

**YAPAY AÇIKLIKLI RADARDA FARKLI ARALIKLI
HIZLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ YÖNTEMİ**

701354

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Orhan ORHAN
(504991161)**

101354

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Haziran 2001
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Haziran 2001**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Bingül YAZGAN

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Ahmet Hamdi KAYRAN

Yrd.Doç.Dr. Ünal KÜÇÜK (Y.T.Ü.)

HAZİRAN 2001

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince bana her zaman destek olan değerli hocam Prof. Dr. Bingöl YAZGAN'a, bu günlere gelmemde emeği geçen aileme ve birlikte çalıştığım araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Haziran 2001

Orhan Orhan



İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar	2
2. YAPAY AÇIKLIKLI RADAR SİSTEM MODELİ	3
2.1. Kutupsal Format SAR Görüntü Yapısı	3
2.1.1. Kartezyen Izgaraya İnterpolasyon	4
2.1.2. Sıfır Ekleme ve Ters Fourier Dönüşümü	5
2.1.3. Genlik Düzeltmesi ve Görüntü Oluşturma	5
3. ÖRNEKLEME VE YENİDEN OLUŞTURMA	7
3.1. Örnekleme	7
3.2. Yeniden Oluşturma	9
3.2.1. Yeniden Oluşturma Koşulları	9
3.2.2. İdeal Alçak Geçiren Filtre	9
3.2.3. Sinc Fonksiyonu	10
3.2.4. İdeal Olmayan Yeniden Oluşturma	11
3.3. İnterpolasyon	14
3.3.1. En Yakın Komşu İnterpolasyonu	15
3.3.2. Lineer İnterpolasyon	16
3.3.3. Kübik Konvolüsyon	17
3.3.4. İki Parametrelili Kübik Filtreler	20
3.3.5. Drichlet-Sinc Adaptasyonu	21
3.3.6. Hanning ve Hamming Adaptasyonları	22

4. FARKLI ARALIKLI HIZLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ	24
4.1. Temel Varsayımlar	24
4.2. Çoklu Çözünürlüklü Analizin Temel Prensipleri	28
4.3. Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümü (USFFT)	34
4.3.1. Birden Çok Değişkenli Fonksiyonlar İçin USFFT	35
4.3.2. Düzensiz Dağılmış Noktalarda Fourier Dönüşümünün Gerçeklenmesi	38
4.4. Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümünün SAR da Kullanılması	40
5. UYGULAMA VE ÖRNEKLER	43
5.1. Uygulamada Kullanılan SAR Verisinin Özellikleri	43
5.2. Hata Tanımı	44
5.3. Geleneksel Yöntemlerin SAR Verisine Uygulanması	44
5.4. Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümü Yönteminin Uygulanması	45
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	47
6.1. Elde Edilen Sonuçlar	47
6.2. Tartışma	48
KAYNAKLAR	49
EK-A	51
ÖZGEÇMİŞ	53

KISALTMALAR

PRF	: Pulse Repetition Frequency
SW	: Swath Width
FFT	: Fast Fourier Transform
USFFT	: Unequally Spaced Fast Fourier Transform
FM	: Frequency Modulation
SAR	: Synthetic Aperture Radar



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1 Battle-Lemarie fonksiyonunun derecelerine göre $1 - \hat{\phi}^{(m)}(1/4)$ fonksiyonunun değeri.....	31
Tablo 6.1 Farklı Yöntemler için hata oranları ve Gerçekleme Süreleri	47
Tablo 6.2 Farklı Yöntemler için SNR oranları	47



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 : $G(f)$ Spektrumu	7
Şekil 3.2 : $G_s(f)$ Spektrumu	8
Şekil 3.3 : Sinc fonksiyonu	10
Şekil 3.4 : İdeal olmayan yeniden oluşturma	12
Şekil 3.5 : (a) Chirp işareti (b) Chirp işaretinin spektrumu	13
Şekil 3.6 : Örneklenmiş chirp işareti	13
Şekil 3.7 : Chirp işaretinin ideal olmayan alçak geçiren filtre ile elde edilmesi	14
Şekil 3.8 : Tek bir nokta için interpolasyon.....	15
Şekil 3.9 : En Yakın Komşular yöntemi (a) $h(x)$ interpolasyon fonksiyonu (b) Frekans spektrumu.....	16
Şekil 3.10 : (a)Lineer İnterpolasyon fonksiyonu (b) Frekans spektrumu	17
Şekil 3.11 : (a) Drichlet adaptasyonu (b) Drichlet-sinc interpolasyon fonksiyonu	22
Şekil 3.12 : (a) Hanning fonksiyonu (b) Hann-sinc interpolasyon fonksiyonu.....	23
Şekil 3.13 : (a) Hamming fonksiyonu (b) Hamming-sinc interpolasyon fonksiyonu	23
Şekil 4.1 : $m=7$. derceden Battle-Lemarie' fonksiyonunun Fourier dönüşümü alınarak $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$ fonksiyonu gösterilmiştir	32
Şekil 4.2 : $\hat{f}(l)$ deki mutlak hata	33
Şekil 4.3 : 3. Dereceden B spline ve frekans spektrumu	41
Şekil 4.4 : $m=3$ için $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$	42
Şekil 5.1 : Hedef dağılım geometrisi.....	43
Şekil 5.2 : Hanning-sinc interpolasyonu ($N=7$) kullanılarak SAR Görüntüsünün elde edilmesi	45
Şekil 5.3 : 3. Dereceden B splinelar kullanılarak Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümü Yöntemiyle Görüntü oluşturulması	46
Şekil A.1 : En yakın komşu yöntemiyle interpolasyon ile elde edilen görüntü	51
Şekil A.2 : Lineer interpolasyon kullanılarak elde edilen görüntü	52

SEMBOL LİSTESİ

$\sigma(x, y)$	: Yansıma fonksiyonu
θ_0	: İlgili radar bakış açısı (Rad.)
f_0	: Chirp başlama frekansı (Hz)
f_s	: Örnekleme frekansı
c	: Propagasyon sabiti
γ	: Chirp katsayısı
κ_r	: Menzil aşırı örnekleme faktörü
v	: Platform hızı (m/s)
D	: Anten genişliği (m)
$\sigma(x, y)$	: Görüntülenen bölgenin kompleks yansıma katsayısı
x	: Menzil koordinatı (m)
y	: Çapraz menzil koordinatı (m)
v	: aşırı örnekleme faktörü
f_s	: Örnekleme frekansı
s	: Yapay açıklıklı radar verisi

YAPAY AÇIKLIKLI RADARDA FARKLI ARALIKLI HIZLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ YÖNTEMİ

ÖZET

Yapay açıklıklı radar algoritmalarının birçoğu düzensiz bir biçimde veya farklı aralıklarla dağılmış veri örneklerinin çok boyutlu ters Fourier dönüşümünü gerektirir. Spotlight mod SAR da yansıma fonksiyonu farklı θ (bakış açısı) değerleri ve farklı frekanslar için ölçülür. Elde edilen yansıma değerlerinin FFT si alınarak dilim izdüşürme yöntemi uyarınca yansıma değerlerinin toplamı frekans uzayında elde edilir. Bu adımdan sonra örnekler kutupsal koordinat sisteminde yer alır. Ancak kutupsal koordinat sisteminde ters FFT alınması mümkün olmadığı için veriler kutupsal kordinat sisteminden kartezyen koordinat sistemine interpolasyon ile taşınır. Geleneksel yöntemlerde ideal alçak geçiren filtre yapısına olabildiğince yakın filtre elde edilmeye çalışılır. Tam olarak alçak geçiren filtre elde edilemediğinden dolayı frekans domeninde osilatif etki ortaya çıkar. Genlik düzeltmesi uygulanarak filtrenin geçirme bandındaki bu osilatif etkilerden kurtunulmaya çalışılır. Farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümünde (unequally spaced fast Fourier transform: USFFT) genlik düzeltmesi osilatif etkileri yok etmek için değil, yaklaşık ideal filtre yapısını tamamlamak üzere gerçekleştirilir.

Bu çalışmada yeni geliştirilen USFFT yöntemi kutupsal format SAR görüntü oluşturma algoritmasına uygulanmış ve geleneksel yöntemlerle kıyaslanmıştır.

UNEQUALLY SPACED FAST FOURIER TRANSFORM ALGORITHM IN SYNTHETIC APERTURE RADAR

SUMMARY

Many synthetic aperture radar (SAR) image formation algorithms require the computation of a multidimensional Fourier transform of irregularly sampled or unequally spaced data samples. In spotlight mode SAR scattered values are measured for different angles and different frequencies. By taking fast Fourier transform (FFT) of this scattering values it is possible to fill in frequency domain according to projection-slice theorem. After this step samples are in polar coordinate system, which does not allow to take inverse FFT. It is necessary to transform data samples from polar to cartesian coordinates. In traditional approach, an attempt is made to approximate an ideal (rectangular) filter as close as possible which implies an oscillatory behavior in Fourier domain. Amplitude correction is applied to compensate for oscillatory behavior within the filter pass band. In unequally spaced FFT (USFFT) approach the ideal filter is not approximated in a close manner. The correction step is done not for removing residual oscillations but to finish construction of an approximation to the ideal filter.

In this study, a recently developed algorithm, unequally spaced fast Fourier transform, is applied to SAR image formation and its accuracy and complexity are compared to traditional algorithms.

1. GİRİŞ

1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

Modern radar sistemleri yapay açıklıklı radar (synthetic aperture radar: SAR) olarak adlandırılan yüksek çözünürlükte görüntü oluşturabilen ve diğer görüntüleme sistemlerinin sahip olduğu sorunların birçoğunu aşan sistemlerdir. Burada hareketli bir taşıyıcı sistem üzerine yerleştirilen radar anteni ile hedef bölge incelenebilir, bu sistem SAR olarak adlandırılır veya hareketli bir hedef sabit bir radar anteni ile incelenebilir ki bu ters yapay açıklıklı radar (inverse synthetic aperture radar: ISAR) adını alır. Her iki durumdada hareket sözkonusu olduğundan dolayı yapay açıklık elde edilir. SAR sistemlerinde gece olması optik görüntüleme sistemlerindeki gibi sınırlayıcı bir faktör değildir. Ayrıca bulut, sis gibi atmosferik etkiler de optik sistemlerdeki kadar sınırlama getirmez. Radar çözünürlüğü, menzil ve çapraz menzil doğrultusunda ifade edilir. Menzil çözünürlüğü gönderilen işaretin band genişliği ile ters orantılıdır, band genişliği arttıkça menzil çözünürlüğü iyileşir. Çapraz menzil çözünürlüğü ise antenin çapraz menzil doğrultusundaki demet genişliği küçüldükçe artar. Yapay açıklıklı radar sistemleri yoğun bir işaret işleme gerektirir. Alınan yankıların görüntü haline getirilmesinde kullanılan yöntem çok büyük önem taşımaktadır. Bizim burada ele alacağımız kutupsal koordinat spotlight mod SAR probleminde işaret işleme adımlarından biri olan koordinat sistemi dönüşümü yöntemleri ele alınacak ve yeni geliştirilen farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yönteminin kullanımına değinilecektir.

Yansıma fonksiyonunun farklı θ (bakış açısı) değerleri için Fourier dönüşümü alınırsa dilim izdüşüm teoremi uyarınca iki boyutlu frekans uzayı doldurularak toplam yansıma değerleri frekans domeninde elde edilir. Kutupsal koordinat sisteminde yer alan verinin ters hızlı Fourier dönüşümünün alınması mümkün olmadığı için veriler kutupsal koordinat sisteminden kartezyen koordinat sistemine interpolasyon ile taşınır. Burada karşımıza iki önemli parametre çıkar. Birincisi kullanılacak interpolasyon yönteminin neden olduğu gürültü, ikincisi ise gerekli

hesaplama süresidir. İdeal alçak geçiren filtre yapısını gerçekleyen sinc fonksiyonu kullanılarak interpolasyon yapılacak olursa band sınırlı işaretler için hatasız sonuç elde edilir. Ancak bu yöntemin gerektirdiği işlem sayısı çok yüksek olduğundan pratikte büyük veri boyutları için gerçekleştirilmesi mümkün değildir. Sinc fonksiyonu genellikle adaptasyon filtreleri ile çarpılarak kullanılır[9]. Dirichlet adaptasyonu kullanılarak sinc fonksiyonunun sonsuza giden yapısından kurtulmak mümkündür. Ancak Dirichlet adaptasyonu ile interpolasyon geçirme bandında istenmeyen etkilere neden olur ve yüksek frekans bileşenlerindeki sızmasına sebep olur. Hanning adaptasyonu birinci türevinin sürekli olması dolayısıyla Dirichletten daha iyi sonuç verir.

Bu çalışmada ele alınan Farklı Aralıklı Fourier Dönüşümü Yöntemi interpolasyon adımının gerçekleşmesi dışında kutupsal format SAR algoritmalarıyla benzer bir yapı taşır. Farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yönteminde B splineleri kullanılarak kutupsal koordinatlardaki veri kartezyen koordinat sistemine taşınır. Farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü için bölüm 2 de kutupsal koordinat SAR algoritması ele alınmış algoritmanın temel adımları belirtilmiştir. Spotlight mod SAR ile ISAR yansıma fonksiyonunun yer aldığı koordinat sistemi ve işleme adımları açısından paralellik gösterir. Bu çalışmada verilen yöntem her iki mod için de geçerlidir.

5. Bölümde Ohio-State Üniversitesi, Electrosience Laboratuvarından sağlanan ve 6 adet saçıcı merkezden oluşan deneysel hedeflerden elde edilmiş yansıma değerleri kullanılarak geleneksel interpolasyon yöntemleri ve USFFT yöntemi için 6 adet cismin yerleri tespit edilmiştir.

1.2. Konu İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Farklı aralıklı dağılmış örneklerin hızlı Fourier dönüşümü için önceden yapılmış çalışmalar arasında Lagrange interpolasyonu, Taylor açılımı yöntemleri bulunmaktadır. Ancak bu yöntemlerin özellikle çok boyutlu yapılarda gösterdikleri performans bu çalışmada ele alınan B splineleri kullanan yapı kadar yüksek değildir[12-14].

2. YAPAY AÇIKLIKLI RADAR SİSTEM MODELİ

2.1. Kutupsal Format SAR Görüntü Yapısı

Yapay açıklıklı radar görüntü oluşturma algoritmalarının birçoğu düzensiz bir biçimde yada eşit olmayan aralıklarla dağılmış veri örneklerinin çok boyutlu Fourier dönüşümünü gerektirir. Burada USFFT algoritmasının kutupsal format Spotlight mod SAR daki kullanımı ve diğer yöntemlere kıyaslanması ele alınacaktır. Yansıma fonksiyonunun Fourier dönüşümü alınırsa, veriler kutupsal koordinat sisteminde yer alır. Sayısal kutupsal format SAR işlemcisi temel üç adımı içerir,

- a) Kutupsal - kartezyen koordinat sistemi dönüşümü.
- b) Sıfır ekleme ve ters hızlı Fourier dönüşümü.
- c) Genlik düzeltmesi ve görüntü oluşturma.

