

Ezit mukar. Konsal kiris

(Kendi ağırlığı kale)
alınarak

$x \rightarrow$ Gerekli eksen
 $y \rightarrow$ Kesim simetri eksen
 (x, y) Kuvvetler düzlemi.

$F(x)$ Kesit

$W(x)$ Mukarimet mo.

γ Kirişin özgül ağırlık
salınma gerilme

$$|M_x| = Px + \gamma \int_0^x (x-\varphi) F(\varphi) d\varphi \quad (1)$$

$$\sigma_0 = \frac{|M_x|}{W(x)} \rightarrow \boxed{Px + \gamma \int_0^x (x-\varphi) F(\varphi) d\varphi = \sigma_0 \cdot W(x)} \quad (2)$$

② ifadesi problemin integral denklemi. Burada.

$$W(0) = 0 \quad (3)$$

Alınır mı?

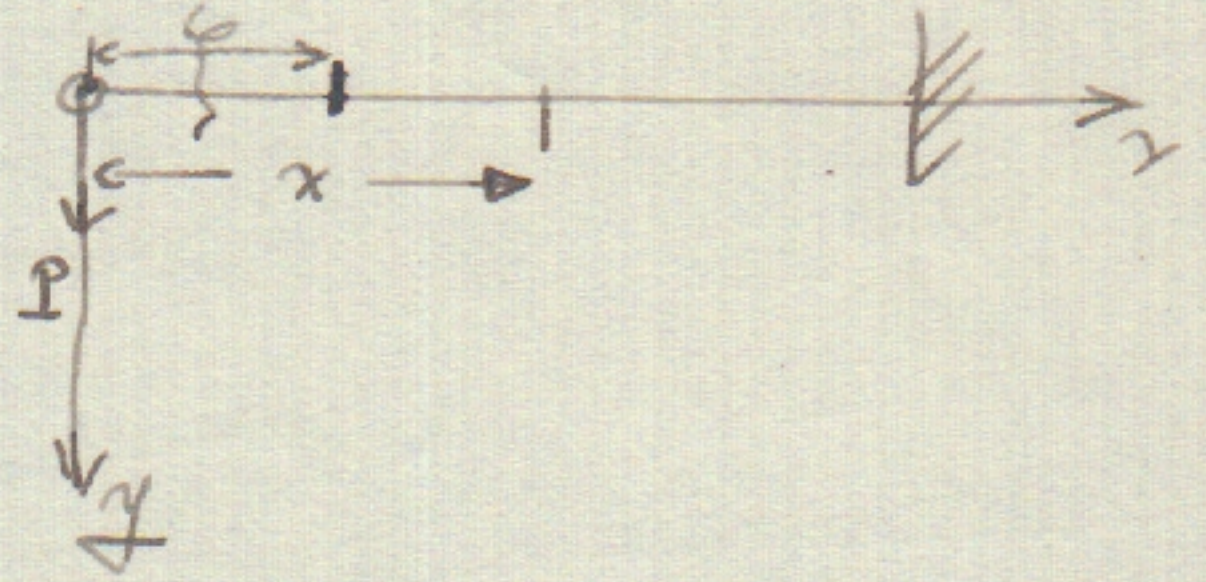
Diff. denklem: ② (x) göre türev alınır

$$\boxed{P + \gamma \int_0^x F(\varphi) d\varphi = \sigma_0 W'(x)} \quad (4)$$

Yine buradan

$$W'(0) = \frac{P}{\sigma_0} \quad (5)$$

edeceği görülmü. (4) tekrar türev alınır.



$$\gamma \cdot F(x) = G_0 W''(x)$$

elde alınır. buradan

$$\boxed{\begin{array}{l} W''(x)/F(x) = \gamma/G_0 \quad \text{--- (6)} \\ W(0) = 0 \quad (3) \\ W'(0) = P/G_0 \quad (5) \end{array}}$$

diff denklemini elde alının. bu ikinci mertebeden denklemin başlangıç şartları (3) ve (5) den başka bir şey değildir.

Özgül ağırlık kale alın mayra (6) denklemini:

$$W''/F = 0 \quad \text{--- (6)}$$

Şeklinde. (3,5) şartları bakımından.

Çeşitli kesit şekilleri için göçümlerde hareket noktası (6) ifadesi alacaktır.

Sarf edilen malzemenin ağırlığı ise:

$$Q = \gamma \int_0^l F(q) dq \quad \text{--- (7)}$$

olarak elde olunacaktır.

Şimdi bazı özel haller için (6) denkleminin integrasyonunu tetkik edelim.

I) dik dötgen kesit

h = salıt

b = değışen. $b(x)$.

(3)

$$\textcircled{8} \begin{cases} W(x) = \frac{bh^2}{6} \\ W'(x) = \frac{h^2}{6} \cdot b'(x) \\ W''(x) = \frac{h^2}{6} \cdot b''(x) \end{cases} \quad F(x) = bh$$

(6) den
$$\frac{W'(x)}{F(x)} = \frac{\frac{h^2}{6} \cdot b'(x)}{h \cdot b(x)} = \frac{\gamma}{\epsilon_0}$$

veya:

$$\boxed{b''(x) - \frac{6\gamma}{\epsilon_0 h} \cdot b = 0} \quad \text{---} \quad \textcircled{9}$$

(8) $\textcircled{3}$ ve $\textcircled{5}$ den dolayı $x=0$ için değerler.

$$b(0) = 0 \quad b'(0) = \frac{6P}{\epsilon_0 h^2} \quad \text{---} \quad \textcircled{10}$$

olması icap eder:

$$\frac{6\gamma}{\epsilon_0 h} = \beta^2$$

$$[\beta] = L^{-1} \quad \textcircled{11}$$

veya dilerek (9) denkleminin sçümü

$$b(x) = C_1 \operatorname{sh} \beta x + C_2 \operatorname{ch} \beta x$$

(10) den dolayı.

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{6P}{\epsilon_0 h^2 \beta} = P \sqrt{\frac{6}{\epsilon_0 \gamma h^3}} \quad \text{---} \quad \textcircled{12}$$

elde olunur.

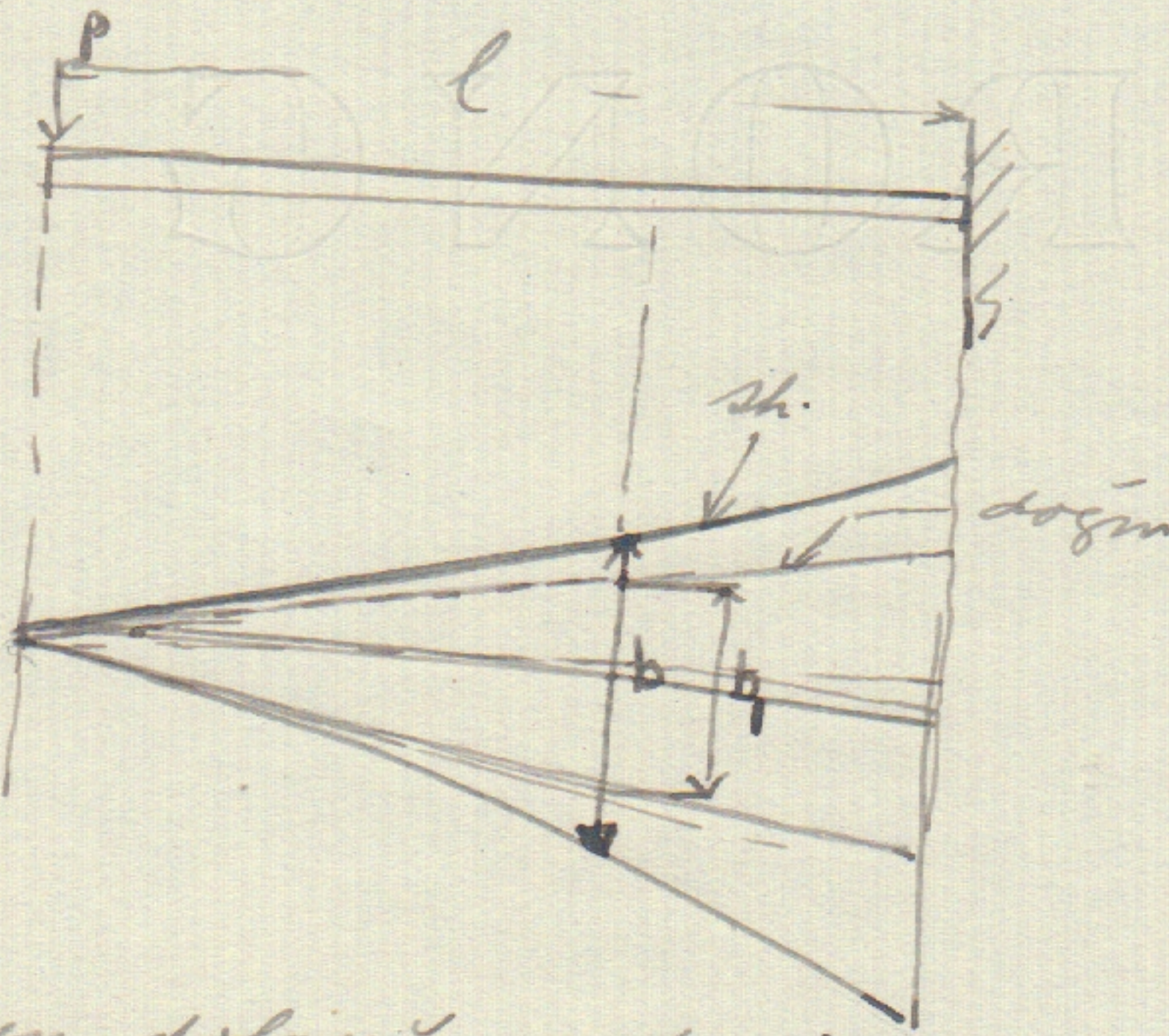
buna göre:

$$b(x) = P \sqrt{\frac{6}{\sigma_0 \gamma h^3}} \cdot \text{sh } \beta x \quad \dots \quad (13)$$

elde olunur. Kendi ağırlık Halle alın maddeğine göre: (6) den ve (10) dan:

$$b_1(x) = \frac{6P}{\sigma_0 h^2} \cdot x \quad \dots \quad (14)$$

olun. her iki halde kısır:



(7) den dolayı sarfedilen malzeme (13) den

$$Q = \gamma \int_0^l F(q) dq = \gamma \cdot h \int_0^l b dq = P (ch\beta l - 1) \quad \dots \quad (15)$$

(14) den dolayı.

$$Q_1 = \gamma \int_0^l F_1(q) dq = \gamma \cdot h \cdot \frac{6P}{\sigma_0 h^2} \int_0^l q dq = \frac{3\gamma h \cdot P l^2}{\sigma_0 h^2} \quad (16)$$

veya: (11)den dolayı

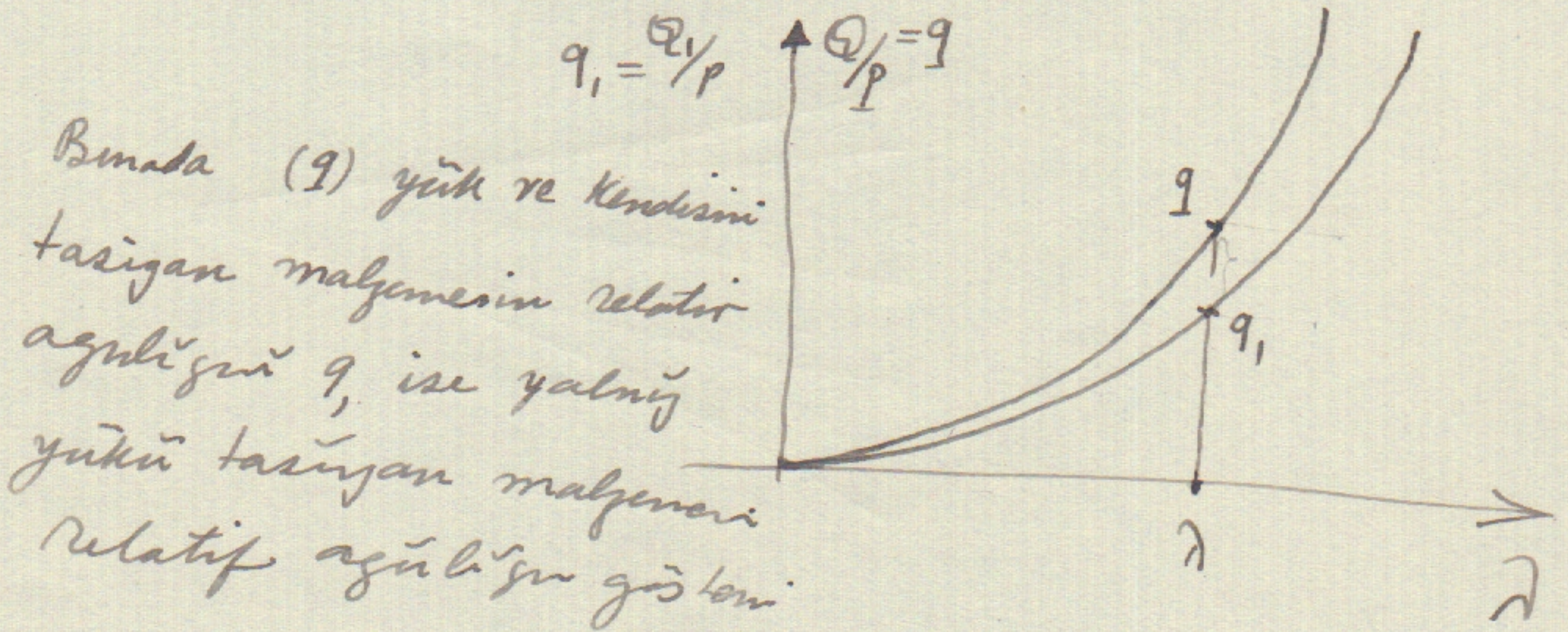
$$Q_1 = P \cdot \frac{\beta l^2}{2} \quad \dots \quad (16)$$

$$\beta l = \sqrt{\frac{68 l^2}{50 h}} = \lambda \quad \dots \quad (17) \text{ gösterilse}$$

15, 16 formülleri:

$$\left. \begin{aligned} q &= Q/P = \text{ch } \lambda - 1 \\ q_1 &= Q_1/P = \frac{1}{2} \lambda^2 \end{aligned} \right\} (18) \text{ şekline gelir.}$$

(18) ifadesinin grafik temsil edelim:



$$q - q_1 = \text{ch } \lambda - (1 + \frac{\lambda^2}{2}) \quad \dots \quad (19)$$

bu farkta kendi kendini taşımak için sarfedilen malzemenin göster bu fark küçük değillerle da olur. ve yaklaşık olarak (λ) doğrusal kuvvetle orantılıdır. bu tüm kiriş karakterize eden

(b) da

(7)

$$\frac{W''(x)}{F(x)} = \gamma/b_0 \quad \text{diff denklen.}$$

$$\begin{cases} W'(0) = \rho/b_0 \\ W(0) = 0 \end{cases} \quad \text{başlangıç şartları.}$$

$$W(x) = \frac{b}{6} h^2$$

$$W'(x) = \frac{b}{6} 2hh' = \frac{b}{3} hh'$$

$$F(x) = bh$$

$$W''(x) = \frac{b}{3} [hh'' + h'^2]$$

(6) da yerine konursa:

$$\frac{1}{3h} [hh'' + h'^2] = \gamma/b_0$$

veya

$$\boxed{hh'' + h'^2 = 3\gamma/b_0 \cdot h} \quad \text{--- (19)}$$

Şeklim alın. Sınırlı şartlar.

$$W(0) \Rightarrow h(0) = 0$$

$$W'(0) = \frac{b}{3} h(0) \cdot h'(0) = \rho/b_0$$

} (20)

edilebilir. $(hh')'_{x=0} = \frac{3\rho}{b_0} b$

(19) denkleminin birinci tarafı. $(hh')'$ olduğu hantıdan her iki taraf $2(hh')$ ile çarpılrsa

$$2(hh')'(hh') = 6\gamma/b_0 h^2 h'$$

heriki taraf
birinci taraf in herseye edilise,

(8)

$$(hh')^2 = 6 \frac{\gamma}{\epsilon_0} \cdot \frac{h^3}{3} + C^2$$

bu (C) saluti yirmi zartindan teryin edile.

$$x=0 \rightarrow \begin{cases} h=0 \\ hh' = \frac{3P}{6\epsilon_0} \end{cases}$$

olacagdan

$$\boxed{\left(\frac{3P}{6\epsilon_0}\right)^2 = C^2} \quad - (21) \text{ shakke denir.}$$

$$(hh')^2 = 2 \frac{\gamma}{\epsilon_0} h^3 + C^2$$

veya buader.

$$h' = \frac{dh}{dx} = \sqrt{C^2 + 2 \frac{\gamma}{\epsilon_0} h^3} : h$$

onu terviriler ayri lusa:

$$dx = \frac{h \cdot dh}{\sqrt{C^2 + 2 \frac{\gamma}{\epsilon_0} h^3}}$$

veya $x=0$ $h=0$ edilegi dugunu lere.

$$\boxed{x = \int_0^h \frac{h dh}{\sqrt{C^2 + 2 \frac{\gamma}{\epsilon_0} h^3}}} \quad - (22)$$

(22) integral elliptik bir integral olup ⑨
 benader (h) ve (x) bir elliptik fonksiyonu
 olarak elde olur. Aynı metod daire keside
 tatbik edilerek elliptik bir integrali de elde olur.

Daire Kesidi:

$$W(x) = \frac{\pi R^3}{4}$$

$$F(x) = \pi R^2$$

$$\underline{R(x)}$$

$$W'(x) = \frac{3\pi}{4} R^2 R'$$

$$W''(x) = \frac{3\pi}{4} (R^2 R')'$$

Sınır şartları:

$$W(0) = 0$$

$$\boxed{R(0) = 0}$$

$$W'(0) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{3\pi}{4} (R^2 R')_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\rightarrow \boxed{(R^2 R')_0 = \frac{4\rho}{3\pi\epsilon_0}}$$

Bu hesaba göre (6) denklemini:

$$\frac{\frac{3\pi}{4} (R^2 R')'}{\pi R^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

veya $\boxed{(R^2 R')' = \frac{4}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot R^2} \dots 23$

$$R(0) = 0$$

$$(R^2 R')_0 = \frac{4\rho}{3\pi\epsilon_0} \quad (23')$$

Beklene gelin. (23) birinci tarafı $2(R^2 R')$

$$2(R^2 R') (R^2 R')' = \frac{8}{3} \frac{\gamma}{\epsilon_0} R^4 R'$$

integrasyon edelimiz

$$(R^2 R')^2 = \frac{8}{15} \cdot \frac{\gamma}{\epsilon_0} R^5 + C^2 \quad \text{--- (24)}$$

(23') den C^2 bulalım:

$$\left(\frac{4P}{3\pi\epsilon_0} \right)^2 = C^2 \quad \text{--- (25)}$$

olarak elde olunuz. (24) den mütehar viller ayıralarız.

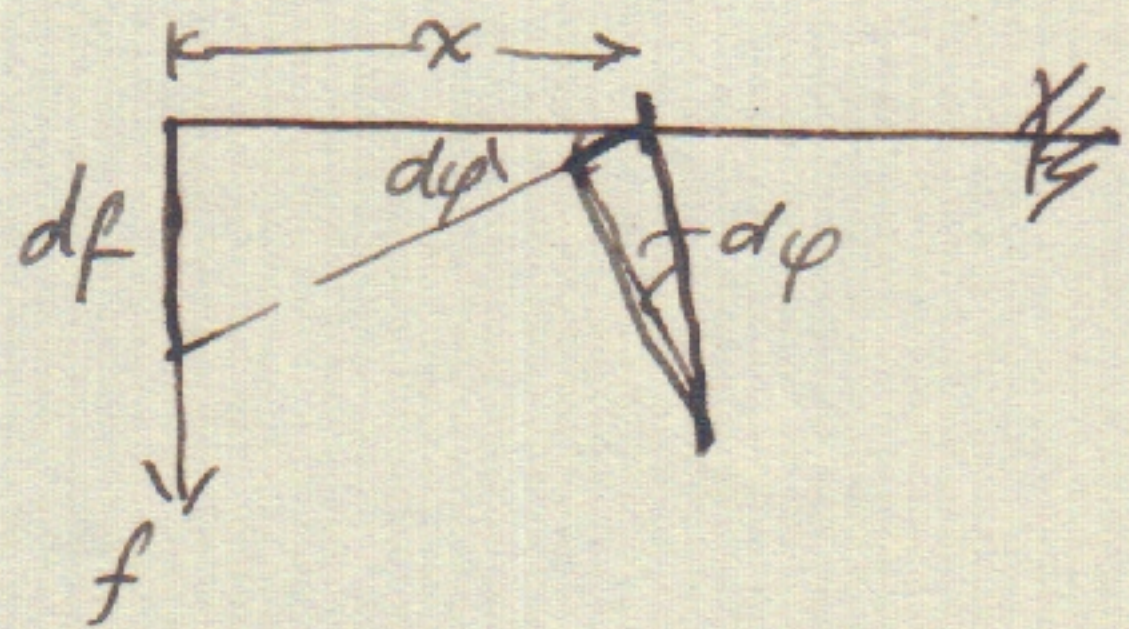
$$x = \int_0^R \frac{R^2 dR}{\sqrt{C^2 + \frac{8}{15} \frac{\gamma}{\epsilon_0} R^5}} \quad \text{--- (26)}$$

olarak elliptik integrale irca olunuz.

~.

El. Eğri hesabı:

$$f = \int_0^l x d\varphi \quad \text{--- (27)}$$



$$d\varphi = \frac{dx}{f}, \quad \frac{1}{f} = \frac{M}{EI}, \quad M = \epsilon_0 W, \quad I = W \cdot y_{max}$$

(27) formülü

(11)

$$f = \int_0^l \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{x dx}{y_{\max}} = \frac{\sigma_0}{E} \int_0^l \frac{1}{y_{\max}} \cdot x dx \quad \dots 28$$

(28) formülü. h = salıt b = değışgen hale

tatbık edersen $y_{\max} = \frac{h}{2} = \text{salıt}$

$$\boxed{f = \frac{\sigma_0 l^2}{Eh}} \quad \dots (29)$$

elde olur. veya ankastre kesidin rijitliği
hesaba katılarak (29) formülü:

$$f = \frac{3}{2} \left(\frac{Pl^3}{3EI_0} \right) \cdot \left(\frac{\sin \beta l}{\beta l} \right) \quad \dots (29')$$

$(\beta l) \rightarrow 0$ değeri için $f = \frac{3}{2} f_0$ varı ki

bu da malzemenin ağırlığı ihmal edildiğinden
ihmal olan şekim formülü kendisi dir.

