İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALT UZAY ESASLI DİNAMİK SİSTEM TANIMA YÖNTEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serhat ALKAN

Anabilim Dalı : **İnşaat Mühendisliği, Yapı Bilimi**

Programı : **Deprem Mühendisliği Programı**

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Pelin GÜNDEŞ BAKIR

OCAK 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALT UZAY ESASLI DİNAMİK SİSTEM TANIMA YÖNTEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serhat ALKAN
501071214

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Aralık 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Ocak 2010

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Pelin GÜNDEŞ BAKIR
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Prof. Dr. Erdal ŞAFAK (BÜ)

OCAK 2010

Aileme,

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu çalışmada, alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemleri sayısal bir yapı üzerinde uygulanmış ve sistem tanımadan elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Tez çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen Doç. Dr. Pelin GÜNDEŞ BAKIR' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2009

Serhat ALKAN
İnşaat Mühendisliği

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ... **v**
KISALTMALAR ... **ix**
SEMBOL LİSTESİ ... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ... **xv**
ÖZET ... **xvii**
SUMMARY ... **xix**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Tezin Amacı ... 2
1.2 Literatür Özeti ... 2
2. YAPI SİSTEMLERİNDE DİNAMİK MODELLER ... **5**
2.1 Giriş ... 5
2.2 Sonlu Elemanlar Modeli ... 6
2.2.1 Sönümsüz sistemlere ait özdeğer problemi ... 8
2.2.2 Sönümsüz çok serbestlik dereceli sistemlerde ortogonalite ... 9
2.2.3 Frekans tepki fonksiyonu ... 11
2.2.3.1 FTF'nin hesaplanmasına bir örnek ... 12
2.2.4 Yapı sistemlerinde oransal sönüm ... 13
2.3 Durum-uzay Modelleri ... 14
2.3.1 Sürekli zaman durum-uzay modelleri ... 14
2.3.2 Durum vektörlerinin diferansiyel eşitliği ... 15
2.3.3 Bir örnek ... 17
2.3.4 Transfer fonksiyonundan durum-uzay eşitliğine geçiş ... 18
2.3.5 Durum vektörüne ait diferansiyel eşitliğin çözümü ... 20
2.3.6 Ayrık zaman durum uzay modelleri ... 22
2.3.7 Ayrık zamanda durum vektörüne ait difaransiyel eşitliğin çözümü ... 23
2.3.8 Sistem tanımada kullanılan durum-uzay modelleri ... 25
2.3.8.1 Deterministik modeller ... 25
2.3.8.2 Stokastik modeller ... 26
2.3.8.3 Durum-uzay modellerine ait bazı kavramlar ... 27
2.3.8.4 Kontrol edilebilirlik ... 28
2.3.8.5 Gözlemlenebilirlik ... 28
2.3.9 Ayrık sistemlerin impuls cevabı ... 28
3. SİSTEM TANIMA ... **31**
3.1 Giriş ... 31
3.2 Alt Uzay Esaslı Sistem Tanıma ... 32
3.3 Sistem Tanımada Kullanılan Geometrik Araçlar ve Matris İşlemleri ... 33
3.3.1 Dikey izdüşüm ... 34
3.3.2 Eğik izdüşüm ... 34
3.3.3 Tekil değerlerin ayrıştırılması ... 35
3.4 Alt Uzay Esalı Sistem Tanıma Yöntemleri ... 36
3.4.1 Deterministik alt uzay esaslı sistem tanıma ... 36

3.4.1.1 Blok Hankel matrisi 36
3.4.1.2 Matris eşitlikleri 38
3.4.1.3 Sistem tanıma algoritması 39
3.4.2 Stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma 42
3.4.2.1 Blok Hankel matrisi 42
3.4.2.2 Matris işlemleri 43
3.4.2.3 Kalman filtresi 44
3.4.2.4 Sistem tanıma algoritması 45
3.4.3 Birleştirilmiş deterministik stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma 48
3.4.3.1 Blok Hankel matrisi 49
3.4.3.2 Matris işlemleri 50
3.4.3.3 Kalman filtresi 50
3.4.3.4 Sistem tanıma algoritması 51
3.4.4 Dinamik sisteme ait modal parametrelerin elde edilmesi 55
4. SAYISAL ÇALIŞMA 59
4.1 Giriş 59
4.2 Sayısal Model 59
4.3 Modal Analiz 61
4.4 Doğrusal Dinamik Analiz 64
4.4.1 Beyaz gürültü ve yapının cevabı 65
4.5 Yapıya Ait Modal Parametrelerin Belirlenmesi 67
4.5.1 Monte Carlo simulasyonu 67
4.5.2 Sistemin derecesinin belirlenmesi 68
4.5.3 Sistem tanıma algoritmaları ile modal parametrelerin belirlenmesi 68
4.5.4 Sonuçlar 69
4.5.5 Yorumlar 82
5. SONUÇLAR 83
KAYNAKLAR 87
EKLER 91

KISALTMALAR

YSİ	**:** Yapı Sağlığının İzlenmesi
SE	**:** Sonlu Elemanlar
SEM	**:** Sonlu Elemanlar Metodu
FTF	**:** Frekans Tepki Fonksiyonu
TDA	**:** Tekil Değerlerine Ayrıştırma
SDT	**:** Sıfır Derece Tutmacı
MEK	**:** Modal Emniyet Kriteri

SEMBOL LİSTESİ

$p(t)$	: Zamana bağlı dış etki
m	: Kütle
v	: Hız
f_I	: Atalet kuvvetleri
f_D	: Sönümden kaynaklanan kuvvetler
f_S	: Rijitlikten kaynaklanan kuvvetler
$[M]$	: Kütle matrisi
$[C_2]$	: Sönüm matrisi
$[K]$	: Rijitlik matrisi
Ω	: Diagonal frekans matrisi
Ω_i	: i. Moda ait açısal frekans
Φ	: Kütleye normalize edilmiş mod şekli
Ψ	: Mod şekli
θ	: Özvektör matrisi
H_α	: Frekans tepki fonksiyonu
ξ	: Sönüm oranı
η	: Kayıp faktörü
$x_1(t)$	: Durum değişkeni
A	: Sürekli zamanda tanımlı sistem durum matrisi
B	: Sürekli zamanda tanımlı sistem kontrol matrisi
$u(t)$	: Giriş
$y(t)$	: Çıkış
$G(s)$	: Laplace tanım aralığında tanımlı transfer fonksiyonu
$Y(s)$	: Laplace tanım aralığında tanımlı çıkış fonksiyonu
$U(s)$	: Laplace tanım aralığında tanımlı giriş fonksiyonu
A_a	: Ayrık zamanda tanımlı sistem durum matrisi
B_a	: Ayrık zamanda tanımlı sistem kontrol matrisi
C	: Sistem çıkış matrisi
D	: Sistem geri besleme matrisi
$\mathfrak{J}(s)$	: S tanım aralığında Sürekli zaman sistem çözücü matrisi
$\mathfrak{J}(z)$	: Z tanım aralığında Ayrık zaman sistem çözücü matrisi
$\mathfrak{J}(t)$	: Zaman tanım aralığında Ayrık zaman sistem çözücü matrisi
w_k	: Proses gürültüsü
v_k	: Ölçüm gürültüsü
h_k	: Ayrık zaman impuls fonksiyonu
Π	: Dik izdüşüm operatörü
$U_{0\|2i-1}$	: Hankel giriş matrisi
$Y_{0\|2i-1}$	: Hankel çıkış matrisi
$W_{0\|i-1}$	: Giriş ve çıkış Hankel matrislerinin Williams notasyonu
Γ_i	: Gözlemlenebilirlik matrisi
${\Delta^d}_i$	: Ters çevrilmiş genişletilmiş kontrol edilebilirlik matrisi
T	: Benzerlik matrisi
W_1	: Ağırlık matrisi

W_2	**:** Ağırlık matrisi
C_i	**:** Kovaryans Toeplitz matrisi
L_i	**:** Kovaryans Toeplitz matrisi
K	**:** Kalman kazancı
$\mathrm{x}^{d}{}_{k}$	**:** Deterministik durum değişkenleri
$\mathrm{x}^{s}{}_{k}$	**:** Stokastik durum değişkenleri
Λ	**:** Ayrık zaman kompleks özdeğer matrisi
f_i	**:** Frekans
$\mathcal{R}$	**:** Kovaryans değeri
$\mathcal{L}$	**:** Laplace operatörü

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Sürekli ve ayrık durum uzay modellerinin özellikleri........................ 25
Çizelge 3.1 : Deterministik algoritma.. 41
Çizelge 3.2 : Ağırlık matrislerinin hesabı.. 45
Çizelge 3.3 : Stokastik algoritma.. 47
Çizelge 3.4 : Ağırlık matrisleri 52
Çizelge 3.5 : Deterministik stokastik algoritma 54
Çizelge 4.1 : Sayısal yapıya ait frekanslar ve sönüm oranları.................................. 62
Çizelge 4.2 : Malzeme özellikleri.. 64
Çizelge 4.3 : Gürültü-sinyal oranı % 2 için 200 adet Monte Carlo analizi 79
Çizelge 4.4 : Gürültü-sinyal oranı % 5 için 200 adet Monte Carlo analizi 80
Çizelge 4.5 : Gürültü-sinyal oranı % 10 için 200 adet Monte Carlo analizi 81

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Sistem tanıma aşamaları 3
Şekil 2.1 : Frekans Tepki Fonksiyonu 13
Şekil 2.2 : Tek serbestlik dereceli sistem........ 17
Şekil 2.3 : Laplace tanım aralığında, Eşitlik 2.32'ye ait blok diyagramı. 19
Şekil 2.4 : SDT blok diyagramı 23
Şekil 2.5 : Deterministik sisteme ait blok diyagramı........ 26
Şekil 2.6 : Stokastik sisteme ait blok diyagramı........ 27
Şekil 3.1 : Klasik sistem tanıma ve Alt uzay esaslı sistem tanıma 33
Şekil 3.2 : A matrisinin B' ye ve B' ye dik olan matrise izdüşümü 34
Şekil 3.3 : A matrisinin B matrisi boyunca C matrisi üzerine eğik izdüşümü........ 35
Şekil 3.4 : Birleştirilmiş deterministik stokastik sisteme ait blok diyagramı 48
Şekil 3.5 : Frekansın analitik düzlemde gösterimi. 56
Şekil 4.1 : Yapıya ait bir görünüm........ 60
Şekil 4.2 : Yapıya ait sonlu eleman modeli 61
Şekil 4.3 : Birinci mod şekli *f = 2.742 Hz* 62
Şekil 4.4 : İkinci mod şekli *f = 8.763 Hz*........ 63
Şekil 4.5 : Üçüncü mod şekli *f = 15.809 Hz*........ 63
Şekil 4.6 : Dördüncü mod şekli *f = 22.516 Hz* 64
Şekil 4.7 : Sensör yerleştirilen düğümler........ 65
Şekil 4.8 : İvme zaman geçmişi 66
Şekil 4.9 : Yapının beyaz gürültüye karşı cevabı 67
Şekil 4.10 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 2 için ilk 4 mod şekline ait frekansların tahmin sonuçları 70
Şekil 4.11 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %2 için ilk 4 mod şekline ait MEK değerleri 71
Şekil 4.12 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 2 için ilk 4 mod şekline ait sönüm oranları tahmin sonuçları 72
Şekil 4.13 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 5 için ilk 4 mod şekline ait frekansların tahmin sonuçları 73
Şekil 4.14 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 5 için ilk 4 mod şekline ait MEK değerleri 74
Şekil 4.15 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 5 için ilk 4 mod şekline ait sönüm oranları tahmin sonuçları 75
Şekil 4.16 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 10 için ilk 4 mod şekline ait frekansların tahmin sonuçları 76
Şekil 4.17 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 10 için ilk 4 mod şekline ait MEK değerleri 77
Şekil 4.18 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı % 10 için ilk 4 mod şekline ait sönüm oranları tahmin sonuçları 78

ALT UZAY ESASLI DİNAMİK SİSTEM TANIMA YÖNTEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

ÖZET

Son yıllarda sensor teknolojisi alanında yaşanan gelişmelere paralel olarak, sistem tanıma, inşaat mühendisliğinde yaygın biçimde kullanılan bir araç haline gelmiştir. Meydana gelen yıkıcı depremler bu konunun önemli hale gelmesini sağlayan diğer etken olarak karşımıza çıkar. Depremlerden sonra yapı elemanlarında meydana gelen hasarların yeri ve şiddetinin belirlenmesi önem arz eder.

Depremlerin veya diğer doğal afetlerin yapılar üzerindeki etkisi, yapıların dinamik karakteristiklerindeki değişimle tespit edilmektedir. Dolayısıyla bu yapıların dinamik karakteristiklerinin belirlenmesi zorunlu hale gelmektedir.

Sistem tanıma, deneysel verileri kullanarak dinamik sisteme ait modeli yani sistemin dinamik parametrelerini belirlemeye yarayan önemli bir araçtır. Bu tez kapsamında bahsedilen Alt uzay esaslı sistem tanıma teknikleri, günümüzde kullanılan en ileri sistem tanıma teknikleridir. Bu tez kapsamında, deterministik, birleştirilmiş deterministik stokastik ve stokastik sistem tanıma teknikleri, bilgisayar ortamında sayısal olarak modellenen bir çerçeve üzerine uygulanarak, birbirleriyle karşılaştırılmaktadır. Sonuçlar, birleştirilmiş deterministik stokastik sistem tanıma tekniğinin, daha iyi sonuç verdiğini göstermiştir.

EVALUATION OF SUBSPACE BASED DYNAMIC SYSTEM IDENTIFICATION METHODS

SUMMARY

Parallel to the developments experienced in the field of sensor technology, the system identification has become a widely used tool in civil engineering. Determining the structural damage location and severity is a very important issue after the earthquakes.

The changes in the dynamic characteristics of the structures are one of the most important parameters that help to determine the effects of earthquakes or other natural disasters on the structures. Therefore, identification of dynamic characteristics of these structures becomes necessary.

System identification is an important tool, which allows an expert engineer to determine dynamic model or dynamic parameters of the systems by using experimental data. In this thesis, subspace based system identification techniques are examined. The success of the subspace based system identification techniques are tested on a 2D frame of a typical building from Turkey. In this thesis, deterministic combined deterministic stochastic and stochastic system identification methods was compared by applying these tecniques on a 2D frame structure. Results show that, combined deterministic stochastic system identification method had better results for this frame structure.

1. GİRİŞ

Gelişen sensör teknolojisi ile birlikte bir çok mühendislik alanında olduğu gibi inşaat mühendisliğinde de önemli gelişmeler meydana gelmiştir. Bu gelişim yeni çalışma alanları ortaya çıkarmıştır. Son yıllarda popülerliği gittikçe artan Yapı Sağlığının İzlenmesi (YSİ) bu alanlardan biridir. Yapı Sağlığının İzlenmesi, yapı üzerinden sensörler aracılığı ile bilgilerin sürekli yada ayrık olarak toplanması ve bu bilgilerin işlenerek farklı amaçlar doğrultusunda kullanılmasını içeren bir süreçtir. Yapıdan toplanan bilgiler birçok amaca hizmet edebilir. Literatürde genellikle yapıya ait sonlu eleman modelini (SEM) güncellemede, yapıda oluşan hasarı tespit etmede veya FRP gibi yeni teknolojileri test etmede kullanılmaktadır.

Ülkemiz gibi deprem kuşağında bulunan ülkeler için yapı hasarlarının tespiti önem arz eder. Bu durumda, yapının servis ömrü boyunca yapıda oluşabilecek global veya yerel hataların veya hasarların tespit edilmesi önemli bir problem olarak karşımıza çıkar. YSİ tekniği 1970'li ve 1980'li yıllarda petrol endüstirisinde deniz yapılarına sıklıkla uygulanmış ve bu yapıların hasarları YSİ vasıtasıyla tespit edilmiştir [1, 2]. Daha sonraları uçak sanayinde aynı yöntemler uzay-uçak yapılarına uygulanmıştır [3]. Hasar tespiti için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu konuda yazılmış en önemli eserlerden biri, Rytter'in doktora çalışmasıdır [4]. Rytter bu eserinde hasar tespit aşamalarını şu şekilde belirlemiştir.

- Hasarın belirlenmesi
- Hasarın yerinin belirlenmesi
- Hasarın şiddetinin belirlenmesi
- Mevcut hasarlı durumda yapının servis önrünün tahmin edilmesi

Farrar ve Doebling hasar tespiti konusunda 1998 yılında kapsamlı bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada hasarı tespit etme, hasarın yerini belirleme ve hasarı katagorize etme başlıklarını incelemişlerdir [5].

Literatürde yer alan hemen hemen bütün çalışmalarda hasar, yapının dinamik parametreleri ile ilişkilendirilmiştir [5-8]. Bu sebeple hasar tespiti çalışmalarından önce yapının modal parametrelerinin (mod şekilleri, frekanslar, sönüm oranları) belirlenmesi ihtiyacı doğar. Bu parametreler, sistem tanıma yöntemlerini kullanarak elde edilmektedir. Sistem tanıma, yapıdan toplanan bilgilerin bir takım yöntemlerle işlenmesi, sisteme ait matematiksel modelin oluşturulması ve sistem dinamik parametrelerinin tahmin edilmesi sürecini içerir.

İnşaat mühendisliği bakış açısından iki türlü yaklaşım vardır. Bunlar sırasıyla,

- Deneysel modal analiz
- Operasyonel modal analiz

dir. Deneysel modal analiz giriş ve çıkış bilgilesine bağlı tanıma [9], operasyonel modal analiz ise sadece çıkış bilgisine bağlı tanıma olarak tanımlanır [10]. Bu tez kapsamında bu konuların ikisine de değinilmektedir.

1.1 Tezin Amacı

Bu tezde bilgisayar ortamında sayısal olarak oluşturulmuş bir yapı üzerine, son yıllarda yaygın olarak karşımıza çıkan alt uzay esaslı sistem tanıma teknikleri uygulanmaktadır. Bu tezde, yapı üzerine uygulanan tekniklerin birbirlerine olan üstünlüklerinin ve zayıf taraflarının ortaya konması hedeflenmiştir..

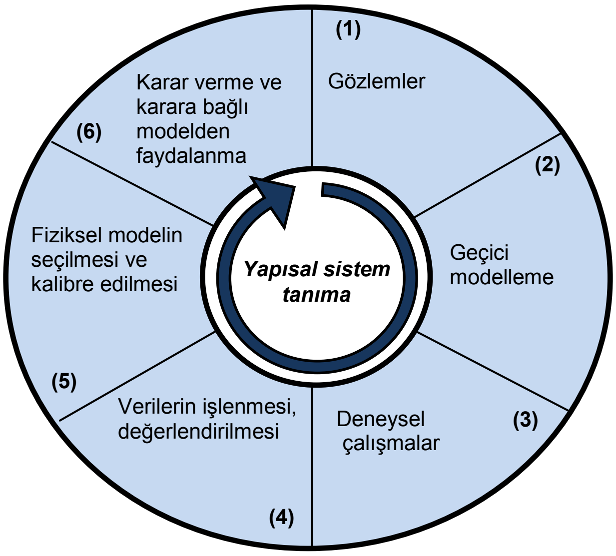
1.2 Literatür Özeti

Sistem tanıma, deneysel verilerden, yapının matematiksel modelini elde etmek amacıyla kullanılan en etkili yöntemlerden biri olarak kabul edilmektedir. Sistem tanıma algoritmaları ilk olarak kontrol ve elektrik mühendisliğinin çalışma alanı olarak ortaya çıkmıştır. Yöntemin aslında bütün dinamik sistemlere uygulanabileceği keşfedildikten sonra kimya, makina ve inşaat mühendisliği alanlarında uygulanan ve geliştirilen bir yöntem haline gelmiştir.

Sistem tanıma, ASCE İnşa Edilmiş Yapılarda Sistem Tanıma Kurulu tarafından da kabul edilmiş, altı aşamadan oluşmaktadır [11]. Bu aşamalar Şekil 1.1'de gösterilmektedir.

- Aşama 1: Gözlemler
- Aşama 2: Geçici modelleme
- Aşama 3: Deneysel çalışmalar
- Aşama 4: Verilerin işlenmesi ve değerlendirilmesi
- Aşama 5: Fiziksel modelin seçilmesi ve kalibre edilmesi
- Aşama 6: Karar verme süreci ve karara bağlı olarak modelden faydalanma

Aşamalarla ile ilgili ayrıntılı bilgi Pan Qin tarafından yazılmış doktora çalışmasından elde edilebilir [11].



Şekil 1.1 : Sistem tanıma aşamaları

Literatürde, sistem tanımanın bir başka sınıflandırılmasında, sistem tanıma, iki başlık altında toplanmaktadır: Klasik sistem tanıma ve alt uzay esaslı sistem tanıma. Klasik sistem tanıma yöntemleri, özellikle hataların tahmini yöntemi gibi doğrusal veya doğrusal olmayan optimizasyon problemlerini içerdiği için tercih sebebi olmaktan çıkmıştır. Klasik sistem tanıma ile ilgili en önemli eser Ljung tarafından yazılmıştır [12].

Sistem tanımada diğer bir yaklaşım ise alt uzay esaslı sistem tanımadır. Gelişimine 1990'li yıllarda başlamıştır [13,14]. Daha sonraları alt uzay uzay esaslı birçok teknik geliştirilmiştir [15-17]. Konu ile ilgili ilk kapsamlı kitap Van Overschee and De Moor tarafından yayınlanan kitap olarak kabul edilir [18].

Alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemleri tekil değerlerine ayrıştırma veya QR ayrıştırması gibi sayısal açıdan sağlam ve efektif matris işlemlerini kullanması nedeniyle klasik yönteme göre daha kararlı ve hızlıdır [19].

Alt uzay esaslı sistem tanıma farklı mühendislik alanlarında farklı yapılara uygulanarak yöntemlerin kullanılabilirliği test edilmiştir. Son yıllarda inşaat mühendisliğinde de yapıların modal parametrelerini belirlemek amacıyla sıklıkla kullanılmaktadır.

Bu çalışmaların başında Peeters' ın yapmış olduğu doktora çalışması gelmektedir. Bu çalışmada stokastik alt uzay esaslı yöntemleri tanımlanmış betonarme bir kiriş ve Z24 köprüsü üzerinde uygulamalar yapılmıştır [20].

Reynders ve De Roeck [21]Z24 köprüsü üzerinde referans esaslı birleştirilmiş deterministik stokastik sistem tanıma yöntemini uygulamış, yöntemin hızı ve güvenilirliğini tartışmıştır.

Favoree ve diğerleri [22] literatürde mevcut olan yöntemleri tek bir çatı altında toplayarak (N4SID, IV-4SID, MOESP, CVA gibi) 10 farklı veri grubu üzerine, alt uzay esaslı sistem tanıma ve hataların tahmini yöntemini uygulayarak geniş kapsamlı bir karşılaştırma yapmıştır.

Taciroğlu ve diğerleri [23]alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemini Four Season binasına uygularayarak yapının modal parametrelerini belirlemiş ve ilgili binanın sonlu eleman modelini güncellemiştir.

2. YAPI SİSTEMLERİNDE DİNAMİK MODELLER

2.1 Giriş

Dinamik sistemler farklı yaklaşımlarla modellenebilirler. Bunların en başlıcası matematiksel modeldir. Bu model bir çok alanda bize sistemi analiz etme ve değerlendirme şansı verir. Oluşturulan modelin başlıca kullanım alanları; sistem tanıma, optimizasyon, hasar tespit etme ve sistemlerin kontrolüdür.

Bir sistemin davranışını ve çevre ile olan etkileşimini anlayabilmek iki şekilde mümkündür. Birincisi gerçek sistem üzerinde deneyler yapılabilir. İkincisi ise sistemi matematiksel olarak ifade ederek simulasyon ortamı oluşturulur. Bu analitik modelin kurulabilmesi için sisteme ait bazı parametrelerin bilinmesi şarttır. Sisteme ait bu parametrelerin ve bunların sistemle nasıl bir etkileşim kurduğunun bilinmesi doğru model kurulması adına önemlidir. İnşaat yapıları diğer sistemlere benzer biçimde bir çok farklı yaklaşımlarla ifade edilebilir. Literatürde genel olarak sistemler doğrusal veya doğrusal olmayan biçimde modellenmiştir. Diğerleri (bilineer modeller gibi) bu modellerin türevi olarak karşımıza çıkar.

Bir takım gözlemlerle nasıl bir model kurulması gerektiği belirlenebilir. Bu tezde yapı sistemleri doğrusal olarak modellenmiştir. Bu kararın verilmesindeki en önemli kriter, yapı sistemlerinin belirli bir eşik değerine kadar neredeyse doğrusal davranmasıdır.

Literatürde doğrusal sistemler, süperpozisyon ilkesini gerçekleyen sistemler olarak tanımlanır. Bu bölümde doğrusal sistemlerin dinamiği ve matematiksel olarak ifadeleri özetlenmektedir.

Yapı sistemlerinin dinamiği temel olarak, zamana bağlı yükler veya etkiler altında sistemde oluşacak tepkilerin (gerilme, şekil değiştirme, yer değiştirme gibi) zamana bağlı olarak incelenmesini içerir. Bunun dışında dinamik sistemi oluşturan elemanların atalet kuvvetleri ve sönüm karakteristikleri, sistemin tepkisini önemli oranda etkileyen diğer faktörlerdir.

Günümüzde yapı sistemleri üzerine etkiyen pek çok kuvvet mevcuttur. Yapının dizayn aşamasında da dikkate alınan önemli yükler aşağıda sıralanmaktadır.

- Periyodik yükler (makina yükleri)
- Periyodik olmayan yükler (ani çarpma veya kırbaç etkisi)
- Stokastik yükler (çevresel titreşimler)

Yukarıda bahsedilen yükler altında yapı sistemlerinin çözümünü öneren iki farklı yaklaşım mevcuttur: Bunlar deterministik ve stokastik yaklaşımlardır. Çözüm yönteminin seçilmesi yapıya gelen etkilerin nasıl tanımlandığı ile alakalıdır. Yapıya gelen yükler matematiksel olarak ifade edilebiliyorsa deterministik çözüm bu tip yükler için uygundur. Ancak yapıya gelen yükler bir takım istatiksel modellerle açıklanabiliyorsa bu tip uygulamalar için stokastik çözüm kullanılmalıdır. Buna örnek olarak çevresel titreşimler verilebilir. Operasyonel modal analizde bu yükler beyaz gürültü olarak modellenir. Beyaz gürültünün diğer işaretlerle korele olmaması modelde, bazı parametrelerin silinmesine neden olur [18].