B x B bölgesi (x,y) uzayında radar ayakizi tarafından kapsanan bölge içerisinde yer alsın. Radarın lineer FM chirp işaretini kullandığını varsayalım. İki yollu menzil üzerindeki zamana bağlı etkileri kaldırmak için alınan işaret

$M_{ref} = \exp\left[j2\pi f \left(\frac{r_1 + r_2}{c}\right)\right]$ fonksiyonu ile çarpılır[6]. Alınan işaretler demodüle

edilip örneklendikten sonra SAR verisi s yaklaşık olarak σ 'nın Fourier dönüşümüdür.

$$s(\theta_k, r_l) = C \int_B \int_B \sigma(x, y) \exp\{i2\pi(x \cdot r_l \sin \theta_k + y \cdot r_l \cos \theta_k)\} dx dy \quad (2.1)$$

kutupsal ızgarada örnekleme bölgeleri şu şekilde tanımlanır,

$$\theta_k = \theta_0 + k\Delta\theta = \theta_0 + k \cdot PRF \quad k = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

$$r_l = r_0 + k\Delta r = \frac{2f_0}{c} + l \cdot \kappa_r \cdot \frac{c}{2SW\gamma} \quad l = 1, \dots, L \quad (2.3)$$

Her biri l örnek içeren toplam K darbenin toplandığını varsayıyoruz. (2.1) deki C dördül faz terimlerini içeren kompleks bir değerdir, burada ihmal edilecektir. Demodüle edilmiş darbenin band genişliği chirp katsayısı γ , radar menzil genişliği SW ye bağlıdır ve nominal olarak $2SW\gamma/c$ dir. Ancak örnekleme Nyquistden daha yüksekçe bir frekansta yapılmalıdır ki girişim engellensin. Aşırı örnekleme faktörü $\kappa_r = 1,2$ dir. PRF için alt ve üst sınır aralığı şu şekildedir,

$$\frac{c}{2SW} \geq PRF \geq \frac{4v}{D} \quad (2.4)$$

PRF alt sınırı doppler frekanslarının girişimini engelleyecek biçimde, üst sınırı ise radar ekolarının üst üste binmelerini engelleyecek biçimde seçilir.

Radar sistem parametrelerinin kutupsal format için gerekli özellikleri sağladığını varsayacağız. $\sigma(x, y)$ görüntülenen bölgenin kompleks yansıma katsayısını belirtsin, burada x menzil, y çapraz menzil koordinatıdır.

Ağırlık fonksiyonu $w(\theta_k, r_l)$ nin kullanılması ile ters Fourier integrali en iyi yaklaşıklıkla bulunur.

$$G(x, y) = \iint_{\theta R} s(\theta, r) \exp\{-i2\pi(xr \sin \theta + yr \cos \theta)\} r dr d\theta = \sum_{k,l} s(\theta_k, r_l) w(\theta_k, r_l) \quad (2.5)$$

burada $\theta = [\theta_0, \theta_0 + K\Delta\theta)$, $R = [r_0, r_0 + L\Delta r)$ ve $\theta \times R$ sentetik açıklığı verir. (2.5) ifadesindeki $G(x, y)$ $B \times B$ lik radar ayak izi dışında sıfıra eşittir. Demodüle edilmiş faz verisi $s(\theta_k, r_l)$ band sınırlıdır ve bilinen interpolasyon teknikleri ile s kartezyen koordinat sisteminde elde edilebilir. $s(\epsilon_k, n_l)$ ifadesi $s(\theta_k, r_l)$ nin kartezyen koordinatta örneklenmiş halini ifade etsin. Aşağıda sayısal kutupsal format SAR görüntü işleme algoritmasının işlem adımları verilmiştir.

2.1.1. Kartezyen Izgaraya İnterpolasyon

Kutupsal - kartezyen koordinat dönüşümü için sinc interpolasyonu çoğunlukla kullanılan bir yöntemdir. Ancak sinc fonksiyonu sonsuza kadar uzanır ve $(1/x)$ fonksiyonu gibi yavaş sönümlenir. Bundan dolayı uçları kesilmiş ve ağırlık katsayısı ile çarpılmış sinc kullanılır. Doğruluktan bir miktar fedakarlıkta bulunularak

interpolatorde kullanılan örneklerin sayısı azaltılır. Burada $K \times L$ lik kutupsal ızgaradan $K' \times L'$ lük kartezyen (dik) ızgara yapısına geçiş yapıyoruz.

$$s(\xi_{k'}, \eta_{l'}) = \sum_{k,l} s(\theta_k, r_l) h(\xi_{k'} - r_l \sin \theta_k, \eta_{l'} - r_l \cos \theta_k) \quad (2.6)$$

Buradaki h fonksiyonu interpolasyon filtresidir. (ξ, η) örnekleme aralığı kutupsal ızgaradan daha büyük seçilmelidir.

$$\xi_{k'} = \xi_0 + k' \Delta \xi, \quad \Delta \xi \geq \Delta r, \quad k' = 1, \dots, K' \quad (2.7)$$

$$\eta_{l'} = \eta_0 + l' \Delta \eta, \quad \Delta \eta \geq r_K \Delta \theta, \quad l' = 1, \dots, L'$$

Çıkış dizisinin genişliği $K' \times L'$ dir ve $K' \leq K$ ve $L' \leq L$ koşulu sağlanmalıdır. Maksimum görüntü genişliği radar ayakizi olan BxB ye eşit olabilir. K' ve L' büyüklükleri interpolate edilmiş veride girişime neden olmayacak kadar büyük seçilir. Interpolasyon fonksiyonları bölüm 3 te ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2.1.2. Sıfır Ekleme ve Ters Fourier Dönüşümü

FFT kullanılarak $\sigma(x, y)$ nin ilk dönüştürülmüş hali elde edilir. Ters Fourier dönüşümünden önce genellikle sıfır ekleme uygulanarak faz verisinin NxM boyutlu (burada $M > K', N > L'$) olması sağlanır.

$$F(x_m, y_n) = \sum_{k', l'} w(\xi_{k'}, \eta_{l'}) s(\xi_{k'}, p \eta_{l'}) \exp \left\{ -i 2\pi \left(\frac{mk'}{M} + \frac{nl'}{N} \right) \right\} \quad (2.8)$$

Faz kayıtlarını içeren veriye sıfır eklenmesi daha iyi görüntü elde edilmesini sağlar.

Tipik aşırı örnekleme faktörü $M = \frac{3K'}{2}, N = \frac{3L'}{2}$ olarak alınırsa aşırı örnekleme oranı 1,5 piksel/çözünürlük hücresi olur. Yan demetlerin etkisini bastırmak için w fonksiyonu kullanılır.

2.1.3. Genlik Düzeltmesi ve Görüntü Oluşturma

Son olarak ters Fourier dönüşümü alındıktan sonra geçirme bandındaki uniform olmayan etkileri kompanze etmek için h interpolasyon filtresine genlik düzeltmesi yapılır.

$$G(x_m, y_n) = \frac{F(x_m, y_n)}{A(x_m, y_n)} \quad (2.9)$$

Genlik düzeltmesinden sonra görüntü kesilerek kenarlarda kalan parçalar atılır ve sonuç olarak toplam $M' \times N'$ lik pikseller elde edilir.



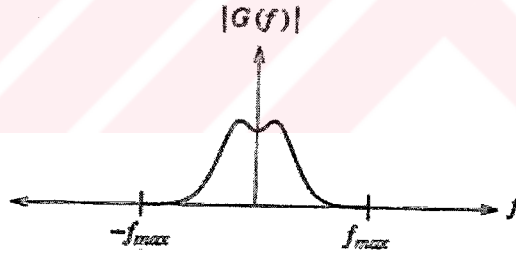
3.ÖRNEKLEME VE YENİDEN OLUŞTURMA

3.1. Örneklemeye

‘Verilen $g(x)$ sürekli işareti için alınan $g_s(x)$ örnekleri $g(x)$ ’i tam olarak ifade etmek için yeterlidir ve $g(x)$ işareti $g_s(x)$ ’den nasıl elde edilir?’ sorusu işaretin yeniden oluşturulması problemini tanımlar. Bu sorunun cevabını bulmak için frekans domeninde örneklenmiş verinin frekans spektrumundan faydalanılır. $g(x)$ işaretinin Fourier dönüşümü,

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi fx} dx \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır. $G(f)$ işaretinin genliği şekil 3.1 de görülmektedir. $f_{\max}$ ’ın ötesinde işaret sıfır değerini aldığı için işaretimiz $f_{\max}$ band sınırlıdır.



Şekil 3.1 : $G(f)$ Spektrumu[2]

Sürekli $g(x)$ işareti, ideal darbe örnekleyici fonksiyonu ile örneklenerek $g_s(x)$ örneklenmiş işareti elde edilir.

$$s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT_s) \quad (3.2)$$

Burada T_s örneklemeye periyodudur. Değişken n , δ ile kullanılarak örneklemeye fonksiyonunun darbe katarı tanımlanır.

$$g_s(x) = g(x) \cdot s(x) \quad (3.3)$$

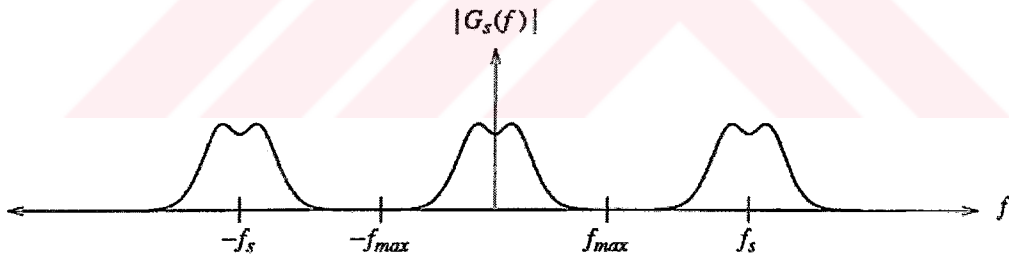
$g_s(x)$ ifadesinin Fourier dönüşümünü aldığımızda,

$$\begin{aligned} G_s(f) &= G(f) * S(f) = G(f) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \delta(f - nf_s) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(f - nf_s) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Buradaki f_s örnekleme frekansını, $*$ ise konvolüsyonu ifade etmektedir. Yukarıdaki ifadeler sayesinde Fourier dönüşümünün iyi bilinen özelliklerini kullanabiliriz,

- a) Konum domeninde çarpma işlemi frekans domeninde konvolüsyona karşı gelir.
- b) Darbe katarının Fourier dönüşümü yine darbe katarıdır.
- c) f_s frekansında örneklenen bir işaretin frekans spektrumu kendini f_s periyodu ile tekrarlayan bir yapı gösterir.

Üçüncü özelliğin getirdiği önemli sonuçlar vardır. Frekans spektrumu $G_s(f)$ kendini f_s aralıklarla tekrarlar. Bu aşağıdaki şekil 3.2’de görülmektedir.



Şekil 3.2: $G_s(f)$ spektrumu[2]

Küçük örnekleme periyodu yüksek örnekleme frekansına sebep olur ki bu durumda tekrarlar birbirinden çok uzakta olur. Limit halde örnekleme periyodu sıfıra giderse ($T_s \rightarrow 0$, $f_s \rightarrow \infty$) yalnızca bir tek spektrum ortaya çıkar ki sonuç olarak bu da sürekli hale karşılık gelir.

3.2. Yeniden Oluşturma

Yukarıda elde ettiğimiz sonuca göre örnekleme işlemi işaretin frekans spektrumuna bir zarar vermeden f_s aralıklarla tekrarlar. Bu özellik sayesinde $G_s(f)$ ifadesini (temel band) düşük frekans ve yüksek frekansların bileşimi olarak yazılabilir. Temelband spektrumu $G(f)$ ve yüksek frekanstaki bileşenler $G_{high}(f)$ olmak üzere,

$$G_s(f) = G(f) + G_{high}(f) \quad (3.5)$$

biçiminde yazılacak olursa yeniden oluşturma için $G_{high}(f)$ atılıp yalnızca $G(f)$ 'i kullanacağız. Bu özellik örneklenmiş veri sistemlerinde kritik bir öneme sahiptir.

3.2.1. Yeniden Oluşturma Koşulları

Yeniden oluşturma için en önemli koşul $G(f)$ ile $G_{high}(f)$ arasında girişim olmamasıdır. Bunun gerçekleşebilmesi için iki koşul vardır,

- a) İşaretimiz band sınırlı olmalıdır.
- b) Örnekleme frekansı $f_s > 2 f_{max}$ olmalıdır.

Birinci koşul işaretin band sınırlı olması koşulunu getirir ki bu işaretin frekans spektrumunda girişim olmamasını sağlar. Minimum örnekleme frekansı spektral kopyaların birbirinden ayırmak için kullanılacak yeterince büyük örnekleme frekansı olduğunu garanti eder. İkinci koşul ancak $f_s > f_{Nyquist}$ olduğunda hatasız yeniden oluşturma yapılabileceğini belirtir.

3.2.2. İdeal Alçak Geçiren Filtre

Şimdi örneklenmiş datadan yeniden oluşturma işleminin nasıl gerçekleştirilmesi gerektiğini ele alalım.

$$G_s(f) = G(f) + G_{high}(f) \quad (3.6)$$

Biçiminde yazıldığını yukarıda belirtmiştik. Şimdi yapmamız gereken $G_{high}(f)$ bileşeninden kurtulmaktır. Bunu yapabilmek için $H(f)$ alçak geçiren filtre kullanılır.

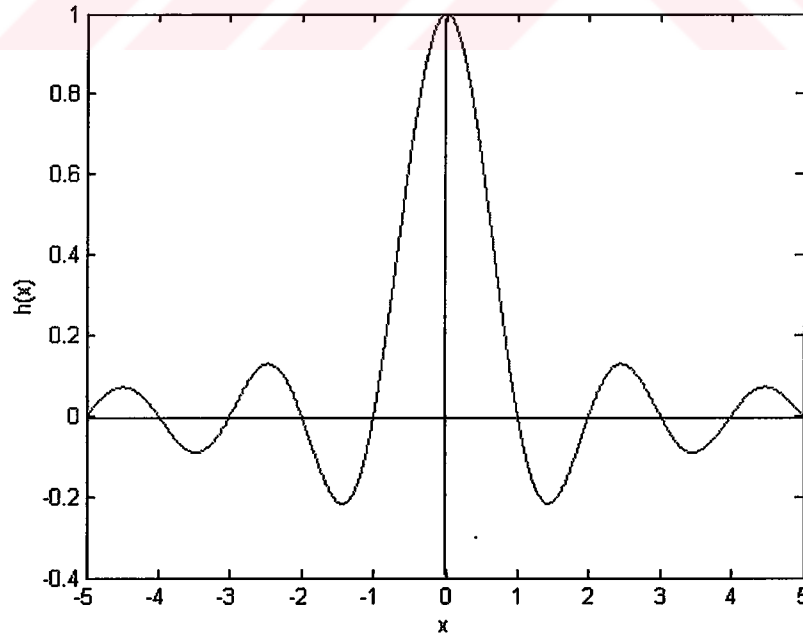
$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_{\max} \\ 0 & |f| \geq f_{\max} \end{cases} \quad (3.7)$$

Literatürde örneklemenin tam olarak Nyquist frekansında ($f_s = f_{\max}$) yapıldığında tam yeniden oluşturma gerçeleştirilip gerçeleştirilemeyeceğı konusunda bir karışıklık mevcuttur. Örnekleme Nyquist frekansında yapılırsa yüksek frekans bileşeni $f_{\max}$ 'da bir çakışma olacaktır. Bu durumda yalnızca frekans öğrenilebilir, genlik ve faz bilgileri kaybolur. Özel bir halde durum değışir o da örneklerin $f_{\max}$ 'da sinüsoidal minimum ve maksimumlarda yer aldığı durumdur. Bu özel halde geçerli olan $f_s = f_{\text{Nyquist}}$ bazı kaynaklarda her koşul için yazılmaktadır. Ancak bir sistemdeki ideal olmayan şartlardan dolayı Nyquist kriterinin üzerinde frekanlarda örnekleme frekansının seçilmesi daha uygun olur.

3.2.3. Sinc Fonksiyonu

Konum domeninde ideal alçak geçiren filtre, $H(f)$ ideal alçak geiren filtrenin ters fourier dönüşümünün alınması ile bulunur,

$$\sin c(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (3.8)$$



Şekil 3.3: Sinc fonksiyonu

Frekans domeninde çarpma işlemi konum domeninde konvolüsyona eşit olduğundan sinc fonksiyonu kullanılarak yeniden oluşturma,

$$g(x) = \sin c(x) * g_s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin c(\lambda) g_s(x - \lambda) d\lambda \quad (3.9)$$

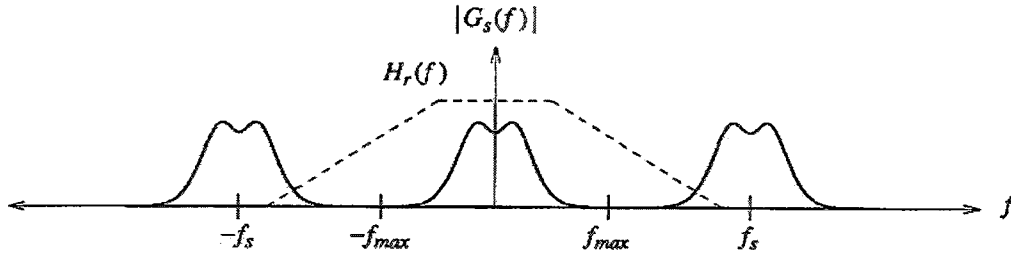
Sinc fonksiyonu kardinal eğriler olarak bilinen data örneğinde bir, diğer tüm noktalarda sıfır değerini alan interpolasyon fonksiyonlarından biridir. (3.9) ifadesinde ideal alçak geçiren filtrenin pratikte gerçekleştirilmesini göstermektedir. Çıkış değerlerinin hassas olarak hesaplanabilmesi için filtreye sonsuz adet komşu noktanın girilmesi gerekir. Ancak elimizdeki data örneklerinin sayısı sınırlıdır. Sinc yerine uçları kesilmiş sinc fonksiyonu kullanılır. Ancak bu da istenmeyen etkilere sebep olur. Uçları kesilmiş sinc fonksiyonunun frekans spektrumu incelenecek olursa sonsuza kadar uzanan küçük salınımlar ve $[-f_{\max}, f_{\max}]$ aralığında fonksiyon değerinin istenilen bir değerine sahip olmadığı görülür. Bunun sonucu olarak $f_{\max}$ 'ın altındaki frekanslarda kayıp olur, $f_{\max}$ 'ın üzerindeki frekanslarda tamamen bastırılmaz. Uçları kesilmiş sinc fonksiyonunun istenmeyen etkilerinden kurtulmak için ağırlık fonksiyonu ile çarpılır.

3.2.4. İdeal Olmayan Yeniden Oluşturma

İdeal olmayan yeniden oluşturma yapısı şekil 3.4 de gösterilmiştir. Burada giriş işareti yeniden oluşturma için gereken koşulları sağlamaktadır. İşaret band sınırlıdır ve spektrumda tekrarlanan her kopya sınırlıdır. Örnekleme frekansı Nyquist koşulunu sağlar. Frekans spektrumunda kopyalar arasında girişim yoktur. İdeal alçak geçiren filtre yapısını gerçekleştirmek güç olduğundan şekil 3.4 de gösterilen ideal olmayan yeniden oluşturma filtresi kullanılır.

$H_r(f)$ filtresi $f_{\max}$ 'dan daha yüksek frekansları tam olarak bastıramaz. Ayrıca $f_{\max}$ 'ın altında kalan bölgede de zayıflama mevcuttur. Yeniden oluşturma filtresinin doğruluk oranı frekans domeni özellikleriyle ölçülür. Geçirme bandı $[-f_{\max}, f_{\max}]$ aralığıdır. Bastırma bölgesi ise geçirme bandı dışında kalan bölgedir. İdeal filtre bastırma bandının tamamını bastırırken geçirme bandını da geçirir. Bastırma bandındaki yüksek frekanslı bileşenlerin geçmesi durumunda yeniden oluşturma doğru olarak gerçekleştirilemez. $f_{\max}$ 'a yaklaşırken filtre kazancının düşmeye başlaması

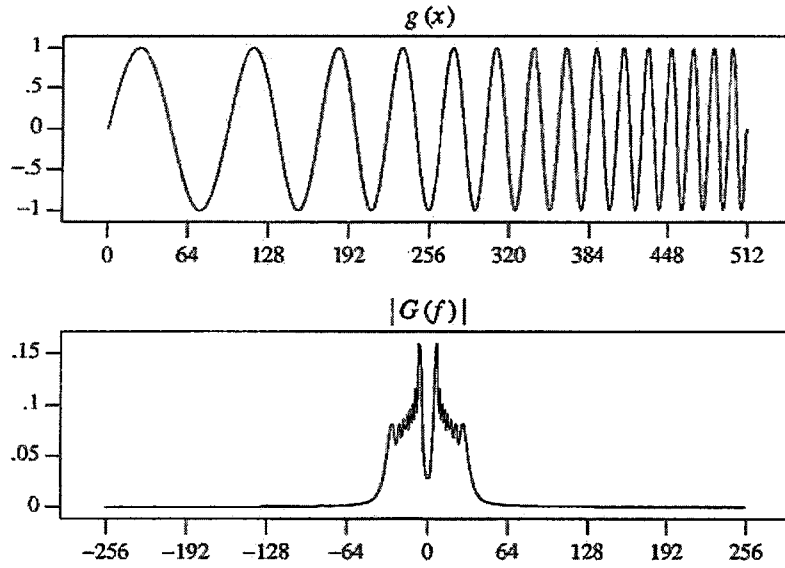
bulanıklaşmaya, kazancın artması ise keskinleşmeye sebep olur. $f_{\max}$ 'ın üzerindeki frekansların geçmesi ise aliasinge sebep olur. Şekil 3.4 de ideal olmayan alçak geçiren filtre kullanılarak yeniden oluşturma gerçeğlenmesi görölmektedir.



Şekil 3.4: İdeal olmayan yeniden oluşturma[2]

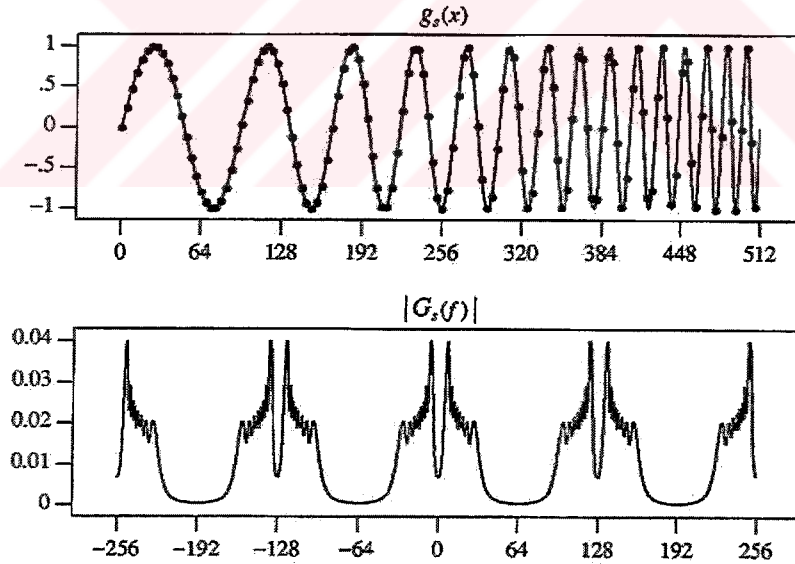
İdeal alçak geçiren filtre yapısını gerçeklemek güç olduğundan yeniden oluşturma için genellikle ideal olmayan filtre yapısı kullanılır. Spektral kopyalar arasında boşluk olması (örnekleme frekansının yüksek olması) girişimi engellediğı gibi yeniden oluşturma işleminde de yüksek frekans bileşenlerinin çok fazla sızmasını önler.

Chirp işareti $g(x)$ ve frekans spektrumu $G(f)$ aşağıda verilmiştir. Chirp işareti 512 adet sıralı örnekten oluşmaktadır. Bu örnekler x ile belirtilirse $0 \leq x \leq 512$ olacaktır. Frekans spektrumu ayrık Fourier dönüşümü ile elde edilmiştir. N örneklilik giriş için en fazla $N/2$ döngü olacağı için $G(f)$ 'in bölgesel frekansı $-N/2, N/2$ aralığında değişir. $G(f)$ incelendiğinde yüksek frekanslarda sıfır olduğu yani band sınırlı bir işaret olduğu ve yeniden oluşturma için gerekli ilk koşulu sağladığı görülür. $g(x)$ işareti eşit aralıklarla örneklenerek $g_s(x)$ elde edilir. $G_s(f)$ 'de yaklaşık dört adet kopya spektrum bulunur. Her kopyanın genliğı asıl $G(f)$ 'lerin $1/4$ 'ü kadardır. Örnekleme frekansı Nyquist kriterine uyduğu için çakışma sözkonusu değildir. $G(f)$ incelenecek olursa yüksek frekanslarda sıfır olduğu görülür. Bu $g(x)$ in band sınırlı olması anlamına gelir ve yeniden oluşturma için gerekli koşlu sağlar. $g(x)$ işareti düzgün örneklenirse $g_s(x)$ elde edilir



Şekil 3.5: (a) Chirp işareti (b) Chirp işaretinin spektrumu[2]

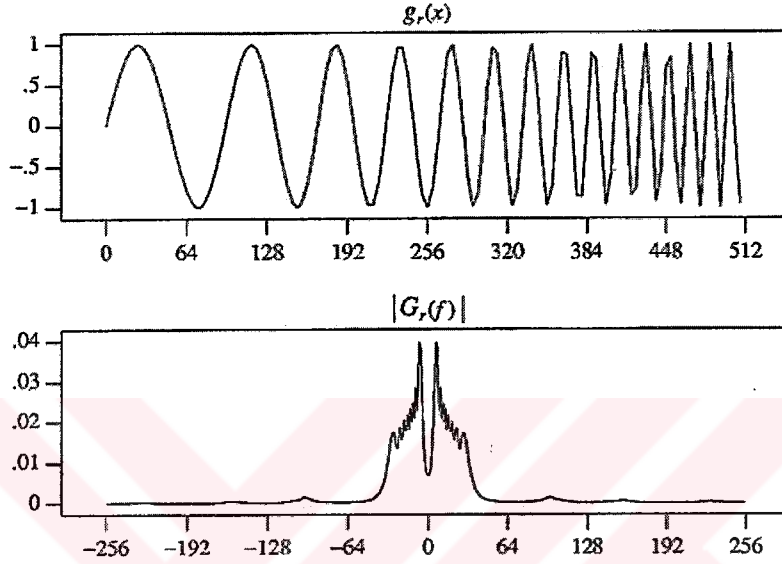
Şekil 3.6 da örneklenmiş chirp işareti görülmektedir. Buradaki büyük siyah noktalar alınan örnekleri göstermektedir. $G_s(f)$ incelenecek olursa frekans spektrumunun yaklaşık olarak 4 adet kopyasının bulunduğu görülür. Buradaki kopyaların birbiriyle girişim yapmaması için örnekleme frekansının Nyquist kriterini sağlaması gerekir.



Şekil 3.6: Örneklenmiş chirp işareti[2]

$G_s(f)$ 'ye ideal alçak geçiren filtre uygulanarak $g(x)$ 'in elde edilmesi mümkündür. Aşağıdaki şekilde ideal olmayan alçak geçiren filtre uygulanarak $g_r(x)$

bulunmuştur. Lineer interpolasyona ait olan filtre yapısı frekans domeninde bir miktar yüksek frekans bileşeninin gelmesine neden olmuştur. Şekil 3.7 den de görüleceği üzere $G_r(f)$ orjinal işaretimiz $G(f)$ 'in istenmeyen bazı etkiler içeren halidir. $g_r(x)$ 'in sol kısmı incelenecek olursa değişimin yavaş olmasından dolayı iyi bir şekilde yeniden oluşturulduğunu görülür. Sonlara doğru gidildiğinde ise hızlı değişen sinüsoidal yapıdan dolayı bozulmanın arttığını görülür.



Şekil 3.7: Chirp işaretinin ideal olmayan alçak geçiren filtre ile elde edilmesi[2]

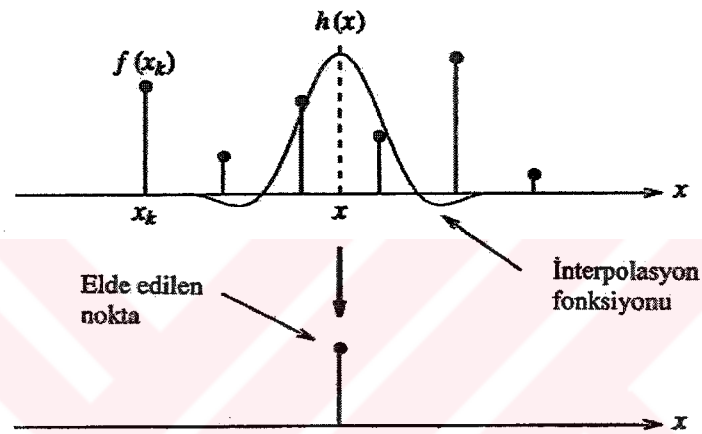
3.3. İnterpolasyon

İnterpolasyon örneklenmiş veya süreksiz bir fonksiyonun örnekleri arasındaki değerlerin bulunmasıdır. Bu işlem süreksiz data örnekleri üzerinden sürekli bir fonksiyonun geçirilmesi ile gerçekleşir. İnterpolasyon işleminden sonra yalnızca örneklenmiş noktalarda değil istenilen her noktada fonksiyonun değeri belirlenebilir. Örnekleme işlemi ile band sınırlı işaretten band genişliği sonsuz işaret üretilirken interpolasyon işlemi bunun tersi olarak alçak geçiren filtre yapısıyla ayrık işaretin band genişliğini düşürür. Eşit aralıklı data için interpolasyon ifadesi şu şekilde yazılabilir,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(x - x_k) \quad (3.10)$$

burada h interpolasyon gerçekleştirme fonksiyonu c_k katsayıları ile çarpılarak K adet örneğe uygulanır. (3.10) ifadesi interpolasyonu konvolüsyon işlemi olarak ifade eder. h interpolasyon gerçekleştirme fonksiyonu her zaman simetrik bir yapı gösterir. Klasik interpolasyon yöntemlerinde c_k katsayıları fonksiyonun k noktasında aldığı değer, yani giriş verisidir.

Şekil 3.8 incelenecek olursa interpolasyon fonksiyonu x interpolate edilecek olan noktada yer alır. Fonksiyonun bu noktada aldığı değer, giriş datası ile interpolasyon fonksiyonunun konvolüsyonuna eşittir.



Şekil 3.8: Tek bir nokta için interpolasyon[2]

3.3.1. En Yakın Komşu İnterpolasyonu

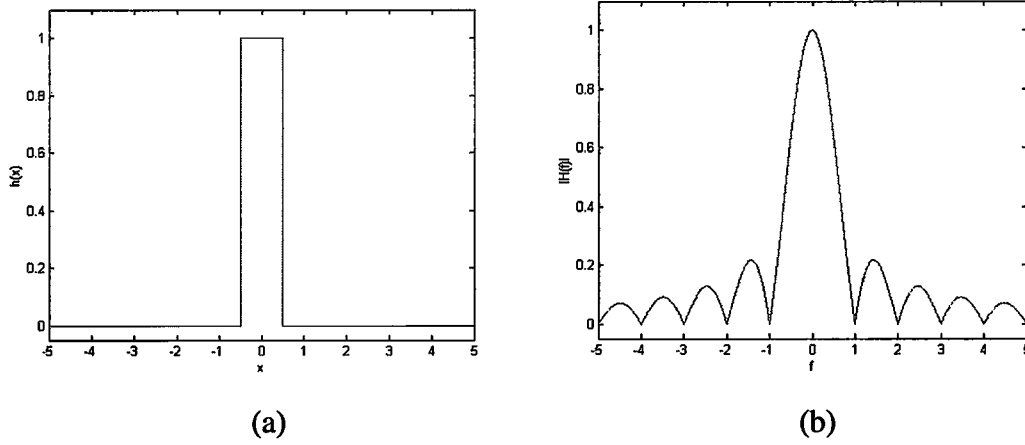
Hesaplama kolaylığı yönünden en basit interpolasyon yöntemi en yakın komşu (nearest neighbor: NN) yöntemidir. Çıkış piksel değeri giriş datasının en yakın örnek noktasının değeri olarak belirlenir. Bu algoritma aynı zamanda nokta kaydırma algoritması olarak da bilinir. İnterpolasyonun matematiksel ifadesi,

$$f(x) = f(x_k) \quad \frac{x_{k-1} + x_k}{2} < x \leq \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \quad (3.11)$$

konum domaininde görüntünün bir piksel genişliğindeki dikdörtgen darbe fonksiyonu ile çarpımıdır. İnterpolasyon fonksiyonunun ifadesi,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 0.5 \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.12)$$

$h(x)$ fonksiyonunun ve frekans spektrumunun grafiği şekil 3.9 de verilmiştir.



Şekil 3.9: En Yakın Komşu yöntemi (a) $h(x)$ interpolasyon fonksiyonu
(b) Frekans spektrumu

Konum domeninde dikdörtgen fonksiyonu ile konvolüsyon frekans domeninde sinc ile çarpıma eşittir. Bu yöntemde pikselleri kaydırmadan dolayı yarım piksel boyutunda bir hata yapılması olasıdır. NN metodu ilk olarak, daha gelişmiş yöntemlere bilgisayar hızının müsade etmediği zamanlarda , Uzaktan Algılamada kullanılmıştır. Her çıkış verisi bir giriş verisinin fonksiyonu olduğundan eşleme bu algoritma ile kolaylıkla yapılır.

3.3.2. Lineer İnterpolasyon

Lineer interpolasyon giriş işaretinin ardışıl her iki noktasından bir doğru geçiren birinci dereceden bir yöntemdir. Verilen (x_0, x_1) aralığında fonksiyon değerleri f_0 ve f_1 iken interpolasyon polinomu,

$$f(x) = a_1x + a_0 \quad (3.13)$$

a_0 ve a_1 ,

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

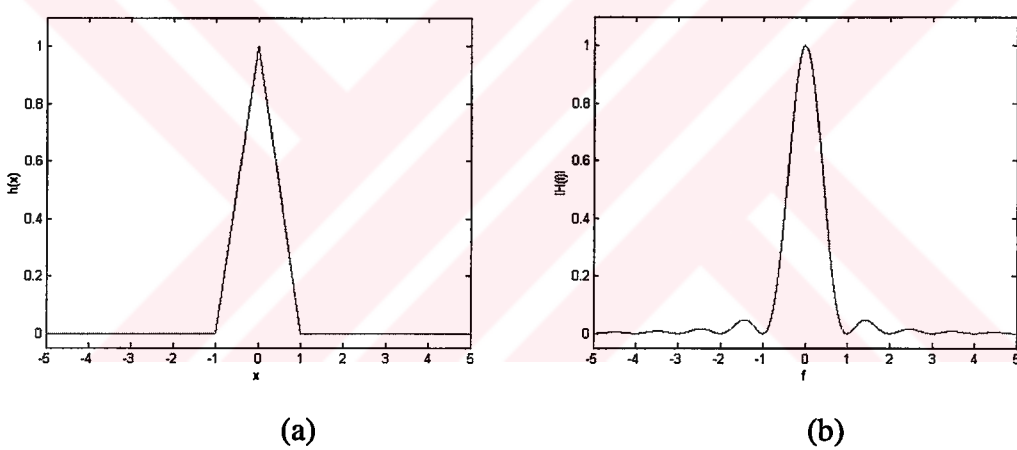
denklemini çözülerek bulunur. Buradan $f(x)$ için şu ifade elde edilir,

$$f(x) = f(0) + \left[\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right] (f_1 - f_0) \quad (3.15)$$

konum domeninde lineer interpolasyon örneklenmiş giriş verisinin aşağıda verilen $h(x)$ ifadesi ile konvolüsyonudur.

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x| & 0 \leq |x| < 1 \\ 0 & 1 < |x| \end{cases} \quad (3.16)$$

Bu interpolasyon fonksiyonu frekans domeninde iyi sayılabilecek bir alçak geçiren filtre yapısı oluşturur. Yan loplara etkisi oldukça düşük olmakla birlikte (bu bastırma bandında iyi bir performans sağlar) istenmeyen yüksek frekanslı bileşenleri geçirme bandına sızarak bozulmaya sebep olur. Geçirme bandı zayıflatılmış olduğu için bunun etkisi görüntüde yumuşama olarak ortaya çıkar.



Şekil 3.10: (a)Lineer İnterpolasyon fonksiyonu (b) Frekans spektrumu

Lineer interpolasyon en yakın komşu metoduna göre daha iyi çözünürlük sağlar.

3.3.3. Kübik Konvolüsyon

Kübik konvolüsyon üçüncü dereceden teorik olarak sinc interpolasyon fonksiyonuna iyi bir şekilde yaklaşan interpolasyon algoritmasıdır. İnterpolatör $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ve $(1,2)$ aralıklarında tanımlanan kübik polinomlar kullanılarak bulunur. $(-2,2)$ dışında $h(x) = 0$ dır. Her interpolate edilmiş nokta ağırlık katsayılarıyla çarpılmış dört giriş noktasından oluşmaktadır.

$$h(x) = \begin{cases} a_{30}|x|^3 + a_{20}|x|^2 + a_{10}|x| + a_{00} & 0 \leq |x| < 1 \\ a_{31}|x|^3 + a_{21}|x|^2 + a_{11}|x| + a_{01} & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (3.17)$$

Katsayı değerleri aşağıdaki adımların uygulanması ile bulunur.

a) $x = 0$ ve 2 için $h(0) = 1$ ve $h(x) = 0$.

b) $|x| = 0,1$ ve 2 de h sürekli olmalıdır.

c) h 'ın birinci dereceden türevi $|x| = 0,1,2$ de sürekli olmalıdır.

Birinci koşul h 'ın giriş örneği üzerinde iken interpolasyon fonksiyonunun komşu örneklerden bağımsız olduğunu gösterir. (3.10) deki c_k katsayıları giriş data örneklerinin kendileridir. x_j noktası için,

$$f(x_j) = \sum_{k=0}^{K-1} c_k h(x_j - x_k) = \sum_{j=2}^{j+2} c_k h(x_j - x_k) \quad (3.18)$$

Yukarıda verilen birinci koşula göre $j=k$ olmadıkça $h(x_j - x_k) = 0$ dır. Bundan dolayı (3.18)'in sağ tarafı c_j ye dönüşür. Bu $f(x_j)$ ye eşit olduğundan görülür ki c_k katsayıları dört noktalı aralıkta veri örneklerine eşit olmak zorundadır. İlk iki koşuldan katsayıların hesabı için dört eşitlik elde edilir,

$$\begin{aligned} 1 &= h(0) = a_{00} \\ 0 &= h(1^-) = a_{30} + a_{20} + a_{10} + a_{00} \\ 0 &= h(1^+) = a_{31} + a_{21} + a_{11} + a_{01} \\ 0 &= h(2^-) = 8a_{31} + 4a_{21} + 2a_{11} + a_{01} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Üçüncü koşuldan üç eşitlik daha elde edilir,

$$\begin{aligned} -a_{10} &= h'(0^-) = h'(0^+) = a_{10} \\ 3a_{30} + 2a_{20} + a_{10} &= h'(1^-) = h'(1^+) = 3a_{31} + 2a_{21} + a_{11} \\ 12a_{31} + 4a_{21} + a_{11} &= h'(2^-) = h'(2^+) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Yukarıdaki koşullardan yedi eşitlik elde edildi. Ancak bilinmeyen katsayıların sayısı sekiz dir. Burada özel çözüme ulaşmak için bir ifadeye daha ihtiyaç vardır. Serbest parametre olarak $a = a_{31}$ alınarak çözüm takımı aşağıdaki gibi elde edilir,

$$h(x) = \begin{cases} (a+2)|x|^3 - (a+3)|x|^2 + 1 & 0 \leq |x| < 1 \\ a|x|^3 - 5a|x|^2 + 8a|x| - 4a & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (3.21)$$

$h(x)$ ifadesi için istenilen sonuç ifadesinin özelliklerinin bilinmesi a için sınır değerlerin bulunmasına yardımcı olur. Sinc fonksiyonuna benzer bir yapıda $x = 0$ da maksimum bükülme noktası, $|x| = 1$ de minimum bükülme noktası belirlenir.

$$\begin{aligned} h''(0) &= -2(a+3) < 0 & \rightarrow a > -3 \\ h''(1) &= -4a > 0 & \rightarrow a < 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

a 'nın değeri -3 ile 0 arasında değişirken h fonksiyonu sinc'e benzer bir yapı gösterir. Riffmann ve McKinnon $a=-1$ alarak sinc fonksiyonunun $x=1$ deki eğimini elde etmeye çalışmışlardır. Bu seçim geçirme bandının uç noktaları bileşenlerinde güçlenmeye sebep olur. Bu güçlenme görüntünün yüksek frekans istiklerinde keskinlik olarak ortaya çıkar. a için diğer seçenekler $a=-0.5$ ve -0.75 tir. Keys $a=-0.5$ seçerek interpolasyon fonksiyonunun Taylor serileri yaklaşıklığını yaparak, mümkün olduğunca çok ortak noktada orjinal işaretle aynı değeri almasını sağlamıştır [11].

$a=-0.75$ seçilerek h daki iki kübik polinomun ikinci dereceden türevlerin 1 olması sağlanır. Bu $x=1$ 'de ikinci dereceden türevlerin sürekli olmasını sağlar. a için seçilebilecek değerlerden görüntüde kesinlik, detayların artması için $a=-1$ alınır. Ancak doğruluk Taylor serisinin derecesi ile ölçülür. Bu değeri maksimize eden değer $a=-0.5$ tir.

3.3.4. İki Parametrelili Kübik Filtreler

Aşağıda verilen koşullar altında (3.17)'deki 8 katsayıyı 2'ye düşürmek mümkündür.

a) $|x| = 2$ için $h(x) = 0$.

b) $x = 0$ ve 2 için $h'(x) = 0$.

c) $|x| = 1$ de h sürekli olmalıdır, $h(1^-) = h(1^+)$.

d) $|x| = 1$ de h 'ın birinci türevi sürekli olmalıdır, $h'(1^-) = h'(1^+)$.

e)
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(x-n) = 1 \quad (3.23)$$

İlk dört koşul gereğince interpolatör $|x| = 0$ ve 2 de eğimi sıfırdır ve $|x| = 1$ deki birinci dereceden türevi sürekli dir. Yukarıdaki beş koşuldan bilinmeyen katsayılar için beş adet ifade elde edilir. Son koşul sayısal bir görüntüde sabit piksel değerleri varsa, yeniden oluşturulan görüntüde de aynı şekilde sabit değerler bulunur. Bu katsayıların çözümü için altıncı koşulu getirir. Bu koşullar iki parametrelili çözüm takımını oluşturur[2].

$$h(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} (-9b - 6c + 12)|x|^3 + (12b + 6c - 18)|x|^2 + (-2b + 6) & 0 \leq |x| < 1 \\ (-b - 6c)|x|^3 + (6b + 30c)|x|^2 + (-12b - 48c)|x| + K & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (3.24)$$

Burada $K = 8b + 24c$ dir. (b,c) ye farklı değerler verilerek birçok farklı kübik filtre yapısı elde edilir. Örneğin (0,-c) (3.24)'de verilen kübik konvolüsyon interpolatörünü, (0,-1) ise kübik B eğrilerinin ifadesini verir. (b,c)'nin yapısını daha iyi anlayabilmek için parametre uzayı farklı örneklere göre (bulanıklık, anisotropy, çınlama) ayrılarak incelenir. (0.33,0.33) iyi görüntü kalitesi verir. (1.5,0.25) band söndüren filtreye karşı gelir. Daha ileri bir metod işaretlerin türevlerinin de kullanıldığı yapıdır. Bu yapı yapay görüntüde sözkonusu bilgi varken mümkündür. Bu durumda (3.10) formülü şu şekilde yazılır,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K-1} [f_k g(x-x_k) + f'_k h(x-x_k)] \quad (3.25)$$

burada,

$$g(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} \quad h(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x} \quad (3.26)$$

Yaklaşık yeniden oluşturma formülü Hermite kübik interpolasyon formülü ile verilir.

$$g(x) = \begin{cases} 2|x|^3 - 3|x|^2 + 1 & 0 \leq |x| < 1 \\ 0 & 1 \leq |x| \end{cases} \quad (3.27)$$

$$h(x) = \begin{cases} |x|^3 - 2x|x| + x & 0 \leq |x| < 1 \\ 0 & 1 \leq |x| \end{cases} \quad (3.28)$$

3.3.5. Drichlet-Sinc Adaptasyonu

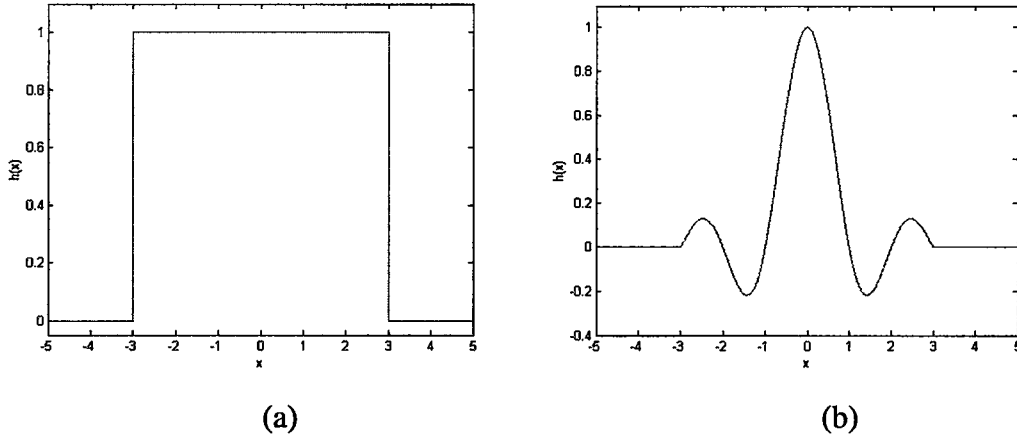
Örnekleme teorisi uyarınca sinc fonksiyonu ideal interpolasyon fonksiyonudur. Sinc interpolasyonu tam doğru sonuç vermesine karşın sistemin IIR filtre yapısı sonsuz toplamdan oluştuğu için pratikte kullanışlı değildir. Sinc yerine uçları kesilmiş sinc fonksiyonu kullanılarak sonlu yapıda interpolatör yapısı elde edilir. Bu işlem sonucunda istenmeyen çınlama etkisi ortaya çıkar. Dirichlet adaptasyon fonksiyonu şu şekilde verilir,

$$D^N(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{N-1}{2} \\ 1/2 & |x| = (N-1)/2 \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.29)$$

Dirichlet-sinc interpolasyon fonksiyonu ,

$$h(x) = \sin c(x) \cdot D^N(x) \quad (3.30)$$

biçiminde tanımlanır. N=7 için dirichlet adaptasyon fonksiyonu ve Drichlet-sinc interpolasyon fonksiyonu şekil 3.11 deki gibidir.



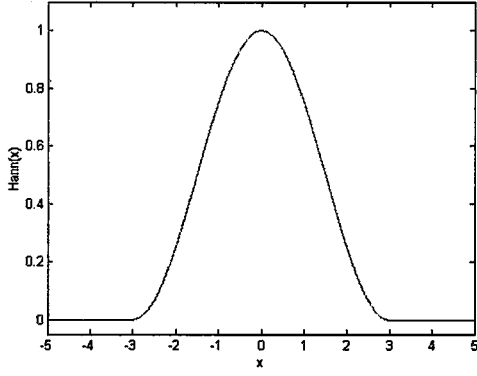
Şekil 3.11: (a) Dirichlet adaptasyon fonksiyonu (b) Dirichlet-sinc interpolasyon fonksiyonu

3.3.6. Hanning ve Hamming Adaptasyonları

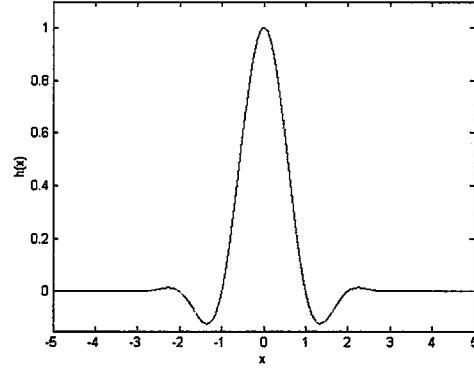
Hanning ve Hamming pencereleme fonksiyonları şu şekilde tanımlanır,

$$\text{Hanning/Hamming}(x) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi x / (N - 1)) & |x| < \frac{N - 1}{2} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (3.30)$$

Burada N pencereleme fonksiyonunun uzunluğunu belirlemektedir. Farklı α değerleri için Hanning ve Hamming fonksiyonları elde edilir. $\alpha=0.5$ için Hanning ve $\alpha=0.54$ için Hamming bulunur. Bu fonksiyonlar ile sinc çarpılarak elde edilen interpolasyon fonksiyonu Dirichlet adaptasyonuna göre çok daha iyi sonuç vermektedir. Burada interpolasyon fonksiyonunun 1. dereceden türevi sürekli olmakta ve yan lobların etkisi azalmaktadır. Şekil 3.12 de $N=7$ için Hanning pencereleme fonksiyonunun grafiği ve interpolasyon fonksiyonunun grafiği görülmektedir. Şekil 3.12 (b) deki Hann-sinc interpolasyon fonksiyonunun, frekans spektrumu ele alınacak olursa geçirme bandında bir miktar zayıflama olduğu ve bastırma bölgesindeki yüksek frekans bileşenlerinin bastırılmadığı görülür.



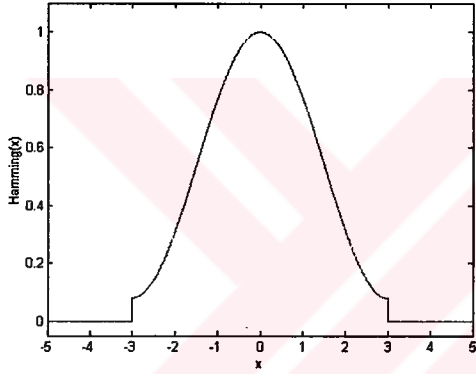
(a)



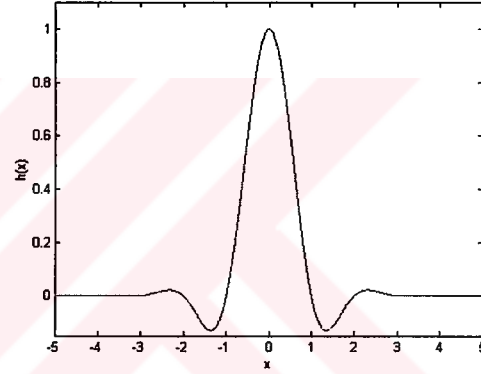
(b)

Şekil 3.12: (a) Hanning(x) fonksiyonu (b) Hann-sinc interpolasyon fonksiyonu

Şekil 3.13 de $N=7$ için Hamming pencereleme fonksiyonu ve Hamming-sinc interpolasyon fonksiyonu görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 3.13: (a) Hamming(x) fonksiyonu (b) Hamming-sinc interpolasyon fonksiyonu

Şekil 3.13 (a) incelenecek olursa $x = \pm 3$ de fonksiyonun uç noktaları 0.1 değerine sahiptir. Bu süreksizlikten dolayı Hamming adaptasyonunda yan lobların etkisi Hanningten daha fazladır.

4. FARKLI ARALIKLI HIZLI FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

4.1. Temel Varsayımlar

Örnek olarak (4.1) ifadesinin hesaplanmasını ele alalım,

$$\hat{f}(m) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m x} dx \quad (4.1)$$

$-M \leq m \leq M$ için, f kompleks değerli parçalı yavaş değişen veya genelleştirilmiş bir fonksiyondur. f fonksiyonu $[0,1]$ aralığına yakın olan sınır değerlerinde sıfır değerine sahiptir ve $[0,1]$ aralığı dışında f sıfır olarak düşünölsün. (4.1) ifadesinin eşit aralıklı FFT' si hesaplandığında $1/N$ mertebesinden hata yapılır ki burada N örnek sayısını ifade eder. Bu hata yapısı, özellikle yüksek mertebeli ve tekil fonksiyonlarda kullanışlı olmayan yüksek maliyetli bir nitelik gösterir. $L^2(R)$ 'nin çok çözünürlüklü analizini (multi resolution analysis: MRA) düşünelim,

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \quad (4.2)$$

V_j , $j < 0$ MRA nin alt uzayıdır ve ϕ ölçekleme fonksiyonuyla ifade edilir.

$$\phi_{kj}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k) \quad (4.3)$$

burada $k \in \mathbb{Z}$ dir. f fonksiyonu V_j ye izdüşürmekle başlayıp, $j < 0$ için integral ifadesi

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{kj}(x) dx \quad (4.4)$$

f fonksiyonunun Fourier dönüşümünü almak için,

$$\hat{f}_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (4.5)$$

$f(x)$ ifadesi,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\xi e^{-2\pi i x \xi} d\xi \quad (4.6)$$

(4.4) de $f(x)$ ifadesi yerine (4.6) konulursa şu ifade elde edilir,

$$f_k = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(2^{-j} \xi) \overline{\hat{\phi}(x)} e^{2\pi i \xi k} d\xi \quad (4.7)$$

burada,

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad (4.8)$$

dir. (4.7) ifadesini $[-1/2, 1/2]$ aralığında hesaplarsak,

$$f_k = 2^{-j/2} \int_{-1/2}^{1/2} \hat{f}(2^{-j}(\xi + l)) \overline{\hat{\phi}(\xi + l)} d\xi \quad (4.9)$$

elde ederiz. Fourier serileri şu şekilde ifade edilir,

$$F(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-2\pi i \xi k} \quad (4.10)$$

F periyodik olduğundan $F(\xi) = F(\xi + 1)$ ve (4.9) kullanılarak şu sonuca varılır.

$$F(\xi) = 2^{-j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^{-j}(\xi + l)) \overline{\hat{\phi}(\xi + l)} \quad (4.11)$$

yada,

$$2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\hat{\phi}(\xi)} - \hat{f}(2^{-j} \xi) = \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \hat{f}(2^{-j}(\xi + l)) \frac{\overline{\hat{\phi}(\xi + l)}}{\hat{\phi}(\xi)} \quad (4.12)$$

ve mutlak değer alınarak,

$$\left| 2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\hat{\phi}(\xi)} - \hat{f}(2^{-j}\xi) \right| \leq \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} C_{\hat{f}}(l, \alpha) \frac{|\hat{\phi}(\xi + l)|}{|\hat{\phi}(\xi)|} \quad (4.13)$$

$|\xi| \leq \alpha$ için $C_{\hat{f}}(l, \alpha)$ ifadesi

$$C_{\hat{f}}(l, \alpha) = \sup_{|\xi| \leq \alpha} |\hat{f}(2^{-j}(\xi + l))| \quad (4.14)$$

burada $\alpha > 0$ parametredir. Daha sonrada görüleceği üzere α aşırı örnekleme faktörü ν ile ilgili bir parametredir ve aralarındaki ilişki $\alpha = 1/2\nu$ biçimindedir. ϕ ölçek fonksiyonu ve $\alpha > 0$ parametresini uygun biçimde seçersek, τ_l oranı,

$$\tau_l(\xi) = \frac{|\hat{\phi}(\xi + l)|}{|\hat{\phi}(\xi)|} \quad (4.15)$$

$l = \pm 1, \pm 2, \dots$ ler için kendiliğinden küçük kalacak ve (4.13) ifadesi $\hat{f}(\xi)$ nin $|\xi| \leq 2^{-j}\alpha$ için hesaplanmasına olanak sağlayacak bir algoritma olacaktır. (4.13) ifadesinin kullanışlı olabilmesi için $\hat{\phi}$ nın kesin bir aralıkta yer almasını ve τ_l oranının (4.15) küçük olmasını isteriz. Karşımıza çıkan bu koşullar karşısında ölçek fonksiyonunu Meyer yapısı ile inceleyelim. Meyer fonksiyonu şu şekilde tanımlanır,

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 & |\xi| < 1/3 \\ \cos(\frac{\pi}{2} w(3|\xi| - 1)) & 1/3 \leq |\xi| \leq 2/3 \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (4.16)$$

burada w yumuşatma fonksiyonudur ve $w(s) = 0$ $s \leq 0$, $w(s) = 1$ $s \geq 1$ biçiminde tanımlanır ve $w(s) + w(1-s) = 1$ dir. (4.16) daki ölçekleme fonksiyonu için (4.11) ifadesinin sağ kısmı sıfıra eşit olur ve $|\xi| \leq 1/3$ için $2^{j/2} F(\xi) = \hat{f}(2^{-j}\xi)$ elde ederiz. Ancak (4.16) ifadesinin kullanımı (4.4) e göre verimli bir algoritma oluşturmaz. Aynı zamanda kompakt destekli waveletlerin Fourier dönüşümü

yeterince hızlı değildir. (4.13) ifadesinde yer alan $F(\xi)/\bar{\hat{\phi}}(\xi)$ simetrik ölçekleme fonksiyonu dikleştirme prosedürü için gereklidir. ϕ ölçekleme fonksiyonu simetrik ise bu durumda $\bar{\hat{\phi}}(\xi) = \hat{\phi}(\xi)$ olur dolayısıyla $|\xi| \leq \alpha$ için $\hat{\phi}(\xi)$ fonksiyonu periyodik $\sqrt{a(\xi)}$ fonksiyonuyla yer değiştirilebilir.

$$a(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + l)|^2 \quad (4.17)$$

$a(\xi)$ fonksiyonu genellikle V_0 düzeyinde dikleştirme amacı ile kullanılır çünkü $\{\phi(x-l)\}_{l \in \mathbb{Z}}$ fonksiyonu V_0 düzleminde dik yapı oluşturur. Burada

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{\sqrt{a(\xi)}} \quad (4.18)$$

(4.17) ve (4.15) ifadelerinden,

$$a(\xi) = |\phi|^2 \left(1 + \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \tau_l^2(\xi)\right) \quad (4.19)$$

ve dolayısıyla $|\xi| \leq \alpha$ için,

$$\frac{\sqrt{a(\xi)}}{\hat{\phi}(\xi)} \approx 1 + \frac{1}{2} \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \tau_l^2(\xi) \quad (4.20)$$

(4.13) için geçerli olan şartlar altında (4.11) ifadesi ilerletilecek olursa,

$$\frac{F(\xi)}{\sqrt{a(\xi)}} = 2^{-j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2^{-j}(\xi + l)) \bar{\hat{\phi}}(\xi + l) \quad (4.21)$$

buradaki $\hat{\phi}$, (4.18) de verildiği biçimdedir. Yukarıda yapılan işlem ile hesaplanan $F(\xi)/\sqrt{a(\xi)}$ ile (4.10) da verilen ifadeyi ortogonalize etmiş oluyoruz. $\hat{f}(2^{-j}\xi)$ yakınsama fonksiyonuna ulaşınca kadar takip edilen adımlar şu şekilde sıralanabilir. (4.4) ile verilen integral hesaplanır, örneğin f fonksiyonunun V_j ye projeksiyonu, $j < 0$ için f fonksiyonunun bulanıklandırma fonksiyonu ile konvülüsüyonu olarak görülebilir. (4.10) ile hesaplanan Fourier serileri hesaplamayı

Fourier domenine taşır. Bu dekonvolüsyon Fourier domeninde gerçekleşir ve dikleştirme prosedürü tamamlanır.

4.2. Çok Çözünürlüklü Analizin Temel Prensipleri

Ortaya koyduğumuz yapıda çok çözünürlüklü analiz (multi resolution analysis: MRA) prensibine dayalı polinomal spline uzayından yararlanacağız. Bu bize integralleri B splinelar ile hesaplama dolayısıyla Battle Lemarie ölçekleme fonksiyonunun özelliklerini kullanma imkanı sağlar. Bu yapı algoritmanın verimi açısından büyük önem taşır.

(4.4) deki integralleri merkezi B splinelar ile hesaplayalım,

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \beta_{kj}^{(m)}(x) dx \quad (4.22)$$

burada $\beta_{kj}^{(m)}(x) = 2^{-j/2} \beta^{(m)}(2^{-j}x - k)$ ve $\beta^{(m)}$ m. derece merkezi B splinedır.

Kolaylık sağlaması açısından yalnızca tek dereceden splineları düşünelim $\beta^{(m)}$ in Fourier dönüşümü

$$\hat{\beta}^{(m)}(\xi) = \left(\frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right)^{m+1} \quad (4.23)$$

$a^{(m)}$ periyodik fonksiyonu,

$$a^{(m)}(\xi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\beta}^{(m)}(\xi + l) \right|^2 = \sum_{l=-m}^{l=m} \beta^{(2m+1)}(l) e^{2\pi i l \xi} \quad (4.24)$$

Battle-Lemarie ölçekleme fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$\hat{\phi}^{(m)}(\xi) = \frac{\hat{\beta}^{(m)}(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}} \quad (4.25)$$

$\beta^{(2m+1)}(l)$ değerleri (4.42) de verilen rekürsiyon bağıntısı kullanılarak hesaplanabilir, dolayısıyla $a^{(m)}(\xi)$ fonksiyonu kolaylıkla elde edilebilir.

Teorem 4.1:

E_∞ , f fonksiyonunun $2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}}$ periyodik fonksiyonuyla alınmış Fourier

dönüşümü $\hat{f}$ deki hata olsun,

$$E_\infty = \sup_{|\xi| \leq \alpha} \left| 2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}} - \hat{f}(2^{-j}\xi) \right| / \sup_{|\xi| \leq \alpha} |\hat{f}(2^{-j}\xi)| \quad j < 0 \quad (4.26)$$

buradaki $a^{(m)}$ (4.24) ifadesiyle verilmiştir ve Fourier serisi

$$F(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (4.27)$$

(4.22) ile verilen f_k katsayıları eğer,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^\sigma \quad \sigma < m \quad (4.28)$$

ise bu durumda,

$$E_\infty \leq \frac{1}{2\hat{\phi}(\alpha) - 1} \left[1 - \hat{\phi}(\alpha) + \frac{1}{C_{\hat{f}}(0, \alpha)} \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} C_{\hat{f}}(l, \alpha) \left(\frac{\alpha}{|l| - \alpha} \right)^{m+1} \right] \quad (4.29)$$

burada

$$C_{\hat{f}}(l, \alpha) = \sup_{|\xi| \leq \alpha} |\hat{f}(2^{-j}(\xi + l))| \quad (4.30)$$

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için B spline derecesi m 'i seçeriz ve α parametresi ($\alpha > 0$) için $|\xi| \leq \alpha$ olup,

$$E_\infty \leq \varepsilon \quad (4.31)$$

dir. Teoremin yaklaşık hata için yakın bir tahmin sağladığını görmek için (4.29) ifadesinin sağ kısmını ele alalım. (4.25) ile verilen Battle-Lemarie ölçekleme

fonksiyonu $\hat{\phi}^{(m)}$ in (4.25) Fourier domenindeki yapısı önemlidir. $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$ fonksiyonu $\xi \in (0,1)$ ve $\xi \in (-1,0)$ aralıklarında monotondur. Bu özellikten dolayı

$$\sup_{|\xi| \leq \alpha} |1 - \hat{\phi}(\xi)| = 1 - \hat{\phi}(\xi) \quad (4.32)$$

elde edilir. $1 - \hat{\phi}^{(m)}(\alpha)$ nın bulunabilmesi için $\hat{\phi}^{(m)}(\alpha)$ nın $\xi = 0$ civarında açılımını kullanırsak,

$$\hat{\phi}^{(m)}(\xi) = 1 + O(\xi^{2m+2}) \quad (4.33)$$

(4.33) ifadesinin (4.25)'e ne kadar yakınsadığını (yakınsama yarıçapını) görmek için (4.25) ifadesinin paydasını inceleyelim. Polinomun $2m$ kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2m}$ lerin,

$$E(z) = (2m+1)! z^m \sum_{l=-m}^{l=m} \beta^{(2m+1)}(l) z^l \quad (4.34)$$

tamamı negatiftir, $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{2m}$ ve resiprok çiftler arasında $\lambda_1 \lambda_{2m} = \dots = \lambda_{m-1} \lambda_{m+1} = 1$ ilişkisi vardır. Dolayısıyla (4.24) ifadesindeki $\hat{f}(2^{-j} \xi)$ 'nin sıfırları,

$$\xi_k = \frac{1}{2} \pm i \frac{\log(-\lambda_k)}{2\pi} \quad k = 1, \dots, m \quad (4.35)$$

formundadır ve (4.33) de yakınsama yarıçapı $1/2$ den büyüktür. Sonuç olarak (4.33) ifadesini kullanarak şu yaklaşıklık yapabiliriz,

$$1 - \hat{\phi}^{(m)}(\alpha) \approx C \alpha^{2m+2} \quad (4.36)$$

burada C bir sabittir. $\xi = 0$ seçilerek (bu örnekleme faktörünün 2 olması anlamına gelir). $1 - \hat{\phi}^{(m)}(1/4)$ m'in fonksiyonu olarak hesaplanacak olursa sonuç tablo 4.1 deki gibi elde edilir.