Rijit halde. b = salıt h = değışgen

(28) den. $y_{max} = \frac{h(x)}{2}$

(12)

$$f = \frac{2\sigma_0}{E} \int_0^l \frac{x dx}{h(x)}$$

(30)

ve dâire halinde ise

$y_{max} = R(x)$ den ilârettir

$$f = \frac{\sigma_0}{E} \int_0^l \frac{x dx}{R(x)}$$

(31)

şekline gelir.

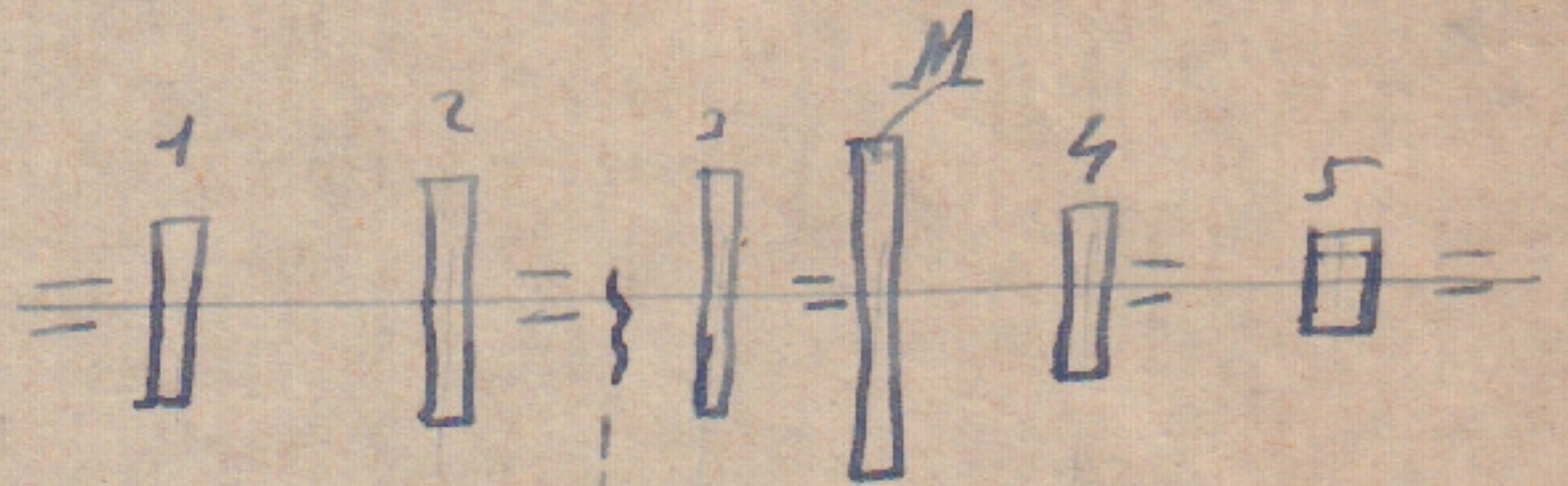
Chillon et Tenot Mech. Tome II

Dunod, 1947

Transmission millerinde Torsion M. diyağı.

1, 2, 3, 4, 5 Enerji alan Kasnaklar

M. Motor Kasnak.



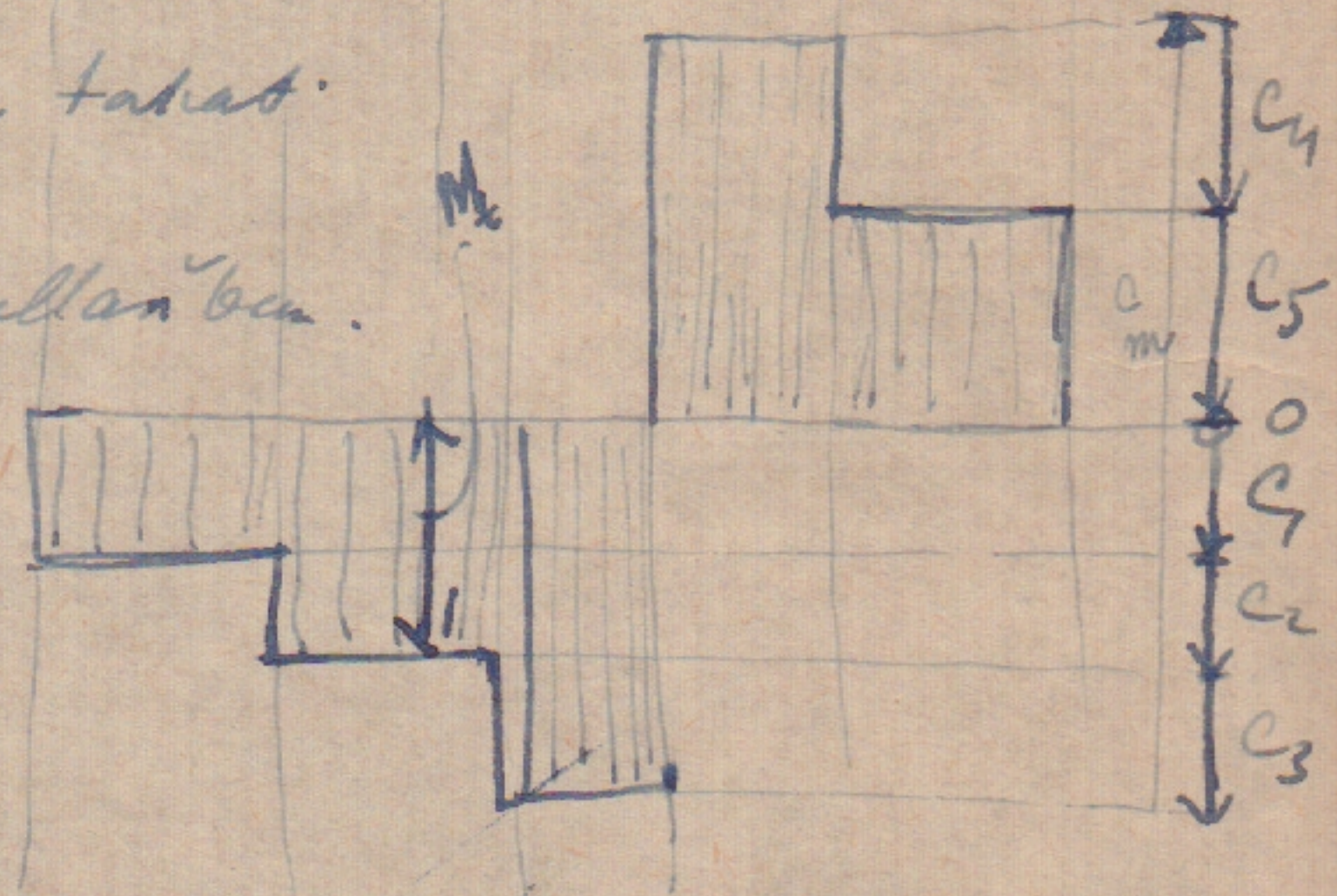
$$P_m = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

P_m = motorun tabakası

P_i = kasnaklarla alınan tabakası.

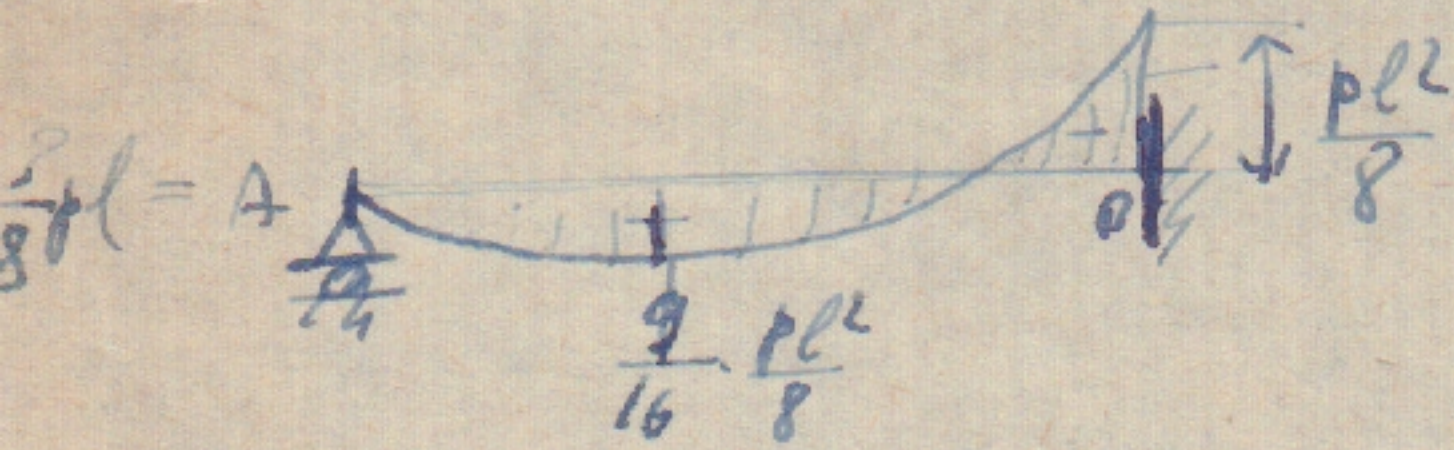
ω bölünüşü C_i Kuvvetler.

$$C_m = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$



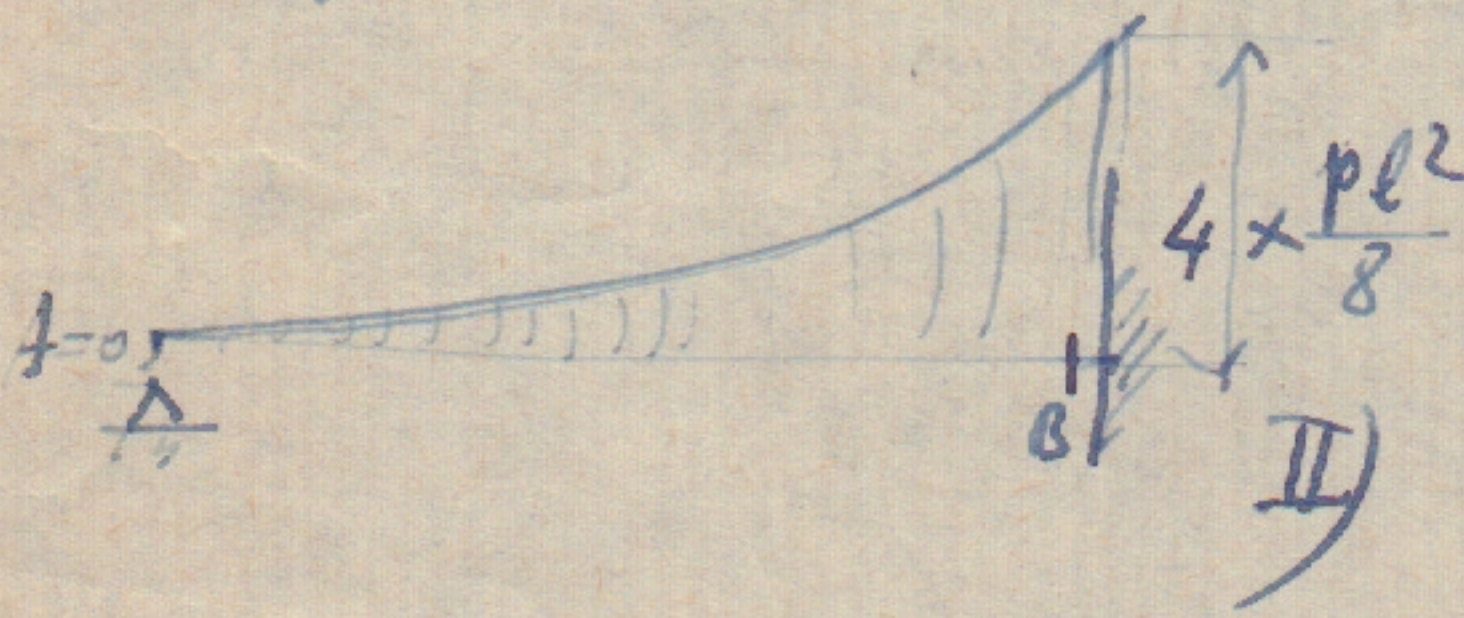
Hiperstatik sistemlerde

Adaptasyon için bir misal



I) B de gerilme
Çem erisin

Çünkü A mesnedinin $h = \frac{pl^4}{8EI}$ kadar göktüğü
kalın edeli bu taktide (A) ya otur
mayacağı $A=0$ olacaktır



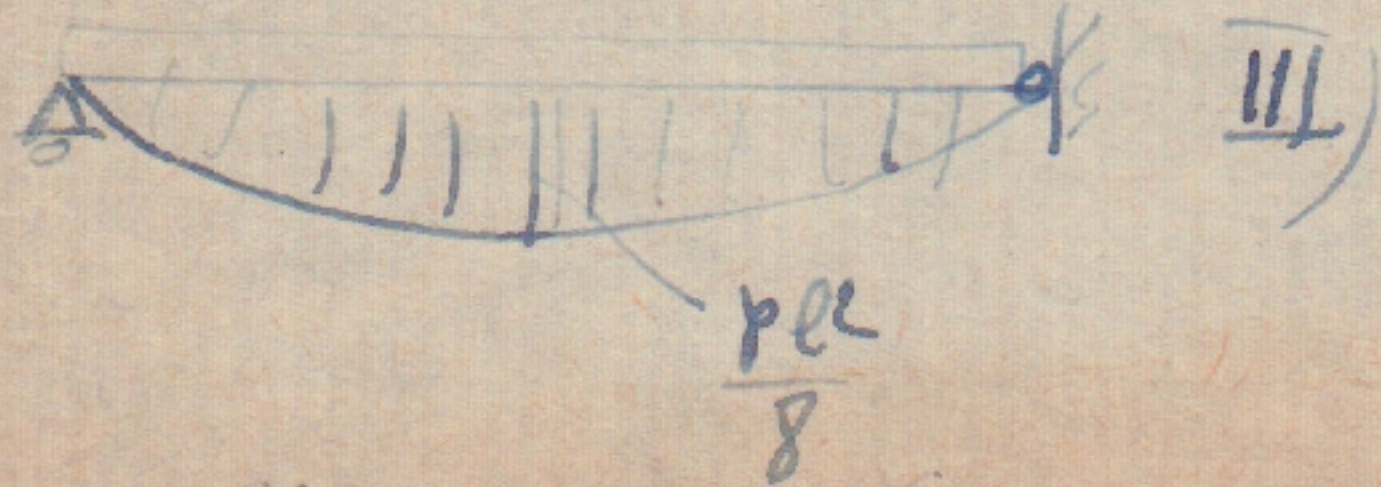
Bdeki gerilme

$$\sigma_{max} = 4 \text{ Çem}$$

olacağından atma
sınırına erişen.

B - bu mesafede olacaktır

şahide Kiriş iki ucu mesafeli bir sistem
olacaktır bu taktide tekrar A ya basacaktır.



ve yeni bir durumda en büyük moment
jine $\frac{pl^2}{8}$ kadar olacaktır bu durumda pl.
sistemlerde bir kere daha fazla yapılabilir

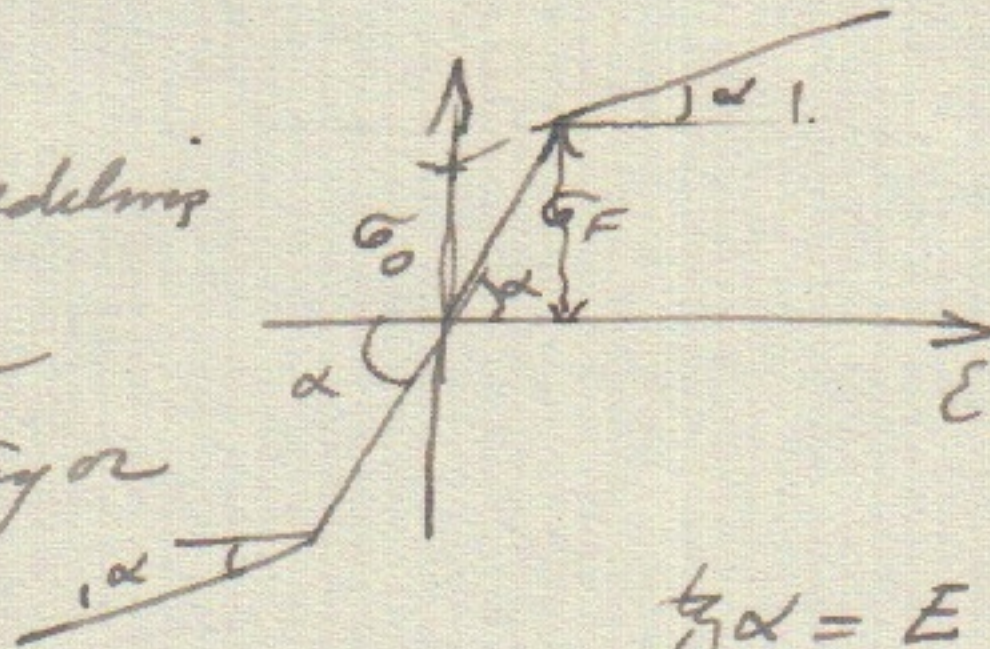
Perklesmeçi haiz Malzemede El-plastik

Sh

5.12.1949

Eğilme

Esaslar : Malzeme Idealize edilmiş
sekme ve Basıngta
aynı özeliği gösteriyor



$$E = E$$

$$E_1 = E,$$

malzeme için verilen değerler

$$\sigma_F, \nu, E$$

$$\textcircled{1} \frac{E}{E_1} = \frac{1}{\nu}$$

$$\sigma_0 = (1-\nu)\sigma_F \textcircled{2}$$

Çözüm : Kuvvetler şiddeti aynı zamanda kesidin
simetri eksenini. Çözüm doğru eksenli
(Barada burusu olarak dikdörtgen
kesit etüd edilecektir).

Hipotezler : — Dik kesitlerin düzlem olarak
değiştirilmesi (Bernoulli-Navier).
— yer değiştirme, şekil değiştirmelerin
küçük olması.

I inci Safha : bütün kesit el. şekil değiştirmeye
maruz. $M < M_F$

II inci Safha : Şekil değiştirmelerin bir kısmı
el. diğerleri plastik
 $M > M_F$

M_F momenti keşidin kenarını almaya
götüren Eğilme mo.

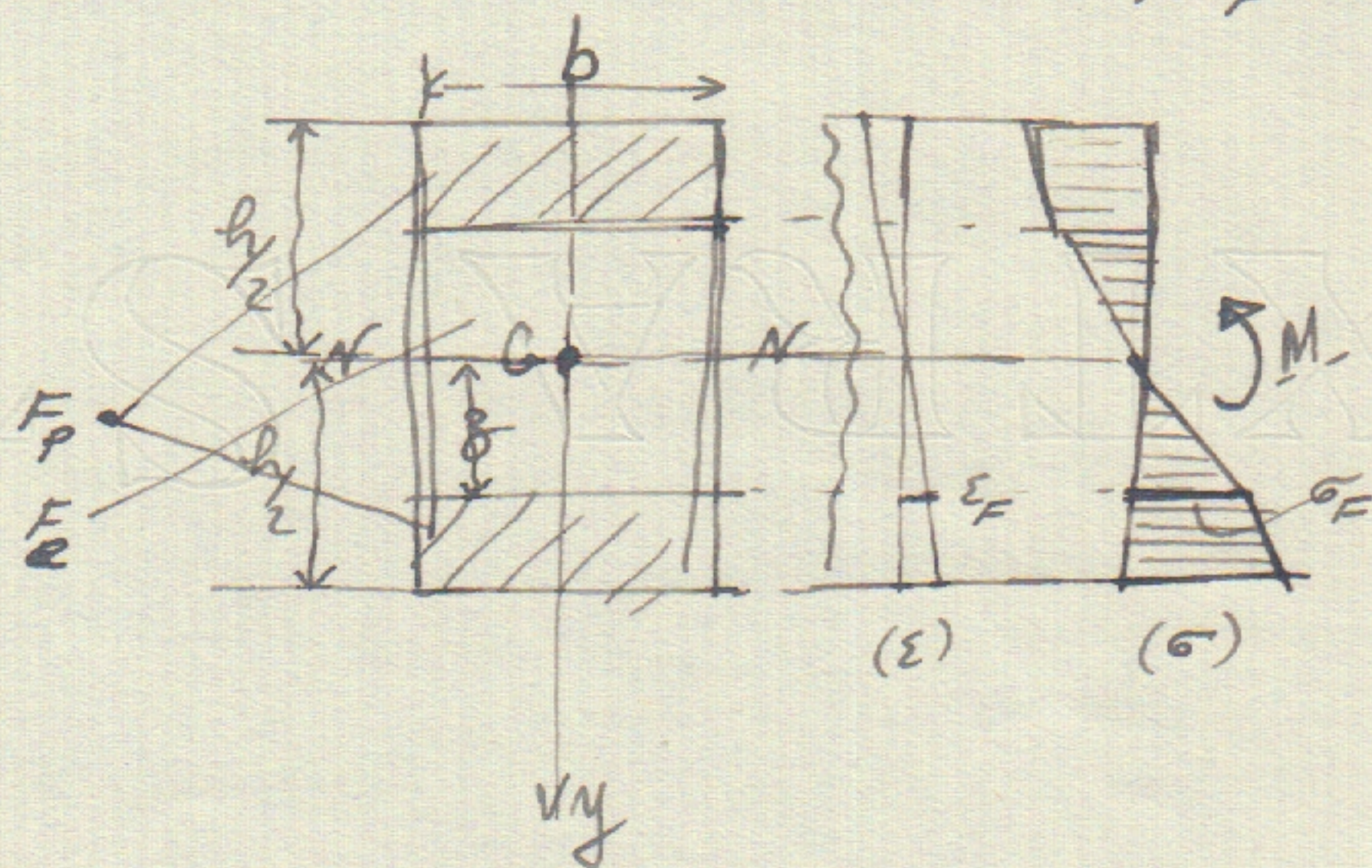
(2)

$$M_F = \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{6} \quad (3)$$

Birinci safha El. olduğun için ayrıca etüde ihtiyas
yoktur yan.

$$M < M_F \quad \left[\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \right] \quad (4) \quad \left[\sigma = \frac{M}{J} \cdot y \right] \quad (5)$$

hâzır. ikinci safhayı ele alalım: $M > M_F$ olan.



