table[u[i,j],{i,1,n1},{j,1,n1}];
```

```
Print[StringForm["L=`",U=`\nL=`",
U=`",MatrixForm[L],MatrixForm[U],MatrixForm[N[L]],MatrixForm[N[U]]]];
```

```
Print["ÇÖZÜMLER"];
```

$y[1]=A[[1,n1+1]];Do[y[j]=A[[j,n1+1]]-Sum[L[[j,k]]$

$y[k],\{k,1,j-1\}],\{j,2,n1\}];Print["y= \n ",Table[y[i],\{i,1,n1\}]]];$

$Print["y= \n ",N[Table[y[i],\{i,1,n1\}]]];$

$x[n1]=y[n1]/U[[n1,n1]];Do[x[j]=y[j];x[j]=(x[j]-Sum[U[[j,k]]$
 $x[k],\{k,j+1,n1\}))/U[[j,j]],\{j,n1-1,1,-1\}];Return[Table[unk[[i]]$

$\square x[i],\{i,1,n1\}]]]$

$LU D[m,b]$

$(_ \{$

$\{29/64, 13/8, 1/16, -(1/8)\},$

$\{1/8, -(7/4), 1/4, -(7/4)\},$

$\{1/16, 23/64, 3/2, 19/128\},$

$\{1/192, 1/24, 61/192, 3/2\}$

$\}_)$

$L=(_ \{$

$\{1, 0, 0, 0\},$

$\{8/29, 1, 0, 0\},$

$\{4/29, -(251/4080), 1, 0\},$

$\{1/87, -(8/765), 5213/24573, 1\}$

$\}_), \ U=(_ \{$

$\{29/64, 13/8, 1/16, -(1/8)\},$

$\{0, -(255/116), 27/116, -(199/116)\},$

$\{0, 0, 8191/5440, 1963/32640\},$

$\{0, 0, 0, 13877933/9436032\}$

$\}_-)$

$L=(_ \{$

$\{1., 0., 0., 0.\},$

$\{0.275862, 1., 0., 0.\},$

$\{0.137931, -0.0615196, 1., 0.\},$

$\{0.0114943, -0.0104575, 0.212143, 1.\}$

$\}_-), \quad U=(_ \{$

$\{0.453125, 1.625, 0.0625, -0.125\},$

$\{0., -2.19828, 0.232759, -1.71552\},$

$\{0., 0., 1.5057, 0.0601409\},$

$\{0., 0., 0., 1.47074\}$

$\}_-)$

ÇÖZÜMLER

$y=$

$_ \{1/4, 27/29, -(27/680), 3005/196584\}$

$y=$ $_{\{0.25, 0.931034, -0.0397059, 0.0152861\}}$
$$\{a[0] \quad \square(60729628/13877933), a[1] \quad \square((371728 \quad \square)/13877933), a[3] \quad \square(144240/13877933)\}$$

coza

$$\{a[0] \quad \square (61226281386349), a[1] \quad \square (371728/13877933), a[3] \quad \square 144240/13877933\}$$

N[%]

$$\{a[0.] = 0.234671, a[1.] = 0.0267855, a[3.] = 0.0103935\}$$

29. $8+8$ $77-6$ 64

464.

64 3

192

4 13

52

192+52

244

192-52

140

$$(-464/24+29 (1/4 +13/192) +3 4-(1/4-13/192)) 64 3$$

$$326$$

$$(13/24+8 (1/4 +13/192)-3/2) 64 3$$

$$304$$

$$(1/3-1/4-13/192) 64 3$$

$$3$$

$$304+2 7 13-2 8-7 2$$

$$456$$

$$3-14 8+2-14$$

$$-121$$

$$3 +14 8+2-0$$

$$117$$

$$29 304-13 13 8-8 4- 8$$

$$7424$$

$$29 3-13 8 8+4$$

$$-741$$

$$-29 8+13 8$$

$$-128$$

304 8-23 13 2-3 8 64+19

317

3 8-23 8 2+3 64

-152

-8 8+23 2

-18

128/16

8

EK G