Literatürde, dinamik sistemlerin modellenmesinde pek çok farklı yaklaşımın mevcuttur. Temel olarak inşaat sistemleri üç farklı şekilde modellenebilmektedir. Bu modellerler literatürde de yaygın bir şekilde karşımıza çıkar. Bu modeller sırasıyla şunlardır;

- Sonlu elemanlar modeli (D'Alembert prensibi)
- Modal model
- Durum-uzay modeli (Durum değişkenleri)

2.2 Sonlu Elemanlar Modeli

Yapı mühendisliği problemlerinde sıklıkla kullanılan bu yöntem, esas itibariyle klasik karmaşık modellerin birçok parçaya bölünerek oluşturulmuş bir ifade biçimidir. Klasik model, D'Alembert prensibi temel alınarak oluşturulmaktadır. Langrange ve D'Alambert, Newton'un ikinci yasası olan kuvvet-ivme ve kütle ilişkisini kullanarak bir çok yapısal dinamik problemlerinin çözümünde kullanılan hareket eşitliğini ortaya atmışlardır. Esasen momentumdaki değişimin kütle üzerine uygulanan kuvvetle orantılı olmasından yola çıkılmıştır **(2.1)**.

$$p(t) = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) \qquad \textbf{(2.1)}$$

Eşitlikte yer alan *p(t)* sisteme gelen kuvveti, m kütleyi, *x(t)* ise kütlenin konumu vermektedir. Kısaca kütle, üzerine etkiyen ivmeyle orantılı olarak bir atalet kuvveti oluşturur. Bu hayali kuvvet sistemi sürekli olarak dengede tutar. Bu fikirden yola çıkarak hareket eşitliği oluşurulmuştur. Hareket eşitliğini oluşturan üç temel bileşen vardır. Bunlar sırasıyla; ivme-kütle, sönüm-hız ve yerdeğiştirme-rijitlik'tir **(2.2)**.

$$f_I + f_D + f_S = p(t) \qquad \textbf{(2.2)}$$

Eşitlik (2.3)' de daha açık bir biçimde ifade edilmiştir.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t) \qquad \textbf{(2.3)}$$

Eşitlikte yer alan m, c ve k sırasıyla kütle sönüm ve rijitlik anlamına gelmektedir. üzerindeki noktalar, $\dot{\blacksquare}$zamana göre herbir nokta bir kez türev alındığını göstermektedir.

Gerçek ortamda yapı sistemleri eşitlik **(2.3)**'te olduğu gibi tek bileşenle ifade edilemez. Yapıların dinamik yükler altındaki davranışının belirlenebilmesi için, sistemin sürekli ortamdan ayrık ortama taşınarak bir takım sayısal yöntemlerin kullanılması kaçınılmaz bir durumdur. Ayrıklaştırmanın derecesine bağlı olarak sonuçların kalitesi de değişir. Sistem ayrıklaştırılarak küçük bileşenlere ayrılır ve bu bileşenlerin bir takım özellikleri tek bir büyük matriste toplanır ve dinamik eşitlik bu şekilde ifade edilir **(2.4)**. Yapı dinamiğinde, bu tür sistemlere çok serbestlik dereceli sistemler denir. Bu sistemlerin çözümü için kullanılan yönteme ise sonlu elemanlar metodu (SEM) denilmektedir. Tipik olarak inşaat yapılarının SE modeli, matematiksel olarak eşitlik **(2.4)**'de olduğu gibidir.

$$[M]\{\ddot{x}(\mathrm{t})\} + [C_2]\{\dot{x}(\mathrm{t})\} + [K]\{x(t)\} = \{p(t)\} \qquad \textbf{(2.4)}$$

M, *C*$_2$ve *K*$\in R^{n_2 \mathrm{x}\, n_2}$dereceli sisteme ait boyutunda kütle sönüm ve rijitlik matrislerini, *x(t)*$\in R^{n_2 \mathrm{x}\, n_2}$ ise sisteme ait yer değiştirme vektörünü ifade eder.

sistemin serbestlik derecesini gösterir. Küme parantezi içerisinde yazılan ifadeler vektör anlamında kullanılmaktadır. Yerdeğiştirme vektörü üzerinde bulunan her bir nokta $\dot{\blacksquare}$ zamana göre her bir nokta bir kez türev alındığını gösterir.

Sonlu elemanlar yöntemi mühendisler için geniş kapsamlı bir tasarım aracıdır. Bu yöntem sadece dinamik yükler altında değil, statik yükler altında da yapıların çözümüne olanak verir. Dinamik sistemin malzeme ve geometrik özellikleri matrisler içerisine yerleştirilerek kütle ve rijitlik matrisleri oluşturulur. Eşitlikte yer alan sönüm matrisi ise pek çok farklı yaklaşımlarla oluşturulabilir. Bölümün ilerleyen kısımlarında sönüm oran sönüm olarak karşımıza çıkmaktadır. Son yıllarda akışkan yapılı malzemelerden elektromagnetik malzemelere kadar bir çok malzeme biçimi SEM ile modelllenip, çözülebilmektedir.

Sistemlerin dinamik çözümü yapılırken karşımıza iki farklı durum ortaya çıkar. Bunlar **(2.4)** eşitliğinin sağ tarafının sıfır veya sıfırdan farklı olma durumlarıdır. Sıfırdan farklı olma durumunda sistem bir dinamik etki altındadır ve çözümden elde edilecek olan $x(t) \in R^{n_2}$ değeri sistemin etkiye karşı cevabını içerir. Sağ taraf değerinin sıfır olma durumu ise sistemin serbest titreşim altında olduğunu gösterir ve dinamik problem özdeğer problemi halini alır. Bu problemin çözümünde sisteme ait olan ve sistemin dinamik karakteristiğini yansıtan frekanslar ve mod şekilleri bulunur.

2.2.1 Sönümsüz sistemlere ait özdeğer problemi

Literatürde özdeğer problemi, Modal analiz olarak da bilinmektedir. Modal analiz, yapıların dinamik karakteristiğini belirlemede, yapı eleman boyutlarının ve yapı davranışının optimizasyonunda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. Modal analiz üçe ayrılır;

- Teorik Modal Analiz
- Deneysel Modal Analiz
- Operasyonel Modal Analiz

Bu bölümde teorik modal analizden bahsedilmektedir. Sönüm matrisinin eşitlikte yer almadığı ve deklemin sağ taraf değerinin sıfır olduğu yani sönümsüz ve serbest titreşim halindeki sisteme ait diferansiyel eşitliğin nasıl çözüldüğü anlatılmaktadır. Serbest titreşim halinde sistemin sönümsüz olarak çözülmesi sistem dinamik parametrelerini önemli ölçüde etkilememektedir. Sönümsüz ve serbest titreşim durumuna duruma ait dinamik eşitlik aşağıda verilmiştir **(2.5)**.

$$[M]\{\ddot{x}(\mathrm{t})\} + [K]\{x(t)\} \ = \{0\} \tag{2.5}$$

Bu diferansiyel eşitliğin çözümünün yapabilmesi için uygun bir $\{x(t)\}$ vektörü seçilmelidir.

$$x(t) = \{X\}e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2\{X\}e^{i\Omega t}$$

$X \in R^{n_2}$ öyleki, n_2 x 1 boyutunda zamandan bağımsız genlik vektörüdür. Yukarıdaki ifadeler **(2.5)** eşitliğinde yerine konulduğunda eşitlik **(2.6)** elde edilir.

$$([K] - \ \Omega^2[M]\{X\}e^{i\Omega t} = \{0\}) \tag{2.6}$$

Çözüm için $det\big[[K] \ - \ \Omega^2[M]\big] = 0$ koşulunun sağlanması gerekmektedir. Buradan elde edilecek $n_2\ x\ n_2$ boyutundaki iki matris sisteme ait özdeğer ve özvektörü modal model anlamında ise sisteme ait açısal frekanslar $\Omega = \ diag[\Omega_i] \in R^{n_2 x n_2}$ ve mod şekillerini $\Phi \in R^{n_2 x n_2}$ içerir.

Yukarıda bahsedilen $\Phi \in R^{n_2 x n_2}$ matrisinin en önemli özelliği ortogonalite şartını sağlamasıdır [24].

2.2.2 Sönümsüz çok serbestlik dereceli sistemlerde ortogonalite

Yapının farklı frekanslarına karşı gelen mod şekilleri aşağıda eşitlik **(2.7a)** ve **(2.7b)**'de verilen koşulları sağlar [24].

$$\Phi_{\mathrm{i}} k \Phi_{\mathrm{j}} = 0 \tag{2.7a}$$

$$\Phi_{\mathrm{i}} m \Phi_{\mathrm{j}} = 0 \tag{2.7b}$$

İspat:

$$k\Phi_i = \Omega_i m\Phi_i \tag{2.8}$$

(2.8) eşitliğinin iki tarafını $\Phi^T{}_j$ ile çarpalım [24],

$$\Phi_j^T k\Phi_i = \Omega_i \Phi_j^T m\Phi_i \tag{2.9}$$

Aynı işlem j. mod için yapılacak olursa **(2.10)**,

$$\Phi_i^T k\Phi_j = \Omega_j \Phi_i^T m\Phi_j \tag{2.10}$$

İlk eşitlikten **(2.9**), ikinci eşitlik **(2.10)** çıkarılacak olursa eşitlik **(2.11)** elde edilir [24].

$$(\Omega_i - \Omega_j)\Phi_i^T m\Phi_j = 0 \tag{2.11}$$

Bu eşitlikte **(2.11)**$\Omega_i \neq \Omega_j$ olduğuna göre, eşitliğin diğer kısmının sıfıra eşit olması gerekir **(2.12)** [24].

$$\Phi_i^T m\Phi_j = 0 \tag{2.12}$$

Aynı işlemler *k* rijitlik içinde yapılır. Sonuç olarak eşitlik **(2.13)** elde edilir.

$$\Phi_i^T k\Phi_j = 0 \tag{2.13}$$

Başka bir özellik ise $\Omega_i = \Omega_j$ durumudur. Bu durumda, yapıya ait kütleye normalize edilmiş mod şekilleri Φ için, eşitlik **(2.12)** ve **(2.13)**, sırasıyla eşitlik **(2.14)** ve **(2.15)** halini alır [24].

$$\Phi_i^T m\Phi_i = I \tag{2.14}$$

$$\Phi_i^T k \Phi_i = \Omega_i^2 \tag{2.15}$$

2.2.3 Frekans tepki fonksiyonu

Frekans tepki fonksiyonu (FTF), dinamik bir sisteme ait transfer fonksiyonun, frekans tanım aralığındaki karşılığıdır [24]. Yapı sistemlerinin sonlu elemanlar modelinin modal analiz sonucunda veya gerçek bir yapıya ait deneysel olarak elde edilen mod şekilleri yapının modal kordinatlarını oluşturur. Bu modal kordinatlar, sonlu elemanlar yönteminde karmaşık yapıların derecelerini düşürmek için veya sistem tanımada kullanılırlar (mod şekilleri, sönüm oranları ve frekanslar). Teorik olarak modal parametrelerin nasıl hesaplanması gerektiği, özdeğer problemi başlığı altında anlatılmıştır.

Modal model ile FTF arasında doğrudan bir ilişki vardır. Yani modal modelden FTF'ye geçiş, bir takım işlemlerle sağlanabilir ve terside mümkündür [9]. Bu bölümde sadece modal modelden FTF' nun elde edilmesi anlatılmaktadır. FTF elde edilmeden önce modal modele ait sistem dinamik matrisleri mevcut olmalıdır.

Kütleye normalize edilmiş mod şekilleri Φ için, FTF H_α eşitlik **(2.16)** ile hesaplanabilir.

$$H_\alpha(\omega) = [\Phi][(\Omega_i^2 - \omega^2)]^{-1}[\Phi] \tag{2.16}$$

$H_\alpha \in R^{n_2 x n_2}$ frekans tanım aralığında olan ve her bir ωiçin değeri olan $n_2\, x\, n_2$ boyutunda bir matristir. Eşitlik **(2.16)** da yer alan α indisi FTF'nin yerdeğiştirmeye ait olduğunu gösterir. Dinamik bir sisteme ait giriş ve çıkış bilgileri arasındaki ilişki FTF ile açıklanabilmektedir. Giriş ve çıkış bilgileri arasındaki bu bağlantı eşitlik **(2.17)**' de verilmektedir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{\alpha_{11}} & \cdots & H_{\alpha_{1n_2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{\alpha_{n_2 1}} & \cdots & H_{\alpha_{n_2 n_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n_2} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

FTF'ye ait her eleman ayrı ayrı belirli bir frekans aralığında incelenebilir. Çok serbestlik dereceli sistemde bütün modlar dikkate alınarak FTF matrisine ait bir eleman $H_{\alpha_{jk}}(\omega) \in R^l$ elde edilebilir **(2.18)**.

$$H_{\alpha_{jk}}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_{ji}\Phi_{ki}}{(\Omega_i^2 - \omega^2 + i\eta\Omega_i^2)} \tag{2.18}$$

Eşitlik **(2.18)**'de yer alan i indisi ilgili mod numarasını, j ve k yapının her hangi iki düğüm noktasını, η sönüm oranını, Ω_i i. moda ait frekansı ve ω ilgilenilen frekans vektörünü ifade eder. FTF' de bulunan α indisi yerdeğiştirme FTF'i olduğunu gösterir. Yapıya ait modlar kütleye normalize edilmemiş ise (Ψ), $H_{\alpha_{jk}}(\omega) \in R^l$ eşitlik **(2.19)** ile hesaplanabilir.

$$H_{\alpha_{jk}}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi_{ji}\Psi_{ki}}{m_i(\Omega_i^2 - \omega^2 + i\eta\Omega_i^2)} \tag{2.19}$$

2.2.3.1 FTF'nin hesaplanmasına bir örnek

Bu örnekte her bir mod şekli için η = 0.025 sönüm oranına sahip sistemin modal modeli kullanılarak FTF elde edilmektedir. Sistem kütle ve rijitlik matrisleri aşağıda verilmektedir.

$$K = \begin{bmatrix} 2800 & -1400 & 0 \\ -1400 & 2800 & -1400 \\ 0 & -1400 & 1400 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$(K - \Omega^2 M)\{X\}e^{i\Omega t} = 0$ özdeğer probleminin çözülebilmesi için det $|K - \Omega^2 M|$ değerinin sıfır olması gerekmektedir. Eşitlik çözümünden elde edilen özdeğer ve özvektörler aşağıda verilmektedir

$$\Omega_1 = 11.77\ rad/sn$$

$$\Omega_2 = 32.99\ rad/sn$$

$$\Omega_3 = 47.67\ rad/sn$$

$$\Phi_{j1} = [-0.2319 \quad -0.4179 \quad -0.5211]$$

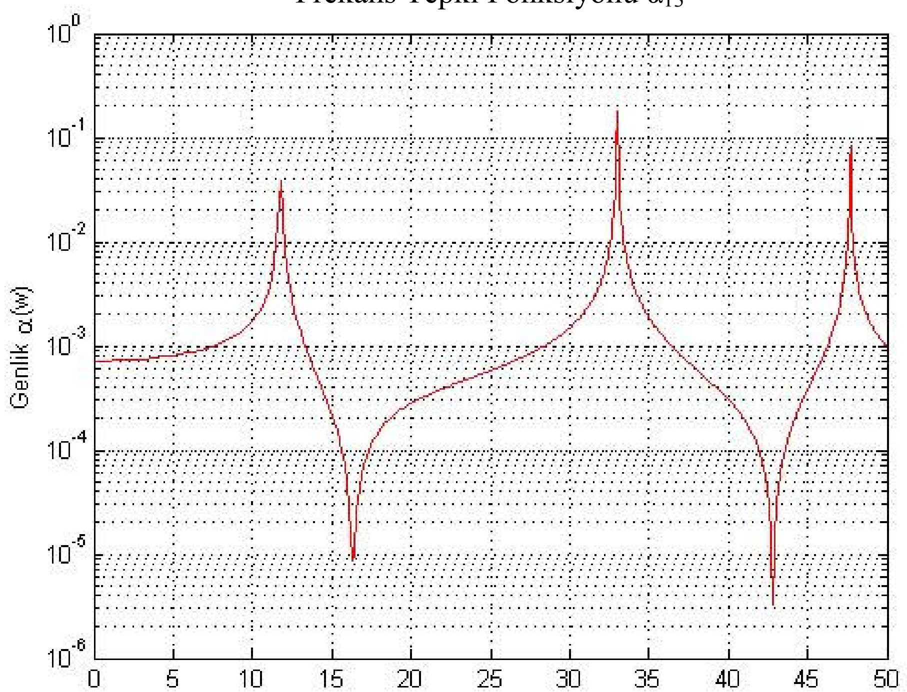
$$\Phi_{j2} = [0.5211 \quad 0.2319 \quad -0.4179]$$

$$\Phi_{j3} = [(-0.4179 \quad 0.5211 \quad -0.2319)]$$

Burada bulunan değerler eşitlik **(2.18)**' de yerine konularak FTF eşitlik **(2.20)** elde edilmiştir. Şekil 2.1 gösterilmektedir.

$$H_{\alpha_{13}}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Phi_{1i}\Phi_{3i}}{(\Omega_i^2 - \omega^2 + i0.025\Omega_i^2)} \tag{2.20}$$

Frekans Tepki Fonksiyonu α_{13}



Frekans (*Hz*)

Şekil 2.1 : Frekans Tepki Fonksiyonu

2.2.4 Yapı sistemlerinde oransal sönüm

Dinamik analizlerde sönüm, yapının tepkisi ve sistemin enerjisindeki değişim açısından önemli bir rol oynar. Sönüm hakkındaki bilginin yetersiz oluşu (malzeme davranışı belirsizliği) nedeniyle sönüm farklı yaklaşımlarla modellenmektedir. Bu modellerden biri de oransal sönümdür. Genellikle doğrusal ve doğrusal olmayan artımsal analizlerde kullanılan oransal sönüm modeli, yapı sistemlerinde çok sıkça karşımıza çıkmaktadır. Oransal sönüm literatürde Rayleigh sönümü olarak da adlandırılmıştır. Bu modelde ön koşul, hareket eşitliğinde yer alan sönüm matrisinin sistem kütle ve rijitlik matrisleriyle doğrudan orantılı olmasıdır **(2.21)**. Bu oran α ve β katsayıları belirlenmektedir.

$$[C_2] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{2.21}$$

Eşitlikte yer alan α ve β değerleri eşitlik **(2.22)** ile hesaplanabilmektedir.

$$\xi_i = \frac{\beta\Omega_i}{2} + \frac{\alpha}{2\Omega_i} \tag{2.22}$$

Burada ξ, Rayleigh sönüm oranını işaret etmektedir. Hareket eşitliğine sönümün eklenmesi ile yapı sistemine ait mod şekilleri aynen korunurken frekanslar değişir. Sönümlü sisteme ait frekanslar λ_i, aşağıda verilen eşitlik **(2.23)** yardımıyla bulunabilir.

$$\lambda_i^2 = \Omega_i^2(1 + j\xi_i) \tag{2.23}$$

2.3 Durum-uzay Modelleri

Kontrol sistemlerinde sıklıkla kullanılan bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım klasik kontrolden bazı farklılıklar gösterir. Klasik kontrol yaklaşımı tek girişe ve tek çıkışa sahip doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemlerle kısıtlıdır. Durum-uzay yaklaşımında ise bu kısıtlar söz konusu değildir. Bu modelleme tekniğinin önemli avantajları ağaşıda sıralanmaktadır [25].

- Çoklu girişe ve çoklu çıkışa sahip sistemler için kullanılabilir.
- Zamanla değişen ve doğrusal olmayan sistemler için idealdir.
- Basit matris işlemleri ile zaman maliyeti azaltılır.
- Sistem tanıma için en önemli yaklaşımlardan biridir.

Klasik yaklaşımın bir alternatifi olan bu model zaman tanım aralığında tanımlanmıştır [25].

2.3.1 Sürekli zaman durum-uzay modelleri

Kontrol mühendisliğinde bir modelin durum uzay gösterim şekli ile fiziksel bir sistem, giriş-çıkış bilgisi ve durum değişkenleri ile matematiksel olarak ifade edilebilmektedir. Modelin bileşenleri olan giriş, çıkış ve durum değişkenleri vektörle, diferansiyel ve cebirsel işlemler matrislerle gösterilir.

Durum değişkenleri [$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, ..., $x_n(t)$] bir dinamik sistemin herhangi bir t_0 anında durumunu belirleyebilen minimum sayıdaki değişkenlerdir. Sistemi tanımlayan bu en küçük kümenin boyutu sistemin diğer bir deyişle diferansiyel eşitliğin derecesini verir. Durum değişkenleri doğrusal bağımsız olmalıdır. Yani diğer değişkenlerin kombinasyonu olarak ifade edilememesi gerekir. Durum değişkenleri durum-uzay olarak tanımlanan *N* boyutlu bir uzayda zamana bağlı olarak belirli bir yörünge çizer.

Bu tez kapsamında ele alınacak olan modeller doğrusal ve zamanla değişmeyen modellerdir.

2.3.2 Durum vektörlerinin diferansiyel eşitliği

Bir dinamik sisteme ait durum eşitliklerinin bulunabilmesi için, öncelikle eleman eşitliklerinin elde edilmiş olması gerekir. Sisteme ait bir durum, durum değişkenleri [$x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, ..., $x_n(t)$] cinsinden diferansiyel eşitlik kümesi ile tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1n}u_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2n}u_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nn}u_n
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.24)}$$

Bu eşitliklerin bileşenleri bir matriste toplanacak olursa,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \textbf{(2.25)}$$

durum eşitliği **(2.25)** elde edilir. Eşitlikte yer alan $A \in R^{nxn}$ ve $B \in R^{nxm}$, *n x n* ve *n x m* boyutunda matrisleri, $x \in R^n$ ve $u \in R^n$ ise *n x 1* boyutunda vektörleri ifade eder.

n x 1 boyutunda durum değişkenleri vektörü **(2.26)**,

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad \textbf{(2.26)}$$

n x 1 boyutunda sistemin giriş bilgileri **(2.27)**,

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad \textbf{(2.27)}$$

n x n boyutunda sistem durum matrisi **(2.28)**,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.28)}$$

n x m boyutunda kontrol matrisi **(2.29)**,

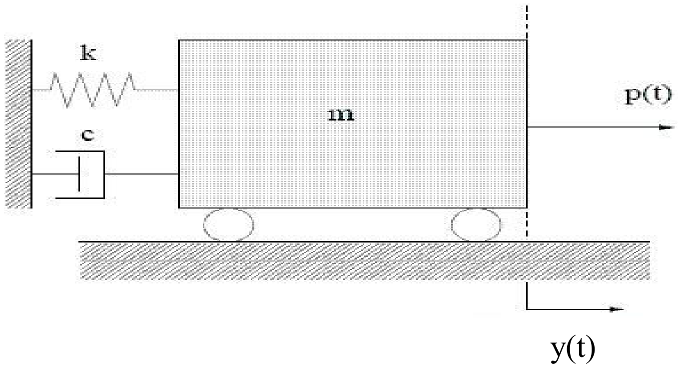
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2.29)}$$

Genel olarak bir sistemin cevabı [$y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $y_4(t)$, ..., $y_n(t)$] çıkış eşitliği ile gösterilir **(2.30)**.

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad \textbf{(2.30)}$$

2.3.3 Bir örnek

Bu bölümde yay, kütle ve sönümleyiciden oluşan tek serbestlik dereceli sistemin (Şekil 2.2) durum uzay modeli oluşturulmaktadır.



Şekil 2.2 : Tek serbestlik dereceli sistem

Burada durum değişkenleri,

$$x_1 = y(t)$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}(t)$$

Şekilden de anlaşılacağı üzere sisteme gelen etki,

$$u = p(t)$$

y doğrultusuna ait denge eşitliği,

$$\sum_{k=0}^{n} F_y = m\ddot{y}\,(t)$$

Bu eşitlik açık bir şekilde yazılacak olursa,

$$p(t) - Ky(t) - C\dot{y}\,(t) = m\ddot{y}(t)$$

veya,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K}{m}y(t) - \frac{C}{m}\dot{y}\,(t) + \frac{1}{m}p(t)$$

Yukarıda verilen eşitliklerden yola çıkılarak,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{C}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

eşitlikleri elde edilir. Durum ve çıkış eşitliği

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -C/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

halini alır.

2.3.4 Transfer fonksiyonundan durum-uzay eşitliğine geçiş

Kontrol teorisinde transfer fonksiyonu olarak bilinen fonksiyonlar çoğunlukla dinamik sistemlerin giriş çıkış ilişkilerini karakterize etmek için kullanılmaktadır. Dinamik bir sistemin transfer fonksiyonu başlangıç koşullarının sıfır olduğu düşünülerek çıkış bilgilerinin Laplace dönüşümünün giriş bilgilerinin Laplace dönüşümüne oranı olarak tanımlanır **(2.31)** [24]. *S* tanım aralığında tanımlı olduğu gibi zaman ve frekans aralığında da tanımlıdır. Transfer fonksiyonun frekans tanım aralığındaki karşılığı FTF'dir.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{2.31}$$

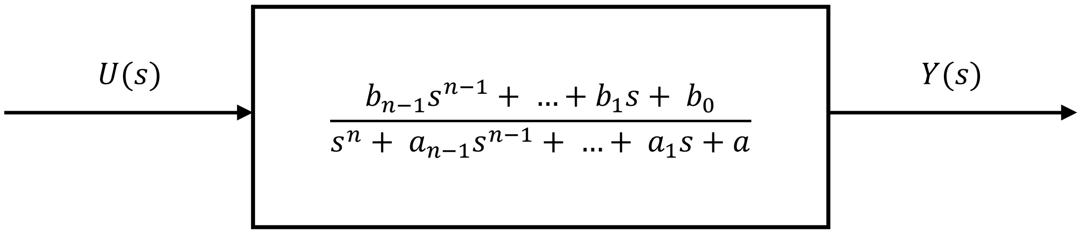
Transfer fonksiyonundan durum eşitliklerine geçmek mümkündür. Bu geçişi sağlayan en önemli araç Laplace dönüşümüdür. Laplace dönüşümü, aslında bir integral dönüşümüdür ve kontrol teorisi ile diferansiyel eşitliklerin çözümünde çok önemli bir rol oynar.

Laplace dönüşümü, diferansiyel bir ifadeyi cebirsel eşitliklere dönüştürür. Örneğin bir integral ifadesi Laplace tanım aralığında ki buna *S* uzayı denir çarpmaya dönüşür [24]. Bu bölümde durum eşitliklerinin nasıl ifade edildiği daha sonrasında ise sistemin çözümü anlatılmaktadır.

Öncelikle genel bir diferansiyel eşitlik tanımlayalım **(2.32)**,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_{n-1}\frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 u \tag{2.32}$$

Bu diferansiyel eşitlik aşağıda verilen Şekil 2.3 ait bir sisteme ait bir ifadedir.



Şekil 2.3 : Laplace tanım aralığında, Eşitlik 2.32'ye ait blok diyagramı.

Şekilden de anlaşılacağı üzere sistemin transfer fonksiyonu kesirsel olarak ifade edilmiştir. Önceki örneğimizde olduğu gibi durum değişkenlerini belirlememiz gerekir. Diferansiyel eşitlik için durum değişkenleri eşitlik **(2.33)** de gösterilmektedir.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - \ldots - a_{n-1}x_n + u \qquad \textbf{(2.33)}$$

Durum-uzay modelinde kullanılacak çıkış eşitliği **(2.34)**'te verilmektedir.

$$y = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + \ldots + b_{n-1}x_n \qquad \textbf{(2.34)}$$

Eşitlik **(2.33)** ve **(2.34)**'te verilen bilgileri tek bir matriste toplanırsa durum **(2.35)** ve çıkış **(2.36)** elde edilir.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.35)}$$

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

2.3.5 Durum vektörüne ait diferansiyel eşitliğin çözümü

Bu bölümde durum eşitliğinin adım adım nasıl çözüldüğü anlatılmaktadır. Herhangi bir sistemi ifade eden birinciden dereceden bir diferansiyel eşitlik **(2.37)** oluşturalım.

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) + bu(t) \tag{2.37}$$

Eşitlikte yer alan *x(t)* ve *u(t)* zamanı bağlı her bir *t* anında değerleri olan fonksiyonları ifade eder.

$\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$ olmak üzere,

$\frac{dx}{dt}$ ifadesi eşitlik **(2.38)**'e dönüşür.

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx}{dt}\right) = sX(s) - x(0) \tag{2.38}$$

$\mathcal{L}()$, Laplace dönüşümünü yapan operatördür. Buna göre eşitlik **(2.37)**'nin Laplace dönüşümü eşitlik **(2.39)** ile ifade edilir.

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s) \tag{2.39}$$

x(0) başlangıç koşulunu vermektedir. Eşitlik **(2.40)**, yukarıda gösterilen eşitlik **(2.39)**'in düzenlenmiş halini gösterir.

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s) \tag{2.40}$$

Zaman tanım aralığına, bu fonksiyonun ters Laplace dönüşümü alınarak geçilir. Eşitlik **(2.40)** için ters Laplace dönüşümü adımları aşağıda gösterilmektedir.

C sabit sayı, *F(s)* ve *G(s)* Laplace tanım aralığında tanımlanmış fonksiyonlar olmak üzere,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{s-a}\right) = Ce^{at} \tag{2.41}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)G(s)) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{2.42}$$

$$F(s) = \frac{b}{s-a} \tag{2.43}$$

$$G(s) = U(s) \tag{2.44}$$

Buna göre eşitlik **(2.40)**'ın Laplace transformu eşitlik **(2.44)**'de verilir.

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\,d\tau \tag{2.45}$$

Eşitlikte yer alan e^{at} Taylor serisi yardımıyla açılır. Eşitlik **(2.46)** exponansiyel bir fonsiyonun açılımını göstermektedir.

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \dots + \frac{a^nt^n}{n!} \tag{2.46}$$

Bu basit diferansiyel eşitliğe **(2.37)** yapılan işlemler sistem durum eşitliği içinde aynen geçerlidir. Bu durumda *a* ve *b* tekil değerleri, *A* ve *B* sistem matrisleri haline gelir.

Şimdi bir durum eşitliği tanımlayalım,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.47}$$

Bu eşitliğin Laplace transformunu alalım **(2.48)**,

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \tag{2.48}$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) - BU(s) \tag{2.49}$$

Eşitliğin her iki tarafı $(sI - A)^{-1}$ ile çarpıldığı zaman eşitlik **(2.50)** elde edilir.

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) - (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{2.50}$$

Eşitlik **(2.50)**'da verilen ifadenin ters Laplace dönüşümünü alırsak sistem çözülmüş olur **(2.51)**.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.51}$$

x(0) anında durgun halde olan dinamik sistemin herhangi bir *u* girişine ait çıkışını hesaplamak için eşitlik **(2.51),** eşitlik **(2.30)**'da yerine konur **(2.52)** .

$$y(t) = C\left(e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right) + Du(t) \tag{2.52}$$

e^{At} yukarıda bahsedilen exponansiyel fonksiyon **(2.46)** gibi Taylor serisine açılabilir **(2.53)**.

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^nt^n}{n!} \tag{2.53}$$

Eşitlik 2.44' de yer alan $(sI - A)$ sistemin karakteristik eşitliğidir. Bu eşitliğe çözücü matrisde denilmektedir [26]. Eşitliğin determinantını sıfır yapan matris sisteme ait frekansları içerir. Diğer bir deyişle *A* sistem durum matrisinin özdeğerleri, sisteme ait karasteriktik frekansları içerir.

2.3.6 Ayrık zaman durum uzay modelleri

Durum-uzay modelleri sürekli zamanda tanımlandığı gibi ayrık zamanda da tanımlanabilir. Bu durumda dinamik sistemi tanımlayan diferansiyel eşitlik yerini fark eşitliklerine bırakır **(2.54)**.

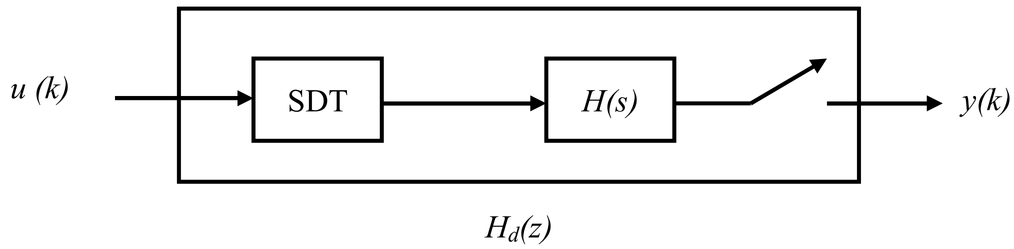
$$y(k) + \cdots + a_ny(k-n) = b_0u(k) + \cdots + b_nu(k-n) \tag{2.54}$$

Bu durumda sistemin dijital veriye uyum sağlaması için belirli koşullar altında matematiksel olarak ifade edilen sistem bazı yöntemlerle ayrıklaştırılır. Ayrıklaştırma işlemi için Δt örnekleme periyodu seçilmesi zorunludur. Bu durumda her bir zaman değeri, t = Δt*k olur. Ayrıklaştırma sonucu oluşan eşitlikler,

$$x_{k+1} = A_a x_k + B_a u_k$$
(2.55)

$$y_k = C x_k + D u_k$$
(2.56)

halini alır. Eşitliklerde verilen alt "*a*" indisi matrisleri ayrık olduğunu göstermektedir. Bu ayrıklaştırma işlemi SDT (Sıfır Derece Tutmacı) kabulü altında yapılmaktadır. Şekil 2.4'de ayrıklaştırma blok diyagramı verilmektedir. Bu kabul altında dönüştürme işleminden *C* ve *D* matrisleri etkilenmez. Matrislerin dönüşümleri aşağıda verilen blok diyagram ile gerçekleştirilir.



Şekil 2.4 : SDT blok diyagramı

2.3.7 Ayrık zamanda durum vektörüne ait difaransiyel eşitliğin çözümü

Eşitlik **(2.51)**'da verilen sürekli zamanda tanımlanmış durum eşitliğini çözümünü ele alalım. İki farklı $t_1 = kT$ ve $t_2 = (k+1)T$ anında bu denklemin çözümü eşitlik **(2.57)** ve **(2.58)**'da gösterimektedir.

$$x(kT) = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad \textbf{(2.57)}$$

$$x((k+1)T) = e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad \textbf{(2.58)}$$

Eşitlik **(2.57)**'i e^{AT} ile çarpıp, eşitlik **(2.58)**'dan çıkaraldığı zaman eşitlik **(2.59)** elde edilir.

$$x\big((k+1)T\big) - e^{AT}x(kT)$$
$$= e^{A(k+1)T}x(0) - e^{A(k+1)T}x(0) + \int_{0}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau - \int_{0}^{kT} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.59}$$

Eşitlik **(2.59)** düzenlenerek eşitlik **(2.60)** halini alır.

$$x\big((k+1)T\big) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.60}$$

Eşitlik **(2.60)**'da geçen integral ifadesinin değişkenleri *(k + 1)T – τ = t* olacak şekilde değiştirilir **(2.61)**.

$$x\big((k+1)T\big) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_{0}^{T} e^{At}dt\right)Bu(kT) \tag{2.61}$$

Bu eşitlik düzenlenecek olursa,

$$x\big((k+1)T\big) = A_a x(kT) + B_a\, u(kT) \tag{2.62}$$

(2.62) eşitliği elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta ayrık zamanda tanımlanmış *A(T)*' nin sürekli ortamda tanımlanan *A*' ya eşit olmamasıdır. Aynı durum *B(T)* matrisi içinde geçerlidir. *T = t* için eşitlik *A(T)*, e^{AT}' ye eşittir. *B(T)* matrisi ise eşitlik **(2.63)**'de verilmektedir [27].

$$B_a = \left(\int_{0}^{T} e^{At}dt\right)B \tag{2.63}$$

Bu eşitliğin farklı ifadesi de aşağıda verilen eşitlikle gösterilir **(2.64)**. Ayrıntılı bilgi için ilgili referansa bakılmalıdır [27].

$$B_a = A^{-1}(e^{At} - I)B \tag{2.64}$$

Sürekli ve ayrık zamanda tanımlanan durum-uzay eşitliklerinin özeti Çizelge 2.1' de verilmektedir.

Çizelge 2.1 : Sürekli ve ayrık durum uzay modellerinin özellikleri

	Sürekli zaman	Ayrık zaman
Sistem Matrisleri	A, B, C, D	A_a, B_a, C, D
Durum eşitliği	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t) + Du(t)$	$x_{k+1} = A_a x_k + B_a u_k$ $y_k = Cx_k + Du_k$
Çözücü matris	$\mathfrak{J}(s) = (sI - A)^{-1}$	$\mathfrak{J}(z) = (zI - A_a)^{-1}$
Durum geçiş matrisi	$\mathfrak{J}(t) = e^{At}$	$\mathfrak{J}(k) = {A_a}^k$
Özdeğerler	$\det(\lambda I - A) = 0$	$\det(\lambda I - A_a) = 0$
Özvektörler	$e^{\lambda t}$	λ_i^k
Transfer fonksiyonu	$\mathrm{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$	$\mathrm{H(z) = C(zI - A_a)^{-1}B_a + D}$

2.3.8 Sistem tanımada kullanılan durum-uzay modelleri

Sistem tanımada gerçek modellerin nasıl tanımlandığı önemli bir bahistir. Kurulan modelin, güvenilir sonuç vermesi de bununla alakalıdır. Literatürde doğrusal sistemlere ilişkin iki temel modelleme tekniği vardır. Deterministik modelleme ve stokastik modelleme. Son yıllarda sıklıkla kullanılan diğer modelleme biçimi olan birleştirilmiş deterministik stokastik modelleme yöntemi, bu yöntemlerin kombinasyonu olarak karşımıza çıkar [18,28].

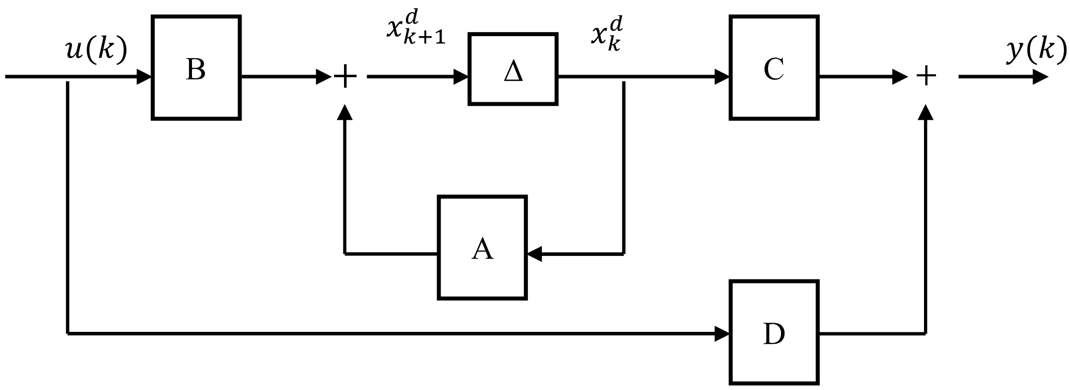
2.3.8.1 Deterministik modeller

Deterministik teknik, bütün şartların ideal olduğu durumda geçerli bir modelleme biçimidir. Tipik olarak sadece giriş ve çıkış bilgisine bağlı olarak yazılır. Sistemi dışarıdan etkileyen başka bilgiler bu modelde yer almaz. Böyle modellerin tipik olarak ayrık zamanda tanımlanmış ifadesi eşitlik **(2.65)** ve **(2.66)**'de gösterilmektedir.

$$x_{k+1} = A_a x_k + B_a u_k \tag{2.65}$$

$$y_k = C x_k + D u_k \tag{2.66}$$

Şekil 2.5'de deterministik sisteme ait blok diyagramı verilmektedir.



Şekil 2.5 : Deterministik sisteme ait blok diyagramı

Şekil 2.5'de geçen Δ, geçikmeyi, *A, B ,C, D*ise sistem matrislerini ifade eder.

2.3.8.2 Stokastik modeller

Gerçek ortamda sistemler önceki konularda anlatıldığı gibi ideal olarak davranmazlar. Çevresel faktörlerin etkisi ve gözlemcilerin yanılgısı ile birlikte sistemde ve sistemin cevabında bazı belirsizlikler ortaya çıkar. Bu belirsizliklerin ya da bilinemeyen davranışların bir şekilde sisteme ilave edilmesi gerekir. Bundan dolayı deterministik sistemlere stokastik ilaveler eklenir. Bu bölümde saf stokastik sistemlerden bahsedilmektedir. Bu tip sistemlerde giriş beyaz gürültü olarak kabul edilmektedir.

Bir stokastik doğrusal sistemin durum-uzay modeli eşitlik **(2.67)** ve **(2.68)**'de gösterilmektedir.

$$x_{k+1} = A_a x_k + w_k \tag{2.67}$$

$$y_k = C x_k + v_k \tag{2.68}$$

Eşitlikte yer alan $w \in R^n$, *n x 1* boyutunda sistemin gürültüsünü, $v \in R^n$ ise yine *n x 1* boyutunda gözlemcinin (sensörler gibi) sisteme dahil ettiği gürültüyü gösterir. Bu gürültülerin en önemli özellikleri ortalamalarının sıfır olması ve beyaz gürültü olmalarıdır. Burada *w* ile *v* arasında önemli bir ilişki birbirleri ile korele olmamalarıdır **(2.69)**.

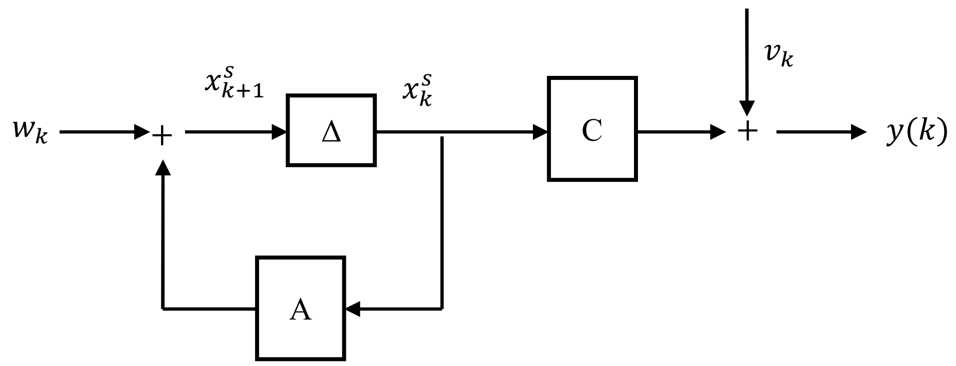
$$E\left[\begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_j^T & v_j^T \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & \mathcal{R} \end{bmatrix}\delta_{ij} \tag{2.69}$$

Eşitlik **(2.69)**'de yer alan E[]operatörü ortalama operatörü, δ_{ij} ise Kroncker delta fonksiyonudur (i = j için $\delta_{ij} = 1$, diğer durumlarda ise,$\delta_{ij} = 0$.Kovaryans değerleriQ, $\mathcal{R}$ve Solarak gösterilmektedir.

Ayrık stokastik sisteme ait diferansiyel eşitliğin çözümü aşağıda gösterilmektedir **(2.70)**.

$$x\big((k+1)T\big) = e^{AT}x(kT) + \left(\int_0^T e^{At}dt\right)Bw(kT) \tag{2.70}$$

Stokastik sisteme ait blok diyagram Şekil 2.6'da verilmektedir.



Şekil 2.6 : Stokastik sisteme ait blok diyagramı

2.3.8.3 Durum-uzay modellerine ait bazı kavramlar

Dinamik sistemlere ait bazı kavramlar vardır. Bunlardan en önemlileri, sistemlerin kontrol edilebilir ve gözlemlenebilir olmalarıdır. Bu kavramlar ilk defa Kalman tarafından ortaya atılmıştır. Bu bölümde kısaca bunlardan bahsedilecektir.

2.3.8.4 Kontrol edilebilirlik

Sistemin x_0 durumu, $u(t,\ x_0)$ kontrol fonksiyonu ile bir sonraki x_1 durumuna taşınabiliyorsa sisteme ait x_1 durumu kontrol edilebilir denir.

Sisteme ait bütün durumlar kontrol edilebiliyorsa bu sistem tamamiyle kontrol edilebilirlik şartlarını sağlar.

Eğer bir sistem x_0' dan x_1' e başlangıç zamanından bağımsız olarak aktarılabiliyorsa sistem tamamiyle kontrol edilebilir denir.

2.3.8.5 Gözlemlenebilirlik

Dinamik bir sistem x_1 durumda gözlemlenebilir ise, sisteme ait giriş $u(t)$ ve çıkış $y(t)$ bu durum tarafından belirlenebilir.

Sisteme ait bütün durumlar gözlemlenebilir ise sistem tamamiyle gözlemlenebilirdir.

Sisteme ait bir durum t_0 anından bağımsız bir biçimde belirlenebiliyorsa bu sistem tamamiyle gözlemlenebilirdir.

2.3.9 Ayrık sistemlerin impuls cevabı

Sistem tanıma açısından dinamik modellerin impuls cevabı çok önemlidir. İmpuls eşitlik **(2.71)**'de tanımlanmaktadır.

$$I = \begin{Bmatrix} k = 0, u = 1 \\ k > 0, u = 0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.71)}$$

Ayrık sistemlerde sistemlerin impuls cevabının durum-uzay modelleri ile direk olarak ilişkileri vardır. Bu ilişki aşağıda adım adım gösterilmektedir.

$$y_k = Cx_k + Du_k$$

u giriş bilgisi impulsa eşit olduğu durumda, y_k sistemin cevabı, impuls tepki fonksiyonuna h_k dönüşür. $k = 0$ için $x_0 = 0$ ve $u_k = 1$'dir.

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0 = A * 0 + B * 1 \rightarrow x_1 = B$$

$$h_0 = Cx_0 + Du_0 = C * 0 + D * 1 \rightarrow h_0 = D$$

$$h_1 = Cx_1 + Du_1 = C * B + D * 0 \rightarrow h_1 = CB$$

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A * B + B * 0 \rightarrow x_2 = AB$$

$h_2 = Cx_2 + Du_2 = C * AB + D * 0 \rightarrow h_2 = CAB$

$x_3 = Ax_2 + Bu_2 = A * AB + B * 0 \rightarrow x_3 = A^2B$

$h_3 = Cx_3 + Du_3 = C * A^2B + D * 0 \rightarrow h_3 = CA^2B$

$\vdots \quad = \vdots$

$x_n = Ax_{n-1} + Bu_{n-1} = A * A^{n-2}B + B * 0 \rightarrow x_n = A^{n-1}B$

$h_n = Cx_n + Du_n = C * A^{n-1}B + D * 0 \rightarrow h_n = CA^{n-1}B$

$h \in R^n$bir sistemin impulse cevabı,

$$h = \begin{Bmatrix} h_0 = D \\ h_n = CA^{n-1}B \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.72)}$$

şeklinde ifade edilir.

3. SİSTEM TANIMA

3.1 Giriş

Sistem tanıma, dinamik sistemlerin giriş ve çıkış bilgisine bağlı olarak matematiksel modellerin bir takım dinamik parametrelerini belirlemeye yarayan araçlardan biridir. Sistem tanıma, deneysel verilerden matematiksel modeli elde etmek amacıyla kullanılan en etkili yöntemlerden biri olarak kabul edilir. Bu yöntemde sensörler aracılığıyla elde edilen bilgiler kullanılarak üzerinde çalışılan sistemlerin sönüm oranları, frekansları ve mod şekilleri gibi dinamik karakteristikleri belirlenebilir. Bu dinamik parametreler kullanılarak oluşturularan analitik model güncellenebilir veya yapının yıllara dayanan sürekli incelenmesinde kullanılabilir. Sistem tanıma algoritmaları ilk olarak kontrol ve elektrik mühendisliğinin çalışma alanı olarak ortaya çıkmıştır. Yöntemin aslında bütün dinamik sistemlerde uygulanabileceği keşfedildikten sonra, kimya, makina, uçak-uzay ve inşaat mühendisliği tarafından uygulanan ve geliştirilen bir yöntem haline gelmiştir.

İnşaat mühendisliği bakış açısından sistem tanımada iki ana yaklaşım vardır. Bunlardan ilki Deneysel Modal Analiz olarak bilinen, giriş ve çıkış bilgisine bağlı olarak sistem tanımadır. Bu konuda yazılmış önemli eserlerden bazıları Ewins ve Ljung'a aittir [9,12]. Bu klasik yaklaşım, giriş ve buna bağlı çıkış bilgisinin bir takım sensörler aracılığıyla elde edilip, sistemin parametrelerinin belirlenmesi olarak karşımıza çıkar. Bu yöntem etkili olmakla beraber iki temel kısıt içermektedir. İlk olarak, bütün yapıların laboratuvar ortamında gerçeklenmesi zordur veya imkansızdır. Sonuç olarak bu tür yapıların kullanım şartları altında deneye tabi tutulması gerekmektedir. Kullanım şartları altında giriş bilgisinin gürültüden ayrılarak ölçülmesinde zorluklar bulunmaktadır. Ayrıca İnşaat Mühendisliği yapıları gibi büyük yapıları büyük sallayıcılar ile sarsmak pratik açıdan zor ve zahmetlidir. Bu da karşımıza ikinci bir kısıt olarak çıkmaktadır. Kullanım koşulları altında deney yapılmasındaki zorluklar, yapıları devasa oluşu sadece çıkış bilgisine dayalı sistem tanıma tekniklerinin kullanılmasını gündeme getirmiştir. Çevresel faktörlerden dolayı oluşan 10^{-3} – 10^{-5} g seviyesinde küçük titreşimler, bu yöntemin uygulanması için kullanılan giriş bilgisi olarak karşımıza çıkar. Bu rastgele titreşimler son zamanlarda büyük yapıların dinamik parametrelerinin belirlenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Birinci yöntemde kullanılan deterministik giriş bilgisi yerini, durağan veya durağan olmayan stokastik giriş bilgisine bırakmaktadır. Önceki çalışmalarda bu yöntemden elde edilen sonuçlar göreceli olarak oldukça başarılıdır. Literatürde en çok kullanılan sistem tanıma algoritmaları şunlardır.

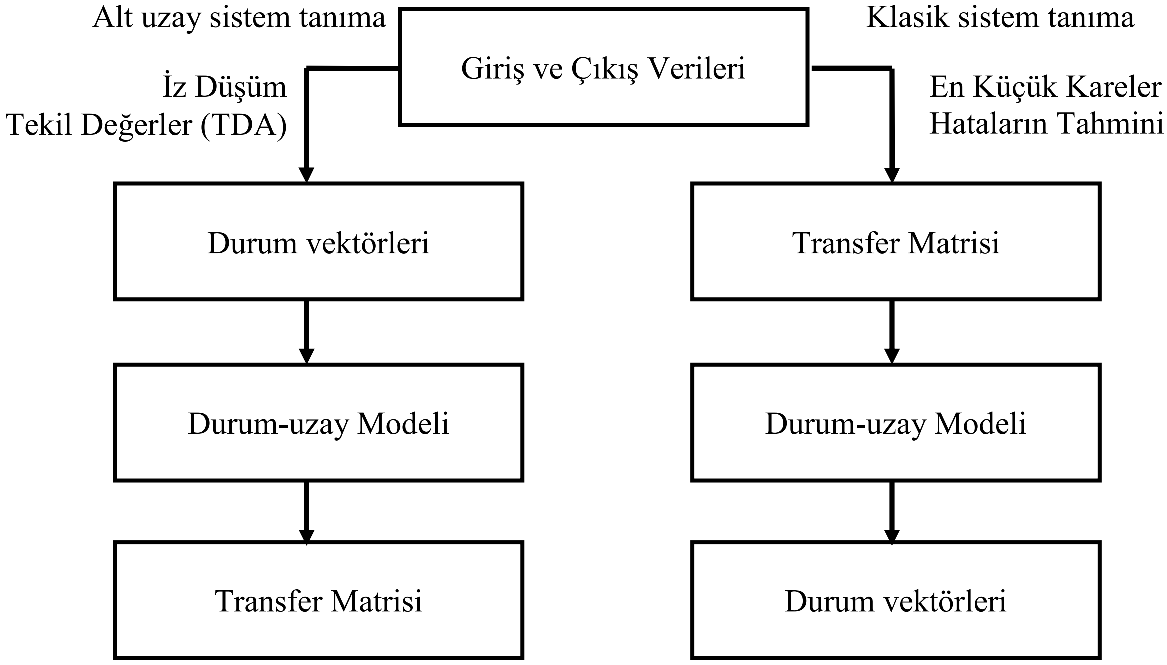
- Alt uzay esaslı sistem tanıma
    - Deterministik sisten tanıma
    - Stokastik sistem tanıma
    - Birleştirilmiş deterministik stokastik sistem tanıma
- Hataların tahmini yöntemi
- Piklerin seçilmesi yöntemi
- Kompleks mod gösteren fonksiyonlar yöntemi

Titreşim esaslı alt uzay esaslı sistem tanıma teknikleri, ilk defa Van Overschee ve Bart De Moor tarafından kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır [18].

Bu tez kapsamında alt uzay esaslı sistem tanıma teknikleri incelenmektedir. Bu yöntemlere geçmeden önce bu yöntemlerde kullanılan bir takım matematiksel araçlara değinilmektedir.

3.2 Alt Uzay Esaslı Sistem Tanıma

1980' lerin ortasına kadar klasik sistem tanıma yöntemleri gelişimine devam etmiştir. Bu gelişim, durum-uzay esaslı kontrol tekniklerinin yaygınlaşması ile birlikte unutulmuş ve yöntemler popülerleğini yitirmiştir. Durum-uzay modellerinin getirdiği birçok avantajdan faydalanmak için sistem tanıma yöntemleri klasik yaklaşımdan alt uzay esaslı sistem tanıma yaklaşımına doğru kaymıştır. Şekil 3.1'de tipik olarak klasik ve alt uzay esaslı yaklaşım arasındaki farklar gösterilmektedir [19].



Şekil 3.1 : Klasik sistem tanıma ve Alt uzay esaslı sistem tanıma

Şekildende anlaşılacağı gibi aralarında ciddi farklar vardır. Klasik yaklaşımda önce transfer matrisi belirlenirken, alt uzay esaslı sistem tanımada transfer matrisi en son belirlenmektedir. Klasik yaklaşımda en çok kullanılan yöntemlerden biri hataların tespitidir. Tipik olarak bu gibi yöntemlerde doğrusal veya doğrusal olmayan optimizasyon gerekmektedir. Bu da yöntemi çözüm için zor kılar. Buna ilave olarak bu yöntemlerin oldukça fazla zaman maliyeti vardır. Alt uzay esaslı sistem tanımada ise daha çok matris işlemleri yer alır. Hem zaman hem de güvenilirlik açısından diğer yönteme göre daha avantajlı konumdadır.

3.3 Sistem Tanımada Kullanılan Geometrik Araçlar ve Matris İşlemleri

Bu tez kapsamında anlatılan sistem tanıma teknikleri matris işlemleri ve geometrik kavramlar üzerine kuruludur. Bu araçların kullanılması yöntemleri hızlı, sayısal açıdan kararlı, kolayca sonuca yakınsayan ve efektif kılar. Yöntemlerin literatürde yaygın bir biçimde kullanılması da bununla alakalıdır. Bu yöntemler Van Overschee ve Bart De Moor tarafından ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır [18].

3.3.1 Dikey izdüşüm

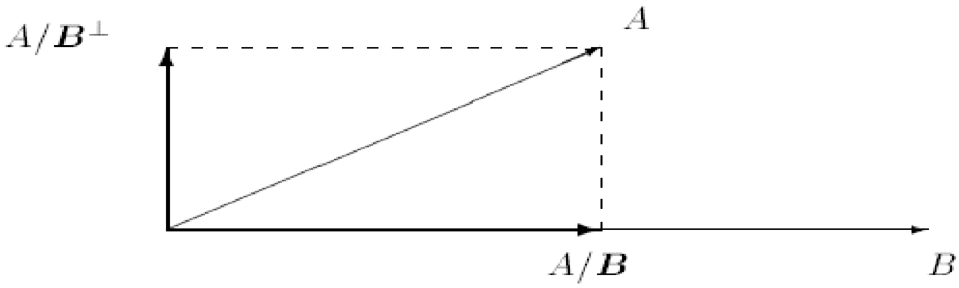
$\prod_B$ herhangi bir matrisin satır uzayının, matrisinin satır uzayına izdüşüren bir operatör olsun. Buna göre bu operatör,

(3.1)

eşitliği ile tanımlanır. Eşitlikte yer alan operatörü, parantez içerisindeki matrisin Moore-Penrose sözde tersini alır. Operatörün bir matris üzerinde gösterim şekli eşitlik (3.2)' de verilmektedir.

(3.2)

Eşitlik **(3.2)'**de *A* matrisinin, *B* matrisi üzerine izdüşümü alınmaktadır. Şekil 3.2, bu durumu görsel olarak açıklamaktadır.



Şekil 3.2 : A matrisinin B' ye ve B' ye dik olan matrise izdüşümü

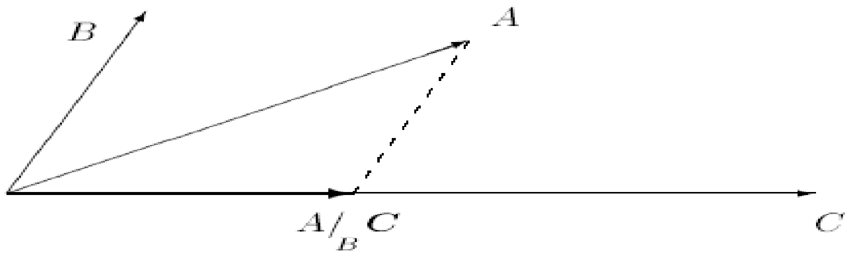
3.3.2 Eğik izdüşüm

Dikey izdüşümde bir matrisinin satır uzayı birbirine dik olan iki vektöre ayrılmıştı. Bu izdüşümde ise birbirine dik olmayan iki vektörün doğrusal kombinasyonu *A* matrisinin satır uzayını oluşturur.

' nın satır uzayının, ' nin satır uzayı boyunca ' nin satır uzayına eğik iz düşümü,

(3.3)

şeklinde ifade edilir. Eşitlikte yer alan $\perp$ vektörlerin dikliğini göstermektedir. Eşitlik **(3.3)**'de A matrisinin, B matrisi boyunca C matrisi üzerine eğik izdüşümü alınmaktadır. Şekil 3.2, bu durumu görsel olarak açıklamaktadır.



Şekil 3.3 : A matrisinin B matrisi boyunca C matrisi üzerine eğik izdüşümü

3.3.3 Tekil değerlerin ayrıştırılması

Tekil değerlerine ayrıştırma yöntemi lineer cebirde kullanılan en önemli ayrıştırma yöntemlerinden biridir. Kullanım alanı çok geniştir. Bunların başlıcaları istatistik, gürültü elimine etme, kare olmayan matrislerin tersini alma ve duyarlılık analizidir. Tekil değerlerine ayrıştırma yöntemi (TDA), kararsız matrislerin ve problemlerin incelenmesinde de oldukça etkili bir sayısal araçtır. TDA yöntemi kullanılarak bir matrisin tekil değerleri ve sol-sağ vektörleri bulunur.

TDA ile reel ve compleks matrisler eşitlik **(3.4)** ile verilen ifadede üç farklı matrise ayrıştırılabilir.

(3.4)

matrisinin reel olma durumunda, H üstel işareti transpoza, kompleks olma durumunda ise eşlenik transpoza dönüşür. Eşitlikte yer alan S, diagonal tekil değerler matrisidir. ve matrisleri uniter matrislerdir. U matrisinin her bir bir sütunu sol tekil vektörleri, V matrisinin yine her bir sütunu sağ tekil vektörleri verir. U ve V matrislerine ait bir özellik eşitlik **(3.5)**'de verilmektedir.

(3.5)

Eşitlikte yer alan I birim matristir. Bir matrisin tekil değerlere nasıl ayrıştırılması gerektiği **EK. A**' da verilmiştir.

3.4 Alt Uzay Esalı Sistem Tanıma Yöntemleri

Alt uzay esaslı durum-uzay (Subspace-Based State-Space) sistem tanıma yöntemi 90'lı yılların başında geliştirilmeye başlanmıştır. Bu yöntem direk olarak ölçülen veriden veya bu verilerin kovaryansından karmaşık dinamik sistem için, sayısal olarak güvenilir sonuçlar vermiştir [14]. Bunu daha sonra farklı modellere uygulayarak (stokastik sistemler gibi) rastgele bir tahrike maruz kalan bir sistem için sadece cevap ölçümleri kullanılmıştır [18].

Esasen alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemleri zaman tanım aralığında tanımlıdır [18]. Dinamik sistemin nasıl tanımlandığına bağlı olarak kullanılan alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemi üç gruba ayrılmaktadır.

- Deterministik alt uzay esaslı sistem tanıma
- Stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma
- Birleştirilmiş deterministik stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma

Yukarıda belirtilen teknikler, Van Overschee ve Bart De Moor tarafından ayrıntılı bir biçimde anlatılmıştır [18]. Tekniklerin kullanıldığı dinamik modeller Bölüm 2'de verilmiştir.

3.4.1 Deterministik alt uzay esaslı sistem tanıma

Deterministikalt uzay esaslı sistem tanıma yöntemi bilinen giriş bilgisinden yola çıkarak durum uzay modelini tahmin eder. Çözüme ulaşmadan önce bilinen değişkenler sisteme ait giriş bilgileri $u_k$ve çıkış bilgileri y_k' dır. Bu verilere dayanarak sistemden elde edilmesi gerekenler ise durum uzay matrisleridir (A_a, B_a, C, D). Literatürde, bu matrisleri elde eden pek çok algoritma mevcuttur [16,17]. Bütün bu çözümler tek bir çatı altında toplanıp genel bir çözüm ilk defa Van Overschee ve Bart De Moore [18]tarafından önerilmiştir.

3.4.1.1 Blok Hankel matrisi

Lineer cebirin önemli araçlarından biri Hankel matrisi sağ üst köşesinden sol alt köşeye doğru inen köşegenindeki ve bu köşegene paralel doğrultudaki elemanları sabit olan matristir. Hankel matrisleri, alt uzay esaslı sistem tanımada çok önemli bir yere sahiptir [18].

Bu blok matris, bilinen giriş ve çıkış dataları kullanılarak oluşturulabilir. Bu matrisin giriş verileri için nasıl oluşturulması gerektiği aşağıda görsel olarak anlatılmaktadır.

$$U_{0|2i-1} = \begin{array}{cc} & j \\ \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \\ i \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-2} \\ \hline u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & u_{2i+j-1} \end{array}\right) \end{array} = \frac{U_{0|i-1}}{U_{i|2i-1}} = \frac{U_p}{U_f} \qquad \textbf{(3.6)}$$

$$= \begin{array}{c} j \\ \left(\begin{array}{ccccc} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-2} \\ u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & u_{i+j-1} \\ \hline u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & u_{2i+j-1} \end{array}\right) \end{array} = \frac{U_{0|i-1}}{U_{i+1|2i-1}} = \frac{U^{+}{}_{p}}{U^{-}{}_{f}} \qquad \textbf{(3.7)}$$

Burada *i* değeri blok satırın adedini ifade eder. Bu bilgi kullanıcı tarafından belirlenen bir değerdir. Yukarıda gösterilen matrisler sadece bir giriş bilgisi için bloktan oluşan matrislerdir. Çoklu giriş ve çıkışa sahip sistemler için matrisin bir bloktan oluşan satırında sensor sayısı kadar eleman olmalıdır. Bu durumda $U_{0\,|\,2i-1}$ toplamda (*2 x sensor sayısı x i*) kadar satıra sahip olur. Bu matrisin çizgi ile ayrılmış üst bloğu U_p ile ifade edilmektedir. Alt indis *p* geçmiş anlamında kullanılmaktadır. Alt blok satır için kullanılan *f*, gelecek anlamındadır.

Matrisin sütun sayısı *j*, *s – 2i + 1* eşitliği ile belirlenebilir [18]. Bu durumda sistemden toplanan bütün veriler kullanılmış olur. Toplanan datanın uzunluğu, *s* ile ifade edilir. Çıkış blok Hankel matrisini *($Y_{0|2i-1}$)* oluşturmak için aynı işlem uygulanabilir. Willems notasyonuna göre giriş çıkış Hankel blok matrisleri eşitlik **(3.8)** ve **(3.9)**'de gösterilmektedir.

Bu durum da geçmişe ait iki blok Hankel matrisi bir W matrisi ile ifade edilebilir.

$$W_{0|i-1} = \begin{pmatrix} U_p \\ U_f \end{pmatrix} = W_p \tag{3.8}$$

$$W^{+}{}_{p} = \begin{pmatrix} U^{+}{}_{p} \\ U^{+}{}_{f} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Eşitlik **(3.9)** ile geçmiş blok Hankel matrisleri Willams notasyonuna göre ifade edilir.

3.4.1.2 Matris eşitlikleri

Bir sisteme ait blok Hankel matrisinin i blok satırı, sistemin derecesinden büyük olmak kaydıyla gözlemlenebilirlik matrisi $\Gamma_i \in R^{lixn}$ eşitlik **(3.10)** ile ifade edilir.

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Eşitlikte yer alan A ve C matrisleri gözlemlenebilir matrislerdir. Sistem tanımada kullanılan başka bir eşitlikte ters çevrilmiş genişletilmiş kontrol edilebilirlik matrisidir ($\Delta_i{}^{d} \in R^{mxni}$) **(3.11)**.

$$\Delta_i{}^{d} = \begin{pmatrix} A^{i-1}B & A^{i-2}B & A^{i-3}B & \cdots & AB & B \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Bu tanımlardan sonra deterministik sisteme ait durum uzay modeli matris formunda rahatlıkla gösterilebilir. Eşitlikler sırasıyla **(3.12)**, **(3.13)** ve **(3.14)**'de verilmektedir.

$$Y_p = \Gamma_i X_p^d + H_i^d U_p \tag{3.12}$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f^d + H_i^d U_f \tag{3.13}$$

$$X_f^d = A^i X_p^d + \Delta_i^d U_p \quad \textbf{(3.14)}$$

Eşitlikte yer alan $X_i^d \in R^{nxj}$ durum değişkenlerinin oluşturduğu vektörü **(3.15)**, $H_i^d \in R^{lixn}$ ise durum uzay matrislerinden elde edilen Toeplitz matrisini **(3.16)** ve alt indis *i* blok satırı ifade eder.

$$X_i^d = \left(x_i^d x_{i+1}^d \ \dots \ x_{i+j-2}^d x_{i+j-1}^d\right) \quad \textbf{(3.15)}$$

$$H_i^d = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \vdots & 0 \\ CAB & CB & D & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-2}B & CA^{i-2}B & \cdots & D \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.16)}$$

3.4.1.3 Sistem tanıma algoritması

Deterministik sistem tanıma algoritmaları Van Overschee ve Bart De Moor tarafından ayrıntılı şekilde açıklanmıştır [18]. Bu bölümde bu algoritmaların birinden kısaca bahsedilmektedir.

Öncelikle Y_f matrisi U_f matrisi boyunca W_p matrisi üzerine eğik izdüşümü hesaplanmalıdır **(3.17)**. Daha sonra hesaplanan bu matris tekil değerlerine ayrıştırılır **(3.18)**. Bu işlemden sonra tekil değerlerin sıfır olan kısmı matrislerden ayıklanır **(3.18)**.

Dipnot: Lineer cebirde sıklıkla kullanılan Toeplitz matrisi, ismini ünlü matematikçi Otto Toeplitz'den almıştır.Bu matris, köşegeni ve bu köşegene paralel doğrultudaki elemanları sabit olan özel bir matristir. Tipik olarak Toeplitz matrisi aşağıda verilen formda gösterilir.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ i & h & g & f & a \end{pmatrix}$$

$$O_i = Y_f /_{U_f} W_p \tag{3.17}$$

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \tag{3.18}$$

Eşitlik **(3.18)**'de yer alan $W_1 \in R^{lixli}$ ve $W_2 \in R^{jxj}$ matrisleri kullanıcı tarafından belirlenen ağarlıklandırma matrisleridir. Bu matrislerden $W1$' in rank tam olmalıdır. Bununla birlikte W_2 matrisi, $rank\,(W_p) = rank\,(W_p \,.\, W_2)$ eşitliğini sağlamalıdır. Eşitlik (3.16)' da yer alan S_1 matrisinin satır sayısı, algoritma tarafından belirlenen dinamik sistemin derecesini verir.

Bundan sonraki adım, dinamik sisteme ait durum değişkenleri vektörünü elde etmektir. Bu değişkenleri elde etmek için genişletilmiş gözlemlenebilirlik matrisi ve eğik izdüşümden elde eldilen O_i (i blok satır olmak üzere) matrisi arasındaki ilişkiyi tanımak gerekmektedir. Bu ilişki eşitlik **(3.19)**'da verilmektedir.

$$O_i = \Gamma_i . X_f^d$$
$$O_{i-1} = \Gamma_{i-1} . X_{i+1}^d \tag{3.19}$$

Bu eşitlikte Γ_i yalnız bırakılarak,

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{\frac{1}{2}} . T \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. T matrisi benzerlik matrisidir. Geliştirilmiş gözlemlenebilirlik matrisi tanımlandıktan sonra, eşitlik **(3.19)** aşağıda verilen formda tekrardan yazılarak durum değişken vektörü elde edilir **(3.21)**.

$$X_f^d = \Gamma_i^{\dagger} . O_i$$
$$X_{i+1}^d = \Gamma_{i-1}^{\dagger} . O_{i-1} \tag{3.21}$$

Bu tanımlardan sonra **(3.22)** eşitliğinde yer alan dinamik sisteme ait *A, B, C, D* matrisleri en küçük kareler yöntemi ile bulunabilir.

$$\begin{pmatrix} X_{i+1}^d \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i^d \\ U_{i|i} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Bu bölümde anlatılan algoritma Çizelge 3.1'de şematik olarak özetlenmektedir.

Çizelge 3.1 : Deterministik algoritma

Hankel matrisleri kurulur. Eğik izdüşüm hesaplanır.

$$O_i = Y_f /_{U_f} W_p$$
$$O_{i-1} = Y_f{}^{-} /_{U_f}\text{-} W_p{}^{+}$$

↓

Ağırlıklı *O* matrisleri tekil değerlerine ayrıştırılır.

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

↓

Genişletilmiş gözlemlenebilirlik matrisleri hesaplanır.

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}$$
$$\Gamma_{i-1} = \underline{\Gamma_i}$$

Not: Alt çizgi son satırın çıkarılması anlamına gelir

↓

Durum değişkeni vektörleri hesaplanır.

$$X_f^d = \Gamma_i{}^{\dagger} O_i$$

$$X_{i+1}^d = \Gamma_{i-1}{}^{\dagger} O_{i-1}$$

↓

Lineer denklem çözülür.

$$\begin{pmatrix} X_{i+1}^d \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i^d \\ U_{i|i} \end{pmatrix}$$

3.4.2 Stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma

Bu bölümde stokastik sistemlere ait sistem tanıma yöntemi anlatılmaktadır. İnşaat mühendisliği açısından bu yöntemin önemi oldukça fazladır. Tahrik edilemeyen büyük inşaat yapılarının bu yöntem ile dinamik karakteristikleri belirlenebilmektedir. Deterministik tanıma yönteminde olduğu gibi, bu yöntemde de amaç durum uzay modeline ait stokastik sistem matrislerini elde etmektir.

Stokastik sistem tanıma, Van Overschee ve Bart De Moor tarafından detayları ile anlatılmıştır [18]. Aşağıda yalnızca temel adımlardan bahsedilmektedir.

3.4.2.1 Blok Hankel matrisi

Stokastik durum -uzay modelin de giriş bilgisi olmadığından sadece çıkış bilgisi için blok Hankel matrisi oluşturulur. Bu matrisi oluşturma adımları aşağıda gösterilmektedir.

$$Y_{0|2i-1} = \begin{array}{cc} & \overleftrightarrow{\quad j \quad} \\ \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \\ i \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-2} \\ \hline y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} & \cdots & y_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i+1} & \cdots & y_{2i+j-1} \end{array}\right) \end{array} = \frac{Y_{0|i-1}}{Y_{i|2i-1}} = \frac{Y_p}{Y_f} \qquad \textbf{(3.23)}$$

$$= \begin{array}{c} \overleftrightarrow{\quad j \quad} \\ \left(\begin{array}{ccccc} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j-2} \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+j-1} \\ \hline y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} & \cdots & y_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i+1} & \cdots & y_{2i+j-1} \end{array}\right) \end{array} = \frac{Y_{0|i-1}}{Y_{i+1|2i-1}} = \frac{Y^{+}{}_{p}}{Y^{-}{}_{f}} \qquad \textbf{(3.24)}$$

Burada i değeri blok satırının adetini ifade eder. Stokastik yöntemde sadece çıkış bilgisi mevcut olması nedeniyle Hankel matrisleri sadece çıkış bilgileri için oluşturulur. Çıkış Hankel matrisinin çizgi ile ayrılmış üst bloğu $Y_p$ile ifade edilmektedir. Alt indis p geçmiş anlamında kullanılmaktadır. Alt blok satır için kullanılan f, gelecek anlamındadır.

3.4.2.2 Matris işlemleri

Bir sisteme ait blok Hankel matrisinin i blok satırı, sistemin derecesinden büyük olmak kaydıyla gözlemlenebilirlik matrisi eşitlik (3.8) ile ifade edilmişti. Bu tanımla birlikte ters çevrilmiş genişletilmiş kontrol edilebilirlik matrisi $\Delta_i^c \in R^{nxli}$ eşitlik **(3.25)**'de ifade ediliebilir.

$$\Delta_i^c = \left(A^{i-1}G \;\; A^{i-2}G \;\; A^{i-3}G \ldots \;\; AG \;\; G\right) \tag{3.25}$$

eşitlikte yer alan i alt indis blok kolon sayısını, c üst indisi kovaryans olduğunu göstermektedir. Sisteme ait çıkış bilgilerinin kovaryansı ile Toeplitz matrisi oluşturulur$C_i \in R^{lixli}$, $L_i \in R^{lixli}$**(3.26) (3.27)**.

$$C_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \Lambda_{i-2} & \cdots & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \vdots & \Lambda_2 \\ \Lambda_{i+2} & \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \vdots & \Lambda_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \Lambda_{2i-3} & \cdots & \Lambda_i \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

$$L_i = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \Lambda_{-2} & \cdots & \Lambda_{1-i} \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \vdots & \Lambda_{2-i} \\ \Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 & \vdots & \Lambda_{3-i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{i-1} & \Lambda_{i-2} & \Lambda_{i-3} & \cdots & \Lambda_0 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Kovaryans matrislerin her bir elemanı olan Λ çıkış kovaryans değeri eşitlik **(3.28)** ile hesaplanmaktadır.

$$\Lambda_\mathrm{i} = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{j}\left(\sum_{k=0}^{j-1} (y_k + i y_k^T)\right) = \mathcal{R}_{[Y_{i|i}, Y_{0|0}]} \tag{3.28}$$

Bu tanımla birlikte C_i ve L_i aşağıda verilen eşitlikle tanımlanabilir.

$$C_i = \mathcal{R}_{[Y_p, Y_f]}$$
$$L_i = \mathcal{R}_{[Y_p, Y_p]} \text{veya} \mathcal{R}_{[Y_f, Y_f]} \tag{3.29}$$

3.4.2.3 Kalman filtresi

Stokastik sistem tanımada, Kalman filtresi önemli bir yere sahiptir. Gürültülü çıkışa sahip doğrusal dinamik sistemlerde durum değişkenlerini tahmin etmek için kullanılan etkili bir filtredir. Durum değişkenleri vektörü elde edilirken geçmiş çıkış Hankel matrisi Y_p, bu filtreden geçirilir. İki farklı Kalman filtresi vardır: İleri sabit olmayan durumda ve geri sabit olmayan durumda [18]. Bu tez kapsamında birinci tip kalman filtresi anlatılmaktadır. Bu tip filtreler için iki ayrı ön kabul mevcuttur.

Başlangıç durumu $\hat{x}_0 = 0$,

Başlangıç kovaryans $P_0 = 0$,

Sonraki durumlar eşitlik **(3.30)**’da verilen tekrarlı formulle bulunabilir.

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + K_{k-1}(y_{k-1} - C\hat{x}_{k-1}) \tag{3.30}$$

eşitlikte yer K Kalman kazıncını **(3.31)** ifade eder.

$$K_{k-1} = (G - AP_{k-1}C^T)(\Lambda_0 - CP_{k-1}C^T)^{-1} \tag{3.31}$$

G ileri stokastik modelden elde edilen bir matris olup durum uzay matrisi olan C ile aralarında bir ilişki vardır [18]. Eşitlik **(3.31)**’den yola çıkılarak $\hat{x}_k$ elde edilir **(3.32)**.

$$\hat{x}_k = \Delta_k^c L_k^{-1} . \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

olmak üzere $\hat{X}_i$ durum vektörü dizisi,

$$\hat{X}_i = \left(\hat{x}_i \hat{x}_{i+1} \hat{x}_{i+2} \ \cdots \ \hat{x}_{i+j-1}\right) = \Delta_k^c L_k^{-1} . Y_p \tag{3.33}$$

ile ifade edilir.

3.4.2.4 Sistem tanıma algoritması

Öncelikle Y_p matrisinin, Y_f matrisi üzerine dik izdüşümü hesaplanmalıdır **(3.34)**. Daha sonra hesaplanan bu matris tekil değerlerine ayrıştırılır **(3.35)**. Bu işlemden sonra tekil değerlerin sıfır olan kısmı matrislerden ayıklanır **(3.35)**.

$$O_i = Y_f / Y_p \tag{3.34}$$

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \tag{3.35}$$

Eşitlik **(3.35)**'da yer alan $W_1 \in R^{lixli}$ ve $W_2 \in R^{jxj}$ matrisleri kullanıcı tarafından belirlenen ağarlıklandırma matrisleridir. Bu matrisleri belirlemede üç yaklaşım vardır. Bunlar sırasıyla Esas Eleman (PC), Ağırlıklanmamış Esas Eleman (UPC) ve Standart Değişken (CVA) algoritmalarıdır. Ayrıntılı bilgi için Çizelge 3.2' ye bakılmalıdır.

Çizelge 3.2 : Ağırlık matrislerinin hesabı

	W_1	W_2
PC	I_{li}	$Y^T{}_p . \mathcal{R}^{-1/2}{}_{[Y_p, Y_p]} . Y_p$
UPC	I_{li}	I_j
CVA	$\mathcal{R}^{-1/2}{}_{[Y_f, Y_f]}$	I_j

Bu matrislerden W_1'in rank tam olmalıdır. Bununla birlikte W_2 matrisi, $rank(Y_p) = rank\ (Y_p\ . W_2)$ eşitliğini sağlamalıdır. Eşitlik **(3.35)**'de yer alan S_1 matrisinin satır sayısı, algoritma tarafından belirlenen dinamik sistemin derecesini verir.

Eşitlik **(3.34)**'de hesaplanan O_i matrisi ile ileri Kalman filtresi durum değişkenleri ve genişletilmiş gözlemlenebilirlik matrisi arasındaki ilişki eşitlik **(3.36)**'da verilmiştir.

$$O_i = \Gamma_i . \hat{X}_i$$
$$O_{i-1} = \Gamma_{i-1} . \hat{X}_{i+1} \tag{3.36}$$

Bu eşitlikte Γ_i yalnız bırakılarak,

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{\frac{1}{2}} . T \tag{3.37}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten yola çıkarak ters çevrilmiş genişletilmiş kontrol edilebilirlik matrisi elde edilebilir **(3.38)**.

$$\Delta_i^c = \Gamma_i^{\dagger} . \mathcal{R}_{[Y_f, Y_p]} \tag{3.38}$$

Geliştirilmiş gözlemlenebilirlik matrisi tanımlandıktan sonra, eşitlik **(3.38)** aşağıda verilen formda tekrar yazılarak durum değişken vektörü elde edilir **(3.39)**.

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^{\dagger} . O_i$$
$$\hat{X}_{i+1} = \Gamma_{i-1}^{\dagger} . O_{i-1} \tag{3.39}$$

Bu tanımlardan sonra dinamik sisteme ait eşitlik **(3.40)** aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \left(\hat{X}_i \right) + \begin{pmatrix} p_w \\ p_v \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Eşitliğin sağ tarafında bulunan p_w ve p_v matrisleri kalman filtresi kalanlarıdır. Bu vektörler korele olmadıkları için eşitlikten çıkarılabilirler **(3.41)**.

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} . \left(\hat{X}_i \right)^{\dagger} \tag{3.41}$$

Sistem matrisleri *A, C*en küçük kareler yöntemi ile hesaplanabilir.

Bu bölümde anlatılan algoritma Çizelge 3.3' de şematik olarak özetlenmektedir.

Çizelge 3.3 : Stokastik algoritma

Hankel matrisleri kurulur. Dik izdüşüm hesaplanır.

$$O_i = Y_f / Y_p$$
$$O_{i-1} = {Y_f}^- / {Y_p}^+$$

↓

O matrisleri tekil değerlerine ayrıştırılır. W matrisleri PC, UPC veya CVA ya göre hesaplanır

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

↓

Genişletilmiş gözlemlenebilirlik matrisleri hesaplanır.

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}$$
$$\Gamma_{i-1} = \underline{\Gamma_i}$$

Not: Alt çizgi son satırın çıkarılması anlamına gelir

↓

Durum değişkeni vektörleri hesaplanır.

$$\hat{X}_i = {\Gamma_i}^{\dagger} . O_i$$
$$\hat{X}_{i+1} = {\Gamma_{i-1}}^{\dagger} . O_{i-1}$$

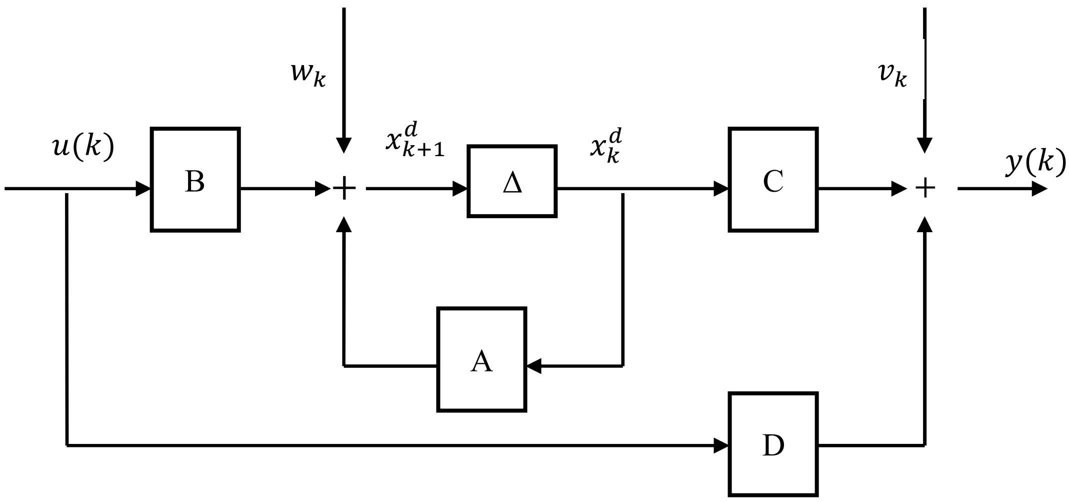
↓

Lineer denklem çözülür.

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} . \left(\hat{X}_i\right)^{\dagger}$$

3.4.3 Birleştirilmiş deterministik stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma

Bu bölümde Van Overschee ve Bart De Moor tarafından geliştirilen birleştirilmiş deterministik stokastik sistemlere ait sistem tanıma yöntemi anlatılmaktadır. Diğer tanıma yöntemlerinde olduğu gibi, bu yöntemde de amaç durum uzay modeline ait sistem matrislerini elde etmektir. Literatürde bu yöneteme eğilim çok fazladır. Bu tesadüf değildir çünkü, gerçek bir sistemden sensörler aracılığıyla toplanan hem giriş hemde çıkış bilgileri iç ve dış kaynaklı gürültü içermektedir. Doğru bir sistem kurmak için bu gürültülerin modele eklenmesi kaçınılmaz bir durumdur. Gürültü özellikleri tanımlanamadığı için bu gürültüler, beyaz gürültü olarak modellenmektedir. Birleştirilmiş deterministik stokastik sisteme ait blok diyagramı (Şekil 3.3)' modelin nasıl tanımlandığını güzel bir biçimde ifade eder.



Şekil 3.4 : Birleştirilmiş deterministik stokastik sisteme ait blok diyagramı

Bu blok diyagramda yer alan $v_k$iç kaynaklı gürültü, w_k dış kaynaklı gürültüyü ifade eder. Δ bir durumdan (x_k) diğer duruma (x_{k+1}) geçiş arasındaki gecikmedir.

Bu yöntem aslında önceki bölümlerde bahsedilen deterministik ve stokastik iki alt yöntemin birleştirilmesi ile meydana gelmektedir. Bu durumu eşitlik **(3.42)** durum değişkenleri bakış açısından net bir şekilde ifade eder [18].

$$x_k = {x_k}^d + x_k^s$$

$$y_k = {y_k}^d + y_k^s$$
(3.42)

Eşitlikte yer alan üst indis s stokastik kısımı, d ise deterministik kısımı ifade etmektedir.

3.4.3.1 Blok Hankel matrisi

Hankel matrisi aşağıda verilmektedir.

$$U_{0|2i-1} = \begin{array}{cc} & j \\ \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \\ i \end{array} & \left(\begin{array}{ccccc} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-2} \\ \hline u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & u_{2i+j-1} \end{array}\right) \end{array} = \frac{U_{0|i-1}}{U_{i|2i-1}} = \frac{U_p}{U_f} \qquad \textbf{(3.43)}$$

$$= \begin{array}{c} j \\ \left(\begin{array}{ccccc} u_0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \cdots & u_{i+j-2} \\ u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \cdots & u_{i+j-1} \\ \hline u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \cdots & u_{i+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \cdots & u_{2i+j-1} \end{array}\right) \end{array} = \frac{U_{0|i-1}}{U_{i+1|2i-1}} = \frac{U^{+}{}_{p}}{U^{-}{}_{f}} \qquad \textbf{(3.44)}$$

Burada i değeri blok satırın adedini ifade eder. Bu bilgi kullanıcı tarafından belirlenen bir değerdir. Çoklu giriş ve çıkışa sahip sistemler için matrisin bir satırında sensor sayısı kadar blok olmalıdır. Bu durumda $U_{0\,|\,2i-1}$ toplamda (*2 x sensor sayısı x i*) kadar satıra sahip olur. Bu matrisin çizgi ile ayrılmış üst bloğu U_p ile ifade edilmektedir. Alt indis p geçmiş anlamında kullanılmaktadır. Alt blok satır için kullanılan f, gelecek anlamındadır. Bu notasyona ve adıma uygun olarak $Y^s_{0|2i-1}$ve $Y^d_{0|2i-1}$ oluşturulur.

3.4.3.2 Matris işlemleri

Bu bölümde matris işlemleri iki ana bölüme ayrılmaktadır. Bunlarda birincisi deterministik alt sisteme ait matris işlemleri **(3.10)** ve **(3.11)**, ikincisi ise stokastik alt sisteme ait matris işlemleridir **(3.25)**, **(3.26)** ve **(3.27)**. Önceki bölümlerde bu eşitlikler tanımlandığı için burada tekrarı yapılmamaktadır.

Birleştirilmiş deterministik stokastik alt uzay esaslı sistem tanıma, deterministik ve stokastik alt sistemlerin doğrusal kombinasyonu olduğunu daha önce belirtilmişti. Bu durumda böyle sistemlere ait giriş ve çıkış matrislerine ait eşitlikler **(3.45)**, **(3.46)** ve **(3.47)** aşagıda verilen biçimde yazılır.

$$Y_p = \Gamma_i X_p^d + H_i^d U_p + Y_p^s \tag{3.45}$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f^d + H_i^d U_f + Y_f^s \tag{3.46}$$

$$X_f^d = A^i X_p^d + \Delta_i^d U_p \tag{3.47}$$

3.4.3.3 Kalman filtresi

Stokastik alt uzay esaslı sistem tanımada olduğu gibi bu yöntemde de Kalman filtresinin çok önemli bir rolü vardır [18]. Bu bölümde birleştirilmiş deterministik stokastik sistemlerde durum değişkenlerinin tahmini için sabit olmayan Kalman filtresi anlatılmaktadır.

Başlangıç durumu $\hat{x}_0$, başlangıç tahmin matrisi P_0 ve sisteme ait giriş ve çıkış bilgileri biliniyor olsun. Bu durumda durum değişkeni eşitlik **(3.48)** ile belirlenebilir.

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + K_{k-1}(y_{k-1} - C\hat{x}_{k-1} - Du_{k-1}) \tag{3.48}$$

Eşitlikte yer alan K_{k-1} Kalman kazancı aşağıda verilen eşitlikle **(3.49)** hesaplanmaktadır. Kalman kazancının hesaplanmasında gerekli olan Ricatti tipinde bir differansiyel eşitliğin çözümü için ilgili referansta verilmiştir [18].

$$K_{k-1} = (G - AP_{k-1}C^T)(\Lambda_0 - CP_{k-1}C^T)^{-1} \tag{3.49}$$

Durum değişkenleri açık bir biçimde ifade edilecek olursa **(3.50)**,

$$\hat{x}_k = (A^k - Q_k\Gamma_k|\Delta_k^d - Q_kH_k^d|Q_k)\begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ -\ - \\ u_0 \\ \dots \\ u_{k-1} \\ -\ - \\ y_0 \\ \dots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

Eşitlikte yer alan yardımcı matris Q_k, **(3.51)**'de ifade edilmektedir.

$$Q_k = (\Delta_k^c - A^kP_0\Gamma_k^T)(L_k - \Gamma_kP_0\Gamma_k^T)^{-1} \tag{3.51}$$

Eşitlik (3.48) geçmiş giriş ve çıkış bilgisinden faydalanılarak Kalman filtresi durum değişkenlerinin nasıl hesaplanması gerektiğini açıkça göstermektedir. Tanıma algoritmasında kullanılmak üzere durum değişkenleri vektörü $\hat{X}_i = (\hat{x}_i\hat{x}_{i+1} \dots \hat{x}_{i+j-1})$, Hankel matrisleri aracılığı ile eşitlik (3.52)'de olduğu gibi hesaplanabilmektedir.

$$\hat{X}_i = \left(A^i - Q_i\Gamma_i\middle|\Delta_i^d - Q_iH_i^d|Q_i\right)\begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ - \\ U_p \\ - \\ Y_p \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

3.4.3.4 Sistem tanıma algoritması

Öncelikle $Y_f$matrisi U_f matrisi boyunca W_p matrisi üzerine eğik izdüşümü hesaplanmalıdır **(3.53)**. Daha sonra hesaplanan bu matris tekil değerlerine ayrıştırılır **(3.54)**. Bu işlemden sonra tekil değerlerin sıfır olan kısmı matrislerden ayıklanır **(3.54)**.

$$O_i = Y_f/Y_p \tag{3.53}$$

$$W_1O_iW_2 = (U_1U_2)\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1S_1V_1^T \tag{3.54}$$

Eşitlik **(3.54)**'de yer alan ve Çizelge 3.4'te gösterilen $W_1 \in R^{lixli}$ ve $W_2 \in R^{jxj}$ matrisleri, kullanıcı tarafından belirlenen ağırlık matrisleridir. Bu matrisleri belirlemede üç yaklaşım vardır. Bunlar sırasıyla N4SID, MOESP ve Standart Değişken Analizi (CVA) algoritmalarıdır.

Çizelge 3.4 : Ağırlık matrisleri

	W_1	W_2
N4SID	I_{li}	I_j
MOESP	I_{li}	$\Pi_{U^{\perp}f}$
CVA	$\mathcal{R}^{-1/2}{}_{[Y_f/U^{\perp}f,\ Y_f U^{\perp}f]}$	$\Pi_{U^{\perp}f}$

Bu matrislerden W_1' in rankı tam olmalıdır. Bununla birlikte W_2 matrisi, $rank(Y_p) = rank\ (Y_p\ .W_2)$ eşitliğini sağlamalıdır. Eşitlik **(3.54)**'te yer alan S_1matrisinin satır sayısı, algoritma tarafından belirlenen dinamik sistemin derecesini verir.

Eşitlik **(3.53)**'te hesaplanan O_i matrisi ile ileri Kalman filtresi durum değişkenleri ve genişletilmiş gözlemlenebilirlik matrisi arasındaki ilişki eşitlik **(3.55)**'de verilmiştir.

$$O_i = \Gamma_i . \tilde{X}_i$$

$$O_{i-1} = \Gamma_{i-1} . \tilde{X}_{i+1} \quad \textbf{(3.55)}$$

Yukarıde verilen eşitliklerde yer alan Kalman filtresi durum değişkenler vektörü $\tilde{X}_i$, eşitlik **(3.56)** ile tanımlanmaktadır [18].

$$\tilde{X}_i = \hat{X}_{i_{[\hat{X}_0,\ P_0]}} \quad \textbf{(3.56)}$$

Eşitlik **(3.56)**'da yer alan P_0 ve $\hat{X}_0$ aşağıda verilen eşitliklerle hesaplanmaktadır.

$$\hat{X}_0 = X_p^d /_{U_f} U_p \quad \textbf{(3.57)}$$

$$P_0 = -[\Sigma^d - S^{xu} . (\mathcal{R}^{uu})^{-1} . (S^{xu})^T] \quad \textbf{(3.58)}$$

Eşitlik **(3.58)**'de yer alan Σ^d, S^{xu}ve$\mathcal{R}^{uu}$ deterministik kısıma ait kovaryans ve çapraz kovaryans matrisleridir [18].

Eşitlik (3.55)'de ter alan Γ_i yalnız bırakılarak,

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{\frac{1}{2}}.T \tag{3.59}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda durum değişkenleri vektörü eşitlik **(3.60)** ile hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i &= \Gamma_i^{\dagger}.O_i \\ \tilde{X}_i &= \Gamma_{i-1}{}^{\dagger}.O_{i-1} \end{aligned} \tag{3.60}$$

Bu tanımlardan sonra dinamik sisteme ait eşitlik **(3.61)** aşağıda tanımlanmaktadır.

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{i|i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_w \\ p_v \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

Eşitliğin sağ tarafında bulunan p_w ve p_v matrisleri kalman filtresi kalanlarıdır. Bu vektörler korele olmadıkları için eşitlikten çıkarılabilirler **(3.62)**.

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{i|i} \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

Bu doğrusal eşitlik çözülerek sistem matrisleri elde edilir.

Bu bölümde anlatılan algoritma Çizelge 3.6'da şematik olarak özetlenmektedir.

Çizelge 3.5 : Deterministik stokastik algoritma

Hankel matrisleri kurulur. Eğik izdüşüm hesaplanır.

$$O_i = Y_f /_{U_f} W_p$$
$$O_{i-1} = Y_f^{-} /_{U_f^{-}} W_p^{+}$$

O matrisleri tekil değerlerine ayrıştırılır. W matrisleri N4SID, MOESP veya CVA' ya göre hesaplanır

$$W_1 O_i W_2 = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix}$$

Genişletilmiş gözlemlenebilirlik matrisleri hesaplanır.

$$\Gamma_i = W_1^{-1} U_1 S_1^{1/2}$$
$$\Gamma_{i-1} = \underline{\Gamma_i}$$

Not: Alt çizgi son satırın çıkarılması anlamına gelir

Durum değişkeni vektörleri hesaplanır.

$$\tilde{X}_i = \Gamma_i^{\dagger} . O_i$$
$$\tilde{X}_i = \Gamma_{i-1}^{\dagger} . O_{i-1}$$

Lineer denklem çözülür.

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_i \\ U_{i|i} \end{pmatrix}$$

3.4.4 Dinamik sisteme ait modal parametrelerin elde edilmesi

İnşaat mühendisliğinde yapıların dinamik özellikleri mod şekilleri, bu modlara ait frekanslar ve sönüm oranları ile ifade edilir. Bu bilgiler, görsel olarak yapıların dinamik davranışı hakkında fikir sahibi olmamızı sağlar. Bu bölümde durum uzay modeline ait dinamik bir sistemden elde edilen *A* ve *C* sistem matrislerinden modal modele geçiş anlatılmaktadır [20,28].

Modal parametlerin tahmini için, *A* sistem matrisini özdeğer ve özvektörlere ayırmamız gerekmektedir **(3.63)**.

$$A = \theta \Xi \theta^{-1} \tag{3.63}$$

Eşitlikte yer alan Ξ matrisi, diagonal matris olup ayrık zamanda kompleks özdeğerleri içerir [28]. θ matrisi ise sistem matrisinin özvektörlerini oluşturan matristir [28]. Dinamik sisteme ait frekansların belirlenebilmesi için, özdeğer matrisinin ayrık zamandan sürekli zamana taşınması gerekmektedir. Bu işlem eşitlik **(3.64)**'de verilmektedir.

$\lambda_i = diag[\Xi]]$ olmak üzere,

$$\lambda_i^s = \frac{ln\,(\lambda_i)}{\Delta t} \tag{3.64}$$

Eşitlikte yer alan üst indis *s* sürekli zamanı, alt indis *i* ise ilgili moda ait frekansı vermektedir. λ_i^s vektörü, frekanslar kendisini ve kompleks eşleniğini içerir. Sönüme sahip sistemlerde λ_i^s eşitlik **(3.65)**'de olduğu gibi yazılabilir.

$$\lambda_i^s = -\xi_i \Omega_i \mp j\Omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \tag{3.65}$$

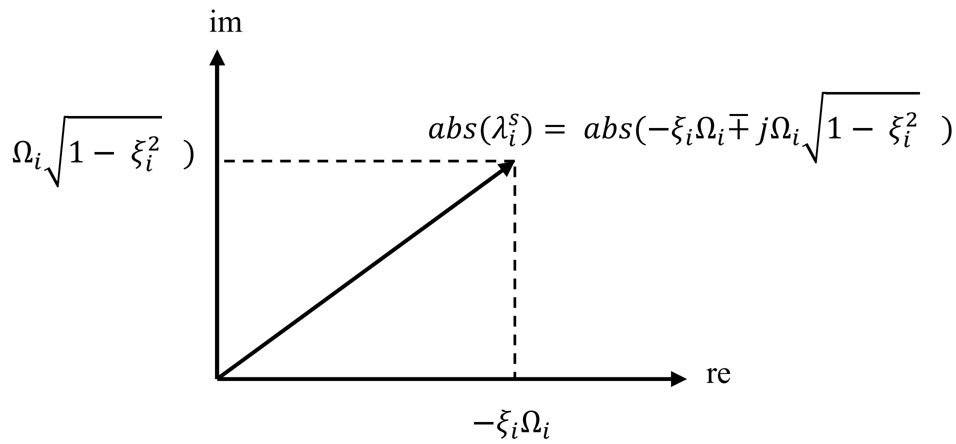
ξ_i ve Ω_isırasıyla *i*. moda ait sönüm oranını ve açısal frekansı ifade eder. Sisteme ait normal frekansları bulmak için eşitlik **(3.66)**, sönüm oranlarını bulmak için ise eşitlik **(3.67)** kullanılır.

$$f_i = \frac{1}{2\pi} abs(\lambda_i^s) \tag{3.66}$$

$$\xi_i = -\frac{reel(\lambda_i^s)}{abs(\lambda_i^s)} \qquad \textbf{(3.67)}$$

Sönüm oranının hesabı:

Öncelikli olarak sürekli zamanda tanımlanmış frekans λ_i^s'i analitik düzlemde gösterelim (Şekil 3.4).



Şekil 3.5 : Frekansın analitik düzlemde gösterimi.

$$abs(\lambda_i^s) = abs(-\xi_i\Omega_i \mp j\Omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}\ )$$

$$= \sqrt{(-\xi_i\Omega_i)^2 + \left(\Omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\xi_i^2\Omega_i^2 + \Omega_i^2\,(1-\xi_i^2)} = \sqrt{\Omega_i^2}$$

$$abs(\lambda_i^s) = \Omega_i$$

Bu durumda sönüm oranı, sürekli zaman frekans değerinin reel kısmının, mutlak değerine bölümünden elde edilen sonuç olur.

$$\xi_i = \frac{\xi_i\,\Omega_i}{\Omega_\mathrm{i}}$$

Yukarıda verilen eşitlikde $\boldsymbol{\Omega_\mathrm{i}}$ değerleri birbirlerini yok eder ve geriye sadece sönüm değerleri kalır.

Dinamik bir sisteme ait mod şekilleri A durum matrisinin özvektörleri ile belirlenir. Bu özvektörler C sistem matrisleri ile çarpılarak gerçek modlara dönüştürülür **(3.68)**. Burada ayrık zamandan sürekli zamana geçiş yapmaya gerek yoktur. Çünkü C sistem matrisi ayrık ve sürekli zamanda birbirine eşittir [20].

$$\psi = C\theta \tag{3.68}$$

Eşitlik **(3.68)**'de ifade edilen ψ, mod şekillerini, C, sistem matrisini ve θ, A sistem matrisinin özvektörlerini gösterir.

4. SAYISAL ÇALIŞMA

4.1 Giriş

Bu bölümde, alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemlerinin, bilgisayar simulasyonu ile elde edilen ve modal parametreleri önceden bilinen bir sisteme, uygulanabilirlik sınırlarının belirlenmesi hedeflenmektedir. Bu bağlamda sayısal model üzerinde dinamik analiz yapılarak yapıya ait cevaplar elde edilmektedir. Analiz socunda yapı üzerinden ölçülen titreşimler ilgili yöntemlerde kullanılmaktadır.

Sayısal model ile ilgili çalışmalarda, sonlu elemanlar programı olarak ANSYS kullanılmıştır [29]. Bilgisayar modeli oluşturulduktan sonra yapının bütün doğrusal dinamik analizleri yine ANSYS sonlu elemanlar yazılımı ile yapılmıştır. Dinamik analiz sonucunda sensör yerlerinden alınan yapı cevapları alt uzay esaslı sistem tanıma algoritmalarında kullanılmaktadır.

Deterministik, stokastik ve birleştirilmiş deterministik stokastik alt uzay algoritmaları kullanılarak yapının modal parametreleri belirlenmekte ve her bir teknik için 200 adet Monte Carlo simulasyonu yapılmaktadır [28,30].

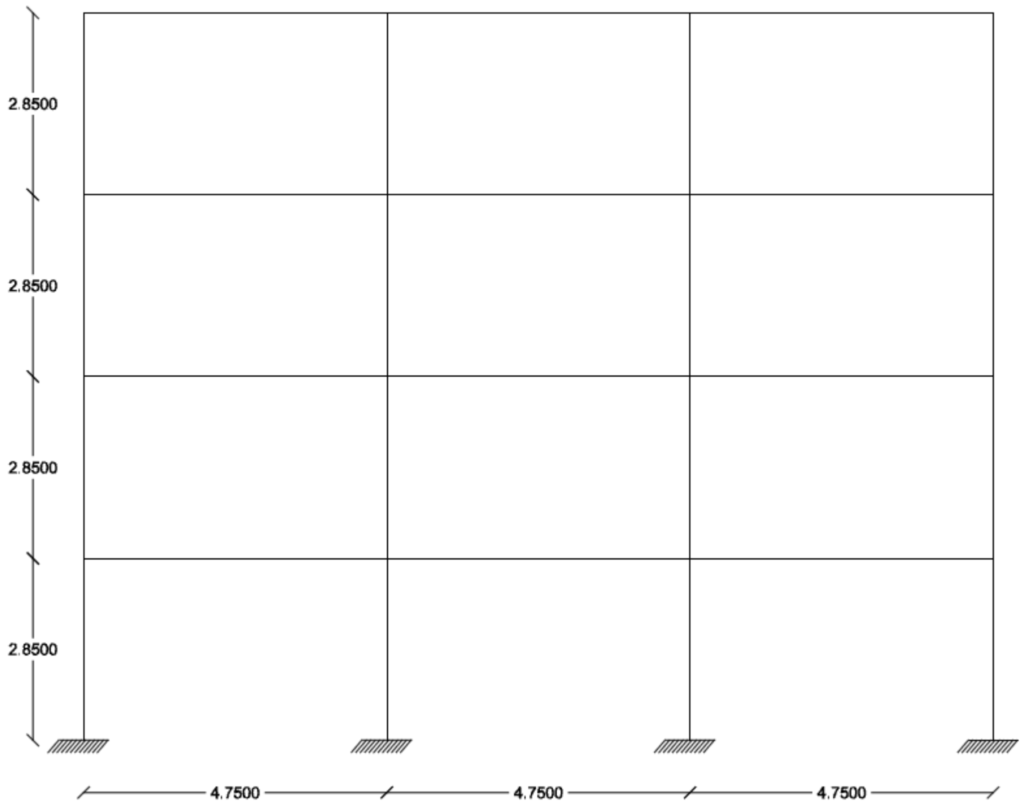
4.2 Sayısal Model

Sayısal model, kısaca bir yapının bilgisayar ortamında hazırlanmış modeli olarak tanımlanabilir. Bir sayısal model, kabul edilen varsayımlar çerçevesinde gerçek yapının davranışını temsil ederek onun hakkında fikir verir. Sayısal modellerin oluşturulması için sıkça kullanılan yöntem SEM'dir. SE teorisine göre karmaşık bir yapı basit ve sonlu sayıda elemanın birleşiminden oluşmuş kabul edilir. Bu tezde kapsamında kullanılan sayısal model Gündeş Bakır ve diğerlerine ait bir çalışmadan alınmıştır [7]. Sayısal model ve dinamik analiz daha öncede bahsedildiği gibi ANSYS ticari SE yazılımı kullanılarak oluşturulmuştur.

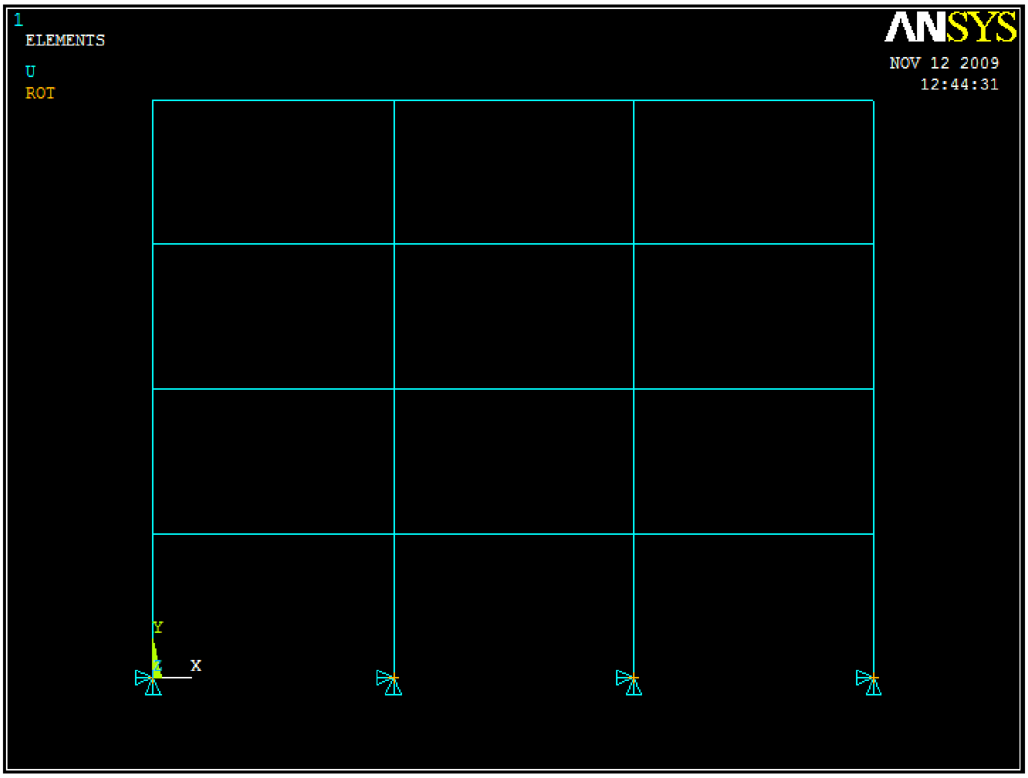
Yapı toplamda 4 katlı ve 3 açıklıklı yalın bir çerçevedir. Kat yükseklikleri 2.85 m olup bina boyunca sabittir. Binanın kolonları arasındaki açıklıklar 4.5 m' dir.

Yapının taşıyıcı elemanı olan kolonlar 0.25 x 0.50 m boyutundadır. Yapıdaki kiriş boyutları ise 0.25 x 0.50 m' dir. Yapı dış ortama ankastre mesnet ile bağlanmaktadır. SE modeline ait kolon ve kiriş elemanları, 6 eşit parçaya bölünmüştür.

Yapıya ait bir görünüm Şekil 4.1'de ve yapının SE modeli Şekil 4.2'de gösterilmektedir.



Şekil 4.1 : Yapıya ait bir görünüm



Şekil 4.2 : Yapıya ait sonlu eleman modeli

4.3 Modal Analiz

Sistem tanıma yöntemlerinden elde edilecek modal parametreleri karşılaştırmak için, yapıya ait mod şekillerinin, frekansların ve sönüm oranlarının belirlenmesi gerekmektedir. Sayısal modele ait gerçek modal parametreler ANSYS SE yazılımı kullanılarak belirlenmiştir. Böylece sistem tanıma algoritmaları ile karşılaştırma olanağı sağlanmaktadır.

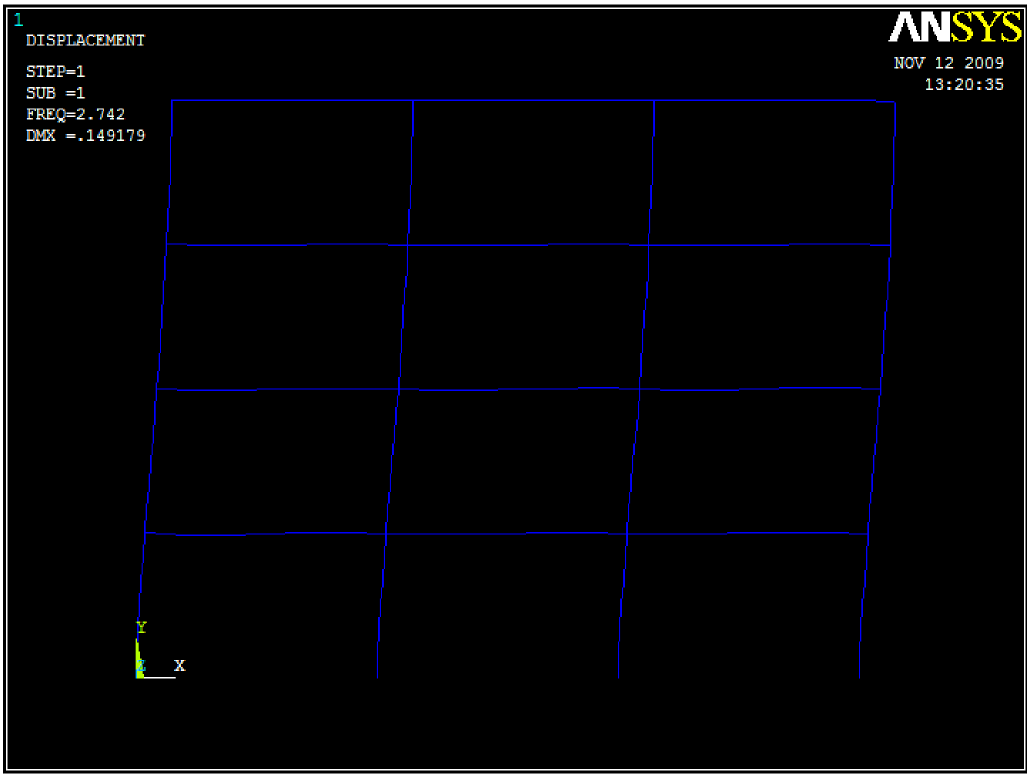
Literatürde birçok özdeğer bulma algoritmaları mevcuttur. Bu tez kapsamında, ANSYS SE analiz programı içerisinde varolan Lanczos ardışık yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Sönümler bölüm 2' de bahsedilen oransal sönüm yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır.

Yapının ilgili modlarına ait frekanslar ve sönüm oranları Çizelge 4.1'de verilmektedir.

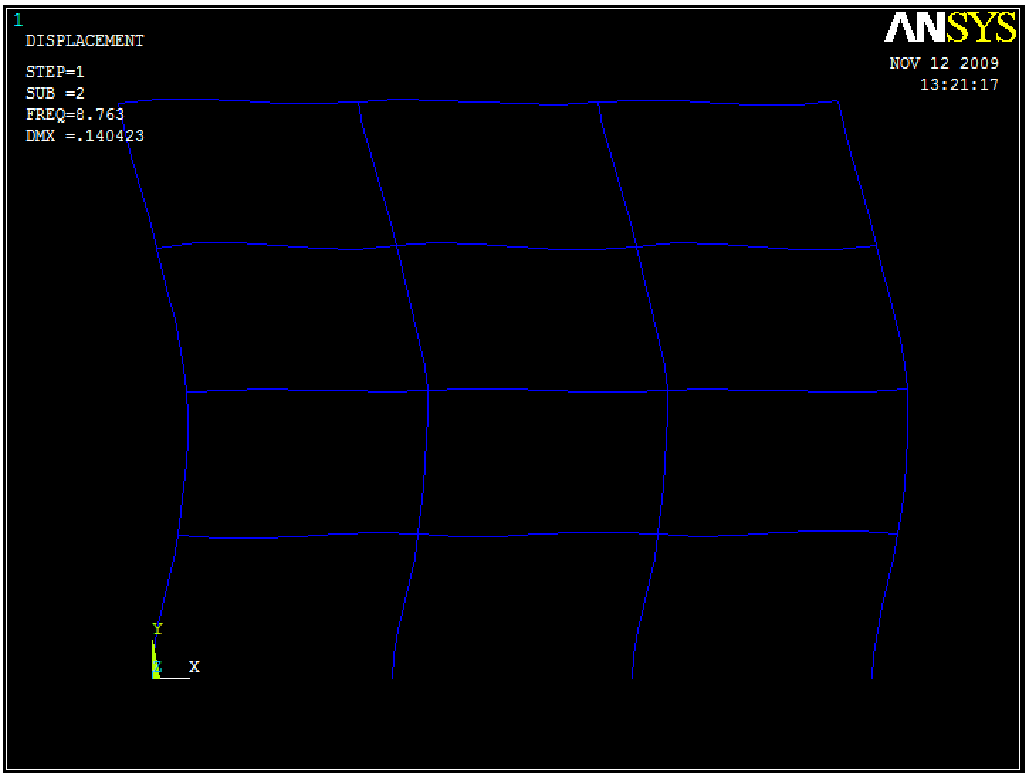
Çizelge 4.1 : Sayısal yapıya ait frekanslar ve sönüm oranları

Mod No:	Frekans (*Hz*)	Sönüm oranı (%)
1. Mod şekli	2.742	2
2. Mod şekli	8.763	2
3. Mod şekli	15.809	3
4. Mod şekli	22.516	4.1

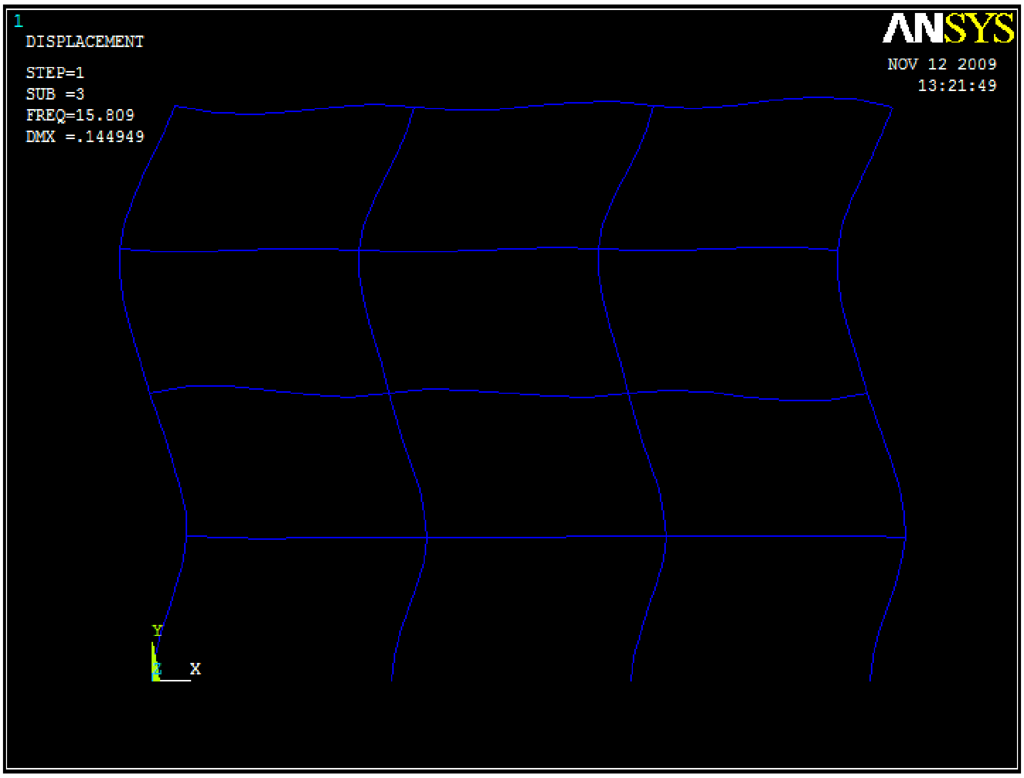
Bu yapıya ait ilk dört mod şekli **Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5** ve **Şekil 4.6**' de gösterilmektedir.



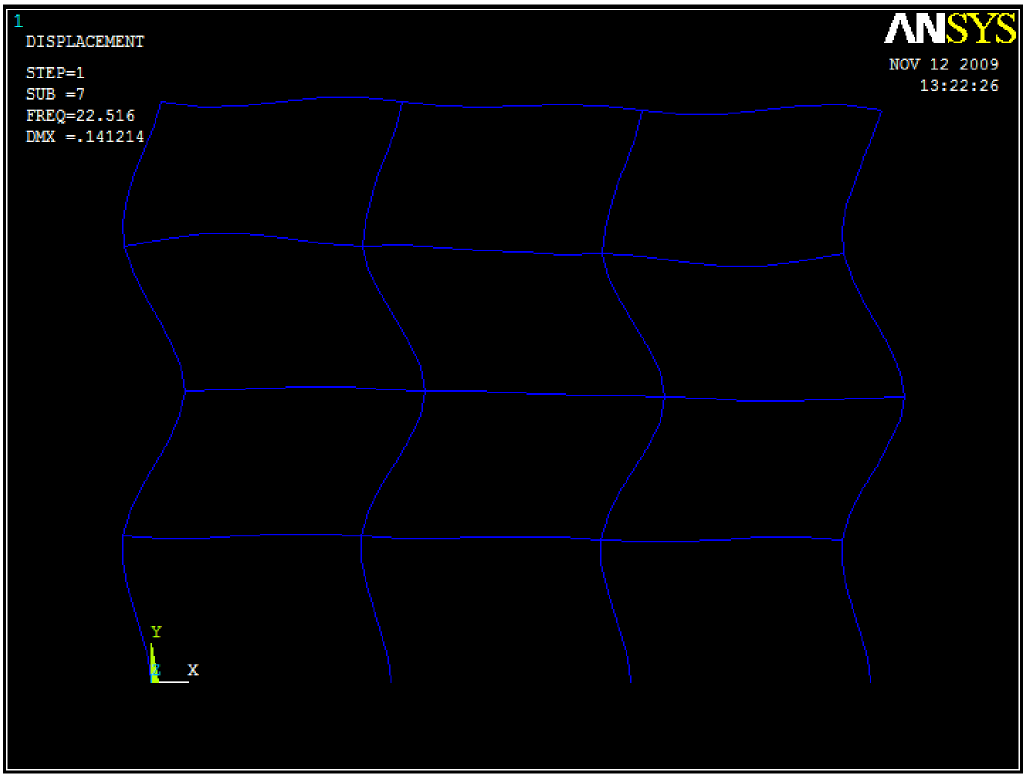
Şekil 4.3 : Birinci mod şekli $f = 2.742\ Hz$



Şekil 4.4 : İkinci mod şekli f = *8.763 Hz*



Şekil 4.5 : Üçüncü mod şekli f = *15.809 Hz*



Şekil 4.6 : Dördüncü mod şekli $f = 22.516$ *Hz*

4.4 Doğrusal Dinamik Analiz

Yapıların zamana bağlı dinamik yükler altındaki davranışını belirlemek için kullanılan bir hesap yöntemidir. Bu analiz metodunda yapının lineer davranış gösterdiği bir başka deyişle yapının kalıcı deformasyonlar yapmadığı ve malzemenin elastik kaldığı kabulü yapılır. Yapıya ait SE modeli bu yaklaşımla oluşturulmuştur. Model bilgisayar ortamında tanımlanırken, her bir elemanın malzeme bilgisi gerekmektedir. SE modeline ait elemanların malzeme bilgileri Çizelge 4.2'de verilmektedir.

Çizelge 4.2 : Malzeme özellikleri

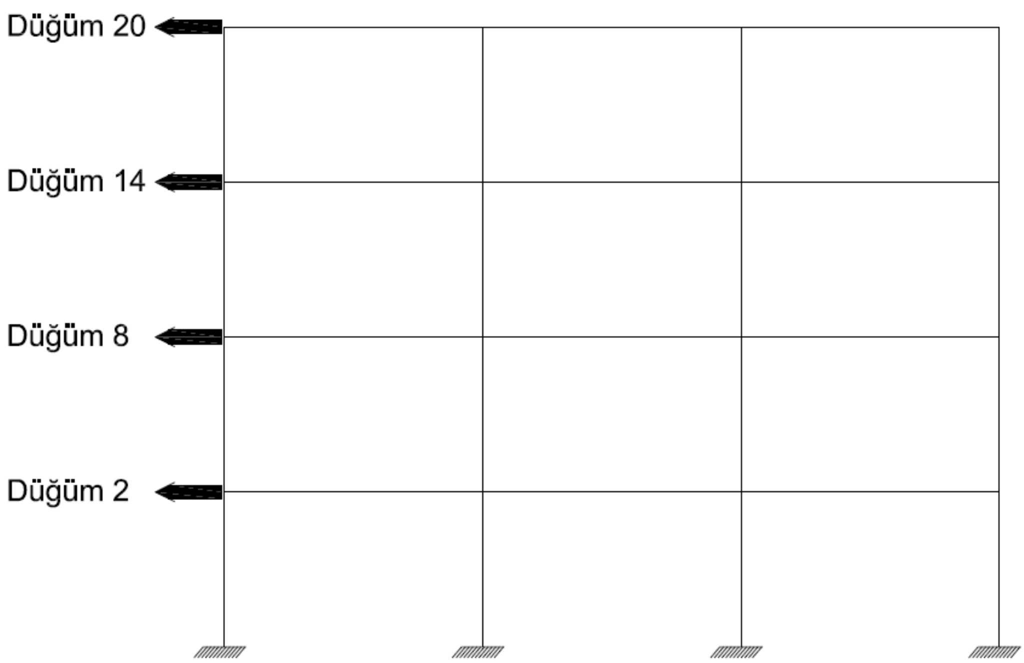
Eleman Türü	Özkütle (kN/m^3)	Elastisite Modülü (kN/m^2)	Poisson Oranı
Kolon	25	27000000	0.2
Kiriş	25	27000000	0.2

4.4.1 Beyaz gürültü ve yapının cevabı

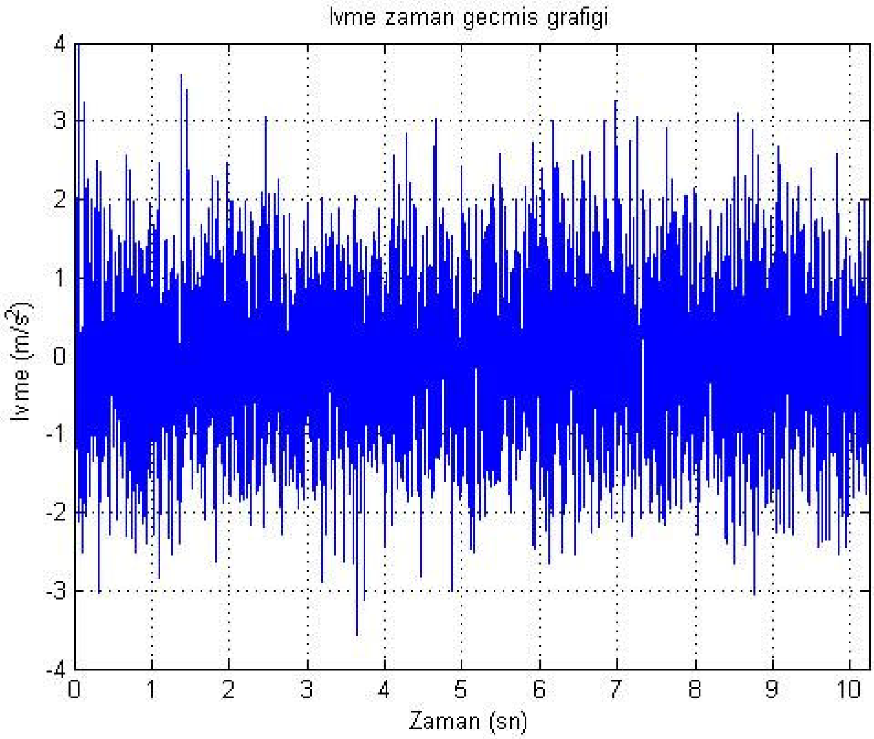
İnşaat yapıları devasa boyutlara sahip oldukları için, yapıyı yapay sarsıcılarla tahrik etmek oldukça zordur. Bundan dolayı, çevre şartlarından kaynaklanan küçük titreşimler yapıya gelen dinamik etki olarak düşünülmektedir. Normal şartlar altında tam anlamıyla bu etkilerin ölçülmesi imkansızdır. Bu nedenle bu etkileri modellemek için bazı istatistiksel yaklaşımlar yapılmaktadır. Bu yaklaşımların başında, yapıya gelen etkilerin beyaz veya renkli gürültü olduğudur.

Bu tez kapsamında beyaz gürültü zemin ivmesi olarak kullanılmaktadır. Zemin ivmesinin beyaz gürültü olarak seçilmesi önem arz eder. Alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemleri kullanılırken stokastik ve deterministik stokastik modellerle uyum sağlanmış olur [18].

Bu simulasyon esnasında dinamik analizde kullanılmak üzere 4096 x 1 boyutunda, zaman aralığı Δt = 0.0025 sn olan beyaz gürültü kullanılmıştır (Şekil 4.8). Yapay olarak üretilen titreşim dinamik analizde deprem ivmesi olarak yapının tabanına etkitilmiştir. Yapının toplamda 4 farklı düğüm noktasından sistem tanıma algoritmalarında kullanılmak üzere yapının beyaz gürültüye karşı cevabı alınmıştır. Yapının sensor yerleri Şekil 4.7'de gösterilmektedir.

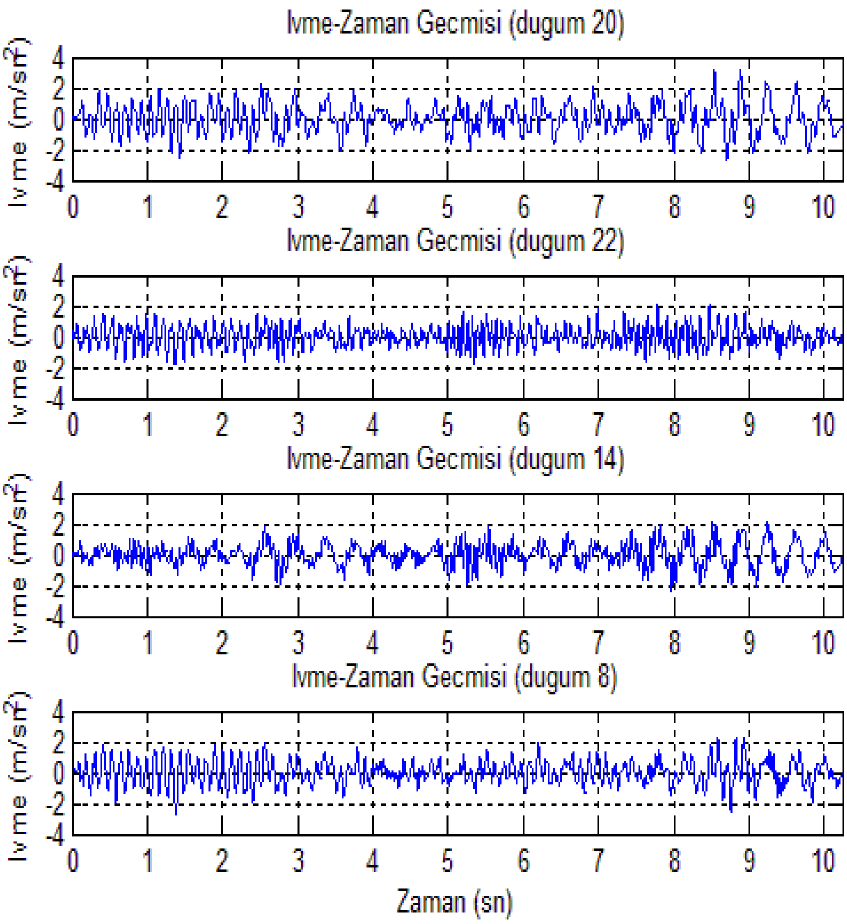


Şekil 4.7 : Sensör yerleştirilen düğümler



Şekil 4.8 : İvme zaman geçmişi

Yapıya verilen giriş bilgisine karşı, doğal olarak yapı bu girişe karşı bir cevap üretecektir. Yapının beyaz gürültü karşısındaki cevabı ANSYS SE programı ile çözülmüştür. Sisteme ait geometri, malzeme ve sınır şartları bilgisi programa tanıtıldıktan sonra dinamik analiz yapılmış ve sisteme yerleştirilen hayali sensörlerden çıkış bilgileri toplanmıştır (Şekil 4.9).



Şekil 4.9 : Yapının beyaz gürültüye karşı cevabı

4.5 Yapıya Ait Modal Parametrelerin Belirlenmesi

Yapıya ait modal parametrelerin belirlenmesi için, öncelikle sistem matrislerinin (A,C) tahmin edilmesi gerekir. Bu matrislerin tahmin edilmesi için Van Overschee tarafından yazılmış MATLAB fonksiyonları kullanılmıştır. Deterministik teknik için det_stat.m, stokastik teknik için sto_stat.m ve birleştirilmiş deterministik stokastik teknik için det_stat.m fonksiyonları kullanılmıştır [18].

4.5.1 Monte Carlo simulasyonu

Monte Carlo metodunda istatistiksel ve matematiksel tekniklerle bir deneyi veya çözülmesi gereken bir fiziksel olayı rastgele sayıları defalarca kullanarak simüle edilip çözmek esastır.

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde bahsedilen alt uzay esaslı sistem tanıma algoritmaları bilgisayar ortamında modellen bir yapı üzerine uygulanmaktadır. Sensor yerlerinden alınan cevaplara gürültü-sinyal oranı %2, %5 ve %10 olan beyaz gürültü eklenerek 200 adet simulasyon oluşturulmuştur. Her bir alt uzay esaslı sistem tanıma algoritmaları ile yapıya ait modal parametler belirlenmiştir.

4.5.2 Sistemin derecesinin belirlenmesi

Alt uzay esaslı sistem tanımanın gerçekçi sonuç vermesi için bu yöntemlerde kullanılan bazı parametrelerin doğru seçilmesi gerekmektedir. Bu parametrelerden en önemlisi oluşturulan matematiksel modelin derecesidir. Dinamik sistemin derecesini belirlemek için literatürde bazı yöntemler mevcuttur. Kullanılan en yaygın yöntem Akaika kriteridir [31].

Sistemin derecesi ile tanıma yöntemlerinden elde edilen modal parametreler arasında doğrudan bir ilişki vardır **(4.1)**.

$$Modal\ parametrelerin\ say\imath s\imath = \frac{n}{2} \tag{4.1}$$

Yukarıda verilen ifadede yer alan *n,* sistemin kullanıcı tarafından belirlenen yada Akaika gibi yöntemler sonucunda hesaplanan sistemin derecesidir. Eşitliklikten de anlaşılacağı üzere modal parametreler durum-uzay modelinin derecesinin yarısı kadardır. Bu durumda bazı çıkarımlar yapmak mümkündür.

- Dinamik sistemin derecesi sensör yada istenilen modal parametrelerin sayısının en az iki katı kadar olmalıdır.
- Dinamik sistemin derecesi gerçek değerinden büyük olma durumunda sayısal modal parametreler oluşur.

4.5.3 Sistem tanıma algoritmaları ile modal parametrelerin belirlenmesi

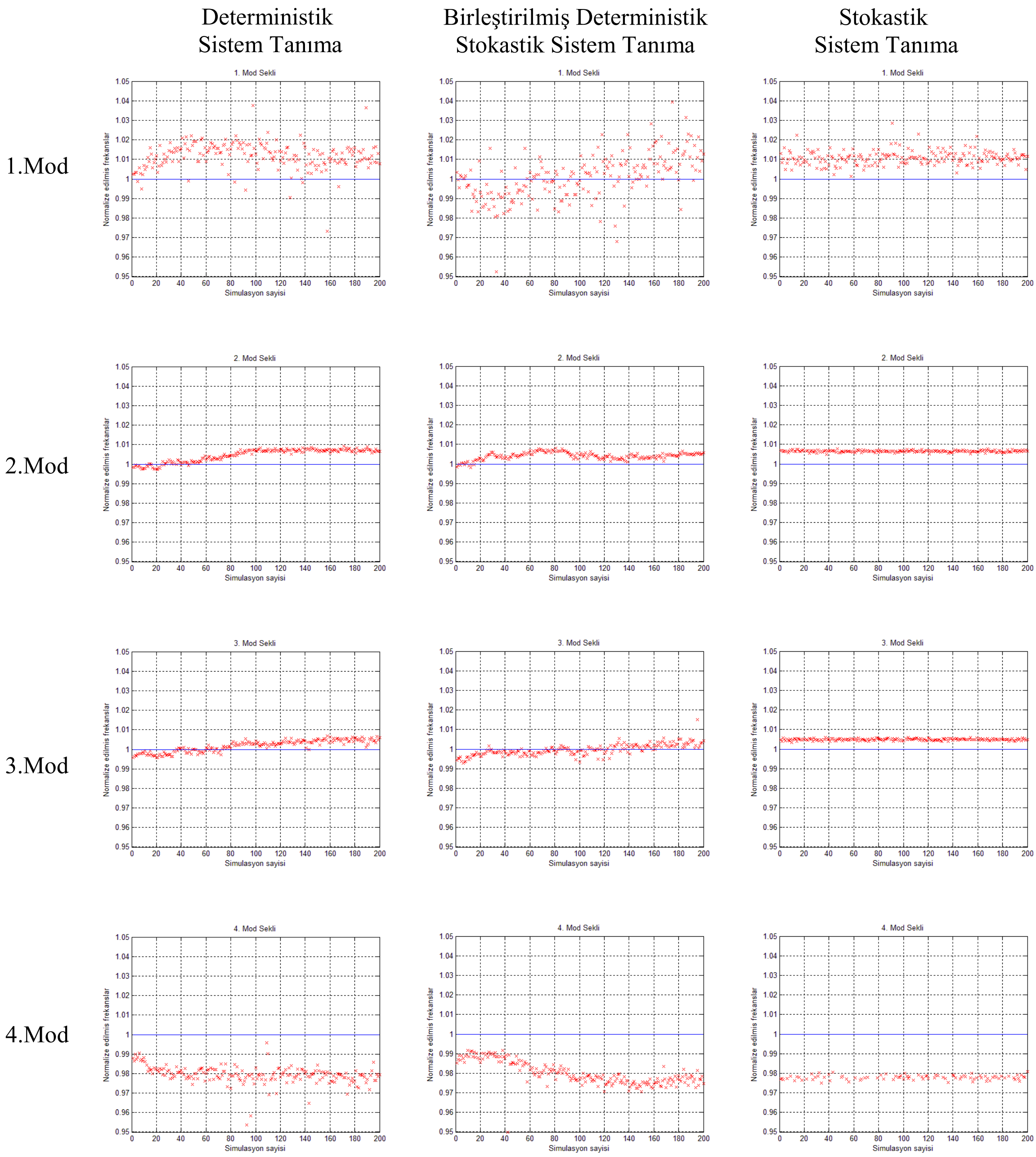
Bu bölümde alt uzay esaslı sistem tanıma yöntemleri önceden tanımlanan yapı üzerine uygulanmaktadır. Her bir Monte Carlo analizi üç aşamadan oluşur. Birinci aşamada yapıdan toplanan çıkış bilgileri, 4. Dereceden Butterworth alçak geçiren filtreden geçirilerek gürültü-sinyal oranı %2, %5 ve %10 olmak üzere beyaz gürültü ile kirletilir. Deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik sistem tanıma için giriş bilgisi de gürültü sinyal oranı % 2 ile kirletilir. Daha sonra bu kirli çıkış bilgileri sistem tanıma algoritmalarına sokularak sisteme ait modal parametreler belirlenir. Bu süreç içerisinde Hankel matrisine ait blok satır aşağıda verilen formülasyonla elde edilir **(4.2)**. Formülasyon optimum sonuç vermesi nedeniyle bizim tarafımızdan belirlenmiştir. Son olarak da modal parametrelerin içerisindeki sayısal modlar ayıklanır. Bu aşamadan sonra sistem dinamik parametreleri belirlenmiş olur.

$$n_{i\ blok\ satırı} = \frac{n_{sistem\ derecesi}}{n_{sensör}} * 3 \qquad \textbf{(4.2)}$$

4.5.4 Sonuçlar

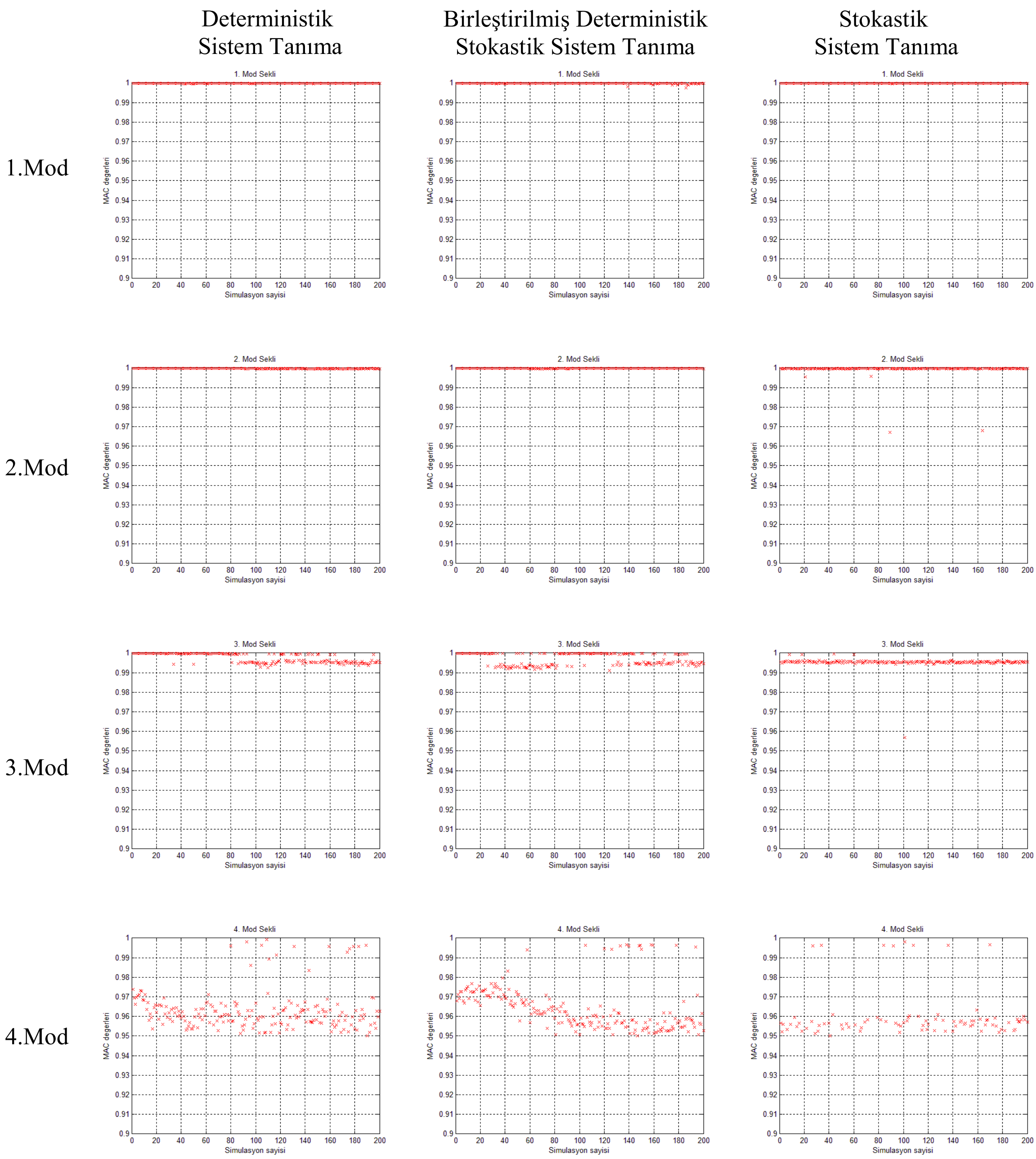
Her bir gürültü-sinyal oranına ait, frekans değerlerini, mod şekillerini ve sönüm oranlarını gösteren üç adet şekil vardır. Her biri 3 kolon dört satırdan oluşmaktadır. Kolonlarlar sistem tanıma tekniklerini, satırlar ise yapıya ait mod numaralarını gösterir.

Frekansların ve sönüm oranlarının karşılaştırılmasında, sistem tanıma tekniklerinden elde edilen frekans değerlerinin ve sönüm oranlarının, ANSYS SE programından elde edilen frekans değerine ve sönüm oranına bölümünden elde edilen değerler kullanılmıştır. Mod şekillerinin karşılaştırılmasında ise, sistem tanıma tekniklerinden elde edilen mod şekilleri ve ANSYS SE programından elde edilen mod şekilleriarasında hesaplanan MEK değerleri dikkate alınmıştır. Monte Carlo analizine ait sonuçlar ilgili şekillerde gösterilmektedir.



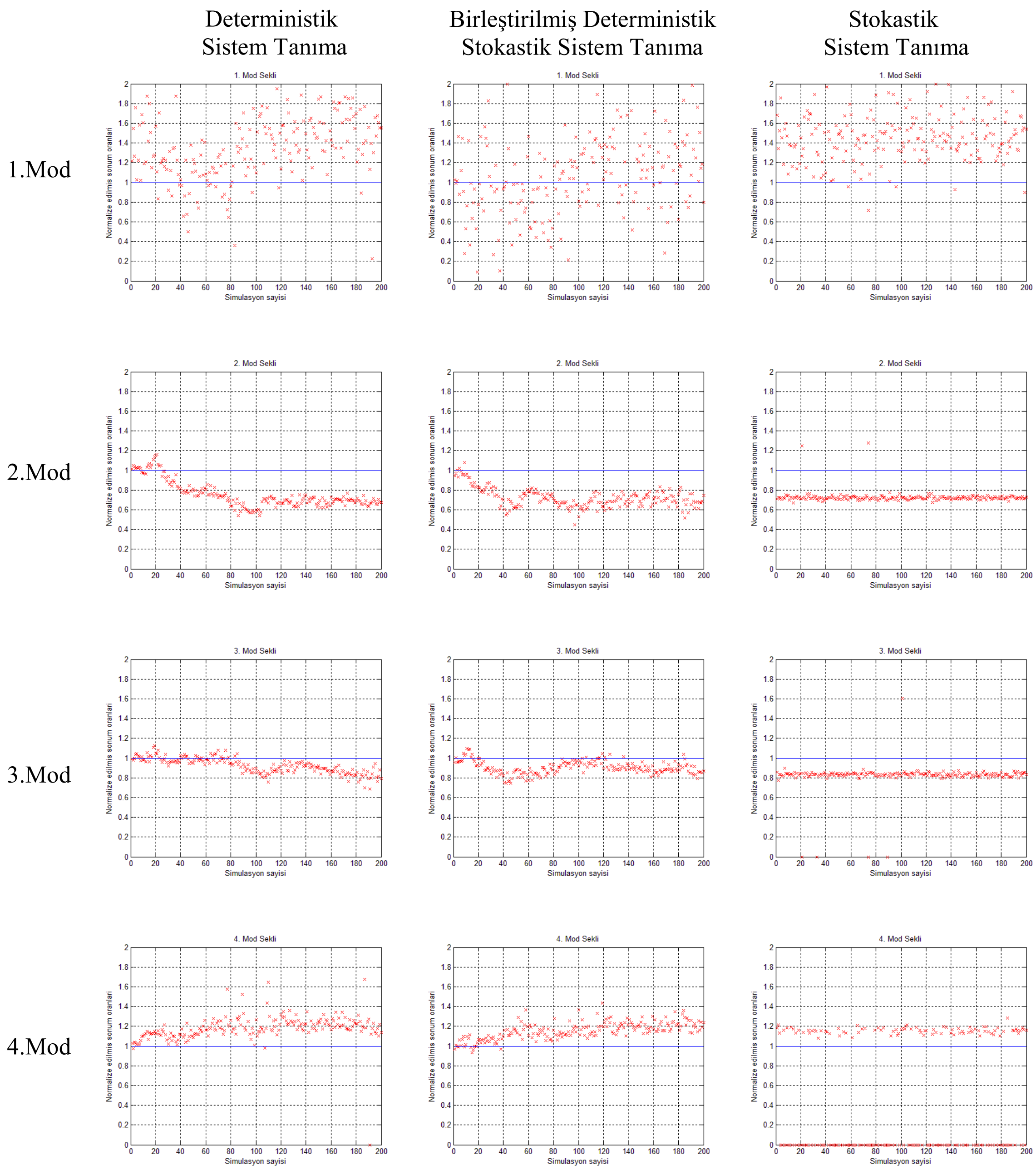
Şekil 4.10 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %2 için ilk 4 mod şekline ait frekansların tahmin sonuçları

Üç yöntemde gürültü-sinyal oranı %2 için yapıya ait ilk 4 moduda yakalamaktadır. Şekillerde gösterilen noktalar her bir simulasyona ait normalize edilmiş frekansları gösterir. Normalizasyon yapıya ait gerçek frekanslara bölünerek yapılmıştır. Böylece simulasyonlardan elde edilen frekanslar ve gerçek frekans arasında göreceli olarak farklar oluşturulmaktadır. Bu farklar yöntemlerin performansı hakkında bilgi verir. %2 lik gürültü-sinyal oranı için frekans sonuçları birbirine oldukça yakındır.



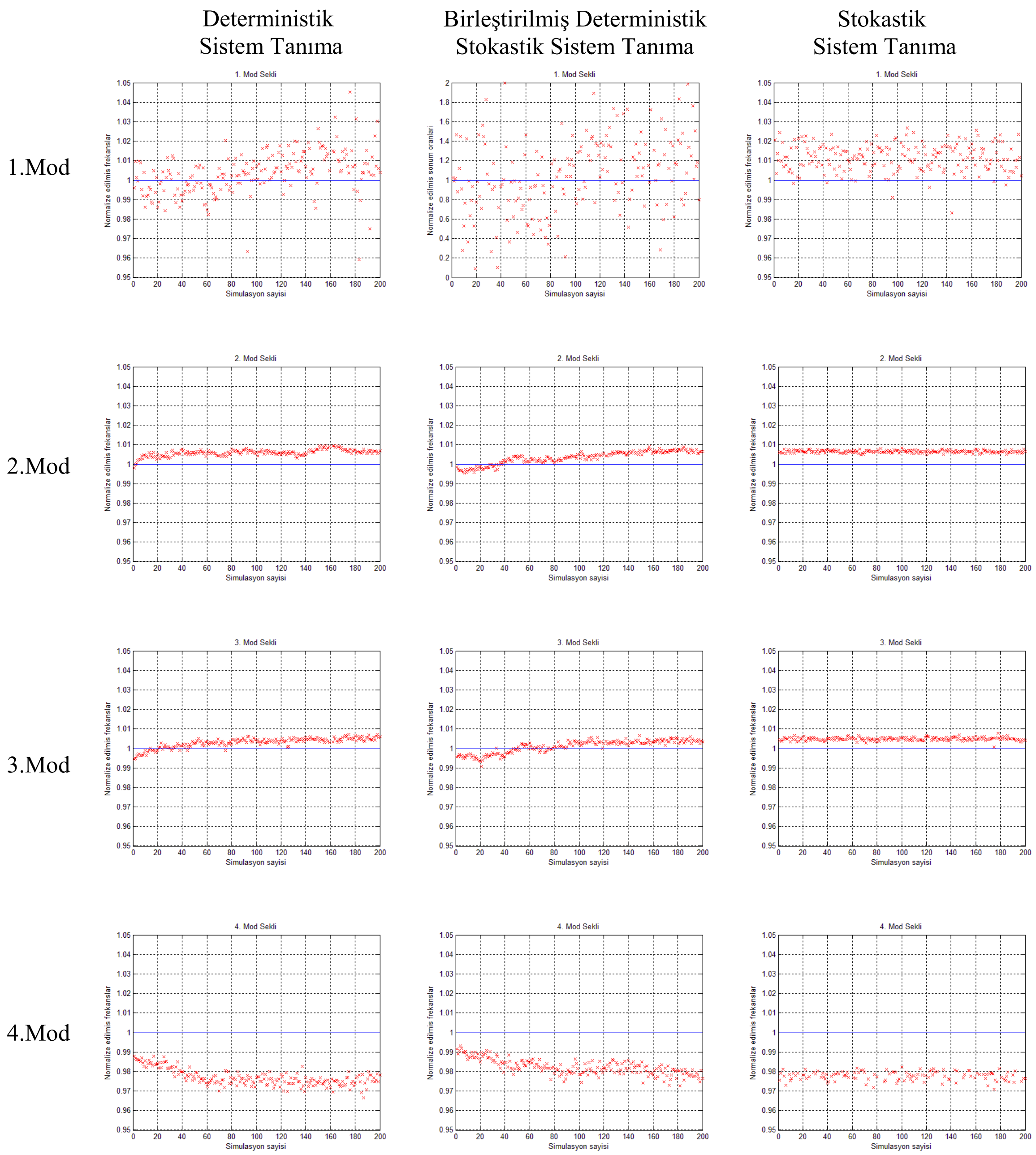
Şekil 4.11 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %2 için ilk 4 mod şekline ait MEK değerleri

%2 lik gürültü-sinyal oranı için deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik yöntemler bütün mod şekillerini yakalamakla birlikte birbirlerine benzer sonuçlar vermektedir. Öte yandan stokastik yöntem 4. Mod şekli için analizlerin %50' sinden daha azında bu modu yakalayabilmiştir.



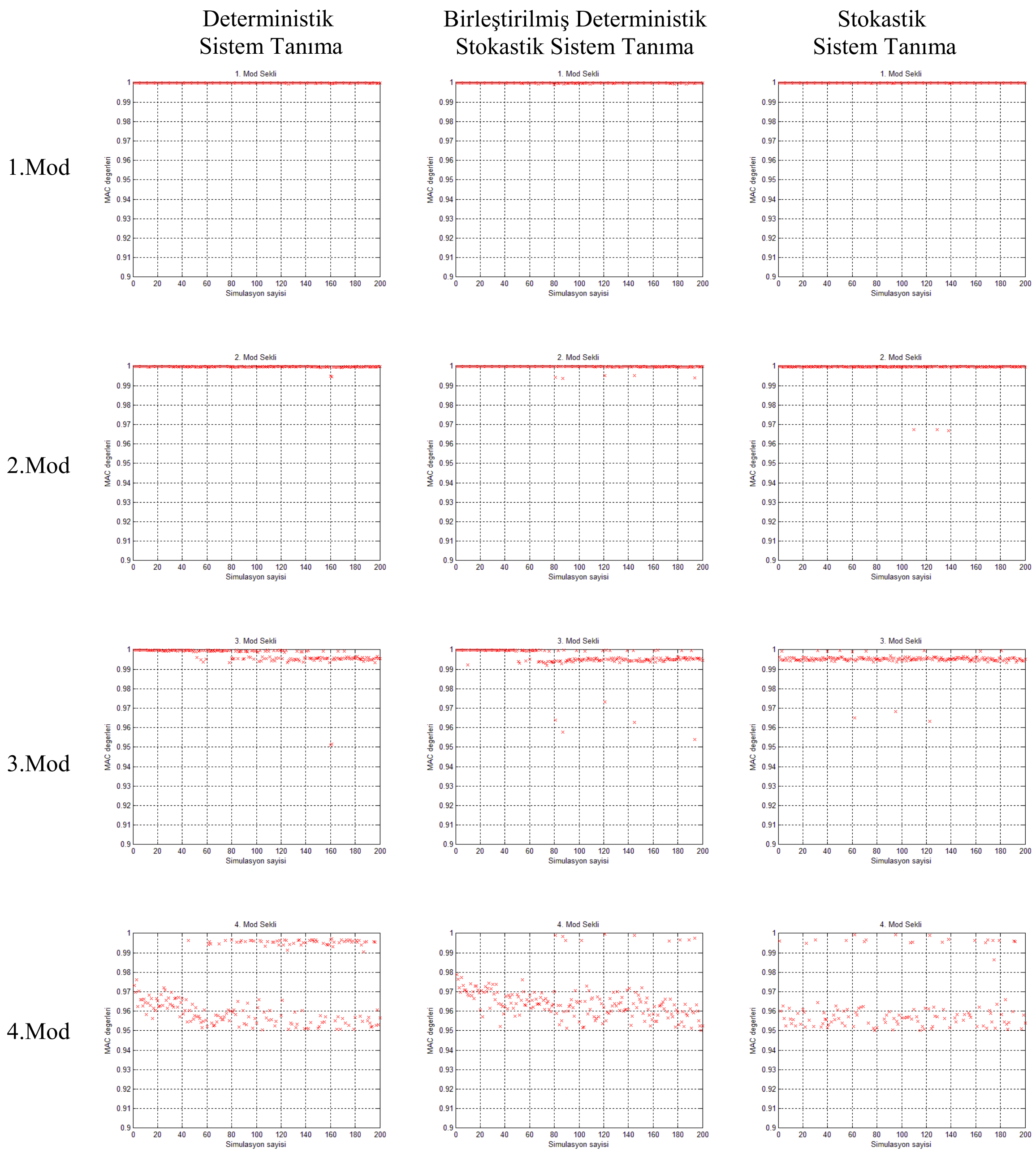
Şekil 4.12 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %2 için ilk 4 mod şekline ait sönüm oranları tahmin sonuçları

Üç yöntemde gürültü-sinyal oranı %2 için yapıya ait ilk 4 moduda yakalamaktadır. Şekillerde gösterilen noktalar her bir simulasyona ait normalize edilmiş sönüm oranlarını gösterir. %2 lik gürültü-sinyal oranı için deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik yöntemler birbirlerine benzer sonuçlar vermektedir. MEK değerlerinde olduğu gibi stokastik yöntem 4. Mod şekline ait sönüm oranında %50' nin altında başarı gösterebilmiştir.



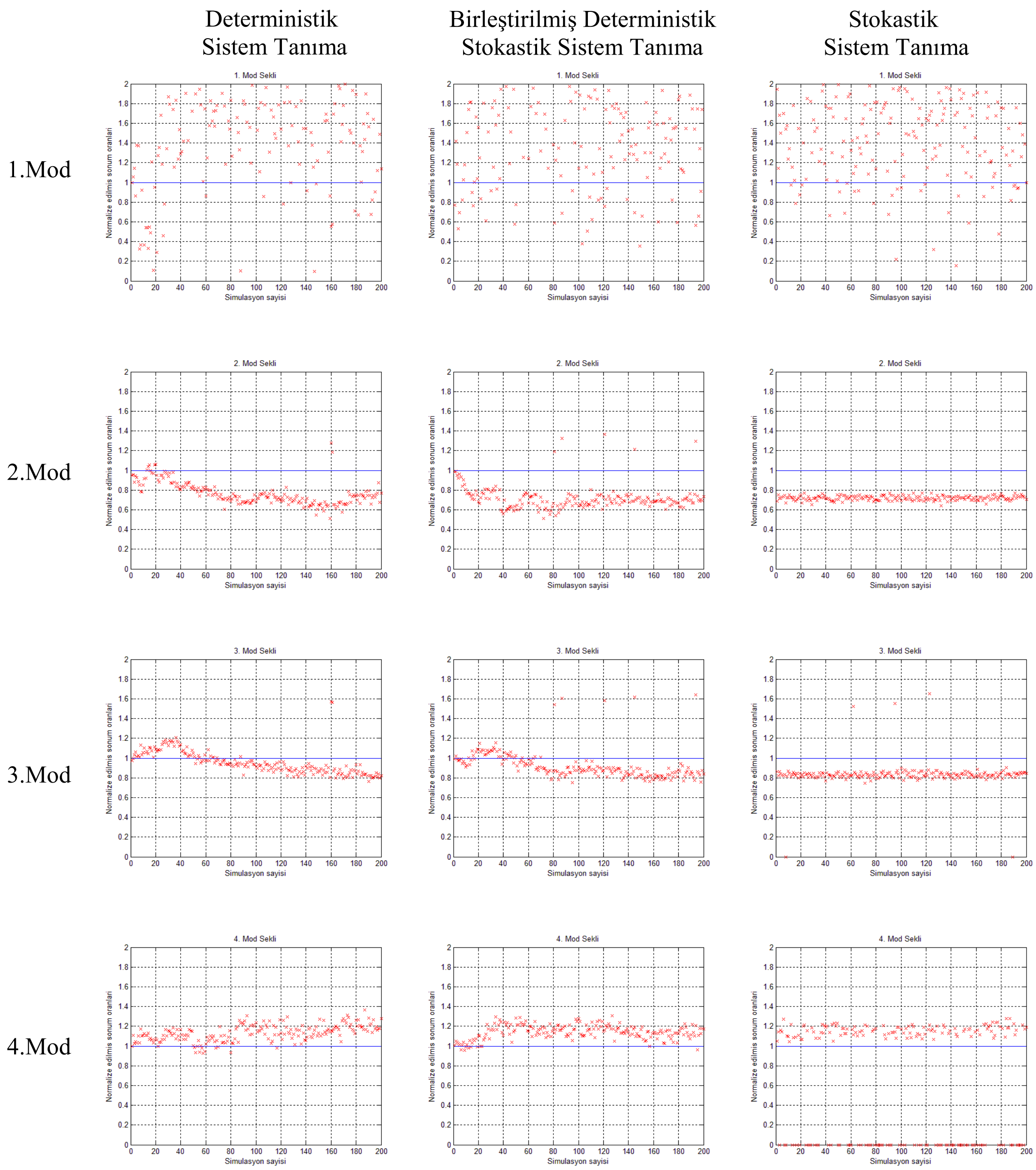
Şekil 4.13 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %5 için ilk 4 mod şekline ait frekansların tahmin sonuçları

Gürültü-sinyal oranı arttıkça beklendiği gibi frekansların gerçek değere göreceli olarak biraz daha saçıldığı gözlenmektedir. Yöntemler frekans değerleri için kendi içerisinde benzer sonuçlar vermektedir.



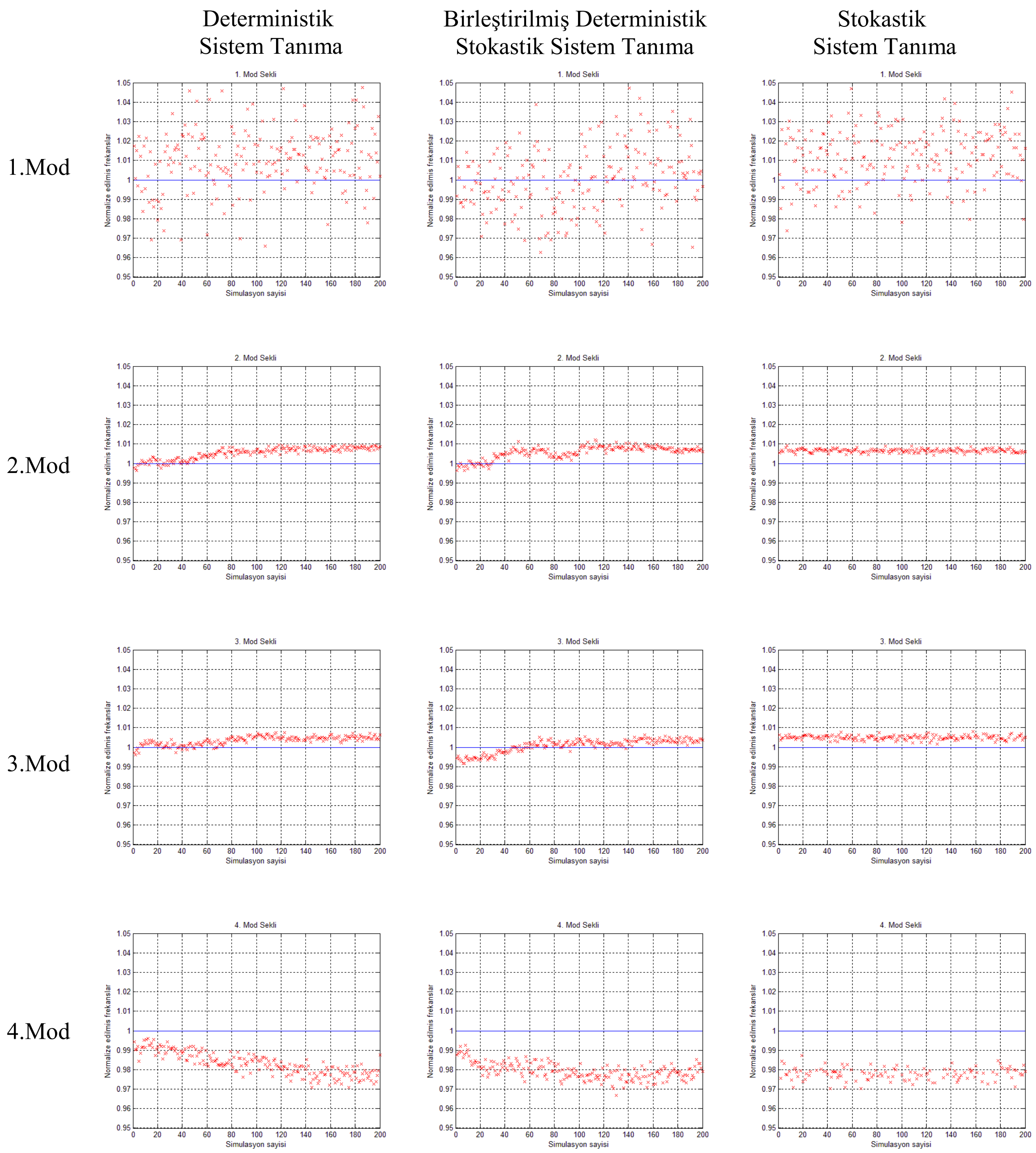
Şekil 4.14 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %5 için ilk 4 mod şekline ait MEK değerleri

%5 lik gürültü-sinyal oranı için deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik yöntemler bütün mod şekillerini yakalamakla birlikte birbirlerine benzer sonuçlar vermektedir. Öte yandan stokastik yöntem 4. Mod şekli için analizlerin %60' ında başarı gösterebilmiştir.



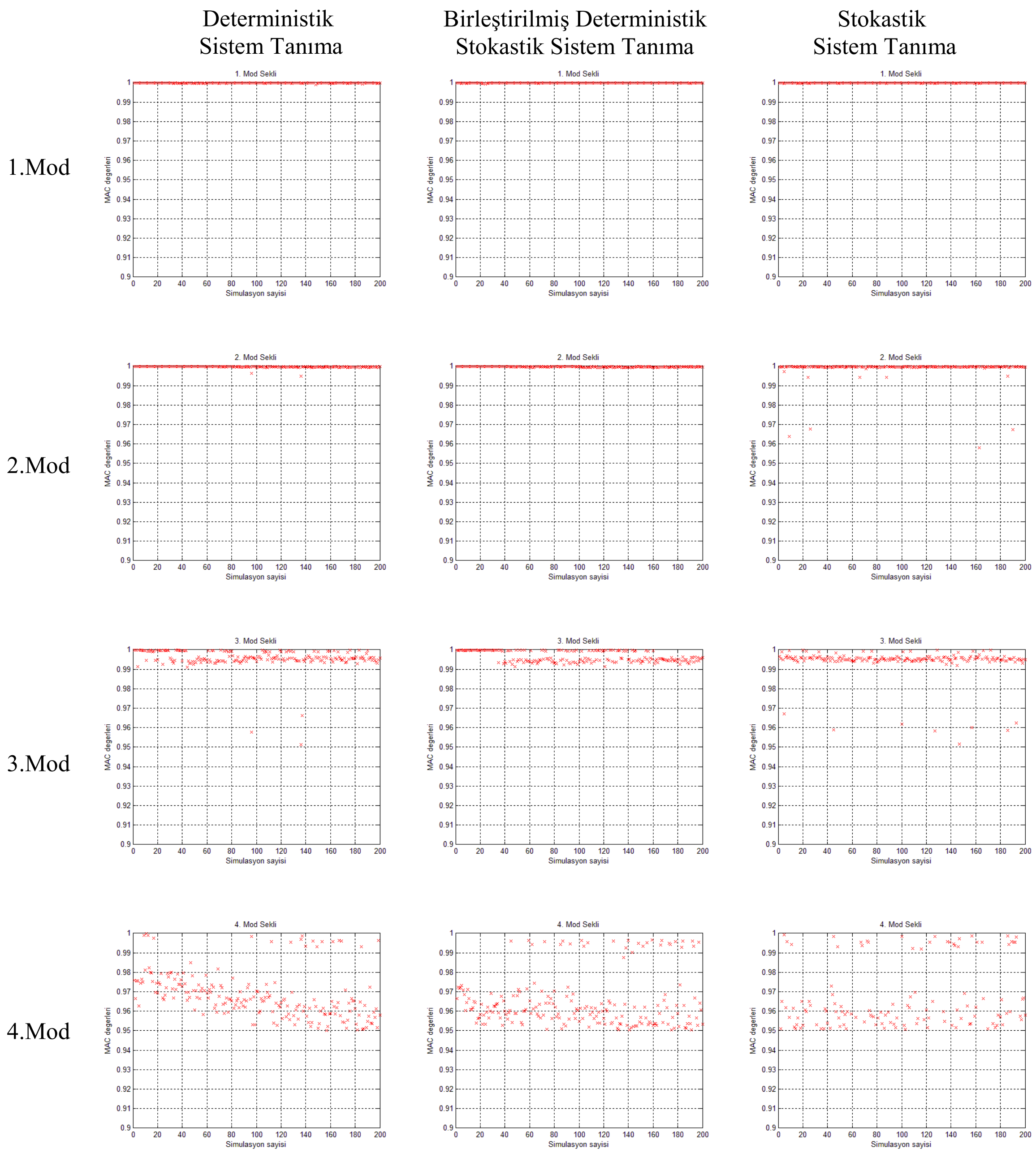
Şekil 4.15 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %5 için ilk 4 mod şekline ait sönüm oranları tahmin sonuçları

%5 lik gürültü-sinyal oranı için deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik yöntemler birbirlerine benzer sonuçlar vermektedir. MEK değerlerinde olduğu gibi stokastik yöntem 4. Mod şekli için analizlerin %60' ında başarı gösterebilmiştir.



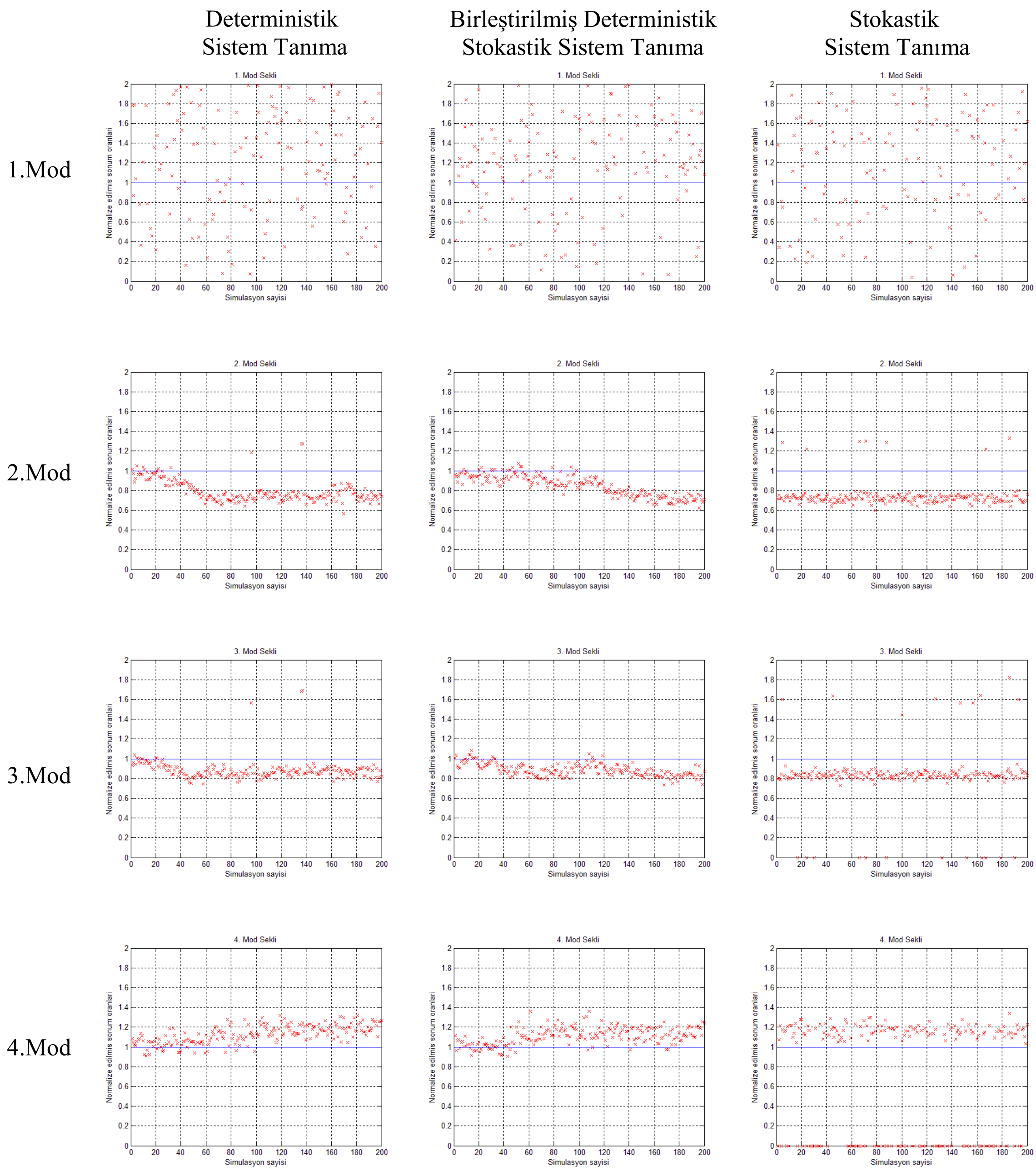
Şekil 4.16 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %10 için ilk 4 mod şekline ait frekansların tahmin sonuçları

Gürültü-sinyal oranı arttıkça beklendiği gibi frekansların gerçek değere göreceli olarak biraz daha saçıldığı gözlenmektedir. Yöntemler frekans değerleri için kendi içerlerimde benzer sonuçlar vermektedir.



Şekil 4.17 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %10 için ilk 4 mod şekline ait MEK değerleri

%10'luk gürültü-sinyal oranı için deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik yöntemler bütün mod şekillerini yakalamakla birlikte birbirlerine benzer sonuçlar vermektedir. Öte yandan stokastik yöntem 4. Mod şekli için analizlerin %60' ında başarı gösterebilmiştir.



Şekil 4.18 : Monte Carlo analizinden elde edilen gürültü sinyal oranı %10 için ilk 4 mod şekline ait sönüm oranları tahmin sonuçları

% 10'luk gürültü-sinyal oranı için deterministik ve birleştirilmiş deterministik stokastik yöntemler birbirlerine benzer sonuçlar vermektedir. 1. Mod için üç yöntemde başarısız sayılabilir. MEK değerlerinde olduğu gibi stokastik yöntem 4. Mod şekli için analizlerin %60' ında başarı gösterebilmiştir.

Çizelge 4.3 : Gürültü-sinyal oranı %2 için 200 adet Monte Carlo analizi

	Modal analiz	Deterministik Sistem Tanıma				Birleştirilmiş Det-Stok Sistem Tanıma				Stokastik Sistem Tanıma			
		Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi	Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi	Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi
Frekans Değerleri	2.742	2.7740	0.0189	0.0068	100	2.7445	0.0314	0.0114	100	2.8021	0.4277	0.1526	100
	8.763	8.8030	0.0290	0.0033	100	8.7988	0.0166	0.0019	100	8.8909	0.7047	0.0793	100
	15.809	15.8374	0.0468	0.0030	100	15.8031	0.0454	0.0029	100	15.5994	0.4415	0.0283	100
	22.516	22.0542	0.1022	0.0046	100	22.0674	0.1341	0.0061	100	22.0173	0.0260	0.0012	45
MEK Değerleri	1	0.9999	0	0	100	0.9999	0	0	100	0.9999	0	0	100
	1	0.9998	0	0	100	0.9998	0	0	100	0.9994	0.0032	0.0032	100
	1	0.9975	0.0024	0.0024	100	0.9970	0.003	0.0030	100	0.9953	0.0028	0.0028	100
	1	0.9583	0.0689	0.0719	100	0.9642	0.0113	0.0117	100	0.9597	0.0118	0.0123	45
Sönüm Değerleri	2	2.7111	0.6812	0.2513	100	2.0958	0.9551	0.4557	100	2.9132	0.4804	0.1649	100
	2	1.5059	0.2699	0.1792	100	1.4435	0.1994	0.1381	100	1.4529	0.1132	0.0779	100
	3	2.7821	0.2375	0.0854	100	2.7206	0.2024	0.0744	100	2.5199	0.1751	0.0695	100
	4.1	4.7963	0.7219	0.1505	100	4.7145	0.4894	0.1038	100	4.7372	0.1320	0.0279	45

Çizelge 4.4 : Gürültü-sinyal oranı %5 için 200 adet Monte Carlo analizi

	Modal analiz	Deterministik Sistem Tanıma				Birleştirilmiş Det-Stok Sistem Tanıma				Stokastik Sistem Tanıma			
		Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi	Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi	Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi
Frekans Değerleri	2.742	2.8126	0.6078	0.2161	100	2.9184	0.9455	0.3240	100	2.7737	0.0193	0.0070	100
	8.763	8.8854	0.7032	0.0791	100	8.9690	1.1034	0.1230	100	8.8203	0.0059	0.0007	100
	15.809	15.9176	0.6073	0.0382	100	15.9826	0.9800	0.0613	100	15.9793	0.7562	0.0473	100
	22.516	21.998	0.0947	0.0043	100	22.1175	0.0903	0.0041	100	22.0148	0.0520	0.0024	62
MEK Değerleri	1	0.9999	0	0	100	0.9999	0	0	100	0.9999	0	0	100
	1	0.9997	0	0	100	0.9997	0	0	100	0.9992	0.0040	0.0040	100
	1	0.9971	0.0051	0.0051	100	0.9959	0.0060	0.0060	100	0.9950	0.0038	0.0038	100
	1	0.9707	0.0178	0.0183	100	0.9651	0.0095	0.0098	100	0.9631	0.0153	0.0159	62
Sönüm Değerleri	2	3.2321	1.2680	0.3923	100	3.2030	1.3764	0.4297	100	3.0171	0.9248	0.3065	100
	2	1.5325	0.2319	0.1513	100	1.4306	0.2378	0.1662	100	1.4385	0.0476	0.0331	100
	3	2.8732	0.3590	0.1249	100	2.7795	0.4234	0.1523	100	2.5340	0.2861	0.1129	100
	4.1	4.6342	0.3430	0.0740	100	4.6825	0.2973	0.0635	100	4.7403	0.2139	0.0451	62

Çizelge 4.5 : Gürültü-sinyal oranı %10 için 200 adet Monte Carlo analizi

	Modal analiz	Deterministik Sistem Tanıma				Birleştirilmiş Det-Stok Sistem Tanıma				Stokastik Sistem Tanıma			
		Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi	Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi	Ortalama	Standart Sapma	Değişim Katsayısı	Başarı Yüzdesi
Frekans Değerleri	2.742	2.8601	0.7394	0.2585	100	2.7432	0.0453	0.0165	100	2.8659	0.7383	0.2576	100
	8.763	8.9149	0.8620	0.0967	100	8.8131	0.0295	0.0033	100	9.1348	1.5940	0.1745	100
	15.809	15.9565	0.7588	0.0476	100	15.8204	0.0544	0.0034	100	16.1817	1.3156	0.0813	94
	22.516	22.1382	0.1318	0.0060	100	22.0518	0.0964	0.0044	100	22.0193	0.0716	0.0033	62
MEK Değerleri	1	0.9999	0	0	100	0.9999	0	0	100	0.9999	0	0	100
	1	0.9997	0	0	100	0.9997	0	0	100	0.9988	0.0050	0.0050	100
	1	0.9958	0.0052	0.0052	100	0.9966	0.0027	0.0027	100	0.9940	0.0074	0.0074	94
	1	0.9682	0.0118	0.0122	100	0.9648	0.0135	0.0140	100	0.9667	0.0168	0.0174	62
Sönüm Değerleri	2	2.8982	1.8633	0.6429	100	2.8590	1.7714	0.6196	98.5	3.1079	1.7601	0.5663	99.5
	2	1.5855	0.2225	0.1403	100	1.6975	0.2158	0.1271	100	1.4941	0.3270	0.2189	100
	3	2.6632	0.3290	0.1235	100	2.6706	0.1989	0.0745	100	2.6208	0.5132	0.1958	94
	4.1	4.6159	0.3848	0.0834	100	4.5442	0.3654	0.0804	100	4.7833	0.2501	0.0523	62

4.5.5 Yorumlar

Bu çalışmada model bir yapı üzerine alt uzay esaslı farklı sistem tanıma yöntemleri uygulanmıştır [28], [30]. İlgili yöntemlere ait sonuçlar grafiksel olarak gösterilmiştir. Ayrıca sonuçlar, daha detaylı olarak referans [28] ve [30]'da tartışılmıştır. Bu şekillere dayanarak şu kanılara varılabilir.

- Bütün yöntemler frekanslarda kabul edilebilir sonuçlar vermektedir.
- Yüksek modlarda stokastik sistem tanıma yöntemi bu yapı için başarılı sonuç vermemiştir.
- Gürültü-sinyal oranı arttıkça bazı modlara ait sönümler % 100'e yakın hata ile saptanabilmiştir. Bu durumda gürültü-sinyal oranı ile sönüm oranlarını tahmin etme kararlılığı arasında ters orantı vardır.
- Gürültü-sinyal oranlarının düşük olduğu durumda zaman maliyeti azaltmak için birleştirilmiş deterministik stokastik yöntem yerine deterministik yöntem seçilebilir.
- Giriş bilgisinin olmadığı koşullarda stokastik yöntem kullanılmasında sakınca görülmemektedir.

Bunlara ilave olarak bir noktaya değinmekte fayda vardır. Dinamik analiz sırasında çözüm yönteminden kaynaklanan sayısal hatalar çıkış bilgisine yansıdığı için sonuçları olumsuz etkilemiş olabilir. Bu hataların giderilmesi durumunda sönüm oranlarına ait sonuçların biraz daha iyileşmesi sağlanabilir.

5. SONUÇLAR

Bu tez kapsamında, dinamik yapı sistemlerine ait üç modelleme tekniğinden bahsedilmiştir. Bunlar sırasıyla SE modeli, modal model ve durum-uzay modelidir. Her bir model matematiksel olarak açıklanmıştır.

Bu tez kapsamında, yapı SE ile modellenmiş, modal ve doğrusal dinamik analiz gerçekleştirilmiştir. Doğrusal dinamik analizden elde edilen sonuçlar, sistem tanıma teknikleri için, giriş bilgisi olarak kullanılmıştır. Modal analizden elde edilen sonuçlar ise, sistem tanıma teknikleri kullanılarak tahmin edilen modal parametrelerin karşılaştırılmasına olanak sağlamıştır.

Deneysel modal analizde de sıklıkla kullanılan diğer bir modelleme biçimi modal modellemedir. Dinamik bir sistem, modal kordinatları ile tanımlanmaktadır. Böylece FTF daha kolay hesaplanabilmektedir.

Durum-uzay modelleri, dinamik sistemleri daha gerçekçi modellemeye olanak sağlar. Hareket denkleminden, durum-uzay modeline geçiş mümkündür. Klasik modelden farklı olarak proses ve modellemeden kaynaklanan gürültüler sisteme dahil edilebilir. Bu durum, teorik olarak kurulan modeli, gerçek modele yakınlaştırır. Bu modelleme tekniği ile dinamik sistem, sürekli ve ayrık zamanda tanımlanabilir.

Durum-uzay modelleri üç farklı başlık altında incelenmiştir. Tüm şartların ideal olması durumda deterministik modeli, sisteme ait giriş ve çıkış bilgilerinin gürültülü olması durumunda birleştirilmiş deterministik stokastik modeli ve giriş bilgisinin beyaz gürültü kabul edildiği durumlarda stokastik modeli kullanmak uygundur.

Her bir durum-uzay modelinin bazı avantajları vardır. Deterministik modelin basit olması nedeniyle çözümü kolaydır. Birleştirilmiş deterministik stokastik model içinde mevcut olan gürültüler nedeniyle gerçeği daha çok yansıtır. Stokastik modelde ise, giriş bilgisine ihtiyaç duyulmaması, devasa inşaat yapıları için önemli bir avantajdır [28,30].

Durum-uzay modellerini esas alan, alt uzay esaslı sistem tanıma teknikleri, Gündeş Bakır ve diğerleri [7] tarafından incelenmiş bir yapı üzerine uygulanarak, bu tekniklerin performası ve birbirlerine olan üstünlükleri karşılaştırılmıştır [28,30].

Yapının, bilgisayar ortamında SE modeli oluşturulmuş ve sistem tanıma tekniklerinin karşılaştırılmasında kullanılacak modal parametreler (frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları) belirlenmiştir. SE metodu kullanılarak yapının, doğrusal dinamik analizi yapılmıştır. Yapının her bir katına sensör yerleştirilerek dinamik analiz sonuçları sistem tanıma tekniklerinde kullanılmak üzere saklanmıştır. Doğrusal dinamik analiz için yapıya, zemin ivmesi olarak beyaz gürültü verilmiştir. Dinamik analiz sonucunda elde edilen çıktılar, sistem tanıma tekniklerinde kullanılmıştır. Monte Carlo analizinde kullanılmak üzere, çıktılar % 2, % 5 ve % 10 gürültü-sinyal oranına sahip olacak şekilde beyaz gürültü ile kirletilmiştir. Her bir gürültü-sinyal oranı için 200 adet veri seti oluşturulmuştur. Böylece sistem tanıma tekniklerinin farklı gürültü oranlarında karşılaştırılması sağlanmıştır [28,30]. Sistem tanıma, üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Bu aşamalara ilişkin akış diyagramı aşağıda gösterilmiştir.

ANSYS
Doğrusal Dinamik Analiz

⇓

Gürültü-sinyal oranı
% 2, % 5 ve % 10 olan 200'er adet Monte Carlo simulasyonun gerçekleştirilmesi

⇓

Sistem Tanıma
Modal Parametrelerin Tahmini

Bu tez kapsamında kullanılan teknikler, yapının ilk dört eğilme modunu tahmin etmiştir. Genel olarak bütün teknikler aynı hassasiyette olmamakla birlikte, bu modları tespit edebilmişlerdir. Bu durum, tekniklerin inşaat yapıları üzerinde efektif olarak kullanılabileceğini göstermiştir [28,30].

Sistem tanımaya ilişkin sonuçlar, Bölüm 4'te ilgili şekillerde ve çizelgelerde gösterilmiştir ve aşağıdaki sonuçlara varılmıştır [28,30]:

- Deterministik sistem tanıma tekniği, düşük gürültü-sinyal oranı için kabul edilebilir sonuçlar vermiştir. Yöntemin hızlı çalışması nedeniyle, düşük gürültü-sinyal oranı için kullanılmasında sakınca görülmemektedir. Yüksek gürültü-sinyal oranı için ise yöntemin güvenilirliği azalmaktadır.
- Birleştirilmiş deterministik stokastik sistem tanıma tekniğinin, bu teknikler arasında en başarılı olduğu gözlemlenmiştir. Sadece düşük gürültü-sinyal oranı için değil, yüksek gürültü sinyal oaranlarında da diğer yöntemlere göreceli olarak daha başarılı olduğu görülmüştür. Yapıya ait giriş ve çıkış bilgilerinin olduğu durumda, bu yöntem kullanılabilir. Ayrıca sönüm oranının daha hassas biçimde tahmin edilmesi ihtiyacı durumunda, bu yöntem kullanılmalıdır.
- Stokastik sistem tanıma tekniği giriş bilgisine ihtiyaç duymaması nedeniyle diğer yöntemlere nazaran avantajlı konumdadır. Bu çalışmada görülmüştürki, düşük gürül-sinyal oaranı için, stokastik sistem tanıma yöntemi, frekansları ve mod şekillerini tahmin etmede başarılı sayılabilir. Ancak gürül-sinyal oranının arttığı durumlarda başarı oranı oldukça düşmüştür.

KAYNAKLAR

[1] **Vandiver, J.K.,** 1977: Detection of Structural Failure on Fixed Platforms by Measurements of Dynamic Response. Journal of Petroleum Technology, March, 305 – 310.

[2] **Loland O. and J.C Dodds,**1976: Experience in Developing and Operating Integrity Monitoring System in North Sea, in Proc. of the 8th Annual Offshore Technology Conference, 313-319.

[3] **Kim, H.M. and Bartkowicz, T.J,**1993: Damage detection and health monitoring of large space structures. Journal of Sound and Vibration, 27(6), 12–17.

[4] **A. Rytter,**1993: Vibration-based Inspection of Civil Engineering Structures. Ph.D Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Denmark.

[5] **Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B. and Shevita, D.W.,** 1996: Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review. Los Alamos National Laboratory Report.

[6] **Gundes Pelin, Reynders E., and De Roeck G.,**2007: Sensitivity based finite element model updating using constrained optimization with a trust region algorithm', Journal of Sound and Vibration, 305(1-2):211-25,

[7] **Gundes Pelin, Reynders E., and De Roeck G.,**2008: An improved finite element model updating method by the global optimization technique 'Coupled Local Minimizers', Computers and Structures, 86(11-12), Pages: 1339-1352

[8] **Reynders E., De Roeck G., Gundes Bakır P. and Sauvage C.,** 2007: Damage identification on the Tilff bridge by vibration monitoring using optical fiber strain tensors. ASCE Journal of Engineering Mechanics 133 (2): 185-193

[9] **Ewins, D.J.,** 1984: Modal Testing: Theory and Practice. Research Studies Press Ltd., Letchworth, Hertfordshire, UK.

[10]**B. Peeters, G. De Roeck.,**2001: Stochastic system identification for operational modal analysis: a review, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 123, 659-667

[11] **Pan, Q.**2007: System Identification of Constructed Civil Engineering Structures and Uncertainty. Ph.D Dissertation, Drexel University.

[12] **Ljung, L.,**1999: System Identification: Theory for the user. Second edition Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.

[13] **De Moor B., Moonen M., Vandenberghe L., and Vandewalle J.**, 1988: Identification of Linear State Space Models with SVD Using Canonical Correlation Analysis," In Singular Value Decomposition and Signal Processing, North-Holland, pp. 161–169.

[14] **Moonen M., and Vandewalle J.**, 1990: QSVD Approach to on- and off-line State Space Identification, Int. J. Control, vol. 51, no. 5, pp. 1133–1146.

[15] **Verhaegen M., and Dewilde P.**, 1992: Subspace Model Identification, Part 1: The Output-Error State-Space Model Identification Class of Algorithms, Int. J. Control, vol. 56, no. 5, pp. 1187–1210.

[16] **Van Overschee P. and De Moor B.**, 1994: N4SID - Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic - Stochastic Systems, Automatica, vol. 30, no. 1, pp. 75–93.

[17] **Picci G. and Katayama T.**, 1996: Stochastic Realization with Exogenous Inputs and 'Subspace Methods' Identification," Signal Processing, vol. 52, no. 2, pp. 145–160.

[18] **Van Overschee P., and De Moor B.**,1996: Subspace Identification for Linear Systems: Theory – Implementation – Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

[19] **Katayama, T.**,2005: Subspace Methods for System Identification, First Edition, Springer.

[20] **Peeters, B.**,2000: System Identification and Damage Detection in Civil Engineering, Ph.D Dissertation. K.U. Leuven, Belgium.

[21] **E.Reynders, G. De Roeck**, 2008: Reference-based Combined Deterministic-Stochastic Subspace Identification for Experimental and Operational Modal Analysis. Mechanical Systems and Signal Processing, 22(3):617-637.

[22] **Favoreel, W., De Moor, B., Van Overschee, P.**,2000: Subspace State Space System Identification for Industrial Processes. Journal of Process Control10 (2-3), 149-155.

[23] **Yu E., Wallace J.W., Taciroglu E.**, 2007: Parameter Identification of Framed Structures Using an Improved Finite Element Model Updating Method, Part 2: Application to Experimental Data, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 36, 641-660.

[24] **Gündeş Bakır P.**, 2008: Vibration based structural health monitoring, Bogazici University Lecture notes, http://www2.itu.edu.tr/~gundes/lectures.htm

[25] **Burns R.**,2001: Advanced Control Engineering, Elsevier, University of Plymouth, UK

[26] **Elbert H., Ole J., and Paul Haase S.**,2008: Linear Systems Control: Deterministic and Stochastic methods, Springer,

[27] **Chi-Tsong C.**,1999: Linear Systems Theory and Design, Oxford University Press, Third edition, State University of Newyork

[28] **Gündeş Bakır P., Ekşioğlu E., Alkan S.,** 2009: A comparative study on the subspace based system identification techniques applied on civil engineering structures.[makale basım için incelemededir]

[29] **ANSYS,**2006: Robust Simulation and Analysis Software, Release 10.0. http://www.ansys.com, ANSYS Incorporated, U.S.A.

[30] **Gündeş Bakır P., Alkan S., Ekşioğlu E.,** 2010: Evaluation of subspace based system identification techniques on civil engineering structures. 14th European Conference on Earthquake Engineering, Republic of Macedonia. 30 August – 3 September, 2010

[31] **H. Akaike,**1976: Canonical Correlation Analysis of Time Series and the Use of an Information Criterion, In System Identification: Advances and Case StudiesAcademic pp. 27-96.

EKLER

EK A : Tekil değerlerine ayrıştırmaya bir örnek

EK A

Aşağıdaki matrisi tekil değerlerine ayrıştırmak gerekirse aşağıdaki adımları izlemek gerekmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

İlk olarak *A* matrisinin transpozunu A^T ve $A^T A$ 'yı hesaplamak gerekecektir.

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}$$

Daha sonra $A^T A$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmalı ve bunlar azalan sıra ile yazılmalıdır. Bu özdeğerlerin karekökü *A* matrisinin tekil değerlerini verecektir.

$$(A^T A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 25 - \lambda & -15 \\ -15 & 25 - \lambda \end{bmatrix}$$

Bu matrisin karakteristik eşitliği,

$$\lambda^2 - 50\lambda + 400 = 0$$

Eşitlik çözülerek özdeğerler bulunur.

$$\lambda_1 = 40$$

$$\lambda_2 = 10$$

Tekil değerler, bu değerlerin kareköküdür.

$$s_1 = 6.3245$$

$$s_2 = 3.1622$$

Bir diğer adımda tekil değerleri azalan sıra ile matrisin köşegenleri üzerine koyarak köşegen *S* matrisi oluşturulmalı ve S^{-1} hesaplanmalıdır.

$$S = \begin{bmatrix} 6.3245 & 0 \\ 0 & 3.1622 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1581 & 0 \\ 0 & 0.3162 \end{bmatrix}$$

Sonraki adım ise önceden bulunan özdeğerlere göre özvektörleri belirlemektir.

$\lambda_1 = 40$ için *norm(X₁)*,$\lambda_1 = 10$ için *norm(X₂)* olsun. Buna göre

$$V = [norm(X_1)\ \ norm(\ X_2)] = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Böylece V matrisi hesaplanmış olur. $A = USV^H$ için U matrisi yalnız bırakılarak eşitlik çözülür bu şekilde U matrisi de elde edilmiş olur.

$$U = AVS^{-1}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 \\ 0.8944 & -0.4472 \end{bmatrix}$$

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad **:** Serhat ALKAN

Doğum Yeri ve Tarihi **:** Nusaybin 01/03/1984

Adres **:** Emniyetevler Mah. Çimen Sok. 11/2
Kağıthane/İSTANBUL

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi