İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSİK TAHRİKLİ TEKERLEKLİ SARKAÇ SİSTEMİNİN TASARIMI VE KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ozan TÜRKER

Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekatronik Mühendisliği Programı

HAZİRAN 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSİK TAHRİKLİ TEKERLEKLİ SARKAÇ SİSTEMİNİN TASARIMI VE KONTROLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ozan TÜRKER
(518081025)

Mekatronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Mekatronik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU

HAZİRAN 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 518081025 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ozan TÜRKER**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"EKSİK TAHRİKLİ TEKERLEKLİ SARKAÇ SİSTEMİNİN TASARIMI VE KONTROLÜ"** başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof.Dr. Metin GÖKAŞAN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. O. Seta BOĞOSYAN ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **4 Mayıs 2012**
Savunma Tarihi : **7 Haziran 2012**

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince yardımlarını esirgemeyip, olaylara farklı bakış ve yaklaşımı ile bana yön veren ve örnek olan çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. S. Murat YEŞİLOĞLU'na ve tüm eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, her şartta maddi, manevi desteklerini benden esirgemeyen çok değer verdiğim aileme teşekürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmada emeği geçen tüm yakın arkadaşlarıma ve ailelerine de sonsuz teşekkür ederim.

Ozan TÜRKER

Haziran 2012

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

EL	**:** Euler – Lagrange
ETTS	**:** Eksik Tahrikli Tekerlekli Sarkaç
IDA-PBC	**:** Interconnection and Damping Assignment Passivity-based Control
KM	**:** Kütle Merkezi
NE	**:** Newton – Euler
2TTS	**:** İki Tekerlekli Ters Sarkaç
A	**:** $J_s + J_w + J_m + m_s l_{c_1}^2 + m_w l_1^2 + m_m l_1^2$
$\mathbf{A_1}$	**:** $J_s + J_w + m_w l_1^2 + m_{a_1} l_{c1}^2$
$\mathbf{A_2}$	**:** $J_s + J_w + m_w l_2^2 + m_{a_2} l_{c2}^2$
$\bar{\mathbf{m}}$	**:** $m_s l_{c_1} + (m_m + m_w) l_1$
$\bar{\mathbf{m}}_1$	**:** $m_w l + m_a l_c$
$\bar{\mathbf{m}}_2$	**:** $m_w l + m_a l_c$
$\mathbf{T_1}$	**:** $\mathfrak{T}_{a_1} + \mathfrak{T}_{t_1} + m_{t_1} l_1^2$
$\mathbf{T_2}$	**:** $\mathfrak{T}_{a_2} + \mathfrak{T}_{t_2} + m_{t_2} l_2^2$
$\mathbf{F_1}$	**:** $-m_{t_1} l_{y_1} + m_{a_1} l_{cy_1}$
$\mathbf{F_2}$	**:** $-m_{t_2} l_{y_2} + m_{a_2} l_{cy_2}$
$\mathbf{H_1}$	**:** $m_{t_1} l_{x_1} - m_{a_1} l_{cx_1}$
$\mathbf{H_2}$	**:** $m_{t_2} l_{x_2} - m_{a_2} l_{cx_2}$
$\mathbf{K_1}$	**:** $k\left(l_{x_1}\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - l_{y_1}\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right)\right)$
$\mathbf{K_2}$	**:** $-k\left(l_{x_1}\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - l_{y_1}\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right)\right)$
$\mathbf{L_1}$	**:** $k\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right) - m_{a_1} \omega_{a_1}^2 l_{cx_1}$
$\mathbf{L_2}$	**:** $-k\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right) - m_{a_2} \omega_{a_2}^2 l_{cx_2}$
$\mathbf{P_1}$	**:** $k\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - m_{a_1} \omega_{a_1}^2 l_{cy_1}$
$\mathbf{P_2}$	**:** $-k\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - m_{a_2} \omega_{a_2}^2 l_{cy_2}$

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{m_m}$	**:** DC motorun kütlesi
$\boldsymbol{m_w}$	**:** Tekerleğin kütlesi
$\boldsymbol{m_s}$	**:** Sarkacın kütlesi
$\boldsymbol{J_m}$	**:** DC motorun kütle merkezine göre eylemsizlik momentumu
$\boldsymbol{J_w}$	**:** Tekerleğin kendi merkezine göre eylemsizlik momentumu
$\boldsymbol{J_s}$	**:** Sarkacın kütle merkezine gore olan eylemsizlik momentumu
$\boldsymbol{l_i}$	**:** i. sarkacın uzunluğu
$\boldsymbol{l_{c_i}}$	**:** i. sarkacın kütle merkezinin orijine olan uzaklığı
$\boldsymbol{\theta}$	**:** Sarkacın düşeyle yaptığı açı
$\boldsymbol{\tau}$	**:** DC motorun tekerleğe aktardığı tork
$\boldsymbol{\varphi}$	**:** Tekerleğin açısı
$\boldsymbol{\phi_{k+1,k}^T}$	**:** Propogasyon matrisinin transpozesi
$\boldsymbol{F_{k+1}}$	**:** Tekerleğin açısı
$\boldsymbol{M_k}$	**:** Rijit cismin kütle matrisi
$\boldsymbol{C_k}$	**:** Merkezkaç ve coriolis kuvvet matrisi
$\vec{\boldsymbol{l}}_5$	**:** Yay uzunluk vektörü
$\boldsymbol{m_{a_i}}$	**:** i. manipülatördeki sarkaç kolunun ve DC motorun kütlesi
$\vec{\vec{\boldsymbol{F}}}_L$	**:** Manipülatöre dışarıdan etkiyen kuvvet
$\vec{\vec{\boldsymbol{F}}}_{k+1}$	**:** k+1. Rijitcisimden etkiyen kuvvet ve tork vektörü
$\boldsymbol{\mathfrak{T}_k}$	**:** Eylemsizlik tensörü
$\boldsymbol{m_k}$	**:** k. rijit cismin kütlesi
$\vec{\boldsymbol{l}}_{k,c}$	**:** k. eklemin k. rijit cismin kütle merkezine olan uzaklığı
$\vec{\boldsymbol{l}}_{k,k+1}$	**:** k. eklemin k+1. ekleme olan uzaklığı

EKSİK TAHRİKLİ TEKERLEKLİ SARKAÇ SİSTEMİNİN İMALATI VE KONTROLÜ

ÖZET

Literatürde *“Reaction Wheel Pendulum”* veya *“Inertia Wheel Pendulum”* olarak geçen eksik tahrikli tekerlekli sarkaç sistemi ilk olarak 1999 yılında şu anda University of Texas at Dallas’da olan Prof. Mark W. Spong tarafından ortaya konulmuştur. Deney düzeneği, eyleyicisiz serbest dönebilen bir sarkaç koluna akuple edilmiş bir motorla sürülen yüksek simetriye sahip bir tekerlekten oluşmaktadır. Sistemin kontrolü motor ile sürülen tekerlek ile sağlanır. Sürülen tekerlek ivmelenerek tüm sistemde eylemsizliğinden dolayı bir tork oluşturur ve oluşan bu tork sistemin salınıma geçmesini sağlar.

Sistemin yüksek simetriye sahip olması dinamik modellemesinin daha rahat çıkarılmasına ve daha kolay analiz edilmesine sebep olur. Dinamik modellemesinin daha rahat yapılmasının yanı sıra sisteme ileri düzey kontrol metotları (geribeslemeli lineerleştirme metodu, enerji tabanlı salınım kontrolü ve hibrid kontrol gibi) da uygulanabilmektedir. Ayrıca, lineer olmayan bir davranış sergilediğinden ve eksik tahrikli olduğundan literatürdeki çalışmaların ilgi odağı olmaktadır.

Bu çalışmada, ilk olarak tekerlekli sarkaç ile ilgili genel bilgiler verilmiş ve daha sonra tekerlekli sarkaç sistemi ile ilgili literatür taramaları incelenmiş ve tezin genel hatları ile ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, sarkacın imalat kısmı, sarkaçtaki her parçanın üç boyutlu katı modelleme ve analiz yazılımı olan CATIA ile tasarımı ve mukavemet analizi yapılarak imalat edilebilirliği irdelenmiş ve sonuç olarak imal edilebileceği kararı verilmiştir. Üçüncü bölümde sarkacın ideal ortam için dinamik modeli çıkartılmış ve ardından sürtünmenin sisteme nasıl dahil edilebileceği hakkında yorum yapılmıştır. Dördüncü bölümde sarkacın salınım kontrolü ve üst denge noktasındaki kontrolü için kontrolörler tasarlanmıştır. Üst denge noktasındaki kontrolü için giriş-çıkış geribeslemeli lineerleştirme metodu kullanılmış olup, salınım kontrolü için enerji tabanlı ve anahtarlamalı salınım kontrolleri tasarlanıp bunların detayları verilmiştir. Daha sonra salınım kontrolü ile denge kontrolü hibrid hale getirilerek sistemin salınımından üst denge noktasına ulaşana kadarki kontrol algoritması geliştirilmiştir. Çalışmanın son bölümü olan gelecek çalışması için ise eksik tahrikli tek sarkaç sistemi yerine aralarında elastik bir yük bulunan birlikte çalışan çift sarkaç sistemi ele alınıp, bu sistemin imalatından bahsedilerek, dinamik modeli çıkarılmış ve MATLAB-Simulink modeli oluşturularak sistem analiz edilmiştir.

CONTROL AND DESIGN OF REACTION WHEEL PENDULUM

SUMMARY

Reaction Wheel Pendulum or Inertia Wheel Pendulum as known in literature was first mentioned in 1999 by Prof. Mark W. Spong. In experiment, unactuated pendulum coupled to highly symmetric wheel driven by a DC motor. The unactuated pendulum is controlled by this actuated wheel. Actuation of the wheel creates angular acceleration due to torque generated by the DC motor. This torque causes the pendulum to swing up.

Dynamic model needs to be obtained to control the system. In addition to this, advanced control methods such as feedback linearization, energy based control and hybrid control can be applied. Moreover, reaction wheel pendulum has non-linear property and it is an underactuated system. Thus, reaction wheel pendulum has been an attraction center in literature.

In this study, general information is given about underactuated systems and the reaction wheel pendulum. Moreover, the literature investigation and general scheme of thesis are displayed in introduction. In second chapter, product design and manufacture are discussed. Later on, chapter three explains how to derive dynamic model of reaction wheel pendulum with Euler-Lagrange method that depends on system energy. Subsequently, control methods of reaction pendulum are given. Then, coorperating reaction wheel pendulums with elastic load is shown in future work. Finally, conclusion of this study is given.

In introduction, basic information about underactuated systems, such as what it is and why it is important, is given. Besides, definition of the reaction wheel pendulum is declared. For instance, what the reaction wheel pendulum is, how it works and why it is important.

Afterwards, literature investigations which give knowledge about control, linearization and stability analysis methods of underactuated pendulums are explained. First, swing up control with Lyapunov funtion is mentioned. Basic of this method is to select approptiate Lyapunov function. This selection is usually done depending on total energy of the system. Its aim is to swing up the pendulum from down to up equilibrium point. Second, some linarization methods are given for underactuated pendulums. One of them is a conventional method. With this method, dynamic model of the pendulum is linearized using Taylor series. According to this, pendulum can be controled in up equilibrium point. The other method is feedback linearization. In this method, proper output function is selected. Then, between input and output functions are looked for a relation with derivative of output function. When the relation is provided, feedback control function is generated to control pendulum in up equilibrium point. Third, stability analysis is exposed with Lyapunov function and LaSalle's invariant stability analysis. They are given to determine system stability. Finally, schedule of thesis is found.

In second section, manufacturing and design of pendulum are discussed. Pendulum design is done using CATIA, which is three dimentional solid modelling and analysis software program. First idea of pendulum design, is to have materials as far as light and durable such as delrin and aluminum. Therefore, delrin is used for wheel and pendulum arm. Alimunium is used for stable parts of pendulum. However, shafts are manufactured with steel. What's more, detailed information about pendulum's parts are also included in this section.

To determine whether the pendulum parts can be manufactured or not, strength analyses is investigated using CATIA. Strength analysis forces are defined from simple dynamic model of pendulum which includes point charge and negligible rope. Point charge include all mass of the pendulum and rope lenght is the same as center of mass. Then, magnitudes of forces are derived with Newton equations. Pursuant to these forces, strength analyses are done with CATIA. Position graph is shown using pendulum's dynamic equations. Related to the position graph, it is proved that the designed pendulum swings 2 times which is desired for this study to reach its up equilibrium point. These two approaches are demonstrated that needed pendulum can be manufactured. At the end of this chapter full product is presented.

In third section, dynamic models is derived for ideal environment with Euler-Lagrange method. Furthermore, some advices are given about how to add frictions to the pendulum's dynamic model using MATLAB-Simulink.

Euler-Lagrange method is useful to derive dynamic equations of a system. It depends on kinetic and potential energy of entire system. In order to define kinetic energy of pendulum, moment of inertia, is necessary to be found out. After finding moment of inertia and energies, Lagrange function is able to be determined. Thanks to Lagrange function, Euler-Lagrange equation can be finally solved. The solution of Euler-Lagrange equation gives dynamic model of the pendulum. Whereby the solution of the equation, dynamic model is found. According to dynamic model, simulation is performed by using MATLAB-Simulink. As a result of this simulation, positions and angular velocities can be determined for wheel and pendulum arm.

In spite of the fact that dynamic equations are determined for ideal environment, in practice, friction forces have effects over the pendulum. Therefore, some advices are given how to determine those friction forces. For example, if pendulum arm is free fell from 90 degrees, then its motion can be monitored via encoder. The plot of motion can be compared to Simulink Coulomb and Viscous friction block's result, which is added to pendulum's dynamic model. With respect to this comparison, Coulomb and Viscous friction block's gains are able to be determined. Similarly, wheel frictions gains can be found, as well. Wheel can be driven until its maximum limit, after given energy is stopped and wheel can be allowed to free rotation. Then, plot of free rotation can be compared to dynamic model with Coulomb and Viscous friction block. In conclusion, block gains are provided.

In fourth section, three different control methods and their hybrid control are mentioned. First of all, their aims are discussed. Two of three different control methods are to swing up pendulum from down to up right (unstable equlibrium) point. The other one is to balance pendulum in up right possition. Swing up control methods can not be used to control the pendulum in up righ possiton. Therefore, third control method which is known as input-output feedback linearization (feedback linearization) method is used. Before using feedback linearization, controllability of pendulum is shown via state-space model. To use state-space model, dynamic model is linearized using Taylor series. Feedback linearization method's fundamental is to determine a suitable output function. Using derivative of selected output function, a relation can be supplied with input function. When the relation is obvious, then new control signal can be created which is used to control pendulum. Second, the pendulum requires Lyapunov function method to be swinged. This method is called as "energy based swing up control method" because system's total energy is used in Lyapunov function. An appropriate Lyapunov function is selected as related to total energy of the pendulum. According to Lyapunov function, a control signal is selected to swing up the pendulum until up righ point. In addition, passivity of pendulum is explained to be able to use Lyapunov function. Third, the main control method for this study is given to swing up the pendulum. This method depends on switching the motor power. Pendulum is started with initial conditions with a maximum torque, it reaches to a maximum point and stops due to loss of energy. Then, the motor is switched to transfer more energy to the system. Hence, pendulum reaches higher point at the end of the first period. This switching continues until reaching up right position zone. The important idea is to stop transfered energy, when the motor is stopped, at right moment. Because of this, end swing angle and cut off torque angle are found. After determining control inputs of swing up and balance, their hybrid controls are created. Finally, these hybrid controls are compared.

Fifth section is designed as future work. Cooperating reaction wheel pendulums are included in future work. Begining of the section, cooperating reaction wheel pendulums' manufacture are exhibited. In product, there are two identical reaction wheel pendulum and their junction is supplied with elastic load. Afterwards, its dynamic model is derived using Newton-Euler approach which gives the same result as Euler-Lagrange with different way. This method is a suitable way for manipulator and it depends on force and torque balance of each link. Therefore, cooperating reaction wheel pendulums are modeled as a manipulator system. Then, its kinematic model is derived for each part. Related to this kinematic model, dynamic model is presented for ideal environment. Its simulation is performed by using the found dynamic model in MATLAB-Simulink and its result is shown and analysed. After, control scenarios of cooperating system are explained.

In final section, general results of thesis are declareted and some control methods such as feedback linearization are compared to literature investigations. In addtion to this, general summary about the thesis is given.

1. GİRİŞ

Sarkaç sistemi ilk olarak Galileo zamanlarında incelenmeye başlanmış ve model, dinamik ve kontrol açısından eğitici olduğundan günümüzdeki araştırmalarda da önemli bir konuma sahiptir [11]. Günümüzde karşılaşılan kontrol problemlerinin çözümü ve dinamik modelleme gibi konularının sisteme dahil edilebilmesinden dolayı çalışmalar için önemli bir modeldir. Bunun yanında, sarkaç modellerine kazandırılan eksik tahrik özelliği sayesinde yapılan araştırmaların sayısı gün geçtikçe artmaktadır. Bu konu ile ilgili literatüre girmiş birçok farklı çalışma bulunmaktadır [6, 13, 14, 17, 18, 19].

1.1 Eksik Tahrikli Sistemler

Eksik tahrikli sistemler için basit bir tanım yapmak gerekirse; sistemin, serbestlik derecesinden (genelleştirilmiş koordinatlar) daha az sayıda kontrol girişine sahip olması olarak açıklanabilir. Bazı durumlarda uyarılmayan genelleştirilmiş koordinatlar uyarılan genelleştirilmiş koordinatlar tarafından etkilenebilirler ve uyarılanlar uyarılmayanların hareket etmesine sebep olabilir. Genelde uyarılanlar ve uyarılmayanlar aralarındaki bu ilişki lineer özellik göstermez [16].

Eksik tahrikli sistemler üretimdeki maliyetlerin, sistemlerin ağırlık oranlarının azaltılmasını ve eksik eyleyici kullanılarak eyleyicilerde oluşabilecek arızaları sisteme en az şekilde yansıtmayı amaçlar. Literatürde eksik tahrikli sistemler ile ilgili olarak yapılmış birçok araştırma vardır [6, 13, 14, 15, 17, 18].

1.2 Eksik Tahrikli Tekerlekli Sarkaç

Eksik tahrikli tekerlekli sarkaç, yüksek simetriye sahip bir disk veya tekerlek, sarkaç kolu ve DC motordan oluşur. Eksik tahrikli tekerlekli sarkaç fikri ilk olarak M.Spong tarafından ortaya atılmıştır [12] ve literatürde *“Reaction Wheel Pendulum”* veya *“Inertia Wheel Pendulum”* olarak geçer. Sistemin çalışma prensibi, tekerleğin DC motor ile sürülmesine dayanır ve sarkacın kontrolü DC motorun gücü ayarlanarak sağlanır. Tekerleğe akuple edilmiş olan DC motora güç verildiğinde tekerleği döndürmeye başlar ve tekerlek ivmelenir. Bu ivme tekerleğin eylemsizliği ile bir tork oluşturarak bunu sarkaç koluna aktarır ve tüm sistemin harekete geçmesine, yani salınmasına sebep olur.

Sisteme eksik tahrikli denmesinin sebebi serbestlik derecesinin sisteme uygulanan girişlerden büyük olmasıdır. Sistemde iki serbestlik derecesi olmasına rağmen tek bir eyleyici bulunmaktadır. Bu uygulama için tekerlek DC motor tarafından uyarılmakta, ancak sarkaç kolu herhangi bir şekilde uyarılmamaktadır. Sistem eksik tahrikli olduğu içinde lineer olmayan özellik göstermektedir. Lineer olmayan bu ilişki bölüm ikide anlatılan modelleme kısmında gösterilmiştir.

Eksik tahrikli tekerlekli sarkaç sistemi aşağıda belirtilen sebeplerden dolayı literatürde önemli bir yere sahiptir [11].

- Eksik tahrikli ve lineer olmayan bir sistem olması,
- Sistem dinamiğinin elde edilmesinin diğer sistemlere göre daha kolay olması,
- İleri düzey kontrol yöntemlerinin uygulanabilir olması (geribeslemeli lineerleştirme, enerji tabanlı salınım kontrolü, hibrid kontrol vs),
- Her seviyeden öğrenciye hitap etmesidir.

Şekil 1.1'de eksik tahrikli tekerlekli sarkaç düzeneğinin ilk prototipi gösterilmiştir.

Şekil 1.1: Eksik tahrikli tekerlekli sarkaç sisteminin ilk prototipi.

1.3 Literatürdeki Çalışmalar

Eksik tahrikli sarkaç sistemi öğretici bir çalışma ortamı oluşturduğundan, literatürde konu ile ilgili birçok araştırma vardır. Araştırmaların yelpazesi geniş bir alanı kapsadığından dolayı burada sadece tezin içindeki konularla paralellik gösteren çalışmalara yer verilmiştir. Konuların ana başlıkları şu şekilde sıralanabilir,

- Lyapunov fonksiyonu ile salınım kontrolü [2, 4-7],
- Geribesleme veya klasik lineerleştirme ile lineerleştirme [2, 4, 8, 9],
- Sistemin kararlılığının incelenmesi [1-5],
- PD tipi kontrol [10]

1.3.1 Lyapunov fonksiyonu ile salınım kontrolü

Çalışma [5]'de iki tekerlekli ters sarkaç (2TTS) kontrolü için Lyapunov metodundan bahsetmektedir. Çalışmaya konu olan 2TTS düşeyde serbestçe dönebilen bir sarkaç kolu ve DC motor tarafından sürülen iki tekerlekten oluşmaktadır. Sistemdeki sarkaç kolu doğrudan bir sürücü ile kontrol edilmediğinden dolayı eksik tahrikli bir sistemdir.

Çalışmanın hedefi sarkacı kararsız denge noktasında lokal asimptotik kararlı yaparak orada kontrolünü sağlamaktır. Bunun için pozitif tanımlı bir Lyapunov fonksiyonu uygun bir şekilde seçilerek buradan bir kontrol sinyali ve bu kontrol sinyali ile de sistemin kararlı denge noktasından kararsız denge noktasına salınımı sağlanmıştır. Daha sonra sistemin denge noktası 0'da asimptotik karalı olduğunu garantilemek için LaSalle'nin değişmezlik ilkesinden faydalanılmıştır. Geribeslemeli kontrolör ile de kararsız denge noktasındaki kontrolü gerçeklenmiştir.

Çalışma [7]'de Lyapunov fonksiyonuna dayalı enerji kontrol metodu kullanılarak ters sarkaç için tasarlanan salınım kontrolöründen bahsedilmektedir. Deney düzeneği olarak hareketli bir araca sabitlenmiş serbestçe dönebilen bir sarkaç kullanılmıştır. Çalışmada cart-type sistemi için sarkacın salınım kontrolü ve kararsız denge noktasındaki kontrolü ele alınmıştır. Sistem eksik tahrikli ve lineer olmayan bir model olduğu için kontrolünde eksik tahrikli sistemler için etkili bir yöntem olan enerji kontrol metodu kullanılmıştır. Kullanılan enerji kontrol metodu ise Lyapunov fonksiyonuna dayanmaktadır.

Sistemin Lyapunov fonksiyonu seçilirken kararsız denge noktası haricinde sıfır olmamasına dikkat edilmiştir ve sistemin toplam enerjisine bağlı olarak yazılmıştır. Aksi bir durum olmaması için üç ayrı Lyapunov fonksiyonu tanımlanarak ve bunların zamana türevlerinden üç ayrı kontrolör tasarlanmıştır. Tüm kontrol tasarlanan üç kontrol girişinin durumlara göre anahtarlanmasıyla elde edilmiştir. Birinci Lyapunov fonksiyonu ters sarkacın alt denge noktasından üst denge noktasına (kararsız denge noktası) salınımı sağlamaktadır. Bu esnada iki durum açığa çıkmaktadır. Birincisi, sarkaç enerjisinin sıfır iken sarkacın sağ yarı düzlemde kalması ve açısal hızın da saat yönünün tersine olmasıdır. Bu durum için ikinci bir Lyapunov fonksiyonu tasarlanmış ve sarkacın sağ yarı düzlemden gelmesi durumunda üst denge noktasında ikinci Lyapunov fonksiyonu kullanılmıştır. İkincisi, sarkaç enerjisinin yine sıfır olduğu durum, ancak bu sefer sarkaç sol yarı düzlemden saat yönün tersine bir açısal hızla gelmektedir. Bu durum içinde üçüncü bir Lyapunov fonksiyonu tasarlanmıştır.

Sarkaç birinci Lyapunov fonksiyonu ile salınıma başladığı andan sonra sol veya sağ düzlemde olması durumuna göre ikinci veya üçüncü Lyapunov fonksiyonuna anahtarlanarak sarkacın kararsız denge noktasında kontrolü sağlanmıştır. Bu çalışmada kullanılan karalılık kontrolü tezde kullanılan kararlılık kontrolünden farklıdır, ancak her iki çalışmada da sistemin salınımı için Lyapunov fonksiyonunun enerjiye dayalı hali kullanılmıştır.

Çalışma [6]'da sınırlı asma noktası hareketiyle ters sarkacın salınım kontrolör tasarımı anlatılmaktadır. Deney düzeneği olarak dönel bir ters sarkaç kullanılmıştır. Çalışmada sistemin sadece salınım kontrolü verilmiştir ve salınım kontrolü için enerjiye dayalı bir yöntem izlenmiştir. Enerjiye dayalı yöntemde Lyapunov fonksiyonundan yararlanılmıştır. Bu doğrultuda önerilen Lyapunov fonksiyonu sistemin enerjisini ve sarkaç kolunun hızını içermektedir. Bu kontrolörle sarkacın alt denge noktasından üst denge noktasına salınımını içerir. Üst denge noktasındaki kontrolü içermez.

Çalışma [4]'te araçlı ters sarkaç sistemi için Lyapunov tabalı kontrol anlatılmaktadır. Deney düzeneği olarak hareketli bir araca bağlanmış serbest dönebilen bir sarkaç kolu kullanılmıştır. Burada kullanılan kontrolün amacı sarkacı kararsız denge noktasında hareketli mekanizmaya uygulanan kuvvet ile kararlı hale getirmektir. Sarkaç öncelikle uygun olarak seçilen Lyapunov fonksiyonu ile kontrol girişi elde edilir ve daha sonra sistemin kararlığı sıfır noktası incelenir. Sistemin kararsız denge noktasındaki asimptotik kararlığı LaSalle'nin değişmezlik ilkesi kullanılarak garantilenir. Daha sonrada geribeslemeli lineerleştirme kullanılarak da üst denge noktasındaki kontrolü sağlanır.

Çalışma [2]'de eksik tahrikli tekerlekli sarkacın lineer olmayan kontrolünden bahsedilmektedir. Deney düzeneği olarak bu tezin konusu olan eksik tahrikli sarkaç düzeneği kullanılmıştır. Sarkacın iki aşamalı kontrolünden bahsedilmiştir. Birincisi sarkacın kararsız denge noktasındaki kontrolünü sağlayan geribeslemeli lineerleştirme ve Taylor serisi yaklaşımı ile lineerleştirme modeli kullanılmış ve bu iki yöntemin performans karşılaştırması yapılmıştır. İkinci de, sarkacın üst denge noktasına gelmesi için yapması gereken salınımın kontrolünü oluşturur. Salınım kontrolünde koşullara uygun seçilmiş Lyapunov fonksiyonu kullanılmıştır. Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi alınarak sarkaç salınımını gerçekleyecek olan kontrol girişi belirlenmiş ve daha sonra LaSalle'nin değişmezlik ilkesi kullanılarak sarkacın üst denge noktasında asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir.

1.3.2 Geribesleme veya klasik lineerleştirme ile lineerleştirme

Bu bölümde, literatürdeki tez konusu ile ilgili olan çalışmalar incelenmiş ve bu doğrultuda geribeslemeli ve klasik lineerleştirme ile lineerleştirme modelleri anlatılmıştır.

Çalışma [9]'da dönel ters sarkaç sistemi için giriş-çıkış geribeslemeli lineerleştirme kontrolör tasarımı anlatılmıştır. Deney düzeneği olarak dönen bir mekanizmaya bağlanmış sarkaç kolu kullanılmıştır. Geribeslemeli lineerleştirme lineer olmayan kontrol tasarımı için bir yaklaşımdır. Geribeslemeli lineerleştirmede amaç seçilen çıkış sinyalinin istenen çıkışa benzemesidir. Bu metotta yapılması gereken seçilen çıkış fonksiyonunun giriş fonksiyonu ile arasında bir ilişki kurmaktır, çünkü çıkış sinyali doğrudan giriş sinyaline bağlı değildir. Bu ilişkiyi sağlayabilmek için çıkış sinyalinin zamana göre türevleri alınır. Bu çalışma için çıkış ile giriş arasındaki ilişki ikinci türevde sağlanmıştır. Bu ilişki sağlandıktan sonra burada yeni bir giriş sinyali ortaya çıkar ve bu giriş sinyali ile sistem lineerleştirilir. Daha sonra sistemin optimal kontrolünü sağlamak için genetik algoritma metodu kullanılarak simülasyon sonuçları verilmiştir.

Çalışma [4]'te kısmi geribeslemeli lineerleştirme kullanılmıştır. Bu lineerleştirme ile araçlı ters sarkaç sisteminin lineerleştirilmesi sağlanarak, sistemin lokal asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir.

Çalışma [8]'de eksik tahrikli tekerlekli sarkaç modeli için denge kontrol stratejisi anlatılmıştır. Deney düzeneği olarak bu tezin de konusu olan tekerlekli sarkaç kullanılmıştır. Bu çalışmada iki kontrol yolu izlenecektir. Bunlar, klasik lineerleştirme metotları ve bu tezin konusu olmayan bulanık mantık ile üst denge noktasında kontroldür. Birinci kontrolörde, klasik lineerleştirme teknikleri kullanılarak sistemin kararsız denge noktası civarında üç ayrı model oluşturulmuştur. Bunlardan ilki, bu tezde de yapıldığı gibi Euler-Lagrange denkleminden elde edilen dinamik modelin Taylor serisine açılarak elde edilir. Taylor serisine açılan dinamik modelin kontrol edilebilir olduğu gösterilerek kazanç matrisi belirlenir ve kararsız denge noktasındaki kontrol gerçekleştirilmiştir. İkincisi, yan yana yerleştirilmiş lineerleştirme (collocated linearization) ve üçüncü olarak da durum dönüşümü yapılarak sistemin lineerleştirilmesi yapılmıştır.

Bir önceki bölümde anlatılan çalışma [2] de ise tekerlekli sarkaç sisteminin hem klasik metotla lineerleştirilmesi hem de geribeslemeli lineerleştirme metoduyla lineerleştirilmesi verilip bunların performans karşılaştırılması yapılmıştır. Daha önceki çalışmalarda olduğu gibi klasik yaklaşımla sistemin durum uzayı çıkartılıp gerekli kazanç katsayıları belirlendikten sonra sistemin kararsız denge noktasındaki kontrolü sağlanmıştır. Geribeslemeli lineerleştirmede ise uygun bir çıkış fonksiyonu seçilip, bunun kontrol girişi ile ilişkisi elde edilene kadar zamana göre türevleri alındıktan sonra yeni kontrol girişi elde edilerek sistemin lineerleştirilmesi sağlanmıştır. Bu iki modelin karşılaştırılma sonuçlarında ise çok ciddi farklar gözlenmemiştir.

1.3.3 Sistemin kararlılığının incelenmesi

Sistemin kararlılığının incelenmesinde bu tez kapsamında Lyapunov fonksiyonu ve LaSalle'nin değişmezlik ilkesinden yararlanılarak tekerlekli sarkaç sistemin asimptotik kararlılığı gösterilmiştir.

Daha önce bahsedilen çalışma [5]'te 2TTS'nin kararlılığı Lyapunov fonksiyonu ile irdelenmiş ve LaSalle ile de sarkacın denge noktası sıfırdaki asimptotik kararlılığı ispatlanmıştı. Bunun için önce Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi alınmış ve sıfıra eşit olduğu durum dikkate alınarak sistemin asimptotik kararlı mı yoksa kararlı mı olduğu LaSalle ile kesinleşmiştir. Türevi sıfıra küçük eşit olan Lyapunov fonksiyonunun, yarı negatif tanımlı fonksiyon, denge noktasında haricinde sıfır olmadığı LaSalle ile gösterilerek sisteme asimptotik kararlıdır denilmiştir.

Çalışma [3]'te ise Nested saturasyon fonksiyonu aracılığıyla aşırı sönümlemeli tekerlekli sarkacın kontrolü anlatılmaktadır. Sistemin kararlılığının gösterilmesinde kararlılık yöntemi olan Lyapunov fonksiyonundan yararlanılmıştır. Sistemdeki tüm durumların verilen Lyapunov fonksiyonu ile sıfıra gittiği gösterilmiş ve böylelikle sistemin asimptotik kararlı olduğu sonucu çıkarılmıştır.

Sınırlandırılmış tork ile tekerlekli sarkacın kontrolünü anlatan çalışma [1]'de kontrol yöntemi olarak IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment Passivity-based Control) kullanılmış ve böylece sarkacın salınım kontrolünden denge kontrolüne geçişte yapılan anahtarlama devre dışı bırakılmıştır. Sarkacın hem salınımı hem de denge noktasındaki kontrolünü sağlar. IDA-PBC yönteminin özelliği gereği istenen enerji fonksiyonu Hamilton Lyapunov fonksiyonu adayı olarak gösterilir. Lyapunov adayı belirlenen sistemin kararlılık analizi yapılabilir. Lyapunov'un zamana göre türevi alındığında negatif yarı tanımlı fonksiyon çıkar ve sistemin asimptotik kararlı olup olmadığını incelemek LaSalle teoremine kalır. Bu incelemenin sonunda da sistemin kararsız denge noktasında asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir.

Daha önceki bölümde anlatılan çalışmalar [2] ve [4]'te aynı zamanda sistemin kararlılığı da incelenmiştir. Kararlılık analizinde Lyapunov fonksiyonundan yararlanılmıştır. Uygun bir Lyapunov fonksiyonu belirlendikten sonra zamana göre türevi alınmış ve negatif yarı tanımlı olduğu görülmüştür. Lyapunovu sıfır yapan yerler LaSalle ilkesi ile tekrar incelenmiş ve sistemin kararsız denge noktasında asimptotik kararlı olduğu gösterilmiştir.

1.3.4 PD tipi kontrol

Tezde işlenen diğer bir kontrol yöntemi ise sarkacın salınımı esnasında üst denge noktasına açısal hızı sıfır olacak şekilde çıkmasını sağlaması için tasarlanmış olan PD tipi kontrolördür. Bu başlık altında literatürde eksik tahrikli sarkaç sistemlerine uygulanan bazı PD tipi kontrolör çalışmaları verilmiştir.

Çalışma [10]'da ters sarkaç sistemi için hibrit kontrol incelenmiştir. Deney düzeneği olarak hareketli bir araç ve ona sabitlenmiş serbest hareket edebilen bir sarkaç kolu kullanılmıştır. Tanımlanan hibrit kontrolör iki bileşenden oluşuyor. Birincisi, sarkacın salınımında kullanılacak olan PD kontrolör ve diğeri de sarkacın kararsız denge noktasında sabit kalabilmesini sağlayacak olan kayan mod kontrolörüdür. Çalışmada, PD kontrolör hareketli araca uygulanmakta ve uygun kazanların belirlenmesi için yer kök eğrisi kullanılmıştır. Katsayılar belirlendikten sonra sarkacın salınım kontrolü bitirilmiştir. Daha sonra uygun durum geldiğinde anahtarlanacak olan kontrolör olan kayan mod kontrolörü tasarlanıp, hibrit sistem oluşturulmuştur.

1.4 Tezin Organizasyonu

Bu çalışmanın, ikinci bölümünde eksik tahrikli sarkaç sisteminin mekanik tasarımı ve imalatı tartışılmıştır. Gerekli olan mukavemet analizi CATIA ile incelenmiş ve imalatın yapılabileceği kararı verilmiştir. Üçüncü bölümde, sarkaç sisteminin sürtünmesiz ideal ortam için dinamik modeli Euler-Lagrange (EL) eşitliği ile sağlanmıştır. Sistemde gerçekte var olan sürtünmelerin dinamik modele dahil edilebilmesi için nasıl bir yol izleneceği gösterilmiştir. Dördüncü bölümde, sarkacın kontrolünde kullanılacak olan kontrolörler verilmiştir. Kararsız denge noktasındaki kontrol için giriş-çıkış tipi geribeslemeli lineerleştirme metodunun nasıl kullanıldığı, salınım kontrolü içinde iki ayrı metot olan enerji tabanlı salınım ve anahtarlamalı salınım kontrolünün nasıl kullanıldığı anlatılarak, bunların hibrid bir sistem haline getirilişi gösterilmiştir. Son bölümde ise, gelecek hedeflerinden bahsedilmiştir. Tek sarkaç sistemi yerine özdeş iki sarkacın birbirine elastik bir yükle akuple edilmesiyle elde edilen birlikte çalışan sarkaç sistemin dinamik modeli ve MATLAB-Simulink bloğu verilmiştir.

2. TASARIM VE İMALAT

Bu bölümde sarkaç sisteminin imalatı ile ilgili detaylı bilgi verilecektir. İmalat aşamalarında malzemelerin neye göre seçildi, mukavemet analizlerinin nasıl yapıldığı, buna bağlı olarak yapılan tasarımların üretiminin yapılıp yapılamayacağı tartışılacak ve CATIA ile tasarımı yapılan her parçanın imalat sonrası fotoğrafları verilecektir.

2.1 Sarkaç Kolu

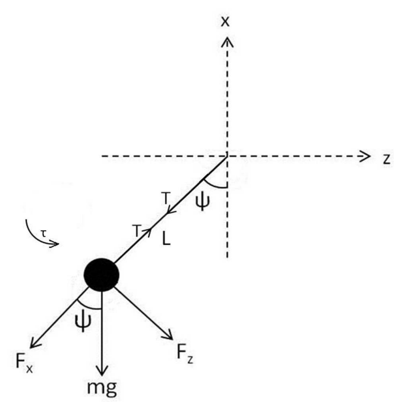
Sarkaç kolu, sistemin geri kalan bölümüyle karşılaştırıldığında en fazla yüke maruz kalan parçalardan biri olduğu için imalatında kullanılan malzemenin uygun seçilmesi gerekmektedir. Öte yandan, eyleyicinin ürettiği birim torkun olabildiğince yüksek ivmeye dönüşmesi amacıyla tasarım aşamasında sistemin toplam kütlesinin mümkün olduğunca düşük kalması hedeflenmiştir. Bu durumda seçilmesi gereken malzeme hafif ve dayanıklı olmalıdır. Sarkaç kolunun imalatında bu sebeple delrin kullanılmıştır. Delrin malzeminin bazı özellikleri çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1: Delrinin malzeme özellikleri.

Adı	**Değeri**
Yoğunluk	$1{,}42\ \mathrm{g/cm^3}$
Poisson Oranı	0,35
Akma Mukavemeti	66 MPa
Elastisite Modülü	2700 MPa

Sistemin yükünü taşıyacak olan sarkaç kolunun salınım esnasında oluşacak kuvvetlere karşı dirençli olduğunu mukavemet analiziyle doğrulamak önemli ve gereklidir. Bu çalışmada delrinden yapılan sarkaç kolunun mukavemet hesapları için üç boyutlu katı modelleme ve analiz yazılımı olan CATIA kullanılmıştır. Sarkaç kolunun statik analizini yapabilmek için öncelikle CATIA'nın standart malzeme kütüphanesinde bulunmayan delrinin tanımlanması gerekir. Bu tanımın oluşturulmasında çizelge 2.1'den yararlanılmıştır.

Sistemin CATIA statik analizinde kullanılacak kuvvetler sırasıyla $50N$, $20N$ ve $150N$ olarak seçilmiştir. Belirtilen değerler tezin sonraki bölümlerinde yapılan dinamik analizde elde edilen değerlere güvenlik faktörü dahil edilerek belirlenmiştir. Sisteme etkiyecek olan kuvvetler sistemin basit sarkaç olarak modellenmesiyle de elde edilebilir. Bu yaklaşımda sarkaç sistemini kütle merkezinden (KM) bir rijit linkle asılmış noktasal bir yüke benzetmek mümkündür. Noktasal cismin ağırlığı tüm sistemin ağırlığına eşit olup rijit linkin kütlesi ihmal edilmiştir. Bu yaklaşımda, linke etkiyen kuvvet ise sarkaç koluna etkiyen kuvveti yaklaşık olarak temsil etmektedir. Şekil 2.1 de basit sarkaç modeli gösterilmektedir.



Şekil 2.1: Basit sarkaç modeli.

Şekil 2.1'de gösterilen F_x ve T gerilme kuvveti merkezcil kuvveti oluşturur. Sarkaç kolunun dönmesine sebep olan F_z kuvveti dışarıdan uygulanan tork ile birlikte sisteme etkiyen net torku oluşturur. Şekil 2.1 de verilen modelin bahsedilen denklemleri

$$T - F_x = ma_r \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\tau + F_z L = \tau_{net} \quad \textbf{(2.2)}$$

olarak yazılabilir. Eşitlik (2.1)'de verilen radyal ivme $a_r = L\omega^2$ olarak verilir. Burada L olarak verilen yarıçap değeri sarkacın asma noktasından KM'ne olan uzaklığıdır. Bu değer yapılan tasarımda $L = 0.108m$ olarak alınmıştır. ω ise tüm sistemin açısal hızıdır. ω'nın değeri dinamik denklemin MATLAB-Simulink çözümünden elde edilebilir. Simülasyon çözümünden elde edilen en büyük hız değeri $\omega_{max} = 14{,}36\, rad/sn$'dır. Bu değer yerine güvenlik faktörü gözönüne alınarak $\omega_{max} = 16\, rad/sn$ kullanılabilir. Son olarak tüm sistemin kütlesi olan m'nin CATIA'dan alınan değeri $0{,}574\, kg$'dır.

Şekil 2.1'de gösterilen F_x ve F_z kuvvetleri,

$$F_x = mgcos(\psi) \tag{2.3}$$

$$F_z = mgsin(\psi) \tag{2.4}$$

şeklinde verilir. Anlatılan yaklaşımda en büyük değerler dikkate alınmalıdır. Bu yüzden (2.3) ve (2.4) eşitliklerinde trigonometrik değerleri en büyük yapan açılar göz önüne alınacaktır. Eşitlik (2.1)'in çözümü, $\psi = 0$ için

$$T = 0{,}574 \times 9{,}81 + 0{,}574 \times 0{,}108 \times 16^2$$

$$T \approx 21{,}51N \tag{2.5}$$

Sarkaç koluna binen yükü temsil eden T değeri dikkate alındığında, sarkaç kolunda en fazla $21{,}51N$'luk bir gerilmenin oluşacağını belirtir.

Eşitlik (2.2)'nin çözümü sarkaç kolunun radyal yönde en fazla ne kadar burulmaya maruz kalacağı ile ilgili bilgi sağlar. Dikkat edilmelidir ki burada uygulanan kuvvet sarkaç kolunun gerilmesini etkilemez, çünkü sistem asma ekseni etrafında dönebilmektedir. CATIA statik analizinde ise sarkaç kolunun dönmediği durum ele alınmıştır. Doğrudan yük sarkaç koluna biner ve sarkacın bükülmesine sebebiyet verir. Eğer sarkaç bu yüke dayabiliyorsa tasarımın uygun olduğu yorumu yapılabilir.

Net torkun büyük değerli olabilmesi için uygulanan tork ile sarkaç dinamiğinden kaynaklanan torkun aynı yönde olduğu durum göz önüne alınmış ve ağırlığın tamamımın torka etkidiği varsayılmıştır. Dışarıdan uygulanan tork DC motorun nominal torkudur. Bu değer seçilen motor için $0{,}19Nm$'dir.

$$\tau_{net} = 0{,}19 + 0{,}574 \times 9{,}81 \times 0{,}108$$

$$\tau_{net} \approx 0{,}8Nm \tag{2.6}$$

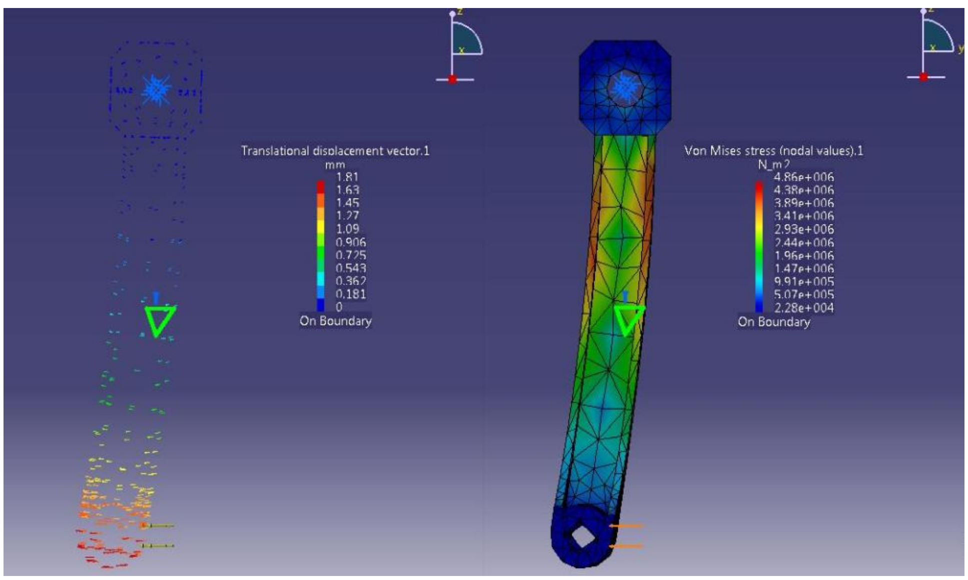
Tork ifadesi de kuvvet ile kuvvetin etkidiği dik uzaklık olduğu için net tork L'ye bölündüğünde sarkaca yandan etkiyen kuvvet belirlenir.

$$F = \tau_{net}/L \quad \textbf{(2.7)}$$

$$F \approx 7{,}41\ N \quad \textbf{(2.8)}$$

bulunur. Bulunan kuvvet değerleri için tekrar güvenlik faktörü göz önünde tutulursa, yandan gelen kuvvetler ve gerilme kuvvetleri için daha büyük değerler verilebilir. Bunlar konunun başında da belirtildiği gibi sırasıyla $50N$, $20N$ ve $150N$'dur.

Aşağıdaki şekil 2.2, şekil 2.3 ve şekil 2.4'de sarkaç kolunun CATIA statik analizi ve etkiyen kuvvet karşısında ne kadar yer değiştirmeye maruz kalacağı verilmiştir.

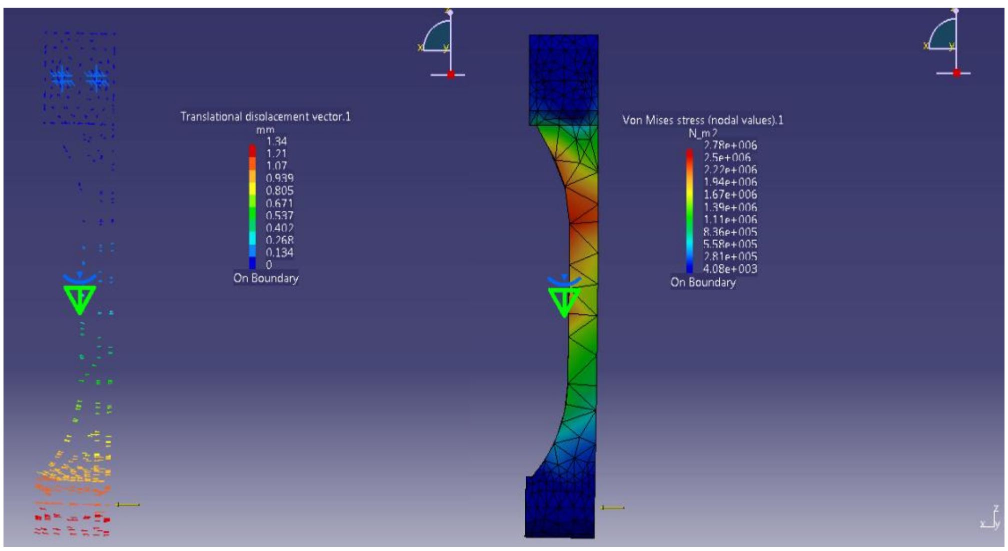


Şekil 2.2: Sarkaç koluna yataydan $50N$'luk kuvvet uygulaması.

Şekil 2.2'de sarkaç kolunun asma noktasından sabitlendiği görülür. Sabitlenmiş sarkaç koluna yataydan $50N$'luk bir kuvvet uygulandığında (şeklin sağ tarafında kalan kısım) kırmızı ile belirlenmiş olan yerler en fazla basınca maruz kalır. $50N$ için sarkaç kolu en fazla $4{,}86MPa$'lık basınca maruz kaldığı şekildeki ölçeklemeden görülebilir ve $4{,}86MPa$ delrin malzemenin dayanım sınırları içerisindedir. Uygulanan $50N$ ise eşitlik (2.8)'den çok daha büyük bir değerdir.

Şekil 2.2'in solunda kalan kısım, sarkaç kolunun $50N$'luk bir kuvvetin etkisinde doğrultusundan ne kadar sapacağı hakında bilgi verir. Şekildeki en fazla yer değiştirme $1{,}81mm$'dir ve kabul edilebilir bir değerdir. Bu analizin sonucunda sarkaç kolunun yan kuvvetler için yeterince dayanıklı tasarlandığı anlaşılır.

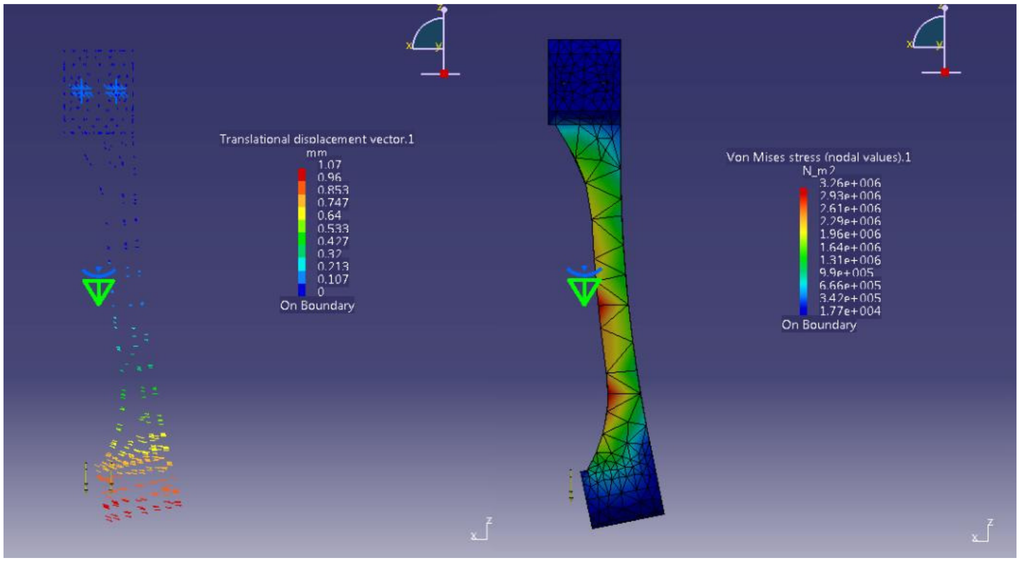
Yandan etkiyen kuvvetlere dayanıklı olan sarkaç kolu sarkaç miline sabitlendikten sonra sürekli olarak DC motor ve tekerleğin ağırlığına maruz kalacaktır. Sarkacın arkasında ve önünde sabit yükler olacaktır. DC motor yaklaşık olarak $0{,}3kg$'a ve tekerlek ise $0{,}14\ kg$'a tekabül eder. Dikkat edilirse bu kuvvetler birbirine ters yönde moment uygulayacaklardır. Tekerleğin ağırlığı sarkacı geriye doğru itmek isterken, DC motor ise ileriye doğru itmek isteyecektir. Güvenlik faktörü açısından her ikisinin de aynı yönde etkidiği varsayılırsa sarkaç koluna tek yönden en fazla $0{,}44\ kg$ etkiyebilir. Güvenlik faktörü biraz daha büyütülerek sarkaç koluna arkadan $20N$'luk bir kuvvetin etkiği varsayımı şekil 2.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Sarkaç koluna arka cepheden $20N$'luk kuvvet uygulaması.

Şekil 2.3'te sarkaç koluna arkadan $20N$'luk bir kuvvet uygulandığında yapıda nasıl bir değişiklik meydana geldiğini göstermektedir. Şeklin solunda kalan kısım sarkacın $20N$'luk kuvvetin etkisi altında ne kadar yer değiştireceğini gösterir ve en fazla sapacağı nokta kırmızı ile belirtilmiş olup $1{,}34\ mm$'dir. Şeklin sağında kalan basınç modeli, sarkaç kolunun maruz kaldığı en büyük basınç $2{,}78MPa$'dır (şekilde kırmızı ile vurgulanmıştır). Seçilen malzeme bu değerlere rahatlıkla dayanabilecektir. Bu bakımdan da sarkaç kolu için yapılan tasarım başarılı gözükmektedir.

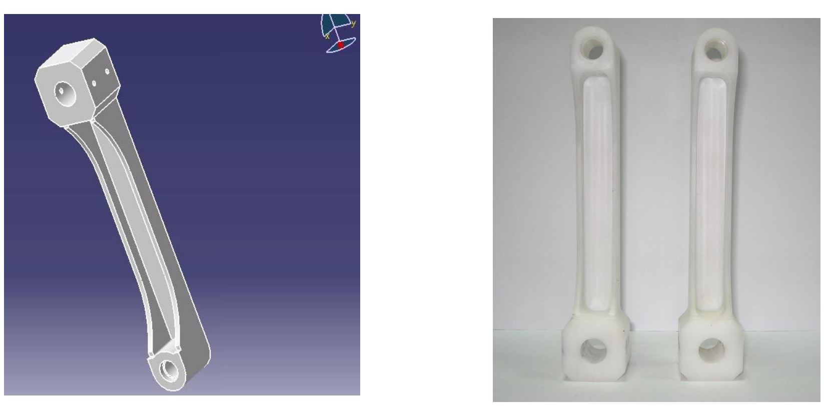
Son olarak, sarkaç kolunun oluşabilecek en büyük gerilime dayanıp dayanamayacağı incelenecektir. Sarkaç koluna düşebilecek en büyük gerilim kuvveti $21{,}51N$ olarak hesaplanmıştır. Güvenlik faktörü de düşünüldüğünde sarkaç koluna $150N$'luk kuvvet uygulamak makul bir yaklaşım olarak görünmektedir. Şekil 2.4'te sarkaç koluna $150N$ kuvvet uygulandığında gösterdiği tepki verilmiştir.



Şekil 2.4: Sarkaç koluna aşağı yönde $150N$'luk kuvvet uygulaması.

Şekil 2.4'ün sağında kalan kısım incelendiğinde sarkaca en fazla $3{,}26MPa$ basınç uygulanır. Şeklin solunda kalan kısımda bu kuvvet karşısında sarkaç kolunun doğrultusunun ne kadar değiştiği verilmiş olup bu değer en fazla $1{,}07\ mm$'dir. Bu iki değer de delrinin dayanım sınırları içerisindedir

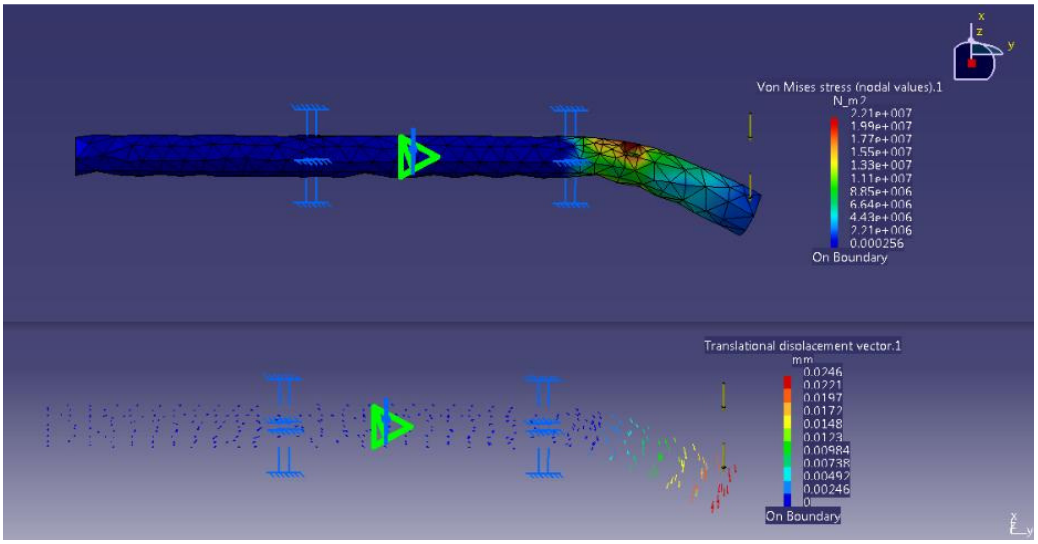
Bu değerler ışığında tasarlanmış sarkaç kolunun var olan sistemi rahatlıkla taşıyabileceği anlaşılmaktadır. Bu sonuca dayanarak sarkaç kolu şekil 2.5'de gösterildiği gibi imal edilmiştir. Şekil 2.5'de sol tarafta sarkaç kolunun CATIA çizimi ve sağ tarafında ise sarkaç kolunun imal edilmiş hali gösterilmiştir.



Şekil 2.5: Sarkaç kollarının CATIA çizimi ve imal edilmiş hali.

2.2 Sarkaç Kol Mili

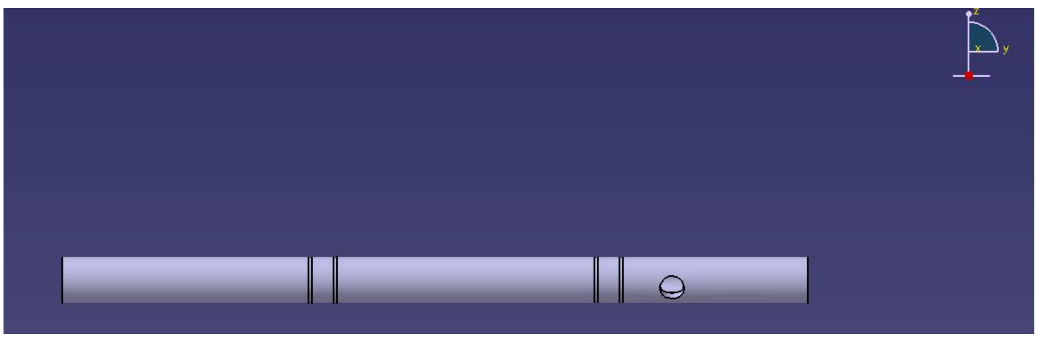
Sistem yükünün büyük bir bölümünü taşıyacak diğer parça sarkaç kol milidir. Bunun için bu parçanın tasarımını yaparken mukavemeti yüksek olan çelik veya demir kullanılabilir. İmalatta malzeme olarak çelik kullanılmıştır. Mukavemet analizi CATIA aracılığı ile yapılmıştır. Sonuçlar şekil 2.6'da gösterilmektedir.



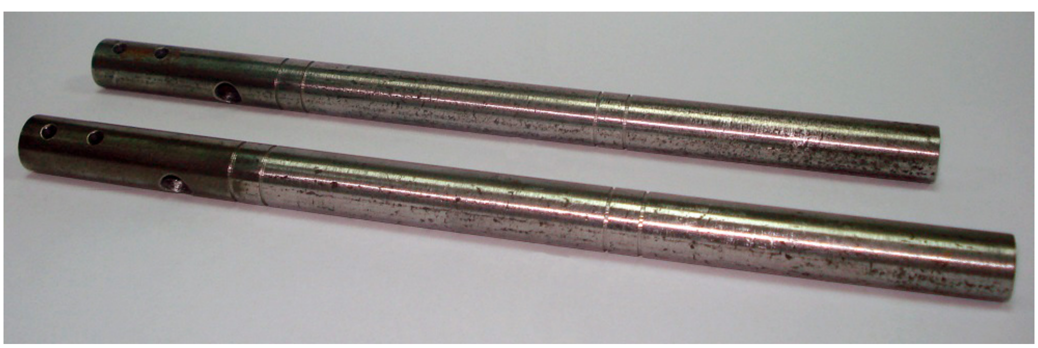
Şekil 2.6: Sarkaç kol milinin $150N$'luk kuvvet etkisindeki analizi.

Sarkaç kol milinin tasarımı yapılırken DC motordan gelecek olan kabloların sisteme etkisini azaltabilmek için sarkaç milinin içinde yaklaşık olarak $9mm$'lik bir oyuk açılmıştır. DC motor kablolarının sarkaç kol milinin içinden geçirilerek bilgisayar ortamı aktarım elemanlarına bağlanılması hedeflenmiştir. Böylece kablonun salınım esnasında motora doğrudan bir etkisi olmayacaktır. Motor kablolarını sarkaç kol milinin içerisine geçirebilmek için ise sarkaç kolunun bağlantı yerinden biraz geride $8mm$'lik bir delik daha açılmıştır. Şekil 2.6'da motor kablolarının girişi için açılan $8mm$'lik deliğin ve sistemin genel tepkisi incelenmiştir. Varsayımda aşağı yönde, şekle göre negatif x yönünde, $150N$'luk bir kuvvet uygulanmıştır. Bu kuvvet eşitlik (2.5) ve güvenlik faktörü dikkate alınarak seçilmiştir. Sarkaç koluna bağlı olan mil sarkaç koluna uygulanan kuvvete dayanabilmedir. Şekil 2.6'nin üst tarafında en çok basıncın $8mm$'lik deliğe geldiği görülebilir. Buraya düşen basınç $22.1MPa$'dır ve bu çelikin dayanabileceği bir değerdir. Şeklin alt kısmında kalan taraf sarkaç kol milinin $150N$ karşısında en fazla $0,025\,mm$ büküleceğini gösterir. Milin tasarımı yapılan analizler neticesinde sistemi taşıyabilecek kapasitedir. Eğer çelik yerine demir kullanılırsa bu sapma değeri yaklaşık olarak $0.041mm$ olacaktır. Her iki değer de kabul edebilir sınırlar içinde kalacağından her iki malzemede bu tasarım için uygundur.

Burada sisteme etkidiği varsayılan 150'luk kuvvet gerçekte etkiyen kuvvetlerden fazladır. Dolayısıyla bu parça sistem elemanı olarak kullanılabilir. Ayrıca, sarkaç kol milinde bulunan iki vida deliği sarkaç kol milinin sarkaç koluna monte edilebilmesi için açılmıştır. Diğer yuvalar ise uygun segmanlara göre açılmış olup segman aralarına rulmanlar girecektir. Sarkaç kol milinin dış çapı $15mm$ olacak şekilde imal edilmiştir. Şekil 2.7a'da sarkaç kol milinin CATIA çizimi ve şekil 2.7b'de ise imalat sonrası fotoğrafı gösterilmektedir.



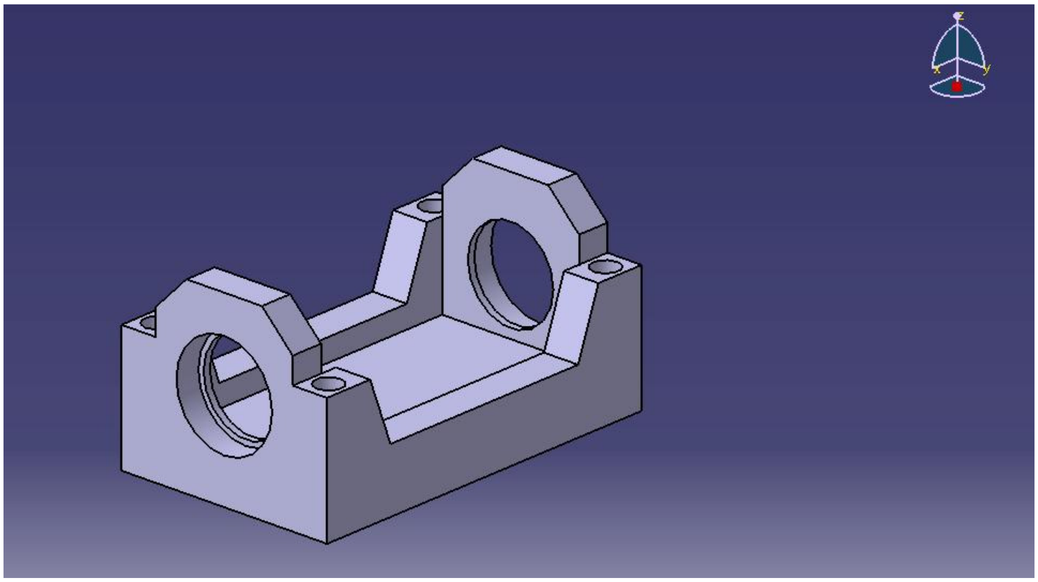
Şekil 2.7a: Sarkaç kol milinin CATIA çizimi.



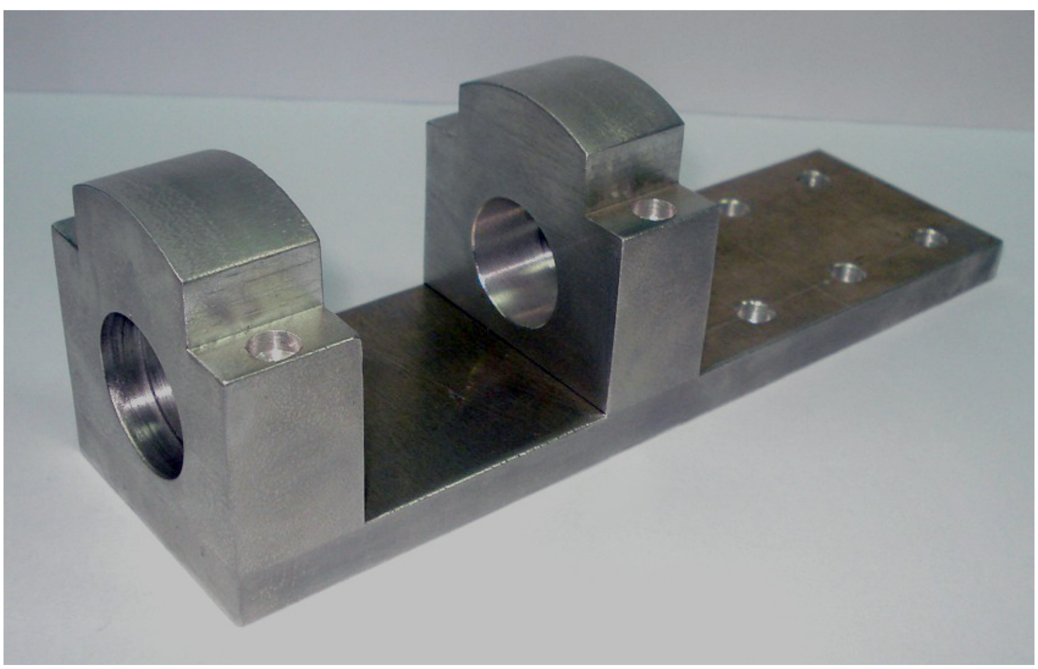
Şekil 2.7b: Sarkaç kol millerinin imalat fotoğrafı.

2.3 Sarkaç Masa Sabitleme Düzeneği

Sarkaç masa sabitleme düzeneği tüm sarkaç sistemini masa veya herhangi bir yüzeye monte etmek için kullanılan sistem parçasıdır. İmalatında alüminyum kullanılmıştır. Yeterince kalın yapıldığı için CATIA mukavemet analizine gerek duyulmamıştır. Parça sistemin herhangi düz bir yüzeye monte edilebilecek şekilde tasarlanmış olup iki adet rulman yuvası içermektedir. Rulmanlarla ilgili detaylı bilgi rulmanlar kısmında verilecektir. CATIA çizimi ile imal edilen parça farklılık göstermektedir. Bunun sebebi parça imalatını kolaylaştırmaktır. Bu değişiklikte temel ölçülerde hiçbir değişikliğe gidilmemiştir. Şekil 2.8a'da sarkaç masa sabitleme düzeneğinin CATIA çizimi, şekil 2.8b'de ise imalat fotoğrafı verilmiştir.



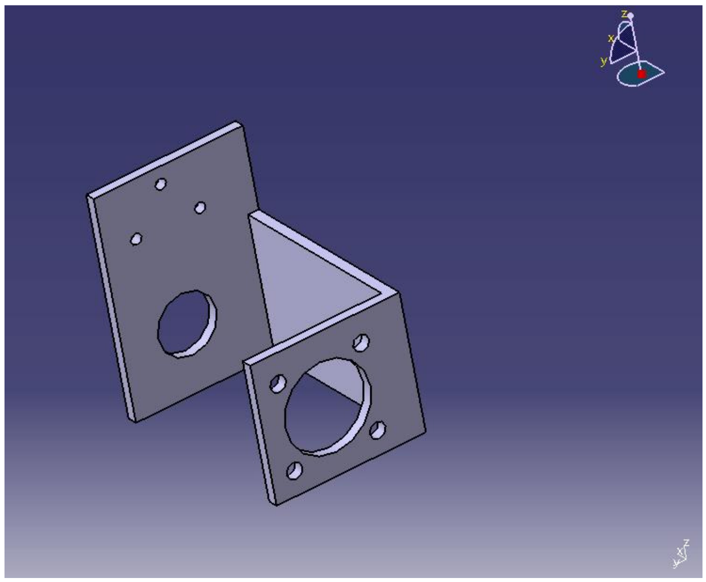
Şekil 2.8a: Sarkaç masa sabitleme düzeneği CATIA çizimi.



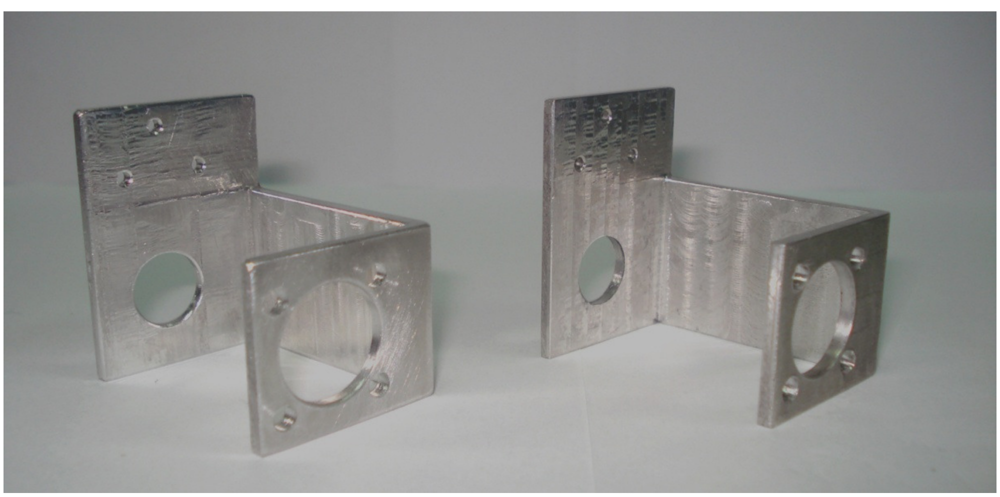
Şekil 2.8b: Sarkaç masa sabitleme düzeneği imalat fotoğrafı.

2.4 DC Motor Desteği

DC motor desteği sadece $300g$'lık DC motoru taşıyacağı için malzeme olarak alüminyum kullanılmıştır. DC motor desteği vidalar aracılığıyla doğrudan sarkaç koluna monte edilecektir ve içerisindeki açıklığa da kaplin koyularak tekerlek miline monte edilecektir. Şekil 2.9a'da DC motor desteğinin CATIA çizimi, şekil 2.9b'de ise imalat fotoğrafı verilmiştir.



Şekil 2.9a: DC motor desteği CATIA çizimi.

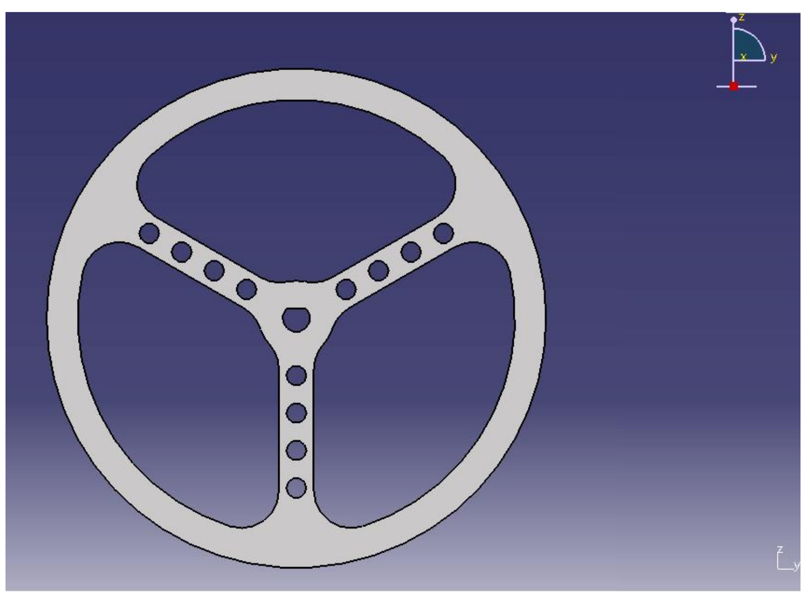


Şekil 2.9b: DC motor desteği imalat fotoğrafı.

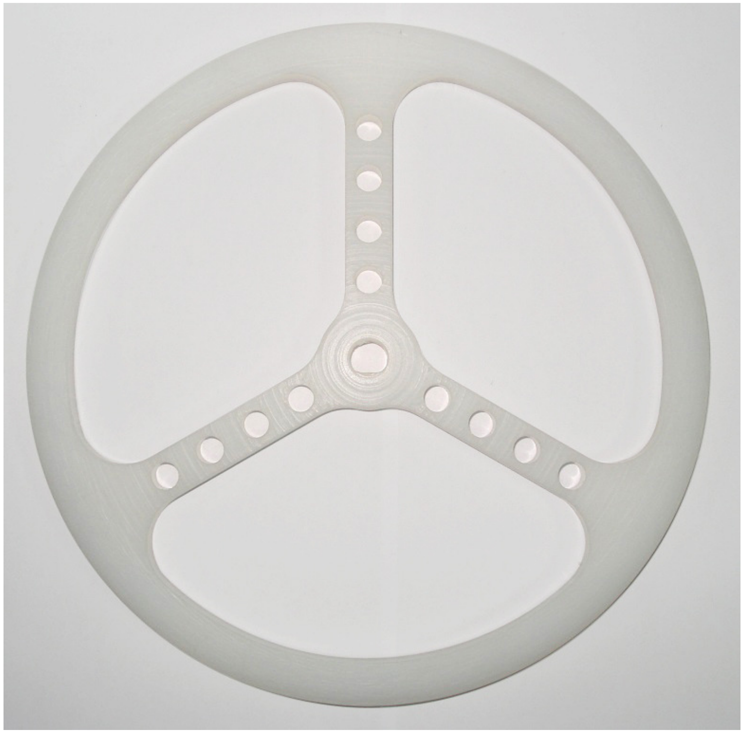
2.5 Sarkaç Tekerleği

Sarkaç tekerleği sistemin tetikleyicisi konumundadır. Motorun aktardığı tork sayesinde sarkaç tekeri döner ve onun eylemsizliği sayesinde de sistem ivmelenir. Sistemin ivmelenmesinde uygulanan torkun aktarımında sarkaç tekerleğinin eylemsizlik momenti önem arz etmektedir. Eylemsizlik momenti ise cismin kütlesi ve yarıçapının karesi ile doğru orantılı olarak değişmektedir. Sarkaç sisteminin olabildiğince hafif olması istenmektedir çünkü motor hafif sistemi daha rahat kontrol edebilecektir ve daha çabuk üst denge noktasına ulaşmasını sağlayacaktır. Bu sebepten dolayı sarkaç tekerleğinin kütlesinin hafif ama eylemsizliğinin de yüksek olması gerekir. Malzeme seçiminde de bu kurala önem verilmesi gerekir. Sarkaç tekerleği sadece döneceği için çok fazla bir kuvvete maruz kalmayacaktır. Burada da sarkaç koluna benzer şekilde yoğunluğu metallere göre çok daha düşük olan delrin seçilmiştir. Bu seçim ile tekerleğin kütlesi olabildiğince düşük, eylemsizliği ise olabildiğince yüksek tutulmuştur.

Sarkaç tekerleğinin tasarımı yapılırken eylemsizlik momentinin doğrudan orantılı olduğu yarıçap olabildiğince büyük bir değerde tutulmuştur. Bu doğrultuda sarkaç tekerleğinin çapı $200mm$ olarak seçilmiştir ve kütlesini azaltabilmek için de tekerleğin belli bölgelerinde oyuklar açılmıştır. Şekil 2.10a'da sarkaç tekerleğinin CATIA çizimi ve şekil 2.10b'de ise sarkaç tekerleğinin imalat fotoğrafı verilmiştir.



Şekil 2.10a: Sarkaç tekerleğinin CATIA çizimi.

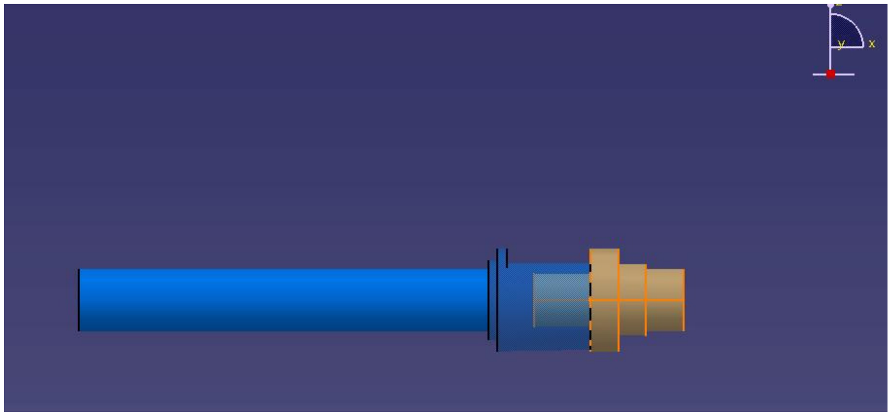


Şekil 2.10b: Sarkaç tekerleğinin imalat fotoğrafı.

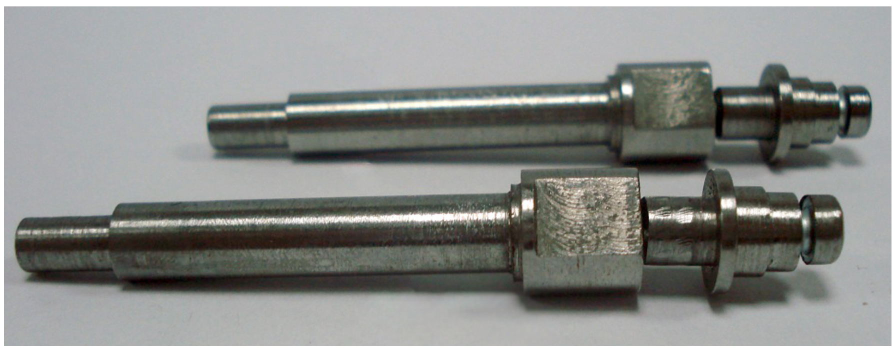
2.6 Tekerlek Mili

Teker milinin asli görevi tekerleği yüksek hızlarda dahi kırılmadan döndürmek ve torku tekerleğe aktarmaktır. Temelde taşıdığı yük sadece sarkaç tekerleğidir. Sarkaç tekerleğinin yüksek hızlarda dönmesi gerekeceği için imalatında mukavemeti yüksek olan çelik kullanılmıştır.

Teker milinde asıl yükün taşınacağı kısmın çapı $7mm$'dir ve bu kalınlık sarkaç tekerleği için yeterlidir. Teker mili temelde üç kısımdan oluşmaktadır. Biri doğrudan tekerleğe monte edilip sarkaç kolundan geçerek kapline bağlanan kısım, diğeri sarkaçları birbirine bağlayacak olan yayın bağlanacağı kısım, üçüncü kısımda ise sadece diğer iki kısmı birbirine monte etmede kullanılacak olan vidadır. Şekil 2.11a'da teker milinin CATIA çizimi, şekil 2.11b'de ise imalat fotoğrafı gösterilmektedir. Şekil 2.11a ve şekil 2.11b'deki farklılık teker milinin kapline monte edileceği kısımdadır. Bu kısım sadece kaplinin mile daha iyi oturtulması için sonradan imalat esnasında yapılmıştır.



Şekil 2.11a: Teker milinin CATIA çizimi.



Şekil 2.11b: Teker millerinin imalat fotoğrafı.

Şekil 2.11a'da mavi kısım sistemi taşıyacak olan ana gövde, turuncumsu renkle gösterilen kısım ise sarkaçları birbirine bağlayacak yay için tasarlanmış kısımdır. Şekil 2.11b'de teker milinin montaja hazır hali gösterilmiştir. Şekildeki vidanın görevi bu iki kısmı birbirine birleştirmek ve yay rulmanını tutmaktır. Şekil 2.12'de ise teker milinin tüm aparatlarını yan yana göstermektedir. Şekil 2.12'de ki halka rulmana sıkı geçme olarak oturtulup yay tutucu görevindedir.

Şekil 2.12: Teker millerinin tüm elemanları.

2.7 Kaplin ve Rulmanlar

Sistemde kullanılan diğer parçalar ise kaplin ve rulmanlardır. Kaplinler sistemde bir hareketi bir elemandan diğer elemana aktarmanın yanısıra, dönen aksamların eksen kaçıklığını gidermek ve eklemleri birbirine bağlamakta kulanılır. Bölüm 2.4'de de bahsedildiği gibi burada kaplinlerin kullanılış amacı motorlar ile teker millerini birbirine bağlayıp dönme hareketini motordan teker millerine aktarmak ve var olan eksen kaçıklıklarını gidermektir.

Rulmanlar ise sistemin rahat bir şekilde dönmesinde kullanılan yardımcı elemanlardır. Yani var olan hareketin en az sürtünme ile aktarılmasını sağlar. Sarkaç sisteminde de rulmalar aynı amaca hizmet etmektedir. Aynı zamanda özellikle teker milinde oluşabilecek dönen parçalardaki titreşimleri azaltmak için de kullanılmıştır. Şekil 2.13'de kaplinlerin fotoğrafı, şekil 2.14'de rulmanların fotoğrafları ve çizelge 2.2'de ise rulmanların teknik bilgileri verilmiştir.

Şekil 2.13: Sistemde kullanılan kaplinler.

Şekil 2.14: Sistemde kullanılan rulmanlar.

Çizelge 2.2: Kullanılan rulmanların özellikleri.

Kullanılacağı yer	d (mm)	D(mm)	B1(mm)	Tipi	Adet
Teker Mili	7	13	4	MR 137 ZZ/2RS	4
Sarkac Mili	15	28	7	6902ZZ/2RS	4
Yay	7	11	3	MR 117 ZZ/2RS	2

Çizelge 2.2'de d iç çap, D dış çap ve $B1$ rulman genişliğidir.

2.8 Montaj

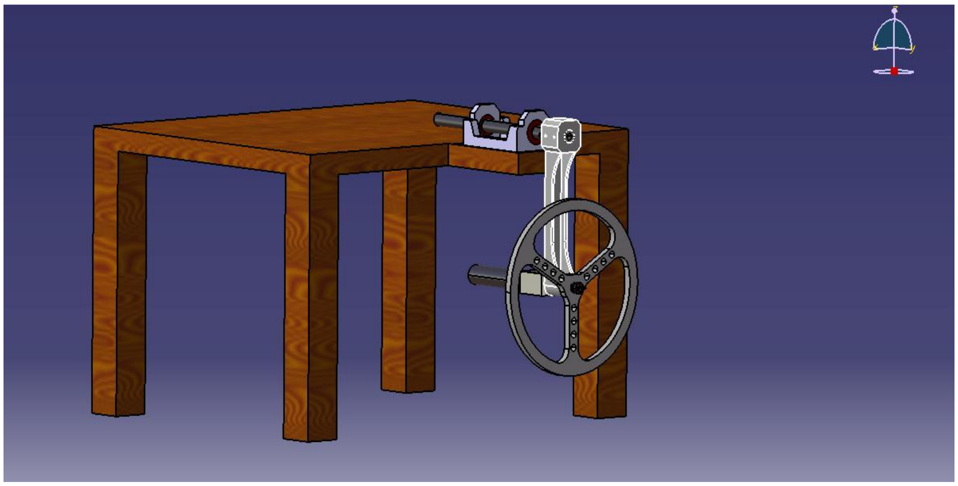
Bu bölümde, önceki bölümlerde detayları verilen parçaların birleştirilmiş halinden bahsedilecektir. Sistemin montajına önce tekerlekten başlanırsa, tekerleğe tekerlek mili yerleştirilir ve daha sonra bu mil sarkaç koluna yerleştirilmiş olan rulmanların (teker mili rulmanları) içine doğru sürülür.

DC motor desteği sarkaç koluna vidalar yardımıyla sabitlenir ve araya kaplin yerleştirilerek, DC motor sarkaç koluna entegre edilir. Bu adım tamamlandığında tekerlek, DC motor ve sarkaç kolu tek bir parça halini alır.

Sarkaç miline önce rulmanlardan (sarkaç mili rulmanları) biri oturtulup segmanlar yardımıyla sarkaç mili üstünde sabitlenir. Daha sonra bu mil sarkaç masa sabitleme mekanizmasının içine sürülür ve rulman yuvasına sıkı geçme olarak yerleştirilir. Boşta kalan rulman da bu esnada rulman yuvasına sıkı geçme olarak yerleştirilir ve segmanlar yardımıyla mile sabitlenir. Böylece milin, sarkaç masa sabitleme sisteminden kuvvetlerin etkisiyle çıkıp gitmesi ya da titreşim yapması engellenmiş olur.

Ayrı ayrı montajı yapılan bu parçalar birleştirildiğinde tek sarkaç sisteminin montajı tamamlanmış olur. Öncelikle sarkaç masa sabitleme mekanizmasının tamamı bir yüzeye sabitlenir. Sarkaç masa sabitleme mekanizmasındaki sarkaç miline de tekerlek ve motor ile birleştirilmiş olan sarkaç kolu vidalar yardımıyla monte edilir ve tek sarkaç sisteminin montajı tamamlanır. Şekil 2.15a'da tek sarkaç sisteminin CATIA çizimi, şekil 2.15b'de imalat fotoğrafı gösterilmiştir.

Şekil 2.16'da tek sarkaç sistemin sürtünmesiz matematik modelinin nominal tork altında anahtarlanarak elde edilen sarkaç konum bilgisi verilmektedir. Matematik modele herhangi bir kontrol yöntemi uygulanmamıştır. Sadece belli bir seviyeden nominal torkla bırakılan sarkacın, belli aralıklarla uygulanan torkun yönü değiştirilmiş ve sarkacın salınımı sağlanmıştır. Başlangıç konumu $\theta = 0{,}9\pi$ ve anahtarlamalar sarkaç kol hızının sıfıra eşit olduğu durumlarda yapılmıştır.

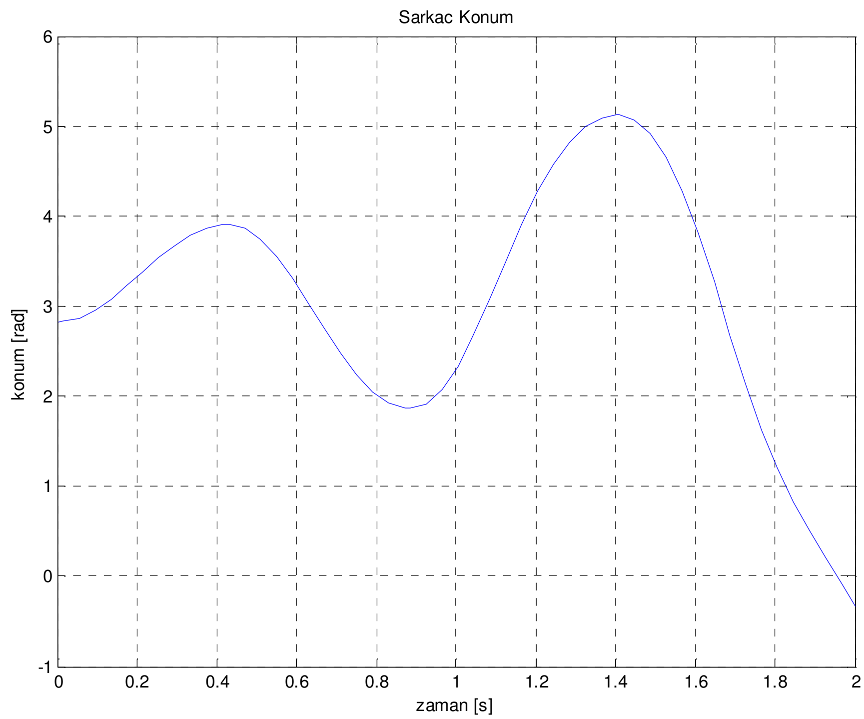


Şekil 2.15a: Tek sarkaç sistemi CATIA çizimi.

Şekil 2.15b: Tek sarkaç sistemi deney düzeneği.

Şekil 2.16, $0{,}9\pi$ konumundan $0{,}19Nm$ nominal tork uygulanarak bırakılan sarkacın ikinci salınımın sonunda üst denge noktasına ulaşabileceğini göstermektedir. Sarkacın salınım miktarı başlangıç seviyesine bağlı olarak değişiklik gösterecektir.

Şekil 2.16'daki konum zaman grafiğindeki 0 noktası sarkacın üst denge noktasını göstermektedir. Sürtünmesiz ideal bir ortamda iki salınım sonunda üst denge noktasına 2s içinde ulaşabilmektedir. Bu grafiğe göre tek sarkaç için yapılan tasarım salınım için ihtiyaç duyulan tüm kıstasları karşılamaktadır. Elde edilen tüm sonuçlar değerlendirildiğinde, tek sarkaç imalatı için yapılan tasarımın uygun olduğunu göstermektedir.



Şekil 2.16: Tek sarkaç sisteminin matematik modelinin cevabı.

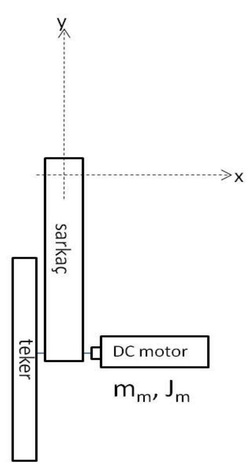
3. TEK SARKAÇ SİSTEMİNİN MODELLENMESİ

Bu bölümde eksik tahrikli tekerlekli sarkacın matematiksel modeli verilecektir. Burada anlatılan modelde sadece tek sarkaç göz önüne alınmış olup sürtünmelerin ihmal edildiği ideal ortam varsayımı ile matematiksel model çıkartılmıştır.

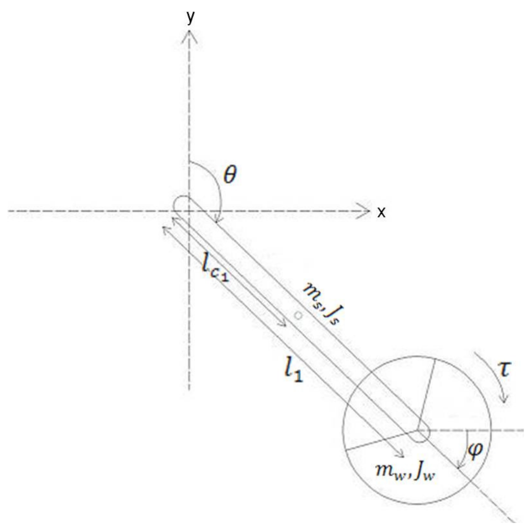
3.1 Modele Giriş

Modellenecek olan sistem üç parçaya ayrılabilir: ilki sarkaç kolu, daha sonra tekerlek ve son olarak da DC motor. Sistemde var olan serbestlik derecesinden daha az sayıda eyleyici sahip olan sistemlere eskik tahrikli sistemler denir. Eksik tahrikli tekerlekli sarkaç (ETTS) düzeneği de iki serbestlik derecesine sahip olup tek bir kontrol sinyaliyle yani DC motorla sürülür. Bu sebeple tekerlekli sarkaç sistemi eksik tahrikli sistemdir [16].

Sarkaç kolu, tekerlek ve DC motordan oluşan sistem de motora güç verilerek tekerleği sürmesi sağlanır. Motor tarafından sürülen tekerlek ivmelenerek sisteme tork aktarır ve sarkacın asma ekseni (sarkaç kolunun döndüğü eksen) etrafında salınıma başlamasını sağlar [1, 20]. Şekil 3.1'de sarkacın yandan görülen ve şekil 3.2'de ise sarkacın önden görülen temsili resimleri verilmiştir.



Şekil 3.1: Tek sarkacın yandan görünümü.



Şekil 3.2: Tek sarkacın önden görünümü.

Tek sarkaç sisteminin matematiksel modellemesini yaparken enerji tabanlı bir yöntem olan Euler-Lagrange (EL) denkleminden yararlanılacaktır. Bundan sonraki bölümlerde verilen bilgiler EL denkleminde kullanılacak olan verilerin detaylarıdır.

3.2 Eylemsizlik Momentleri

Eylemsizlik (atalet) momenti dönen cisimler için üretilmiş bir terimdir. Düz bir doğrultuda hareket eden bir cisim nasıl hareket etmeye karşı bir direnç uyguluyor ve buna kütle deniyorsa, benzer şekilde dönen bir cisim de dönmeye karşı bir direnç gösterir ve buna da eylemsizlik momenti denir [24]. Eylemsizlik momenti kitaplarda "J" veya "I" harfleriyle gösterilebilir. Bu tezde eylemsizlik momenti için J harfi kullanılmıştır.

3.2.1 Sarkaç tekerleğinin eylemsizlik momenti

Eylemsizlik momenti hesaplanırken genellikle cismin kendi kütle merkezi etrafında dönemsi göz önüne alınır ve buna göre hesap yapılır. Eğer cisim kendinden D mesafe kadar uzak bir paralel eksen etrafında dönüyorsa cismin o noktaya göre eylemsizlik momenti eşitlik (3.1) ile verilen paralel eksen teoremi ile hesaplanabilmektedir [24].

$$J' = J_{KM} + MD^2 \qquad \textbf{(3.1)}$$

Yukarıdaki eşitlikte M dönen cismin kütlesini, D cismin dönme eksenine olan uzaklığı ve J_{KM} ise cismin kendi kütle merkezine göre olan eylemsizlik momentidir.

Bu bilgiler doğrultusunda kendi ekseni ve sarkaç kolunun asma ekseni etrafında dönen tekerleğinin eylemsizlik momenti,

$$J_w{}' = J_w + m_w l_1^2 \tag{3.2}$$

olarak elde edilir.

Tüm cisimlerin kütle merkezine göre eylemsizlik momentleri, kütle ve uzunluk bilgileri CATIA'dan sağlanacaktır.

3.2.2 Sarkaç kolunun eylemsizlik momenti

Sarkaç kolu sadece asma ekseni etrafında dönmektedir. Paralel eksen teoremi uygulanırsa sarkaç kolunun eylemsizlik momenti,

$$J_s{}' = J_s + m_s l_{c_1}^2 \tag{3.3}$$

olarak bulunur.

3.2.3 DC motorun eylemsizlik momenti

DC motor sarkaç kolu ile bütünleştirilerek düşünülebileceği gibi ayrı bir parça olarak da değerlendirilebilir, çünkü DC motor ile sarkaç kolu aynı hareketi yapmaktadırlar ve DC motor doğrudan sarkaç koluna sabitlenmiştir. Burada DC motor ayrı bir parça olarak düşünülmüş ve sarkaç kolundan ayrı olarak hesaplanmıştır.

DC motor da sarkaç kolu gibi sadece asma ekseni etrafında dönmektedir. O halde DC motorun eylemsizlik momenti eşitlik (3.4)'deki gibi verilebilir.

$$J_m{}' = J_m + m_m l_1^2 \tag{3.4}$$

Tüm parçaların eylemsizlik momentleri belirlendiğine göre bir sonraki adım olan sarkaç sisteminin enerjisinin belirlenmesine geçilebilir.

3.3 Enerji Hesabı

EL denklemi sistem enerjisine bağlı olduğu için sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerinin de belirlenmesi gerekmektedir. Bundan dolayı bir sonraki ilk iki başlıkta sistemin kinetik ve potansiyel enerjisinin nasıl hesaplandığı anlatılacaktır.

3.3.1 Tek sarkaç sisteminin kinetik enerjisi

Sarkaç dairesel bir hareket yaptığı için kinetik enerji hesabında dönen katı bir cismin kinetik enerji ifadesi kullanılabilir. Dönen katı bir cismin kinetik enerjisi,

$$K = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{3.5}$$

ile verilir. Burada J dönen cismin eylemsizlik momenti, ω ise dönen cismin açısal hızıdır.

Tek sarkaç sisteminin toplam kinetik enerjisi ise,

$$K = K_s + K_m + K_w \tag{3.6}$$

dir. K_s sarkaç kolunun, K_m DC motorun ve K_w ise tekerleğin kinetik enerjisidir. Kinetik enerjilerin hesabı sırası ile yapılacaktır.

Sarkaç kolu sadece kendi açısal hızı ile asma ekseni etrafında dönmektedir. Eşitlik (3.5) ile verilen ifade sarkaç kolu için düzenlendiğinde,

$$K_s = \frac{1}{2}J_s{}'\omega^2 \tag{3.7}$$

elde edilir. Burada sarkaç sadece asma ekseni etrafında döndüğü için $\omega = \dot{\theta}$'dır. Sarkaç kolunun eylemsizlik momenti de eşitlik (3.7)'de yerine yazıldığında,

$$K_s = \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_s l_{c_1}^2\dot{\theta}^2 \tag{3.8}$$

ifadesi elde edilir.

Benzer işlemler DC motor içinde tekrarlanır. Motor da sarkaç kolu gibi $\omega = \dot{\theta}$ açısal hızı ile asma eksen etrafında dönmektedir.

$$K_m = \frac{1}{2}J_m{}'\omega^2 \tag{3.9}$$

Motorun eylemsizlik momenti ve açısal hız eşitlik (3.9)'da yerine yazıldığında,

$$K_m = \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_m l_1^2\dot{\theta}^2 \tag{3.10}$$

bulunur.

Sarkaç tekerleğinin kinetik enerjisi bulunurken açısal hıza dikkat etmek gerekir, çünkü tekerlek hem kendi kütle merkezi hem de asma eksen etrafında dönmektedir. Bu durumda tekerleğin kinetik enerjisi,

$$K_w = \frac{1}{2} J_w{'} \omega_*^2 \tag{3.11}$$

olarak verilebilir. Eşitlik (3.11)'in açık ifadesi olarak,

$$K_w = \frac{1}{2} J_w \left(\dot{\theta} + \dot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} m_w l_1^2 \dot{\theta}^2 \tag{3.12}$$

elde edilir. Dolayısıyla toplam kinetik enerji K,

$$K = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + J_w \dot{\theta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} J_w \dot{\varphi}^2 \tag{3.13}$$

şeklinde bulunur ve A olarak tanımlanan yeni değişken eşitlik (3.14)'de verilmiştir.

$$A = J_s + J_w + J_m + m_s l_{c_1}^2 + m_w l_1^2 + m_m l_1^2 \tag{3.14}$$

3.3.2 Tek sarkaç sisteminin potansiyel enerjisi

U harfi ile belirtilen sistemin potansiyel enerjisi, sarkaç kolu, tekerlek ve DC motorun toplam potansiyel enerjisine eşittir.

$$U = U_s + U_w + U_m \tag{3.15}$$

Toplam potansiyel enerji U,

$$U = \bar{m} g (\cos\theta - 1) \tag{3.16}$$

$\bar{m}$ olarak tanımlanan yeni değişken $\bar{m} = m_s l_{c_1} + (m_m + m_w) l_1$'dir.

3.4 Euler-Lagrange Denkleminin Çözümü

Newton yasalarıyla aynı sonucu veren EL denklemleri bir dinamik sistemin hareket denklemlerini çıkarmakta olukça kullanışlı bir yöntemdir. Yöntem esasında sistemdeki kinetik ve potansiyel enerjiye dayanır.

EL denklemi Lagrange fonksiyonu ve genelleştirilmiş koordinatlara bağladır. N serbestlik dereceli bir sistemde $q_1, q_2, \ldots, q_n$ tane genelleştirilmiş koordinat vardır. Bu genelleştirilmiş koordinatlar uzunluk veya açıdır.

EL denkleminin çözümü öncelikle bir sistemin kinetik ve potansiyel enerjisinin farkı olup "L" harfi ile gösterilen Lagrange fonksiyonunun belirlenmesiyle başlar.

$$L = K - U \tag{3.17}$$

Lagrange fonksiyonu belirlendikten sonra EL denklemi çözülerek sistemin hareket denklemleri bulunur [11]. EL denklemi;

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \tag{3.18}$$

Eşitlik (3.18)'de verilen q_j'ler sistemin genelleştirilmiş koordinatları, Q_j'ler ise j.genelleştirilmiş koordinata etkiyen dış etkilerdir (kuvvet veya tork). Tek sarkaç sisteminin iki serbestlik derecesi, yani iki bağımsız hareket yönü vardır. Bunlar sarkaç kolu ve tekerleğin yaptığı hareketlerdir. Buradan şu sonuca varılabilir, $j = 2$ ve genelleştirilmiş koordinatlar $q_1 = \theta$ ve $q_2 = \varphi$'dir.

Verilen bilgiler ışığında sistemin Lagrange fonksiyonu eşitlik (3.17)'ye (3.13) ve (3.16) yazılarak bulunabilir.

$$L = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + J_w\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}J_w\dot{\varphi}^2 - \overline{m}g(cos\ \theta - 1) \tag{3.19}$$

Dinamik modelin çıkarılabilmesi için, elde edilen veriler eşitlik (3.18)'de yerine yazılır. EL denklemi belirlenen sistemin genelleştirilmiş koordinatlarına göre $q_1 = \theta$ ve $q_2 = \varphi$ için tüverleri alınarak çözülür.

Genelleştirilmiş koordinat $q_1 = \theta$ için EL denklemi çözülürse,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{3.20}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümünden,

$$A\ddot{\theta} + J_w\ddot{\varphi} - \overline{m}g\sin\theta = 0 \tag{3.21}$$

eşitlik (3.21) ile ilk hareket denklemi elde edilmiş olunur. Benzer işlemler $q_2 = \varphi$ genelleştirilmiş koordinatına da uygulandığında,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \tau \tag{3.22}$$

İkinci diferansiyel denklemin çözümünden de,

$$J_w \ddot{\theta} + J_w \ddot{\varphi} = \tau \tag{3.23}$$

ikinci hareket denklemi elde edilir. Sistemin matematik modeli kolaylık olması açısından matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} A & J_w \\ J_w & J_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{m} g \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

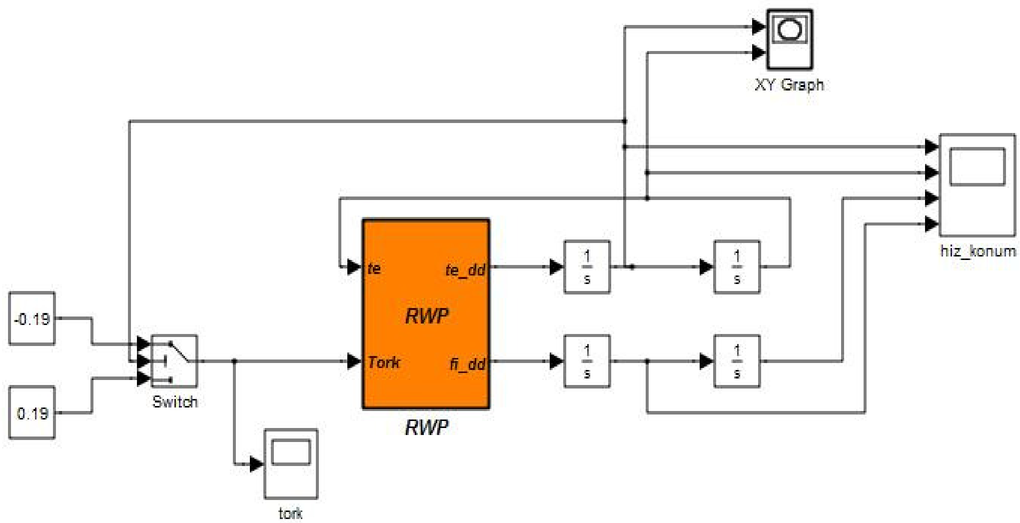
3.5 Matematik Modelin Simülasyonu

Dinamik denklemleri eşitlik (3.21) ve (3.23)'deki gibi verilen sarkaç sisteminin simülasyonu MATLAB-Simulink kullanılarak yapılmıştır. Eşitliklerde kullanılan veriler CATIA'dan alınmış olup çizelge 3.1'de gösterilmiştir. Tüm simülasyonlar çizelge 3.1'de verilen değerler için yapılmıştır.

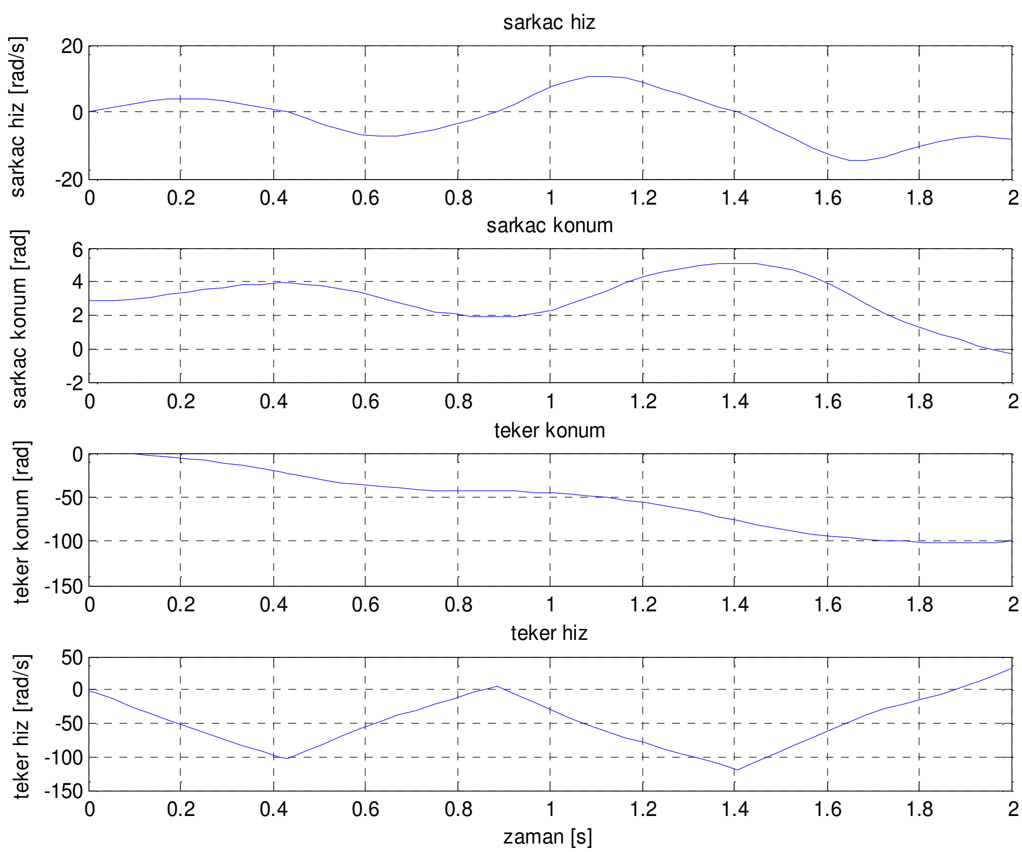
Çizelge 3.1: Sarkaç sistemindeki değişkenlerin değerleri.

$m_s = 0{,}11 kg$	$J_s = 5{,}912.10^{-4} kgm^2$	$l_1 = 0{,}176 m$	$\overline{m} = 0{,}0913$
$m_w = 0{,}139 kg$	$J_w = 7{,}909.10^{-4} kgm^2$	$l_{c_1} = 0{,}08 m$	$(A - J_w) = 0{,}0158$
$m_m = 0{,}33 kg$	$J_m = 1{,}983.10^{-3} kgm^2$	$A = 0{,}0166$	$g = 9{,}81 m/s^2$

Şekil 3.3'de Simulink bloğu verilen dinamik modelin çizelge 3.1'deki veriler kullanılarak yapılan simülasyonunun sonucunda şekil 3.4'deki sarkaç ve tekerleğin hız konum, şekil 3.5'de sarkaca etkiyen tork ve şekil 3.6'da ise sarkacın $\dot{\theta} - \theta$ faz grafikleri elde edilmiştir. Simülasyonda başlangıç koşulları olarak $\theta = 0{,}9\pi$, $\dot{\theta} = 0$, $\varphi = 0$ ve $\dot{\varphi} = 0$ alınmıştır.



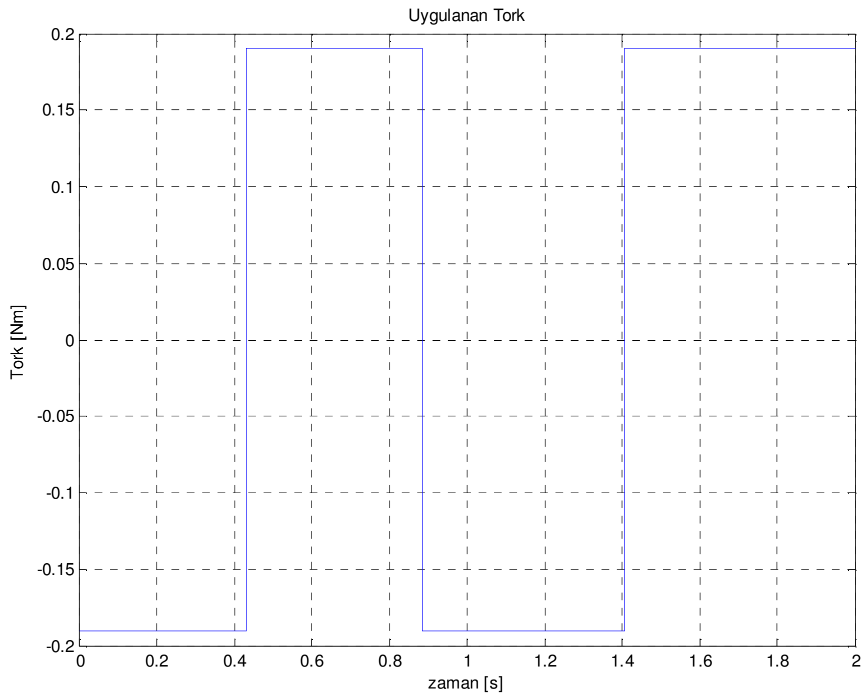
Şekil 3.3: Tek sarkaç sistemin dinamik model Simulink bloğu.



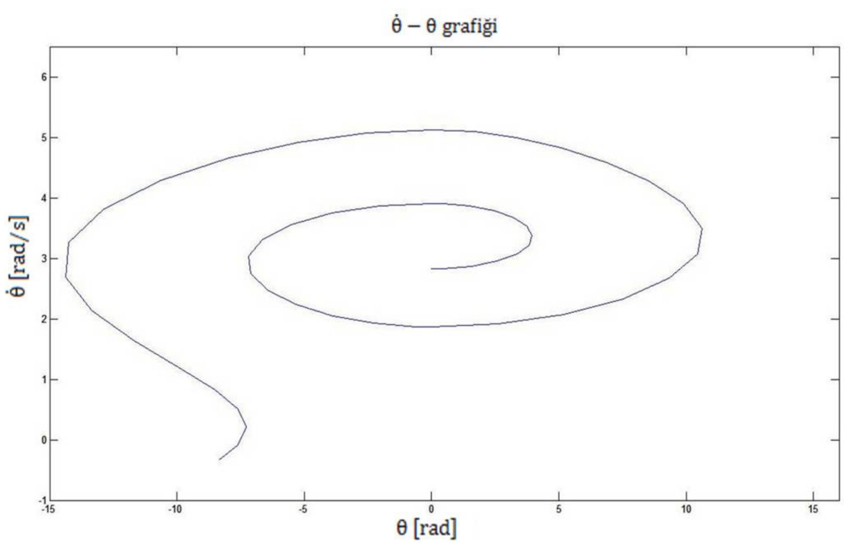
Şekil 3.4: Tek sarkaç sistemin sarkaç ve tekerlek hız konum grafikleri.

Şekil 3.4'deki konum zaman grafikleri sarkacın ne kadar bir sürede kaç salınım yaparak üst denge noktasına çıkacağını ve bu esnada tekerleğin sergilediği konum ve hız davranışlarını gösterilmektedir. Şekil 3.4'deki sarkaç konum-zaman grafiği şekil

2.16’daki grafiğin aynısıdır. Daha anlaşılır olabilmesi açısından bu grafiğin için de diğer durumlarla beraber verilmiştir. Tekerleğin en fazla $120 rad/s$ hızına çıktığı görülmektedir. Grafikten elde edilen hız değeri, özellikleri çizelge 3.2’de gösterilmiş olan DC motorun sağlayabileceği hız değerden çok daha düşüktür.



Şekil 3.5: Tek sarkaç sistemine uygulanan tork grafiği.



Şekil 3.6: Tek sarkaç sistemi $\dot{\theta} - \theta$ grafiği.

Çizelge 3.2: Sarkaç sisteminde kullanılan DC motorun özellikleri.

Ağırlık	$300g$
Nominal Tork	$0{,}19Nm$
Devir sayısı	$17000rpm$

Sistemdeki anahtarlama sarkaç hızının sıfıra eşit olduğu anlarda yapılmış, böylece sarkaca her salınımda biraz daha enerji verilerek daha yüksek bir noktaya çıkması sağlanmıştır. Dördüncü salınımda artık sistem son salınıma girmiş ve son kez alt denge noktası π'den geçerek üst kararsız denge noktasını geçecek şekilde hareket etmektedir. Torkun kare dalga gibi olmasının sebebi her anahtarlamada sinyalin yönünün değiştirilmesindendir. Son salınımda artık sarkacın konumu sıfır olmayacağından, anahtarlamada yapılamamıştır.

3.6 Sürtünmelerin Belirlenmesi

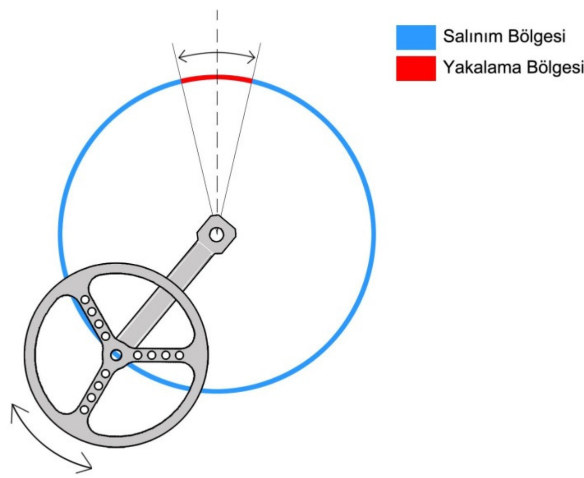
Bu bölüme tezin kapsamı olan ideal ortamın dışına çıkılarak sisteme gerçekte etkiyen sürtünmelerden bahsedilecektir. Gerçek sistemlerde her zaman sürtünmelerin olacağı açıktır. ETTS sisteminde de tekerleğe ve sarkaç koluna etkiyen sürtünmeler vardır. Bu bölüm altında sadece bu sürtünmelerin nasıl sisteme dahil edilebileceği hakkında bir fikir beyan edilecek, ancak sürtünmeler modele dahil edilmeyecektir.

Tekerlekli sarkaca viskos ve Coulomb sürtünme kuvvetlerinin etkiyeceği varsayılarak, tekerleğin ve sarkaç kolunun ayrı ayrı sürtünme katsayıları belirlenir. İlk olarak sarkaç kolundan başlamak gerekirse, sarkaç yatayla 90 derecelik bir açı yapacak şekilde herhangi bir kuvvet veya torkun etkisi altında kalmadan serbest bıraklır. Sarkacın bu esnada oluşturduğu salınım sarkaç kol milindeki enkoder yardımıyla bilgisayarda görüntülenebilir. Daha önce ideal ortam için belirlenen dinamik modele MATLAB-Simulink'deki simülasyon ortamına Coulomb and Viscous bloğu eklenerek simülasyonda sarkacın salınım grafikiği elde edilir. Coulomb and Viscous bloğunun katsayılarını doğru bir şekilde belirleyebilmek için simülasyon sonucunda elde edilen grafik ile enkoderdan gelen grafik karşılaştırılır. Eğer gerçek grafik ile simülasyon sonucu elde edilen grafikler çakışmıyorsa yeni katsayı denemesi yapılır. Bu işlem grafikler birbiri ile örtüşene kadar devam eder.

Gerçeğe en yakın grafiği veren katsayılar belirlendikten sonra blok sisteme dahil edilerek sarkaç kolundaki sürtünme hesaba katılabilir. Diğer sürtünmeye maruz kalacak parça olan tekerleğin viskos ve Coulomb sürtünme kuvvetleri de benzer şekilde hesaplanabilir. Bunun içinde tekerleğe maksimum hız referansı verilir. Nominal hız değerine ulaşıldıktan sonra tekerleğin sürtünmelerden dolayı enerji kaybederek durması beklenir. Bunun için motorun enkoderından alınan grafik doğrultusunda MATLAB-Simulink ortamında Coulomb and Viscous bloğunun katsayıları belirlenir ve sistemin içine dahil edilerek daha gerçekçi bir model elde edilir.

4. KONTROL

Bu bölümde tek sarkaç sisteminin kontrolü için iki ayrı metot verilerek bunların karşılaştırılması yapılacaktır. Metotlar sarkacın tetiklenmesi, salınım ve üst denge noktasına ulaştıktan sonraki kontrol algoritmalarını içerir. Şekil 4.1'de kontrol metotlarının bölgeleri gösterilmektedir.



Şekil 4.1: Tek sarkaç sisteminin kontrol bölgeleri.

Şekil 4.1'de gösterilen kontrol bölgeleri için ayrı ayrı kontrolörler tasarlanacaktır. Mavi ile gösterilen salınım bölgesi enerji tabanlı salınım kontrolü ve anahtarlamalı salınım kontrolü ile sağlanacaktır. Kırmızı ile belirtilmiş olan yakalama bölgesi ise giriş-çıkış geribeslemeli lineerleştirme metodu ile sağlanacaktır.

4.1 Modelin Lineerleştirilmesi

Sistemin sürtünmesiz matematik modeli eşitlik (3.21) ve (3.23)'de verilmiştir. Sistemin lineer olmayan kısmı (3.21)'deki sinüs teriminden kaynaklanmaktadır ve lineer olmayan bir sistemi Taylor seri açılımı kullanarak lineerleştirmek mümkündür.

Modelde lineerleştirilecek olan kısım trigonometrik terimdir. Trigonometrik terim sarkacın üst denge noktasında yani $\theta = 0$ civarında lineerleştirilerek bu bölgedeki kontrolü için kullanılabilir. Ayrıca, lineerleştirilmiş sistemin kontrol edilebilirliğinin tayini için de kullanılabilir. $y = f(x)$ olsun ve bunun $x = x_0$ civarındaki Taylor serisine açılımı eşitlik (4.1)'de verildiği gibi olur.

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x - x_0)_{x=x_0} + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x - x_0)^2|_{x=x_0} \cdots \qquad \textbf{(4.1)}$$

Eğer,

$$(x - x_0) \ll \;\Rightarrow\; (x - x_0\,)^n \approx 0\,, n \neq 0{,}1 \qquad \textbf{(4.2)}$$

Bu ifadeye dayanarak, eşitlik (4.1) eşitlik (4.3)'e indirgenebilir.

$$y = y_0 + K(x - x_0) \qquad \textbf{(4.3)}$$

yukarıdaki ifadedeki tanımlanmış yeni değişkenler,

$$y_0 = f(x_0),\;\; K = \frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}$$

olarak verilir ve sarkaç sistemi için $x_0 = \theta = 0$'dır.

$$f = A\ddot{\theta} + J_w\ddot{\varphi} - \overline{m}g\sin\theta = 0 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Eşitlik (4.3)'den faydalanarak aşağıdaki denklem yazılır.

$$f(\theta) = f(\theta_0) + \frac{df}{d\theta}(\theta - \theta_0)|_{\theta=\theta_0} \qquad \textbf{(4.5)}$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$f \approx A\ddot{\theta} + J_w\ddot{\varphi} - \overline{m}g\theta = 0 \qquad \textbf{(4.6)}$$

elde edilir. Lineerleştirilmiş haliyle matematik model tekrar yazılabilir.

$$\begin{gathered} A\ddot{\theta} + J_w\ddot{\varphi} - \overline{m}g\theta = 0 \\ J_w\ddot{\theta} + J_w\ddot{\varphi} = \tau \end{gathered} \qquad \textbf{(4.7)}$$

Eşitlik (4.7)'nin matris formu eşitlik (4.8) ile verilir.

$$\begin{bmatrix} A & J_w \\ J_w & J_w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\overline{m}g\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.8)}$$

Matris formundan yararlanarak da sistemin durum uzayı modeli yazılır.

4.2 Durum Uzay Modeli

Durum uzay modeli, sistem dinamiğini tanımlayan ve birinci dereceden denklem takımına dayanan bir modeldir. Bu model ile lineer bir sistemi birinci mertebeye düşürüp durumlarını tahmin etmede kullanılır. Durum uzay modeli aşağıdaki formda olduğu gibi verilebilmektedir.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.9}$$

$$y = Cx \tag{4.10}$$

x sistemin durumlarını, y ise sistemin çıkışlarını ve u ise sistemin girişlerini temsil eder. A, B ve C birer matristir, sırasıyla A sistem matrisini, B kontrol matrisini ve C çıkış matrisini ifade eder.

Sarkaç sisteminin durum uzay modelini yazabilmek için öncelikle lineerleştirilmiş modeldeki yüksek mertebeden türevleri yalnız bırakmak gerekir.

$$\ddot{\theta} = -\frac{J_w}{A}\ddot{\varphi} + \frac{\overline{m}g}{A}\theta \tag{4.11}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\tau}{J_w} - \ddot{\theta} \tag{4.12}$$

Eşitlik (4.11) ve (4.12) x durumları kullanılarak eşitlik (4.9)'daki form biçiminde yazılabilir.

$$x_1 = \theta \text{ ve } \dot{x_1} = \dot{\theta}$$

$$x_2 = \varphi \text{ ve } \dot{x_2} = \dot{\varphi}$$

$$x_3 = \dot{\theta} \text{ ve } \dot{x_3} = \ddot{\theta}$$

$$x_4 = \dot{\varphi} \text{ ve } \dot{x_4} = \ddot{\varphi}$$

Durum değişkenleri eşitlik (4.11) ve (4.12)'de yerlerine yazılıp düzenlenerek

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{(A-J_w)}\tau + \frac{\overline{m}g}{(A-J_w)}x_1 \tag{4.13}$$

$$\dot{x_4} = \frac{A}{(A - J_w)J_w}\tau - \frac{\overline{m}g}{(A - J_w)}x_1 \quad \textbf{(4.14)}$$

$\dot{x} = Ax + Bu$ formu elde edilmiş olunur, yani durum uzay modelini elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\overline{m}g}{(A - J_w)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\overline{m}g}{(A - J_w)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{(A - J_w)} \\ \frac{A}{(A - J_w)J_w} \end{bmatrix} \tau$$

Sistemin çıkışları y,

$$y = I_{4x4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Durum uzay modelinden faydalanarak lineerleştirilmiş sistemin kontrol edilip edilemeyeceği belirlenir. Bir sistemin kontrol edilebilir olabilmesi için aşağıdaki koşulu sağlaması gerekmektedir.

$$M = [B{:}\, AB{:}\, A^2B{:} \ldots {:}\, A^{n-1}B] \quad \textbf{(4.15)}$$

n lineer bağımsız vektör sayısıdır. Eğer $\det(M) \neq 0$ ve $rank[M] = n$ ise sisteme kontrol edilebilir denir.

$\det(M) \neq 0$ ve $rank[M] = 4$ olduğu için kontrol edilebilir bir sistemdir.

4.3 Pasivite

Pasiflik ya da dinginlik daha çok enerji tüketen sistemlerin bazı durumlarda kararlı olabileceğini göstermede veya kararlı kontrol sistemi tasarımında kullanılır [20,25].

Teorem 4.1: Lineer olmayan sistemde öyle bir $V(t) \geq 0$ fonksiyonu olsun ki;

$$V(T) - V(0) \leq \int_0^T y(t)^T u(t) dt \quad \textbf{(4.16)}$$

koşulu her u, her $T \geq 0$ ve her $V(0)$ için sağlanırsa, sistem $u(t)$ girişi ve $y(t)$ çıkışı ile pasiftir denir [20,25].

Mevcut sistemin $V(t)$ fonksiyonu toplam enerji olarak verilir ve teorem 4.1 uygulandığında

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + J_w\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}J_w\dot{\varphi}^2 + \overline{m}g(\cos\theta - 1) \qquad \textbf{(4.17)}$$

elde edilir. Enerji ifadesinin türevi alınıp, sistemin dinamik modeli olan eşitlik (3.21) ve (3.23) ile tekrar düzenlendiğinde

$$\dot{E} = \tau\dot{\varphi} \qquad \textbf{(4.18)}$$

ifadesi elde edilir. Eşitlik (4.18)'in 0'dan T'ye kadar integrali alındığında,

$$\int_0^T \dot{E}dt = \int_0^T \tau\dot{\varphi}dt$$

$$E(T) - E(0) = \int_0^T \tau\dot{\varphi}dt$$

çıkarki buda teorem 4.1'e göre sistemin τ girişi ve $\dot{\varphi}$ çıkışı ile sistemin pasif olduğunu gösterir. İlk başlangıç koşullarına göre $\tau = 0$ da $\left(\theta,\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}\right) = (0, 0, 0)$, üst denge noktası (kararsız denge noktası), enerji $E\left(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = 0$ ve alt denge noktası olan (kararlı denge noktası) $\left(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = (\pi, 0, 0)$ da $E\left(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = -2\overline{m}g$'dir.

Eşitlik (4.17) ile verilen enerji φ'ye doğrudan bağlı olmadığından φ herhangi bir değer olabilir ve kontrolör belirlenirken ihmal edilebilir. Bu yüzden kontroldeki amaç $\theta, \dot{\theta}$ ve $\dot{\varphi}$'yı kontrol etmek olmalıdır.

4.4 Giriş-Çıkış Geribeslemeli Lineerleştirme

Geribeslemeli lineerleştirme, doğrusal olmayan bir sistemi geribesleme yardımıyla lineerleştirmeye yarayan bir yöntemdir. Metotta giriş ile çıkış arasında doğrudan bir ilişki aranır. Giriş, y, olarak öyle bir fonksiyon seçilmelidirki, bunun zamana göre türevlerinde çıkış fonksiyonu u elde edilebilinmelidir. Böylece giriş ve çıkış arasında bir ilişki kurulmuş olunur. Eğer y düzgün seçilmezse y ile u arasında bir ilişki sağlanamayabilir.

Tanım 4.1: Aşağıdaki sistem göz önüne alındığında,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = h(x) \tag{4.19}$$

Burada x durumlar, u kontrol girişi ve y ise seçilen çıkış fonksiyonudur. y'nin zamana göre türevi alındığında [26],

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\dot{x} \tag{4.20}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial h(x)}{\partial x}[f(x) + g(x)u] \tag{4.21}$$

ve

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x)u \tag{4.22}$$

belirtilen ifadelerden de,

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x}f(x) = L_f h(x) \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x}g(x) = L_g h(x) \tag{4.24}$$

elde edilir. Eşitlik (4.23) ile verilen ifadeye h'nin f'ye göre Lie türevi, eşitlik (4.24) ile verilen ifadeye ise h'nin g'ye göre Lie türevi denir. Lie türevi ile ilgili detaylı bilgi için [26] incelenebilir.

Bu yöntemde aranan y ile u arasındaki ilişki olduğuna göre buradan iki durum ortaya çıkar. Birincisi $L_g h(x) = 0$ ve ikincisi $L_g h(x) \neq 0$'dir [26].

Durum 1: Eğer $L_g h(x) = 0$ ise $\dot{y} = L_f h(x)$ çıkar ve bu ifade u'dan bağımsızdır. Bu durumda y'nin ikinci türevi incelenir.

$$y^{(2)} = \frac{\partial\left(L_f h(x)\right)}{\partial x}\dot{x} = L_f \frac{\partial h(x)}{\partial x}\dot{x} \tag{4.25}$$

Eşitlik (4.25)'de gösterim yerine yazıldığında,

$$y^{(2)} = {L_f}^2 h(x) + L_g L_f h(x) u \quad \textbf{(4.26)}$$

çıkar. Eğer $L_g L_f h(x) = 0$ ise $y^{(2)} = {L_f}^2 h(x)$ kalır ve u ile ilişkiyi sağlamak için tekrar bir türev alınır. Bu işlem u ile ilişki sağlanana kadar devam eder.

$$y^{(3)} = {L_f}^3 h(x) + L_g {L_f}^2 h(x) u \quad \textbf{(4.27)}$$

Eğer hala $L_g {L_f}^2 h(x) u = 0$ ise tekrar bir türev alınır. Bunun r kez tekrarlandığı kabul edilirse, ifadenin genelleştirilmiş hali elde edilir.

$$y^{(r)} = {L_f}^r h(x) + L_g {L_f}^{r-1} h(x) u \quad \textbf{(4.28)}$$

Yukarıda tanımlanmış olan r'ye sistemin göreli derecesi denir. r ile belirtilen türev alma işlemi n ile belirtilen durumların sayısına eşit olana kadar devam edebilir. Eğer türev sayısı bunu aşarsa u ile ilişki seçilen y için bulunamamış olur. Yani, $r \leq n$ koşulu aranmalıdır.

Eşitlik (4.28) ile r. türevde y ile u arasındaki ilişki açık bir şekilde kurulmuş olunur ve artık $L_g {L_f}^{r-1} h(x) \neq 0$'dır.

$$y^{(r)} = v \quad \textbf{(4.29)}$$

Bu sonuçtan yararlanarak u kontrol girişi belirlenebilir.

$$y^{(r)} = {L_f}^r h(x) + L_g {L_f}^{r-1} h(x) u = v \quad \textbf{(4.30)}$$

u yalnız bırakılır.

$$u = \frac{1}{L_g {L_f}^{r-1} h(x)} \left[-{L_f}^r h + v \right] \quad \textbf{(4.31)}$$

Durum 2: Eğer $L_g h(x) \neq 0$ ise y ile u arası ilişki ilk türevde kurulmuş olunur.

$$\dot{y} = L_f h(x) + L_g h(x) u = v \quad \textbf{(4.32)}$$

Bu durum $r = 1$ koşuluna tekabül eder ve u kontrol girişi

$$u = \frac{1}{L_g h(x)}\left[-L_f h(x) + v\right] \quad \textbf{(4.33)}$$

olarak elde edilir. Eğer kontrol girişi u eşitlik (4.31) ve (4.32)'deki gibi seçilirse sistem lineerleşir.

Geribeslemeli lineerleştirme yöntemi ile sarkacın üst denge noktası olan $\theta = 0$ civarında uygun katsayılar belirlendikten sonra kontrolü yapılabilir. Bu kısım her iki kontrol algoritmasında üst denge noktası kontrolü için kullanılacaktır.

Giriş-çıkış geribeslemeli lineerleştirme yönteminin sarkaç modeline uygulamasında y şu şekilde seçildiği takdirde tüm koşulları sağlayacaktır [2, 20].

$$y = h(x) = A\theta + J_w\varphi \quad \textbf{(4.34)}$$

y ile u arasına ilişki kurabilmek için $r \leq n$ olacak şekilde, y'nin zamana göre türevleri alınır.

$$\dot{y} = A\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi} \quad \textbf{(4.35)}$$

y'nin ilk türevinde giriş fonksiyonu τ ile bir ilişki yoktur. Bu durumda y'nin bir türevi daha alınır. Türev alındıktan sonra sonuç dinamik modeller (3.21) ve (3.23) ile düzenlendiğinde

$$\ddot{y} = \overline{m}g \sin\theta \quad \textbf{(4.36)}$$

elde edilen ifade hala τ'ya bağlı değildir. Tekrar zamana göre üçüncü türev alınır.

$$y^{(3)} = \overline{m}g \cos\theta\, \dot{\theta} \quad \textbf{(4.37)}$$

Kontrol girişi ilişkisi hala sağlanamadığı için bir kez daha türev alınır ve tekrar dinamik model kullanılarak düzenlendiğinde eşitlik (4.38) elde edilir.

$$y^{(4)} = \overline{m}g \sin\theta \left[\frac{\overline{m}g\cos\theta}{(A - J_w)} - \dot{\theta}^2\right] - \frac{\overline{m}g\cos\theta}{(A - J_w)}\tau \quad \textbf{(4.38)}$$

y ile u arasındaki ilişkiye dördüncü türevde, $r = 4$, ulaşılmış olunur ve eşitlik (4.38) için durum 2 geçerlidir. Bulunan sonuca dayanarak kontrol girişi τ elde edilir.

$$\tau = \frac{(A - J_w)}{\overline{m}g\cos\theta}\left[\overline{m}g\sin\theta\left(\frac{\overline{m}g\cos\theta}{(A - J_w)} - \dot{\theta}^2\right) - \nu\right] \quad \textbf{(4.39)}$$

Dikkat edilmesi gereken husus $\overline{m}g\cos\theta \neq 0$ olmalıdır. Bu terimi sıfır yapan değer $\cos\theta$'dan gelir. Bu yüzden terimin sıfırdan farklı olabilmesi için $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ olması gerekir. Bunun anlamı tekerlekli sarkaç sisteminin $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ aralığında geribeslemeli lineerleştirme metodu ile lineerleştirilebileceğidir.

Sistemin geribesleme ile lineerleştirilmesi istendiği için yeni kontrol değişkeni ν'nün aşağıdaki gibi seçilmesi uygundur [20].

$$\nu = y^{(4)} = -k_0 y - k_1 \dot{y} - k_2 \ddot{y} - k_3 y^{(3)} \quad \textbf{(4.40)}$$

ν'nün değeri belirlendikten sonra kontrol girişi eşitlik (4.39)'da yerine yazıldığında sistemi $\theta = 0$ civarındaki ufak değişikliklerde lineerleştirir ve kontrolünü sağlar. Değişim yaklaşık olarak 9 dereceye tekabül eder. ν değişkeninin katsayıları belirlenirken Routh-Hurwitz kararlılık ölçütü kullanılabilir.

Eşitlik (4.40)'da Routh-Hurwizt kararlılık ölçütünün kullanılabilmesi için eşitliğe Laplace dönüşümü uygulanır.

$$s^{(4)} + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = 0 \quad \textbf{(4.41)}$$

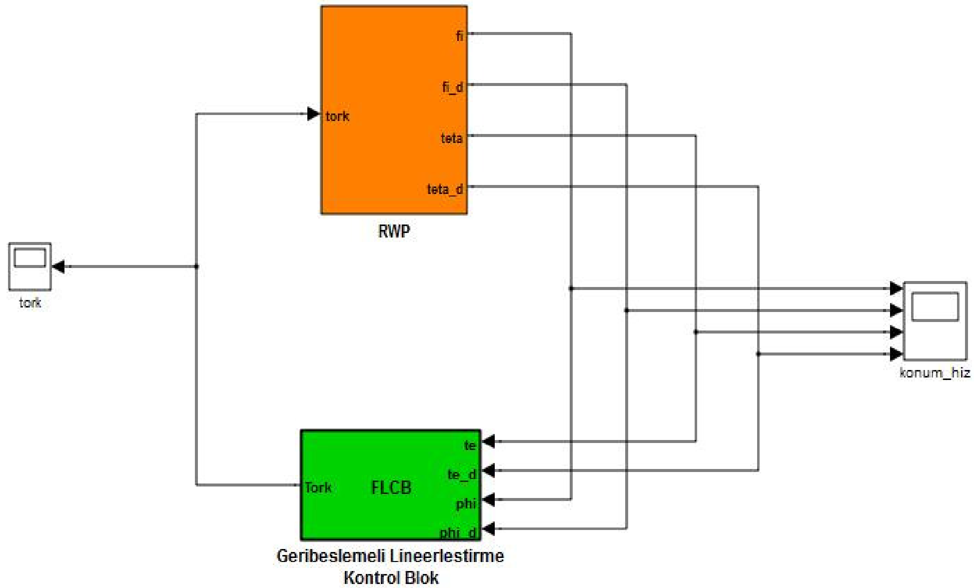
Katsayı olarak çizelge 4.1'deki değerler seçilebilir.

Çizelge 4.1: Geribeslemeli lineerleştirme kontrolör katsayıları.

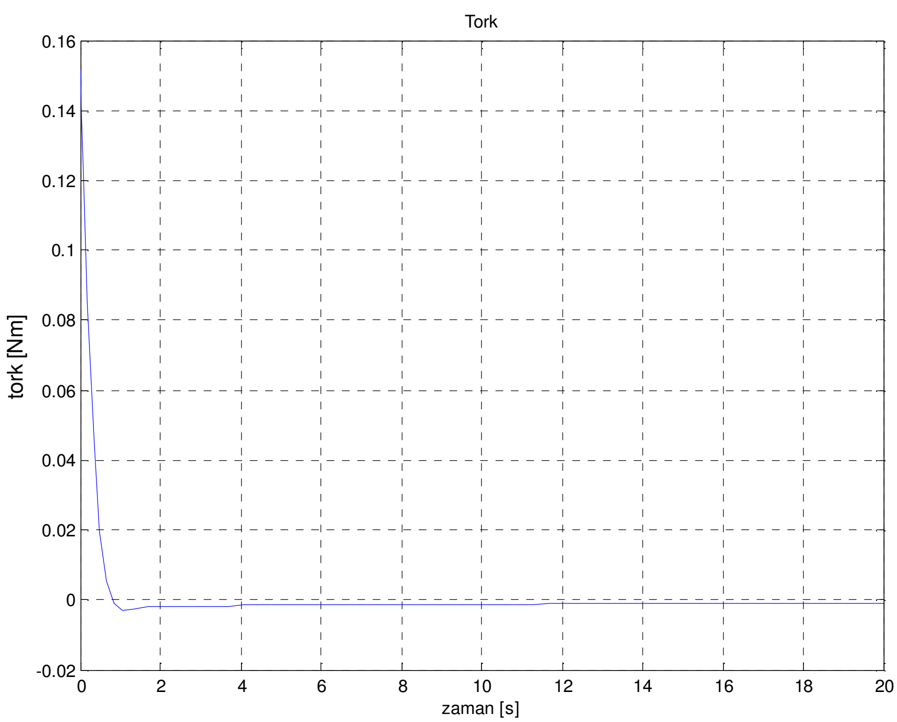
$\mathbf{k_0}$	$\mathbf{k_1}$	$\mathbf{k_2}$	$\mathbf{k_3}$
0.01	1	22	8

Çizelge 4.1'de katsayıları verilen eşitlik (4.40)'ın eşitlik (4.39)'da yerine yazılmasıyla, sistemin sıfır civarında kontrolünü sağlanmış olunur. Şekil 4.2'de sistemin MATLAB-Simulink modeli gösterilmektedir.

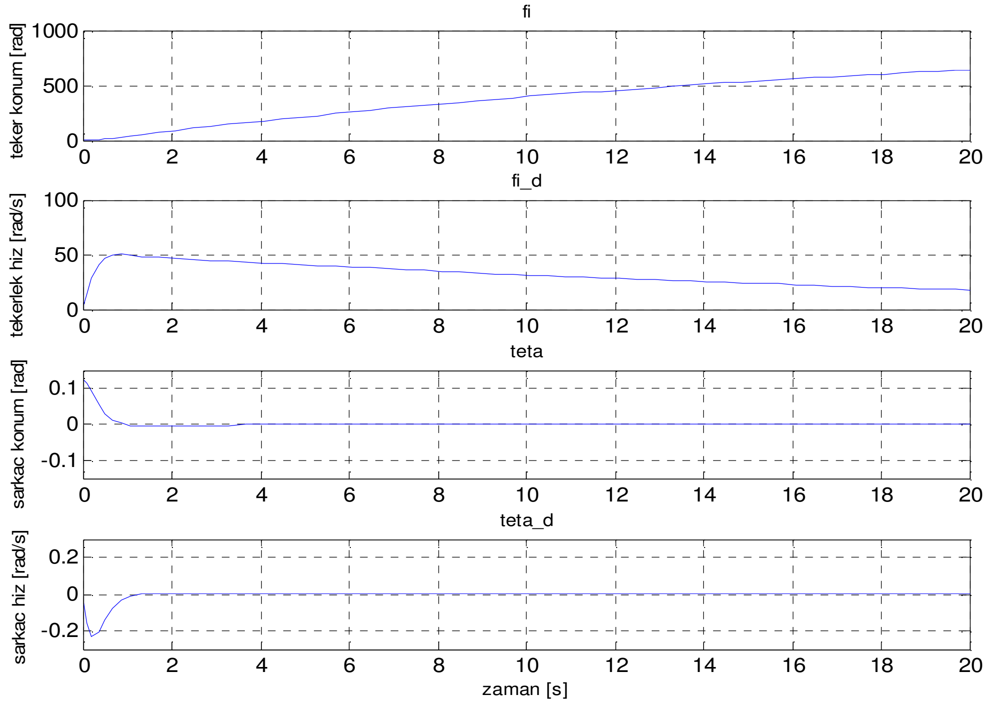
Simülasyonu doğru yapabilmek için başlangıç koşulu olarak makul değerler vermek gerekir. Sarkacın üst denge noktasına çok yaklaştığında, yakalama bölgesi içinde olduğunda, geribeslemeli kontrol bloğu devreye girecek ve sarkacın üst denge noktasında asılı kalmasını sağlayacaktır. Şekil 4.2'deki Simulink bloğu için başlangıç koşulları $\dot{\theta} = 0$, $\theta = 0.122$, $\dot{\varphi} = 0$ ve $\varphi = 0$ seçilerek oluşturulan simülasyonun sonuçları şekil 4.3 ve şekil 4.4'de verilmiştir.



Şekil 4.2: Geribeslemeli kontrol blok şeması.



Şekil 4.3: Geribeslemeli tork kontrol sinyali.



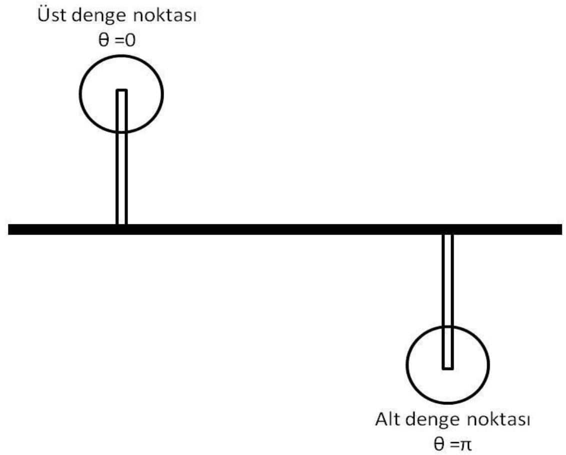
Şekil 4.4: Sarkaç kolu ve tekerlek konum hız bilgisi.

Grafiklerden anlaşıldığı gibi sarkaç kolu $\theta = 0$'a çok yakın olduğu zaman $1s$ gibi bir sürede sarkacı 0 konumuna yerleştirebiliyor. $\theta = 0$ ve $\dot{\theta} = 0$ sistemin üst denge noktasında sabitlendiğini gösterir. Şekil 4.4'te görüldüğü gibi sarkacın bu koşulu sağlayabilmesi için tekerlek hızı yaklaşık olarak $50\ rad/s$'ye kadar çıkmaktadır ve sonra zamanla o da sıfıra doğru azalma eğilimi göstermektedir. Şekil 4.3'te DC motor sarkaca bir anlık yüksek bir tork uygulayıp, kısa bir süre sonra uyguladığı tork sıfır değerine doğru azalmaktadır.

Sarkacın $\theta = 0$ civarında, yaklaşık olarak 8 ile 9 derecelik açı bölgesi içinde, kullanılacak olan geribeslemeli lineerleştirme kontrolör katsayıları k değerlerinin çizelge 4.1'de olduğu gibi seçilmesi halinde hedeflenen kontrol koşullarını sağladığı görülmektedir. Bu kontrolör ile sarkaç üst denge noktasında kontrol edilebilir.

4.5 Enerji Tabanlı Salınım Kontrolü

Salınım kontrolü sarkacın alt denge noktasından üst denge noktasına ulaşıncaya kadar yapılası gereken kontroldür. Bu kısım sarkacın üst denge noktasında durağan bir şekilde kalmasını sağlamaz, sadece üst denge noktasına herhangi bir başlangıç noktasından salınımlar yaptırarak ulaşmasını sağlar [2]. Şekil 4.5'de tek sarkaç sistemin denge noktaları gösterilmiştir.



Şekil 4.5: Tek sarkaç sisteminin denge noktaları.

4.5.1 Lyapunov fonksiyonu

Enerjiye dayalı kontrol metodu lineer olmayan ve eksik tahrikli sistemlerde çok kullanışlı bir yöntemdir. Sistemin toplam enerjisine dayanan bu metotta Lyapunov fonksiyonundan yararlanılır. Bu tip sistemlerde Lyapunov fonksiyonu toplam enerjiye bağlı olarak tasarlanır. Bu tasarım yapılırken sarkacın sadece üst denge noktasında sıfır değerine ulaşmasına dikkat edilmelidir, aksi takdir de sarkacın üst denge noktasında kontrol edilememe durumu oluşabilir [7].

Teorem 4.2 (Lyapunov Teoremi): Lyapunov teoremi dinamik sistemlerin kararlılık analizinde kullanılır. Teorem otonom bir sistemin denge noktasına uygulanır.

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.42}$$

Eşitlik (4.42) ile verilen bir sistemin $x = x_e = 0$ denge noktasındaki kararlılığı sistemin diferansiyel denklemleri çözülmeden bu teorem yardımıyla bulunabilir. Burada $f: D \rightarrow R^n$ olan bir fonksiyon ve $D \subset R^n$.

Tanım 4.2 (yarı pozitif tanımlı fonksiyon): Yarı pozitif tanımlı fonksiyon Lyapunov fonksiyonunun temellerini oluşturur. $V: D \rightarrow R$ sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $x = 0$ da

i) $V(0) = 0,\ 0 \in D$
ii) $V(x) \geq 0,\ x \in D\backslash\{0\}$

şeklinde tanımlı ise V fonksiyonuna yari pozitif tanımlı fonksiyon denir. Eğer fonksiyon (i) ve (ii)'de verilen koşulları $-V(x)$ için sağlıyorsa, bu fonksiyona negatif fonksiyon denir. Bu tanım yapıldıktan sonra da Lyapunov fonksiyonun tanımına geçilebilir.

Tanım 4.3 (Lyapunov fonksiyonu): Eğer tanımlı V fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa,

i) $V(0) = 0,\, 0 \in D$

ii) $V(x) \geq 0,\, \forall x \in D \backslash \{0\}$

iii) $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} \leq 0,\ \forall x \in D \backslash \{0\}$

$V(x)$ fonksiyonuna eşitlik (4.42)'nin Lyapunov fonksiyonudur denir.

Teorem 4.2 (Lyapunov Kararlılık Teoremi):

Durum 1: Eşitlik (4.42) için $x = 0$ denge noktası, $f: D \to R^n$ ve $V: D \to R$ sürekli türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer V aşağıdaki koşulları sağlıyorsa sistem $x = 0$ için kararlıdır denir.

i) $V(0) = 0$

ii) $V(x) > 0\ ,\ \forall x \in D \backslash \{0\}$

iii) $\dot{V}(x) \leq 0\ ,\ \forall x \in D \backslash \{0\}$

Durum 2: Eşitlik (4.42) için $x = 0$ denge noktası, $f: D \to R^n$ ve $V: D \to R$ sürekli türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer V aşağıdaki koşulları sağlıyorsa sistem $x = 0$ için asimptotik kararlıdır denir.

i) $V(0) = 0$

ii) $V(x) > 0\ ,\ \forall x \in D \backslash \{0\}$

iii) $\dot{V}(x) < 0\ ,\ \forall x \in D \backslash \{0\}$

Bu tanımlamaları yaptıktan sonra metodun tek sarkaç sistemini için uygulamasına geçilebilir [20, 26].

Lyapunov fonksiyonu eşitlik (4.43)'deki gibi tanımlandığını varsayalım [20].

$$V = \frac{1}{2}k_E E^2 + \frac{1}{2}k_v\left(J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi}\right)^2 \qquad \textbf{(4.43)}$$

ifade de verilen k_E ve k_v pozitif katsayılardır. V fonksiyonunun zamana göre türevi alınıp eşitlik (3.23) ile düzenlendiğinde

$$\dot{V} = k_E E\dot{E} + k_v\big(J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi}\big)\tau \quad \textbf{(4.44)}$$

ve enerjinin zamana göre türevi eşitlik (4.18) eşitlik (4.44)'de yerine yazılınca

$$\dot{V} = \Big(k_E E\dot{\varphi} + k_v\big(J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi}\big)\Big)\tau \quad \textbf{(4.45)}$$

elde edilir. Lyapunov fonksiyonunu tüm koşulları sağlayacak şekilde tasarlamak gerekir. Bu yüzden τ kontrol fonksiyonu eşitlik (4.46)'daki gibi seçilebilir.

$$\tau = -k_d\Big(k_E E\dot{\varphi} + k_v\big(J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi}\big)\Big) \quad \textbf{(4.46)}$$

Eşitlikteki k_d pozitif katsayıdır. Eşitlik (4.46) eşitlik (4.45)'de yerine yazıldığında,

$$\dot{V} = -\frac{1}{k_d}\tau^2 \quad \textbf{(4.47)}$$

Eşitlik (4.47)'de k_d ve τ^2 ifadeleri pozitif, ancak $\dot{V}$ fonksiyonu negatiftir ve eğer $\tau = 0$ olursa $\dot{V} = 0$ olacaktır. Yani,

$$\dot{V} \leq 0 \quad \textbf{(4.48)}$$

Fonksiyon özeliklerinden dolayı $\dot{V} \leq 0$ ise V fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Bu özellikten dolayı da,

$$V \leq V(0) \quad \textbf{(4.49)}$$

olur. Son ifadenin anlamı V'nin her zaman ilk başlangıç durumundan küçük olacağıdır. V fonksiyonu böylelikle $V(0)$ ile sınırlandırılmış olunur. Eğer V sınırlı ise, $E, \dot{\theta}$ ve $\dot{\varphi}$'da sınırlandırılır.

Bulunan Lyapunov fonksiyonu V durum 2'ye göre kararlı gözükmektedir, ancak bazı durumlarda V kararlı gibi görünsede aslında asimptotik kararlı olabilir. Bunu tespit etmek için LaSalle'nin değişmezlik ilkesinden yararlanılır.

Teorem 4.3 (LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi): LaSalle değişmezlik ilkesi Lyapunov teoreminin genişletilmiş halidir. Başka bir deyişle Lyapunov teoremindeki eksikliği giderir.

Eğer Lyapunov fonksiyonun zamana göre türevi sıfırdan küçük veya eşitse sistemin denge noktasında kararlı olduğu durum 2'de belirtilmişti. Aslında aranan sistemin asimptotik kararlı olması durumudur, yani $\dot{V}(x) < 0$ durumudur. Asimptotik kararlılık serbest bırakılan sarkacın alt denge noktasında sıfır olmasıdır. Eğer $\dot{V} = 0$ sadece orijinde olursa sistem yinede asimptotik kararlıdır denir, ancak orijin dışında ise sistem kararlıdır denir. LaSalle değişmezlik ilkesi bu yüzden sadece $\dot{V} = 0$'ı inceler ve eğer $\dot{V}$ sadece değişkenlerinin orijinde olduğu durumda sıfır olduğu ispatlarsa, sistemin asimptotik kararlı olduğu söylenir.

Bu anlatılanların matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir [20].

Eşitlik (4.42)'de verilen otonom sistem için bir kompakt Ω kümesi (kapalı ve sınırlı) tanımlansın ve (4.42)'nin tüm çözümleri bu küme içerisinde kalsın.

Ω kümesi içinde,

$V\colon \Omega \rightarrow R$ sürekli türevlernebilen bir fonksiyon ve $\dot{V}(x) \leq 0$ olsun.
Γ kümesi de Ω kümesi içinde şöyle tanımlansın;

$\dot{V}(x) = 0$'daki tüm noktaları kapsayan küme

ve M kümesi de Γ kümesinde tanımlanmış en büyük değişmeyen küme olarak verilir. Değişmeyen küme içerisinde sistemin denge noktaları bulunmaktadır. Sonuç olarak Ω'da başlayan her çözüm $t \rightarrow \infty$ iken M'ye yaklaşır.

Tanımlar $\dot{x} = f(x)$ formundaki bir sisteme uygulanacağı için yeni bir durum değişkeni tanımlaması yapılır.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.50)}$$

Yeni durum değişkenleri dinamik modele, Lyapunov fonksiyonuna ve toplam enerji ifadelerinde yerine yazılarak $\dot{z} = F(z)$ formu elde edilir. Buradan da eşitsizlik (4.49) $V(z) \leq V(0)$ olarak yeniden yazılabilir.

Bu durumda V Lyapunov fonksiyonu Ω kompakt kümesi içinde tanımlı bir fonksiyon olur ve $\dot{z} = F(z)$'nin tüm çözümleri de yine bu kümenin içerisinde kalır. Ω'nın içinde de $\dot{V}(z) = 0$'daki tüm noktaları kapsayan bir Γ kümesi tanımlansın. M ise Γ

içindeki en büyük değişmeyen küme olsun (LaSelle değişmezlik ilkesi). LaSelle teoremine göre Ω'da başlayan tüm çözümler $t \to \infty$ iken M'ye yaklaşır.

Γ kümesi için de $\dot{V} = 0$'dır. Burada iki durum söz konusudur. Bunlardan ilki, eşitlik (4.47) kullanılarak $\tau = 0$ olduğudur. İkincisi ise, $\dot{V} = 0$'ın aynı zamanda sarkacın alt denge noktasına tekabül etmesidir. Eğer eşitlik (4.46) incelenirse bu durum görülebilir. $\tau = 0$ olduğu anda $\dot{\theta} = 0$ ve $\dot{\varphi} = 0$ değerlerinde olmalıdır. İlk anda bunun olabileceği yer alt denge noktasıdır. Bu noktadaki sarkacın toplam enerjisi eşitlik (4.17)'den, $E\left(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi}\right) = E(\pi, 0, 0) = -2\overline{m}g$ olarak hesaplanır ve bu noktada sarkaç hareketsiz kalabilir. Bu durumu engellemek için sistem başlangıç koşuluyla sınırlandırılabilir.

Sistemin başlangıç anındaki toplam enerjisine $E_0 = -2\overline{m}g$'dir. Başlangıç anında sistemin hareketsiz kalma durumu varsa, sistem bu noktaya getirilmeyerek bu tekillik aşılabilir. Bunun için sistemi bu başlangıç ile sınırlamak yeterli olacaktır.

$$|E| < c = 2\overline{m}g \qquad \textbf{(4.51)}$$

Eşitsizlik (4.51) sistemin başlangıç enerjisini sınırlandırır ve ilk durumda bu tamamen sistemin potansiyel enerjisine denk düşer. Sistemin potansiyel enerjisi $-2\overline{m}g$ ile 0 arasındadır. Potansiyel enerji sıfıra doğru artar. Sistemin toplam enerjisi kinetik ve potansiyel enerjiye eşit olduğundan, başlangıçtaki enerji eşitlik (4.52)'deki gibi ifade edilebilir.

$$E_0 = K_0 + U_0 \qquad \textbf{(4.52)}$$

Buradan da başlangıç kinetik enerjisi hesaplanır.

$$K_0 < c - U_0 \qquad \textbf{(4.53)}$$

Bu ifadeye dayanarak,

$$K_0 < c + 2\overline{m}g \qquad \textbf{(4.54)}$$

bulunur. Bulunan bu ifade başlangıç kinetik enerjisinin sınırlandırılması gerektiğini söyler ve $K_0 \in [0, c + 2\overline{m}g)$.

Sarkaç $t = 0$ anında başlangıç kinetik enerji $K_0 = 0$ ise $\theta_0 = \pi$ olur, ancak başlangıç anında $\theta_0 \in (-\pi, \pi)$ olmalıdır. Dolayısıyla $\theta_0 = \pi$ başlangıç konumu olamaz. Eğer sarkaç $t = 0$ anında başlangıç kinetik enerji $K_0 \neq 0$, yani $K_0 \in (0, c + 2\overline{m}g)$ ise θ_0'ın değeri için herhangi bir kısıt olmayacaktır.

Enerjide yapılan bu kısıt sarkacın kinetik enerjiye sahip olmadan $\theta_0 = \pi$'de olmamasını sağlar. $\theta_0 = \pi$ durumu kullanılan kısıt sayesinde tekillik oluşturmaktan çıkar.

Enerjideki kısıt başlangıç durumundaki Lyapunov fonksiyonuna uygulandığında

$$V(0) = \frac{1}{2} k_E E^2 \tag{4.55}$$

elde edilir. Elde edilen fonksiyondan

$$V(0) < 2 k_E \overline{m}^2 g^2 \tag{4.56}$$

koşulu elde edilir. Eşitlik (4.43) ile eşitsizlik (4.49) ve (4.56) karşılaştırıldığında toplam enerjinin hiçbir zaman $-2\overline{m}g$ değerine ulaşamayacağı görülür. Bu enerji değeri sarkacın alt denge noktasını gösterir. Ayrıca, eşitsizlik (4.56) ile $|\dot{\theta}|$ ve $|\dot{\varphi}|$ üst sınırlarını belirler.

M değişmez kümesi içinde $\tau = 0$'dır ve eşitlik (4.18)'den faydalanılarak enerjinin sabit olduğu görülür. Eşitlik (4.46) ve (4.47) kullanılarak da V fonksiyonunun sabit bir çıkacağı bulunur. Eşitlik (4.43)'teki k_E, k_v ve E sabit olduğundan kalan terim de sabit olur. Bu kalan sabit K olarak isimlendirilebilir ve

$$K = J_w \dot{\theta} + J_w \dot{\varphi} \tag{4.57}$$

kinematik kısıt denklemi elde edilir. Eşitlik (4.46)'ya eşitlik (4.57) yazıldığında

$$\tau = -k_d (k_E E \dot{\varphi} + k_v K) \tag{4.58}$$

elde edilir ve $\tau = 0$ olduğu için,

$$E\dot{\varphi} = -\frac{k_v}{k_E} K \tag{4.59}$$

ifadesi yazılır. Eşitlik (4.59) için iki durum göz önüne alınabilir. E enerjisinin sıfıra eşit olduğu durum ve enerjinin sıfırdan farklı herhangi bir sabite eşit olduğu durumdur.

Durum 1: $E = 0$ olduğunda, k_v ve k_E pozitif sabitler olduğu için $K = 0$ olur. Eşitlik (4.57)'den yararlanarak

$$J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi} = 0 \tag{4.60}$$

Eşitlik (4.60)'ın sonucu olarak

$$\dot{\theta} = -\dot{\varphi} \tag{4.61}$$

bulunur. Eşitlik (4.61) toplam enerji formülü olan eşitlik (4.17)'de yerine yazılır.

$$E = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + J_w\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}J_w\left(-\dot{\theta}\right)^2 + \overline{m}g(\cos\theta - 1) \tag{4.62}$$

Son ifade düzenlenerek eşitlik (4.63) elde edilir.

$$E = \frac{1}{2}(A - J_w)\dot{\theta}^2 + \overline{m}g(\cos\theta - 1) \tag{4.63}$$

Eşitlik (4.63) sarkacın $(\theta - \dot{\theta})$ faz düzlemini verir. Bu ifadenin anlamı $\dot{\theta} = 0$ sadece $\theta = 0$ olduğunda olabilirdir. Bu da sarkacın saat yönünde veya tersi yönde salınım yaparak üst denge noktası $\left(\theta, \dot{\theta}\right) = (0{,}0)$'a ulaşabileceğini gösterir. Eşitlik (4.61) incelendiğinde $\dot{\theta} = 0$ olduğunda $\dot{\varphi} = 0$ olacağı sonucuna ulaşılır.

Durum 1: $E \neq 0$ olduğunda, E sıfırdan farklı herhangi bir sabit olur. Bu durumda eşitlik (4.59) tekrar irdelendiğinde,

K, k_v ve k_E pozitif sabitler, E de sabit olduğu için $\dot{\varphi}$'da sabit olur.

$K = J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi}$ eşitliğinde K, $\dot{\varphi}$ ve J_w sabit olduğundan $\dot{\theta}$'da sabit olmalıdır. Dinamik model eşitlikleri (3.21) ve (3.23) kullanılarak $\ddot{\theta}$ şu şekilde tekrar yazılabilir.

$$\ddot{\theta} = \frac{\overline{m}g}{A - J_w}\sin\theta - \frac{1}{A - J_w}\tau \tag{4.64}$$

Tork $\tau = 0$ olarak verildiğinden

$$\ddot{\theta} = \frac{\overline{m}g}{A - J_w}\sin\theta \tag{4.65}$$

ifadesi bulunur ve $\dot{\theta}$ bir sabit olduğundan bunun türevi $\ddot{\theta} = 0$ olur. Eşitlik (4.65) incelendiğinde eşitliği sıfır yapan değer sinüs teriminden kaynaklandığı görülür. $\sin(\theta) = 0$ olur, eğer $\theta = 0, n\pi$ ise sinüs terimi sıfır olur. Tek sarkaç sistemi için $\theta = [0, \pi]$'dır. Eşitlik (4.46) ile sarkaç $\theta = \pi$ konumunda sınırlandırılmıştır ve $\theta \neq \pi$ sonucuna ulaşılır. Bu durumda sarkacın konum değeri $\theta = 0$ olabilir.

Eğer $\dot{\varphi} \neq 0$ varsayımı yapılırak $\dot{\theta} = 0$ ve $\tau = 0$ olduğu dikkate alınırsa eşitlik (4.46)

$$\tau = -k_d\left(k_E E\dot{\varphi} + k_v\left(J_w\dot{\theta} + J_w\dot{\varphi}\right)\right)$$

$$-k_E E\dot{\varphi} - k_v J_w\dot{\varphi} = 0 \tag{4.66}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadeden de

$$E = -\frac{k_v}{k_E}J_w < 0 \tag{4.67}$$

toplam enerjinin sıfırdan küçük olduğu bulunur. $\theta = 0$ durumu için eşitlik (4.17) çözüldüğünde

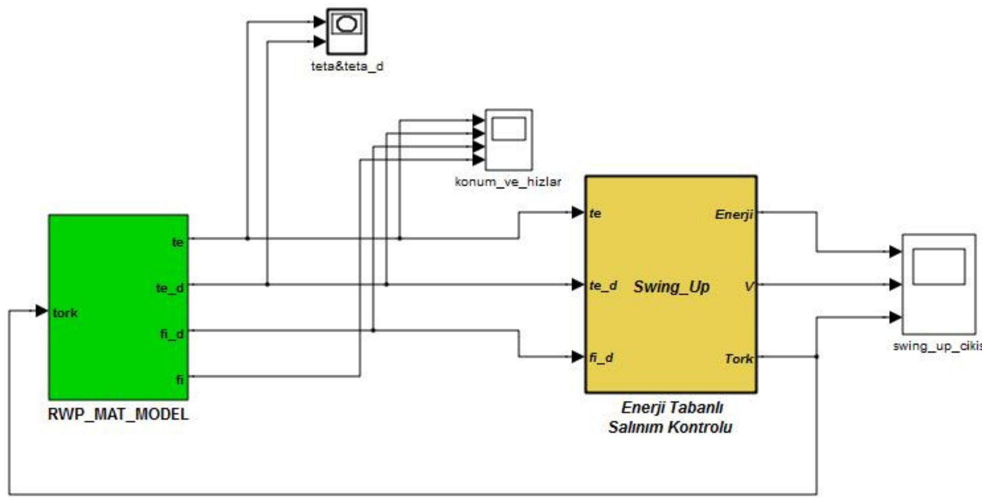
$$E = \frac{1}{2}J_w\dot{\varphi}^2 > 0 \tag{4.68}$$

toplam enerjinin sıfırdan büyük olduğu sonucuna ulaşılır. Eşitsizlik (4.67) ve (4.68) çelişkiye yol açar. Var olan çelişki $\dot{\varphi} \neq 0$ varsayımından kaynaklanmaktadır ve yapılan varsayımın yanlış olduğunu gösterir. Ulaşılan çelişkiden de $\dot{\varphi}$'nin sıfır olması gerektiği sonucu çıkar.

Eğer $\dot{\varphi} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ ve $\theta = 0$ ise eşitlik (4.17) kullanılarak toplam enerji $E = 0$ çıkar. Bu sonuç da durum 2'deki varsayım olan $E \neq 0$ ile çelişir. Dolayısıyla $E \neq 0$ varsayımı yanlıştır.

Sonuç olarak en büyük değişmeyen küme M sarkacın faz düzlemi ve kinematik kısıt denklemleri ile verilebilir. LaSalle değişmezlik ilkesine göre sistem asimptotik kararlı çıkar.

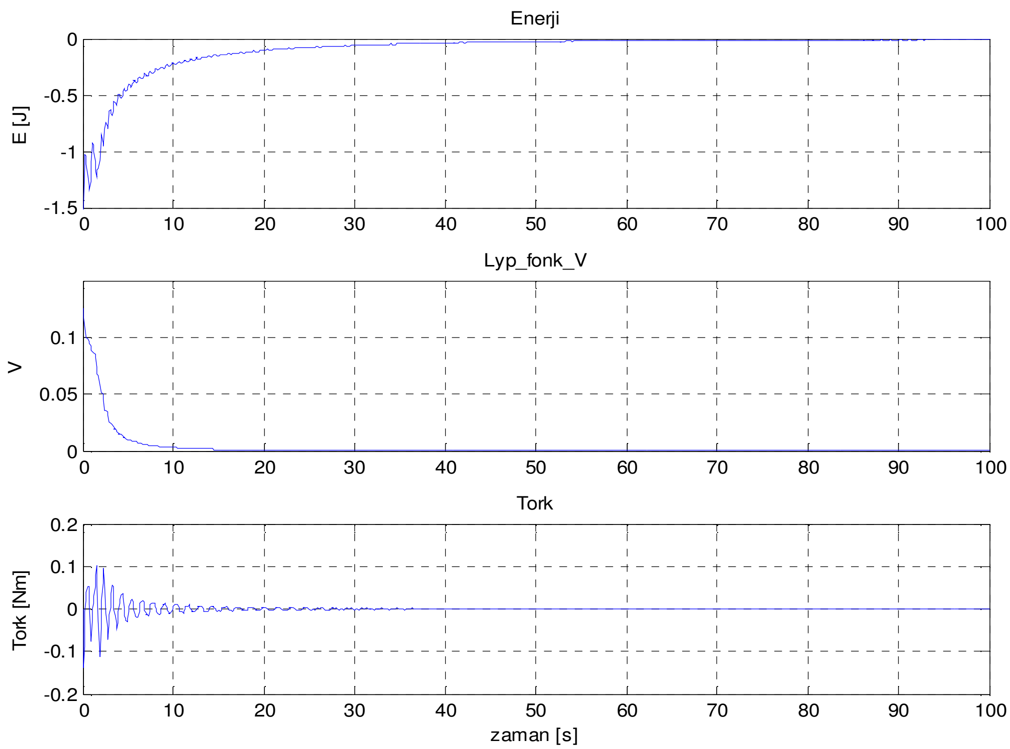
Şekil 4.6'da enerji tabanlı salınım kontrolörünün Simulink bloğu, şekil 4.7'de Lyapunov, toplam enerji ve tork grafikleri, şekil 4.8'de sarkaç ve tekerleğin hız ve konum grafiği ve şekil 4.9'da da $\theta - \dot{\theta}$ faz grafiği verilmiştir.



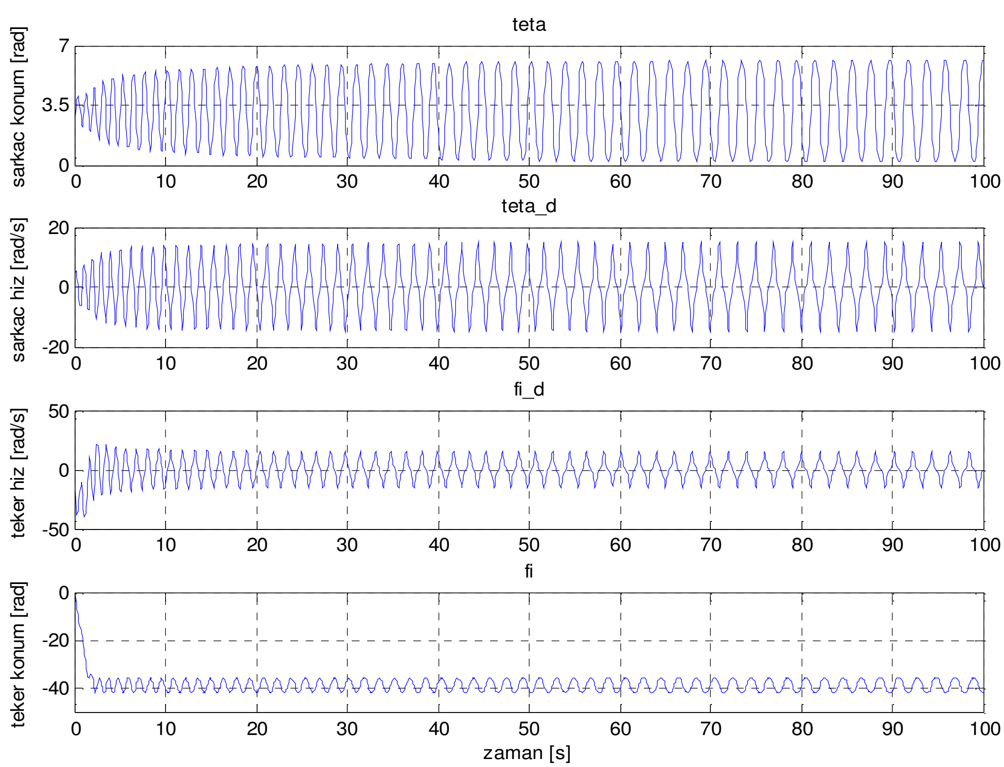
Şekil 4.6: Enerji tabanlı salınım kontrolör bloğu.

Şekil 4.6'da kontrol bloğu verilen enerji tabanlı kontrolörün enerji grafiği beklendiği gibi $-2\overline{m}g$ değerinden 0'a doğru artmaktadır, benzer şekilde de Lyapunov fonksiyonu sıfıra doğru bir azalma eğilimi göstermektedir. Şekil 4.7'ye bakılırsa torkun $0{,}1Nm$ mertebelerine çıktığı görülür ve ilk $10s$ içinde sıfıra doğru azalır. Daha sonra sıfır civarında kabul edilebilir genlikte salınımlar yaparak sıfıra doğru ilerler.

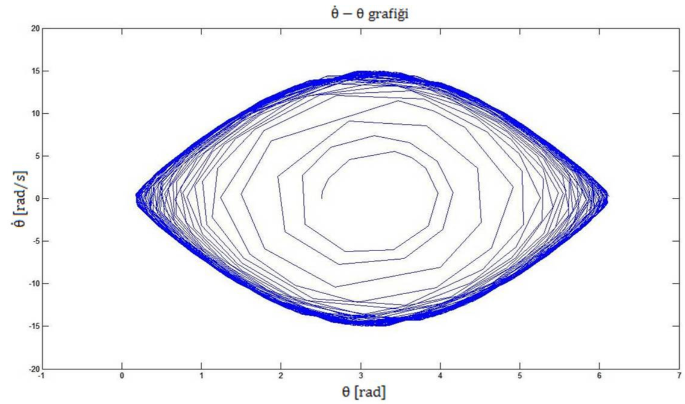
Şekil 4.8'de verilen grafik sarkacın enerji tabanlı kontrolör etkisinde yapacağı salınım ve hız hakkında bilgi verir. Teta-zaman grafiğinde sarkacın $70s$'den sonra sarkacın konumunun yakalma bölgesine doğru gittikçe yaklaştığı gösterilmektedir. Geribeslemeli lineerleştirme kontrol metodu, konum sıfırın 8-9 derece civarında iken kullanılabilir. Bu sonuca dayanarak, enerji tabanlı salınım kontrolörünün sarkacı $70s$'den fazla bir süre salınım yaptırarak yakalama bölgesine yaklaştırdığı yorumu yapılabilir. Tekerlek konumunun sarkaç kontrolü üstünde fazla bir etkisi yoktur, ancak hızının etkisi vardır. Teker hız grafiğine bakıldığında, tekerlek yaklaşık olarak $20\,rad/s$ bir hızla döner. Grafikten elde edilen bu değer tekerleği süren motorun tarafından rahatlıkla sağlanabilir. Şekil 4.9 ise salınım esnasında θ'ların $\dot{\theta}$'lara göre grafiğini verir.



Şekil 4.7: Enerji tabanlı kontrolörün enerji, Lyapunov ve tork grafiği.



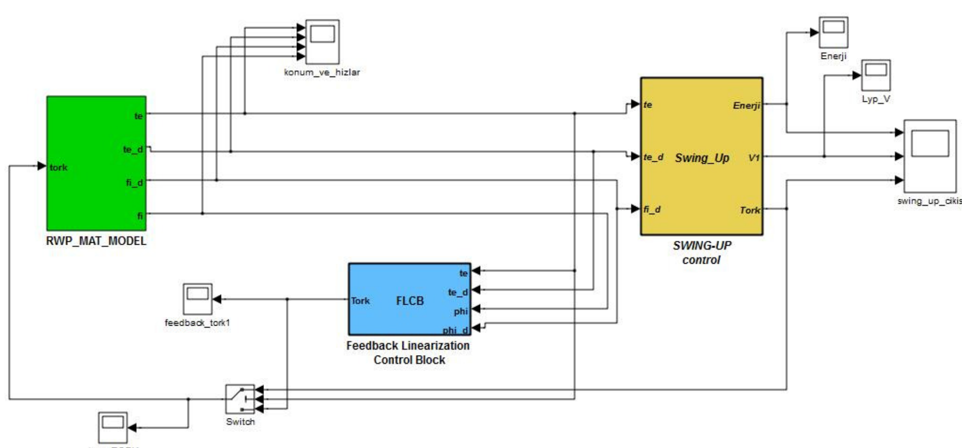
Şekil 4.8: Enerji tabanlı kontrolör ile sarkaç ve tekerleğin konum-hız grafiği.



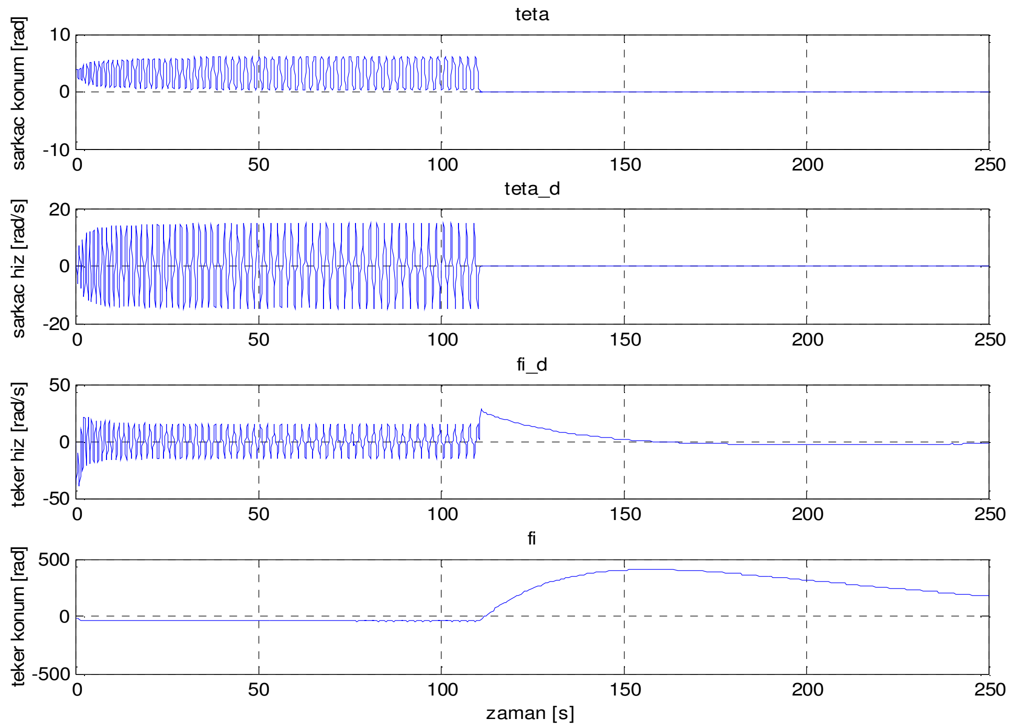
Şekil 4.9: Enerji tabanlı kontrolörün $\dot{\theta} - \theta$ faz grafiği.

4.5.2 Enerji tabanlı kontrol ile hibrid kontrol algoritması

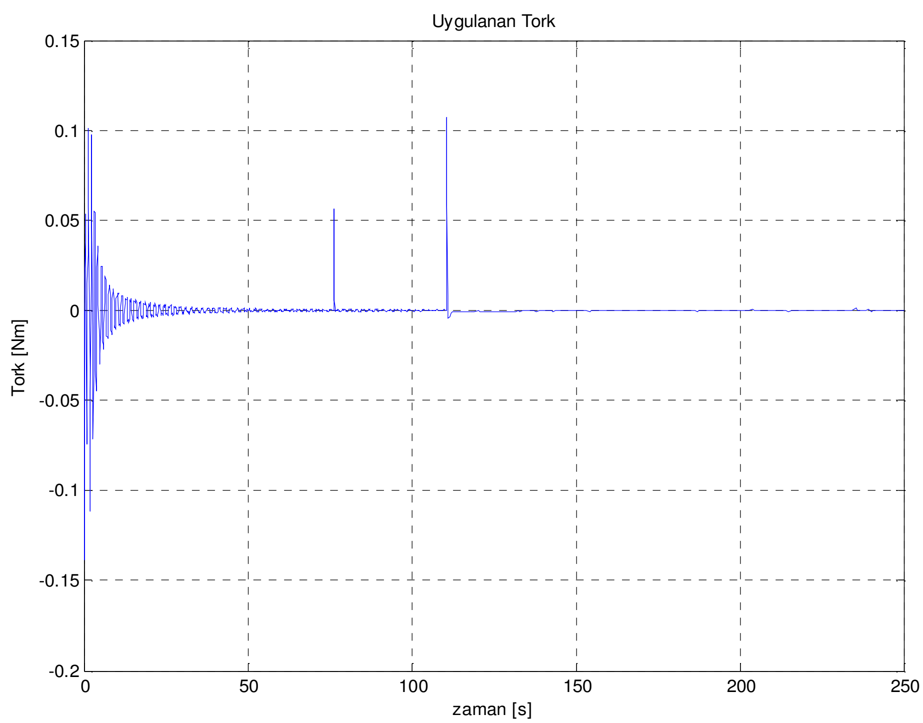
Hibrid kontrol, sistemin başlangıç koşulundan kararsız denge noktasındaki kontrolünde kullanılan tüm kontrolörlerin birleştirilmiş halidir. Enerji tabanlı kontrol, sistemin alt denge noktasından kararsız denge noktasına (üst denge noktasına) salınımını sağlamak için kullanılır. Sarkaç salınım sonucunda geribeslemeli lineerleştirme kontrolörünün çalışma bölgesine girer. Bu bölgeye yaklaşan sarkaç anahtarlanarak enerji tabanlı kontrolden çıkarılıp, geribeslemeli lineerleştirme kontrolüne dahil edilir. Böylelikle hibrid kontrol algoritması sağlanmış olunur. Anahtarlama θ'nın bu bölge içine girmesiyle yapılır. Simülasyon sonuçları anahtarlamanın $\theta = 9$ derecede yapılmasıyla elde edilmiştir. Simülasyonda kullanılan tüm kontrol algoritmasının MATLAB-Simulink bloğu şekil 4.10'da, sarkaç ve tekerleğin konum hız grafikleri şekil 4.11'de ve tork grafiği şekil 4.12'de gösterilmektedir.



Şekil 4.10: Enerji tabanlı kontrolör ile tüm kontrol algoritması.



Şekil 4.11: Hibrid kontrol ile sarkaç ve tekerleğin konum-hız grafiği.



Şekil 4.12: Hibrid kontrol ile sisteme uygulanan tork grafiği.

Şekil 4.11'de verilen konum, hız grafiklerinde sarkacın salınım kontrolünden geribeslemeli lineerleştirme kontrolüne geçişinin öncesinde ve sonrasında sistemin nasıl davrandığı hakkında bilgi verir. Sarkaç anahtarlamadan sonra konum ve hız olarak hemen sıfıra oturmaktadır. O andan itibaren sarkacın üst denge noktası olan $\theta = 0$ da kontrolü başarılı bir şekilde sağlanmış olunur. Tekerleğin hızı, zamanla sıfıra doğru azalma eğilmi gösterir. Şekil 4.12'de verilen tork grafiği iki tür kontrolörün sonucunda oluşur. İlk parça sarkacın salınımı esnasında üretilen torktur, ikinci parça $0{,}1Nm$'den fazla bir sıçrama yaptığı noktada ise geribeslemeli lineerleştirme kontrolü uygulanmıştır.

4.6 Anahtarlama ile Salınım Kontrolü

Anahtarlamalı salınım kontrolü ile sarkacın başlangıç anından itibaren nominal torkun belli kurallara göre anahtarlanması yapılarak, sarkaç yakalama bölgesine getirtilir. Anahtarlamalı salınım kontrolü için gereken kurallar şu adımlar ile verilebilir:

- Sarkacın durgun halden harekete geçebilmesi için sisteme ilk tetiklenin verilmesi,
- Salınım kriterlerinin belirlenmesi,
  - ✓ α_s son salınım açısının belirlenmesi,
  - ✓ Tork aktarımının durdurulacağı β kritik açısının belirlenmesi,
- Son salınıma girmiş olan sarkacın üst denge noktasına sıfır hız ile ulaşmasının sağlanması,

Yukarıda belirtilen adımlar tek tek detaylandırılarak, geribeslemeli lineerleştirme metoduyla anahtarlanmasından olaşan hibrid sistem verilecektir.

4.6.1 Sarkacın tetiklenmesi

Durgun haldeki sarkacı tekillikten çıkartıp harekete geçirebilmek için bir tetiklemeye ihtiyaç vardır. Tetikleme çeşitli şekillerde sağlanabilir. Bunlar sarkacın belli bir ilk konumdan serbest bırakılması olabileceği gibi sarkaca bir adım fonksiyonu uygulanarak bir ilk konuma getirilmesi ile de gerçeklenebilir. Sarkacın herhangi bir yönde salınması isteniyorsa uygulanan adım fonksiyonu rastgele seçilmelidir. Benzer şekilde sarkacın ilk konumu ona göre ayarlanmalıdır. Bu çalışmada, sarkaç $0{,}9\pi$ rad ilk konumdan sıfır hız ile bırakılacaktır.

Sarkacın salınıma devam edebilmesi için bırakıldığı konumdan tork uygulanarak sisteme enerji verilir. Tork aktarımı sarkaç kolunun açısal hızına bağlı olarak sağlanır. Uygulanan tork sisteme enerji aktararak ivmelenmesine, yani hareket etmesine sebep olur. Belli bir yerden sonra, sarkaç verilen o enerji ile çıkabileceği en yüksek yere çıkmış olur ve sarkaç kolunun hızı sıfırlanır. Sarkaç kolunun hızının sıfır olduğu anda anahtarlama yapılarak uygulanan torkun yönü değiştirilir ve sarkacın ters yönde ivmelenmesi sağlanır. Bu salınım şekil 3.4'te gösterilmiştir. Yapılan bu anahtarlama ile sarkaç salınır, ancak bu metotla sarkacın salınımının kontrolü iyi bir şekilde sağlanamaz. Kontroldeki amaç sarkacın üst denge noktasında dengede kalmasını sağlamaktır. Bu sebeple sarkaç kolu sıfır noktasına kabul edilebilir bir hız veya sıfır hızı ile gelmesi istenir.

Bu anahtarlama metoduyla sarkaç sıfır noktasına ulaşabilir, ama sıfır noktasına yüksek bir hızla gireceği için geribeslemeli lineerleştirme metodu ile sarkacı yakalamak mümkün olmayabilir. Bu durumu önleyebilmek için, öncelikle sarkacın son salınıma ne zaman gireceği ve uygulanan nominal torkun ne zaman sıfırlanacağı hesap edilmelidir. Hesaplarda sarkacın her zaman ideal ortamda olduğunu, sürtünmelerin ihmal edildiği, bir ortamda çalıştığı varsayılmıştır. Sürtünmelerin olmadığı ideal bir ortamda dışarıdan hiçbir etki olmadığı için β tork kesim açısına gelen sisteme etkiyen tork sıfırlandığında, sarkaç kendi enerjisi ile yakalama bölgesine sorunsuz bir şekilde girecektir.

Eğer sisteme etkiyen sürtünme, hava direnci gibi kuvvetler göz önüne alınırsa sistemde gecikmeler yaşanacaktır. Bu gecikmeler, sarkacın o anki konumu ve hızı ile belirlenen β ve $\dot{\beta}$ değerleri karşılaştırılarak belirlenir. Bu kıyaslamanın neticesinde, sarkaçtan alınan o anki konum ve hız değerleri ile sistemin üst denge noktasına yaklaşamayacağı veya burayı yüksek bir hızla geçeceği hesaplanmışsa sisteme ya enerjiyi arttıracak yönde ya da azaltacak yönde tork uygulanır. Uygulanan tork ile sarkacın üst denge noktasına sıfır hız ile çıkması PD kontrolör kullanılarak sağlanabilir. Tez kapsamının dışında olan PD kontrolör devreye girdiğinde uygulanan torku kontrol edecektir.

Sarkaç üst denge noktasına düşük bir hızla yaklaştığında ise geribeslemeli lineerleştirme metodu devreye girerek sarkacın denge kontrolü sağlanır. İstenen verilerin anlaşılırlığını kolaylaştırmak adına sarkacın yapacağı son salınım açısının kritik değerine karşılık α_s, torkun kesileceği kritik konumu için ise β ifadeleri kullanılmıştır.

4.6.2 Salınım kriterlerinin belirlenmesi

Bir önceki bölümde belirtilen α_s ve β sarkacın salınım kriterlerini oluşturur. Bu bölümde, α_s ve β değerlerinin neye göre belirleneceği anlatılacaktır. Değerler belirlenirken sistemin dinamik modelinden yararlanılacaktır.

4.6.2.1 α_s son salınım açısının belirlenmesi

Dinamik modelden elde edilen eşitlik (4.64) kullanılarak sistemin α_s kritik açısı belirlenecektir.

$$\ddot{\theta} = \frac{\overline{m}g}{A - J_w} \sin\theta - \frac{1}{A - J_w}\tau$$

Tork ve sinüs terimlerinin katsayıları eşitliği sadeleştirmek için K_1 ve K_2 olarak adlandırılabilir.

$$\ddot{\theta} = K_1 \sin\theta - K_2\tau \tag{4.69}$$

İfadedeki K_1 ve K_2 katsayıları sistemin kütlesini, tekerleğin eylemsizlik momenti gibi bilgilerini içerir. Çizelge 3.1 kullanılarak bu katsayılar belirlenir.

$$K_1 = 56{,}684$$

$$K_2 = 63{,}29$$

Bir sistemin ivmesi konumun zamana göre türevidir.

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \tag{4.70}$$

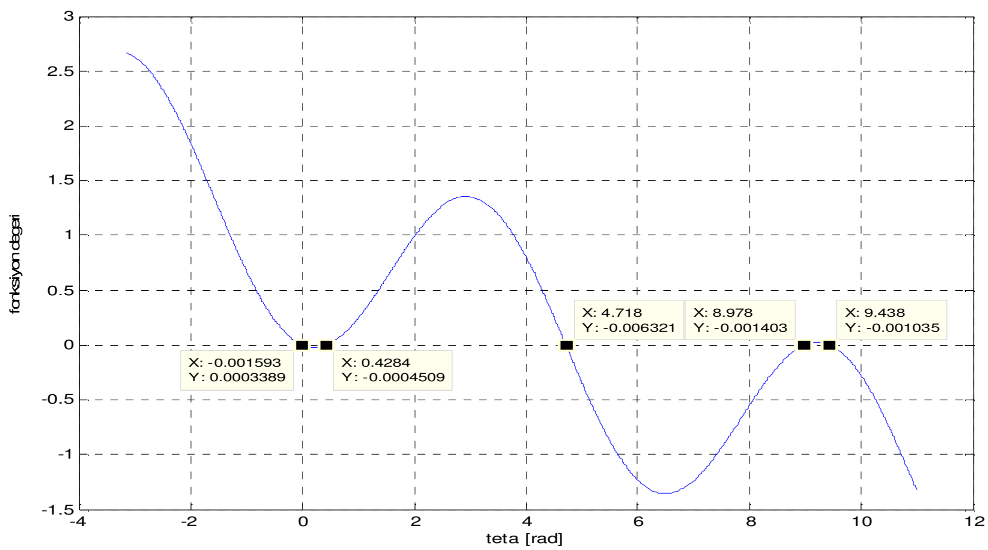
Eşitlik (4.70)'in θ_0'dan θ_f'ye kadar integrali alındığında,

$$-K_1\left(\cos(\theta_f) - \cos(\theta_0)\right) - K_2(\theta_f - \theta_0)\tau = 0.5\left(\dot{\theta}_f{}^2 - \dot{\theta}_0{}^2\right) \tag{4.71}$$

genel formu elde edilir. Son salınımın kritik açısı α_s'nin belirlenmesi için nominal torkun uygulandığı anda θ_f ve $\dot{\theta}_f$ değerlerinin sıfır olduğu yerler incelenir. Amaç, sarkaç kolu hangi konumda iken uygulanan nominal tork sarkacı sıfır noktasına sıfır hızı ile ulaştığını belirlemektir. Dikkate edilmesi gereken durum sarkacın son salınıma birkaç anahtarlamadan sonra gelmiş olmasıdır. Bu da sarkaç kolunun son salınıma gireceği anda anahtarlandığı ve dolayısıyla hızının sıfır olduğu anlamını taşır. Bu doğrultuda eşitlik (4.71) çözülebilir.

$$1 - \cos(\theta_0) - \frac{K_2}{K_1}\tau\theta_o = 0 \qquad \textbf{(4.72)}$$

Eşitlik (4.72) MATLAB'da çözdürülerek şekil 4.13'deki grafik elde edilir. Çözümde sarkaca pozitif nominal tork değeri olan $0{,}19Nm$ tork uygulandığı kabul edilmiştir. Çizelge 4.2 ise grafik değerlerini tablo halinde gösterir.



Şekil 4.13: Eşitlik (4.72)'nin çözümü.

Çizelge 4.2: Eşitlik (4.72)'nin çözümleri.

teta	teta	teta	teta	teta
0	0.428	4.718	8.978	9.438

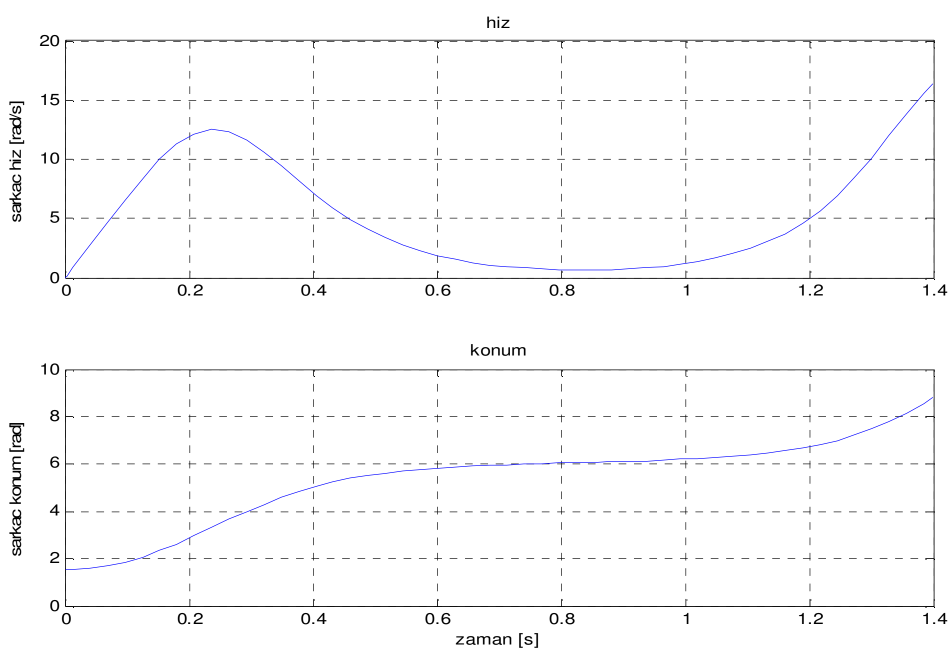
Çizelge 4.1'deki değerlerden hangisinin çözümü sağladığını sistemin dinamik modelinin MATLAB-Simulink çözümünden anlaşılabilir. Çizelge 4.1'de verilen değerler eşitlik (4.72)'i sıfır yapan değerlerdir. Bunlardan anlamlı olanı 4.718 radyan yaklaşık olarak 89,68 derecedir.

Dinamik modelin MATLAB-Simulink çözümü incelendiğinde bu değer 88,74 dereceye yani $0{,}493\pi$ radyana tekabül eder. Eğer simülasyonda başlangıç değeri olarak $0{,}493\pi$ radyandan biraz daha büyük bir değer (0.494π) verilirse sarkaç diğer salınıma geçmektedir.

Simülasyondan elde edilen değer ile eşitlik (4.72)'den elde edilen değer ufak bir farklılık gösterir. Belirlenen α_s bir alt limit olduğundan bu fark çok önemli değildir. Simülasyon sonuçları daha sağlıklı bir sonuç verdiği için α_s olarak seçilmiştir.

$$\alpha_s = 0{,}493\pi = 88{,}74^0 \equiv 4{,}734\, rad \tag{4.73}$$

olarak verilir. α_s'in son salınımda belirleyici olmasının sebebi sisteme nominal tork bu açıdan sıfır hız ile uygulanırsa, sistem bu hız ile doğrudan sıfır noktasına sıfır hızı ile ulaşmasıdır. Eğer tork bu açısının altında bir yerde uygulanırsa sarkacın sıfır noktasına gelemeyeceği anlaşılır, yani sistem henüz son salınımda değildir. Şekil 4.14 nominal torkla sürülen, başlangıç konumu α_s olan sarkacın hız ve konumunun zamana göre grafiğini göstermektedir. Şekil 4.14'deki grafik incelendiğinde, sarkaç sıfır konumuna eriştiğinde hızı yaklaşık olarak $0{,}65\ rad/s$ mertebelerinde makul bir değerde olmaktadır. Belirlenen α_s açısı aslında son salınımın belirlenmesinde kullanılan bir alt limit olduğundan belirlenen açı isteneni karşılamakta yeterlidir.



Şekil 4.14: Nominal torkla α_s'ten bırakılan sarkacın hız ve konum grafiği.

4.6.2.2 β tork kesim açısının belirlenmesi

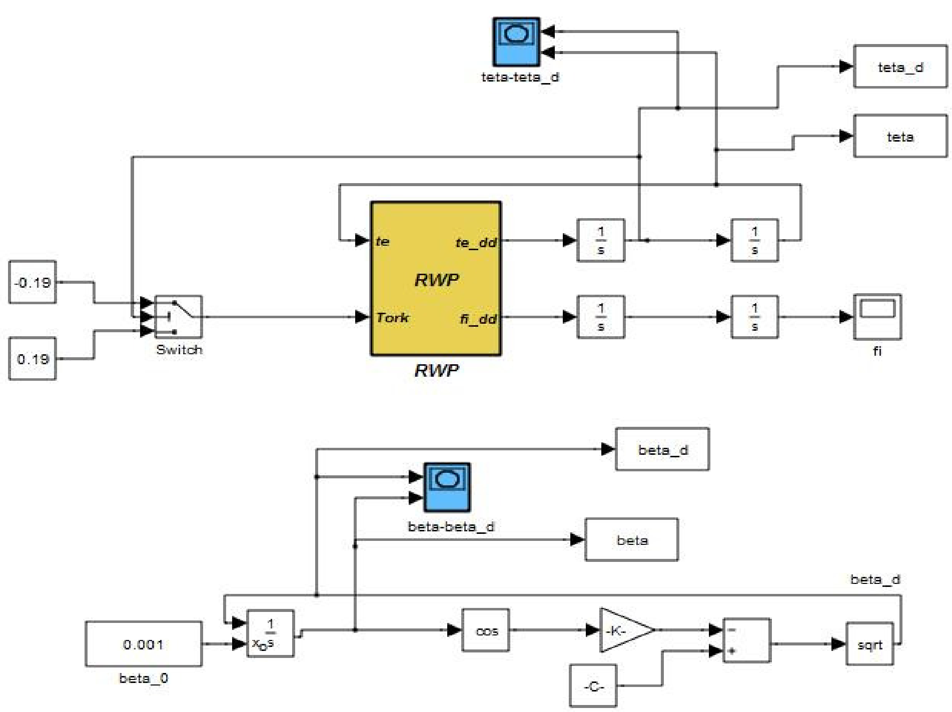
Kontrolde amaçlanan sarkacın üst denge noktasına olabildiğince yavaş bir hızla veya sıfır hızla ulaşmasıdır. Aksi takdirde denge noktasına yüksek bir hızla gelecek olan sarkaç anında durdurulamayacak ve kontrol bölgesine girmiş olsa bile buradan hızla geçip gidecektir. Bunu önleyebilmek için sarkaca enerji sağlayan eyleyicinin belli bir yerden sonra gücünün kesilmesi gerekir. Eyleyicinin gücünün kesileceği noktadan sonra, yani β kritik açısından sonra sarkaç var olan enerjisi ile kararsız denge noktasına çıkar ve hızı burada sıfır olur.

Bu yaklaşıma göre sarkacın son hızı, konumu ve uygulanan tork belli, ancak ilk hızı ve konumu belli değildir. Uygulanan tork, sarkacın son hızı ve konumu sıfırdır. β açısının belirlenmesinde eşitlik (4.71) ile verilen denklem kullanılır.

$\tau = 0$, $\theta_f = 0$ ve $\dot{\theta}_f = 0$ olmak üzere,

$$\dot{\beta}^2 = 2K_1 - 2K_1\cos(\beta) \qquad \textbf{(4.74)}$$

denklemi elde edilir. β'nın değerini bulabilmek için eşitlik (4.69)'un ve (4.74)'ün MATLAB-Simulink çözümlerindeki $\theta - \dot{\theta}$ grafikleri karşılaştırılır ve grafiklerin kesiştikleri nokta β'nın değerini verir. Şekil 4.15'te β açısının tahmininde kullanılan MATLAB-Simulink bloğu verilmiştir.

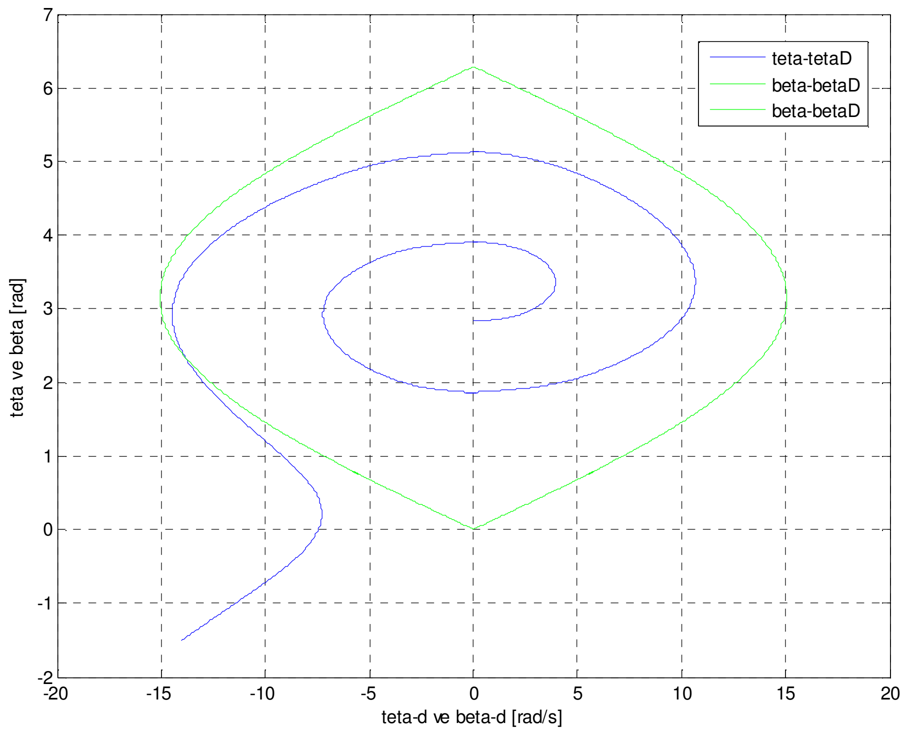


Şekil 4.15: β açısının tahmininde kullanılan MATLAB-Simulink bloğu.

Şekil 4.15 ile verilen blok yardımıyla dinamik modeline nominal tork uygulanan sistemin eşitlik (4.74) ile $\theta - \dot{\theta}$ grafikleri üst üste bindirilerek kaşılaştırılır.

Grafiklerin kesiştikleri yer tork kesim açısı β'yı verecektir çünkü nominal tork uygulanan sistem β açısını içermektedir.

Simülasyonun başlangıç koşulları, eşitlik (4.69) için sarkaç kolu $0{,}9\pi$ radyanda ilk hızsızdır. Eşitlik (4.74) için ise sarkaç sıfır noktasına yakın bir yerden tam tur atabilmesi için $0{,}001$ radyandan ilk hızsız bırakılmıştır. Şekil 4.16'da eşitlik (4.69) ve eşitlik (4.74)'ün üst üste bindirilmiş $\theta - \dot{\theta}$ grafikleri gösterilmektedir. Şekilde yeşil ile gösterilen grafik eşitlik (4.74)'den elde edilen verilerin birde eksi ile çarpılması ile elde edilmiştir.

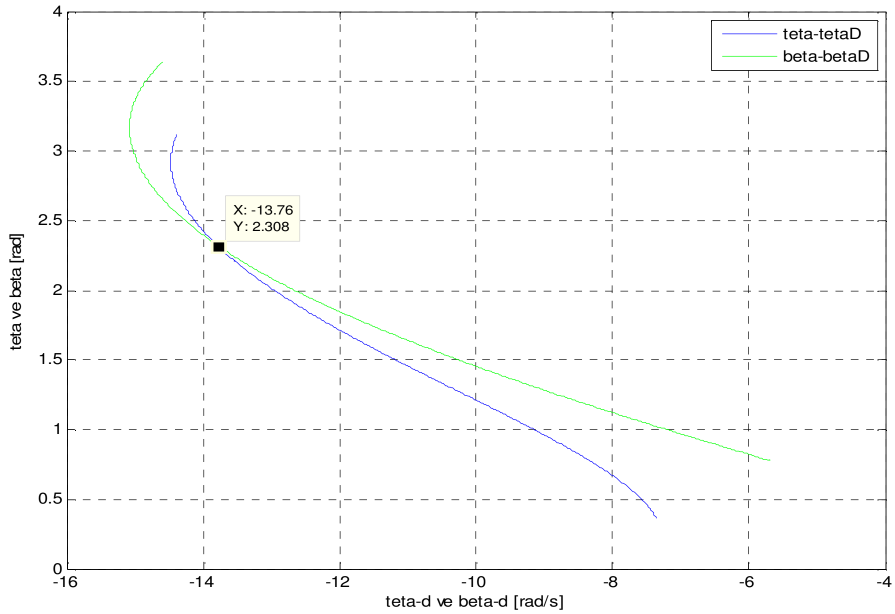


Şekil 4.16: Eşitlik (4.69) ve eşitlik (4.74)'ün çakıştırılmış $\theta - \dot{\theta}$ grafikleri.

Şekil 4.16 ile verilen grafiğin kesiştikleri noktayı daha net bir şekilde belirleyebilmek için kesiştikleri bölge büyütülebilir. Şekil 4.17 kesişim bölgesinin büyütülmüş halini göstermektedir.

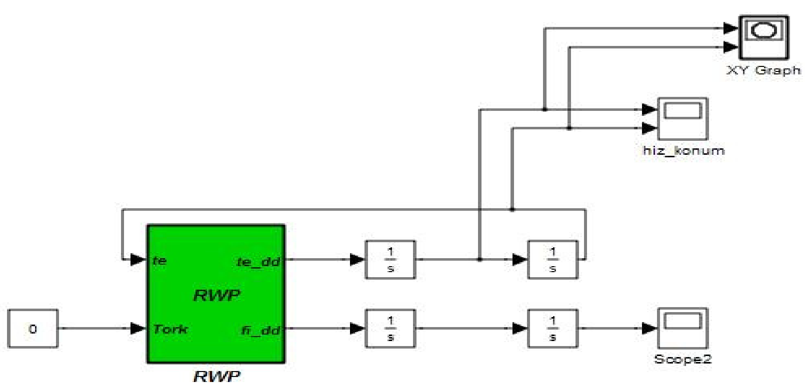
Şekil 4.17 incelendiğinde grafiklerinin kesiştikleri nokta en doğru şekilde gösterilebilmektedir. Şekil 4.17'deki grafikten edinilen bilgilere göre tork kesim açısı β ve hızı $\dot{\beta}$ değerleri eşitlik (4.75) ile verilmiştir.

$$\beta = 2{,}308\ rad$$
$$\dot{\beta} = -13{,}76\ rad/s \qquad \textbf{(4.75)}$$



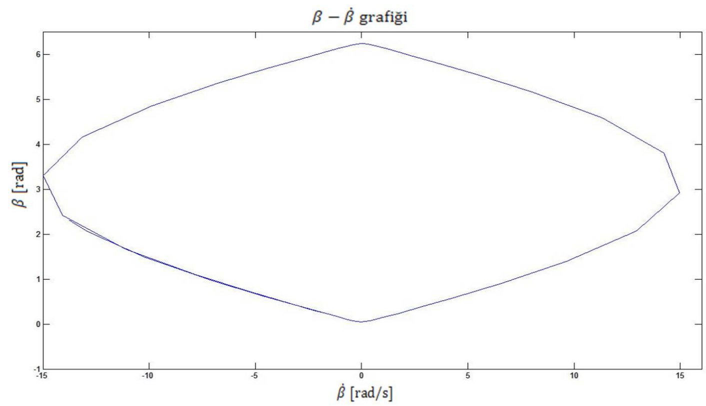
Şekil 4.17: Yakınlaştırılmış $\theta - \dot{\theta}$ grafiklerinin kesişim bölgesi.

Bu değerlerin doğruluğunun ispatı için eşitlik (4.69) ile verilen modelin simülasyonunda tork sıfır yapılırak hız ve konum ile ilişkili olan başlangıç koşulları için β ve $\dot{\beta}$ değerleri değerler verildiğinde sarkacın üst denge noktasına çıktığında hızının sıfır olması beklenir. İspat için hazırlanan MATLAB-Simulink bloğu şekil 4.18'de verilmiştir.

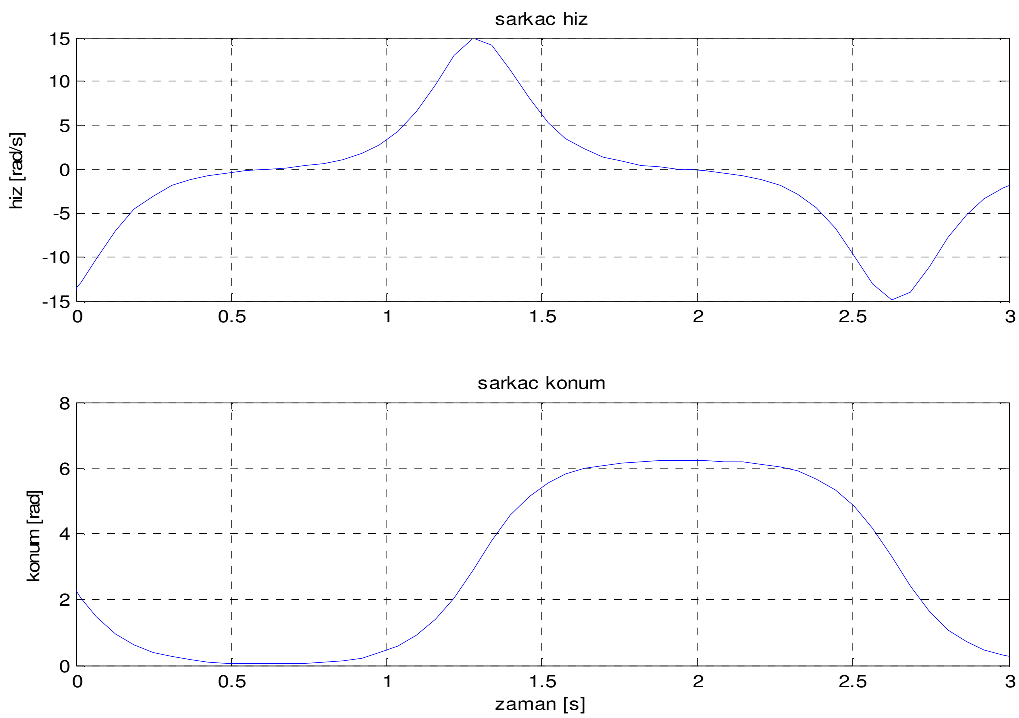


Şekil 4.18: β açı seçiminin ispat Simulink bloğu.

Simülasyon 3s için yapılmış ve başlangıç koşulları olarak $\beta = 2{,}308$ radyan, $\dot{\beta} = -13{,}76\ rad/s$ alınmıştır. Şekil 4.19'da sarkacın $\theta - \dot{\theta}$ grafiği ve şekil 4.20'de ise sarkacın hız ve konum grafiği verilmiştir.



Şekil 4.19: β açı seçiminin ispatı için $\beta - \dot{\beta}$ grafiği.

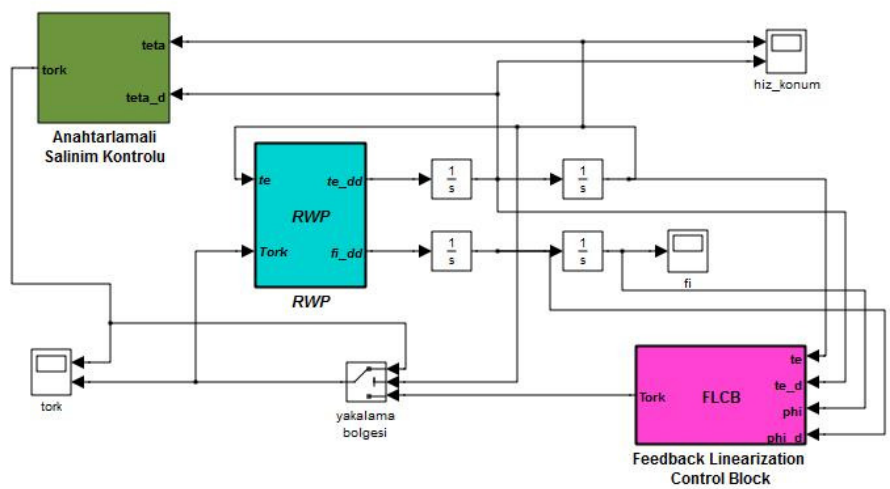


Şekil 4.20: β açı seçiminin ispatı için konum ve hız grafikleri.

Şekil 4.20 incelendiğinde sarkaç konumu $\theta = 0$ ve $\theta = 2\pi$ olduğu durumda sarkacın hızı sıfır olmaktadır. Sıfıra geldikten sonra aşağıya düştüğünde ise tekrar beklendiği gibi 2π konumuna geri döner ve hızı sıfır olur.

4.6.3 Anahtarlamalı salınım kontrolü ile hibrid kontrol algoritması

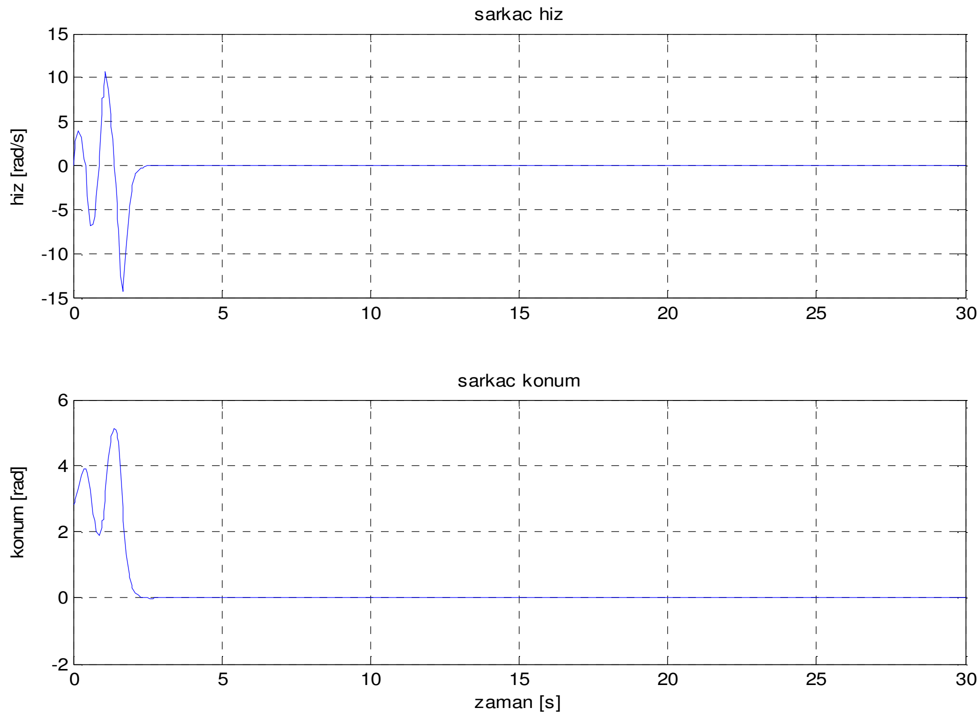
Bu bölümde anlatılacak olan hibrid kontrol algoritması, salınım kontrolü ve denge kontrolünü içerecektir. Salınım kontrolü α_s ve β açıları dikkate alınarak nominal torkun bu koşullar altında anahtarlanıp β değerine ulaştığında ise torku sıfırlamaya dayanır. α_s sarkacın son salınımda olduğunu ve β ise torkun hangi anda sıfırlanacağını bildirir. Bu koşullara göre anahtarlanan tork sistemi kararsız denge noktasına (yakalama bölgesine) yaklaştırmaya yetecektir. Bu adımdan sonra, sarkaç yakalama bölgesine girdiğinde diğer bir anahtarlama ile geribeslemeli lineerleştirme metodu devreye sokulur. Devreye giren metot ile de sarkacın kararsız denge noktasında kontrolü sağlanır. Şekil 4.21'de hibrid algoritmanın MATLAB-Simulink bloğu gösterilmektedir.



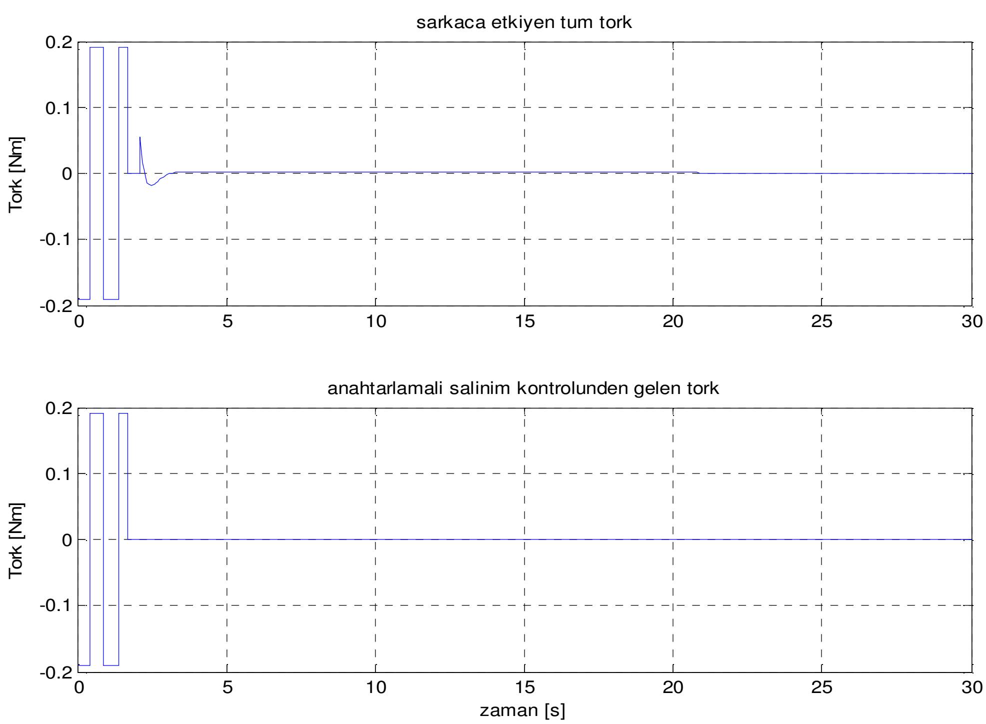
Şekil 4.21: Bozucu girişsiz anahtarlamalı salınım kontrolü ile hibrid kontrol.

Şekil 4.21'de verilen Simulink bloğunun simülasyonu tamamen ideal bir ortam gözönünde bulundurularak yapılmıştır. Sürtünmeler ihmal edildiği gibi dışarıdan sisteme etkiyen fazladan bir kuvvet olmadığı varsayılmıştır. Simülasyon sonuçlarıda bu ortama göre sağlanmıştır. Şekil 4.22'de sarkacın konum ve hızlarının zamana göre grafikleri, şekil 4.23'de de sisteme etkiyen tork gösterilmektedir.

Şekil 4.22 ve 4.23 incelendiğinde, ilk şekilden sarkacın $2{,}5s$'de üst denge noktasına hiçbir aşım yapmadan oturduğu görülür. Hem sarkacın konumu hemde sarkacın hızı hibrid kontrol ile $2{,}5s$'de sıfıra oturtulmuştur.



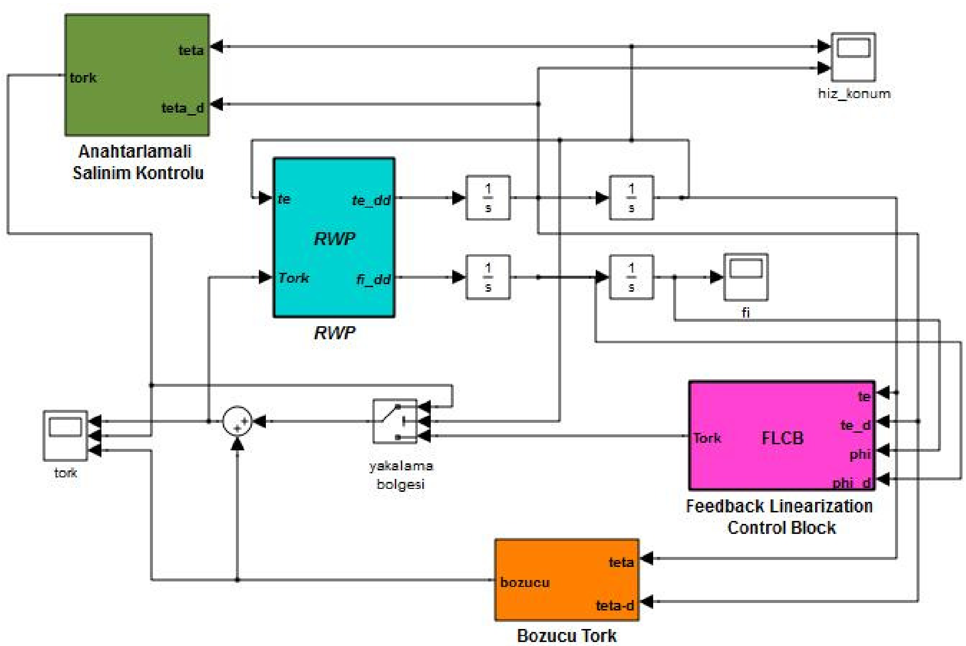
Şekil 4.22: Bozucu girişsiz konum ve hızın zamana göre grafikleri.



Şekil 4.23: Bozucu girişsiz tork zaman grafikleri.

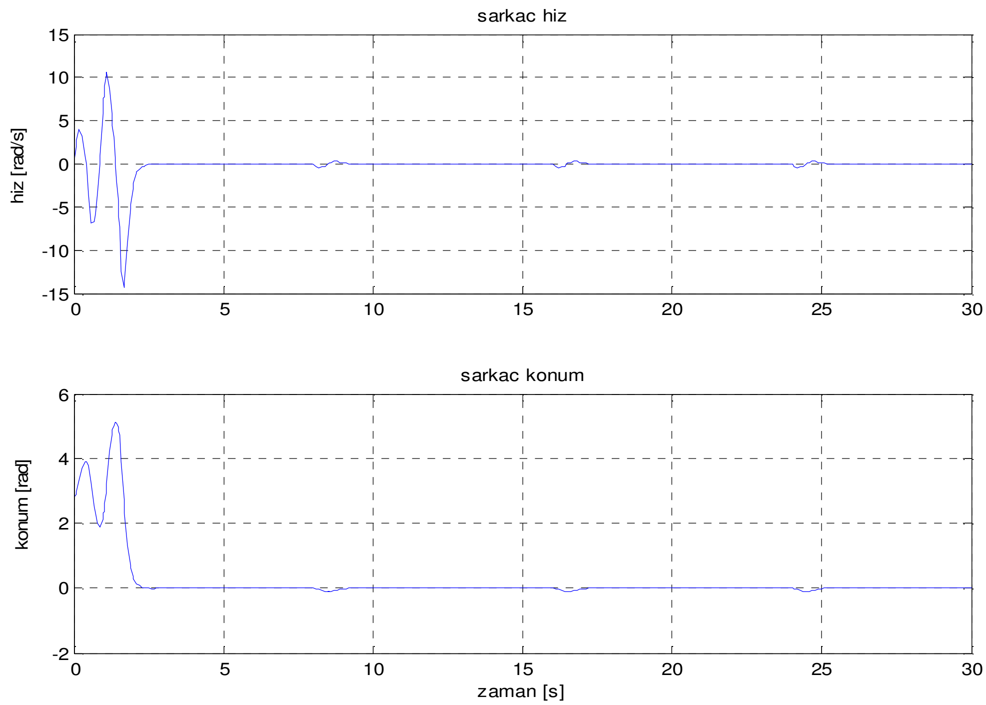
Diğer şekilde ise, sarkaca etkiyen tüm tork grafiğinde sisteme önce nominal torklar uygulanıyor ve sarkaç hem α_s hemde β kriterini sağladığından dolayı yarım saniye kadar sisteme tork uygulanmıyor. Sisteme tork uygulanmadığı için var olan enerji ile sarkaç, üst denge noktasına yaklaşır ve buradan da geribeslemeli lineerleştirme metodu ile denge kontrolü sağlanır.

Bozucu giriş olmadan yapılan incelemede anahtarlamalı salınımla yapılan hibrid kontrolün başarılı bir şekilde çalıştığı gösterilmiştir. Benzer simülasyon sisteme bozucu bir girişin etkidiği varsayımı ile yapılabilir. Bozucu giriş ile yapılacak simülasyonda bozucu girişin sürtünmesiz bir sarkaca kararsız denge noktasında kontrolü sağlandıktan sonra etkidiği varsayılmıştır. Sarkaç üst denge noktasına getirilip kontrol edilmeye başlandığı anda sisteme 8sn aralıklarla 0,07 Nm tork uygulanmıştır. Şekil 4.24'de bozucu giriş ile yapılan simülasyonun Simulink bloğu gösterilmektedir.

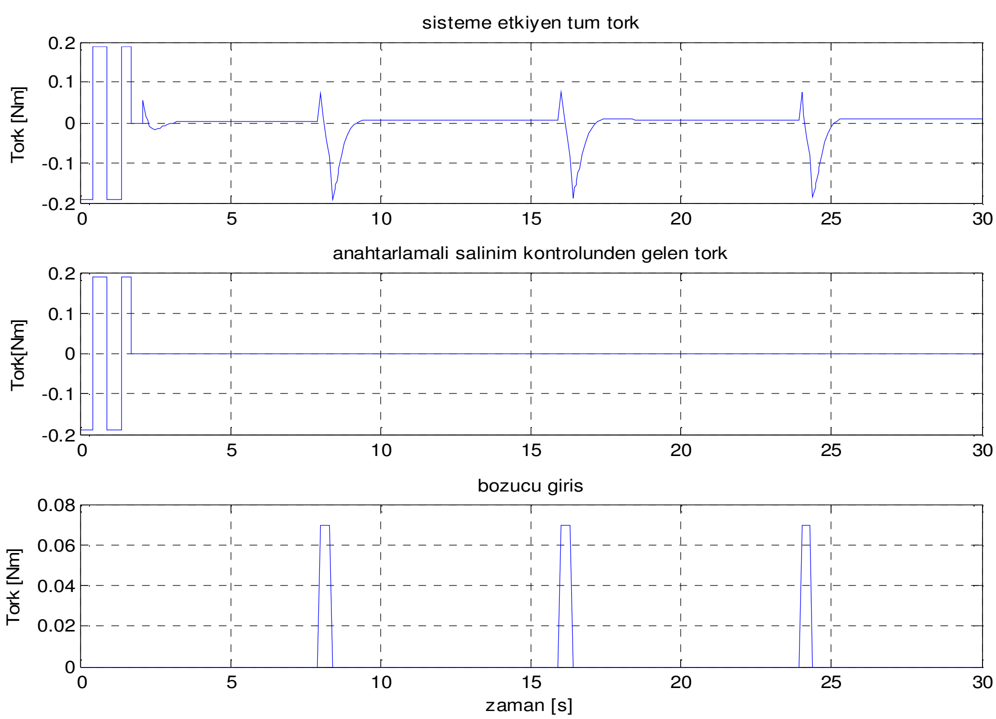


Şekil 4.24: Bozucu girişli anahtarlamalı salınım kontrolü ile hibrid kontrol.

Simülasyondan konum ve hiz bilgileri şekil 4.25'de ve tork bilgileride şekil 4.26'da verilmiştir. Şekil 4.25'de verilen konum ve hız bilgilerinden sarkacın 0,07 Nm tork altında kabul edilebilir oranlarda değiştiği görülür. Sarkaç hızı için yaklaşık $0{,}4\ rad/s$ iken konum için bu $0{,}13\ rad$ olmaktadır. Eğer sisteme etkiyen tork grafiği incelenirse (şekil 4.26) bozucu girişin geldiği anda tüm sistem tork grafiğinde ani yükselmeler gözükmektedir.



Şekil 4.25: Bozucu girişli konum ve hızın zamana göre grafikleri.



Şekil 4.26: Bozucu girişli tork zaman grafikleri.

Görülen yükselmeler bozucu girişe ters yönde olacak biçimde belirmektedirler ve 0,19Nm mertebesine gelmektedir. 0,19Nm de sistemi süren motor tarafından sağlanabilen bir değerdir. Grafiklerden elde edilen bilgilere göre, eğer sisteme kararsız denge noktasında kontrol edilmeye başladığında $0{,}07$ Nm büyüklüğünde bir bozucu girişe maruz kalırsa, geribeslemeli lineerleştirme metodu ile bu bozucu girişin etkisi telafi edilebilir.

4.7 Hibrid Kontrolörlerin Karşılaştırılması

Enerji tabanlı yapılan kontrol de sarkaç yaklaşık olarak $115\ s$ boyunca salındıktan sonra istenen yakalama bölgesine erişir. Yakalama bölgesine giren sarkaç geribeslemeli lineerleştirme metodu ile kararsız denge noktasında kararlı hale getirilerek kontrolü sağlanır, ancak bu işlem istenenden uzun sürmektedir.

Anahtarlamalı salınım kontrolü ile yapılan hibrid kontrolde sarkacın yaklaşık olarak $2\ s$'de yakalama bölgesine ulaşır. $2{,}5\ s$'de ise sarkaç kararsız denge noktasında kontrol edilir. Bu yöntem ile sarkaç kısa bir sürede kontrol edilebilemektedir.

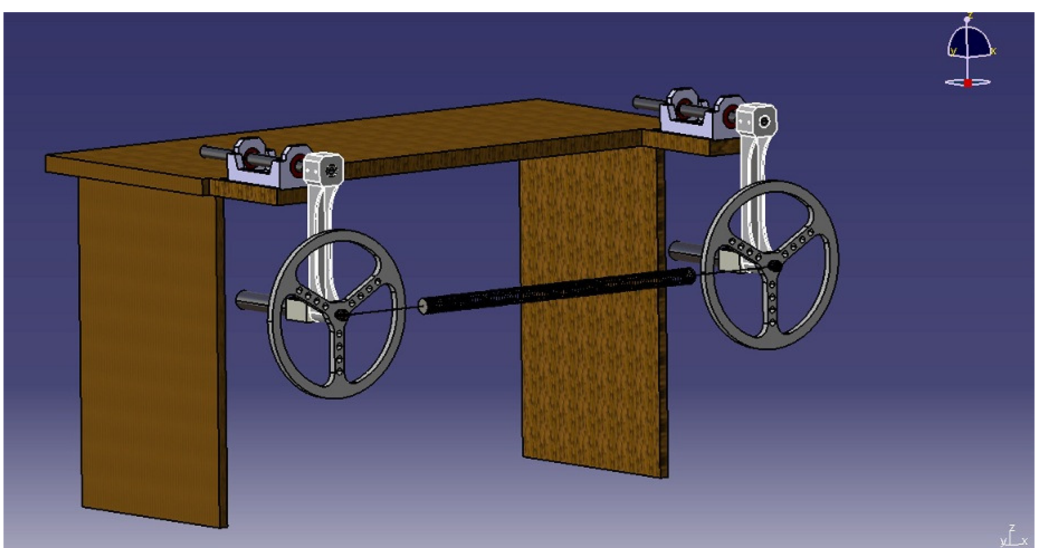
İki yöntem arasındaki en önemli fark sarkaçların istenen kontrol bölgesine erişmesi için geçen süredir. Enerji tabanlı sistemde sarkaç yaklaşık olarak $115\ s$'de yakalama bölgesine yaklaşırken, anahtarlamalı salınım ile $2\ s$'de bu bölgeye yaklaşır. Bu sonuca göre, salınım kontrolü için kullanılan ikinci yöntemin sarkacın kontrol edilmesinde çok daha hızlı olacağı söylenebilir.

5. GELECEKTE YAPILACAKLAR

Bu bölüm daha önceki bölümlerde tek sarkaç sistemi için yapılan çalışmanın birbirine elastik bir yükle bağlı iki sarkaca genişletilerek, bu sistemin imalatı, matematik modelinin EL modelinden farklı olarak Newton-Euler (NE) formülasyonu ile sağlanması ve sonuçların simülasyonunu içermektedir.

5.1 Birlikte Çalışan Çift Sarkaç Sisteminin İmalatı

Bölüm 2'de anlatılan tek sarkaç sistemini için verilen imalat kısmında deney düzeneği tasarlanırken birlikte çalışan sarkaç sistemi de dikkate alınmıştır. Bu kısımda yapılan tek şey, tek sarkaç sistemini kendisiyle özdeş olan diğer bir tek sarkaç sistemine elastik bir yük ile bağlamaktır. Elastik yük olarak herhangi bir elastik malzeme seçilebileceği için buradaki örnekte yay kullanılmıştır. Sarkaçlar birebir aynı olduğu için sarkaç parçaları bölüm 5.1'de tekrar anlatılmamıştır. Şekil 5.1a'da birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin CATIA çizimi ve şekil 5.1b'de ise birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin deney düzeneği gösterilmiştir.

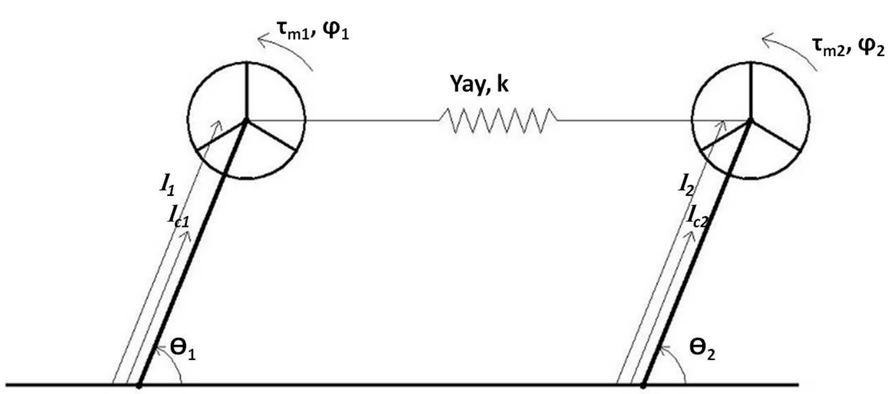


Şekil 5.1a: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin CATIA çizimi.

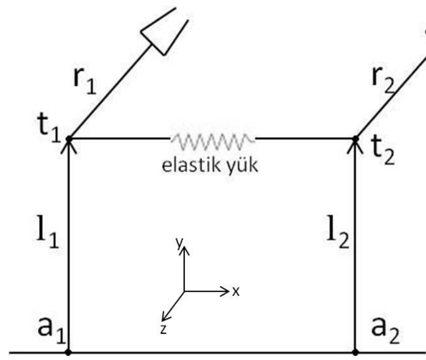
Şekil 5.1b: Birlikte çalışan çift sarkaç sistemi deney düzeneği.

5.2 Birlikte Çalışan Çift Sarkaç Sisteminin Dinamik Modeli

Çift sarkaç sisteminin matematik modeli çıkartılırken EL modelinden farklı bir yol olan, ancak aynı sonucu veren NE yaklaşımı kullanılacaktır. Bu metot enerji tabanlı olmayıp, tamamen Newton yasalarına dayanmaktadır. NE yönteminde modelin her rijit cismi (link) çizgisel ve açısal hızları bulunurak kinematik model ortaya çıkarılır, sonra da bu veriler kullanılarak sistemin tork ve kuvveti tanımlanarak matematik model elde edilir [21]. Şekil 5.2'de birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin modeli, şekil 5.3 ise birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin manipülatör modeli verilmektedir.



Şekil 5.2: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin modeli.



Şekil 5.3: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin manipülatör modeli.

Şekil 5.3'deki r_1 ve r_2 sarkaçların yarıçaplarına tekabül etmetedir.

5.2.1 Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin kinematik modeli

Kinematik modelin hesaplanmasında matris gösterilerinden yararlanılarak sonuca ulaşılacaktır. Kinematik modellemede her noktanın $(a_1,\ a_2,\ t_1, t_2)$ çizgisel ve açısal hız bilgileri bulunacaktır.

5.2.1.1 Birinci manipülatörün kinematik modeli

Şekil 5.2.2'deki a_1 noktası tek başına düşünüldüğünde sabit bir platforma denk düşmektedir, ancak ilk sarkaç a_1 noktası etrafında $\dot{\theta}_1$ hızı DC motorun etkisiyle dönmektedir. Bu örnek için dönme ekseni z eksenidir, sayfa düzleminden dışarıya doğrudur. a_1 noktasının hız denklemleri şu şekilde verilebilir,

$$\vec{\omega}_{a_1} = \dot{\theta}\vec{z}$$
$$\vec{v}_{a_1} = \vec{0} \tag{5.1}$$

Bulunan hız ifadelerini matris formunda yazımı aşağıdaki gibidir [23].

$$\vec{\vec{V}}_{a_1} = \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{a_1} \\ \\ \vec{v}_{a_1} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$\vec{\vec{V}}_{a_1}$ matrisi $6x1$'lik bir matristir ve içinde $3x1$'lik açılsal ve çizgisel hız vektörlerini bulundurur. Denklemlere bakıldığında açısal hızın sürekli z ekseninde ve çizgizel hızın da sürekli x-y ekseninde kaldığı görülecektir. Bundan dolayı bundan sonraki bölümlerde $\vec{\vec{V}}$ matrisi, diğer terimler her zaman sıfır olacağından dolayı, $3x1$'lik bir matris şeklinde olacaktır. İlk terimi dönmeyi, son iki terimi ise ötelemeyi gösterecektir. Eşitlik (5.2)'ye değerleri yazıldığında,

$$\vec{\vec{V}}_{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \tag{5.3}$$

ve hız denkleminin zamana göre türevi alındığında ivme eşitlikleri belirlenir.

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Eşitlik (5.4)'e eklenen ivme terimi ile yerçekimin etkisini sisteme dahil etmek amaçlanmıştır, çünkü kuvvetler belirlenirken cisimlerin ağırlıkları da dikkate alınmalıdır. Eklenen ivme terimi ile cisimlerin ağırlıkları da dikkate alınmış olunur. Yerçekimi ivmesi aşağı yönlü olduğundan kabulümüze göre negatif işaret alması gerekir. Böylelikle eşitlik (5.3) ve (5.4) ile a_1 noktasının kinematik denklemleri belirlenmiş olunur.

Bu noktadan hareketle t_1 noktasındaki hız ve ivme eşitlikleri yazılabilir. Bilindiği gibi rijit bir cisimde açısal hız cismin her noktasında aynıdır, ancak çizgisel hız değişmektedir. t_1 noktası ile a_1 noktası aynı rijit cisim üstünde döndüklerinden, t_1'in hız ve ivme eşitlikleri a_1 noktasından yararlanılarak bulunur.

Dikkat edilmesi gereken yer t_1 noktasının hem birinci rijit cisimde hem de ikinci rijit cisimde olduğudur. Burada t_1 noktasını iki ayrı nokta olarak değerlendirip çözüme gitmek daha doğru bir yaklaşım olacaktır. Öncelikle, a_1 ile aynı rijit cisim üstünde olan $t_1{}'$'nün hızı bulunup oradan t_1'in hızı yazılmalıdır.

$t_1{}'$ hem bağlı olduğu platformun çizgisel hızına hem de rijit cismin dönmesinden dolayı oluşan bir çizgisel hıza sahiptir. Açısal hızları rijit cisim olduğundan aynıdır.

$$\begin{gathered} \vec{\omega}_{t_1{}'} = \vec{\omega}_{a_1} \\ \vec{v}_{t_1{}'} = \vec{v}_{a_1} + \vec{\omega}_{t_1{}'} x \vec{l_1} \end{gathered} \tag{5.5}$$

t_1 noktası hem $t_1{}'$'nün hızına hem de motorun ona aktardığı hıza sahiptir ve t_1, $t_1{}'$ ile aynı eksen de beraber hareket ettiği için platform olarak $t_1{}'$ dikkate alınabilir.

Buna göre t_1'in hız denklemleri,

$$\vec{\omega}_{t_1} = \vec{\omega}_{t_1}{}' + \dot{\varphi}\vec{z}$$
$$\vec{v}_{t_1} = \vec{v}_{t_1}{}' \quad \textbf{(5.6)}$$

z eksenleri her zaman aynı doğrultuyu göstereceği için indis eklenmemiştir.

$\vec{l}_1$ vektörü sarkaç kolları döndükçe açı değişeceğinden bileşenleri buna bağlı olarak değişecektir. Eğer eşitlik (5.7) ve (5.8) ile tanımlanan $\vec{x}_1$ ve $\vec{y}_1$ vektörleri, sarkcın θ_1 kadar dönmesi ile $\vec{l}_1$ vektörü belirlenir.

$$\vec{x}_1 = \cos(\theta)\,\vec{x} + \sin\,(\theta)\vec{y} \quad \textbf{(5.7)}$$

$$\vec{y}_1 = -\sin(\theta)\,\vec{x} + \cos(\theta)\vec{y} \quad \textbf{(5.8)}$$

ve $\vec{l}_1$ vektörü,

$$\vec{l}_1 = l\vec{y}_1 = -lsin(\theta)\vec{x} + lcos(\theta)\vec{y} \quad \textbf{(5.9)}$$

Eşitlik (5.9) kısaca,

$$\vec{l}_1 = l_{x1}\vec{x} + l_{y1}\vec{y} \quad \textbf{(5.10)}$$

olacak şekilde tanımlanabilir. Benzer şekilde sarkaç kolunun kütle merkezini tanımlayan $\vec{l}_{c1}$ vektörü de yazılabilir.

$$\vec{l}_{c1} = \; l_{c1}\vec{y}_1 = -l_{c1}sin(\theta)\vec{x}_1 + l_{c1}cos(\theta)\vec{y}_1 \quad \textbf{(5.11)}$$

$$\vec{l}_{c1} = l_{cx_1}\vec{x}_1 + l_{cy_1}\vec{y}_1 \quad \textbf{(5.12)}$$

Bu tanımlar doğrultusunda kinematik denklemin son hali verilebilir.

$$\vec{\vec{V}}_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -l_{y_1} \\ l_{x_1} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \quad \textbf{(5.13)}$$

Eşitlik (5.13)'ün zamana göre türevi ivmeyi verir ve yerçekimi ivmesi de eklenirse eşitlik (5.14) bulunur.

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_{t_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -l_{y_1} \\ l_{x_1} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{x_1} \\ -l_{y_1} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g \tag{5.14}$$

Şu ana kadar eşitlik (5.3), (5.4), (5.13) ve (5.14) ile birinci manipülatörün kinematik modeli çıkartılmıştır. Benzer yöntem ile ikinci manipülatöründe kinematik modeli çıkartılabilir.

5.2.1.2 İkinci manipülatörün kinematik modeli

İkinci manipülatör, birinci ile aynı adımları izleyeceği için detaylar tekrar verilmemiştir. İkinci manipülatör için verilecek olan kinematik denklemlerde sadece indisler farklı olacaktır. Benzer şekilde, sarkaç kollunun uzunluğunun belirtilmesinde kullanılan vektörde de sadece indisler farklı olacaktır. Buna göre a_2 noktasının hız ve ivme denklemleri,

$$\vec{\vec{V}}_{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 \tag{5.15}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g \tag{5.16}$$

t_2 noktasının hız ve ivme denklemleri,

$$\vec{\vec{V}}_{t_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -l_{y_2} \\ l_{x_2} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2 \tag{5.17}$$

$$\dot{\vec{\vec{V}}}_{t_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -l_{y_2} \\ l_{x_2} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{x_2} \\ -l_{y_2} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} g \tag{5.18}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\vec{l}_2$ ve $\vec{l}_{c2}$ de açılımları $\vec{l}_1$ ve $\vec{l}_{c1}$ ile aynı olacak şekilde yazılabilir.

$$\vec{l}_2 = l_{x2}\vec{x} + l_{y2}\vec{y}$$

$$\vec{l}_{c2} = l_{cx_2}\vec{x}_1 + l_{cy_2}\vec{y}_1$$

5.2.2 Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin dinamik modeli

NE denklemi var olan bir sistemin dinamiğini incelemeye yarayan bir yöntemdir. NE yönteminin sonucunda EL ile birebir aynı sonuçlar elde edilir. NE'in tek sarkaç modelinde anlatılan EL'den farkı, sistemi kuvvet ve tork dengelenmeleri ile inceleyip sonuca oluşmasıdır. Manipülatör modellemesine rahatlıkla uygulanabilen bu yöntemde birbirine bağlı rijit cisimler vardır ve bunlar birlikte hareket ettikleri için birbirlerine tork ve kuvvet aktarırlar. Newton yasaları uygulanırken bu kuvvetler ve torklar dikkate alınır. Sistemin öteleme hareketine Newton denklemi, dönme hareketine de Euler denklemi denir. İkisinin birleşmesiyle de NE dinamik modeli ortaya çıkar [21, 22].

n tane serbestlik derecesine sahip bir manipülatörün k. rijit cismine etkiyen kuvvet ve torkun genel ifadesi eşitlik (5.19)'da gösterilmiştir. Kuvvet vektörlerinin gösteriminde çift oklu gösterim şekli kullanılmıştır. $\vec{\vec{F}}_k$ vektörü her biri $3x1$'lik olan tork ve kuvvet vektörlerinden oluşmuş $6x1$'lik bir vektördür, ancak kolaylık olması açısından sürekli sıfır olan terimler hiç yazılmayarak vektör $3x1$'lik olarak gösterilmiştir.

$$\vec{\vec{F}}_k = \begin{bmatrix} \vec{\tau}_k \\ \vec{f}_k \end{bmatrix}$$

$$\vec{\vec{F}}_k = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \vec{l}_{k,k+1}\mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tau}_{k+1} \\ \vec{f}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_k & m_k\vec{l}_{k,c}\mathrm{x} \\ -m_k\vec{l}_{k,c}\mathrm{x} & m_k\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_k \\ \dot{\vec{v}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}_k\mathrm{x}\mathfrak{T}_k\vec{\omega}_k \\ m_k\vec{\omega}_k\mathrm{x}(\vec{\omega}_k\mathrm{x}\vec{l}_{k,c}) \end{bmatrix} + \vec{\vec{F}}_L \tag{5.19}$$

İfadedeki $\vec{l}_{k,k+1}$ ile verilen k. eklemin $k+1$. ekleme olan uzaklığı, $\vec{l}_{k,c}$ k. eklemin k. rijit cismin kütle merkezine olan uzaklığı, m_k k. rijit cismin kütlesi ve $\mathfrak{T}_k$ ise eylemsizlik tensörü olarak verilir. $\vec{\vec{F}}_L$ manipülatöre dışarıdan etkiyen kuvvetleri belirtir ve açık ifadesi eşitlik (5.20)'de verilmiştir. F_L terimi sisteme dışarıdan etkiyen bir kuvvet olarak düşünülebilir.

$$\vec{\vec{F}}_L = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \vec{l}_{k,L}\mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tau}_L \\ \vec{f}_L \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

$\vec{l}_{k,L}$ vektörü $k.$ eklemden F_L'nin etkidiği noktaya olan uzaklığıdır. Buradan hareketle eşitlik (5.19)'u daha sade bir formda yazmak mümkündür.

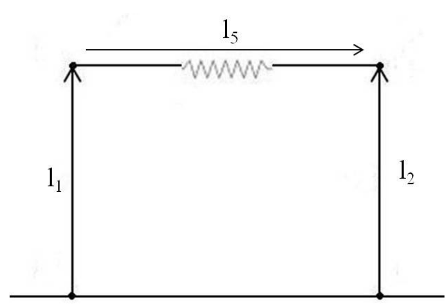
$$F_k = \phi^T_{k+1,k} F_{k+1} + M_k \dot{V}_k + C_k + F_L \tag{5.21}$$

$\phi^T_{k+1,k}$ propogasyon matrisinin transpozesi, F_{k+1} $k+1$. rijit cisimden etkiyen kuvvet ve tork vektörü, M_k rijit cismin kütle matrisi, $\dot{V}_k$ rijit cismin ivmesi, C_k merkezkaç ve Coriolis kuvvet matrisidir.

Birlikte çalışan çift sarkaç sistemini şekil 5.3'te verildiği gibi ortak elastik bir yükle bir birine bağlanmış iki manipülatör olarak varsayılabilir. Aralarındaki elastik yük (yay) her iki manipülatöre de kuvvet uygulayacaktır. Yayın uyguladığı kuvvet elastikiyet sınırları içinde olmak koşulu ile

$$F = kx \tag{5.22}$$

şeklinde verilir. x değişimini belirlemek için manipülatörün tüm uzuvlarına birer uzunluk vektörü atanarak yaydaki değişim miktarı belirlenir. Şekil 5.4 birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin vektör temsilini göstermektedir. Yay vektörü beşinci uzuv olduğu için $\vec{l}_5$ vektörü ile temsil edilmiştir.



Şekil 5.4: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin vektör temsili.

$\vec{l}_5$ vektöründeki değişimin belirlenmesinde vektörlerin toplanması kuralından yararlanılabilir.

$$\Delta\vec{l_5} = \vec{l_2} - \vec{l_1} \tag{5.23}$$

ve $\Delta\overrightarrow{l_5} \equiv$ x olarak verilebilir.

$$\Delta\overrightarrow{l_5} = \left(l_{x_2} - l_{x_1}\right)\vec{x} + (l_{y_2} - l_{y_1})\vec{y}$$

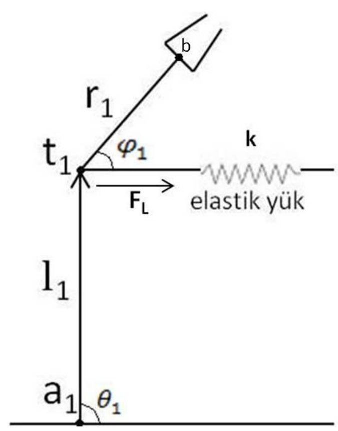
Matris formunda yazılınca

$$\Delta\vec{l_5} = \begin{bmatrix} l_{x_2} - l_{x_1} \\ l_{y_2} - l_{y_1} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.24)}$$

elde edilir. Kuvvet ve tork hesabı yapılırken kinematikte yapılanın aksine üst noktadan başlayıp alt noktaya doğru gidilir. Çift sarkaç sistemi tekrar iki ayrı manipülatör gibi alınıp, dinamik model elde edilebilir.

5.2.2.1 Birinci manipülatörün dinamik modeli

Şekil 5.5'te çift sarkaç sisteminin birbirine bağlı iki ayrı özdeş manipülatörden birincisi gösterilmektedir. Model de kuvvet ve tork hesabına t_1 noktasından başlanır ve a_1 nokasına doğru devam edilir.



Şekil 5.5: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin birinci manipülatörü.

Kuvvet ve tork dağılımı eşitlik (5.19)'dan yararlanılarak belirlenir. t_1 noktası tek başına incelendiğinde t_1 noktası birinci manipülatörün r_1. uzvu olup ve buna bağlı olan başka bir uzuv bulunmadığı (b noktasına bağlı bir uzuv yok) için başka bir uzuvdan etkiyen kuvvet veya tork yoktur, ama elastik yükten dolayı bir kuvvet oluşmaktadır. Bu kuvvet t_1 noktasının dönme eksenine dik doğrultuda bir kuvvet uyguladığı için bir tork oluşturmaz. $\vec{l}_{k,L} = \vec{0}$'dır çünkü t_1 ile F_L'nin etkidiği nokta aynı yerdedir ve F_L yay kuvveti eşitlik (5.20) yardımıyla bulunabilir. Ayrıca tekerlek simetrik olduğu için kütle merkezi tekerleğin tam orta noktasında olur ve $\vec{l}_{t_1,c} = \vec{0}$ sonucuna ulaştırır.

$$\vec{\tau}_{k+1} = \vec{0},\ \vec{f}_{k+1} = \vec{0},\ \vec{l}_{k,L} = \vec{0},\ \vec{l}_{t_1,c} = \vec{0}, \vec{\vec{F}}_L = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{f}_L \end{bmatrix} \text{ ve } \vec{f}_L = k\Delta\vec{l}_5$$

Buradan da $\vec{\vec{F}}_L$'nin değeri yay kuvveti pozitif yönlü olduğundan,

$$\vec{\vec{F}}_L = \begin{bmatrix} k(l_{x_2} - l_{x_1}) \\ k(l_{y_2} - l_{y_1}) \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

ile verilir.

Diğer yandan t_1 noktasındaki eylemsizlik tensörü $\mathfrak{T}_{t_1} = J_w$ olarak verilir çünkü bu nokta sarkacın tekerleğini temsil eder. Kütlesi ise $m_{t_1} = m_w$ olarak verilir. $\vec{\omega}_{t_1}\mathrm{x}\mathfrak{T}_{t_1}\vec{\omega}_{t_1}$terimi ise $\mathfrak{T}_{t_1}$eylemsizlik tensörü $\vec{\omega}_{t_1}$'in doğrultusunu değiştirmeyip sadece büyüklüğünü değiştirdiği için sıfır olur. $m_{t_1}\vec{\omega}_{t_1}\mathrm{x}\left(\vec{\omega}_{t_1}\mathrm{x}\vec{l}_{t_1,c}\right)$ terimi $\vec{l}_{t_1,c} = \vec{0}$ olduğundan sıfır olur. Tüm bu veriler eşitlik (5.19)'da yerine yazılınca t_1 noktası için kuvvet ve tork hesaplanır.

$$\vec{\vec{F}}_{t_1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \vec{l}_{t_1,b}\mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tau}_{k+1} \\ \vec{f}_{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_1} & m_{t_1}\vec{l}_{t_1,c}\mathrm{x} \\ -m_{t_1}\vec{l}_{t_1,c}\mathrm{x} & m_{t_1}\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{t_1} \\ \dot{\vec{v}}_{t_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{t_1}\mathrm{x}\mathfrak{T}_{t_1}\vec{\omega}_{t_1} \\ m_{t_1}\vec{\omega}_{t_1}\mathrm{x}\left(\vec{\omega}_{t_1}\mathrm{x}\vec{l}_{t_1,c}\right) \end{bmatrix} + \vec{\vec{F}}_L$$

$$\vec{\vec{F}}_{t_1} = \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_1} & 0 \\ 0 & m_{t_1}\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{t_1} \\ \dot{\vec{v}}_{t_1} \end{bmatrix} + \vec{\vec{F}}_L \tag{5.26}$$

Eşitlik (5.26)'da eşitlik (5.14) ve (5.25) uygun yerlere yazıldığında

$$\vec{\vec{F}}_{t_1} = \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_1} \\ -m_{t_1}l_{y_1} \\ m_{t_1}l_{x_1} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{t_1} \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} 0 \\ k\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right) \\ k\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

t_1 noktasına etkiyen tork ve kuvvet denklemleri bulunmuş olunur. Dikkat edilmesi gereken nokta ise t_1 noktasına DC motorun takılı olduğundan t_1 noktasına DC motor tarafından bir tork uygulanır, ama herhangi bir kuvvet uygulanmaz. Bu açıklama doğrultusunda $\vec{\vec{F}}_{t_1}$ aynı zamanda,

$$\vec{\vec{F}}_{t_1} = \begin{bmatrix} \vec{\tau}_{m_1} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

olarak da verilebilir. t_1 noktasına etkiyen kuvvet ve tork dağılımı bulunduğuna göre a_1 noktasına etkiyen kuvvet ve tork dağılımı hesaplanabilir.

a_1 noktasına dışarıdan bir kuvvet etki etmemektedir ve dolayısıyla $\vec{\vec{F}}_L$ terimi sıfırdır, ancak t_1 noktasına uygulanan $\vec{\vec{F}}_L$ terimi a_1 noktasına aktarılacaktır. t_1 noktasında kullanılan eşitlik (5.19) a_1 noktası için de kullanılabilir. $\vec{l}_{k,k+1}$ uzunluk vektörü a_1 noktası ile t_1 arası uzaklık olduğu için $\vec{l}_{k,k+1} = \vec{l}_1$ olur. $\vec{l}_{k,c}$ ise a_1 noktasının sarkaç kolunun kütle merkezine olan uzaklığını temsil ettiği için de $\vec{l}_{k,c} = \vec{l}_{c1}$'dir. Eğer a_1 noktası için genel kuvvet ve tork ifadesi yazılamak istenirse,

$$\vec{\vec{F}}_{a_1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \vec{l}_1 \mathrm{x} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \vec{\vec{F}}_{t_1} + \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{a_1} & m_{a_1}\vec{l}_{c1}\mathrm{x} \\ -m_{a_1}\vec{l}_{c1}\mathrm{x} & m_{a_1}\mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{\omega}}_{a_1} \\ \dot{\vec{v}}_{a_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{\omega}_{a_1}\mathrm{x}\mathfrak{T}_{a_1}\vec{\omega}_{a_1} \\ m_{a_1}\vec{\omega}_{a_1}\mathrm{x}\left(\vec{\omega}_{a_1}\mathrm{x}\vec{l}_{c1}\right) \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

ifadesi elde edilir. İfadedeki $\mathfrak{T}_{a_1}$ eylemsizlik tensörünün içinde hem sarkaç kolunun hem de DC motorun eylemsizliği vardır ve hesaplanırken paralel eksen teoreminden yararlanılmıştır. Bu bölümde motorun eylemsizliği sarkaç kolunun içine dahil edilmiştir. Tek sarkaç modelinde motor sarkaç kolundan ayrı olarak değerlendirilmişti.

$$\mathfrak{T}_{a_1} = J_s + m_{a_1} l_{c_1}^2$$

ve yazılan m_{a_1} kütlesi ise birinci manipülatördeki sarkaç kolunun ve DC motorun kütlesidir.

$$m_{a_1} = m_{s_1} + m_{m_1}$$

$\vec{l}_{c1}\mathrm{x} = \hat{l}_{c1}$ çarpık simetrik matris olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca eşitlik (5.29)'da verilen $\vec{\omega}_{a_1}\mathrm{x}\mathfrak{I}_{a_1}\vec{\omega}_{a_1}$ ifadesi $\mathfrak{I}_{a_1}$'in $\vec{\omega}_{a_1}$'in doğrultusunu değiştirmediği için yine sıfırdır, ancak $m_{a_1}\vec{\omega}_{a_1}\mathrm{x}(\vec{\omega}_{a_1}\mathrm{x}\vec{l}_{c1})$ terimi sıfırdan farklı olacaktır. Tüm bunlara dayanılarak a_1 noktasına etkiyen kuvvet ve tork ifadesi,

$$\vec{\vec{F}}_{a_1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ F_2 \\ H_2 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{t_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_{t_1}l_{x_1} \\ -m_{t_1}l_{y_1} \end{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 - \begin{bmatrix} (m_{t_1}l_{x_1} + m_{a_1}l_{cx_1}) \\ 0 \\ m_{t_1} + m_{a_1} \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} K_2 \\ L_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Eşitlik (5.30)'da verilen kısaltmalar;

$$T_1 = \mathfrak{I}_{a_1} + \mathfrak{I}_{t_1} + m_{t_1}l_1^2$$

$$F_1 = -m_{t_1}l_{y_1} + m_{a_1}l_{cy_1}$$

$$H_1 = m_{t_1}l_{x_1} - m_{a_1}l_{cx_1}$$

$$K_1 = k\left(l_{x_1}(l_{y_2} - l_{y_1}) - l_{y_1}(l_{x_2} - l_{x_1})\right)$$

$$L_1 = k(l_{x_2} - l_{x_1}) - m_{a_1}\omega_{a_1}^2 l_{cx_1}$$

$$P_1 = k(l_{y_2} - l_{y_1}) - m_{a_1}\omega_{a_1}^2 l_{cy_1}$$

şeklindedir. Eşitlik (5.30) ile a_1 noktasındaki kuvvet ve tork ifadeleri elde edilir. Eşitliğin ilk terimi torku diğer iki terim ise sırasıyla x ve y eksenlerindeki kuvvetleri gösterir. a_1 noktası sarkaç sisteminin sabitlendiği noktayı gösterir ve sarkaç kolu a_1 noktası etrafında rulmanlar sayesinde serbestçe dönebilmektedir. Bu yüzden masaya bir tork aktarımı olmayacağından $\vec{\tau}_{a_1} = 0$'dır.

Birinci manipülatörün dinamik modelini veren eşitlik (5.27) ve (5.30)'nin tork terimleri alınarak dönme hareketi incelenebilir. Eğer istenirse kuvvet terimleri de benzer şekilde alınarak analiz edilebilir. $\vec{\tau}_{t_1} = \vec{\tau}_{m_1}$ ve $\vec{\tau}_{a_1} = \vec{0}$ olduğudan,

$$\vec{\tau}_{a_1} = (\mathfrak{I}_{a_1} + \mathfrak{I}_{t_1} + m_{t_1}l_1^2)\ddot{\theta}_1 + \mathfrak{I}_{t_1}\ddot{\varphi}_1 - (m_{t_1}l_{x_1} + m_{a_1}l_{cx_1})g + k\left(l_{x_1}(l_{y_2} - l_{y_1}) - l_{y_1}(l_{x_2} - l_{x_1})\right)$$

$$\vec{\tau}_{t_1} = \mathfrak{T}_{t_1}\ddot{\theta}_1 + \mathfrak{T}_{t_1}\ddot{\varphi}_1$$

ve unutulmamalıdırki sarkaçlar özdeş olduğundan indisler farklı olsa dahi kütle, uzunluk ve eylemsizlikler bir sarkaç için belirlendiğinde diğeri içinde bulunur. Örneğin $l_1 = l_2 = l$ ve $m_{t_1} = m_{t_2} = m_t$ dir. Buna dayanarak şu tanım yapılabilir: $\overline{m}_1 = m_w l + m_a l_c$, bu tanımla beraber sırasıyla a_1 ve t_1 noktasının tork ifadesi,

$A_1 = J_s + J_w + m_w l_1^2 + m_{a_1} l_{c1}^2$ olmak üzere,

$$A_1\ddot{\theta}_1 + J_w\ddot{\varphi}_1 - \overline{m}_1 g sin(\theta_1) + k\left(l_{x_1}\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - l_{y_1}\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right)\right) = 0$$
$$\tau_{m_1} = J_w\ddot{\theta}_1 + J_w\ddot{\varphi}_1 \tag{5.31}$$

Eşitlik (5.31) ile verilir. Eşitlik incelendiğinde eğer yay kuvvetinin etkisi olmasaydı bu sonucun eşitlik (3.21) ve (3.23)'ün birebir aynısı çıkmıştır. Eşitlik (3.21)'deki A terimi ile a_1 noktasına etkiyen torkun $\ddot{\theta}_1$'in katsayısı A_1 paralellik göstermektedir. Buradaki fark eylemsizlik momentlerinin seçiminden kaynaklanmıştır. Eşitlik (3.21) hesaplanırken motor sarkaç koluna dahil edilmiştir. Eşitlik (5.31)'de ise motor sarkaç koluna dahil edilmiş olup ikisinin kütle merkezi dikkate alındığı için l_c teriminde de farklılık olmuştur.

5.2.2.2 İkinci manipülatörün dinamik modeli

İkinci manipülatörün birinci manipülatörden tek farklı etkiyen elastik yük kuvvetinin negatif işaretli olması ve indislerin ikinci manipülatöre uygun olmasıdır. Bu sebeple ara işlemler tekrarlanmayıp sadece sonuçlar verilecektir.

t_2 noktasına etkiyen kuvvet ve tork ifadesi,

$$\vec{\vec{F}}_{t_2} = \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_2} \\ -m_{t_2} l_{y_2} \\ m_{t_2} l_{x_2} \end{bmatrix}\ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ddot{\varphi}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{t_2} \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} 0 \\ -k\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right) \\ -k\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

Yaydan kaynaklanan kuvvette sadece kuvvetin yönü değişir, bu yüzden de kuvvet içinde yer alan indisler değiştirilmez. Eşitlik (5.32)'deki eylemsizlik tensörü $\mathfrak{T}_{t_2} = J_w$ ve $m_{t_2} = m_w$'dir.

a_2 noktasına etkiyen kuvvet ve tork ifadesi,

$$\begin{aligned}\vec{\vec{F}}_{a_2} &= \begin{bmatrix} T_2 \\ F_2 \\ H_2 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} \mathfrak{T}_{t_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_{t_2} l_{x_2} \\ -m_{t_2} l_{y_2} \end{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\ &- \begin{bmatrix} \left(m_{t_2} l_{x_2} + m_{a_2} l_{cx_2}\right) \\ 0 \\ m_{t_2} + m_{a_2} \end{bmatrix} g + \begin{bmatrix} K_2 \\ L_2 \\ P_2 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.33}$$

Eşitlik (5.33)'te verilen kısaltmalar,

$$T_2 = \mathfrak{T}_{a_2} + \mathfrak{T}_{t_2} + m_{t_2} l_2^2$$

$$F_2 = -m_{t_2} l_{y_2} + m_{a_2} l_{cy_2}$$

$$H_2 = m_{t_2} l_{x_2} - m_{a_2} l_{cx_2}$$

$$K_2 = -k\left(l_{x_1}\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - l_{y_1}\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right)\right)$$

$$L_2 = -k\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right) - m_{a_2} \omega_{a_2}^2 l_{cx_2}$$

$$P_2 = -k\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - m_{a_2} \omega_{a_2}^2 l_{cy_2}$$

$$\mathfrak{T}_{a_2} = J_s + m_{a_2} l_{c_2}^2$$

ve yazılan m_{a_2} kütlesi ise birinci manipülatördeki sarkaç kolunun ve DC motorun kütlesidir.

$$m_{a_2} = m_{s_2} + m_{m_2} \text{ ve } \overline{m}_2 = m_w l + m_a l_c$$

$$A_2 = J_s + J_w + m_w l_2^2 + m_{a_2} l_{c2}^2$$

veriler yerine yazılıp düzenlendiğinde,

$$\begin{gathered} A_2 \ddot{\theta}_2 + J_w \ddot{\varphi}_2 - \overline{m}_2 g sin(\theta_2) - k\left(l_{x_1}\left(l_{y_2} - l_{y_1}\right) - l_{y_1}\left(l_{x_2} - l_{x_1}\right)\right) = 0 \\ \tau_{m_2} = J_w \ddot{\theta}_2 + J_w \ddot{\varphi}_2 \end{gathered} \tag{5.34}$$

elde edilir. Tekerleğe bağlanan DC motorlar da özdeş olduğu için $\tau_{m_1} = \tau_{m_2} = \tau_m$ yaklaşımı yapılabilir.

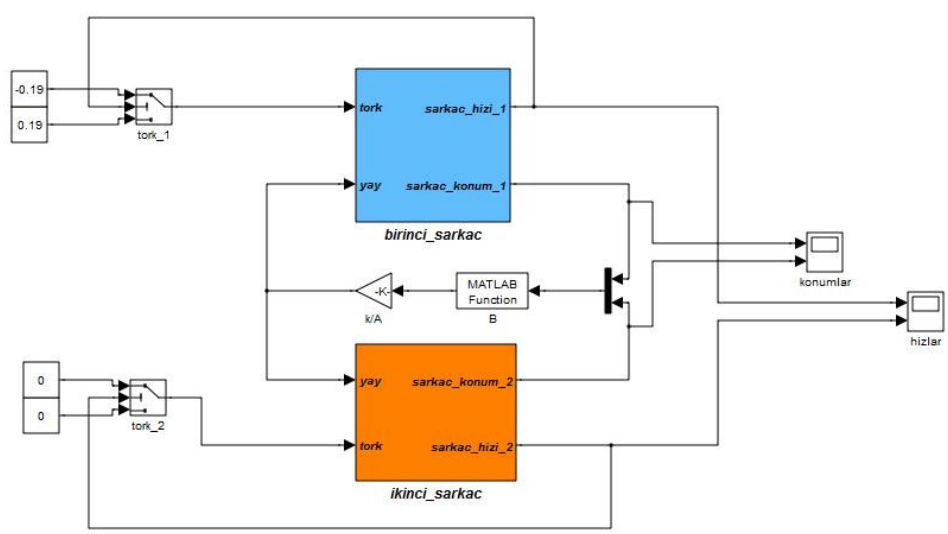
5.3 Birlikte Çalışan Çift Sarkaç Sisteminin Simülasyonu

Matematiksel modelin simülasyonunda kullanılan veriler çizelge 5.1'de verildiği gibidir.

Çizelge 5.1: Dinamik modelin simülasyonunda kullanılan veriler.

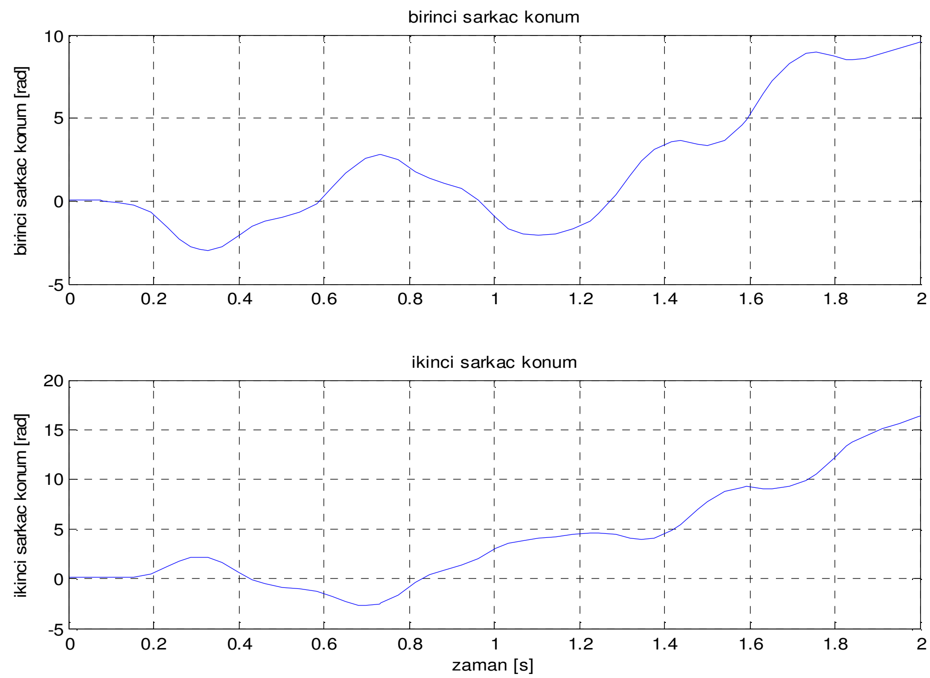
$m_a = 0{,}44kg$	$J_s = 0{,}001kgm^2$	$l_i = 0{,}176m$	$\overline{m}_i = 0{,}086$
$m_w = 0{,}139kg$	$J_w = 7{,}909.10^{-4}kgm^2$	$l_{c_i} = 0{,}139m$	$A_i = 0{,}0146$
$k = 150$	$g = 9{,}81m/s^2$		

Çizelge 5.1 kullanılarak yapılan simülasyonun MATLAB-Simulink bloğu şekil 5.6'da gösterildiği gibidir. Simülasyonda dikkat edilmesi gereken sarkaçlardan birine sıfır tork uygulandığıdır. Dinamik model ideal yaklaşımla hesaplandığı için sürtünmeler ihmal edilmiştir. Gerçek sistemde her ne kadar sarkaçlar ve motorlar özdeş olsada sürtünmelerden dolayı aralarında hız farkı olacaktır. Bunu sağlayabilmek için birlikte çalışan tekerlekli sarkaç sistemindeki tek sarkaca tork uygulanmamış tamamen tek motorun etkisiyle salınımı gerçekleştirlmiştir.

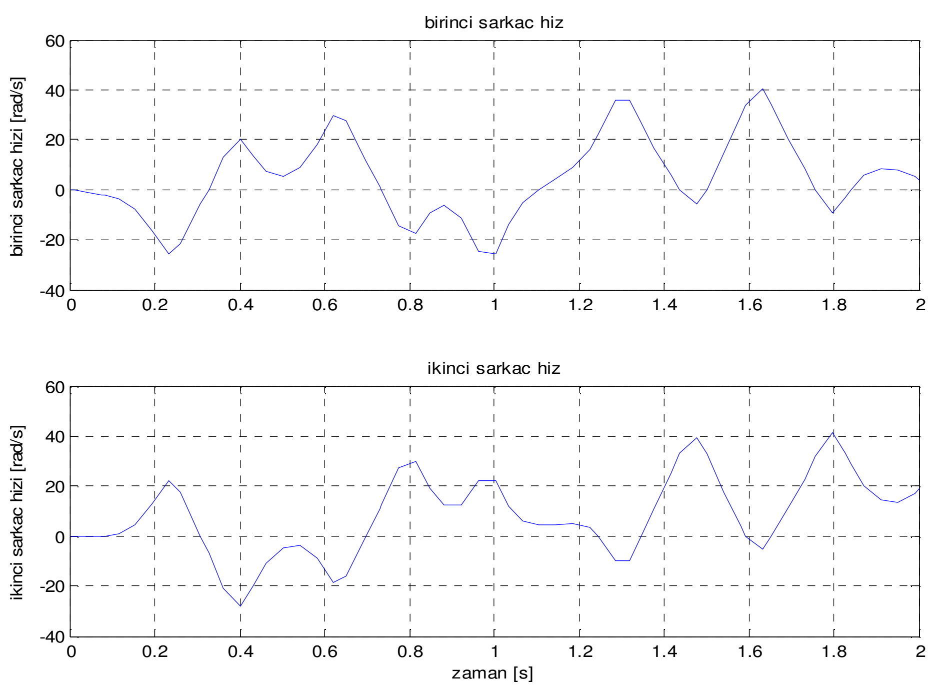


Şekil 5.6: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin MATLAB-Simulink bloğu.

Simülasyonda başlangıç koşulu olarak 0,1 verilmiştir, sadece sarkaç kollarının ilk hızın da $-0{,}1$ değeri kullanılmıştır. Verilen başlangıç koşulları için yapılan simülasyonun sonuçlarına göre olan sarkaçların konum ve hız bilgileri sırasıyla şekil 5.7 ve 5.8'de gösterilmiştir.



Şekil 5.7: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin konum grafikleri.



Şekil 5.8: Birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin hız grafikleri.

Şekil 5.7 ve 5.8 incelendiğinde sarkaçların birkaç salınım sonra üst denge noktasına yaklaştıkları görülebilir. Sistem dördüncü salınımda üst denge noktasına doğru gitmeye başlamaktadır. Yayın etkisiyle de ikinci sarkaca enerji aktarımı sağlanmıştır ve ikinci sarkaç da böylece üst denge noktasına doğru hareket etmeye başlamıştır. Yay etkisinden dolayı iki sarkaç da inişli çıkışlı hareket yaparlar.

5.4 Birlikte Çalışan Çift Sarkaç Sistemi İçin Kontrol Senaryoları

Birlikte çalışan sarkaç sistemi ilk önce her iki sarkacında özdeş bir motor tarafından sürüleceği varsayımı yapılarak kontrolü sağlanılmaya çalışılacaktır. İki motorda aynı yönde hemen hemen aynı anda aynı hızla harekete başlayacağı için iki sarkaç arasında ki elastik yükten kaynaklanan kuvvet nispeten daha az olacağı için öncelik bu senaryoyu gerçeklemeye verilecektir. Burada iki DC motorunda kontrolü sağlanacaktır.

Diğer gerçeklenebilecek senaryo ise çift sarkaç sisteminin simülasyonda olduğu gibi sadece tek bir motor tarafından sürülüp iki sarkacı da üst denge noktasına getirmek olacaktır. Bu sefer enerji aktarımı sadece tek bir motordan üzerinden sağlanacağı için daha zor bir senaryo ile karşılaşılacaktır. Burada sadece tek DC motor kontrol edilerek sistemin istenen noktaya gelmesi hedeflenmektedir.

6. SONUÇ

Sonuç olarak, birinci bölümde tek sarkaç sisteminin tanımı yapılmış, neden önemli olduğu ile ilgili bilgiler verilerek literatürde sarkaç sistemlerinin kotrolü için yapılan yöntemler incelenmiştir. Bir sonraki bölüm olan tasarım ve imalat kısmında, tek sarkaç sistemin tasarımı anlatılmış ve bu tasarımın yapılabileceği CATIA aracılığı ile ispatlanıp, dinamik model simülasyonlarıyla da teyit edilmiştir. Üçüncü bölümde, tek sarkaç sistemi için sürtünmesiz ortamda dinamik modeli EL denklemiyle bulunmuş ve dinamik modelin MATLAB-Simulink sonuçları gösterilmiştir. Daha sonra bu tezin kapsamı dışında kalan sürtünmelerin sisteme nasıl dahil edilebileceği ile ilgili fikir verilmiştir. Dördüncü bölümde, literatürde uygulanan bazı kontrol yöntemleri kullanılarak simülasyon ortamında bunların çalıştığı gösterilmiştir. Uygulanan kontrol yöntemleri şu şekilde sıralanabilir: geribeslemeli lineerleştirme, enerji tabanlı salınım kontrolü, anahtarlama ile salınım kontrolü ve hibrid kontrol. Enerji tabanlı salınım kontrolünde enerjiye bağlı olarak yazılan Lyapunov fonksiyonu kullanılmış ve daha sonra bulunan kontrol girişi geribeslemeli lineerleştirme ile birleştirilip hibrid bir kontrol sistemi elde edilmiştir. Benzer ilişki anahtarlama ile salınım kontrolü ile sağlanıp sistemin MATLAB-Simulink bloğu verilmiştir. Beşinci bölümde ise gelecek de yapılabilecek çalışmalar hakkında temel atılmış ve bu konu hakkında bilgi verilmiştir. Gelecekte yapılması hedeflenen tek sarkaç kontrolü yerine bir sonraki aşama olan elastik bir yükle birbirine bağlanmış, özdeş sarkaç ve motorlardan oluşan birlikte çalışan bir modeli kontrol etmektir. Bunun için öncelikle birlikte çalışan çift sarkaç sisteminin NE denklemleri ile dinamik modeli elde edilmiştir. Daha sonra bu model kullanılarak sistemin MATLAB-Simulink bloğu hazırlanmış ve sonuçlar tartışılmıştır.

Bu çalışmada kullanılan geribeslemeli lineerleştirme metodu, enerji tabanlı salınım kontrolü ve hibrid kontrolör literatürdeki çalışmalarla uyumlu olmuştur. Sarkacın üst denge noktasındaki kontrolü sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] **V. Santibañez, R. Kelly and J. Sandoval,** 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 Seville, Spain, December 12-15, 2005: Control of the Inertia Wheel Pendulum by Bounded Torques.

[2] **Mark W. Spong, P. Corke and R. Lozano**, Automatica 37 (2001) pp 1845-1851: Nonlinear Control of the Reaction Wheel Pendulum.

[3] **C. A. Ibañez, O. Gutiérrez Frías and M. Suárez Castañón**, 2008: Controlling the Strongly Damping Inertia Wheel Pendulum via Nested Saturation Functions.

[4] **C. A. Ibañez, O. Gutiérrez Frías and M. Suárez Castañón**, Nonlinear Dynamics (2005) 40:367-374: Lyapunov – Based Controller for the Inverted Pendulum Cart System.

[5] **O. Octavio Gutiérrez Frías**, 2011 American Control Conference IEEE: Lyapunov Method for the Controlling of the Two Wheels Inverted Pendulum.

[6] **Ryosuke Tatsumi and Kiyotsugu Takaba**, ICROS-SICE International Joint Conference 2009: Swing-up Control of an Inverted Pendulum with Limited Pivot Travel.

[7] **T. Maeba, M. Deng, A. Yanou and T. Henmi**, Proceeding of the 2010: Swing-up Controller Design for Inverted Pendulum by Using Energy Control Method Based on Lyapunov Function.

[8] **B. Bapiraju, K. N. Srinivas, Prem Kumar P. and L. Behera**, IEEE India Annual Conference 2004: On Balancing Control Strategies for a Reaction Wheel Pendulum.

[9] **Iraj Hassanzadeh and Saleh Mobayen**, Proceeding of the 5th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISM08) 2008: GA Based Input-Output Feedback Linearization Controller for Rotary Inverted Pendulum System.

[10] **S. Panya, T. Benjanarasuth, S. Nundrakwang, J. Ngamwiwit and N. Komine**, 2008 IEEE: Hybrid Controller for Inverted Pendulum System.

[11] **Daniel J. Block, Karl J. Åström and Mark W. Spong,** Synthesis Lectures on Control and Mechatronics, Morgan & Claypool Publishers, Princeton, NJ, 2007: The Reaction Wheel Pendulum.

[12] **N. Qaiser, N. Iqbal, Amir Hussain and Naeem Qaiser**, Journal of Circuits, System and Computers Vol. 16, No.1 (2007) 81-92: Exponential Stabilization of the Inertia Wheel Pendulum Using Dynamic Surface Control.

[13] **K.N.Srinivas and Laxmidhar Behera,** International Journal of Systems Science Vol.39, No.12 December 2008, 1165-1177: Swing-up Control Strategies for a Reaction Wheel Pendulum.

[14] **F. Jepsen, A. Søborg, A. R. Pedersen And Z. Yang**, Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation August 9 - 12, Changchun, China: Development and Control of an Inverted Pendulum Driven by a Reaction Wheel.

[15] **T. Henmi, M. Deng, A. Inoue, N. Ueki and Y. Hirashima**, Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston: Swing-up Control of a Serial Double Inverted Pendulum.

[16] **S. Andary, A. Chemori and S. Krut,** Advanced Robotics 23 (2009) 1999-2014: Control of the Underactuated Inertia Wheel Inverted Pendulum for Stable Limit Cycle Generation.

[17] **Ilya V. Burkov**, International Conference Physics and Control, 2007: Stabilization of the Desired Uniform Rotation in Underactuated Systems.

[18] **Xin Xin, S. Tanaka, Jin-HuaShe and T. Yamasaki,** 2010 IEEE: Revisiting Energy – Based Swing-up Control for the Pendubot.

[19] **Xin Xin**, Proceedings of the 30th Chinese Control Conference 2011: Swing-up and Stabilizing Control for Two-Link Underactuated Robot with Flexible Elbow Joint.

[20] **Isabelle Fantoni and Rogelio Lozano**, Springer 2002: Non-Linear Control for Underactuated Mechanical Systems.

[21] **M. Spong, S. Hutchinson, M Vidyasagar**, JOHN WILEY & SONS 2005 First Edition, INC: Robot Modeling and Control.

[22] **B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo**, 2009 Springer-Verlag London Limited: Robotics Modelling, Planning and Control.

[23] **Yesiloglu, S. M.,** Fen Bilimleri Enstitusu, 2007, Advisor: Prof.Dr. Hakan Temeltas: High Performance Dynamical Modeling Of Complex Topology Systems, Ph.D., Istanbul Teknik Universitesi.

[24] **Ayşe Soyuçok, Özgün Soyuçok, R.C. Hibbeler**, 2006 Literatür Yayıncılık: Dinamik

[25] **I. Fantoni, R. Lozano, and M. W. Spong,** IEEE Transactıons on Automatıc Control, vol. 45, NO. 4, APRIL 2000: Energy Based Control of the Pendubot

[26] **H. J. Marquez,** 2003 by John Wiley&Sons: Nonlinear Control System Analysis and Design.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ozan TÜRKER

Doğum Yeri ve Tarihi: 23.04.1987/Sofya

E-Posta: ozan23t@gmail.com

Lisans: İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü (2008)