```
coz=NSolve[{456 A3+117 A2-22 A1 -74174241 A3 A1 -156,317 A3
A2-18 A1 -8},{A1,A2,A3}][[1]]
```

```
{A1 0.151537,A20.0563623,A30.0103935}
```

```
ay[a33_,a32_,a31_]:=A3 a33+A2 a32+A1 a31/.coz
```

```
a3y=ay[1,0,0]
```

```
0.0103935
```

```
a2y=ay[-8,1,0]
```

```
-0.0267855
```

```
a1y=ay[-13,-8,1]
```

```
-0.434477
```

```
a0y=ay[304,3,-8]
```

```
2.11641
```

EK H

$\text{Simplify}[(\text{ChebyshevT}[4,x]-\text{ChebyshevT}[0,x])/8+1/2$
 $(\text{ChebyshevT}[2,x]+\text{ChebyshevT}[0,x])]$

x^4

$\text{Table}[\text{ChebyshevT}[i,0],\{i,0,10\}]$

$\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,1,0,-1\}$

$\text{Table}[\text{ChebyshevT}[i,1],\{i,0,10\}]$

$\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$

$\text{Table}[\text{ChebyshevT}[i,-1],\{i,0,10\}]$

$\{1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1\}$

$c[n-1]=2 \ n \ a[n]$

$2 \ n \ a[n]$

$c[n-2]=2 \ (n-1) \ a[n-1]$

$2 \ (-1+n) \ a[-1+n]$

$c[r_]:=FullSimplify[c[r+2]+ 2 \ (r+1) \ a[r+1]]$

$c[n-3]$

$2 \ (-2+n) \ a[-2+n]+2 \ n \ a[n]$

$c[n-4]$

$2 \ (-3+n) \ a[-3+n]+2 \ (-1+n) \ a[-1+n]$

c[n-10]

2 ((-9+n) a[-9+n]+(-7+n) a[-7+n]+(-5+n) a[-5+n]+(-3+n) a[-3+n]+(-1+n) a[-1+n])

ExpandAll[c[n-10]/.n □11]

4 a[2]+8 a[4]+12 a[6]+16 a[8]+20 a[10]

ExpandAll[c[n-10]/.n □12]

6 a[3]+10 a[5]+14 a[7]+18 a[9]+22 a[11]

ExpandAll[c[n-10]/.n □10]

2 a[1]+6 a[3]+10 a[5]+14 a[7]+18 a[9]

ay[0]=a[0]/2;ay[i_]:=a[i]

T[n_]:=ChebyshevT[n,x]

UstAcT[k_,j_]:=ExpandAll[1/2^(k) Sum[(k)!/((k-i)! i!) TY[j-k+2i],{i,0,k}]]

Tm[x_]:=If[x<0,Ty[Abs[x]],Ty[x]]

UstAct[k_,j_]:=ExpandAll[(1/2^(k) Sum[(k)!/((k-i)! i!) Tm[j-k+2i],{i,0,k}]]]

Y=Expand[Sum[ay[i]ChebyshevT[i,x],{i,0,14}]]

a[0]/2+x a[1]-a[2]+2 x² a[2]-3 x a[3]+4 x³ a[3]+a[4]-8 x² a[4]+8 x⁴ a[4]+5 x a[5]-20 x³ a[5]+16 x⁵ a[5]-a[6]+18 x² a[6]-48 x⁴ a[6]+32 x⁶ a[6]-7 x a[7]+56 x³ a[7]-112 x⁵ a[7]+64 x⁷ a[7]+a[8]-32 x² a[8]+160 x⁴ a[8]-256 x⁶ a[8]+128 x⁸ a[8]+9 x a[9]-120 x³ a[9]+432 x⁵ a[9]-576 x⁷ a[9]+256 x⁹ a[9]-a[10]+50 x² a[10]-400 x⁴ a[10]+1120 x⁶ a[10]-1280 x⁸ a[10]+512 x¹⁰ a[10]-11 x a[11]+220 x³ a[11]-1232 x⁵ a[11]+2816 x⁷ a[11]-2816 x⁹ a[11]+1024 x¹¹ a[11]+a[12]-72 x² a[12]+840 x⁴ a[12]-3584 x⁶ a[12]+6912 x⁸ a[12]-6144 x¹⁰ a[12]+2048 x¹² a[12]+13 x a[13]-364 x³ a[13]+2912 x⁵