Bernoulli - Navier hipotezinden

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} \quad (6)$$

yazılır. (ϵ, σ) diyagramından ise:

$$z > y > -z \quad \text{işin:} \quad \sigma = \frac{E y}{\rho}$$

$$y > z \quad \text{işin}$$

$$y < -z \quad \text{işin}$$

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{E y}{\rho}$$

$$\sigma = -\sigma_0 + \frac{E y}{\rho}$$

$$\sigma_F = \frac{E z}{\rho} \quad (7')$$

(7)

gerilme ifadesini elde edelim.

(3)

Denge denklemleri:

$$F = F_c + F_p$$

$$\int_F \sigma \cdot dF = 0 \quad \text{---} \quad (8)$$

$$\int_F \sigma \cdot y dF = \underline{M} \quad (9)$$

düz dörtgen kesit için (8) denklemini N-N eksenine (6)

den geçeceğimiz gösterelim. (9) ise (8) rayları yapılmış:

$$dF = b \cdot dy$$

$$b \int_{-z}^{+z} \frac{E y^2}{f} dy + b \int_z^{+h/2} \left(\sigma_0 + \frac{E_1 y}{f} \right) y dy + b \int_{-h/2}^{-z} \left(-\sigma_0 + \frac{E_1 y}{f} \right) y dy = \underline{M}$$

Şekline göre entegre edilirse:

$$\frac{E}{f} \cdot \frac{2}{3} b z^3 + b \cdot \sigma_0 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) + \frac{E_1}{f} \cdot \frac{b}{3} \left(\frac{h^3}{8} - z^3 \right) + b \sigma_0 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) + \frac{b}{3} \cdot \frac{E_1}{f} \left(\frac{h^3}{8} - z^3 \right) = \underline{M}$$

veya:

$$\frac{E}{f} \cdot \frac{2}{3} b z^3 + \frac{E_1}{f} \left[\frac{b h^3}{12} - \frac{2}{3} b z^3 \right] + \sigma_0 \cdot b \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) = \underline{M} \quad (10)$$

Şimdi (2) den (7) den.

$$\sigma_0 = (1-\eta) \sigma_F = (1-\eta) \frac{E z}{f}$$

olarak yukarıda yerine koyalım.

Şu elbadeş büyüklükleri sakalım.

(4)

$$\eta = \frac{z}{h_2} = \frac{2z}{h}$$

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

ise (10) dan

$$\frac{1}{f} = \frac{M}{EJ} \left[\frac{2}{3\eta - \eta^3 + \eta(2 + \eta^3 - 3\eta)} \right] \quad \dots \quad (11)$$

elde olur.

$$\frac{2}{3\eta - \eta^3 + \eta(2 + \eta^3 - 3\eta)} = \psi \quad \dots \quad (12)$$

gösterelim.

$$\frac{1}{f} = \frac{M \cdot \psi}{EJ}$$

$$M \psi = M_{red} \quad \dots \quad (13)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{M_{red}}{EJ} \quad \dots \quad (14)$$

Burada ψ orca faktoru $\psi(\eta)$ bir fonksiyon olup η ise M e bağlıdır.

η hesaplı: (14) verilmiş $\rightarrow \eta$?

$\frac{1}{f}$ değeri bir taraftan (11) denkleminin hesaplandığı gibi diğer taraftan ise (14) den elde olur.

(11) den

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \left[\frac{2}{34 - \eta^3 + \eta(2 + \eta^3 - 34)} \right]$$

(7) $\sigma_F = \frac{E \cdot \delta}{\rho}$ veya $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_F}{E \delta} = \frac{\sigma_F}{E \cdot \eta \cdot \frac{h}{2}} = \frac{2 \sigma_F}{E h \eta}$

Eşit kılınırsa:

$$\frac{M}{EJ} \left[\frac{2}{34 - \eta^3 + \eta(2 + \eta^3 - 34)} \right] = \frac{2 \sigma_F}{E h \eta}$$

veya $\frac{b h^2}{6} \cdot \sigma_F = M_F$ olarak yazılırsa:

$$\boxed{\frac{M}{M_F} = \frac{34 - \eta^3 + \eta(2 + \eta^3 - 34)}{24}} \quad \text{--- (15)}$$

Bu formül belirli $\frac{M}{M_F} > 1$ oranı için muayyen bir η değeri var ki bunda kesitte plastik münakaşî tahdit eder: (15)den

$\frac{M}{M_F} = 1 \rightarrow$ için $\eta = 1$ edeceğine dikkat edilmeli.

$$\frac{M}{M_F} = \mu \quad \text{--- (16)}$$

Yazılırsa

$$\mu > 1$$

$$\mu < 1$$

II inci safha

I inci safha

İmdi verilen $\frac{M}{M_F} = \mu$ işi errda

(6)

(15) den lin (4) hesaplanacak. Soma

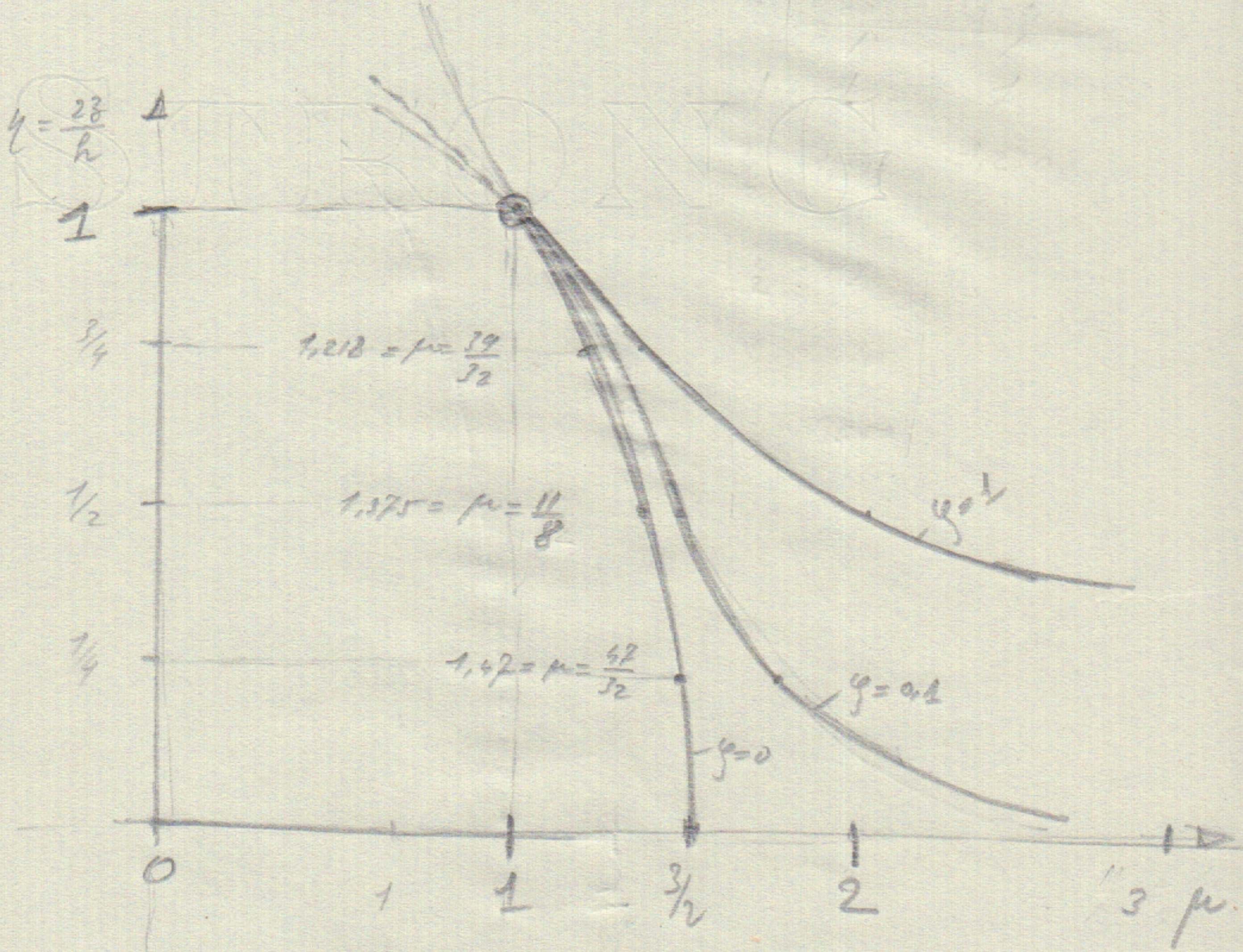
(12) den bu η işi ψ elde olunacak

bu suretle (13) den (M_{red}) elde edilecektir

bu hesapları aşağıdaki grafiklerle

basitleştiren kalıbdır.

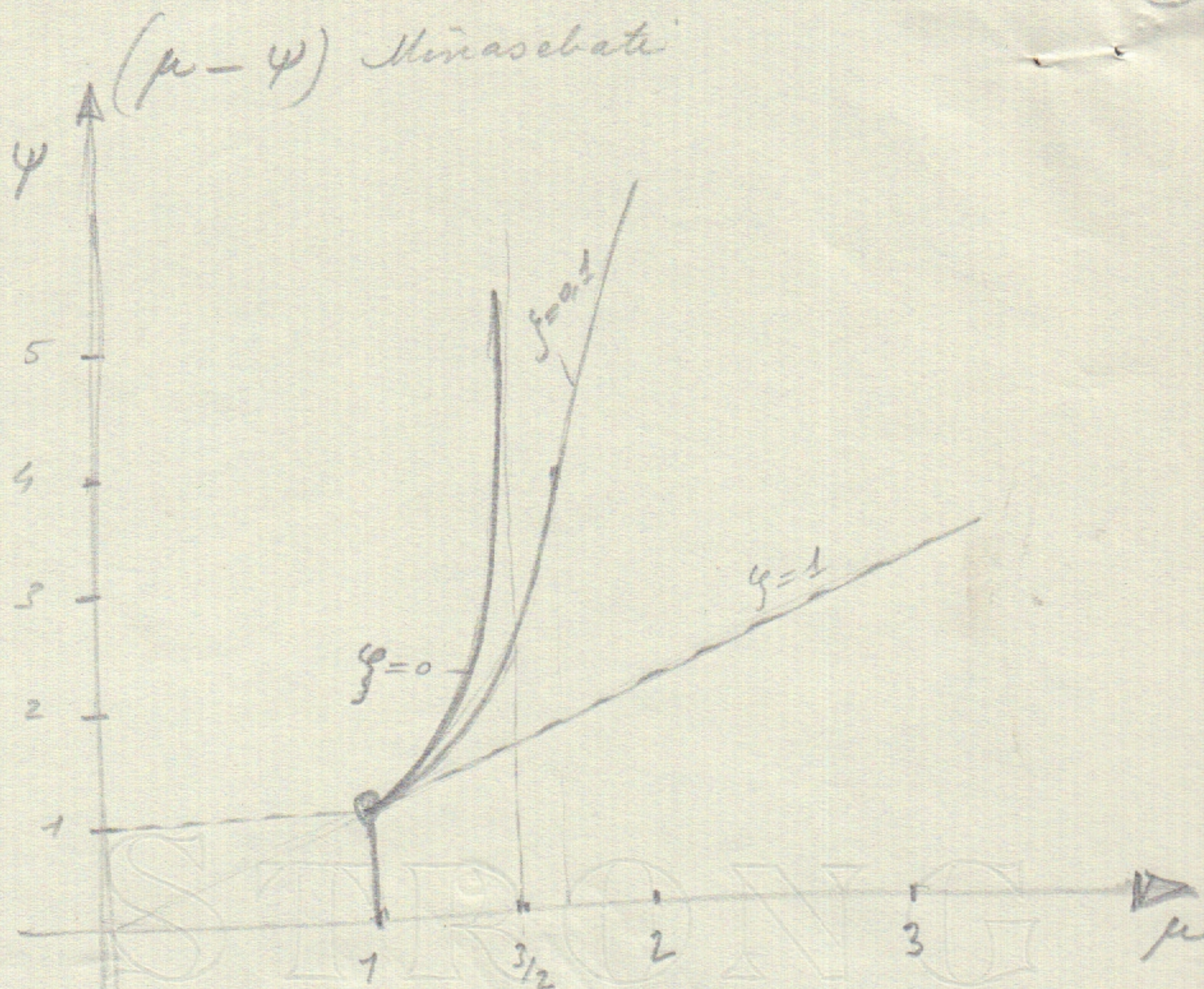
($\mu - \eta$)
Mönascheti



← Elastisite → Elastoplastik

$\eta = 0$	(4)	1	3/4	1/2	1/4	0
μ		1	1,218	1,375	1,470	1,500
$\eta = 0,1$		1	1,230	1,438	1,722	∞

⑦



$\psi = 0$

μ	ψ
1	1
1,218	1,333
1,375	2
1,470	4
1,50	∞

$\psi = 0,1$

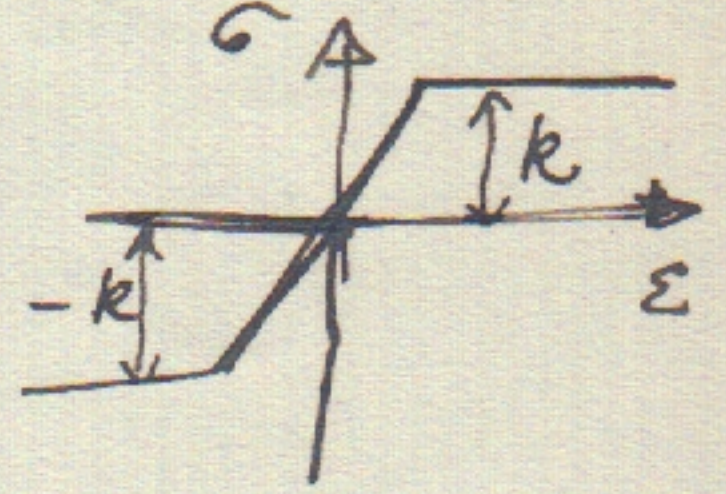
μ	ψ
1	1
1,230	1,333
1,438	2
1,722	4
∞	∞

Kalın halkada plastik Denge.

Şah

6.12.1949

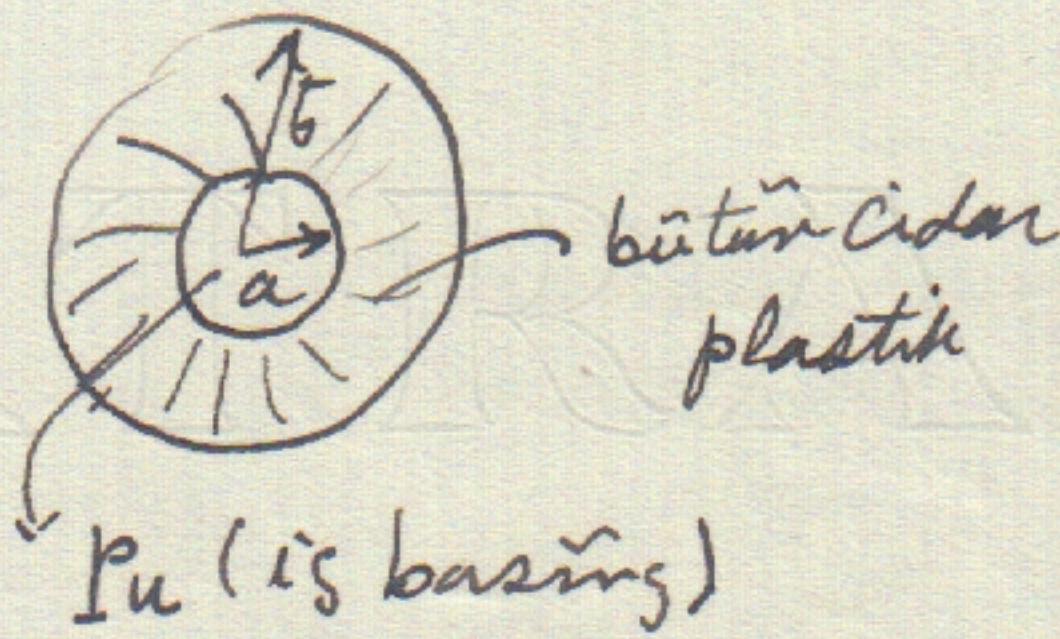
Malzeme — Ideal plastik, $\sigma_k = 0$



Plastisite hipotezi = $(\sigma)_{\max}$

$$= \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = k^2 \right]$$

Cisim:



gerilmeler: σ_r, σ_θ

Denge denklemi: $\sigma_\theta - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0$ (1)

Plas. Şartı: $\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta = k^2$ (2)

Sınır şartı: $r = b$ için $\sigma_r = 0$ (3)

(1,2) takımının çözülmesi:

(1) den σ_θ çözülür:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (1')$$

(2) de yerine konursa:

$$\left(\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \right)^2 + \sigma_r^2 - \sigma_r \left(\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = k^2$$

$$\boxed{\sigma_2^2 + r \cdot \sigma_2 \cdot \frac{d\sigma_2}{dr} + r^2 \left(\frac{d\sigma_2}{dr} \right)^2 = k^2} \quad \text{--- (2)}$$

diff denklemi elde olunur. bu denklemden:

$\frac{d\sigma_2}{dr}$ söğülürse:

$$\frac{d\sigma_2}{dr} = \frac{-\sigma_2 \cdot r \pm \sqrt{r^2 \sigma_2^2 - 4r^2(k^2 + \sigma_2^2)}}{2r^2}$$

nya

$$\boxed{\frac{d\sigma_2}{dr} = \frac{-\sigma_2 \pm \sqrt{4k^2 - 3\sigma_2^2}}{2r}} \quad \text{--- (4)'}$$

Şekline girer. Sınır şartına göre ve problemnin fizik şartlarına göre (+) işaretlisi alınır.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_2}{dr} = \frac{-\sigma_2 + \sqrt{4k^2 - 3\sigma_2^2}}{2r} \\ r = b \quad \dots \quad \sigma_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (4'')$$

İrca edilmeli. Müteharviller tefrika edilse:

$$\frac{d\sigma_2}{-\sigma_2 + \sqrt{4k^2 - 3\sigma_2^2}} = \frac{1}{2} \frac{dr}{r}$$

sol taraf konjüge ile çarpılarak:

$$\frac{(\sigma_2 + \sqrt{4k^2 - 3\sigma_2^2})}{k^2 - 3\sigma_2^2 - \sigma_2^2} d\sigma_2 = \frac{1}{2} \frac{dr}{r}$$

veya integre edilse

$$\int \frac{\sqrt{4k^2 - 3\sigma_2^2}}{k^2 - \sigma_2^2} d\sigma_2 + \int \frac{\sigma_2 \cdot d\sigma_2}{k^2 - \sigma_2^2} = 2 \int \frac{dr}{r} + C$$

C sabiti $r=b$ için $\sigma_2=0$ şartından elde edilecektir.

El'adş büyükler sokalım.

$$\frac{\sigma_2}{k} = s_r \quad \frac{\sigma_\theta}{k} = s_\theta \quad r/a = \rho \quad b/a = \beta$$

Vayedelim:

Bu halde denklemler:

$$\int \frac{\sqrt{4 - 3s_r^2}}{1 - s_r^2} ds_r + \int \frac{s_r \cdot ds_r}{1 - s_r^2} = 2 \int \frac{d\rho}{\rho} + C$$

şunu şart $\rho = \beta \quad s_r = 0$

şekline girer

İinci integral için trigonometrik bir transform. yapılmış
integre edilebilir. $\sqrt{a^2 - y^2} \rightarrow y = a \sin p$

(4)

I inci integral:

$$\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 + \frac{1}{2} \log \left| \frac{s_2 + \sqrt{4 - 3s_2^2}}{s_2 - \sqrt{4 - 3s_2^2}} \right| = \int \frac{\sqrt{4 - 3s_2^2}}{1 - s_2^2} ds_2$$

II inci integral:

$$-\frac{1}{2} \log(1 - s_2^2) = \int \frac{s_2 \cdot ds_2}{1 - s_2^2}$$

III inci integral:

$$2 \log p = 2 \int \frac{dp}{p}$$

şöhalde ifade. $p = \beta$ $s_2 = 0$ C tayıncıdır.

$$2\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 + \log \left| \frac{s_2 + \sqrt{4 - 3s_2^2}}{s_2 - \sqrt{4 - 3s_2^2}} \right| - \log(1 - s_2^2) = 4 \log \frac{p}{\beta}$$

Veya kısaltarak: $(s_2 - \sqrt{4 - 3s_2^2} < 0)$
aldığından

(-) işaretiyle
negatif olduğu için

↓
genel söz

$$e^{\sqrt{3} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2} \cdot \frac{\sqrt{4 - 3s_2^2} + s_2}{1 - s_2^2} = 2 \left(\frac{p}{\beta} \right)^2 \quad (5)$$

veya daha kısaltılarak.

(5)

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2$$

C

$$\sqrt{\frac{\sqrt{4-3s_2^2} + s_2}{2(1-s_2^2)}} = \frac{\rho}{\beta} = \frac{r}{b}$$

$$\beta = \frac{2}{3} a$$

$$\beta = \frac{b}{a}$$

(s, s₂)

Mürascheti

(5')

(6) nin veya s₀ hesabına gelince:

Denge denklemlerinden:

$$s_0 = s_2 + r \frac{ds_2}{dr} \quad (1')$$

(4'') den faydalanarak:

$$s_0 = s_2 + r \left[\frac{-s_2 + \sqrt{4k^2 - 3s_2^2}}{2r} \right]$$

$$s_0 = \frac{s_2 + \sqrt{4k^2 - 3s_2^2}}{2} \quad (6)$$

veya el'adsıj olarak. $\frac{s_0}{k} = \rho_k$ $\frac{s_2}{k} = s_2$

$$\rho_0 = \frac{s_2 + \sqrt{4 - 3s_2^2}}{2} \quad (7)$$

(5) veya (5') den seçilen s₂ karşı bir ρ hesaplanır bu suretle gerilmenin merkezi elde olur. (6) den aynı noktadaki s₀ bulunarak gerilme durumu tamamen elde edilir.

~~Residue~~

6

s_2	s_0	S/β
0	1	β 1
-0,1		
-0,2		
-0,3		
-0,4		
-0,5		
-0,6		
-0,7		
-0,8		
-0,9		
-1,0	0	

0,4041
imaginary $\Rightarrow \frac{\beta}{e^{\frac{2\pi\sqrt{3}}{12}}} = \text{0} = \underline{\underline{0,4041\beta}}$

$s_2 = -1 \rightarrow \text{0} \quad \left| \sqrt{\frac{\sqrt{4-3s_2^2} + s_2}{2(1-s_2^2)}} \right| = \frac{0}{0} = 1$ 2,450
 $s_2 = -1$ 2,47
1

$s_2 = -1 \quad \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$
 $\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 \right| = e^{-\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}}$
 $\frac{\rho}{\beta} = 1 \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}}$ $s_2 = -1$

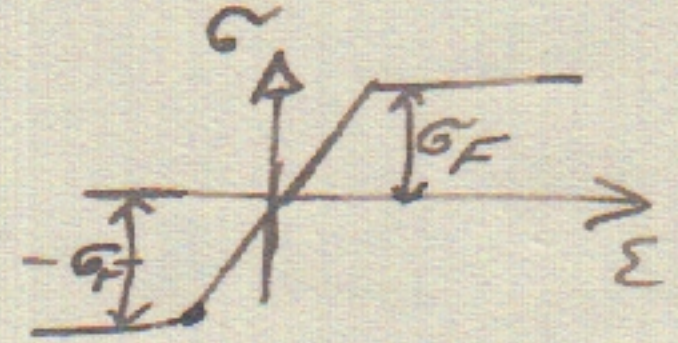
W. Smida

Ing - Arch. 17 (1949)

S. 71

Elastik - plastik durumdaki
alan kırıklarında şekil değişimine hakkında.

Esaslar. Malzeme: idealize edilmiş



- Eğilme de dış kesitlerin düzlem kalması
- Kesitler bir simetri Eksenini taşıy
ve bu Eksen Kuvvetler Şişir.
- yer değiştirmeler çok küçük
- Kesitte Form değişikliği pek az

Eğilmenin safhaları

I — bütün gerilmeler Elastik $|\sigma| \leq \sigma_F$

II — iki cins gerilmeler var.

bu ikinci safha da iki kısma ayrılabilir } plastik durum
biri taraflı
pl. durum iki
taraflı.

Çinir Momentler.

$M_F \rightarrow$ $|\sigma_{\text{kenar}}| = \sigma_F$ durumuna tekabül eden Moment

$M_S \rightarrow$ bütün kesitlerin plastik olmasına tekabül
eden Çinir Moment = Kesitlerin Max taşıma

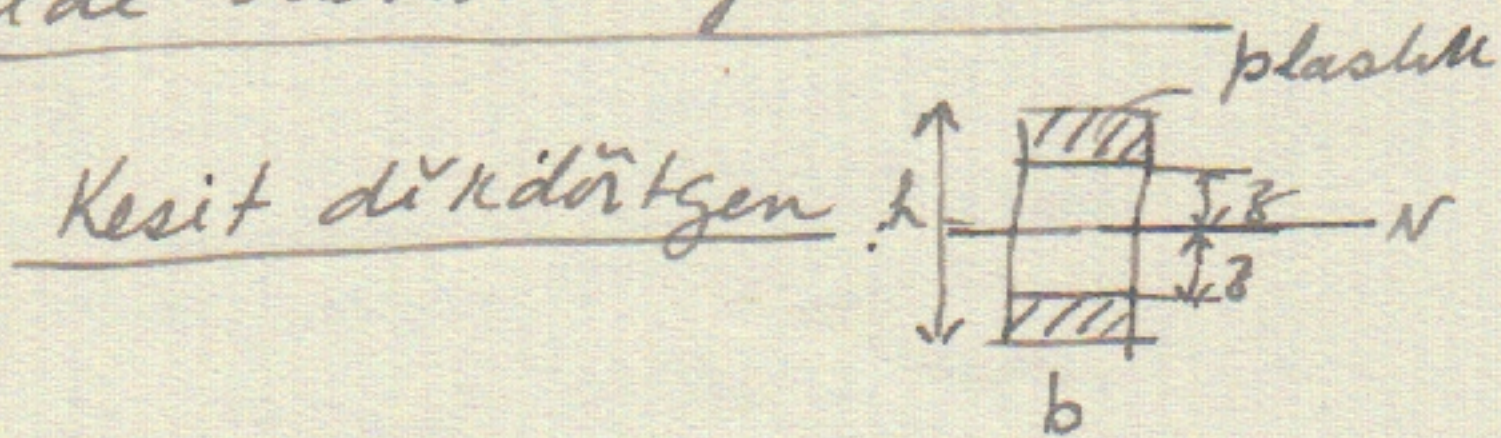
I - safha $M < M_F$

II - safha $M_F < M < M_S$

hesap Esası:

- 1) $\epsilon = \frac{y}{\rho}$ Bernoulli - Navier hipotezi
- 2) $(\sigma - \epsilon)$ diyagonalından (σ) hesabı
- 3) Denge şartları $\sum F = 0$ $\sum M = M$
- 4) Eğrilik $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \cdot \psi(\xi)$
- 5) $\xi =$ plastik - Elastik sınır tayin eden değer
- 6) Geometrik usul ile dönmelemler ve şakımlar hesabı. M yerin M_{red} Koyarak.
- 7) Mohr usulu ile fiktif kırıkta fiktif yükler usulünün tamini.

Elde olunan bazı neticeler:



Safha $M_F = \frac{1}{6} b h^2 \cdot \sigma_F$

$M_s = \frac{1}{4} b h^2 \cdot \sigma_F = \frac{3}{2} M_F$

I El. Safha: $|M| < |M_F|$

II El-pl. " : $|M_F| < |M| < |M_s|$

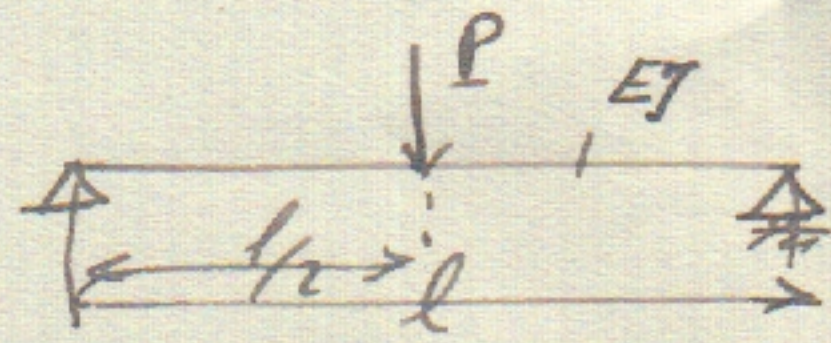
İkinci safhada $\Rightarrow \xi = \sqrt{3\left(\frac{h^2}{4} - \frac{M}{b\sigma_F}\right)}$

$\frac{1}{\rho} = \frac{M_F}{EJ \sqrt{3 - \frac{2M}{M_F}}}$

buji hususi yüklemeler:

$$M_F = \frac{P_F \cdot l}{4}$$

$P_F \rightarrow$ ortada kenar gerilmelerini
akmaya getiren yük.



$$\frac{P_F \cdot l}{4} : W = \sigma_F \rightarrow P_F = \left(\sigma_F \cdot \frac{bh^2}{6} \right) \cdot \frac{4}{l} = \frac{2}{3} \sigma_F \cdot \frac{bh^2}{l}$$

$$M_F = \frac{1}{6} bh^2 \cdot \sigma_F$$

İinci safhada: $P < P_F$

$$P < P_F$$

$$\alpha = \frac{Pl^2}{16EI}$$

$$f = \frac{Pl^3}{48EI}$$

İinci safhada:

$$P > P_F$$

$$\alpha = \frac{M_F^2}{P \cdot EI} \left(3 - 2\sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_F}} \right)$$

$$f = \frac{M_F^3}{3P^2EI} \left[20 - \left(12 + \frac{Pl}{M_F} \right) \sqrt{3 - \frac{Pl}{2M_F}} \right]$$

$$\frac{0/P_F}{1/P_F} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$\varphi = \frac{1}{4} \left[20 - (12 + 4\varphi) \sqrt{3 - 2\varphi} \right]$$

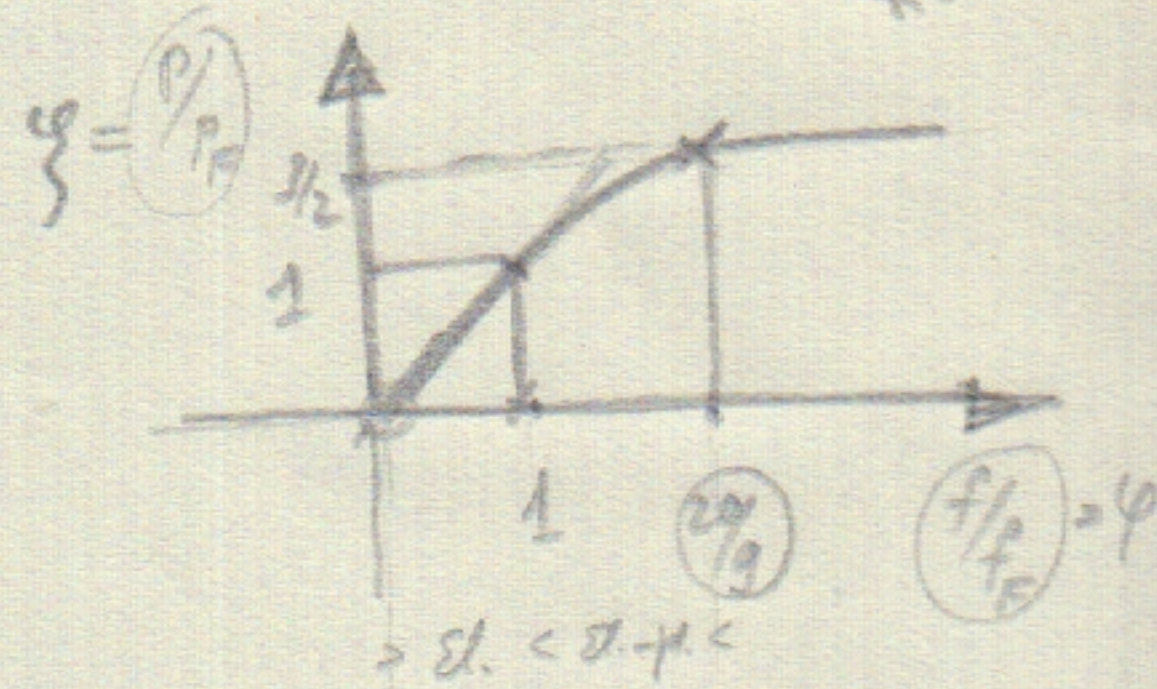
$$1 \leq \varphi \leq 3/2$$

Limit durumunda

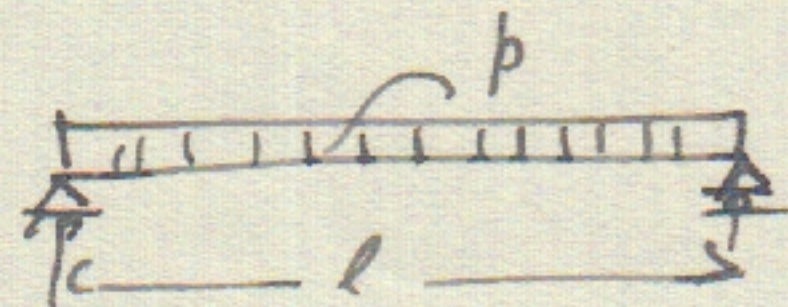
$$P = P_S$$

$$\alpha = \frac{P_F \cdot l^2}{8EI}$$

$$f = \frac{5P_F l^3}{108EI}$$



üniform yük hali.



$p_F \rightarrow$ ilk akma yükü şiddeti

$p_S \rightarrow$ limit yük "

$$\frac{p_F \cdot l^2}{8} = M_F = \frac{1}{6} bh^2 \cdot \sigma_F \rightarrow p_F$$

$$\frac{p_S \cdot l^2}{8} = M_S = \frac{1}{6} bh^2 \cdot \sigma_F \rightarrow p_S$$

I → Safha (El.)

$$\alpha = \frac{pl^3}{24EJ}$$

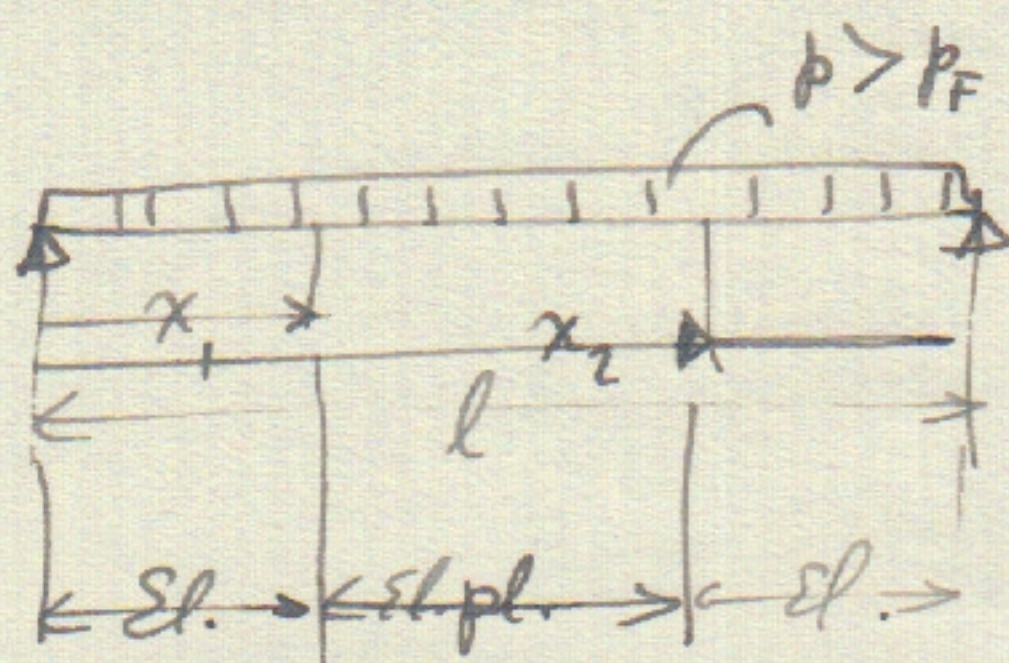
$$p < p_F$$

$$f = \frac{5pl^4}{384EJ}$$

II inci Safha (El.-pl.)

$$p > p_F$$

Errrelə Elre plastik kismın lıñ ayırıl.



$$x_1, x_2 = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2M_F}{p}}$$

$$\alpha = \frac{1}{EJ} \left[\frac{px_1^2}{12} (3l - 2x_1) + M_F \sqrt{\frac{M_F}{p}} \log \frac{\sqrt{3 - \frac{pl^2}{4M_F}}}{1 - \sqrt{\frac{pl^2}{4M_F} - 2}} \right]$$

$$f = \frac{1}{EJ} \left[\frac{px_1^3}{24} (4l - 3x_1) + M_F \sqrt{\frac{M_F}{p}} \left\{ \sqrt{\frac{M_F}{p}} \left(\sqrt{3 - \frac{pl^2}{4M_F}} - 1 \right) + \frac{l}{2} \log \frac{\sqrt{3 - \frac{pl^2}{4M_F}}}{1 - \sqrt{\frac{pl^2}{4M_F} - 2}} \right\} \right]$$

$$\alpha_s = \infty$$

$$f_s = \infty$$

plastik Mın takayı teslit işi

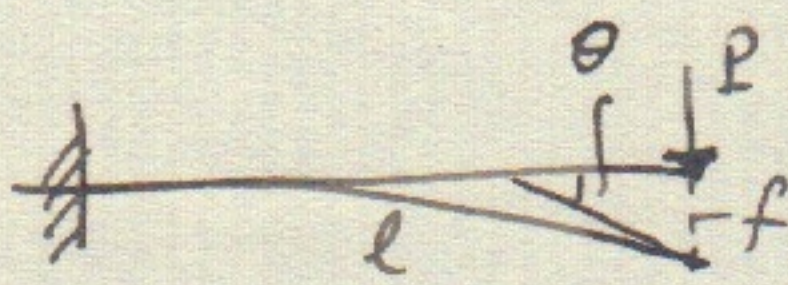
bu taraftan $M(\xi)$ münaseli digər taraftan $M(x)$ münaseli tesis edir $M(\xi) = M(x)$ yazılaraq $\xi(x)$ elde olun. dükdörtgen.

$$M(\xi) = \sigma_F \cdot b \left[\frac{h^2}{4} - \frac{\xi^2}{3} \right]$$

$M(x)$ ise yükləmə tarza bağlıdır.

diğer haller:

$$p/p_F = \varphi, \quad f/f_F = \varphi, \quad \theta/\theta_F = \alpha \quad (5)$$



$$\varphi \leq 1 \quad \text{el.}$$

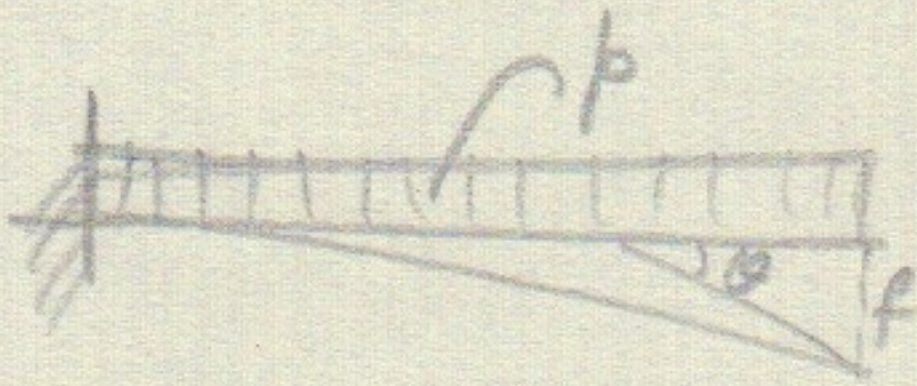
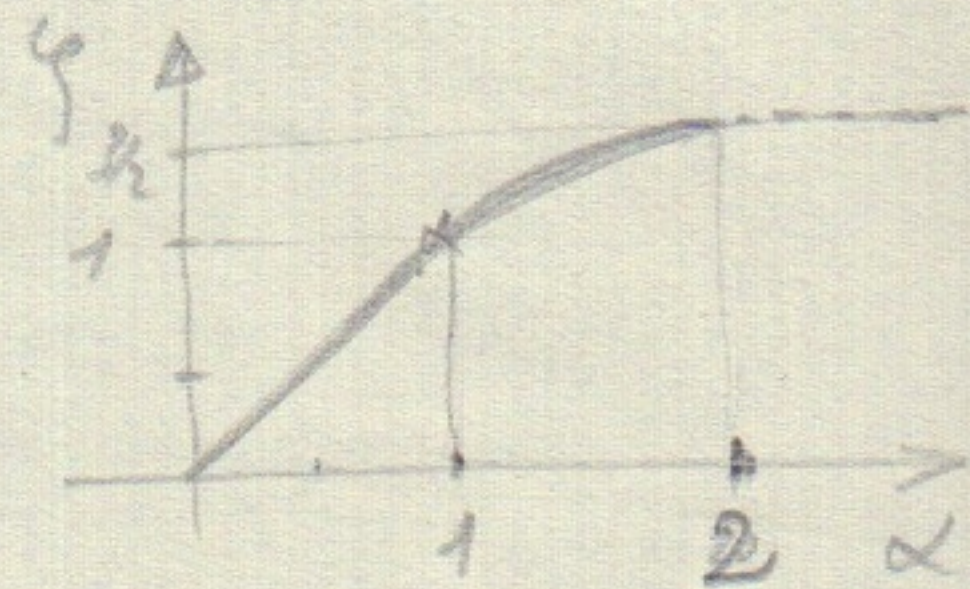
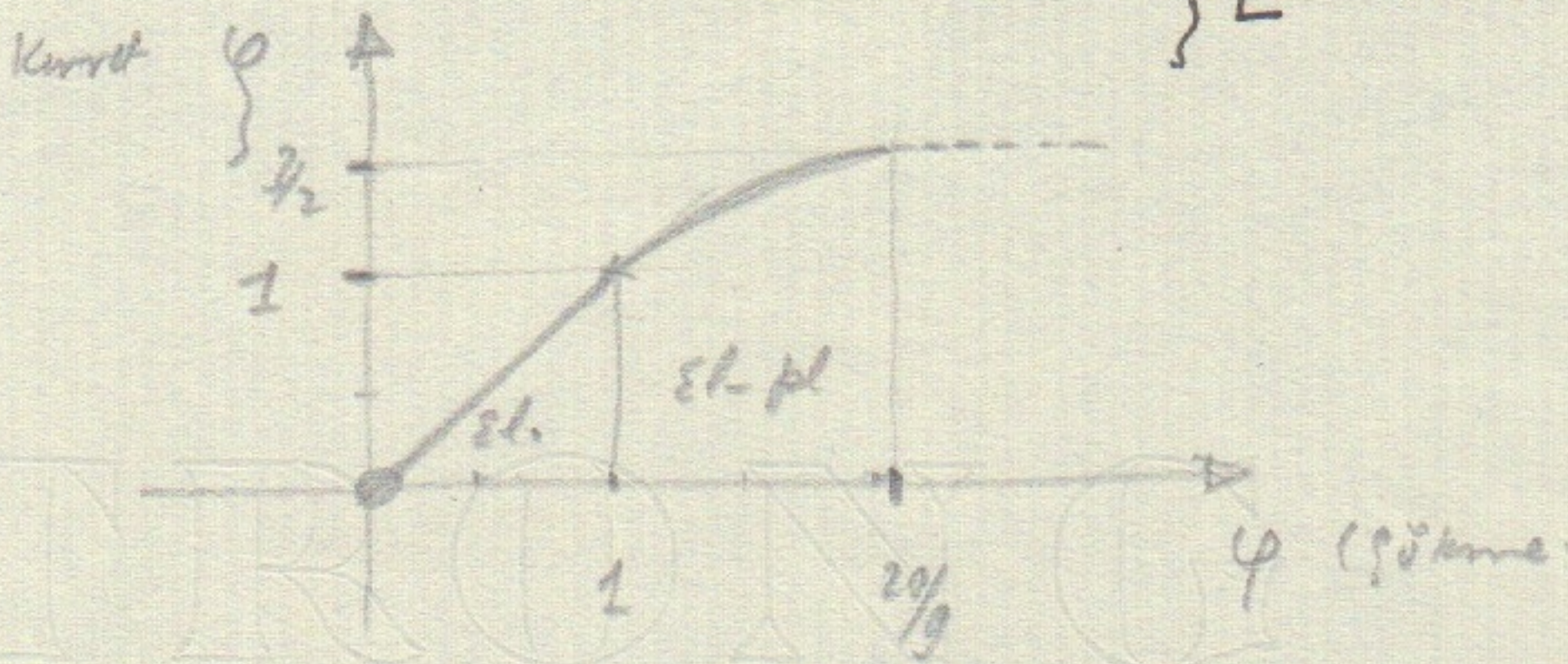
$$\boxed{\varphi = \varphi}$$

$$\boxed{\alpha = \varphi}$$

$$\frac{1}{2} \geq \varphi \geq 1 \quad \text{el-pl.}$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi^2} \left[5 - (3 + \varphi) \sqrt{3 - 2\varphi} \right] \quad \text{çökmeler}$$

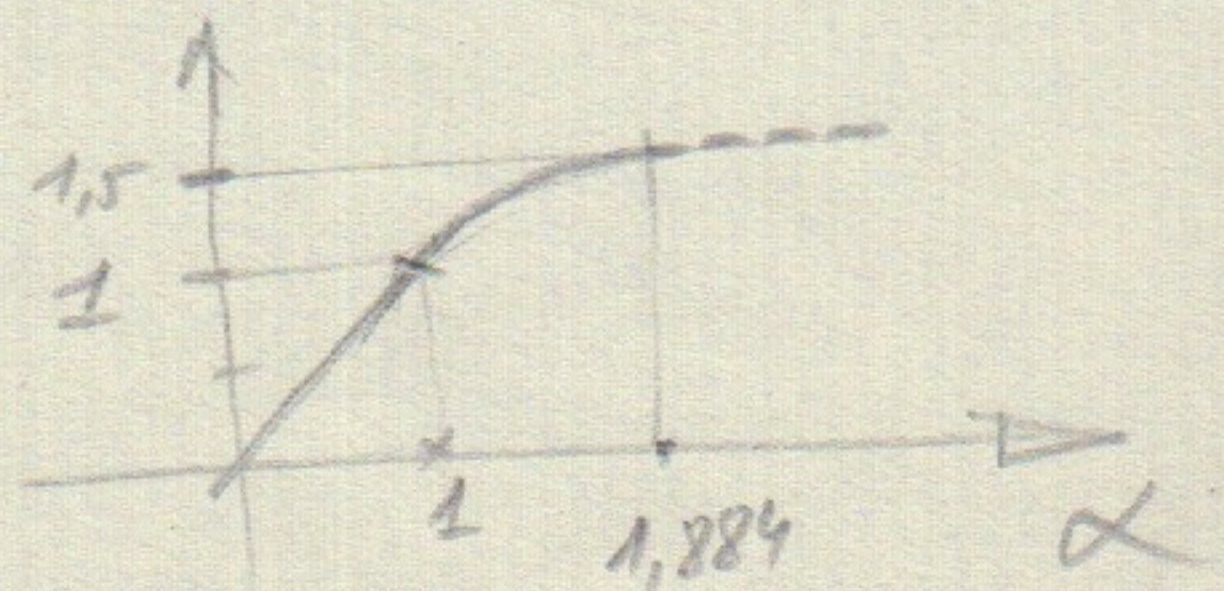
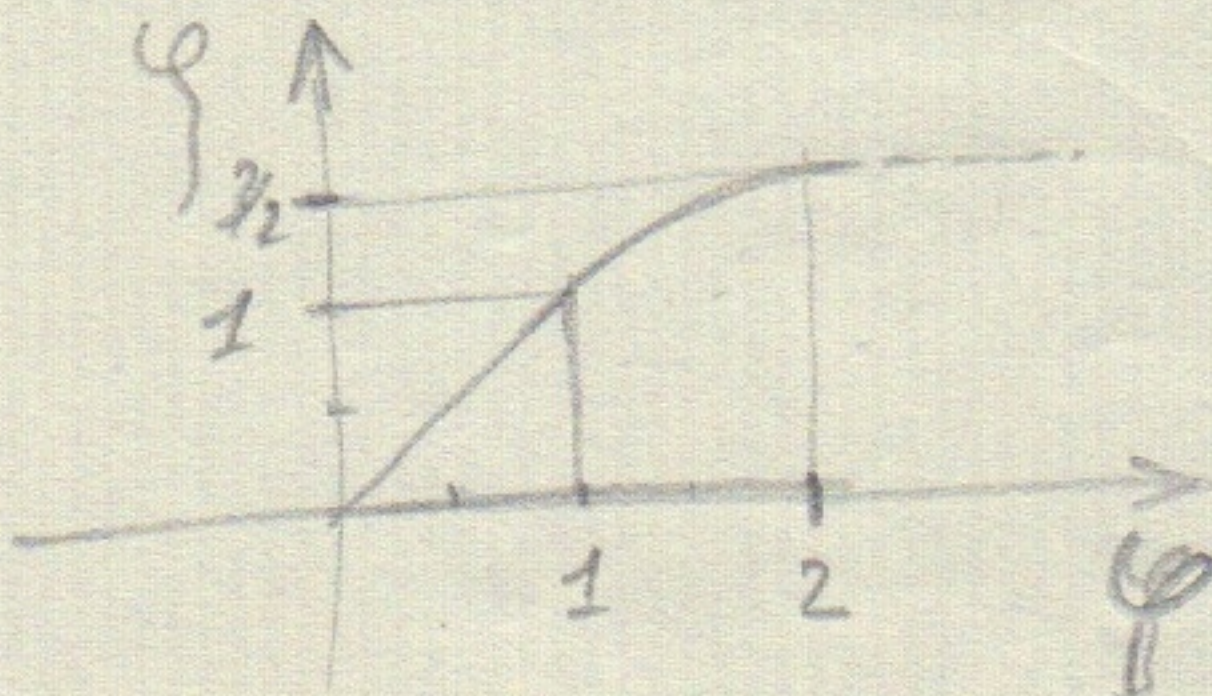
$$\alpha = \frac{1}{\varphi} \left[3 - 2 \sqrt{3 - 2\varphi} \right] \quad \text{açılar}$$



$$p/p_F = \varphi, \quad f/f_F = \varphi, \quad \theta/\theta_F = \alpha$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi} \left[3 - 2 \sqrt{3 - 2\varphi} \right]$$

$$\alpha = 3 \sqrt{\frac{1}{2\varphi}} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} + \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}\varphi} - \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \right]$$



İkinci navi Stabilitete Meselerleri

R. Grammel

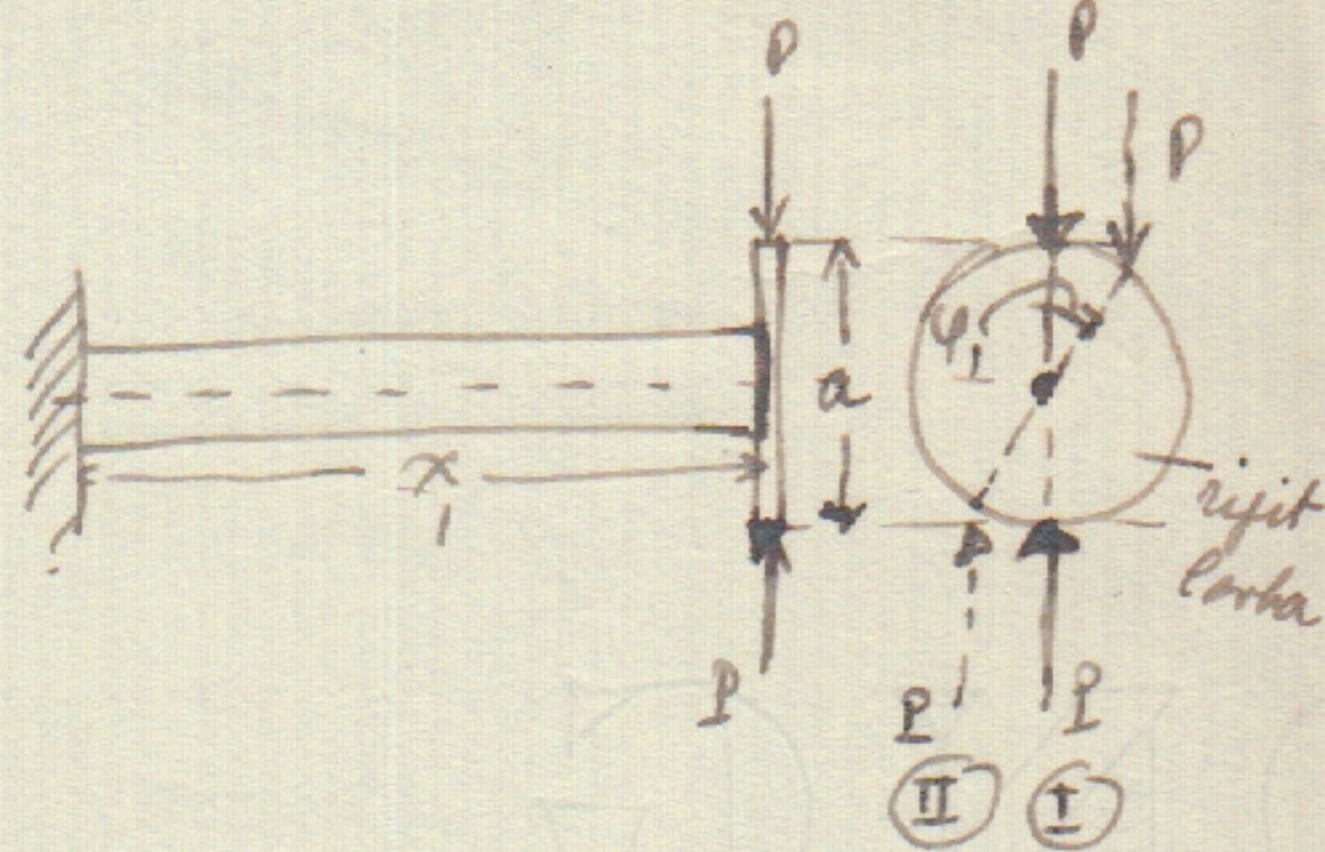
Ing - Arch. 17

1949 S. 107

Makasla Stabilitesi

— Bu geşit problemlerde diğler farklı olarak yalnı basit gerilme ve mukavemet hallerine tesadüf edilir.

— Bir milde Burulma Makaslanması



(I) durumu yarı $\phi_1 = 0$ bir denge durumudur.

(II) durumunda mümkün olursa:

(I) Kararsız olur. Şimdi (II) nın mümkün olduğun halleri arayalım. Gülüğü Burulma rijitliği (α) olsun. ϕ_1 sapmasına tekaliit eden iş ve diğ momentler Denge leşdüntür:

$$\alpha \cdot \frac{\phi_1}{x_1} = a \cdot P \cdot \sin \phi_1 \quad \text{--- (1)}$$

bu denkleme $\phi_1 = 0$ sağları bundan başka eğer

$$P = \frac{\alpha}{a \cdot x_1} \cdot \frac{\phi_1}{\sin \phi_1} \quad \text{--- (2)}$$

Partim sağlayan kuvvet işi (II) durumunda mümkün olur. böyle (P) ler en küçüğü.

$$P_{\min} = P_s = \frac{\alpha}{a \cdot x_1} \quad \text{--- (3)}$$

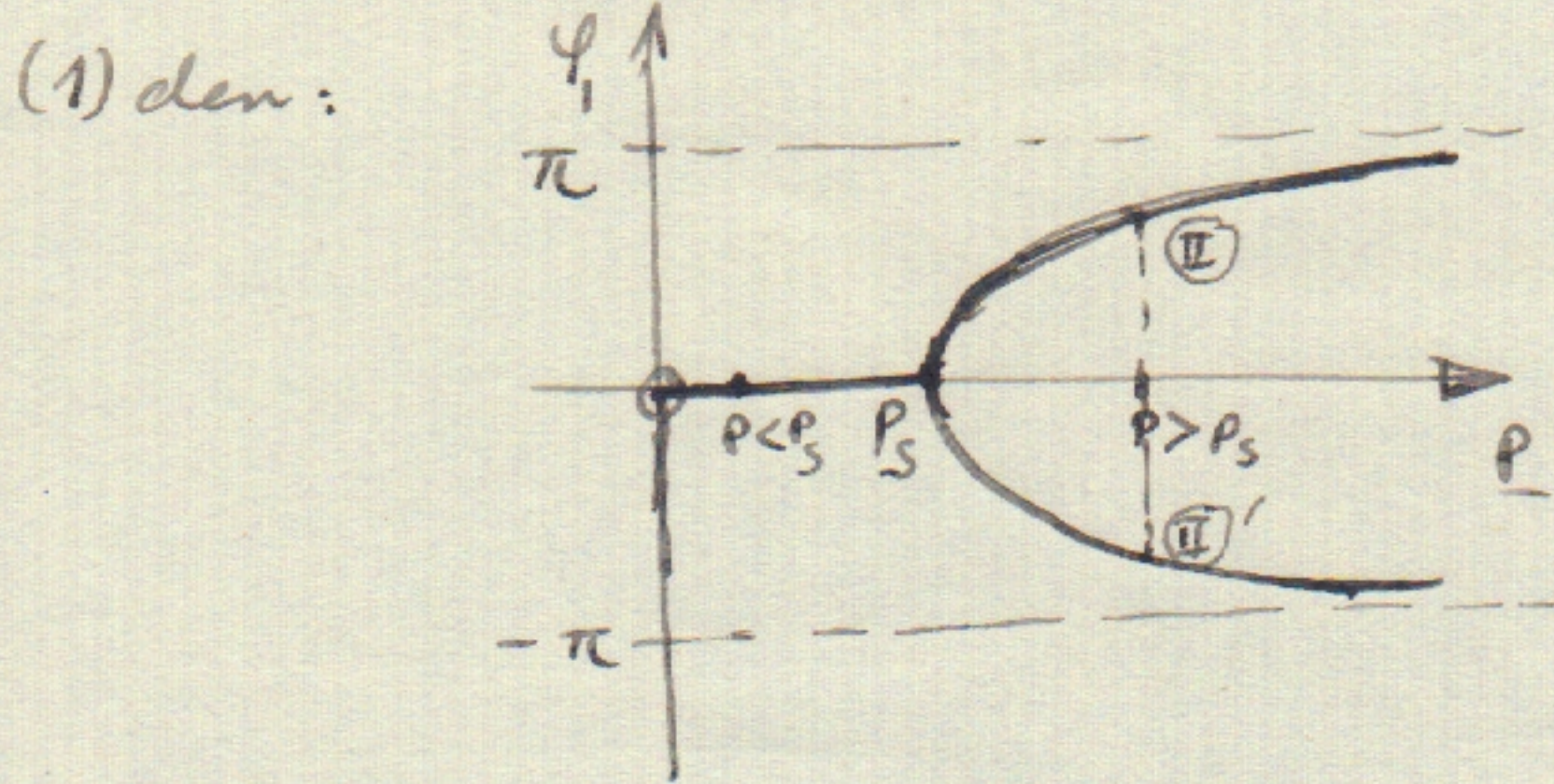
P_s Makaslama kuvveti denir. Eğer her hangi

bu halde: $P < P_S \rightarrow$ yalnız (I) mümkün
I Kararlı (2)

$P > P_S \rightarrow$ (I) ve (II) mümkün.
(I) de Kararsız.

$P = P_S \rightarrow$ verzweigungstiller.

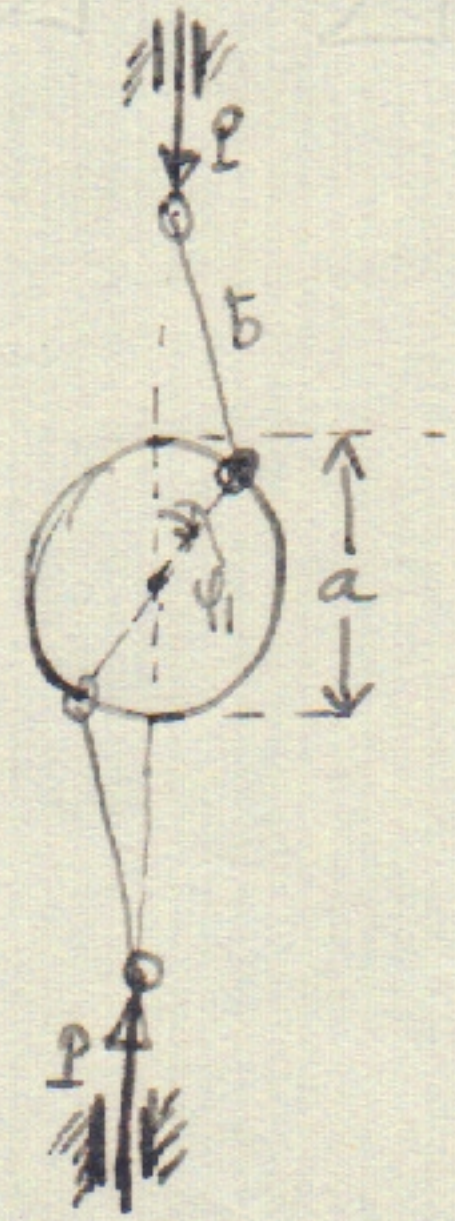
(I) ile (II) arasındaki (II) durumların grafik ifadesi.



Hesaplanan ağılarda Gelinçin Hooke kanununa uyduğu
kalmış ediliyor. aynı torsion makas denemeleri
bu tertibatata Rastlamak kalmış

bu halde:

$$P_S = \frac{\alpha}{\chi \cdot a [1 + \alpha \frac{a}{2b}]} \quad (4)$$



Iinci ve IIinci Eigenwert
Meseleleri hakkında:

Iinci neri

$$L(y) = \lambda M(y) \quad (5)$$

burada (L) ve (M) lineer homogen çift mertebeli diff.
operator.

IIinci neri: $L(y) = F(\lambda, x, y, y', y'', \dots) \quad (6)$

Burada **L** tek ve çift diff operatör.

(3)

F ise (y) yi ihtiva etmeyen bir fonksiyondur.

$y_1 = y(x_1)$ $y_1' = y'(x_1)$... gibi ~~son~~ değerlerin (x_1) deki

(6) nin çözümünü şu ise:

$$y = Q(\lambda, x, y, y', \dots) \quad \text{--- (7)}$$

(y) Eğer y ve y' ... gibi değerlerin lineer homogen bir fonksiyonu ise λ inin her bir ~~stabilitesi~~ ^{Eigenwert mescleri} bahis mevzu olur. (7) ifadesi $y, y', y'', \dots$ e göre lineer olmayıp yalnız $y, y' = \dots = 0$ de $y=0$ olursa bir verzwaigungsproblem meselesi bahis konusu olur.

farzedelim ki Q şöyle olsun (lineer homogen von $y, y', \dots, y''$)

$$Q \equiv \lambda [y, P_0(x) + y', P_1(x) + \dots]$$

$$y_1 = \lambda [y, P_0(x_1) + y', P_1(x_1) + \dots]$$

$$y_1' = \lambda [y, P_0'(x_1) + y', P_1'(x_1) + \dots]$$

buna göre (λ) değeri şu determinanttan elde edilecektir:

$$\begin{vmatrix} \lambda P_0(x_1) - 1 & \lambda P_1(x_1) & \dots \\ \lambda P_0'(x_1) & \lambda P_1'(x_1) - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

yalnız bu denklem mahdut sayıda λ değerini verecektir. halbuki bu cihet birinci sınıf

mühim ayrılığa yapar. İleri sınıfta Eigenwert (4) sayısı sonsuzdur.

gelelim Q ifadesi $(y, y', \dots)$ lineer göre lineer olmasın fakat bunlarla beraber sıfır olsun. bu takdirde $(y', \dots)$ değerlerini (7) ile ve

$$y'_i = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_i} \right)_{x=x_i}$$

- - - - -

denklerini arasında yok ederek:

$$y = K(\lambda, x, y_i) \dots \dots (8)$$

elde olunan ki $K \equiv 0$ für $y_i = 0$.

şöhalde:

λ nin her değeri için $y_i = K(\lambda, x, y_i) \dots \dots (9)$

elde olunan (9) ifadesi $y_i = 0$ için sağlanacak. bu trivial haldir. fakat (8) uygun seçilirse $y_i \neq 0$ ise $y \neq 0$ olacaktır.

(9) ifadesini y_i potansiyeline açarsak.

$$y_i = y_i \left(\frac{\partial K}{\partial y_i} \right)_{y_i=0} + \frac{y_i^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 K}{\partial y_i^2} \right)_{y_i=0} + \dots$$

(9) çok küçük seçilirse yüksek kuvvetler ihmal edilerek eşikliği temini için

$$\boxed{\left(\frac{\partial K}{\partial y_i} \right)_{y_i=0} = 1} \dots \dots (10)$$

İcap ederken lütfen vergiye dikkat edin
İcap eden (λ) değeri tayin edilmesini
İcap ettiren denklemler olacaktır.

Tabiiyat. (1) den

(5)

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{x_1}{L} a \cdot P \cdot \sin \varphi_1} \rightarrow (9') \quad y_1 = K(\lambda, x_1, y_1)$$

burun. sağ tarafını φ_1 göre türevini alalım.

$$\frac{x_1}{L} \cdot a \cdot P \cdot \left(\frac{d \sin \varphi_1}{d \varphi_1} \right) = 1 \quad \text{--- (10')}$$

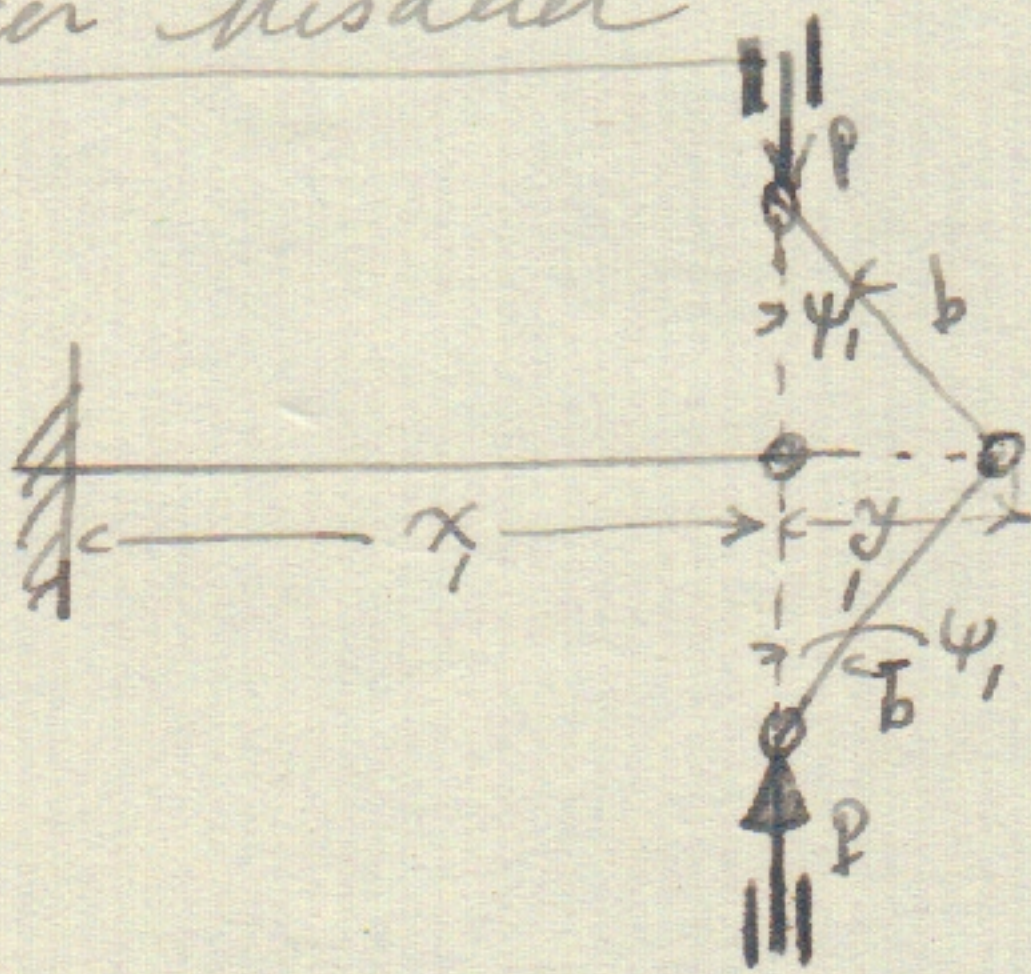
$\varphi_1 = 0$

$$\frac{x_1}{L} \cdot a \cdot P \cdot 1 = 1 \quad \text{--- buradan ise:}$$

$$\boxed{P_3 = \frac{L}{x_1} a} \rightarrow \text{Verzweigungsstelle.}$$

diğer Misaller

Çer ve taşıyıcı Makaslanmaları



$$\begin{aligned} \text{Çer kırırtı} &= 2P \tan \psi_1 \\ &= 2P \cdot \frac{y_1}{\sqrt{b^2 - y_1^2}} \end{aligned}$$

diğer taraftan Suluğu

Normal kırırtı karşı rijitliği

(2) alsa: $[\alpha] = \text{kg}$

$$\text{Çer kırırtı} = \alpha \frac{y_1}{x_1}$$

$$\alpha = EF$$

İki değeri eşit kılınır:

$$\boxed{\alpha \frac{y_1}{x_1} = 2P \frac{y_1}{\sqrt{b^2 - y_1^2}}} \quad \text{--- (11)}$$

(11) ifadesi $y_1 = 0$ için sağlandığı
gibi (y_1) Ka'fi derecede küçük değerleri fakat
 $y_1 \neq 0$ değerleri için de sağlanabilir. Eğer

$$P = \frac{b \cdot \alpha}{2x_1} = P_s \text{ olarak seçilirse.}$$

görü 11 ifadesi:

$$y_1 = \frac{P}{\frac{\alpha b}{2x_1}} \frac{y_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_1}{b}\right)^2}} \quad \dots (11')$$

y_1 küçük değerleri için 11' eşitliği ancak:

$$\boxed{\frac{P}{\frac{\alpha b}{2x_1}} = 1} \text{ için mümkün olur.}$$

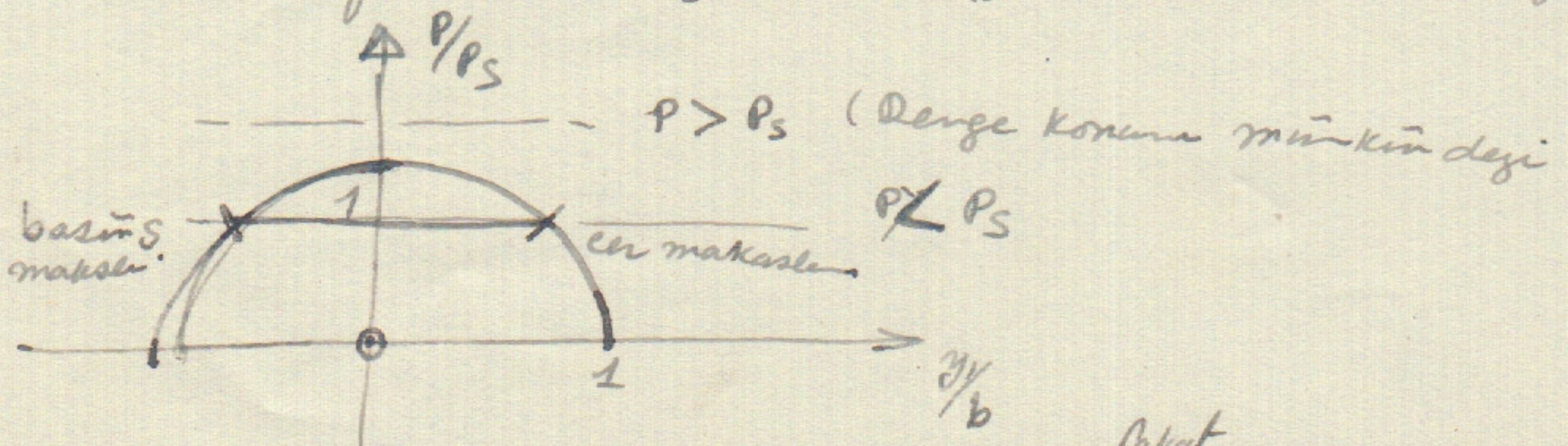
bu ise $\boxed{P_s = \frac{b \alpha}{2x_1}} \quad \dots (12)$

gibi bir değer elde olur. bu suretle.

11 ifadesi $y_1 = \frac{P}{P_s} \frac{y_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y_1}{b}\right)^2}} \quad (11'')$

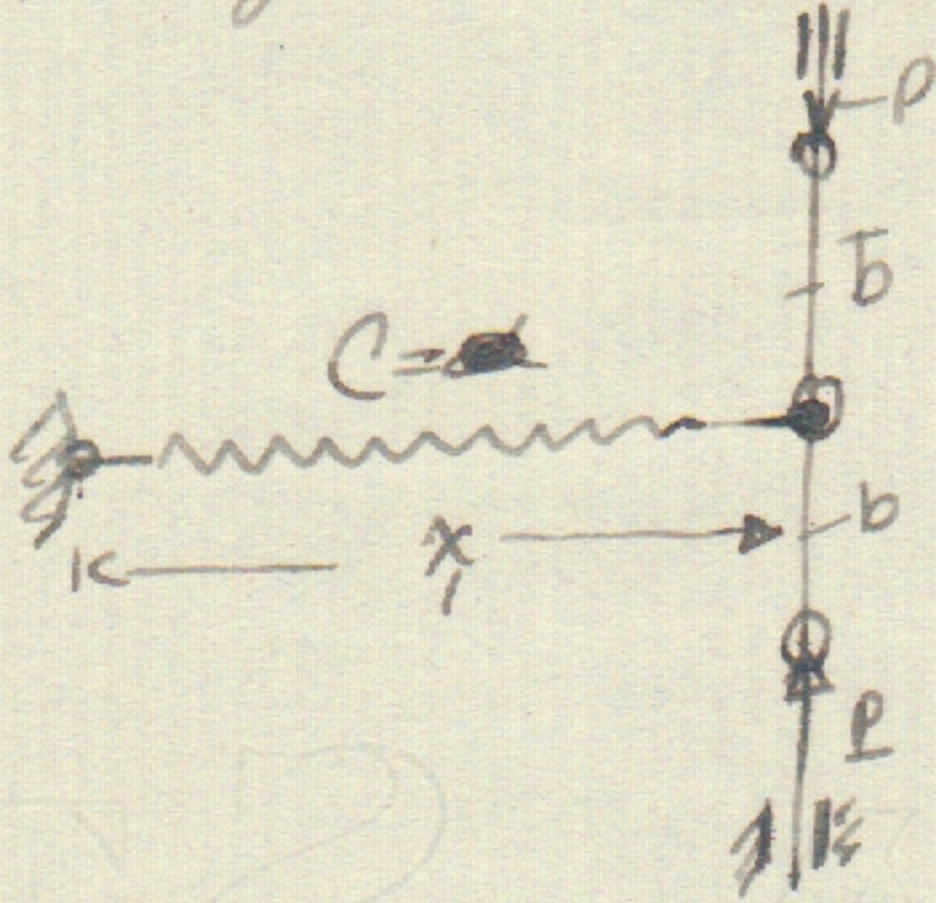
~~görü $P < P_s$ için~~

(11'') ifadesi P/P_s ve y_1/b Eksenlerinde çizilebilir



$P(0)$ den yavaş yavaş artılınca ~~den~~ fakat $P < P_s$ olduğunda

üç durulu denge vardır. ($y_1=0$) trivialdır, diğerleri (7) bir çekme biride basıng olan $y_1 \neq 0$ halde. $P = P_s$ gelince ancak $y_1=0$ gibi tek durum mümkündür. $P > P_s$ olursa denge artık mümkün olmaz. Sistem bir den bir ivmeli yer değiştirir yapar. anı gösteriler olur. adedi misal:



$$C = 5 \text{ kg/cm}$$

$$x_1 = 10 \text{ cm}$$

$$b = 15 \text{ cm}$$

$$\alpha = C \cdot x_1 = 50 \text{ kg}$$

$$P_s = \frac{50 \cdot 5}{2 \cdot 10} = \frac{250}{20} = \underline{\underline{12,5 \text{ kg}}}$$

$P < 12,5 \text{ kg}$ işi denge vardır. or veya basıng.

$P > 12,5 \text{ kg}$.. denge yoktur. anı Auschlag.

Eğilme makaslama



$$M = P \cdot a \sin \varphi_1$$

$$M = \frac{EJ}{x_1} \cdot \varphi_1$$

$$EJ = \beta$$

Eğilme rijit

$$\boxed{\frac{\beta}{x_1} \varphi_1 = P \cdot a \sin \varphi_1} \quad 13$$

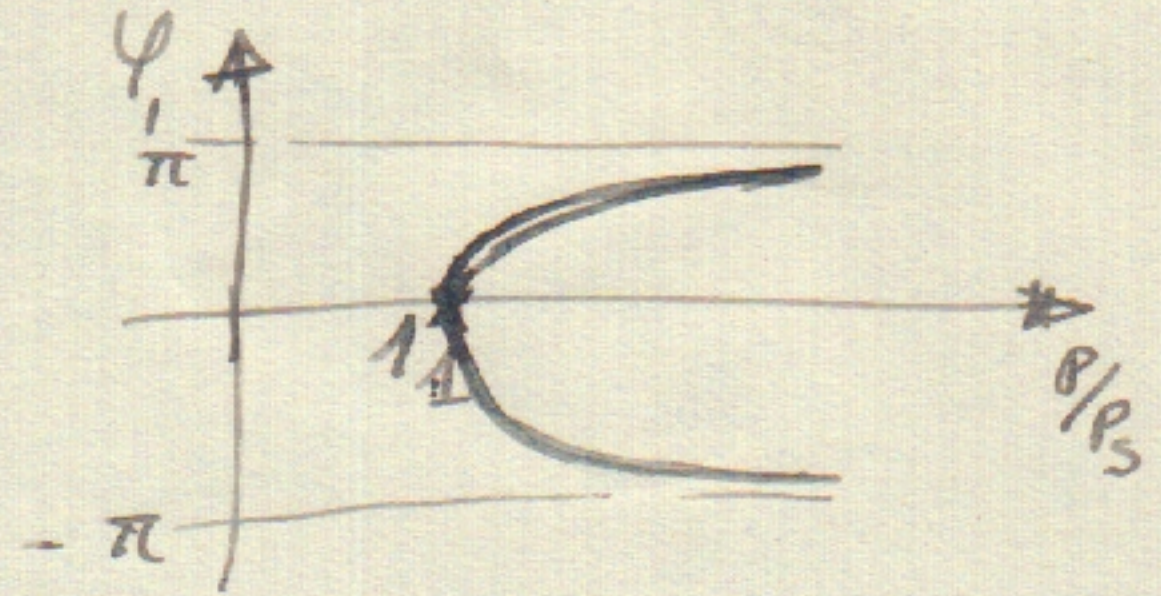
Buradan

$$D = \frac{\beta}{x_1 \cdot a} \frac{\varphi_1}{\sin \varphi_1}$$

$$P_{min} = P_s = \frac{\beta}{x_1 \cdot a} \quad (14)$$

(8)

$$[\beta] = \text{kg} \cdot \text{cm}^2 \quad [P_s] = \text{kg}$$



Eğilme makaslaması da diğer mesnet şartları.

Reaksiyonlar:

$$Q \cdot x_1 = a \cdot P (-y_1')$$

$$Q = -\frac{a \cdot P \cdot y_1'}{x_1}$$

$$M_x = Q \cdot x = -\frac{a P y_1'}{x_1} \cdot x$$

$$\beta y'' = -M_x = \frac{a P y_1'}{x_1} \cdot x$$

↓

$$y = \frac{-a P}{6 \beta x_1} y_1' x (x_1^2 - x^2)$$

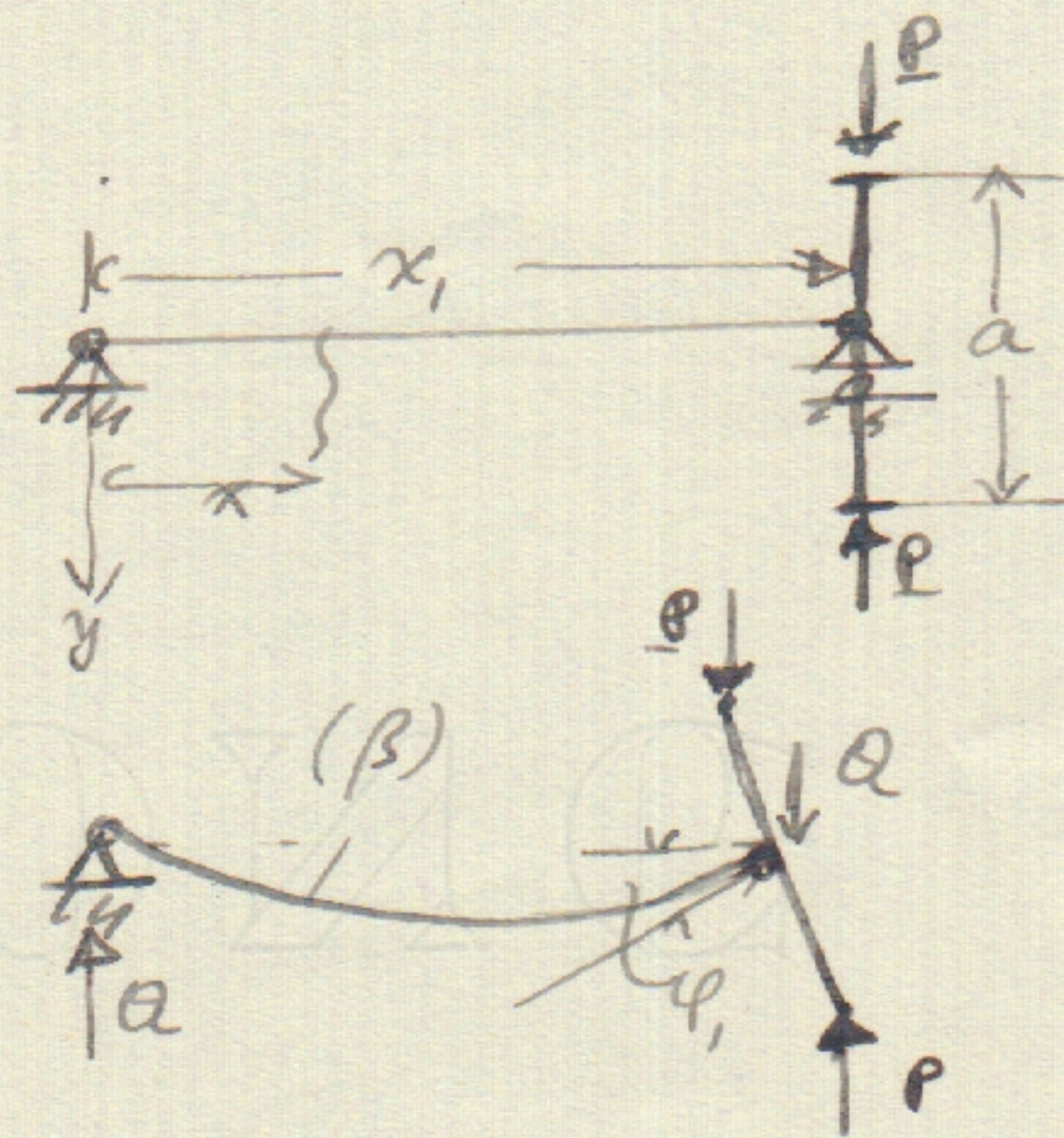
$$y_1' = \frac{-a P}{6 \beta x_1} y_1' (x_1^2 - 3x^2)$$

$$y_1' = \frac{a P}{3 \beta} x_1 \cdot y_1'$$

$y_1' \neq 0$ olursa

$$P_s = \frac{3 \beta}{a x_1} \quad (15)$$

$$P_s = \frac{3 E J}{a \cdot l}$$

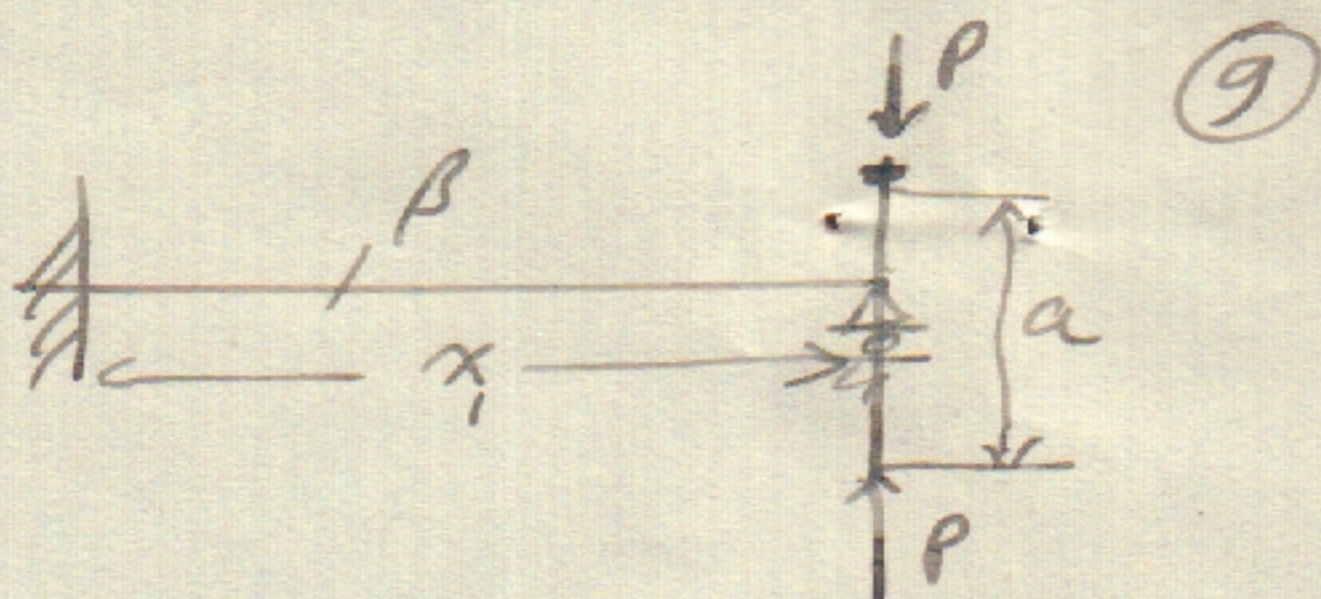


Sınır şartları

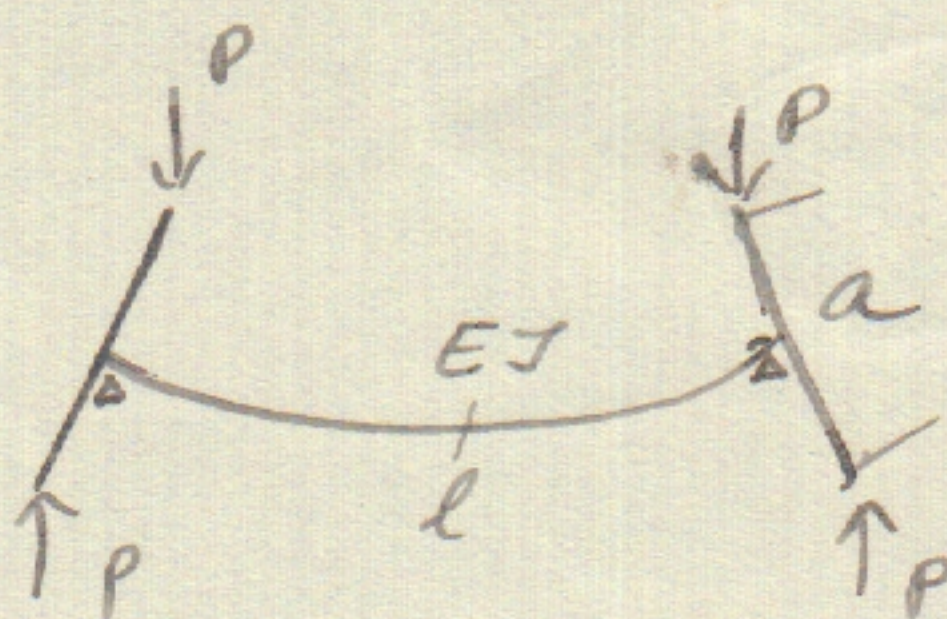
$$y = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \text{ ise:}$$

$$P_s = \frac{4EJ}{al}$$

$$P_s = \frac{4\beta}{ax_1} \quad (16)$$

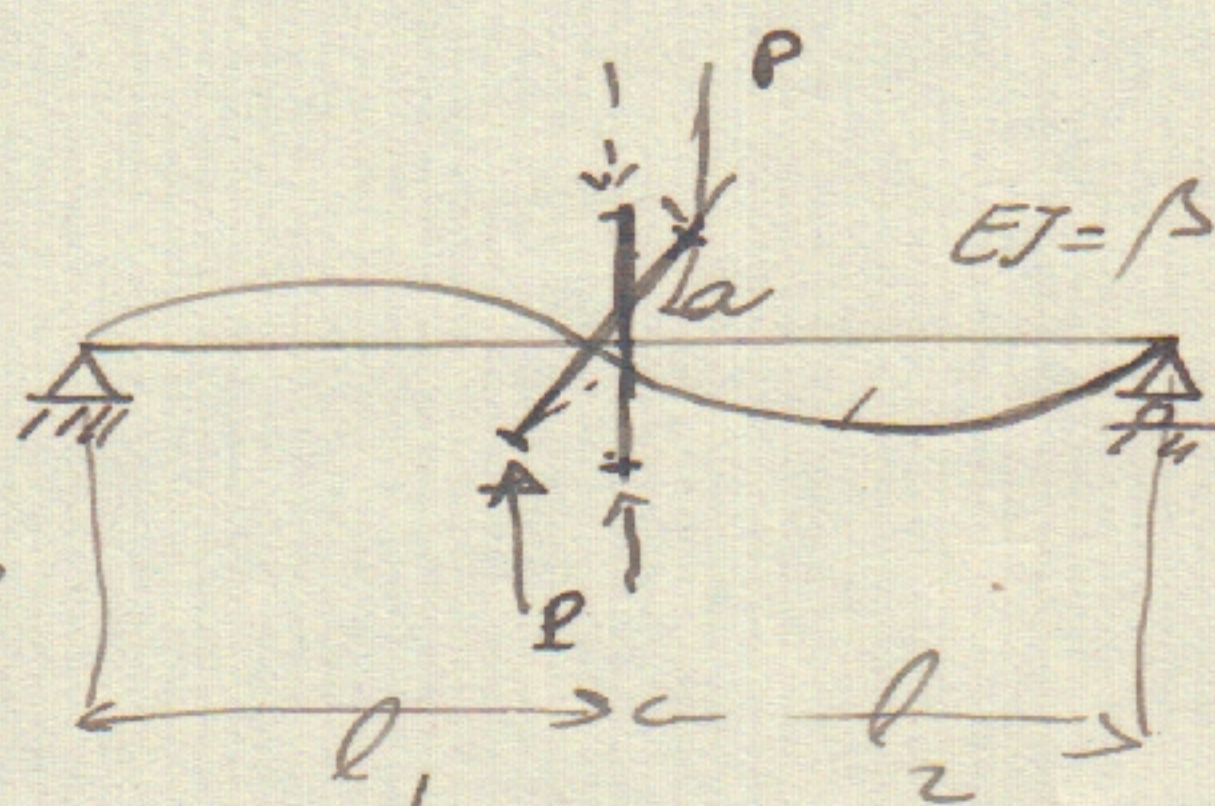


$$(17) \quad P_s = \frac{2EJ}{a \cdot l}$$

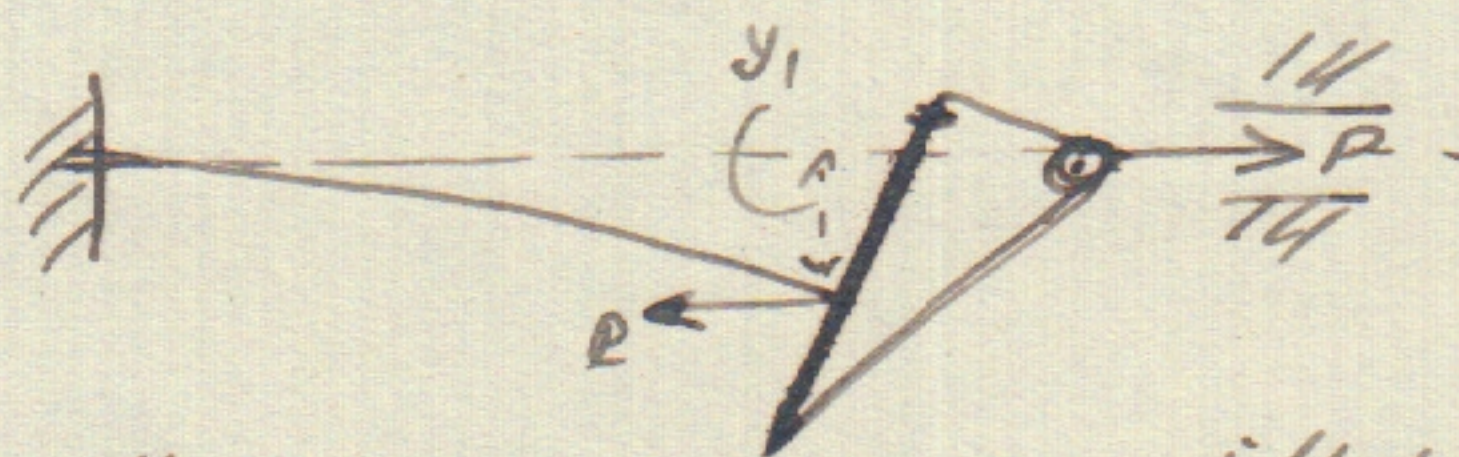
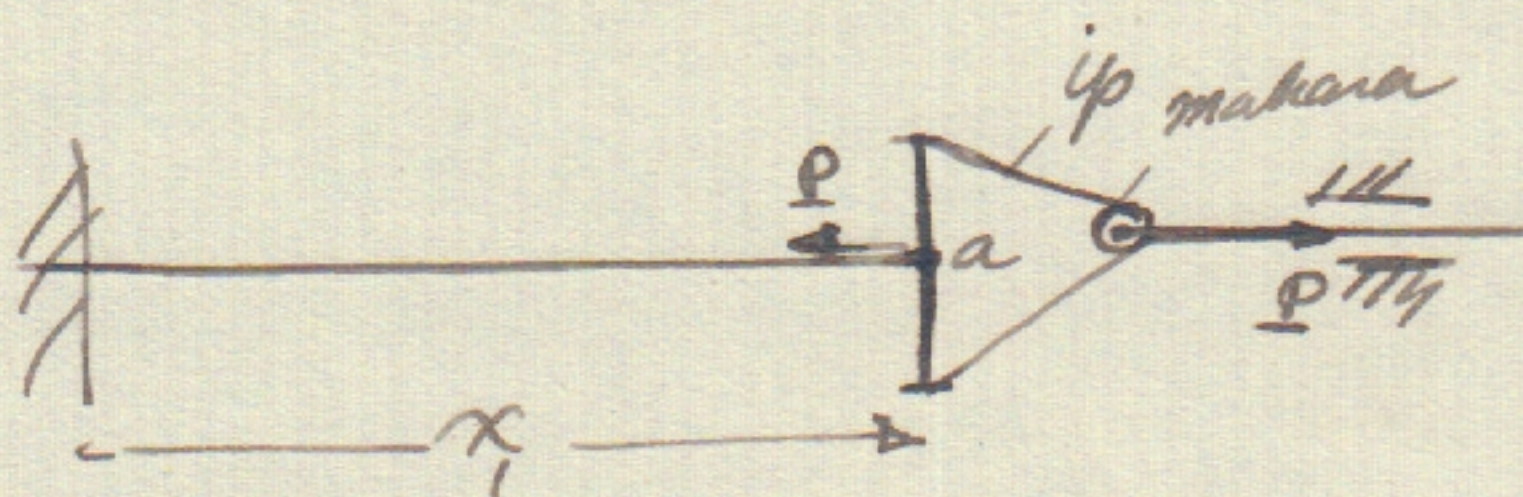


(18)

$$P_s = \frac{3EJ}{a} \frac{(l_1 + l_2)}{l_1^2 - l_1 l_2 + l_2^2}$$



Kesme momenti (y_1) ile rantı l_1 bal.



$$M = -Py_1$$

$$\beta y'' = -M = Py_1$$

diff denkle.

$$\beta y'' - Py_1 = 0$$

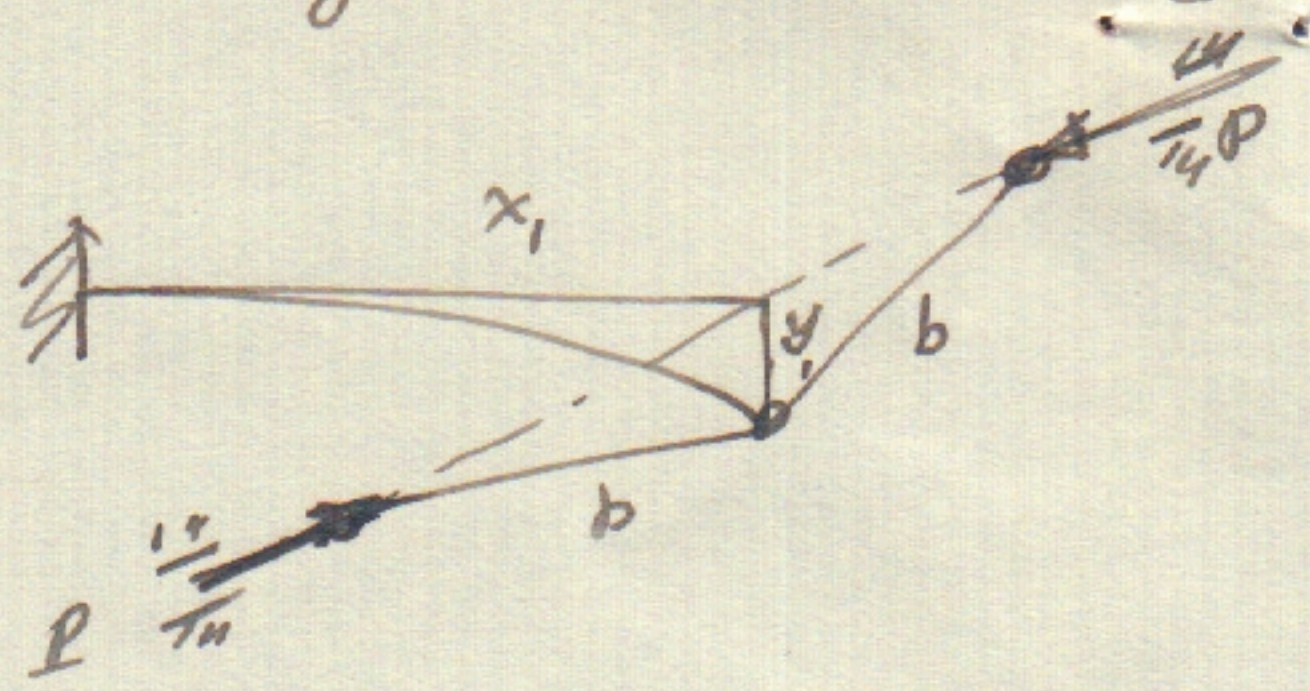
$$x=0 \rightarrow y=y'=0$$

$$x=x_1 \quad y=y_1$$

(19)

ahalde $P_s = \frac{2EJ}{l^2} < P_k = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \leftarrow P_s = \frac{2\beta}{x_{1,2}}$

Eğilimle Nakaslanma



nihayet kurvet = Q =

$$\frac{2Py_1}{b} = Q$$

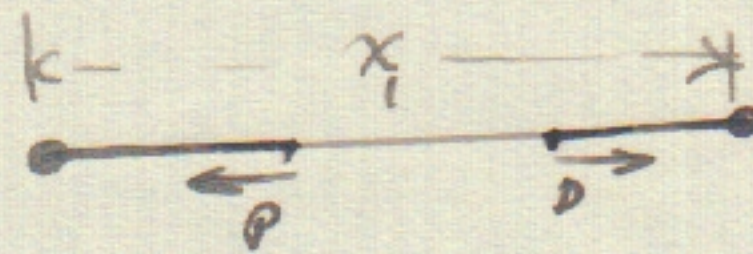
diff denk.

$$(20) \quad P_s = \frac{3\beta}{2x_1^3} \cdot b$$

$$\left\{ \beta y'' = \frac{2Py_1}{b} (x_1 - x) \right\}$$

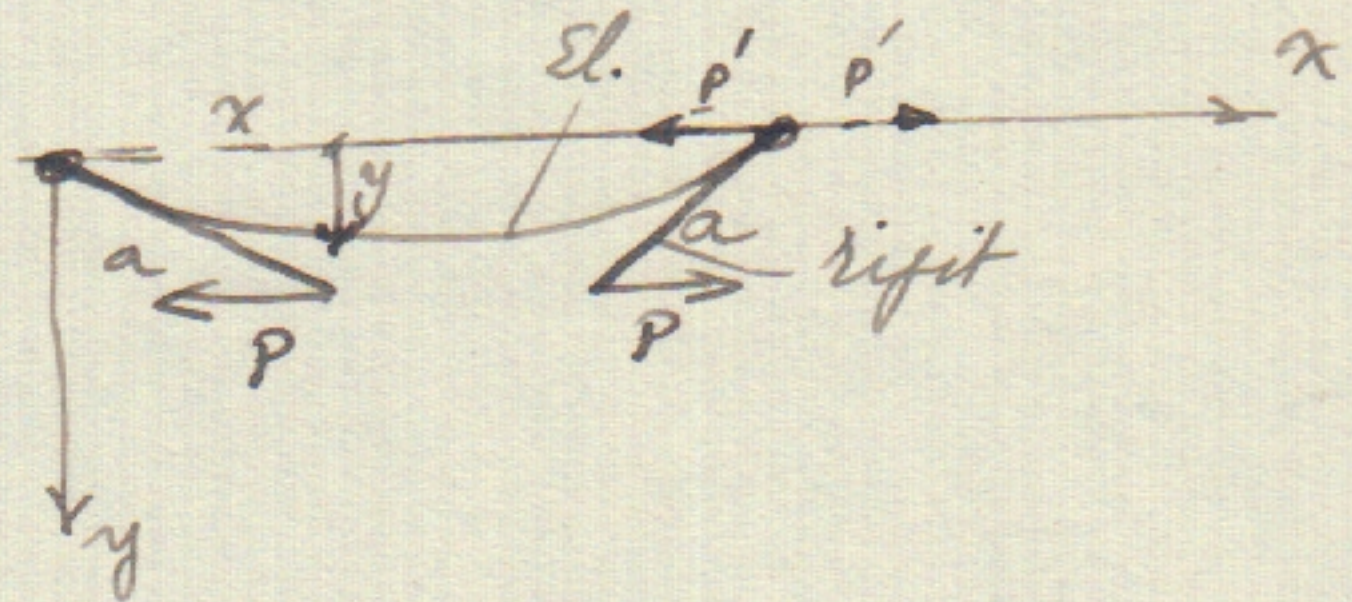
Çer ile Bükülme

• Çer ile bükülme çer ile bükülme çer ile bükülme



$$M_x = P y_1 a - P y$$

$$\beta y'' = M_x = P y_1 a - P y$$



NO

sol mesnede $P = P'$ ve $-P'$ ilave edilerek
sol taraftan.

$$M_x = a(-y_1') \cdot P - P y$$

$$\beta y'' = P(y + y_1')$$

Elde olunur.

$$\frac{P}{\beta} = \alpha^2$$

yazılabilirse genel çözüm:

$$y = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x - a y_1' \quad \text{ olur. }$$

A, B için $x=0$ $x=x_1$ için $y=0$ olsun (11)

İcap edenleri:

$$A = ay_1' \quad B = ay_1' \frac{1 - \cosh \alpha x_1}{\sinh \alpha x_1} = -ay_1' \tanh \frac{\alpha x_1}{2}$$

ohalde Eğrinin türevi:

$$y' = \alpha ay_1' \left[\sinh \alpha x - \tanh \frac{\alpha x_1}{2} \cdot \cosh \alpha x \right]$$

$x=x_1$ için

$$y_1' = \alpha ay_1' \left(\sinh \alpha x_1 - \tanh \frac{\alpha x_1}{2} \cdot \cosh \alpha x_1 \right) = \alpha ay_1' \tanh \frac{\alpha x_1}{2}$$

buradan α için:

$$\frac{1}{\alpha \cdot a} = \tanh \frac{\alpha x_1}{2} \quad \text{partiyim reye:}$$

$$\frac{\alpha x_1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot a} = \frac{\alpha x_1}{2} \cdot \tanh \frac{\alpha x_1}{2}$$

$$\frac{x_1}{2a} = \frac{\alpha x_1}{2} \cdot \tanh \frac{\alpha x_1}{2}$$

$$\frac{\alpha x_1}{2} = \psi$$

$$\boxed{\frac{x_1}{2a} = \psi \cdot \tanh \psi}$$

transcendental denklemlerden
elde olur.

grafik sözdüğü gibi.

1) özel hal $x_1 \gg 2a$ ise $\tanh \frac{\alpha x_1}{2} \approx 1$ olup

$$\alpha = \frac{1}{a} \quad \text{ve} \quad \boxed{P_k \approx \frac{\beta}{a^2}}$$

2) özel hal $x_1 \ll 2a$ halinde $\psi \tanh \psi \approx \psi^2$ olacaktır.

$$\text{intan} \quad \boxed{P_k \approx \frac{2\beta}{a x_1}} \quad x_1 \ll 2a$$

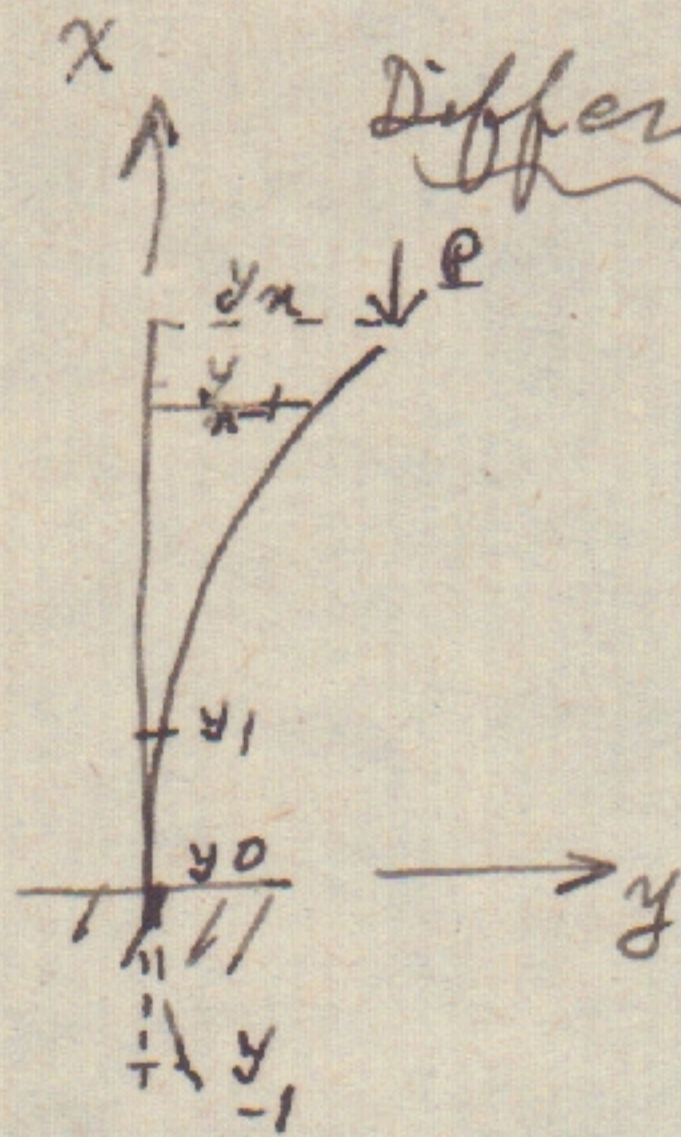
Eğilim makaslama Problemleri Plakları
için tatbik edilmiştir. Burada
doğrudan doğruya diff. servit. yolundan
hareket edilmektedir.

Bu hususta makalede 4 misal
vardır.

24.8.1949

Atalit momenti değışen

şubukların Burkulması



Differans metodu

Diff. denklem:

$$EI y'' + P(y - y_n) = 0$$

$$\frac{P}{EI} \cdot \Delta x^2 = \frac{P}{EI} \cdot \frac{l^2}{n^2} = a$$

differans denklemi:

Δy

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} + a(y_k - y_n) = 0$$

veya:

$$y_{k-1} + (a-2)y_k + y_{k+1} - ay_n = 0$$

Şöğütmesi icap eden ordinat. $(y_1, y_0, \dots, y_n) \rightarrow (n+2)$

denklem sayısı

$$k=0 \dots k=n-1 \rightarrow (n)$$

Sınır şartları

$$y_0 = 0 \quad y'_0 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 = y_1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ (2)}$$

Problem belirlenir. Yukarıdaki denklemler lineer ve homojendir. Sınır şartları düşünülerek denklemler yazılırsa:

notlar

2

$$(0) \rightarrow y_{-1} + (a_0 - 2)y_0 + y_1 - a_0 y_n = 0$$

$$(1) \rightarrow y_0 + (a_1 - 2)y_1 + y_2 - a_1 y_n = 0$$

$$(2) \rightarrow y_1 + (a_2 - 2)y_2 + y_3 - a_2 y_n = 0$$

$$\dots = 0$$

$$(n-3) \rightarrow y_{n-4} + (a_{n-3} - 2)y_{n-3} + y_{n-2} - a_{n-3} y_n = 0$$

$$(n-2) \rightarrow y_{n-3} + (a_{n-2} - 2)y_{n-2} + y_{n-1} - a_{n-2} y_n = 0$$

$$(n-1) \rightarrow y_{n-2} + (a_{n-1} - 2)y_{n-1} + y_n - a_{n-1} y_n = 0$$

(n) tane.

$y_0 = 0$ $y_{-1} = y_1$ verildiğinde kat sayılar

determinantı teskil olursa.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (y_1) & (y_2) & (y_3) & \dots & (y_{n-2}) & (y_{n-1}) & (y_n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ (a_1 - 2) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & (a_2 - 2) & 1 & \dots & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (a_{n-2} - 2) & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (a_{n-1} - 2) & (1 - a_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta_n = 0$ şartı trivial olmayan bir şeyi işi lazımdır.

$n=2$ için Δ_2 determinanti.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2(-a_0) \\ (a_1-2) \quad 1-a_1 \end{vmatrix} = 0$$

$n=3$ için

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -a_0 \\ (a_1-2) & 1 & -a_1 \\ 1 & (a_2-2) & (1-a_2) \end{vmatrix} = 0$$

fabrikat. Afalet momenti linear
değişir

$$J = J_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} x &= k \cdot \Delta x \\ \ell &= n \cdot \Delta x \end{aligned} \quad \text{razolunsa.}$$

$$J_k = J_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

$$a_k = \frac{Pl^2}{n^2 EJ_k} = \frac{Pl^2}{n^2 EJ_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$$

$$\frac{Pl^2}{n^2 EJ_0} = a_0 \text{ gösterilse}$$

$$\boxed{a_k = a_0 \frac{1}{1 - \frac{k}{n}}} \text{ demektir.}$$

$n=2$ halini ele alalım.

$$a_1 = a_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_0$$

Determinant yerine koyalım.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -a_0 \\ (2a_0 - 2) & 1 - a_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = 2 - 4a_0 + 2a_0^2 - 2a_0 = 0$$

$$\boxed{2a_0^2 - 6a_0 + 2 = 0} \rightarrow (a_0)_{\min} = 0,382$$

$$P_K = a_0 \cdot n^2 \frac{EI_0}{l^2} = 0,382 \times 4 \frac{EI_0}{l^2}$$

$$\boxed{P_K \approx 1,528 \frac{EI_0}{l^2}}$$

hakkiki değer.

$$P_K = 1,446 \frac{EI_0}{l^2}$$

burda $n=3$ için hesap yapalım:

$$a_1 = a_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} a_0$$

$$a_2 = a_0 \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3a_0$$

buna ait determinant ise:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -a_0 \\ (3/2 a_0 - 2) & 1 & -3/2 a_0 \\ 1 & (3a_0 - 2) & (1 - 3a_0) \end{vmatrix} = 0$$

Ağırlık a_0 ait denklem:

$$9a_0^3 - 36a_0^2 + 30a_0 - 4 = 0$$

bu denklemin en küçük kökü

$$a_0 \approx 0,1645 \text{ dir.}$$

Buna göre

$$P_k \approx 0,1645 \times 9 \frac{EJ_0}{l^2}$$

$$0,1645 \times 9 = \underline{\underline{1,4805}}$$

halbuki hakiiki değer 1,446

olduğuna göre hata

$$\frac{100}{1,446} \frac{1,480 - 1,446}{1,446} \leq \% 2,5$$

17.5.1949

Kirişlerde zati yük

Sistem: basit kiriş $w = \text{zati yük}$
yüklemesi: yayılı $p = \text{faideli}$
Emniyet ger. = σ $p + w = q$ toplam yük

$$\left. \begin{aligned} M_{\max} &= \frac{ql^2}{8} \\ M_{\max} &= W \cdot \sigma \end{aligned} \right\} \boxed{(w+p) \frac{l^2}{8} = W \cdot \sigma} \quad \text{Esas denklem.}$$

Kesit şekli: her hangi:

$$F = k_1 h^2 \quad \text{olsun} \quad \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \text{ nümerik faktörler}$$
$$W = k_2 h^3$$

misal: Daire $\begin{cases} k_1 = \frac{\pi}{4} \\ k_2 = \frac{\pi}{32} \end{cases}$

Kare $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1/6 \end{cases}$

Dik üçgen $\begin{cases} k_1 = \frac{b}{h} \\ k_2 = \frac{1}{6} \frac{b}{h} \end{cases}$

Putrel $\begin{cases} k_1 & 0,070 < k_1 < 0,106 \\ k_2 & 0,025 < k_2 < 0,0342 \end{cases}$

mukavemet şartından

$$W \cdot \sigma = k_2 h^3 \cdot \sigma = \frac{ql^2}{8}$$

$$h = \left(\frac{1}{8k_2} \right)^{1/3} \cdot \sigma^{-1/3} \cdot q^{1/3} \cdot l^{2/3}$$

buradan

$$w = F \cdot \gamma = k_1 \cdot h^2 \cdot \gamma$$

teşkil edilirse

$$w = k_1 \cdot \gamma \left(\frac{1}{8k_2} \right)^{2/3} \cdot \frac{-2/3}{5} \cdot q^{2/3} \cdot l^{1/3}$$

veya:

$$w^3 = \frac{k_1^3}{64 k_2^2} \cdot \frac{\gamma^3 l^4}{6^2} \cdot q^2$$

burada $q = p + w$

$$\frac{k_1^3}{64 k_2^2} \cdot \frac{\gamma^3 l^4}{6^2} = s$$

gösterilse $[s] = k_3/m$

$$\boxed{w^3 = s(p+w)^2} \quad \text{3 ekline göre}$$

El'adisi sağılan elde etmek için

$$\frac{w}{s} = w_0 \quad \frac{p}{s} = p_0 \quad \text{ayrılarsa}$$

son denklem:

$$\boxed{w_0^3 = (p_0 + w_0)^2} \quad \text{alıñ}$$

istenirse (φ) parametresine göre

$$p_0 = \varphi \cdot w_0$$

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= (1+\varphi)^2 \\ p_0 &= \varphi(1+\varphi)^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{3 ekline alñ}$$

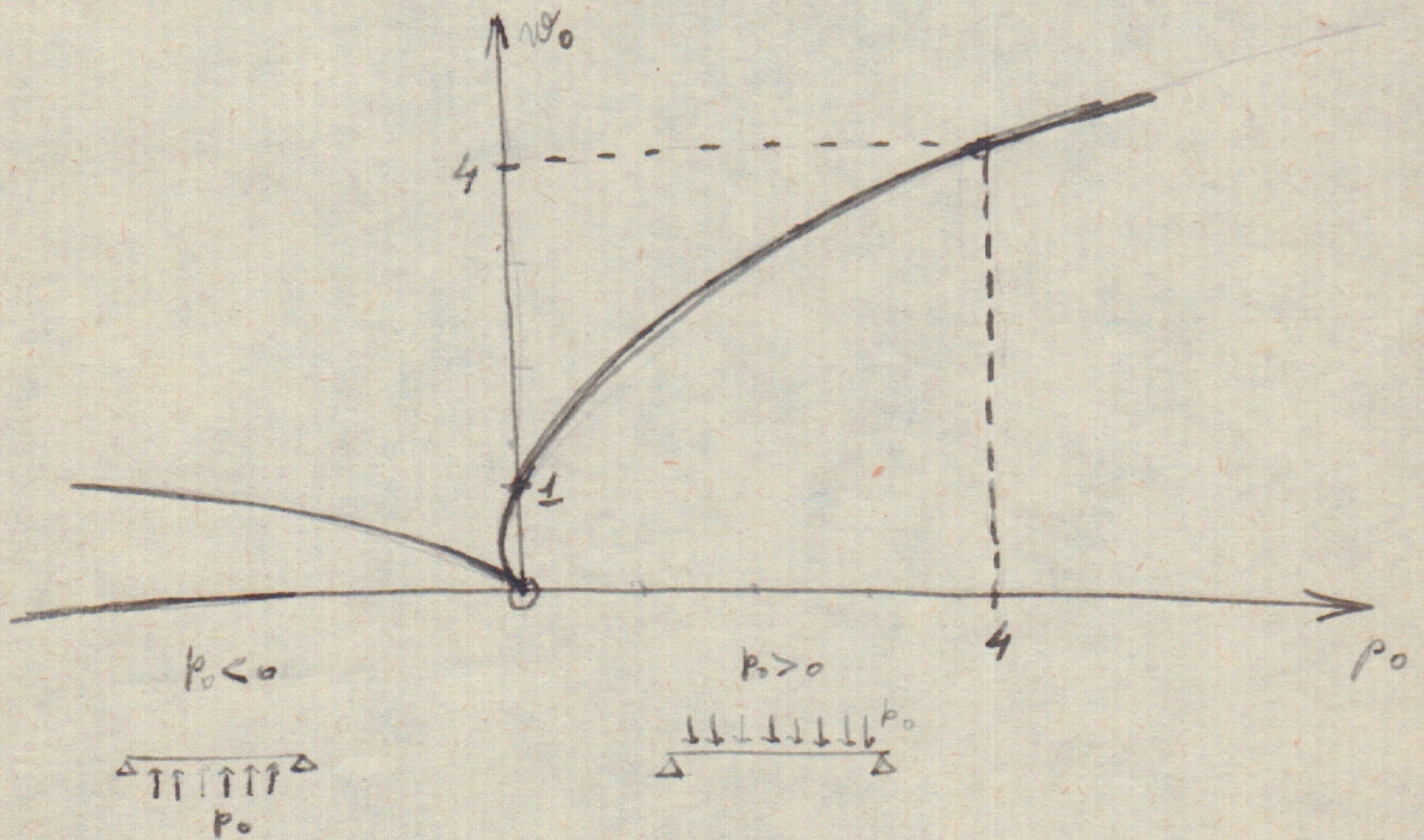
p_0 ile w_0 arasındaki münaseletin etüdün. 3

Tablo.

φ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2
p_0	0	0,121	0,288	0,507	0,784	1,125	1,536	2,023	2,592	3,249	4	4,951	5,808
w_0	1	1,210	1,440	1,690	1,960	2,250	2,560	2,890	3,240	3,610	4	4,410	4,840

φ	1,3	1,4	1,5	2	3	4	5	10
p_0	6,877	8,064	9,375	18	48	100	180	1210
w_0	5,290	5,760	6,250	9	16	25	36	121

(p_0, w_0) arasındaki grafik.



Tablo ve grafikten hesap usulü
p verilmiş

w aranıyor.

1°) $s = \frac{k_1^3}{64 k_2^2} \frac{86^3}{62}$ teşkil edilecek.

2) $\frac{p}{\rho} = p_0$ hesap edilecek

3) Cevrelden w_0 bulunacak

4) $s. w_0 = w$ görülecek.

5) İfade sim. etüdü.

$$s = \frac{k_1^3}{64 k_2} \cdot \frac{\gamma l^4}{62}$$

bu ifade de $\frac{k_1^3}{64 k_2}$ ifadesi yalnız kesit

şekline bağlıdır.

bunu (2) ile gösterebiliriz:

$$\alpha = \frac{k_1^3}{64 k_2}$$

azgüdataki tablo • muktebif

Kesitler için (2) Kat sayısının veriri.

Kesit Şekli	Putrel NP	dikdörtgen b/h			Daire
		1/10	1/2	1	
α	48/10 $\alpha < 0,0116$ $\alpha = 0,0122$	0,0562	0,2812	0,5625	0,7854

aynı α yi haş putrel ve dikdörtgen
kesitler arasında bir mukayese yapılırsa

$\frac{b}{h} = \frac{1}{46}$ olan bir dikdörtgen putrelle
muvafık olur.

Nümerik misal:

$$P = 500 \text{ kg/m}$$

$$l = 10 \text{ m}$$

$$\gamma = 7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$G = 12 \times 10^6 \text{ kg/m}^2$$

Resit daire

$$\alpha = 0,7854$$

$$S = \frac{(7,8)^3 \times 10^9 \times 10^4}{12^2 \times 10^{12}} \times 0,7854 = 25,90 \text{ kg/m}$$

$$p_0 = \frac{500}{25,90} = 19,3$$

Tablodan

$$n_0 = 9,35$$

$$W = 25,90 \times 9,35 = \underline{\underline{242 \text{ kg/m}}}$$

Aynı misal petrel için:

$$\alpha = 0,0122$$

$$S = 0,4 \text{ kg/m}$$

$$p_0 = \frac{500}{0,4} = 1250$$

Tablodan

$$n_0 = 124$$

bu na göre $W = 124 \times 0,4 = \underline{\underline{49,6 \text{ kg/m}}}$

Sarf edilen malzeme.

$$\frac{242}{49,6} \approx 4,82$$

daireden bes kere az.

23.5.1949

Günlüklerin Burkulması

Differans denklemleri

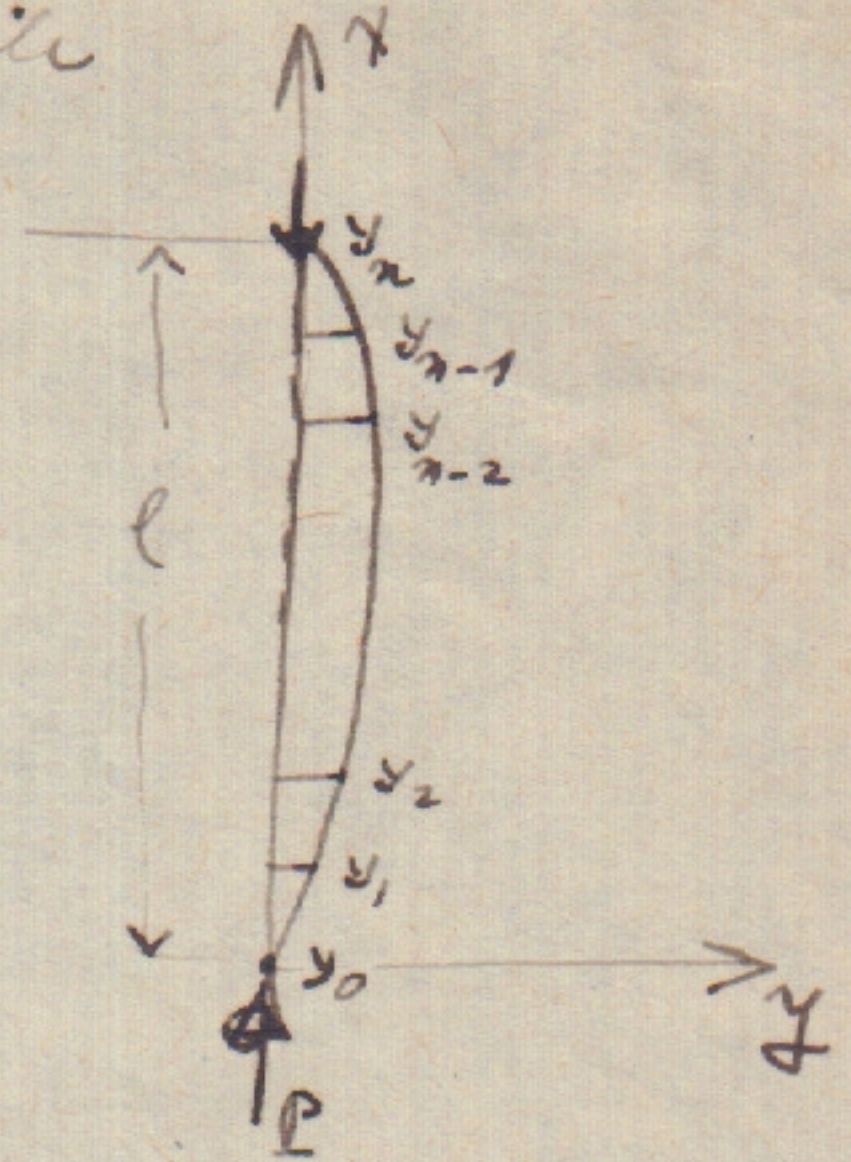
Etüd

Günlük (n) parçaya bölünür

$$\Delta x = \frac{l}{n}$$

Bk. 1. diff denkle.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = 0$$



Buna diff denkle. haline sokalım

$$\frac{P}{EI} (\Delta x)^2 = \frac{Pl^2}{n^2 EI} = a \quad \text{gösterelim}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \approx \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta x^2} \right) \quad (k) \text{ için}$$

$$y = y_k$$

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{\Delta x^2} + a y_k = 0$$

Veya

$$y_{k+1} + (a-2)y_k + y_{k-1} = 0$$

Differans denklemleri
Eldi olurun.

bu rekürsif ifade $k=1 \dots k=n-1$

işin tatbik edilerek (n-1) lineer ve homogen
denklemler elde olurun.

Sınır şartları ise $y_0 = 0$ $y_n = 0$ olduğundan

El. Eğri bu şekilde belirlenecektir.

yalnız $(n-1)$ lineer homojen denklemin trivial olmayan bir çözümleri olabilmesi için determinantı sıfır etmelidir. bu ise:

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (a-2) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & (a-2) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a-2) & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & (a-2) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (a-2) & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ (a-2) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

bu denklemden aramıza burkulma partiden.
buradan elde alınacak en küçük kök.

$$P_k = n^2 \cdot a \cdot \frac{EI}{l^2}$$

Yasıtayla kırık yükü verecektir.

$$n \rightarrow \infty \text{ için } (n^2 \cdot a) \rightarrow \pi^2 \text{ eder.}$$

EI = salıit kalı için tatbikat.

$n=2$ alalım.

$$\Delta_1 = |a-2| = 0$$

$$a=2$$

$$n^2 a = 8$$

Elde olur.

$n=3$ için:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & (a-2) \\ (a-2) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{\min} = 1$$

$$n^2 a = \underline{\underline{9}}$$

$n=4$ için:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & (a-2) \\ 1 & (a-2) & 1 \\ (a-2) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{\min} = 2 - \sqrt{2} \approx 0,58578$$

$$n^2 a = 9,38$$

$$9,37248$$

$n=5$ için:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & (a-2) \\ 0 & 1 & (a-2) & 1 \\ 1 & (a-2) & 1 & 0 \\ (a-2) & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{\min} = 2 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$n^2 a \approx 9,50$$

$$9,549$$

hakiki değer $n^2 = 9,87$ olduğuna göre $n=5$ için

yapılan hata $100 \times \frac{9,87 - 9,50}{9,87} \approx \underline{\underline{40,4}}$ civarındadır.

hesapların kolayca icra edilebilmesi için

Genel dallenin tersini şu şekilde
olduğuna defkât edilmelidir.

$$\boxed{\Delta_{n-1} = \Delta_{n-3} + (a-2) \cdot (-1)^n \cdot \Delta_{n-2}}$$

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = (a-2) \quad \Delta_2 = 1 - (a-2)^2$$

olduğuna göre diğerleri kolaylıkla yukarıdaki
formül den elde olun.

muhtelif lakriby etler bulase edilise

$$P_k = \alpha \frac{EI}{l^2}$$

n	α
2	8,000
3	9,000
4	9,372
5	9,549
6	9,646
10	9,788
∞	π^2

(2.6)

Differans denklemleri terisiyle hareket edilise herangi bir (n) için a terisiyle bulunur.

$$a = 2(1 - \cos \frac{\pi}{n})$$

$$d = n^2 \cdot a$$

$$\boxed{d = 2n^2(1 - \cos \frac{\pi}{n})} \rightarrow d \text{ genel formülün}$$

$$n=3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & (a-2) \\ (a-2) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{\min} = 1, \quad n^2 a = 9$$

Eldi olunan. Kesin değeri 9,875 olduğuna göre

$n=3$ için hata % 9 civarında.

$$n=4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & a-1 \\ 0 & 0 & a & a-1 \\ a & a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Literatur

- [1]: Th. Pöschl, "Elementar mükavemet"
Türkiye, İ.T.Ü Kütüphaneleri Sayı 278
~~İstanbul Teknik Üniversitesi~~ İ.T.Ü matbaası
1952. Sayfa 44.
-
- [2]: V. Z. Vlasov, "İnce cidarlı elastik
çubuklar" Rusça Moskova 1959
Sayfa, 88.
-
- [3]: M. İnan, "Durchschlag^{SS}stabilität ^{von}
eines zylindrischen Flächenstreifens
unter Wirkung des Biegemomentes,
Proc. of the eight inter. congress on
Theoretical and applied mechanics 1955.
-
- [4]: Th. Pöschl, "Elementar mükavemet"
Türkiye Terüme, İ.T.Ü Kitaplığı Sayı 278
İ.T.Ü matbaası 1952, Sayfa 133.
-
- [5]: F. Stüssi "Baustatik" Bd. I
Verlag Birkhäuser Basel, 1946 S. 302
-
- [6]: E. Trefftz, "Über den Schubmittelpunkt
von einem durch eine Einzelast gebogenen
Balken". Z. A. M. M. Bd. 15, 1935 Sayfa 220

- [7]: M. Inan, ^{Shear} "Shear center of semi-elliptical cross section", Bulletin of the technical university of Istanbul, vol. 4, 1951 Number 1 ~~and~~ p. 25
- [8]: M. Inan, "Kayma merkezi", ^{Kayma} ~~İ. T. Ü.~~ İstanbul yüksek mühendis okulu dergisi Yıl 1 sayı 2 ve 3, yıl 1943 İstanbul.
- [9]: M. Inan, "An approximate methods ^{finite} in calculating the finite displacements of beams", ^{Journal} Bulletin of T. U. of Istanbul, vol. 15, 1962 Sayı 105-119.
-
- [10]: M. Inan, "The Carry-over matrix in Elastomechanics", Bulletin of the technical University of Istanbul, vol. 14, 1961, p. 61
- [11]: G. Maguel "Yapı Stabilitesi", ^{Türkçe} ~~Tercüme~~ ^{çit II} I. T. Ü. Kütüphanesi 308
~~Maguel~~ I. T. Ü. matbaası 1954, 20326.
-
- [12]: M. Hetényi, "Beams on elastic foundation" ^{Atbor} Univ. of Michigan Press Ann Arbor, Mich. 1946

[13]: M. Inan, "Photoelastische und mechanische
Untersuchung ^{an} ~~an~~ Rahmenträgern mit
besonderer Berücksichtigung der
Knotenpunkte", Dissertation, E.T.H. Zürich
1941, Genossenschaft-druckerei S. 8
Genossenschaft-druckerei

[14]: "Hütte" des Ingenieurs Taschenbuch.
23. Auflage I. Band. Berlin 1920 S. 582-583

Ziegler

[15] H. Ziegler, "on the concept of elastic
stability," Advances in Appl.
Mechanics, Vol. 4 1956 #351-402