Tablo 4.1: Battle-Lemarie' fonksiyonunun derecelerine göre $1 - \hat{\phi}^{(m)}(1/4)$ fonksiyonunun değeri

Derece m	$1 - \hat{\phi}^{(m)}(1/4)$
3	0.77580E-04
5	0.94292E-06
7	0.11619E-07
9	0.14340E-09
11	0.17701E-11
13	0.21878E-13
15	0.81743E-15

Şimdi de (4.29) deki yaklaşık ifadeyi ele alalım ve ilk terim $l = \pm 1$ için

$$(1/3)^{m+1} (C_{\hat{f}}(1, \alpha) + C_{\hat{f}}(-1, \alpha)) / C_{\hat{f}}(0, \alpha) \quad \text{elde ederiz.} \quad 2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}} \quad |\xi| < \alpha$$

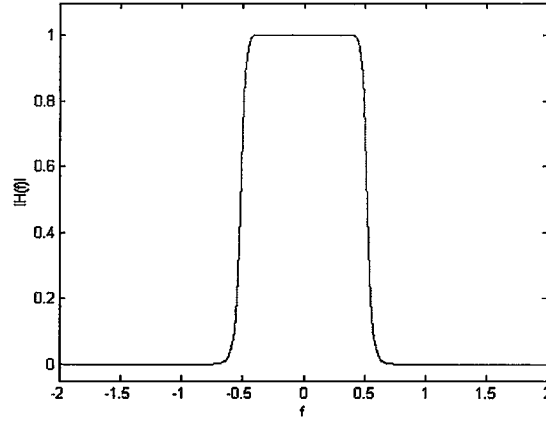
için $\hat{f}(2^{-j}\xi)$ nin iyi bir yaklaşığıdır. Bunu (4.21) den faydalanarak şu şekilde gösterebiliriz,

$$2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}} = \hat{f}(2^{-j}\xi) \hat{\phi}^{(m)}(\xi) + \sum_{l=\pm 1, \pm 2, \dots} \hat{f}(2^{-j}(\xi + l)) \hat{\phi}(\xi + l) \quad (4.37)$$

$\hat{\phi}^{(m)}$ Battle-Lemarie ölçekleme fonksiyonunun fourier dönüşümüdür. Şekil 4.1 de $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$ nin $m=7$ için değerleri yer almaktadır. $\alpha = 1/4$ ve $|\xi| < \alpha$ için $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$ değerlerinin 1'e eşit olması beklenen sonuçtur (iki haneli prezisyon için).

Teorem 4.1'i kullanarak ve $\alpha = 1/4$ için,

$$\hat{f}(l) = \frac{1}{L^{1/2} \sqrt{a^{(m)}(l/L)}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-2\pi i k l / L} \quad (4.38)$$



Şekil 4.1: $m=7$. derceden Battle-Lemarie' fonksiyonunun Fourier dönüşümü alınarak $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$ fonksiyonu gösterilmiştir

$-L/4+1 \leq l \leq L/4$, burada $L = 2^{-j}$ dir. f fonksiyonu $[0,1]$ aralığının dışında sıfır olarak kabul edildiğinden $k < 0$ ve $k \geq L$ için her zaman $f_k = 0$ olacak şekilde bir düzenleme yapmalıyız, bunun için (4.38) ifadesi şu hale gelir,

$$\hat{f}(l) = \frac{1}{L^{1/2} \sqrt{a^{(m)}(l/L)}} \sum_{k=0}^{L-1} f_k e^{-2\pi i k l / L} \quad -L/4 \leq l \leq L/4 \quad (4.39)$$

bu ifade FFT kullanılarak hesaplanabilir. Teorem 4.1 deki yaklaşıklığa dayanan algoritmamızın temel 3 adımı vardır bunlar,

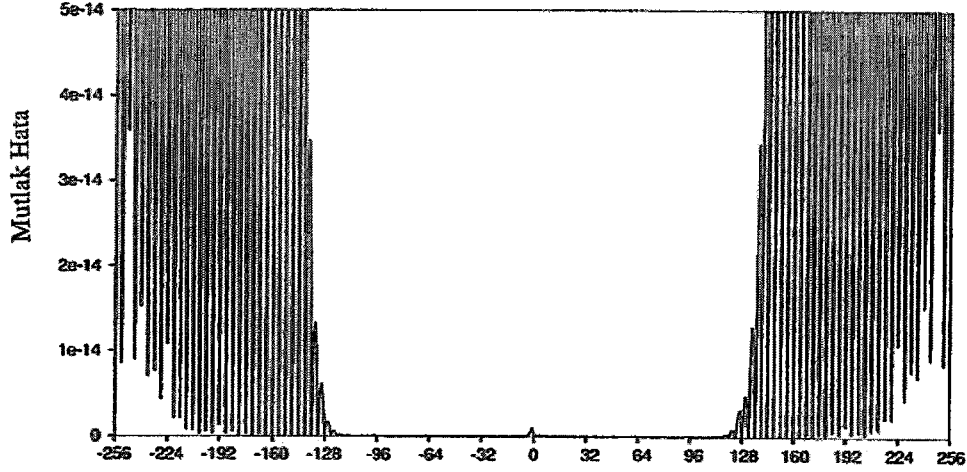
- (4.22) deki integrallerin hesaplanması
- (4.39)deki toplamın FFT ile hesabı
- Bulunan sonucun (4.39) de yer alan $1/\sqrt{a^{(m)}(l/L)}$ faktörü ile çarpımı

(4.39) bağıntısı kullanılarak yapılan hesaplamadaki hata $f(x)$, $x \in [0.3, 0.55]$ aralığında $j = -9$, $L = 512$ ve $m=23$ için hesaplanacak olursa sonuç şekil 4.2 deki gibi elde edilir. Şekil 4.2 den de görülebileceği üzere $-128 \leq l \leq 128$ hesaplanan $\hat{f}(l)$ lerdeki hata 10^{-14} den küçük kalmaktadır.

$|\xi| \leq \alpha$ ve $\alpha = 1/4$ bölgesinde teorem 4.1'in kullanılabileceği açıkça görülmektedir.

Daha küçük α 'nın seçilmesi daha düşük derece B spline kullanımını sağlar ve (f in V_j üzerindeki projeksiyonu için) gerekli işlem sayısını azaltır. Diğer taraftan küçük

α seçimi ikinci adımda aşırı örnekleme faktörünü büyüteceğinden buradaki işlem sayısı artar.



Şekil 4.2: $\hat{f}(l)$ deki mutlak hata [3]

Algoritmanın projeksiyon adımını ele alalım, yani (4.22) deki integrallerin hesabını. Verilen MRA için her zaman iki ölçekli fark denkleminiz vardır ve bunu integral değerlerinin hesabı için kullanabiliriz. Bazı fonksiyonlar için bu algoritma küçük lineer sistem problemlerini azaltır ve verimlidir. Özel olarak merkezi B splineler için tek dereceden iki ölçekli fark denklemi,

$$\beta^{(m)}(x) = \sum_{k=-\frac{m+1}{2}}^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{2^m} \left(k + \frac{m+1}{2} \right) \beta^{(m)}(2x - k) \quad (4.40)$$

(4.4) deki integrallerin hesabında kullanılabilir. Ancak iki ölçekli fark denklemine dayanan algoritma genel f fonksiyonları için kullanışlı olmayacaktır.

MRA ya dayanan polinomal splineler uzayının seçilmesinin bir nedeni de integrallerin B splineler ile hesabını olanaklı kılan kullanışlı iki yöntemin olmasıdır. Birinci yöntem parçalı polinom biçiminde spline çözümü, diğer yöntem ise B spline merteye rekürsiyon metodudur. Parçalı polinomlar ile merkezi B splineler şu şekilde yazılır,

$$\beta^{(m)}(x) = \sum_{l=0}^{m+1} (-1)^l \binom{m+1}{l} \frac{\left(x + \frac{m+1}{2} - l\right)_+^m}{m!} \quad (4.41)$$

Burada x^m_+ , $x > 0$ için x^m ve $x < 0$ için 0 olarak tanımlanmaktadır. (4.41)'in kullanımıyla (4.4) hesaplanacak olursa problem f integrallerinin polinomlarla hesabına dönüşecektir. Birçok önemli fonksiyon için B splinelı integraller analitik olarak hesaplanabilir ve daha yüksek dereceli B splinelar biçiminde yazılabilir. B splineların değerleri merteye rekürsüyon yöntemiyle hesaplanabilir,

$$\beta^{(m)}(x) = \frac{(m+1)/2 + x}{m} \beta^{(m-1)}(x+1/2) + \frac{(m+1)/2 - x}{m} \beta^{(m-1)}(x-1/2) \quad (4.42)$$

burada $m=1,2,\dots$ ve $\beta^{(0)}(x)$ (4.43) ifadesiyle tanımlıdır.

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (4.43)$$

4.3. Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümü

Teorem 4.1 trigonometrik toplamaların hesabı için hızlı bir algoritma oluşturur,

$$\hat{g}_n = \sum_{l=0}^{N_p-1} g_l e^{2\pi i x_l n} \quad (4.44)$$

burada $x_l \in [0,1]$ ve $\{g_l\}_{l=0}^{N_p-1}$ N_p adet kompleks sayı setidir. (4.44) ifadesini aşağıdaki integralle değiştirebiliriz.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x \xi} dx \quad (4.45)$$

burada,

$$f(x) = \sum_{l=0}^{N_p-1} g_l \delta(x - x_l) \quad (4.46)$$

$f(x)$ δ fonksiyonlarının toplamından oluşur ve $\hat{g}_n = \hat{f}(n)$ dir. Teorem 4.1 kullanılarak (4.22) deki Fourier serisini hesaplayabiliriz,

$$f_k = 2^{-j/2} \sum_{l=0}^{N_p-1} g_l \beta^{(m)}(2^{-j} x_l - k) \quad (4.47)$$

buradan,

$$F(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (4.48)$$

$$\sup_{|\xi| \leq \alpha} \left| 2^{j/2} \frac{F(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}} - \hat{f}(2^{-j} \xi) \right| \leq \varepsilon \sup_{|\xi| \leq \alpha} |\hat{f}(2^{-j} \xi)| \quad j < 0 \quad (4.49)$$

$|\xi| < \alpha$ için (4.44) deki trigonometrik toplam bölüm 4.2 de açıklanan algoritmanın özel bir halidir. Örneğin aşırı örnekleme faktörünü $v=2$ seçersek

$$\hat{g}_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{N^{1/2} \sqrt{a^{(m)}(n/N)}} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k n / N} \quad (4.50)$$

$-N/4 \leq n \leq N/4$ için ve daha yüksek doğruluk için B splinelerin derecesi (m) değiştirilebilir. (4.48) in hesabı için ortaya çıkacak olan maliyet $m \cdot N_p$ ile orantılıdır. Burada m , $-\log \varepsilon$ ile orantılı olup istenilen doğru hane sayısını belirler. (4.50) ile FFT hesaplamak ise $v \cdot N \cdot \log N$ adet işlem gerektirir ki burada $v = 1/2\alpha$ aşırı örnekleme faktörüdür. Düzenleme adımı N adet işlem gerektirir. Verilen doğruluk oranı için $v = 1/m$ ile orantılı olup toplam maliyet ifadesi şu şekilde yazılabilir,

$$C_1 m N_p + C_2 (1/m) N \log N + C_3 N \quad (4.51)$$

burada C_i , $i=1,2,3$ gerçeklemeye ilişkin sabitlerdir.

4.3.1. Birden Çok Değişkenli Fonksiyonlar İçin Algoritmalar

Teorem 4.1 deki tek değişkenli durumdan genel çok değişkenli hale geçiş yapalım. Bu genişlemeyi yaparken sonucu iki bağımsız değişkenli fonksiyonlar için yazalım.

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-2\pi i \xi x} e^{-2\pi i \eta y} dx dy \quad (4.52)$$

$$F(\xi, \eta) = \frac{2^j F(\xi, \eta)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi) a^{(m')}(\eta)}} \quad (4.53)$$

$a^{(m)}$ periyodik fonksiyonları (4.24) ile tanımlıdır. $F(\xi, \eta)$ fonksiyonu trigonometrik seri ile tanımlanmıştır.

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}} f_{k, k'} e^{-2\pi i k \xi} e^{-2\pi i k' \eta} \quad (4.54)$$

buradaki $f_{kk'}$ katsayıları,

$$f_{kk'} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \beta_{kj}^{(m)}(x) \beta_{k'j}^{(m)}(y) dx dy \quad (4.55)$$

$\beta^{(m)}$ m. derece merkezi B spline dir. Farklı dereceden m, m' B splinelar kullanılarak da gerçekleştirilebilir.

$E_{\infty} \hat{f}(2^{-j} \xi, 2^{-j} \eta)$ ($j < 0$) fonksiyonuna $F(\xi, \eta)$ ile yaklaşıklıkta yapılan hata olsun,

$$E_{\infty} = \sup_{|\xi| \leq \alpha, |\eta| \leq \alpha'} |F(\xi, \eta) - \hat{f}(2^{-j} \xi, 2^{-j} \eta)| \sup_{|\xi| \leq \alpha, |\eta| \leq \alpha'} |\hat{f}(2^{-j} \xi, 2^{-j} \eta)| \quad (4.56)$$

Burada α ve α' parametreleri tek bir bağımsız değişkendir. F fonksiyonunu elde ederek (4.53) teki fonksiyonu hesaplamış yani iki bağımsız değişken için bir algoritma elde etmiş oluruz.

Örnek olarak bağımsız iki değişkenli fonksiyonun aşırı örnekleme faktörü $v=2$ ($\alpha = \alpha' = 1/4$) için Fourier dönüşümünü hesaplamak için gerekli bağıntıları oluşturalım,

$$\hat{f}(n, n') = \frac{1}{N \sqrt{a^{(m)}(n/N) a^{(m)}(n'/N)}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} f_{kk'} e^{-2\pi i k n / N} e^{-2\pi i k' n' / N} \quad (4.57)$$

$-N/4 + 1 \leq n, n' \leq N/4$ için $f_{kk'}$ katsayıları (4.55) ifadesiyle elde edilecektir. Doğruluk ε uygun dereceden B spline seçimi ile kontrol edilir. (4.57) yi oluşturan algoritma bölüm 4.2 de tanımlanan algoritmanın tamamen benzeridir. İlk adım olarak

merkezi B splinelar kullanılarak (4.55) deki $f_{kk'}$ integrali hesaplanır. İkinci adım olarak $\nu N \times \nu N$ lik matrisin FFT sinin $\nu = 1/2\alpha = 2$ için hesabını içerir. Üçüncü adım her frekans için hesaplanan değerin önceden bulunan $\sqrt{a^{(m)}(n/N)a^{(m)}(n'/N)}$ faktörü ile çarpımını ve sonucun bulunmasıdır.

İki boyutlu USFFT ise şu formdadır,

$$\hat{g}_{n,n'} = \sum_{l=1}^{N_p} g_l e^{-2\pi i n x_l} e^{-2\pi i n' y_l} \quad -N \leq n, n' \leq N \quad (4.58)$$

burada $\{g_l\}_{l=1}^{N_p}$ N_p kompleks sayı dizisidir ve (4.52) ifadesiyle f fonksiyonunun hesaplanmasıyla bulunur.

$$f(x, y) = \sum_{l=1}^{N_p} g_l \delta(x - x_l) \delta(y - y_l) \quad (4.59)$$

(4.55) kullanılarak,

$$f_{kk'} = \sum_{l=1}^{N_p} g_l \beta_{kj}^{(m)}(x_l) \beta_{k'j}^{(m)}(y_l) \quad (4.60)$$

ve daha sonra (4.57) nin gerçekleşmesi için FFT kullanılır. (4.60) taki $f_{kk'}$ matrisinin gerçekleşmesinin getireceği işlem miktarı $m^2 N_p$ ile orantılıdır (burada m merkezi B spline'ın mertebesidir, genelde $-\log \varepsilon$ ile orantılı seçilir). İkinci adımda $f_{kk'}$ matrisinin FFT sinin alınması $\nu^2 N^2 \log N$ işlem gerektirir. Üçüncü adım N^2 işlem gerektirir ancak ilk iki adımdaki işlem yoğunluğu göz önüne alınacak olursa bu ihmal edilebilir. Verilen bir doğruluk oranı için aşırı örnekleme faktörü ν , m mertebe ile ters orantılıdır ve maliyet şu şekilde hesaplanır,

$$C_1 m^2 N_p + C_2 (1/m^2) N^2 \log N + C_3 N^2 \quad (4.61)$$

burada C_i , $i=1,2,3$ gerçeklemeye ilişkin katsayılarıdır.

4.3.2. Düzensiz Dağılmış Noktalarda Fourier Dönüşümünün Gerçeklenmesi

Teorem 4.1 uyarınca $\hat{f}(2^{-j}\xi)$, $|\xi| \leq \alpha, j < 0$ fonksiyonu yaklaşık olarak $2^{-j} F(\xi) / \sqrt{a^{(m)}(\xi)}$ fonksiyonuyla hesaplanabilir. Buradaki $F(\xi)$,

$$F(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (4.62)$$

dir. $\hat{f}(2^{-j}\xi)$ fonksiyonunu rastgele $|\xi_l| \leq \alpha, l = 1, 2, \dots, L$ noktalarında hesaplamak için, bu noktalardaki $F(\xi)$ değerlerini hesaplayan hızlı bir algoritma gereklidir. Bu işlem interpolasyon işlemiyle gerçekleştirilebilir ve biz burada merkezi B splinleri kullanan yöntemi ele alacağız.

$$F(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (4.63)$$

fonksiyonunu ele alalım ve rastgele $|\xi_l| \leq \frac{1}{2}, l = 1, 2, \dots, N_p$ noktalarında (4.63) bağıntısını gerçekleştirecek algoritmayı düşünelim. (4.63) ifadesini yeniden yazalım

$$F(\xi) = e^{-\pi i N \xi} \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{-2\pi i k \xi} \quad (4.64)$$

burada,

$$w_k = \begin{cases} f_{k+N/2} & -N/2 \leq k \leq N/2-1 \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (4.65)$$

dir. $F(\xi)$ için yaklaşık bir ifade yazılacak olursa,

$$F(\xi) = e^{-\pi i N \xi} \sum_{l=-N}^{N-1} F_l \beta^{(m)}(N\xi - l) \quad (4.66)$$

$\beta^{(m)}$ m. dereceden merkezi B splinedır ve F_l katsayıları hesaplanacaktır. F_l katsayılarını hesaplamak için elimizde lineer denklem takımı bulunmaktadır,

$$\sum_{k=-N}^{N-1} w_k e^{-2\pi i k n / N} = \sum_{l=-N}^{N-1} F_l \beta^{(m)}(n-l) \quad (4.67)$$

burada $n = -N, \dots, N-1$ dir.

$$\hat{F}_k = \sum_{l=-N}^{N-1} F_l e^{2\pi i k l / (2N)} \quad (4.68)$$

ve

$$\hat{b}_k = \sum_{l=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} F_l \beta^{(m)}(l) e^{2\pi i k l / (2N)} \quad (4.69)$$

$k = -N, \dots, N-1$, $\hat{F}_k$ için şu ifadeyi yazılabilir,

$$\hat{F}_k = \frac{w_k}{\hat{b}_k} \quad (4.70)$$

Sonuç olarak elde edilen algoritma aşağıdaki adımları içerir,

- (4.70) ifadesindeki $\frac{w_k}{\hat{b}_k}$ değerinin bulunması, bu adım N adet işlem gerektirir.
- (4.66) ifadesinde yer alan F_l katsayılarının (4.70) yardımıyla bulunması. Bu adım $N \log N$ adet işlem gerektirir.
- (4.66) ifadesinin $|\xi_l| \leq \frac{1}{2}$ için hesaplanması $F(\xi_l)$ $l = 1, 2, \dots, L$. Bu adım N adet işlem gerektirir.

Burada ele alınan yöntem bölüm 4.2 de ele alınan yöntemle aynıdır, ancak işlem sıraları ters dönmüştür.

Daha yüksek mertebeden fonksiyonlar için yöntem tamamen aynı adımları içerir. Burada iki değişkenli durum için yapıyı oluşturalım,

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k, k'=0}^{N-1} f_{kk'} e^{-2\pi i k \xi} e^{-2\pi i k' \eta} \quad (4.71)$$

$F(\xi, \eta)$ ifadesini $|\xi_l|, |\eta_l| \leq \frac{1}{2}$, $l = 1, 2, \dots, N_p$ için hesaplıyoruz. $F(\xi, \eta)$ yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilebilir,

$$F(\xi, \eta) = e^{-\pi i N \xi} e^{-\pi i N \eta} \sum_{l, l'=-N}^{N-1} F_{ll'} \beta^{(m)}(N\xi - l) \beta^{(m)}(N\eta - l') \quad (4.72)$$

burada $\beta^{(m)}$ m. dereceden B spline dir. $F_{ll'}$ katsayılarının hesabı için,

$$\hat{F}_{kk'} = \sum_{l, l'}^{N-1} F_{ll'} e^{2\pi i l k / (2N)} e^{2\pi i l' k' / (2N)} \quad (4.73)$$

(4.73) kullanılır. Burada,

$$F_{kk'} = \frac{w_{kk'}}{\hat{b}_k \hat{b}_k'}, \quad -N \leq k, k' \leq N-1 \quad (4.74)$$

Yukarıdaki $\hat{b}_k$ katsayısı () ifadesiyle verilmiştir ve $w_{kk'}$,

$$w_{kk'} = \begin{cases} f_{k+N/2, k'+N/2} & -N/2 \leq k, k' \leq N/2-1 \\ 0 & \text{aksihalde} \end{cases} \quad (4.75)$$

İki değişkenli durumda elde edilen interpolasyon algoritması bölüm 4.3 te ele alınan algoritma ile aynı adımları içerir, yalnızca adımların sırası farklıdır. Dolayısıyla hesaplama kompleksliği bakımından bölüm 4.4 teki USFFT algoritmasıyla aynı değere sahiptir.

4.4. Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümünün SAR da Kullanılması

m. dereceden B spline $\beta^{(0)}(x)$ 'ın n adet konvolusyonu ile bulunur. Dolayısıyla $\beta^{(1)}(x) = \beta^{(0)}(x) * \beta^{(0)}(x)$ birinci dereceden B spline ifadesini verir. $\beta^{(0)}(x)$ (4.76) ifadesiyle tanımlıdır.

$$\beta^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 1/2 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \quad (4.76)$$

ve m. dereceden B spline,

$$\beta^{(m)}(x) = \sum_{l=0}^{m+1} (-1)^l \binom{m+1}{l} \frac{(x + \frac{m+1}{2} - l)_+^m}{m!} \quad (4.77)$$

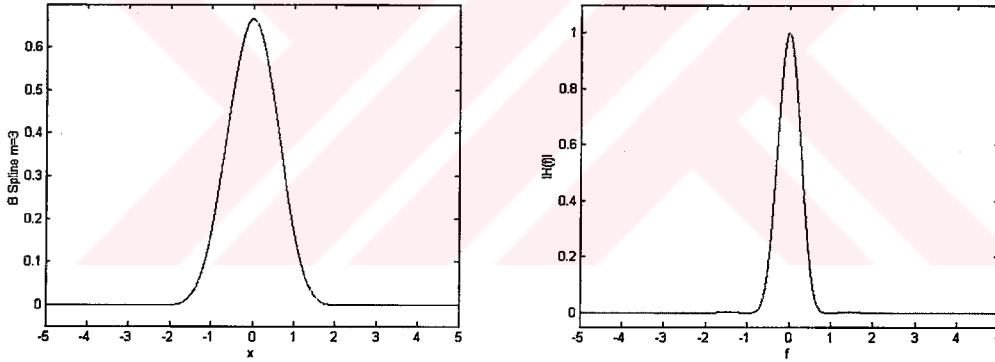
burada,

$$(x)_+^m = (\max(0, x))^m \quad n > 0 \quad (4.78)$$

m=3 için 3. dereceden B spline ifadesi,

$$\beta^{(3)}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}|x|^2(2-|x|) & 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3 & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases} \quad (4.79)$$

biçiminde bulunur. 3. Dereceden B spline grafiği şekil 4.3 deki gibidir.



Şekil 4.3: 3. Dereceden B spline ve frekans spektrumu

Şekil 4.3 ten de görüleceği üzere B splinelar doğrudan interpolasyon fonksiyonu olarak kullanılmaya elverişli değildir. Yukarıda verildiği şekliyle,

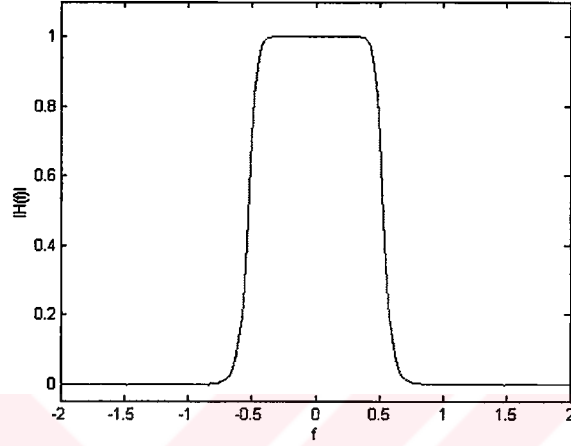
$$\hat{\phi}^{(m)}(\xi) = \frac{\hat{\beta}^{(m)}(\xi)}{\sqrt{a^{(m)}(\xi)}} \quad (4.80)$$

fonksiyonu Fourier domeni spektral karakteristiğe incelenirse m arttıkça ideal alçak geçiren filtre yapısına yaklaşıldığı görülür. Aşağıda şekil (4.4) de m=3 için $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$ fonksiyonu görülmektedir. Farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yöntemi bölüm 2 de verilen yapay açıklıklı radar algoritmasına uygulanırsa (2.6) ifadesi yerine,

$$s(\xi_{k'}, \eta_{l'}) = \sum_{k,l} s(\theta_k, r_l) \beta_{jk'}^{(m)}(r_l \sin \theta_k) \beta_{jl'}^{(m)}(r_l \cos \theta_k) \quad (4.81)$$

gelir, burada m. dereceden B spline ve $\beta_{jk}^{(m)}(x)$,

$$\beta_{jk}^{(m)}(x) = 2^{-j} \beta^{(m)}(2^{-j} x - k) \quad (4.82)$$



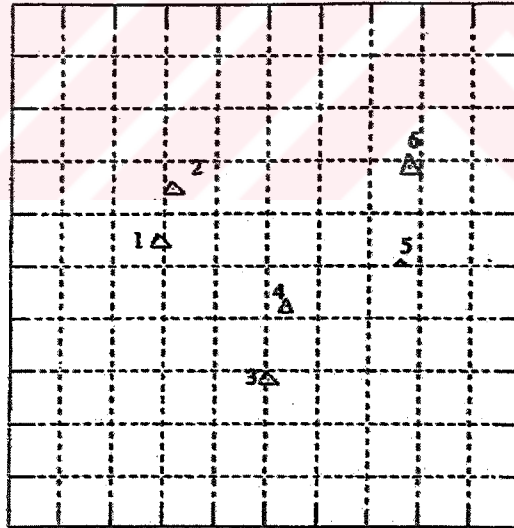
Şekil 4.4: m=3 için $\hat{\phi}^{(m)}(\xi)$

biçiminde tanımlıdır. $2^{-j} = K'$ ve K' yeniden örneklenmiş ızgara boyutudur. (2.9) de verilen $A(x_m, y_n)$ genlik düzeltme adımı farklı aralıklı Fourier dönüşümü yönteminde verildiği biçimde olmalıdır.

5. UYGULAMA VE ÖRNEKLER

5.1. Uygulamada Kullanılan SAR Verisinin Özellikleri

Uygulamada kullanılan veri Ohio-State Üniversitesi, Electrosience Laboratuvarından sağlanan ve 6 adet saçıcı merkezden oluşan deneysel hedeften geri saçılan alan ölçümlerinden oluşmaktadır. Burada kullanılan deneysel veri hedefin nokta saçıcılardan oluştuğu ve bu saçıcıların yansıma fonksiyonunun frekanstan bağımsız olduğu kabulü altında oluşturulmuştur. Yeteri kadar yüksek frekans bölgesinde ve dar bandlı işaretler için bu varsayım yapılabilir. Şekil 5.1 de geometrisi verilen hedef 1.2m x 1.2m lik bir alana yerleştirilmiş 6 saçıcıdan oluşmaktadır. Saçılan alanın değeri 2-18 GHz arasında 50 MHz lik frekans artımlarıyla ve görüş açısı da $\pm 10^\circ$ aralığında 0.25° lik artımlarla elde edilmiştir.



Şekil 5.1: Hedef dağılım geometrisi

Yansıtıcı hedeflerden 6 numaralı saçıcı en geniş, 5 ise en küçük yansıtma yüzeyine sahiptir. 4 numaralı yansıtıcı yaklaşık olarak 5'e yakın, diğerleri ise yaklaşık olarak eşit büyüklüktedir. Ölçüm verisinin ters Hızlı Fourier dönüşümünün alınabilmesi için kartezyen koordinat sistemine taşınması gerekir. Bu koordinat değişikliği işlemi

interpolasyon ile gerçekleştirilir. Aşağıdaki uygulamalarda verinin görüş açısının $\pm 2^\circ$ ve frekansının 10.25-11.75 GHz lik bölümü kullanılarak görüntüler elde edilmiştir.

5.2. Hata Tanımı

Aşağıdaki uygulamalarımızda cisimlerin yerlerini bildiğimizden alınan ölçüm değerleri kullanılarak bulunan görüntü ile gerçekte cisimlerin olması gereken görüntü arasındaki karesel hata bize toplam hatayı verir. Toplam karesel hatayı $M \times N$ ye bölersek her bir görüntü hücresi için yapılan hatayı buluruz.

$$hata = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\frac{f(x_i, y_j) - g(x_i, y_i)}{g(x_i, y_i)} \right]^2 / (N \times M) \quad (5.1)$$

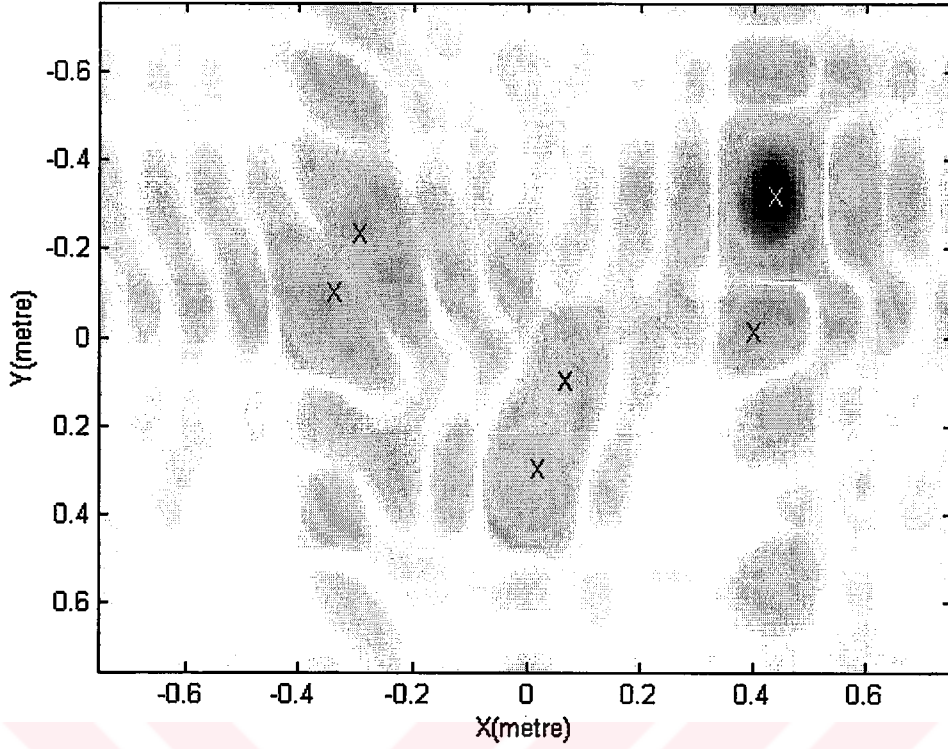
5.3. Geleneksel Yöntemlerin SAR Verisine Uygulanması

İlk olarak bölüm 3 te ele alınan geleneksel interpolasyon yöntemlerini kullanarak yapay açıklıklı radar görüntülerini oluşturulup, elde edilen görüntülerdeki hata hesaplınsın. Sinc fonksiyonu sonsuza kadar uzandığı için pratik olarak gerçekleştirilmesi mümkün değildir. Bunun yerine uçları kesilmiş ve ağırlık katsayısı ile çarpılmış sinc fonksiyonu kullanılır.

İlk olarak Hanning-sinc interpolasyon fonksiyonunu ($N=7$) kullanıldığında oluşan hatayı hesaplayalım. Hanning-sinc interpolasyonu sonucunda ters FFT alınıp genlik düzeltilmesi ve sıfır ekleme adımları da gerçekleştirildikten sonra elde edilen görüntü şekil (5.2) de verilmiştir. Burada yapılan hata %1.2075 mertebesindedir.

Bilinen en basit yöntem olan ve en hızlı sonuç veren en yakın komşu yöntemi kullanılarak veriler interpolate edildiğinde ve diğer işaret işleme adımları uygulandığında sonuç Ek-A şekil (A.1) deki gibi elde edilir. En yakın komşu yöntemiyle interpolasyon en hızlı metodudur. Bu yöntemde yapılan hata % 1.2316 mertebesindedir.

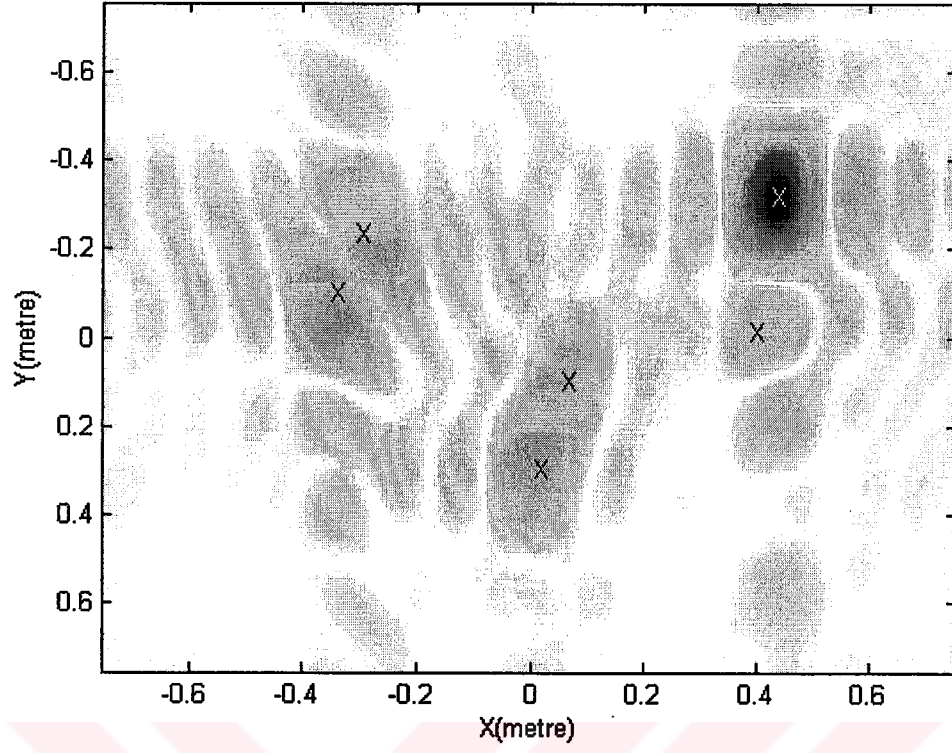
En yakın komşu yönteminden sonra birinci dereceden olan lineer interpolasyon yöntemiyle yapay açıklıklı radar verisi interpolate edilecek olursa sonuç Ek-A şekil (A.2) deki gibi elde edilir. Lineer interpolasyon yönteminde yapılan hata % 1.2240 mertebesindedir.



Şekil 5.2 : Hanning-sinc interpolasyonu ($N=7$) kullanılarak SAR görüntüsünün oluşturulması

5.4. Farklı Aralıklı Hızlı Fourier Dönüşümü Yönteminin Uygulanması

Farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yöntemi yapay açıklıklı radar verisine uygulandığında elde edilen sonuç şekil (5.3) te verilmiştir. Farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yöntemi kullanıldığında oluşturulan görüntüde yapılan hata %1.2066 dır.



Şekil 5.3: 3. Dereceden B splineler kullanılarak farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yöntemiyle görüntü oluşturulması

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

6.1. Elde Edilen Sonuçlar

Bu çalışmada ele alınan farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yöntemine dayalı SAR yapısı diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında daha az hata ve hızlı sonuç verdiği görülür. Aşağıda tablo 6.1 de bazı interpolasyon yöntemleri ile farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşüm yöntemine dayalı B splinelar kullanılarak yapılan uygulamalarda elde edilen hata oranları ve gerekli süreler belirtilmiştir. Tablo 6.2 de farklı yöntemlerin sağlamış olduğu SNR oranları verilmiştir.

Tablo 6.1: Farklı Yöntemler için hata oranları ve Gerçekleme Süreleri

Yöntem	Hata (%)	Gerçekleme Süresi
En Yakın Komşu	1.2316	0.24 sn
Lineer İnterpolasyon	1.2240	0.43 sn
Hanning-Sinc (N=7)	1.2075	3.08 sn
B spline (m=3)	1.2066	1.20 sn

Tablo 6.2: Farklı Yöntemler için SNR oranları

Yöntem	SNR (dB)
En Yakın Komşu	4.96
Lineer İnterpolasyon	7.13
Hanning-Sinc (N=7)	18.59
B spline (m=3)	23.22

Yukarıdaki değerlerden de görüleceği üzere B spline yapısını kullanarak, farklı aralıklı Fourier dönüşümü algoritması ile yapay açıklıklı radarda iyi bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Alçak geçiren filtre yapısına iyi bir şekilde yaklaşılmasına karşın hata oranının belli bir değer civarında kalması alınan örnek sayısının düşük olmasından kaynaklanmaktadır.

6.2. Tartışma

İnterpolasyon kısaca fonksiyonun bilinen iki noktası arasındaki değerin belirlenmesi olarak tanımlanabilir. Fonksiyonun dışındaki noktaların belirlenmesi problemi extrapolasyon adını alır. İnterpolasyonun yanısıra extrapolasyon tekniklerinin de uygulanması yapay açıklıklı radar görüntülemesinde daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

Burada ele alınan farklı aralıklı hızlı Fourier dönüşümü yöntemi stripmap mode yapay açıklıklı radar ve tıbbi görüntüleme sistemlerinde farklı aralıklarla dağılmış örneklerin hızlı Fourier dönüşümünü gerektiği kısımlarda uygulanabilir.



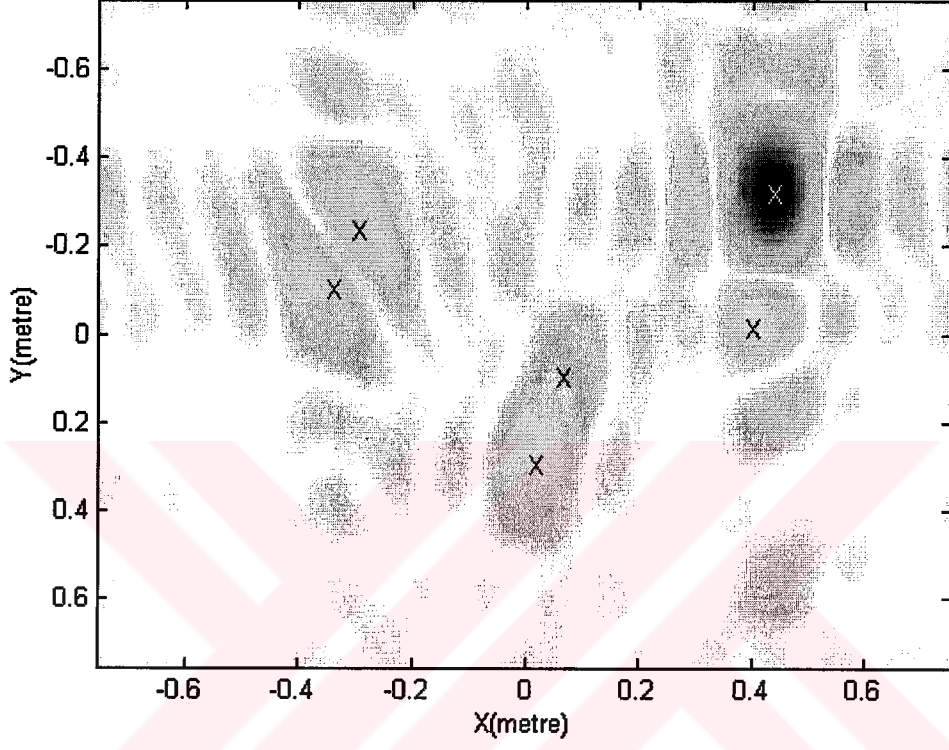
KAYNAKLAR

- [1] **Beylkin, G., Gorman, J. D., Li-Fiss S., Ricoy, M.A., 1995.** SAR Imaging and Multiresolution analysis, Proc. SPIE: Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery II, Volume 2487, pages 2144-2152.
- [2] **Wolberg, G., 1995.** SAR Imaging and Multiresolution analysis, Proc. SPIE: Algorithms for Synthetic Aperture Radar Imagery II, Volume 2487, pages 2144-2152, IEEE Computer Society Press.
- [3] **Beylkin, G., 1998.** On Applications of Unequally Spaced Fast Fourier Transform, University of Colorado at Boulder, Department of Applied Mathematics, Mathematical Geophysics Summer School.
- [4] **Beylkin, G., 1994.** On the Fast Fourier Transform of Functions With Singularities, ACHA, 2:363-381. PAM Report 195.
- [5] **Hanssennad, R., Balmer, R., 1999** Evaluation of Interpolation Kernels for SAR interferometry, IEEE Trans. On Geoscience and Remote Sensing 37(1):318-321.
- [6] **Ausherman, D.A., Kozma, A., Walker J.L., Jones, H.M. and Poggio, E.C., 1984,** Developments in Radar Imaging, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, 3.
- [7] **Watson, D.F., 1992.** A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data, Pergamon Press, New York.
- [8] **deBoor, C., 1979.** A Practical Guide to Splines, Springer Verlag, New York
- [9] **Thévenaz P., Blu T., Unser M., 2000.** Handbook of Medical Imaging, Processing and Analysis, I.N. Bankman, Ed., Academic Press, San Diego, 393-420.
- [10] **Munson C.D., 1983.** A Tomographic Formulation of Spotlight-Mode Synthetic Aperture Radar, proc. IEEE, vol.71, pp. 917-925.

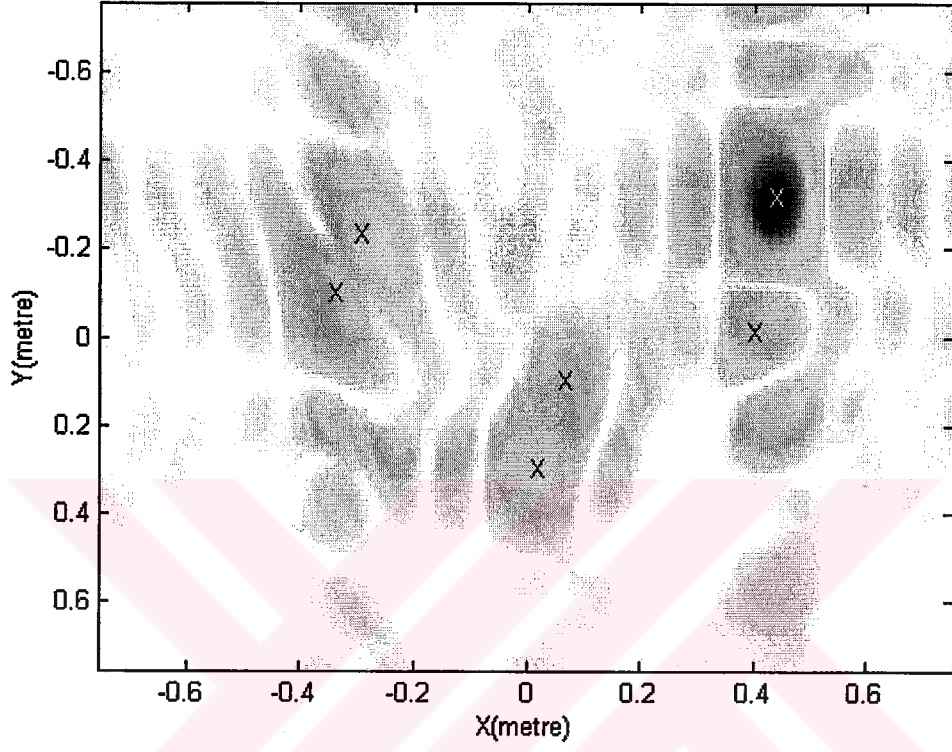
- [11] **Keys, R.G.**, 1981, Cubic Convolution Interpolation for Digital Image Processing, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-29, pp. 1153-1160
- [12] **Press, W.H., Rybicki**, 1989, Fast Algorithm for spectral analysis of unevenly sampled data. The Astrophysical Journal.
- [13] **Brandt, A.**, 1991, Multilevel computations of integral transforms and particle interactions with oscillatory kernels. Computer Physics Communications. 65:24-38.
- [14] **Sullivan T.D.**, 1990, A Technique for convolving unequally spaced samples using fast Fourier transform. Sandia Report.



EK A



Şekil A.1: En yakın komşu yöntemiyle interpolasyon ile elde edilen görüntü



Şekil A.2: Lineer interpolasyon kullanılarak elde edilen görüntü

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Batman’da doğan Orhan ORHAN, ilk, orta ve lise öğrenimini İstanbul’da tamamlamıştır. 1994 yılında İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümüne girmiş, 1999 yılında bu bölümden mezun olmuştur. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği programında yüksek lisans öğrenimine başlamıştır. 1999 yılında İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektromagnetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Anabilim Dalı’nda araştırma görevlisi olarak göreve başlamış, halen İ T.Ü. Uzaktan Algılama Uydu Yer İstasyonu’nda (SAGRES) görev yapmaktadır.