$a[13]-9984 x^7 a[13]+16640 x^9 a[13]-13312 x^{11} a[13]+4096 x^{13} a[13]-a[14]+98 x^2$
 $a[14]-1568 x^4 a[14]+9408 x^6 a[14]-26880 x^8 a[14]+39424 x^{10} a[14]-28672 x^{12}$
 $a[14]+8192 x^{14} a[14]$

turY=D[Y,x]

$a[1]+4 x a[2]-3 a[3]+12 x^2 a[3]-16 x a[4]+32 x^3 a[4]+5 a[5]-60 x^2 a[5]+80 x^4 a[5]+36$
 $x a[6]-192 x^3 a[6]+192 x^5 a[6]-7 a[7]+168 x^2 a[7]-560 x^4 a[7]+448 x^6 a[7]-64 x$
 $a[8]+640 x^3 a[8]-1536 x^5 a[8]+1024 x^7 a[8]+9 a[9]-360 x^2 a[9]+2160 x^4 a[9]-4032 x^6$
 $a[9]+2304 x^8 a[9]+100 x a[10]-1600 x^3 a[10]+6720 x^5 a[10]-10240 x^7 a[10]+5120 x^9$
 $a[10]-11 a[11]+660 x^2 a[11]-6160 x^4 a[11]+19712 x^6 a[11]-25344 x^8 a[11]+11264$
 $x^{10} a[11]-144 x a[12]+3360 x^3 a[12]-21504 x^5 a[12]+55296 x^7 a[12]-61440 x^9$
 $a[12]+24576 x^{11} a[12]+13 a[13]-1092 x^2 a[13]+14560 x^4 a[13]-69888 x^6$
 $a[13]+149760 x^8 a[13]-146432 x^{10} a[13]+53248 x^{12} a[13]+196 x a[14]-6272 x^3$
 $a[14]+56448 x^5 a[14]-215040 x^7 a[14]+394240 x^9 a[14]-344064 x^{11} a[14]+114688$
 $x^{13} a[14]$

katturY=CoefficientList[turY,x]

$\{a[1]-3 a[3]+5 a[5]-7 a[7]+9 a[9]-11 a[11]+13 a[13], 4 a[2]-16 a[4]+36 a[6]-64$
 $a[8]+100 a[10]-144 a[12]+196 a[14], 12 a[3]-60 a[5]+168 a[7]-360 a[9]+660 a[11]-$
 $1092 a[13], 32 a[4]-192 a[6]+640 a[8]-1600 a[10]+3360 a[12]-6272 a[14], 80 a[5]-$
 $560 a[7]+2160 a[9]-6160 a[11]+14560 a[13], 192 a[6]-1536 a[8]+6720 a[10]-21504$
 $a[12]+56448 a[14], 448 a[7]-4032 a[9]+19712 a[11]-69888 a[13], 1024 a[8]-10240$
 $a[10]+55296 a[12]-215040 a[14], 2304 a[9]-25344 a[11]+149760 a[13], 5120 a[10]-$
 $61440 a[12]+394240 a[14], 11264 a[11]-146432 a[13], 24576 a[12]-344064$
 $a[14], 53248 a[13], 114688 a[14]\}$

Length[katturY]

14

ChebKatturY=ExpandAll[Sum[katturY[[i+1]] UstAct[i,0],{i,0,13}]]

$a[1] Ty[0]+3 a[3] Ty[0]+5 a[5] Ty[0]+7 a[7] Ty[0]+9 a[9] Ty[0]+11 a[11] Ty[0]+13$
 $a[13] Ty[0]+4 a[2] Ty[1]+8 a[4] Ty[1]+12 a[6] Ty[1]+16 a[8] Ty[1]+20 a[10]$
 $Ty[1]+24 a[12] Ty[1]+28 a[14] Ty[1]+6 a[3] Ty[2]+10 a[5] Ty[2]+14 a[7] Ty[2]+18$
 $a[9] Ty[2]+22 a[11] Ty[2]+26 a[13] Ty[2]+8 a[4] Ty[3]+12 a[6] Ty[3]+16 a[8]$
 $Ty[3]+20 a[10] Ty[3]+24 a[12] Ty[3]+28 a[14] Ty[3]+10 a[5] Ty[4]+14 a[7]$
 $Ty[4]+18 a[9] Ty[4]+22 a[11] Ty[4]+26 a[13] Ty[4]+12 a[6] Ty[5]+16 a[8]$
 $Ty[5]+20 a[10] Ty[5]+24 a[12] Ty[5]+28 a[14] Ty[5]+14 a[7] Ty[6]+18 a[9]$
 $Ty[6]+22 a[11] Ty[6]+26 a[13] Ty[6]+16 a[8] Ty[7]+20 a[10] Ty[7]+24 a[12]$
 $Ty[7]+28 a[14] Ty[7]+18 a[9] Ty[8]+22 a[11] Ty[8]+26 a[13] Ty[8]+20 a[10]$
 $Ty[9]+24 a[12] Ty[9]+28 a[14] Ty[9]+22 a[11] Ty[10]+26 a[13] Ty[10]+24 a[12]$
 $Ty[11]+28 a[14] Ty[11]+26 a[13] Ty[12]+28 a[14] Ty[13]$

KatTturY[i_]:=Coefficient[ChebkatturY,Ty[i]]

Kont1={KatTturY[0],ExpandAll[c[n-10]/.n
 sag taraf 2 kat olacak *)

$\square 10 \}$ (* c

$\{a[1]+3 a[3]+5 a[5]+7 a[7]+9 a[9]+11 a[11]+13 a[13], 2 a[1]+6 a[3]+10 a[5]+14$
 $a[7]+18 a[9]\}$

Kont2={KatTturY[1],ExpandAll[c[n-10]/.n $\square 11 \}$

$\{4 a[2]+8 a[4]+12 a[6]+16 a[8]+20 a[10]+24 a[12]+28 a[14], 4 a[2]+8 a[4]+12$
 $a[6]+16 a[8]+20 a[10]\}$

Kont3={KatTturY[2],ExpandAll[c[n-10]/.n $\square 12 \}$

$\{6 a[3]+10 a[5]+14 a[7]+18 a[9]+22 a[11]+26 a[13], 6 a[3]+10 a[5]+14 a[7]+18$
 $a[9]+22 a[11]\}$

Kont4={KatTturY[3],ExpandAll[c[n-10]/.n $\square 13 \}$

$\{8 a[4]+12 a[6]+16 a[8]+20 a[10]+24 a[12]+28 a[14], 8 a[4]+12 a[6]+16 a[8]+20$
 $a[10]+24 a[12]\}$

ExpandAll[c[n-10]/.n □12]

6 a[3]+10 a[5]+14 a[7]+18 a[9]+22 a[11]

ExpandAll[c[n-10]/.n □14]

10 a[5]+14 a[7]+18 a[9]+22 a[11]+26 a[13]

ExpandAll[c[n-10]/.n □16]

14 a[7]+18 a[9]+22 a[11]+26 a[13]+30 a[15]

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad : Barış Köprülüoğlu
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul/ 21.02. 1989
E-Posta : bariskopruluoglu@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2014, İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı