

ALAN DARALTMA YÖNTEMİ VE SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kamertap CAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Eylül 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 4 Aralık 1996

Tez Danışmanı

: Doç. Dr. Rüstem ASLAN

Diğer Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Ülgen GÜLÇAT

Doç. Dr. Adil YÜKSELEN

ARALIK, 1996

Önsöz

Bu konuda çalışmamı sağlayan, çalışma boyunca yardımını ve bilgilerini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç.Dr. A.Rüstem ASLAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmam süresince her türlü desteği sağlayan ve bana güvenlerini bir an bile kaybetmeyen aileme, tezin her aşamasında yardımcı olan Sayın Y. Müh. Gökay Kadir HURMALI'ya da teşekkür ederim.

Kamertap CAN

Aralık 1996, İstanbul

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
NOTASYON LİSTESİ.....	iv
ÖZET.....	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. MATEMATİKSEL FORMÜLASYON.....	6
2.1 Sıkıştırılamaz Viskoz Akış	6
2.2 Parçalı (Fractional) Adımlar Yöntemi	7
2.3 Başlangıç ve Sınır Koşulları	11
BÖLÜM 3. SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU.....	13
3.1 Galerkin Formülasyonu	13
BÖLÜM 4. ALAN DARALTMA YÖNTEMİ.....	20
4.1 Yöntemin Küre Etrafındaki Akışa Uygulanması.....	22
4.1.1 Referans Çözüm.....	22
4.1.2 Alan Daraltma Uygulanmış Grid Çözümleri	28
4.2 Alan Daraltma Yönteminin Bir Bina Etrafındaki Akışa Uygulanması	34
4.2.1 Referans Çözüm	34
4.2.2 Alan Daraltma Uygulanmış Grid Çözümleri.....	37
DEĞERLENDİRMELER VE ÖNERİLER.....	51
EK : İNTERPOLASYON YÖNTEMİ	52
KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ	56

Notasyon Lisesi

p : boyutsuz basınç

ν : kinematik viskozite

u, v, w : sırasıyla x, y, z yönlerinde hız bileşenleri

Re : Reynolds sayısı

ρ : akışkan yoğunluğu

l : karakteristik uzunluk

U_{∞} : serbest akışkan hızı

Φ : potansiyel fonksiyonu

∇ : $\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$

Ω : çözülecek akış bölgesi

Γ : akış bölgesinin (Ω) sınırı

N_i : şekil fonksiyonları

P_e : eleman basınç değeri

M_{ij} : eleman matrisi

h, k, l : sonlu eleman ağı üzerinde bir elemanın x, y, z yönlerindeki en küçük uzunlukları

Δr : küre üzerinde radyal yönde minimum ağ aralığı

C_p : yüzey basınç katsayısı

C_f : yüzey sürtünme katsayısı

Δt : zaman adımı

D : küre çapı

R_0 : cisim merkezinden yüzeye kadar yarıçap

τ : kayma gerilmesi

Özet

Bu tezde, üç boyutlu, viskoz, zamana bağlı akış problemleri bir Parçalı Adım - Galerkin formülasyonuna dayalı sonlu eleman yöntemi kullanılarak Navier-Stokes denklemlerinin çözülmesi ile analiz edilmiştir.

Son yıllarda hesaplama yöntemi ve bilgisayar donanımındaki gelişmeler, araştırmacıların ilgisinin bu yönde toplanmasını sağlamıştır. Karmaşık akım problemlerinin analizini ve sayısal çözümünü mümkün kılan çeşitli güçlü metodlar bu sayede geliştirilmiştir. Özellikle akışkanlar mekaniği ile uğraşan birçok bilim adamı ve mühendis için daha iyi bir analizde daha fazla nokta kullanımı ihtiyacı her zaman büyük sorun olmuştur.

Bu çalışmada bilgisayar bellek kapasitesinin sorun olduğu haller için kullanılmak üzere bir alan daraltma yöntemi sunulmuştur.

Hesaplama zamanını azaltmak ve aynı nokta sayısı ile daha dar bir bölgeyi daha detaylı analiz edebilmek için kullanılan alan daraltma yöntemi öncelikle küre etrafındaki akışa uygulanarak test edilmiş ve sonuçların verilen referans değerleri ile uyumlu olduğu görülmüştür. Son olarak yöntem, bir bina etrafındaki akış için uygulanmıştır.

Summary

In the past decade the progress in computer hardware as well as in numerical algorithms has enabled attempts to be made towards the analysis and numerical solution of highly complex flow problems.

Many methods for numerical simulation of fluid flows have been proposed and Computational Fluid Dynamics (CFD) has become a practical design tool. However, problems remain with regard to computational efficiency, accuracy and turbulence modeling. The most difficult problem maybe mesh generation for geometrically complicated domains [1].

Finite Differences and Finite Element methods are the most popular methods of Computational Fluid Dynamics. Although finite differences method is the most used and most easy method of numerical methods, as important problems are encountered during grid generation for complex geometries, it is loosing its popularity in the recent years and leaving its place gradually to finite element methods. Contrary to the finite difference methods, finite element methods are able to solve the problems efficiently and accurately around complex geometries with advanced grid generation techniques.

Recently, solution of the Navier-Stokes equations with finite element methods have become one of the most popular research subjects. The most important elements that make the solution difficult are the elliptical and non-linear character of the Navier-Stokes equations.

Analytical solutions to Navier-Stokes equations around simple geometries are known, but when complex geometries are concerned numerical methods have to be used.

The finite element is an approximate method of solving differential equations of boundary and initial value problems in engineering and mathematical physics. Main idea of this method is to divide a continuos domain into so called finite elements of

several convenient shapes such as triangles, quadrilaterals, bricks, rings, etc. Choosing suitable points called nodes at the corners and within the elements, the variable in the differential equation is written as a linear combination of appropriately selected interpolation functions and the values of the variable or its derivatives specified at these nodes.

After the development of the finite element method the applications to the fluid dynamics or aerodynamics emphasize the effectiveness of the method.[2]

In the finite element method we may use either the variational principles or weighted residuals through approximations. In finite element applications to fluid dynamics, the Galerkin Method is often considered the most convenient tool for formulating finite element models since it requires no variational principles and no higher order interpolation functions.

The Finite Element Method, with its favorable features such as easy handling of complex geometries, simple solution algorithms and elegant mathematical theory, has become a powerful tool in analysis of complex flow which involve high Reynolds numbers and strong separation. In time dependent problems , numerous researchers have utilized schemes employing a fractional step approach.

In this study, the time-dependent, incompressible, viscous flow is considered. The governing equations are the Navier-Stokes equations and the continuity equation.

The governing equations are solved by a new version of the fractional step method proposed by Mizukami and Tsuchiya [3] which is essentially based on Chorin's fractional step method. In Chorin's method, the essential boundary conditions for the normal component of the velocity must be embodied into the discretized continuity equation which leads to great difficulties. In the present method to eliminate the above complexity a potential function with a single degree of freedom at each node is introduced and a Poisson equation for the potential is directly discretized, in which the essential boundary condition for the normal component of the velocity is treated as the natural boundary condition for the potential which still preserves the elliptic character of the physical problem. This method is also applicable to steady state flow problems [4].

The Galerkin finite element method is used for the spatial discretization of the equations. 8-node parametric brick elements with trilinear interpolation functions for velocity and potential and piece wise constants for pressure are used.

The pressure field at each time level is obtained from an auxiliary potential function with the solution of a Poisson's equation, where an Element by Element (EBE) iteration procedure with preconditioned conjugate gradient (PCG) is employed.

There is a restriction on the time step size in order to obtain a stable solution. Naturally, for computational efficiency, large time steps are desirable for transient-type problems. However, to obtain accurate transient solutions, reasonably small time steps must be selected. This trade-off provides a reasonable balance between accuracy and stability for the study under consideration. With adjustment for the three dimensional brick elements, the stability requirement on a time step Δt is

$$\Delta t < \frac{1}{(2 / R)(h^{-2} + k^{-2} + l^{-2}) + |u|h^{-1} + |v|k^{-1} + |w|l^{-1}} \quad (1)$$

where Re is the flow Reynolds number and h, k and l are the smallest lengths in the x, y, z directions, respectively, of a brick element. Finally u, v, w are the velocity components whose absolute values play a role in the formula. [5]

The method is more effective in three-dimensional problems than two-dimensional one since it only the poisson equation for the scalar potential which must be solved in either case. Nevertheless, analysis of high Reynolds number flow requires fine meshes, thus reducing considerably the maximum allowable time step, due to the well-known stability problem of an explicit method [4].

Viscous flow involves high gradients flow variables near solid body surfaces. Therefore, an accurate analysis demands very fine grids about the surface. As a result, the maximum allowable time step is considerably reduced, due to the well-known stability problem of an explicit method. Obviously, double precision computation is also must. However, when the researcher is limited with the available computer power, the resulting excessive memory and computing time requirement become a major problem. One way to circumvent this problem is to cluster grid points near the surface and have much larger grid cells away from the body. However unfortunately, this can not be done as desired since the the size ratio of the adjacent grid cells must

not be greater than a certain small value if one to obtain a physically meaningful solution.

In the present work, a reduced boundaries procedure which saves both from the computation time and the storage requirement for external steady flow is proposed. In this procedure, the solution is first obtained for relatively coarse and uniform grid which is not able to give accurately enough details of the flow near the body. The infinity boundary conditions are imposed along the outer boundary, as usual. Having the solution converged to the desired accuracy, the size of the domain reduced, by a factor of three, or in other words, the boundaries of the domain moved closer to the body. However, the number of grid points is kept constant. Thus, a finer near body grid results. The required conditions in and along the boundaries of the new domain are imposed from the previous coarser grid solution. The moving of boundaries can be repeated until the desired fineness near the surface is obtained. Since the first grid consist of a coarse grid of relatively larger compared to a fine grid's, thus reducing the convergence time considerably.[4]

The method is first tested and calibrated with investigating the flow past a sphere. For a $Re = 100$ the flow field results are obtained. Before applying reduced boundaries method, computations are performed on a fine grid and the results are compared with literature. This solution is used as a reference for the solutions obtained from reduced boundaries method. The grid consist of 56×41 points (circumferential x radial). The grid is clustered near the body surface. Computational domain extends to about 10 radii of the sphere. The time step is taken as $\Delta t = 0.005$. After 1600 time steps a certain convergence is reached.

Then reduced boundaries procedure is applied. The whole domain extends about 10 radii from the origin of the sphere. The whole domain in the starting grid is 56×25 points (circumferential x radial). Applying three times the boundary reduction was sufficient to obtain good results for surface pressure and skin friction coefficient distributions. A value of 0.01 for dt is selected. After 1000 time steps a certain convergence is reached. At this time the boundaries moved closer to the surface. The second grid extends about 4 radii from sphere center. The necessary conditions are obtained from readily obtained solution previous coarser grid solution. The conditions at the outer boundary are kept constant during each solution. This time a value of $dt=0.005$ is selected. After 1500 time steps again a certain convergence is reached. At the next step the domain extends to about 2.21 radii and $dt=0.001$. After 3319 time

steps a certain converge is reached. As clearly seen the skin friction coefficient moves to its correct distribution as the domain is reduced towards a finer grid with fixed number of points.

Finally the procedure is applied to the flow around a building. The building is a rectangular geometry standing on an infinite floor. The procedure used for the sphere is also used here. During reduced boundaries procedure, because of grid structure, less node have to be used on the external surface for the flow problem around a building. However, the reduced boundaries method requires the node number of the external surface to be constant. To overcome this problem, linear surface interpolation is employed on the external surface.

For all solutions, pressure coefficient, friction coefficient and converge history are compared with the reference solutions and literature.



Bölüm 1. Giriş

Hesaplamalı akışkanlar mekaniği (CFD) fiziksel olayların simülasyonu için sayısal tekniklerin geliştirilmesinde her zaman öncü bir rol oynamıştır. “Hesaplamalı Mekanik” adı altında toplanabilecek bir çok disiplinin yanısıra bu liderliğe birçok sebep de katkıda bulunmuştur. Bunlardan ilki, akışkanların doğrusal olmayan davranışlarıdır. İkincisi, akışkan hareketini açıklayan diferansiyel denklemlerin hiperbolik/eliptik olan karakteridir. Bu hiperbolik/eliptik karakter algoritmik zorluğu artırır. Üçüncü neden, uçak ve uzay araçları tasarlayan mühendislerin köprüleri tasarlayan meslekdaşlarından daha doğru performans tahminlerine ihtiyaç duymasındır. Dördüncü neden ise, yukarıda açıklanan üç nedenden dolayı CFD problemlerinin çözümünde çok fazla nokta kullanılmasının gerekmesidir. Kullanılan çok sayıdaki nod hafıza ve hesaplama hızı olarak bilgisayar kaynaklarını zorlar. Bu yüzden CFD problemleri diğer disiplinlerdeki problemlerden daha büyük boyuttadır ve büyük çapta bilgisayar kaynaklarına ihtiyaç duyar, bu ise çözüm algoritmalarının oluşturulmasını oldukça karmaşılaştırır. Örneğin, yapısal mekanikte bir problem 5×10^3 nodu geçerse büyük kabul edilir, CFD’de ise büyük 5×10^5 grid noktasından daha fazla demektir.

20 yıl boyunca CFD sonlu farklar metodu etrafında büyüdü. Çünkü bunların anlaşılması kolay, yazılması kolay, vektörize edilmeleri kolaydı. Sonlu farklar ile kullanılan yapısal gridler çözülen akışkanların basit geometrik yapılarını uygun şekilde karşılıyordu. Ancak bilgisayarlar daha büyük ve hızlı oldukça, gittikçe daha karmaşık akış alanlarının simülasyonu için çabalara girişildi ve kısa zamanda yapılandırılmış

gridlerin bu alanları karşılayacak kadar esnek olmadıkları ortaya çıktı. Bu anda CFD sahnesine yapılandırılmamış gridler ve sonlu elemanlar teknikleri girdi. [6].

Sonlu elemanlar, mühendislikte ve matematiksel fizikte sınır ve başlangıç değer problemlerinin diferansiyel denklemlerini çözmek için bir yaklaşık metoddur. Bu metodun temel fikri sürekli bir bölgeyi, üçgenler, çokgenler, tuğlalar, halkalar, vs. gibi bir çok sonlu eleman denilen uygun şekillere bölmektir. Elemanların köşelerinde ve içinde nod denilen uygun noktalar seçerek diferansiyel denklemdaki değişken, uygun şekilde seçilmiş interpolasyon fonksiyonları ve bu nodlarda tanımlanan değişkenin veya türevlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılır.

Sonlu elemanlar yöntemi, ilk kez büyük uzay araçlarının yapı analizi için hava yapı mühendisleri tarafından kullanılmıştır. Son yıllarda, sonlu elemanlar yöntemi, kompleks akış problemlerinin bilgisayar çözümleri için çok popüler bir teknik olmuştur. Yapı ve katı mekaniği, ısı geçişi, yağlama problemleri gibi mühendislik analizi gerektiren tüm alanlarda kullanılır [2].

Akım alanının tam bir analizi yapılırken akımı belirleyen denklemlerin çözümü için seçilecek yöntem, büyük ölçüde incelenecek geometri ve akım alanına bağlı olacaktır. Ancak hangi yöntem kullanılırsa kullanılsın daha iyi bir analiz için ayırık noktalarla temsil edilen akım alanında daha fazla ayırık nokta kullanmak gerekmektedir. Bunun doğal sonucu ise yüksek bellek kapasiteli ve hızlı bilgisayarların kullanılması gereğidir. Araştırmacı özellikle bilgisayar kapasitesi bakımından sınırlandırılmış ise bu sorunu yenmek üzere ya kullanılan denklemlerde bir takım basitleştirmelere gitmek yada uyguladığı sayısal yöntemlerde değişiklikler yapmak durumundadır.

Son zamanlarda bilgisayar donanımındaki gelişmelerle beraber çok karmaşık akım problemlerinin analizi ve sayısal çözümünü mümkün kılan bazı güçlü metodlar geliştirilmiştir. Bunlardan en etkilileri mutigrid ve multiblok yöntemleridir.

Multigrid yönteminin temel fikri farklı büyüklükte gridler kullanarak hatayı azaltmaktır. Hatanın yüksek frekanslı bileşenleri sık bir grid ile düzgünleştirilerek kaldırılabilir, düşük frekanslı bileşenleri kaba bir grid ile sönümlenir.

Multigrid metodu, başlangıçta eliptik denklemlerin çözümü için geliştirilmiş iteratif bir yöntemdir. Son yıllarda son derece etkili, multigride dayalı teknikler ortaya konmuştur. Uygulama alanları gittikçe büyümektedir ve hem eliptik hem parabolik operatörlerin ayrıklaştırılmasından elde edilen denklem sistemleri bu şekilde başarı ile çözülmüştür. Günümüze kadar tüm uygulamaların ortak özelliği kullanılan grid sisteminin temel yapısı olmuştur: Bir başlangıç seyrek gridi içinde gömme (embedding) ile veya arka arkaya dizme (nesting) ile ardışık olarak daha sık gridler dizisi oluşturulmuştur. Bu süreçte ortaya çıkan bir zorluk en sık grid için belli bir yapı kabulünde bulunulmasıdır. Bu kabul karmaşık geometrik şekilli sınırlar içeren gerçekçi endüstriyel problemlerin analizinde zorluklara yol açar. Yukarıda bahsedilen zorluktan dolayı bir çok araştırmacı şu anda cebirsel multigrid yöntemlerini araştırmaktadır [7].

Birçok akım probleminin çözümü için multigrid tekniği kullanılmasının en önemli nedeni hesaplama zamanında belirgin bir ölçüde azaltma meydana getirmesidir.

Bu çalışmada, karmaşık akım problemlerinin bellek ve zamandan tasarruf sağlayarak çözümüne ilişkin, sonlu elemanlar ile ayrıklaştırma yapan bir sayısal yöntem sunulmaktadır.

Yöntem, üç boyutlu, zamana bağlı, sıkıştırılmaz genel viskoz akışlar için incelenmiştir.

Bilindiği gibi bu tip bir akışı yöneten belirleyici denklemler Navier-Stokes denklemleri ve süreklilik denklemleridir. Bu denklemlerin çözümleri, ilkel değişkenler denilen hız

ve basınca göre düşünölmüştür. Çalışmanın “Matematiksel Formölasyon” isimli ikinci bölümünde bu denklemlerin çıkarılışı görölebilir.

Bu denklemlerin çözümünde karşılaşılan zorluklardan biri, momentum denkleminde zamana göre türevler ve basınç değışkeni bulunmasına karşın süreklilik denkleminde bu terimlerin bulunmamasıdır. Bu güçlüğü aşmak için kullanılan çeşitli yöntemlerden biri denklemlerin zaman içerisindeki integrasyonlarını iki aşamada gerçekleştirmektir. Bu çalışmada kullanılan Helmholtz ayrıklaştırmasına dayalı Parçalı Adım Yöntemi de iki aşamalı bir çözüm sağlar. İlk aşamada süreklilik denkleminde sıkışmazlık şartını sağlamaksızın girdap alanı belirlenir; ikinci aşamada ise sıkışmazlık şartını sağlayacak şekilde bir düzeltme potansiyel fonksiyonu bulunarak hız ve basınç alanı hesaplanır.

Mizukami ve Tsuchiya [3] ve Aslan ve ark. [4] bu yöntem ve denklemleri kullanmışlardır.

Denklemlerin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözülebilmesi için gerekli integral ifadeler Galerkin formölasyonu ile elde edilmiş üç boyutta 8-düğömlü izoparametrik elemanlar ve hız için parçalı trilineer, basınç için parçalı sabit interpolasyon formölleler kullanılarak çeşitli geometriler için çözüm yapılmıştır. Çalışmanın “Sonlu Elemanlar” isimli 3. Bölümünde bu denklemlerin elde edilişı ve çözümü bulunabilir. Bunlardan düzkanal ve uçaklarda kullanılan bir dış yapıya ait olanları referans [4]de görölebilir

Denklemler, Chorin’in parçalı adımlar yöntemine dayanan Mizukami ve Tsuchiya [3] tarafından sunulan yeni bir parçalı adımlar yöntemi ile çözülmüştür. Chorin’in metodunda hızın normal bileşeni için olan sınır koşulları ayrıklaştırılmış süreklilik denklemini içerisinde konulmak zorundadır, bu da büyük zorluklara yol açar. Sunulan metodda yukarıdaki karmaşıklığı ortadan kaldırmak için her noktada tek serbestlik dereceli bir potansiyel fonksiyonu kullanılmıştır ve potansiyel için Poisson denklemini çözülmüştür. Burada hızın normal bileşeni için olan sınır koşulu, potansiyel için fiziksel problemin eliptik karakterini halen koruyan doğal sınır koşulu olarak

alınmıştır. Bu metod kararlı hal akış problemlerine de uygulanabilir. Buna ek olarak, metod üç boyutlu problemlerde iki boyutlu durumlarından daha etkilidir. Çünkü üç boyutlu problemlerde bile, çözmemiz gereken sadece hız potansiyeli için Poisson denklemidir. [4]

Üç boyutlu uygulamalarda artan düğüm sayısı eldeki bilgisayar olanakları ile çözüme ulaşmayı güçleştirmektedir. Bu güçlüğü aşabilmek amacı ile, sınırlı sayıda ayrık nokta ile hassas çözümler elde edebilmeyi mümkün kılan bir yöntem uygulanmıştır.

Alan Daraltma Yöntemi olarak adlandırılan bu yöntemde hesap alanı ilk aşamada cisimden başlayarak serbest akım şartlarının uygulandığı, cisimden uzak bir sınıra kadar uzanır. Bu alan üzerine kurulan seyrek bir sayısal ağ ile yakınsama elde edilene kadar hesaplamalar sürdürülür. Bundan sonraki aşamada aynı nokta sayısı ile fakat daha dar yani dış sınırı cisme daha yakın bir alan üzerine kurulan sayısal ağ ile hesaplama yapılır. Bu sayısal ağın dış sınırındaki noktalarda ise bu kez bir önceki hesaplamalardan bu noktalar için elde edilen değerler sınır şartı olarak uygulanır. Böylece cisim çevresinde istenilen mertebede hassas bir sayısal çözüm elde edilebilir. Çalışmanın “Alan Daraltma Yöntemi” isimli 4.bölümünde bu yöntemin çeşitli örneklerle uygulanması detaylı olarak anlatılmıştır. Yönteme ait 2-Boyutlu örnekler referans [4] ile verilmiştir. Bu çalışmada 3-Boyutlu uygulamalar ele alınmıştır.

Metod öncelikle $Re=100$ için üç boyutlu küre etrafında akışın incelenmesi ile test edilmiştir. Daha sonra ikinci çalışma olarak yere oturmuş bir bina etrafında akış çözülmüştür.

Bölüm 2. Matematiksel Formülasyon

2.1 Sıkıştırılamaz Viskoz Akış

Sıkıştırılamaz, zamana bağlı bir viskoz akışı dört denklemle tanımlayabiliriz. Bunlar Navier-Stokes denklemlerinin üç boyutlu uzay koordinatında yazılmış gösterimleri ve süreklilik denklemdir.

Süreklilik denklemi,

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

kütle korunumu prensibinden türetilmiştir. Navier-Stokes denklemleri,

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right) = -\nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \vec{u} \quad (2.2)$$

momentumun korunumu prensibinden türetilmiştir. (hacim kuvvetleri ihmal edilmiştir.) Burada $\vec{u}$ hız vektörü, p basınç, ν akışkanın kinematik viskozitesidir. Navier-Stokes denklemleri yalnızca basınç, viskozite ve eylemsizlik kuvvetlerini içermektedir.

Bu şartlar altında boyutsuz sıkıştırılamaz bir akış için N-S denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.3c)$$

Burada u, v, w hız vektörü $\vec{u}$ 'nin sırasıyla x, y, z yönündeki bileşenleridir. Re , Reynold sayısıdır ve şöyle ifade edilir.

$$Re = \frac{U_{\infty} \ell \rho}{\mu} \quad (2.4)$$

Burada ρ akışkanın yoğunluğu, ℓ karakteristik uzunluk, U_{∞} serbest akışkan hızıdır. [8], [9]

2.2. Parçalı (Fractional) Adımlar Yöntemi

Metodumuz, Helmholtz ayrıklaştırma teoremine dayanan bir yöntemdir.

$t = m\Delta t$ de (Δt zaman adımıdır) $\vec{u}^m$ ve p^m bilinen çözümler olursa $\vec{u}^{m+1}$ ve p^{m+1} aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m}{\Delta t} + (\vec{u}^m \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^m = -\vec{\nabla} p^{m+1} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}^m \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}^{m+1} = 0 \quad (2.6)$$

$$\vec{u}^{m+1} + \Delta t \vec{\nabla} p^{m+1} = \vec{u}^m + \Delta t \left[\frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{u}^m - (\vec{u}^m \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^m \right] \quad (2.7)$$

$\vec{u}^{m+1}$ 'in selenoidal ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{m+1} = 0$) ve $\vec{\nabla} p^{m+1}$ 'in irrotasyonel ($\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} p^{m+1} = \vec{0}$) olması nedeniyle (2.7) denkleminin sol tarafı, sağ tarafının Helmholtz ayrıklaştırmasıdır.

Helmholtz'un ayrıklaştırma prosedürü bu yöntem için anahtar niteliktedir. Bu ayrıklaştırmayı aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

İlk önce $u^{m+\frac{1}{2}}$ yi tanımlayalım.

$$\vec{u}^{m+\frac{1}{2}} = \vec{u}^m + \Delta t \left[-\vec{\nabla} p^m + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2 \vec{u}^m - (\vec{u}^m \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^m \right] \quad (2.8)$$

(2.7) denkleminde p^{m+1} yerine p^m kullanıldığı için genel olarak $\vec{u}^{m+\frac{1}{2}}$ selenoidal değildir.

(2.7) ve (2.8) denklemlerinin rotasyonelini alırsak

$$\vec{\nabla} \times \vec{u}^{m+1} = \vec{\nabla} \times \vec{u}^{m+\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

elde ederiz. (2.9)'un anlamı

$$\vec{u}^{m+1} = \vec{u}^{m+\frac{1}{2}} + \vec{\nabla} \Phi \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada Φ bir potansiyel fonksiyonudur.

(2.10) denkleminin diverjansı alınırsa ve (2.6) denklemini kullanılırsa

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^{m+\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

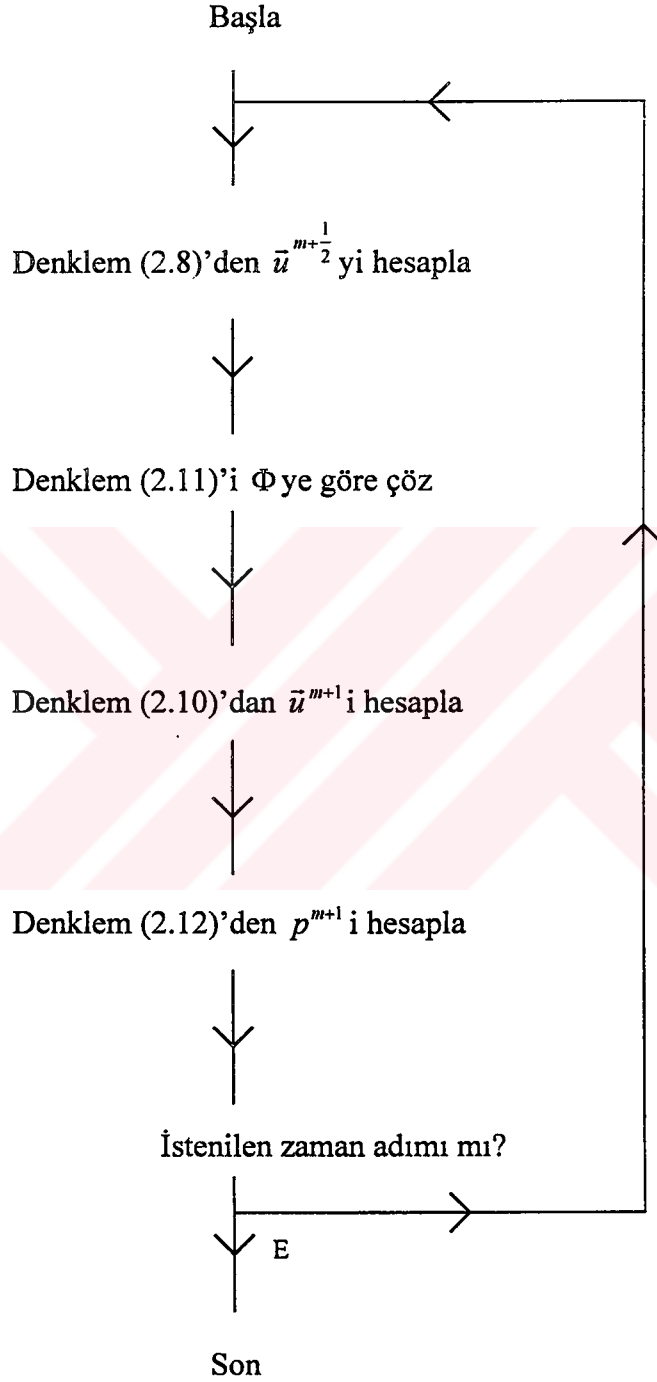
bulunur. (2.11) eşitliğinden Φ potansiyel fonksiyonunu (2.10) eşitliğinden $\vec{u}^{m+1}$ hızını elde ettik. (2.7) ve (2.8) denklemini (2.10) denklemini içerisine koyulursa

$$\Delta t \vec{\nabla} p^{m+1} = \Delta t \vec{\nabla} p^m - \vec{\nabla} \Phi \quad (2.12)$$

$$p^{m+1} = p^m - \frac{\Phi}{\Delta t} \quad (2.13)$$

olur. Burada integral sabiti sıfıra eşit kılınmıştır. Şekil (2.1)'de algoritma tanımı verilmiştir. [3]





Şekil 2.1

2.3. Başlangıç ve Sınır Koşulları

Ω çözülecek akış bölgesi, Γ bu akış bölgesi(Ω)nin sınırı olsun.

Tüm noktalar için verilen başlangıç koşulları:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,0) &= \bar{u}^0(x) \\ p(x,0) &= p^0(x)\end{aligned}\tag{2.14}$$

olsun. U^0, p^0 $t=0$ 'da bilinen değerlerdir.

Aşağıda verilen sınır şartları çözümümüze uygulanmıştır.

$$\bar{u} = \bar{g} \quad \Gamma_1 \text{ üzerinde} \tag{2.15}$$

$$-p\bar{n} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \bar{h} \quad \Gamma_2 \text{ üzerinde} \tag{2.16}$$

$\bar{g}$ ve $\bar{h}$ verilen sınır datalarıdır. $\bar{n}$ sınır boyunca dışa dönük normal vektörüdür.

$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)$ sınır boyunca dışa dönük normal türevidir.

Γ_1 ve Γ_2 , Γ 'nın aşağıdaki şartları sağlayan alt kümeleridir.

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \cup \Gamma_2 &= \Gamma \\ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 &= \emptyset\end{aligned}\tag{2.17}$$

Bizim yöntemimizde, Φ potansiyel fonksiyonu için verilmiş sınır şartları olmalıdır.

Bu şartların aşağıdaki gibi ortaya konduğunu kabul edersek

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial n} &= 0 & \Gamma_1 \text{ üzerinde} \\ \Phi &= 0 & \Gamma_2 \text{ üzerinde}\end{aligned} \right\} \tag{2.18}$$

(2.10) ve (2.12) denklemlerinden (2.18) sınır şartlarını görebiliriz.

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u}^{m+1} &= \vec{n} \cdot \vec{u}^{m+\frac{1}{2}} & \Gamma_1 \\ p^{m+1} &= p^m & \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Farkedilmelidir ki, (2.19) sınır şartı, sınırdaki hızın normal yöndeki hız bileşeni içindir ve hızın teğet bileşeni için birşey söylenemez. Genel olarak $\vec{u}^{m+\frac{1}{2}}$ nin teğetsel bileşeni $\vec{u}^{m+1}$ in teğetsel bileşeninden farklıdır ve bu fark $\vec{u}^{m+1}$ kararlı çözüme ulaşınca küçülür.

Bölüm 3. Sonlu Elemanlar Formülasyonu

3.1 Galerkin Formülasyonu

Bu bölümde, Galerkin Sonlu Elemanlar tekniğini, eleman matris denklemlerinin elde edilmesini ve bu denklemlerin çözümünü ele alacağız. [3]

Bu bölümde görülen bütün denklemler, uniform hız (U_∞), ve küre çapı (D) ile boyutsuzlaştırılmıştır.

Bir önceki bölümden (2.8) ifadesini tekrar yazalım.

$$u^{m+\frac{1}{2}} = u^m + \Delta t \left[-\frac{\partial p^m}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^m}{\partial z^2} \right) - u^m \frac{\partial u^m}{\partial x} - v^m \frac{\partial u^m}{\partial y} - w^m \frac{\partial u^m}{\partial z} \right] \quad (3.1a)$$

$$v^{m+\frac{1}{2}} = v^m + \Delta t \left[-\frac{\partial p^m}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v^m}{\partial z^2} \right) - u^m \frac{\partial v^m}{\partial x} - v^m \frac{\partial v^m}{\partial y} - w^m \frac{\partial v^m}{\partial z} \right] \quad (3.1b)$$

$$w^{m+\frac{1}{2}} = w^m + \Delta t \left[-\frac{\partial p^m}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w^m}{\partial z^2} \right) - u^m \frac{\partial w^m}{\partial x} - v^m \frac{\partial w^m}{\partial y} - w^m \frac{\partial w^m}{\partial z} \right] \quad (3.1c)$$

Şimdi Galerkin sonlu elemanlar tekniğini bu eşitliğe uygularsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\int_{\Omega} N_i \bar{u}^{m+\frac{1}{2}} d\Omega = \int_{\Omega} N_i \bar{u}^m d\Omega + \Delta t \left(\int_{\Omega} P^m \bar{\nabla} N_i d\Omega - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} (\bar{\nabla} N_i \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}^m d\Omega - \int_{\Omega} N_i (\bar{u}^m \cdot \bar{\nabla}) \bar{u}^m d\Omega + \int_{\Gamma} N_i \bar{h}_{\infty} d\Gamma \right) \quad (3.2)$$

8 nodlu izoparametrik tuğla elemanlarda hız ve potansiyel trilineer şekil fonksiyonları N_i ($i=1,8$) ile interpolate edildi. Basınç her elemanın merkezinde tanımlandı.

Hız aşağıdaki gibi interpolate edilirse

$$\begin{aligned} \bar{u}^{m+\frac{1}{2}} &= \sum_{i=1}^8 N_i \bar{u}_i^{m+\frac{1}{2}} \\ \bar{u}^m &= \sum_{i=1}^8 N_i \bar{u}_i^m \end{aligned} \quad (3.3)$$

Hızların interpolasyon değerini ve elemanların merkezindeki basınç değerlerini kullanarak ve eleman hacmi üzerinde denklemleri integre ederek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \bar{u}_j^{m+\frac{1}{2}} &= \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \bar{u}_j^m + \Delta t \left(\int_{\Omega} P_e^m \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \bar{k} \right) d\Omega \right. \\ &\quad - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \bar{u}_j^m - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} N_k u_k \bar{i} d\Omega \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} N_k u_k \bar{j} d\Omega - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} N_k u_k \bar{k} d\Omega \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Yukarıdaki ifade vektör formdadır. Bizim bu denklemi üç uzay yönünde ayrı olarak yazmamız gerekir ve böylece aşağıdaki matris denklemlerini elde ederiz.

$$M_{ij} u_j^{m+\frac{1}{2}} = M_{ij} u_j^m + \Delta t \left(B_{xi} + P_e^m C_{xi} - \frac{1}{Re} A_{ij} u_j^m - D_{ij}^m u_j^m \right) \quad (3.5a)$$

$$M_{ij} v_j^{m+\frac{1}{2}} = M_{ij} v_j^m + \Delta t \left(B_{yi} + P_e^m C_{yi} - \frac{1}{Re} A_{ij} v_j^m - D_{ij}^m v_j^m \right) \quad (3.5b)$$

$$M_{ij} w_j^{m+\frac{1}{2}} = M_{ij} w_j^m + \Delta t \left(B_{zi} + P_e^m C_{zi} - \frac{1}{Re} A_{ij} w_j^m - D_{ij}^m w_j^m \right) \quad (3.5c)$$

Burada

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega_e} N_i N_j d\Omega_e \\ A_{ij} &= \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega_e \\ B_{ai} &= \int_{\Omega_e} N_i h_a d\Omega_e \quad (\alpha = x, y, z) \\ C_{ai} &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} d\Omega_e \quad (\alpha = x, y, z) \\ D_{ij}^m &= \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} N_k u_k^m d\Omega_e + \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} N_k v_k^m d\Omega_e + \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} N_k w_k^m d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.6)$$

i, j, k indisleri eleman nod numaralarını gösterir. e indisi eleman numaralarını ve h_x, h_y, h_z ise $\vec{h}$ nin kartezyen bileşenlerini gösterir.

Daha az CPU zamanı kullanmak için 2 düzenleme uygulayacağız.

1. Eleman Matrisi M_{ij} , kütle matrisi olarak isimlendirilir. Hafızadan, işlem sayısından kazanmak için eleman seviyesinde satır toplamıyla matrisi iki boyuttan bir boyuta düşürdük yani toplanmış kütle matrisine(lumped mass) basitleştirilir.

2. Eleman matrisi D_{ij}^m (advection matris) aşağıdaki gibi değiştirilebilir.

$$D_{ij}^m = u_e^m Ex_{ij} + v_e^m Ey_{ij} + w_e^m Ez_{ij} \quad (3.7)$$

Burada

$$u_e^m = \frac{1}{Vol(\Omega_e)} \int_{\Omega_e} N_k u_k^m d\Omega_e \quad (3.8a)$$

$$Ex_{ij} = \int_{\Omega_e} N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega_e \quad (3.8b)$$

dır. Böylece $\bar{u}^{m+\frac{1}{2}}$ hızları elde edilebilir.

(2.11) denklemi için Galerkin yöntemine başvurulum böylece (2.18) numaralı sınır şartları denklemi şu matris denklemine yol açar.

$$\int_{\Omega_e} \bar{\nabla} N_i \bar{\nabla} \Phi d\Omega_e = \int_{\Omega_e} N_i \left(\bar{\nabla} \cdot \bar{u}^{m+\frac{1}{2}} \right) d\Omega_e \quad (3.9)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^8 N_i \Phi_i \quad (3.10)$$

(3.9) denklemi şu şekilde yazılabilir.

$$\int_{\Omega_e} \bar{\nabla} N_i \bar{\nabla} N_j d\Omega_e = \int_{\Omega_e} N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} u_j^{m+\frac{1}{2}} + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j^{m+\frac{1}{2}} + \frac{\partial N_j}{\partial z} w_j^{m+\frac{1}{2}} \right) d\Omega_e \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_j \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega_e &= u_j^{m+\frac{1}{2}} \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega_e \\ &+ v_j^{m+\frac{1}{2}} \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega_e + w_j^{m+\frac{1}{2}} \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.12)$$

A_{ij} ve Ex_{ij} matrisleri için (3.6b) ve (3.8b) denklemleri kullanılırsa

$$A_{ij}\Phi_j = Ex_{ij}u_j^{m+\frac{1}{2}} + Ey_{ij}v_j^{m+\frac{1}{2}} + Ez_{ij}w_j^{m+\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

elde edilir.

(2.10) için Galerkin metodunu uygulayalım.

$$\int_{\Omega_e} Ni\bar{u}^{m+1}d\Omega_e = \int_{\Omega_e} Ni\bar{u}^{m+\frac{1}{2}}d\Omega_e + \int_{\Omega_e} Ni\bar{\nabla}\Phi d\Omega_e \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} N_i N_j \bar{u}_j^{m+1} d\Omega_e &= \int_{\Omega_e} N_i N_j \bar{u}_j^{m+\frac{1}{2}} d\Omega_e + \bar{i} \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \Phi_j d\Omega_e + \bar{j} \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \Phi_j d\Omega_e \\ &\quad + \bar{k} \int_{\Omega_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} \Phi_j d\Omega_e \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde ederiz. Burada $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektörleri x, y, z yönlerindeki birim vektörlerdir.

Matris denklemini yazalım.

$$\left. \begin{aligned} M_{ij}u_j^{m+1} &= M_{ij}u_j^{m+\frac{1}{2}} + E_{xij}\Phi_j \\ M_{ij}v_j^{m+1} &= M_{ij}v_j^{m+\frac{1}{2}} + E_{yij}\Phi_j \\ M_{ij}w_j^{m+1} &= M_{ij}w_j^{m+\frac{1}{2}} + E_{zij}\Phi_j \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Denklemlerde eleman matrisi M_{ij} “lumped” edilmiş halde kullanılmıştır.

3.2. EBE Formülasyonu

(3.16) denkleminin her seviyesinde Poisson denklemlerinin çözümü için tanımlanan bir Eleman Eleman (EBE) iterasyonu yöntemi kullanılmıştır[5]. Sistemin ön şartları A

A matrisinin diyagonaline göre kullanılmıştır. W ön şartlandırıcısı A matrisinin diyagonal elemanlarının bir araya getirilmesinden oluşturulmuş bir diyagonal matristir.

$$W_{ii} = \sum_e A_{ii}^e \quad (3.17)$$

indisler kaldırıldıktan sonra ön şartlar

$$\bar{A} = W^{-\frac{1}{2}} A W^{-\frac{1}{2}} \quad (3.18)$$

$$\bar{\Phi} = W^{-\frac{1}{2}} \Phi \quad (3.19)$$

$$\bar{F} = W^{-\frac{1}{2}} F \quad (3.20)$$

olarak oluşur. İzleyen matris denklemlerinde sonuç

$$\bar{A} \bar{\Phi} = \bar{F} \quad (3.21)$$

bulunur.

Aşağıdaki yöntem (3.21) denkleminin çözüm iterasyonu için kullanıldı.

Adım 0 : Başlangıç

$$\bar{\Phi}^0 = 0 \quad \text{olarak seç}$$

$$\text{özdeğer} \quad \mathbf{r}^0 = \bar{F} - \bar{A} \bar{\Phi}^0 = \bar{F}$$

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{r}^0 \quad \text{olarak tanımla}$$

Adım 1 : Çözümü ve özdeğeri güncelleştirmek üzere doğrusal arama yap

$$\text{katsayıyı hesapla} \quad \lambda_m = (\mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}^m) / (\bar{A} \mathbf{P}^m \cdot \mathbf{r}^m)$$

$$\text{çözüm} \quad \bar{\Phi}^{m+1} = \bar{\Phi}^m + \lambda_m \mathbf{P}^m$$

özdeğer $\mathbf{r}^{m+1} = \mathbf{r}^m - \lambda_m \bar{A} \mathbf{P}^m$

Adım 2 : $\|\mathbf{r}^{m+1}\| / \|\mathbf{r}^0\| < 0.5 \times 10^{-5}$ yakınsaklık testini yap.

Eğer yakınsaklık sağlanıyor ise

Çözüm $\Phi = \mathbf{W}^{-\frac{1}{2}} \bar{\Phi}$ olarak elde edilir.

Adım 3 : Yeni eşlenik arama yönü:

katsayıyı hesapla $\alpha_m = (\mathbf{r}^{m+1} \cdot \mathbf{r}^{m+1}) / (\mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}^m)$

Bul $\mathbf{P}^{m+1} = \mathbf{r}^{m+1} + \alpha_m \mathbf{P}^m$

adımı artır $m = m + 1$

Adım 1'e git.

(2.12) ve (2.13) denklemlerinden lineer Φ fonksiyonu, parçalı olarak sabit P basıncına aşağıdaki şekilde sadeleştirilir.

$$P_e^{m+1} = P_e - \frac{\Phi_e}{\Delta t} \quad (3.17)$$

Burada Φ_e elemanın merkezindeki değeri belirtir ve $\bar{u}_e$ ile aynı şekilde tanımlanır.

$$\Phi_e = \frac{1}{Vol(\Omega_e)} \int_{\Omega_e} N_k \Phi_k d\Omega_e \quad (3.18)$$

Böylece $\bar{u}^{m+1}$ hızlarını ve P_e^{m+1} basıncını elde ettik. Daha sonra aynı prosedürü bir sonraki zaman çözümü elde edilir.

Bölüm 4. Alan Daraltma Yöntemi

Viskoz akış, cisim yüzeyi yakınında akım değişkenlerinin büyük gradyenlerini içerir. Bu yüzden, viskoz akış problemlerinde hassas bir çözüm yüzey üzerinde çok sık bir ağ oluşturulması ile elde edilir. Bunun sonucu olarak, bir açık şema kullanan yöntemlerde izin verilen maksimum zaman adımı önemli ölçüde azalır. Yüzey yakınında grid noktalarını kümelendirmek, cisimden uzaklaştıkça daha büyük grid hücreleri almak bu problemi yoketmenin bir yoludur. Ancak bu istenildiği gibi yapılamaz. Nedeni grid hücreleri arasındaki büyüklük oranı, fiziksel olarak anlamlı bir çözüm elde etmek için belirli bir küçük değerden daha büyük olamaz. [4]

Dış akım problemlerinde cisim ile cisimden etkilenmemiş akış sınırı arasındaki uzaklık arttıkça istenilen çözünürlüğü sağlamak için hafıza gereksinimlerinde önemli bir artış olacaktır. Özellikle üç boyutlu uygulamalarda artan nokta sayısı eldeki bilgisayar olanakları ile çözüme ulaşmayı güçleştirmektedir. Bunun üstesinden gelmek için araştırmacılar çeşitli yöntemler kullanmak zorunda kalmışlardır. Bu çalışmada bu problemi aşmak için bir "Alan Daraltma Metodu" uygulanmıştır. Bu yöntemde, nokta sayısı sabit tutulmuş ve akış sınırı gittikçe cisme yaklaştırılmıştır. Böylece az nokta sayısı fakat daha sık grid kullanarak hem hassas çözümler elde etmek hemde zamandan ve hafıza gereksiniminden kazanmak düşünülmektedir.

Bu yöntemin çeşitli geometrilere uygulanması ve sonuçları aşağıdaki paragraflarda detaylı olarak anlatılmaktadır.

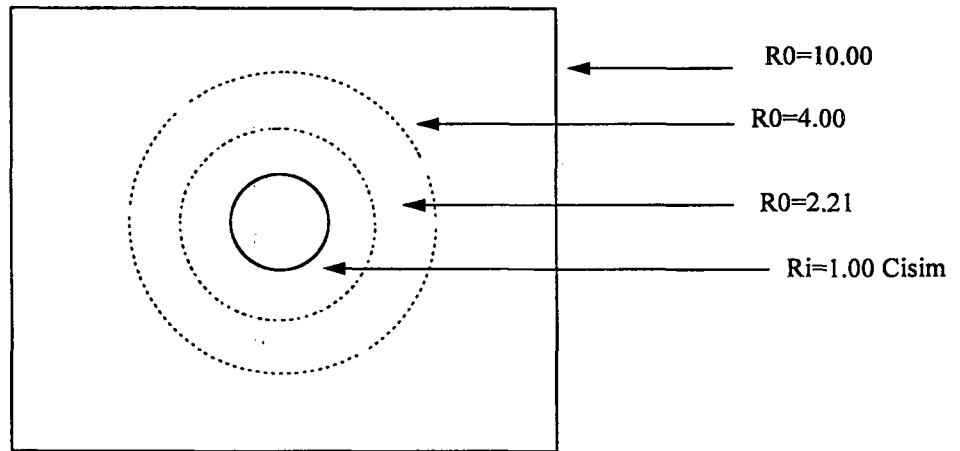
Öncelikle çözüm, cisim yakınındaki akış ayrıntılarını yeterince vermeyen, nispeten kaba ve uniform bir grid için elde edilir. Çözüm istenen hassasiyete yakınsadıktan sonra bölgenin büyüklüğü bir miktar azaltılır. Başka bir deyişle, bölgenin sınırları cismin daha yakınına taşınır. Ancak grid nokta sayısı sabit kalır. Bu daha sık bir grid demektir. Bu yeni grid üzerinde, sınır şartları bir önceki kaba çözümün o noktadaki hız değerleri olarak alınır. Akış alanının çıkış sınırlarında ise çıkışa dik yönde sıfır hız gradyanları tanımlanır. Çözüm daimi hale ulaşıncaya kadar sürdürülür.

Açık şema kullanan yöntemlerde zaman adımı Δt 'nin seçilmesinde bazı kısıtlamalar getirilmiştir. Aşağıdaki formülde zaman adımı seçimi gösterilmiştir.

$$\Delta t < \frac{1}{(2 / \text{Re})(h^{-2} + k^{-2} + l^{-2}) + |u|h^{-1} + |v|k^{-1} + |w|l^{-1}} \quad (4.1)$$

Burada Re, Reynolds Sayısı, h, k ve l sonlu eleman ağı üzerinde bir elemanın x,y,z yönlerindeki en küçük uzunlukları, u, v, w sırasıyla x,y,z yönündeki hız bileşenleridir.[5]

Şekil (4.1) de alanın orjinal halinden kademe kademe cisme yaklaştırılması görülmektedir.



Şekil (4.1) Orjinal Alan ve Daraltılmış Bölgeler

4.1. Yöntemin Küre Etrafındaki Akışa Uygulanması

Öncelikle, yöntemi deneme amacıyla, küre etrafındaki laminar akım incelenir. Araştırmacıların küre üzerindeki deneysel gözlemleri gösterir ki Reynolds sayısı arttıkça akış alanı üzerinde bir kompleks bölge oluşur. Bu durum, düşük Reynolds sayıları için kürenin arkasında oluşmuş bir eksenel simetrik kararlı dönel iz bölgesinin oluşumu ve büyümesi ile karakterize edilir. Reynolds sayısı arttıkça bu kararlı eksenel simetrik yol bir süre sonra kopar [10].

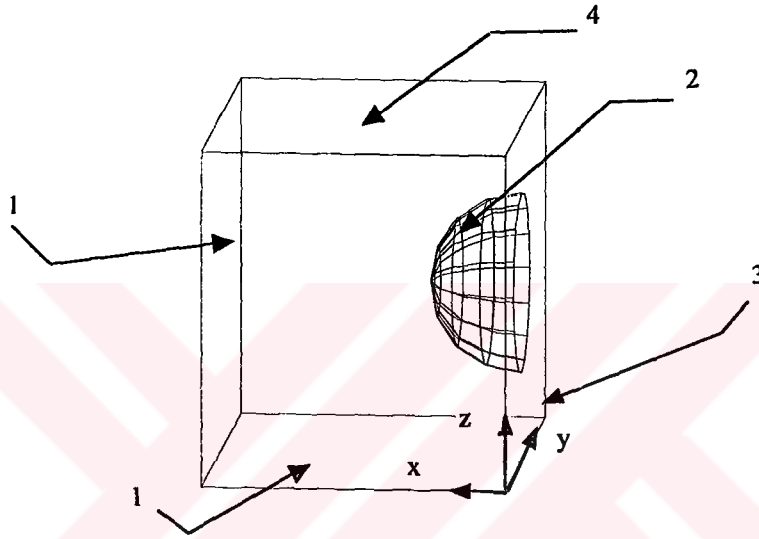
Bu kompleks akış alanına rağmen küre üzerinde daha önce yapılmış birçok çalışma bulunması ve kürenin eksenel simetrik özelliği, uygulanan alan daraltma yönteminde örnek çözüm olarak küre seçilmesine neden olmuştur.

Re=100 için yarım küre üzerinde yapılan bu ilk çalışmada alan daraltma yöntemini uygulamadan önce çok noktalı, sık bir grid üzerinde hesaplama yapılır diğer bilinen kaynaklarla karşılaştırılır ve bu çözüm referans çözüm olarak kabul edilir. Daha sonra nokta sayısı azaltılarak nispeten daha kaba bir grid üzerinde çözüm yapılır ve son olarak bu kaba gride alan daraltma yöntemi uygulanır. Alan daraltma sonucu elde edilen çözümlerin referans çözümlerle uygun olduğu görülür.

4.1.1. Referans Çözüm

Referans çözüm olması açısından çok noktalı sık bir grid üzerinde çözüm yapılır. Hesaplama alanı üzerinde kullanılan nod sayısı 25,297, eleman sayısı 23,520 dir. Küre üzerinde radyal yönde minimum ağ aralığı $\Delta r = 0.001$ küre yarıçapındadır. Ağ uzunluğu yüzeyden itibaren 10 çap genişler. Hesap alanı üzerinde radyal yönde 41 nokta, küre çevresinde 56 nokta bulunmaktadır. Hesaplamalar Reynolds sayısı 100 için yapılır. Şekil(4.7) de y-z simetri düzlemi üzerinde küre yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı görülebilir.

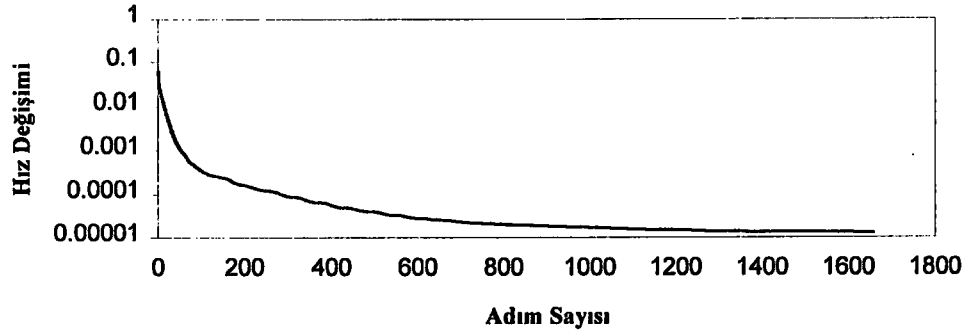
Sınır şartı olarak cisim üzerinde kaymazlık şartı ($u=v=w=0$), cisimden uzakta sınır bölgesinde serbest akış hızı, çıkış sınırında çıkışa dik yönde sıfır hız gradyanları sınır şartı olarak verilir. Simetri düzlemi üzerinde simetri şartı yani bu düzlem üzerinde normal yöndeki hız bileşeni ve türevleri sıfır şartı konulur. Şekil(4.2) de yukarıda verilen sınır şartları görülebilir.



Şekil 4.2) Küre etrafındaki akış için sınır şartları

- | | |
|---------------------|---|
| 1:Dış sınır yüzeyi, | $w=1, u=v=0, \partial\Phi/\partial n = 0$ |
| 2:Cisim yüzeyi, | $u=v=w=0, \partial\Phi/\partial n = 0$ |
| 3:Simetri yüzeyi, | $u=0, \partial u/\partial x = \partial v/\partial x = \partial w/\partial x = 0$ |
| 4:Çıkış yüzeyi, | $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial z = 0, \Phi=0$ |

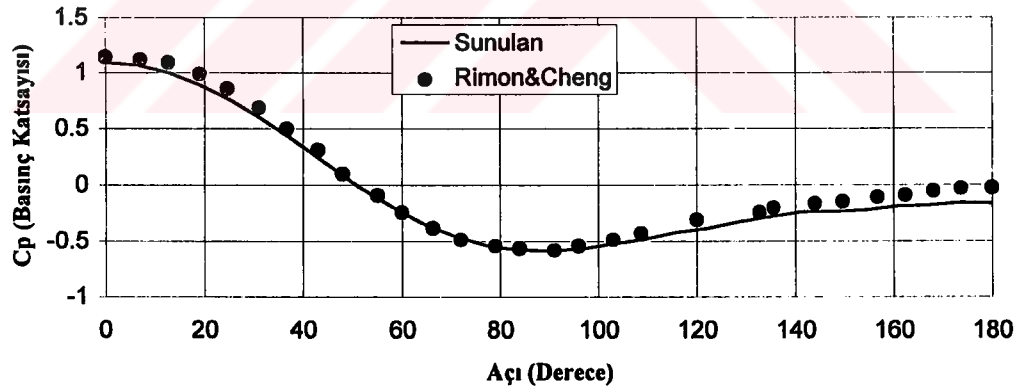
Akış durağan haldeyken aniden başlayan bir akıma tabi tutulur. Δt zaman aralığı denklem (4.1) kullanılarak 0.005 seçilir. 1600 zaman adımı sonucunda daimi hale ulaşılır. Aşağıda şekil(4.3) dan yakınsama eğrisi görülebilir. Şekil (4.4) de küre üzerinde referans çözümün yüzey basınç katsayısı dağılımının Rimon & Cheng [10] ile karşılaştırılması görülmektedir. Şekil (4.5) de küre üzerinde referans çözümün yüzey sürtünme katsayısı dağılımının Rimon & Cheng [10] ile karşılaştırılması görülmektedir. Şekil (4.6) de küre üzerinde referans çözüm için daimi hale ait akım çizgileri görülmektedir.



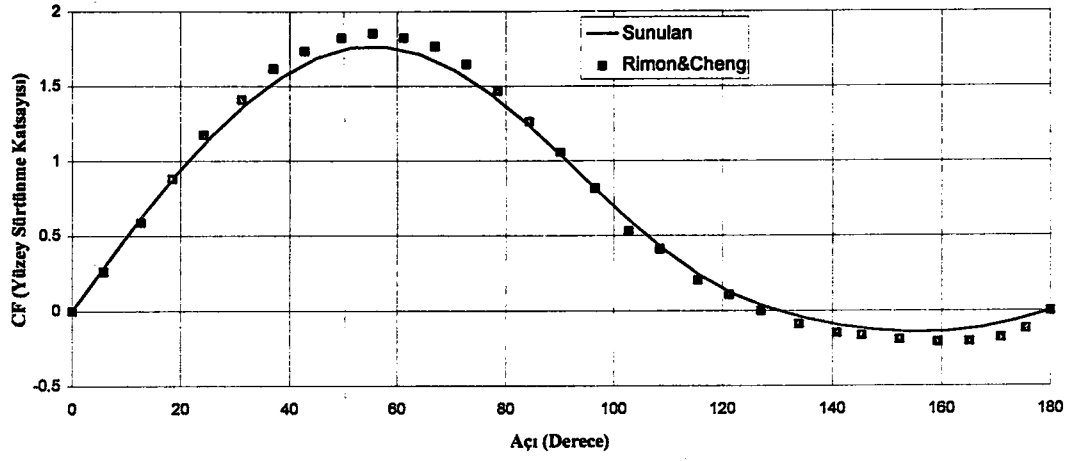
Şekil 4.3) Re 100 için referans çözümün yakınsama eğrisi

$$\text{Hız Değişimi} = \left| \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} - \sqrt{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} \right| / nnode \quad (4.2)$$

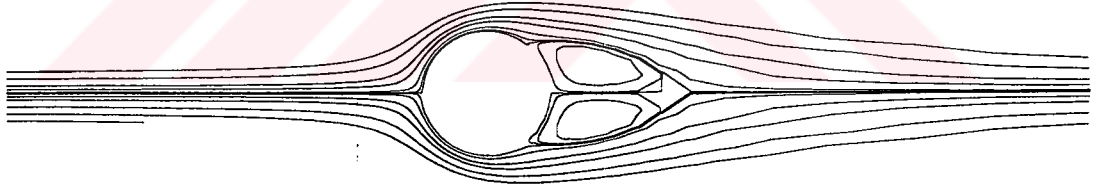
Bu formülde hız değişimi, her adım için tüm noktadaki u_1, v_1, w_1 hız bileşenlerinin karelerinin toplamının karekökünün, u_0, v_0, w_0 bir önceki adımdaki hız bileşenlerinin karelerinin toplamının karekökünün farkının mutlak değerinin toplam nokta sayısına (nnode) bölümüdür.



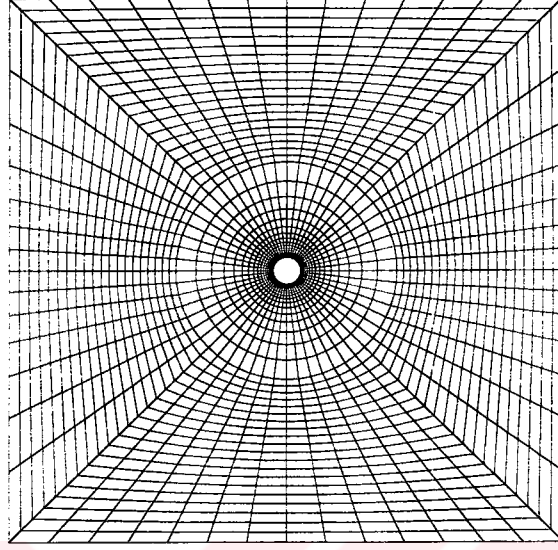
Şekil 4.4) Re 100 Referans çözüm için (25,297 nokta) yüzey basınç katsayısı dağılımı



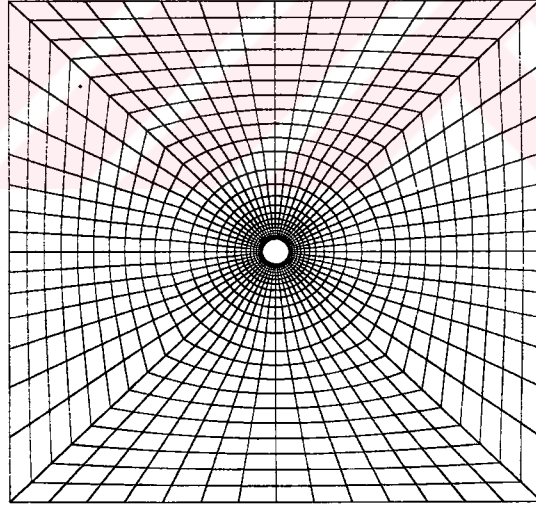
Şekil 4.5) Re 100 için referans çözüme ait (25,297 nokta) yüzey sürtünme katsayısı dağılımı



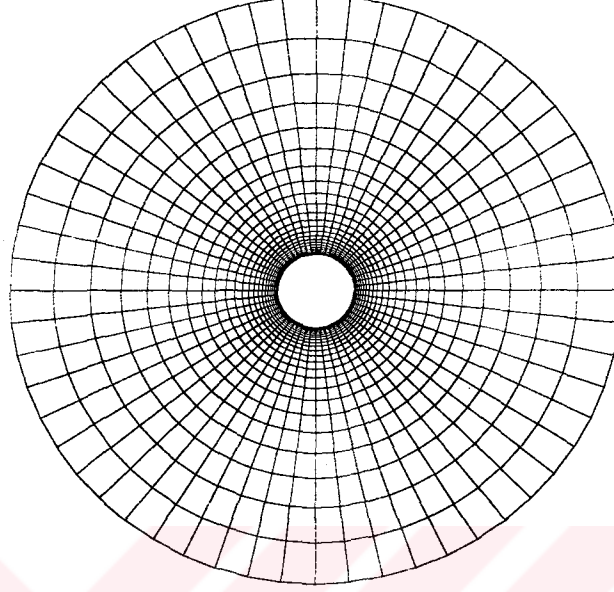
Şekil 4.6) Re=100 referans çözüm için (25,297 nokta)daimi hale ait akım çizgileri



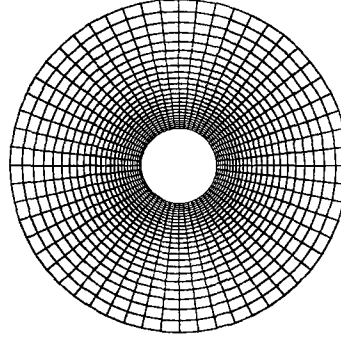
Şekil 4.7) Referans çözüm için y-z simetri düzlemi üzerinde cisim yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı



Şekil 4.8) Alan daraltma uygulanmış birinci kademe grid için y-z simetri düzlemi üzerinde cisim yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı



Şekil 4.9) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe 4 çap çözümü için y-z simetri düzlemi üzerinde cisim yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı



Şekil 4.10) Alan daraltma uygulanmış üçüncü kademe 2.21 çap çözümü için y-z simetri düzlemi üzerinde cisim yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı

4.1.2. Alan Daraltma Uygulanmış Grid Çözümleri

Hesaplama alanının uzunluğu 10 küre çapı olan nispeten daha az noktalı, kaba bir grid için çözüm yapıldı. Bu çözümde kullanılan nokta sayısı 15,425, eleman sayısı 14,112 dir. Hesap alanı üzerinde radyal yönde 25 nokta, küre çevresinde 56 nokta bulunmaktadır.

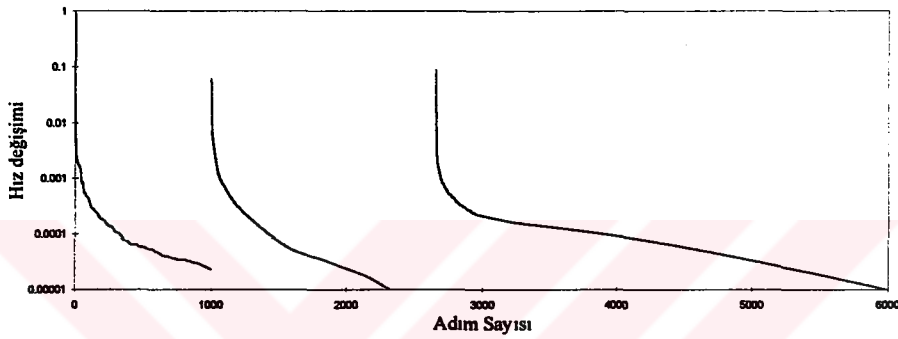
Şekil(4.8), Şekil(4.9), Şekil(4.10), da 3 kez alan daraltma uygulanması sonucunda elde edilen gridler için y-z simetri düzleminde küre yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı görülmektedir.

Küre üzerinde radyal yönde minimum ağ aralığı $\Delta r = 0.04$ küre çapındadır. İzin verilen maksimum zaman adımı daha sık gride göre nispeten daha büyük olacaktır. Bu nedenle zaman adımı $\Delta t = 0.01$ seçilir. 1000 zaman adımı sonucunda daimi hale ulaşılır. Bu kaba grid çözümünden sonra akış alanının sınırları cisme 2.5/1 oranında yaklaştırılır. Böylece oluşturulan ikinci grid, küre merkezinden itibaren 4 çaptır. Minimum ağ aralığı $\Delta r = 0.016$ dır. İkinci grid için toplam nokta sayısı ve eleman sayısı değiştirilmemiştir. Yani aynı nokta sayısı ile daha dar bir bölgede çözüm yapılır. Bu daha sık bir grid demektir. Bu yeni grid üzerinde, sınır şartı olarak bir önceki kaba çözümün o noktadaki hız değerleri alınır. Akımın çıkış bölgesindeki sınır şartı olarak çıkışa dik yönde sıfır hız gradyanları tanımlanır. Zaman adımı olarak $\Delta t = 0.005$ seçilir ve 1500 zaman adımı sonucunda daimi hale ulaşılır.

Bir sonraki çözümde sınır biraz daha cisme yaklaştırılır. Bu uzaklık cisim merkezinden itibaren 2.21 çaptır. Minimum ağ aralığı $\Delta r = 0.004$ çaptır. Yeni dış sınır önceki çözüme ait iç içe küre yüzeylerinden biri ile çakışacak şekilde seçilir. Artık elimizde kaba gridle aynı nokta sayısına sahip fakat oldukça sık bir grid mevcuttur. Sınır şartı olarak bir önceki nispeten daha kaba gridin o noktadaki hız değerleri kullanılır. Bu çözümde alan daraltma nedeniyle hesap alanımız değişmiştir.

Bu nedenle çıkış bölgesi olarak kürenin yarısı alınır ve sınır şartı olarak yine çıkışa dik yönde sıfır hız gradyenleri tanınır.

Zaman adımı olarak $\Delta t = 0.001$ seçilir. 3,319 zaman adımı sonucunda daimi hale ulaşılır. Şekil(4.11)de uygulanan alan daraltma metodu sonucunda elde edilen 3 kademe çözüm için yakınsama eğrisi görülmektedir.



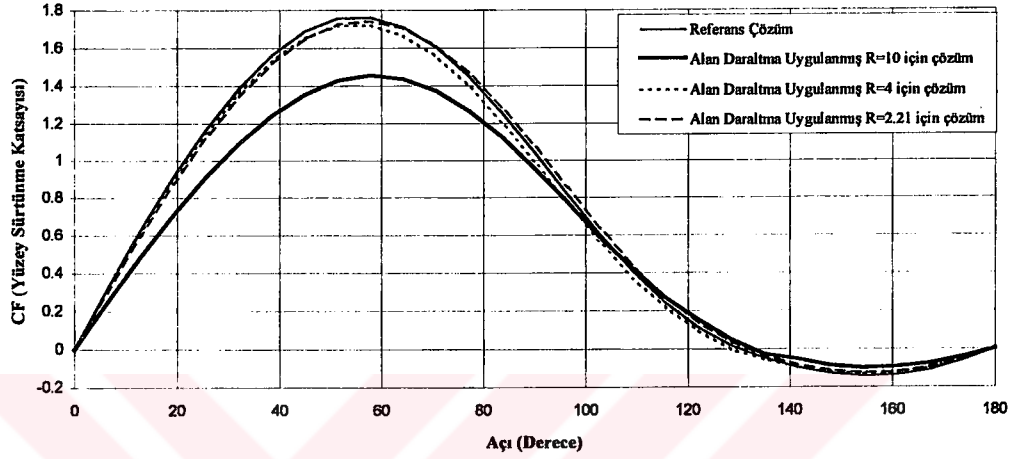
Şekil 4.11) Alan Daraltma Metodu uygulanması sonucu sırasıyla çapları $R_0=10$, $R_0=4$, $R_0=2.21$ olan çözümler için yakınsama eğrisi

Bu çalışmada seçilen alana iki kez daraltma uygulanmış ilk daraltma 2.5/1 oranında ikinci daraltma 2/1 oranındadır. İkinci kademe sonucunda diğer sayısal verilerle dahada uyumlu sonuçlar elde edilebilmiştir.

Şekil (4.12) de 3 kez alan daraltma metodunun uygulanması sonucunda elde edilen çözümlerin ve referans çözümün yüzey sürtünme katsayısı ile karşılaştırılması görülmektedir.

Şekil (4.13-a,b,c) de 3 kez alan daraltma metodunun uygulanması sonucunda elde edilen çözümlerin Rimon & Cheng [10] yüzey basınç katsayısı ile karşılaştırılması görülmektedir. Şekil (4.14-a,b,c) de 3 kez alan daraltma metodunun uygulanması sonucunda elde edilen çözümlerin Rimon & Cheng [10] yüzey sürtünme katsayısı ile karşılaştırılması görülmektedir.

Şekil(4.15-a,b,c) Alan daraltma metodunun uygulanması sonucu elde edilen 3 çözümde daimi hale ait akım çizgileri görülmektedir.



Şekil 4.12) Re=100 için,

25,520 noktalı Referans çözümün yüzey sürtünme katsayısı ile,

15,425 noktalı Alan Daraltma uygulanmış R=10 çap,

15,425 noktalı Alan Daraltma uygulanmış R=4 çap,

15,425 noktalı Alan Daraltma uygulanmış R=2.21 çap,

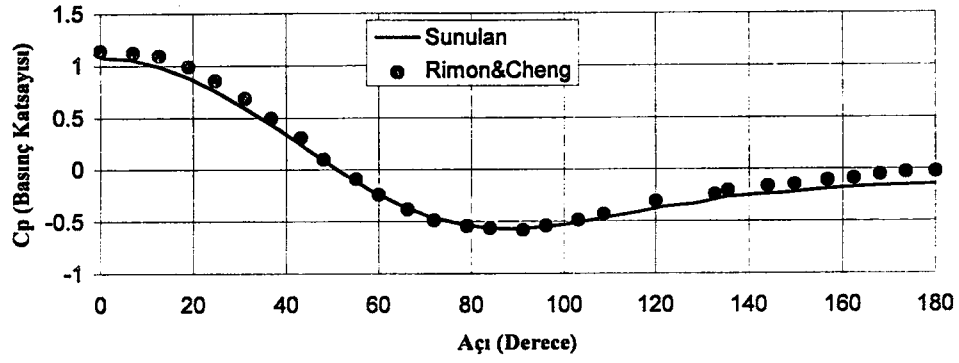
çözümlerinin yüzey sürtünme katsayısı karşılaştırılması

İki adet boyutsuz büyüklük,

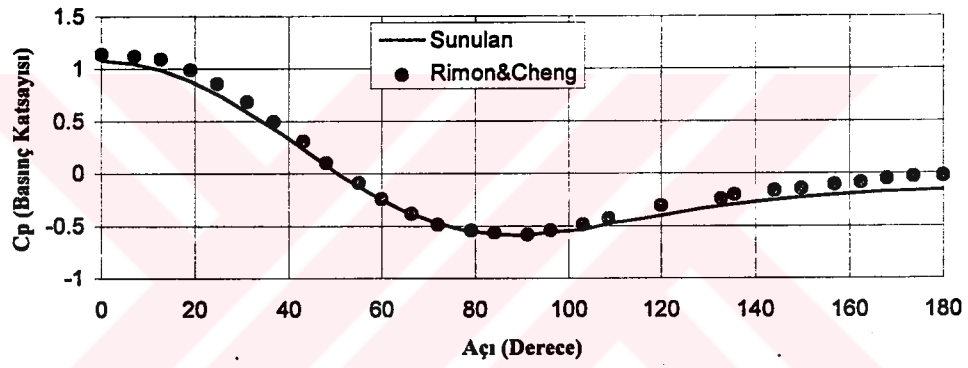
Basınç Katsayısı
$$C_p = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \quad (4.3)$$

Yüzey Sürtünme Katsayısı
$$C_f = \frac{\tau}{q_\infty} \quad (4.4) \text{ olarak tanımlanır.}$$

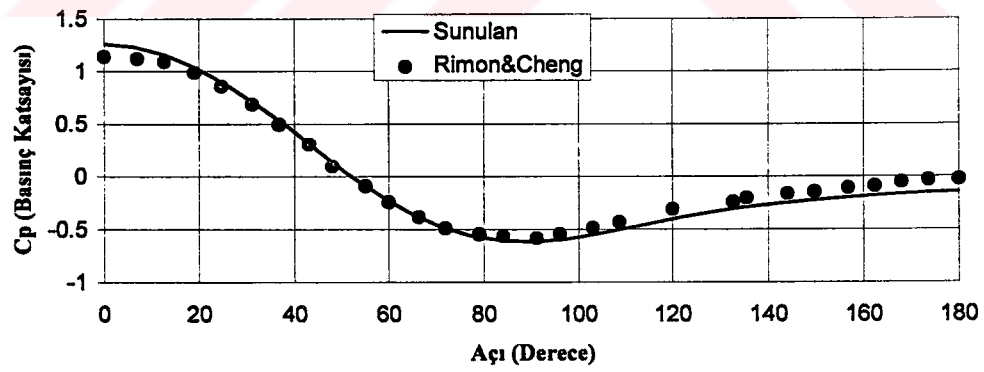
Burada q_∞ , dinamik basıçtır ve $q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty \cdot U_\infty^2$ olarak gösterilir τ , kayma gerilmesi, ρ_∞, U_∞ sırasıyla cisimde uzaktaki serbest akış yoğunluğu ve hızıdır.



Şekil 4.13 a)
R0=10 için

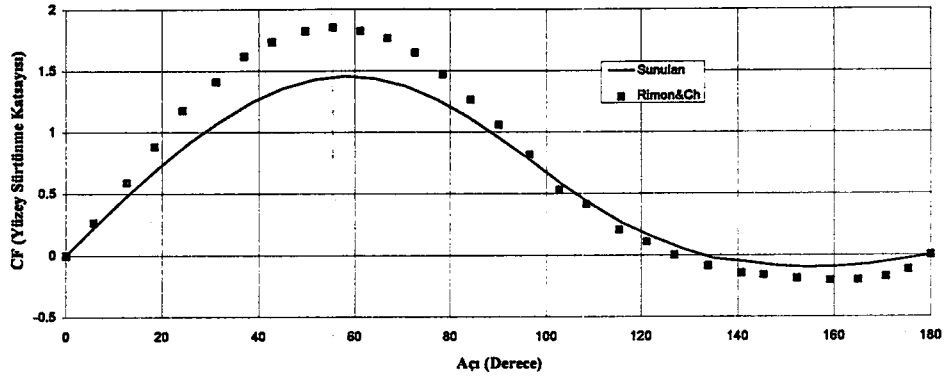


Şekil 4.13 b)
R0=4 için

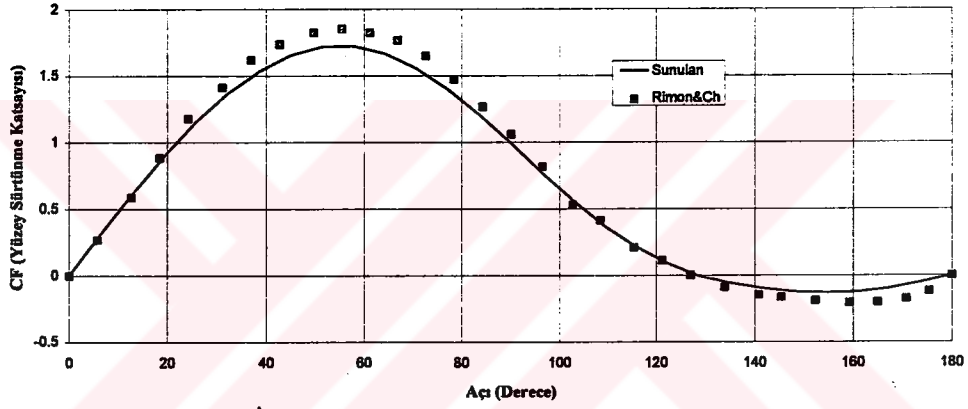


Şekil 4.13c)
R0=2.21 için

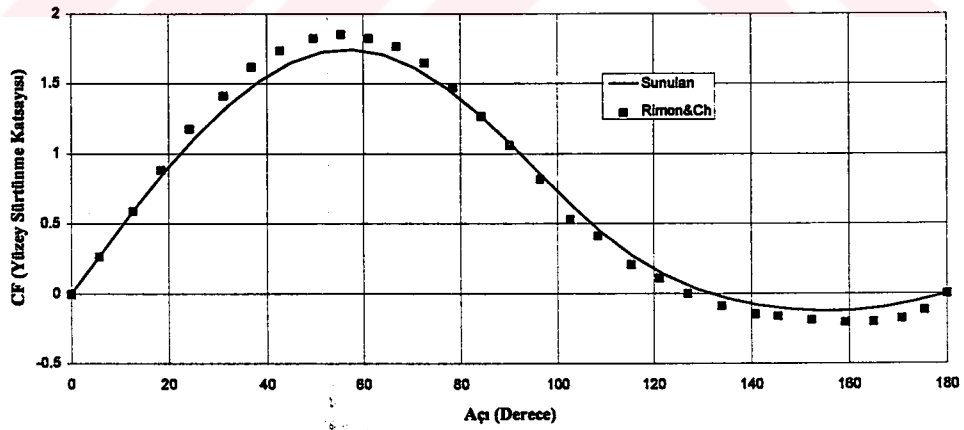
Şekil 4.13) $Re=100$ için Alan Daraltama Metodu uygulanması sonucu elde edilmiş üç durum için yüzey basınç katsayısı dağılımı



Şekil 4.14 a)
R0=10 için

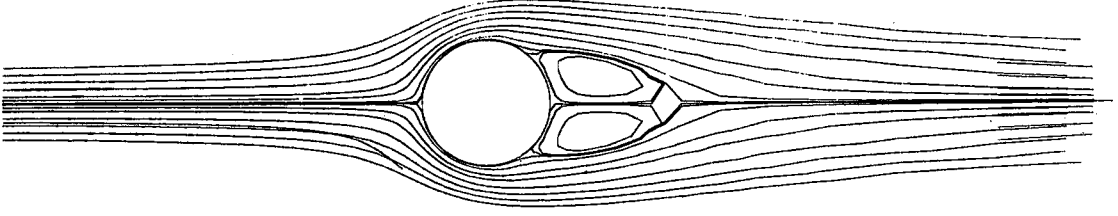


Şekil 4.14 b)
R0=4 için

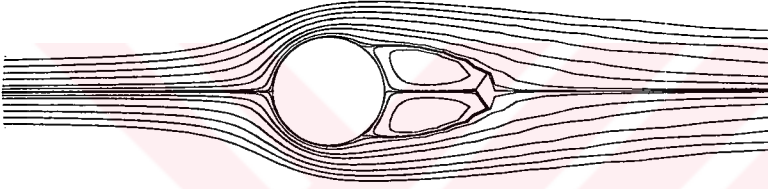


Şekil 4.14 c)
R0=2.21 için

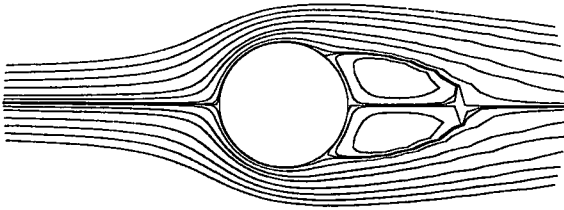
Şekil 4.14) $Re=100$ için Alan Daraltama Metodu uygulanması sonucu elde edilmiş üç durum için yüzey sürtünme katsayısı.



Şekil 4.15a) Alan Daraltma Uygulanmış birinci kademe çözümde 10 çap için daimi hale ait akım çizgileri



Şekil 4.15b) Alan Daraltma Uygulanmış ikinci kademe çözümde 4 çap için daimi hale ait akım çizgileri



Şekil 4.15c) Alan Daraltma Uygulanmış üçüncü kademe çözümde 2.21 çap için daimi hale ait akım çizgileri

4.2. Alan Daraltma Yönteminin Bir Bina Etrafındaki Akıma Uygulanması

Test çözümden elde edilen sonuçların daha önceki çalışmalarla uyum içerisinde olmasından dolayı Alan Daraltma Yönteminin yapılacak yeni çözümler için güvenilirlikle uygulanabileceği ortaya çıkmıştır.

İkinci çalışma olarak bina üzerinde bir akış alınır. Önce çok noktalı, sık bir grid üzerinde hesaplama yapılır ve bu çözüm referans çözüm olarak kabul edilir. Daha sonra nispeten daha kaba bir grid çözülür ve bu kaba gride alan daraltma yöntemi uygulanarak aynı nokta sayısı ile sık bir grid oluşturulur ve referans çözümle uyumlu çözümler elde edilir.

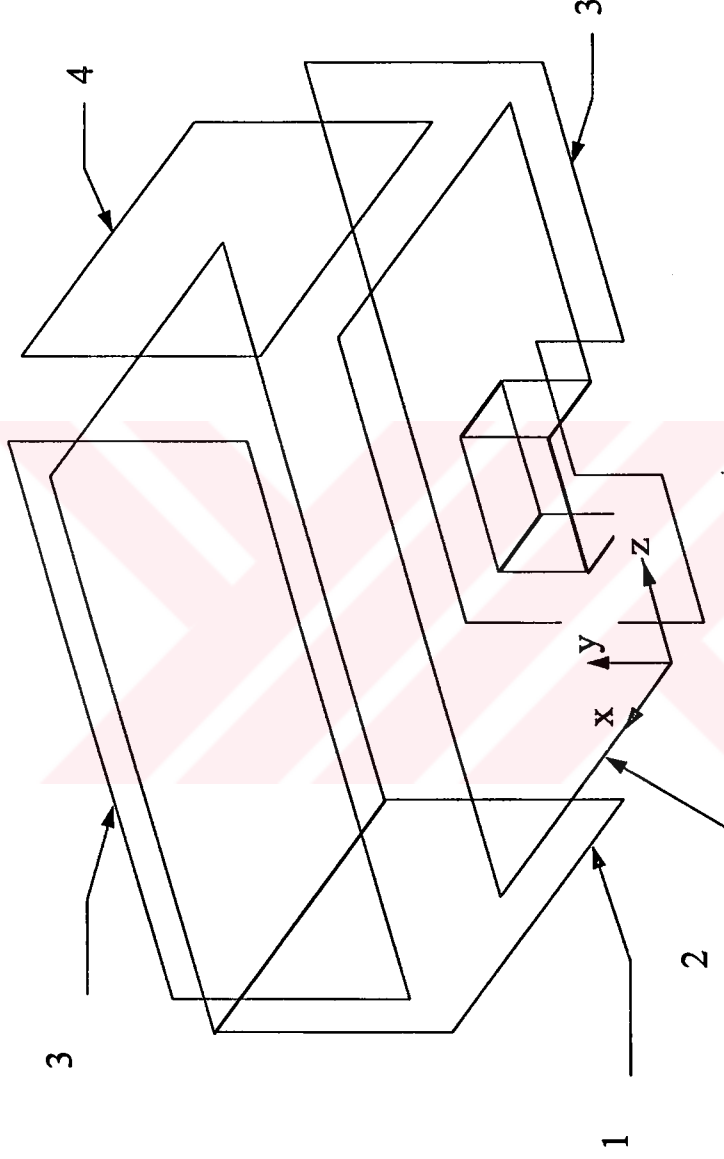
4.2.1. Referans çözüm

Yere oturmuş bina üzerinde akış çözülür. Hesaplama alanı üzerinde kullanılan nokta sayısı 25,374, eleman sayısı 22,448 dır.

Sınır şartları olarak cisim üzerinde ve yerde kaymazlık şartı verilmiş ($u=v=w=0$), cisimden uzakta sınır bölgede serbest akış hızı sınır koşulu olarak verilir. Çıkış sınırında ise çıkışa dik yönde sıfır hız gradyanları tanımlanır. Simetri düzlemi üzerinde simetri şartı yani bu düzlem üzerinde normal yöndeki hız bileşeni ve türevleride sıfırdır şartı konulur. Şekil (4.16)

Hesaplama alanının boyutları, boyutsuz olarak şekil(4.17)de görülmektedir

Nokta numaralandırılması yapılırken 5 blok etrafında yapılmıştır. Şekil(4.17) de bu yapıda gösterilmiştir.



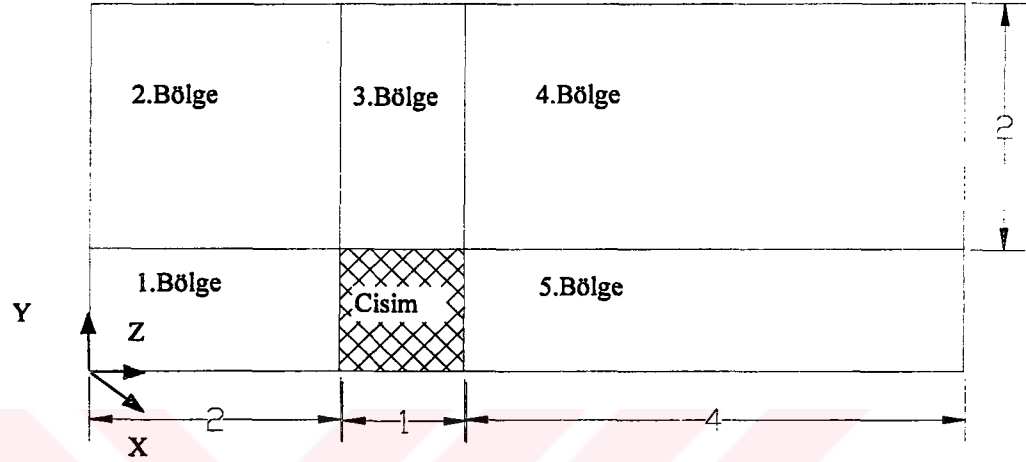
Şekil 4.16) Bina etrafında sınır şartlarının gösterimi.

1 : Dış sınır yüzeyi, $w=1$, $u=v=0$, $\partial\Phi/\partial n = 0$

2 : cisim ve yer yüzeyi, $u=v=w=0$, $\partial\Phi/\partial n = 0$

3 : Simetri yüzeyi, $u=0$, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = \partial w/\partial x = 0$

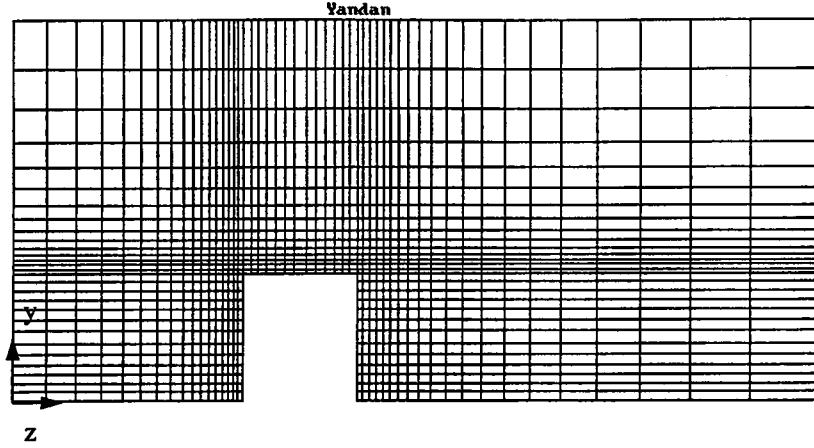
4 : Çıkış yüzeyi, $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = \partial w/\partial z = 0$, $\Phi=0$



Şekil 4.17) Referans çözüm için hesap alanının boyutsuz ölçülendirilmesi

Her bölgede kullanılan nokta sayıları aşağıda verilmiştir.

- 1-5 bölgesi satır sayısı = 13
- 2-3-4 bölgesi satır sayısı = 16
- 1-2 bölgesi sütun sayısı = 18
- 4-5 bölgesi sütun sayısı = 21
- 3 bölgesi sütun sayısı = 12
- cisim üzeri düzlem sayısı = 8
- cisim kenar düzlem sayısı = 10



Şekil 4.18) Referans çözüm için simetri düzlemi grid yapısı

Şekil (4.18) de y-z simetri düzlemi üzerinde bina yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı görülmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi cisim yakınında sonlu eleman ağı sıklaştırılır, cisimden uzaklaştıkça daha seyrek bir ağ oluşturulur. Cisim üzerinde sıklaştırma yapılırken hız ve basınç değişimleri bu noktalarda daha büyük olduğundan dolayı cisim köşelerinde daha fazla nokta alınmasına dikkat edilir.

Akış durağan haldeyken z-yönünde aniden başlayan bir akıma tabi tutulur. Zaman adımı olarak $\Delta t = 0.0067$ seçilir. 800 zaman adımı sonunda akım daimi hale ulaşır.

4.2.2. Alan Daraltma Uygulanmış Grid Çözümleri

Referans çözüme göre nispeten daha az noktalı ilk grid oluşturulurken hesap alanının boyutları değiştirilmemiştir. Şekil (4.17) daki referans çözümün hesap alanı boyutları alınır. Bu çözümde kullanılan nokta sayısı 20,112, eleman sayısı 17,735 dir. Her bölgede verilen noka sayısı ise şu şekildedir:

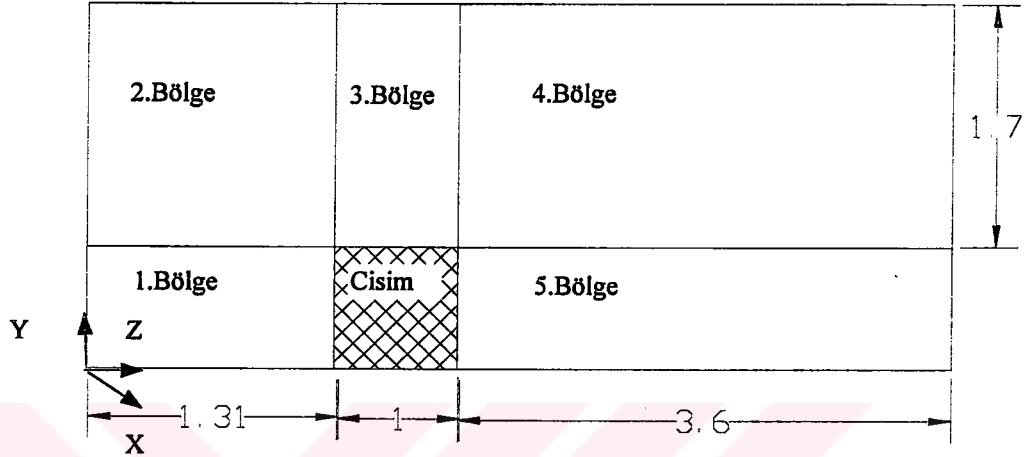
- 1-5 bölgesi satır sayısı = 10
- 2-3-4 bölgesi satır sayısı = 16
- 1-2 bölgesi sütun sayısı = 16

- 4-5 bölgesi sütun sayısı = 21
- 3 bölgesi sütun sayısı = 8
- cisim üzeri düzlem sayısı = 6
- cisim kenar düzlem sayısı = 12

Alan daraltma yönteminin uygulandığı seyrek grid için izin verilen maksimum zaman adımı sık gride göre nispeten daha büyük olacaktır. Zaman adımı olarak $\Delta t = 0.01$ seçilir. 563 zaman adımı sonucunda daimi hale ulaşılır.

Bu seyrek grid çözümünden sonra akış alanının sınırları cisme yaklaştırılır. Artık yeni hesap alanımızın boyutları şekil (4.19) daki gibidir. Her bölgede nokta sayısı şu şekilde verilmiştir.

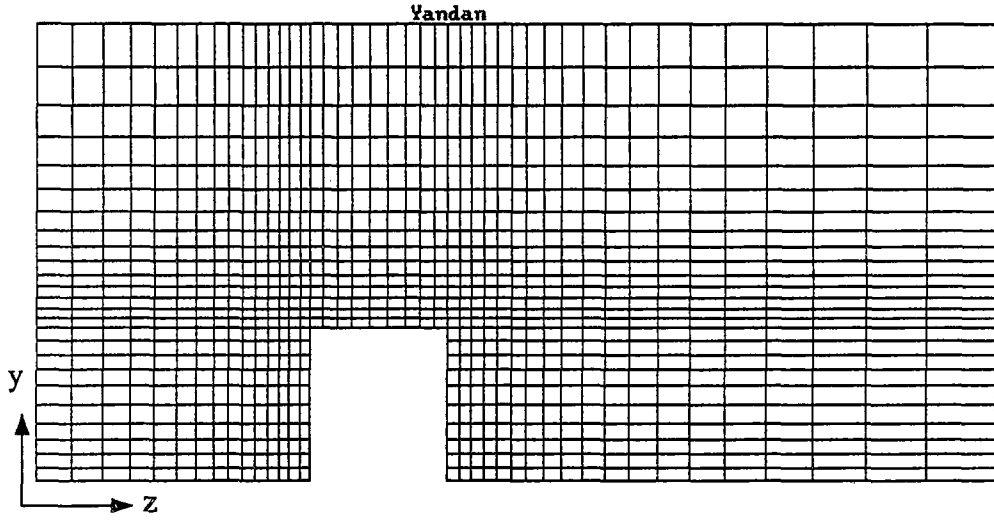
- 1-5 bölgesi satır sayısı = 12
- 2-3-4 bölgesi satır sayısı = 15
- 1-2 bölgesi sütun sayısı = 16
- 4-5 bölgesi sütun sayısı = 21
- 3 bölgesi sütun sayısı = 10
- cisim üzeri düzlem sayısı = 8
- cisim kenar düzlem sayısı = 8



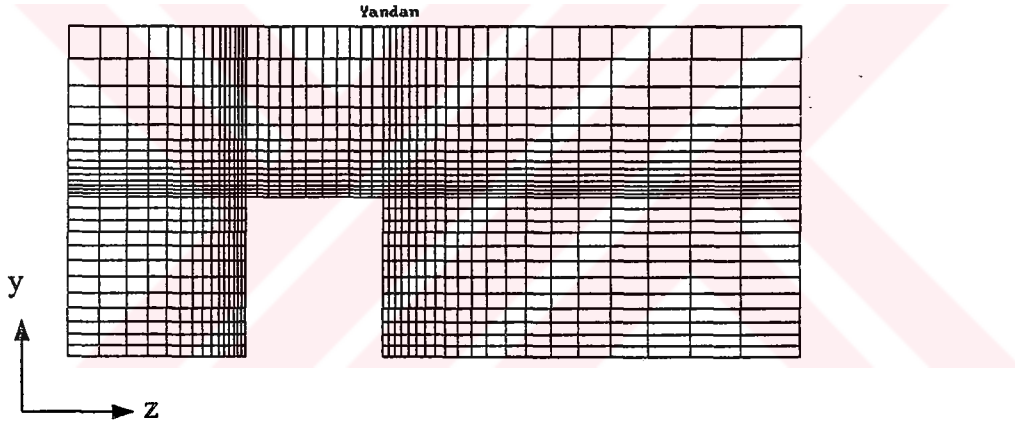
Şekil 4.19) Alan daraltma uygulanmış çözüm için hesap alanının boyutsuz ölçülendirilmesi

Şekil (4.20) de Alan daraltma uygulanmış referans çözüme göre nispeten daha seyrek olan ilk grid için y-z simetri düzlemi üzerinde bina yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı görülmektedir

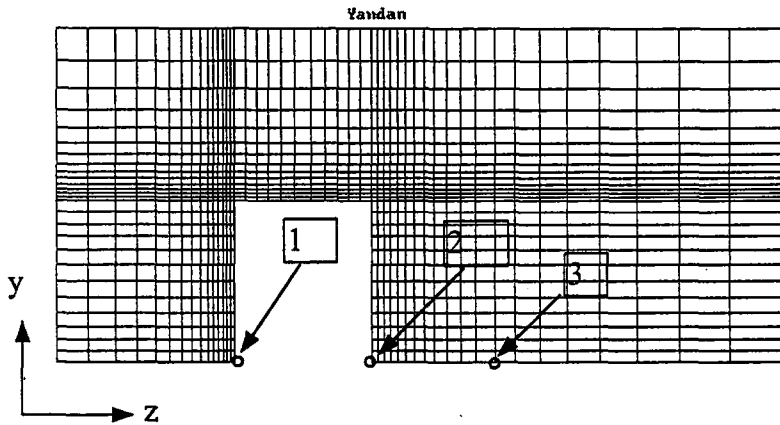
Şekil (4.21) de Alan daraltma uygulanmış ilk çözüme göre nispeten daha sık olan grid için y-z simetri düzlemi üzerinde bina yüzeyinden itibaren sonlu eleman ağı görülmektedir. Şekil (4.21) de görülebileceği gibi cisim yakınında sonlu eleman ağının sık olmasına dikkat edilir. Bu yüzden cisim üzerinde daha fazla nokta alınmaya gayret edilir nokta sayısının artmaması için diğer bölgelerde nokta azaltılmasına gidilir. Bunun sonucu olarak nokta sayısında bir miktar azalma meydana gelir. Kullanılan toplam nokta sayısı 19,344, eleman sayısı 16,884 tür. Alan daraltma uyguladığımız bu ikinci çözümde akış alanı cisme yaklaştırılırken grid yapısından dolayı dış yüzeyde daha az sayıda nokta alınması zorunluluğu doğar. Oysa uyguladığımız alan daraltma metodu nokta sayısının sabit tutulmasını gerektirmektedir.



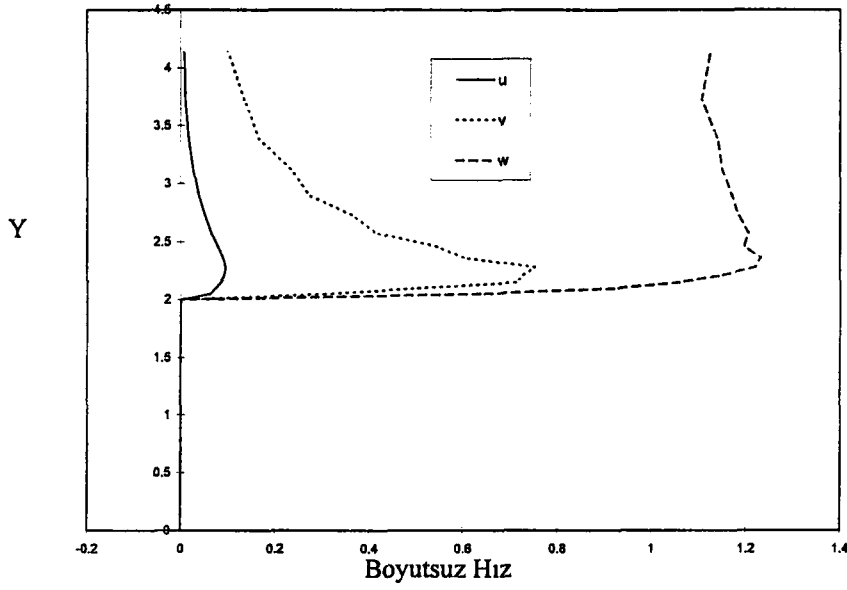
Şekil 4.20) Alan daraltma uygulanmış birinci kademe gridin simetri düzleminde sonlu eleman ağının görünüşü



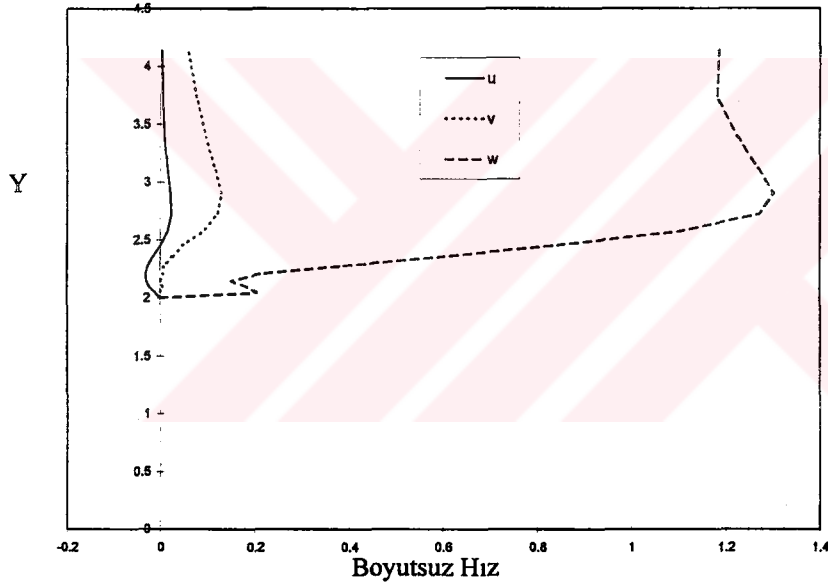
Şekil 4.21) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe gridin simetri düzleminde sonlu eleman ağının görünüşü



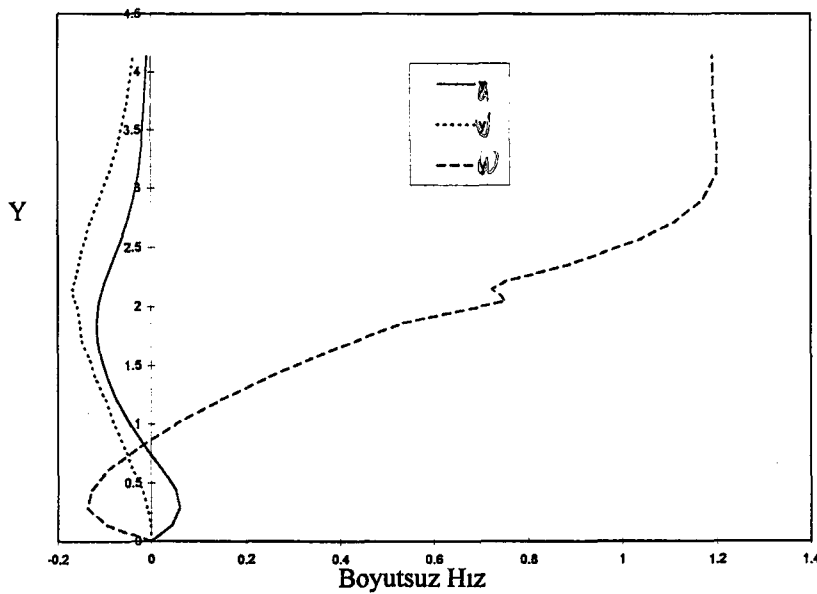
Şekil 4.22) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe grid üzerinde istasyon noktaları (Bkz. Şekil 4.23)



Şekil 4.23-a) İstasyon 1'de y eksenine boyunca hız dağılımı

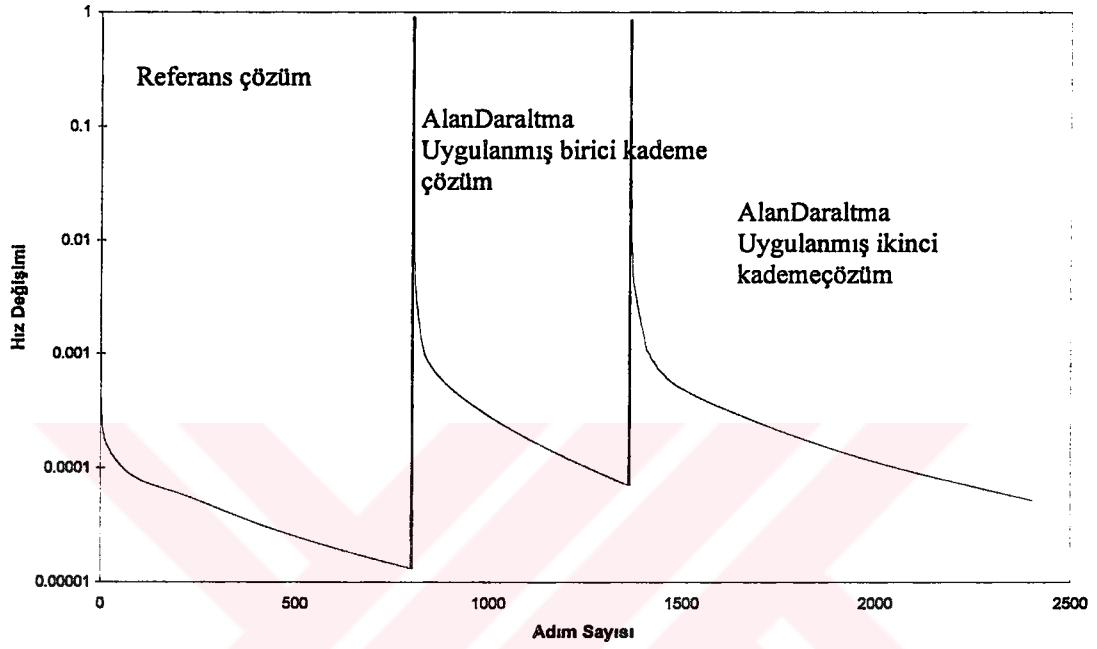


Şekil 4.23-b) İstasyon 2'de y eksenine boyunca hız dağılımı



Şekil 4.23-c) İstasyon 3'de y eksenine boyunca hız dağılımı

Şekil 4.23) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe grid üzerinde y eksenine boyunca çeşitli istasyonlardaki hız dağılımları



Şekil 4.24) Referans çözüm, ve alan daraltma uygulanmış bina etrafındaki çözümler için yakınsama eğrisi

Bu problemi aşmak için dış yüzey üzerinde lineer yüzey interpolasyonuna başvurulur. Ek1 de bu yöntemin nasıl uygulandığı görülebilir.

Yeni gridimizin dış sınırı bir önceki çözüme ait o noktalardaki hız değerleri üzerinde yapılan interpolasyon sonucu oluşan değerler olarak alınır. Çıkış bölgesinde çıkışa dik yönde sıfır hız gradyenleri tanımlanır. Cisim üzerinde ve yerde kaymazlık şartı ($u=v=w=0$) verilir. Simetri düzlemi üzerinde simetri şartı yani normal yöndeki hız bileşenleri ve türevleri sıfırdır şartı konulur.

Sınırların cisme yaklaştırılması sonucunda elimizde daha sık bir grid mevcuttur. Bu grid için zaman adımı $\Delta t = .005$ seçilir. 1000 zaman adımı sonucunda daimi hale ulaşılır. Bu çalışmada seçilen alana bir kez daraltma uygulanır.

Şekil(4.22) de Alan daraltma uygulanmış sık grid üzerinde istasyon noktaları görülmektedir. Şekil(4.23) de Alan daraltma uygulanmış sık grid üzerinde boyutsuz zaman $t=5$ için çeşitli istasyonlardaki hız profilleri görülmektedir. Şekil(4.24) de Referans çözüm ve alan daraltma uygulanması sonucu elde edilen çözümler için yakınsama eğrisi görülmektedir. Şekil(4.25-a,b) de Referans çözüm ve alan daraltma uygulanmış çözümler için sırasıyla z ve y eksenleri boyunca cisim üzerindeki basınç dağılımları görülmektedir. Şekil(4.26-a,b) de Referans çözüm ve alan daraltma uygulanmış çözümler için sırasıyla z ve y eksenleri boyunca cisim üzerindeki yüzey sürtünme katsayısı dağılımları görülmektedir. Şekil (4.27-a,b,c,d) de Alan daraltma uygulanmış birinci kademe çözüm için çeşitli düzlemlerdeki hız vektörleri görülmektedir. (4.28-a,b,c) de Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe çözüm için çeşitli düzlemlerdeki hız vektörleri görülmektedir. Şekil (4.29) da referans çözüm için bina etrafındaki akış için 3 boyutlu sonlu elemanlar ağı görülmektedir.

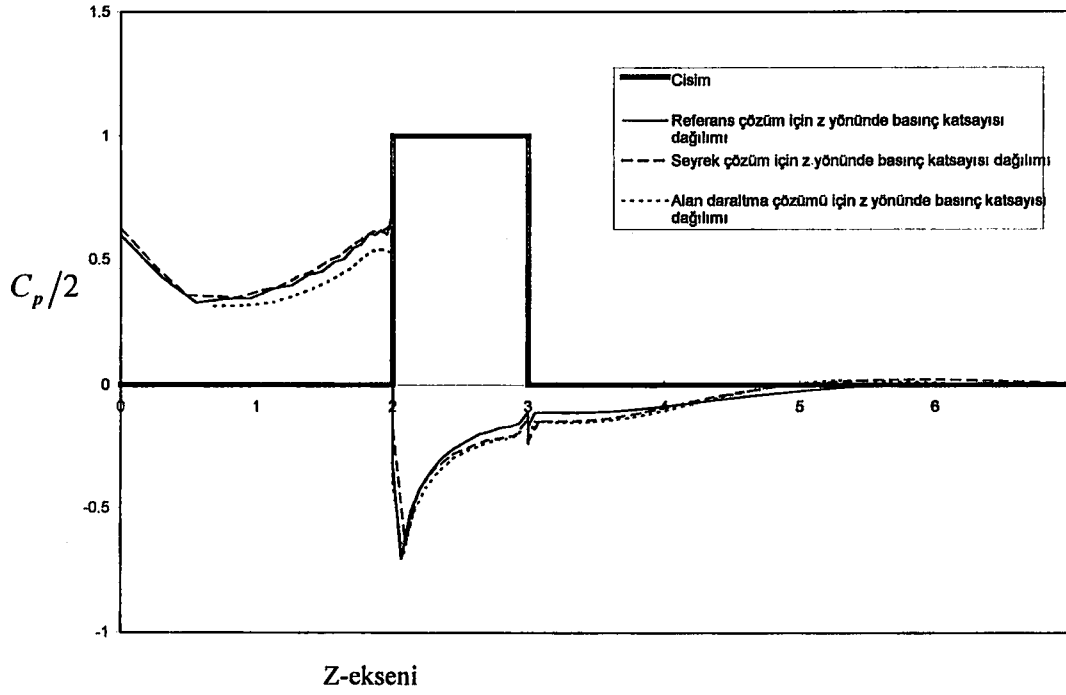
Bu çalışmada E. GÜRGEY [2] tarafından yazılan program, R. ASLAN [4] ve EBE [5] iterasyon yönteminde Ü. GÜLÇAT tarafından yapılan değişiklikler ile kullanılmıştır.

Bu çalışma süresince 16 MB Ram ve 1.2 GB harddisk özelliklerine sahip Pentium-120 işlemcili bir bilgisayar kullanılmıştır. Bu çalışmada sunulan yöntemin referans ve alan daraltma uygulanmış çözümler için bu bilgisayardaki çalışma süreleri

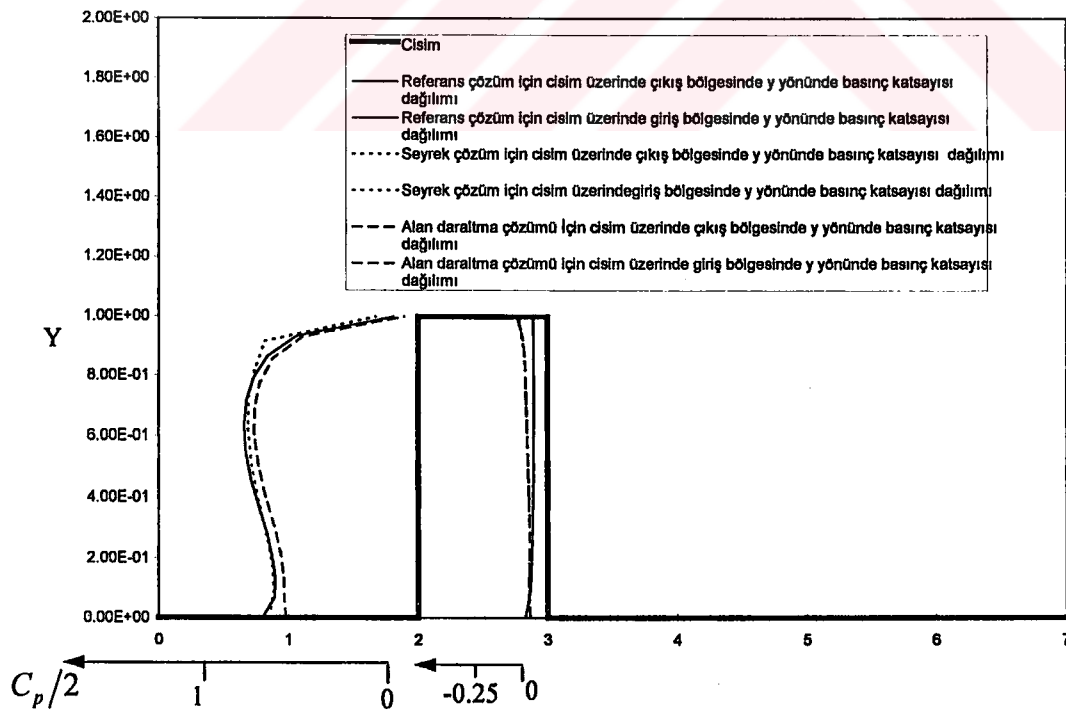
t(saniye)/Nokta Sayısı cinsinden Tablo 1’de verilmiştir.

Çözülen cisim	Nokta sayısı	Bir adım Süresi (sn)	Adım Sayısı	Bir adım süresi (sn.)/nokta sayısı
Küre referans	25,297	137	1,600	0.00541
Küre için alan daraltılma uygulanmış 1. kademe çözüm	15,425	64	1,000	0.00414
Küre için alan daraltılma uygulanmış 2. kademe çözüm	15,425	64	1,500	0.00414
Küre için alan daraltılma uygulanmış 3. kademe çözüm	15,425	64	3,319	0.00414
Bina referans	25,374	145	800	0.00571
Bina için alan daraltılma uygulanmış 1. kademe çözüm	20,112	110	563	0.00546
Bina için alan daraltılma uygulanmış 2. kademe çözüm	19,344	94	1,000	0.00486

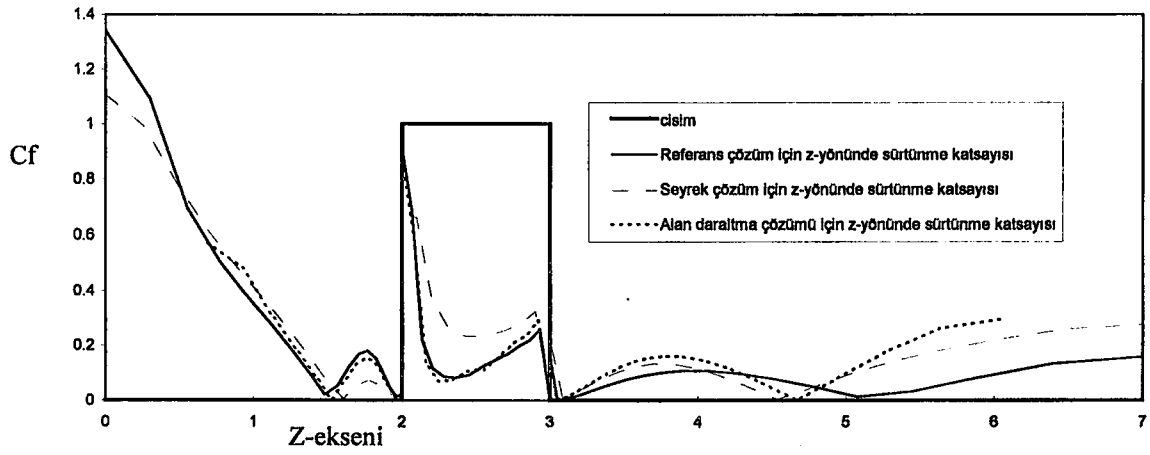
Tablo 1



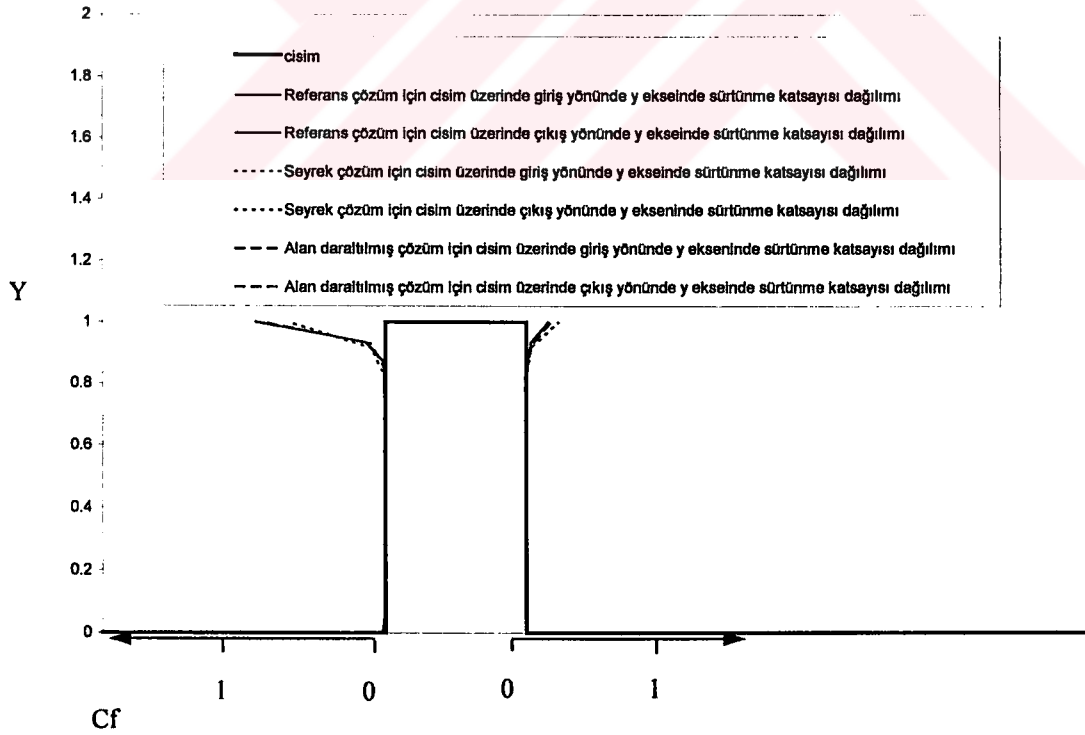
Şekil 4.25-a) Referans çözüm ve alan daraltma uygulanmış çözümler için z yönünde basınç katsayısı dağılımı



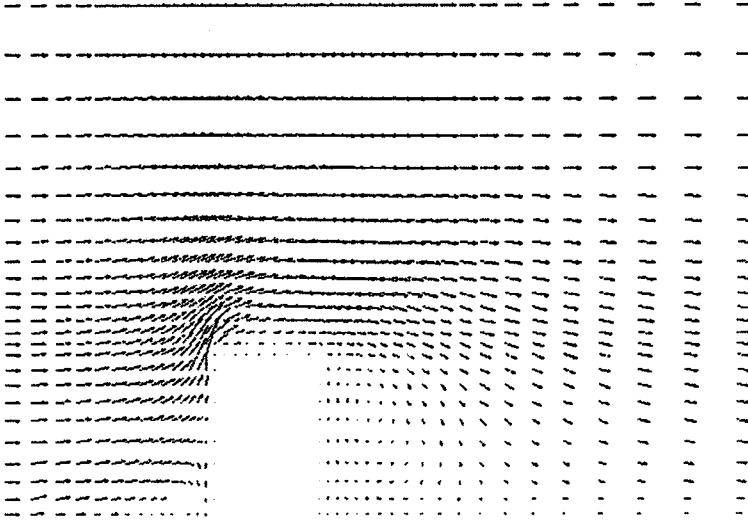
Şekil 4.25-b) Referans çözüm ve alan daraltma uygulanmış çözümler için y yönünde basınç katsayısı dağılımı



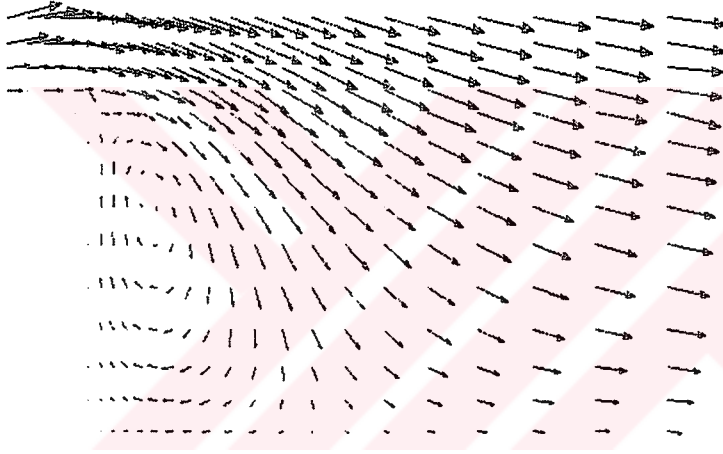
Şekil 4.26-a) Referans çözüm ve alan daraltma uygulanmış çözümler için z yönünde sürtünme katsayısı dağılımı



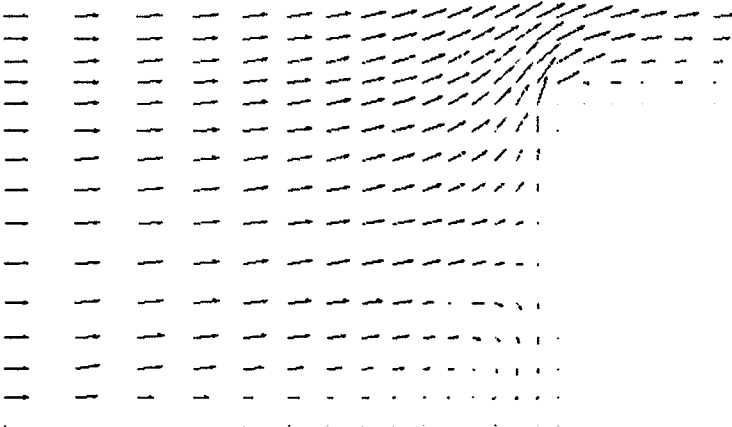
Şekil 4.26-b) Referans çözüm ve alan daraltma uygulanmış çözümler için y yönünde sürtünme katsayısı dağılımı



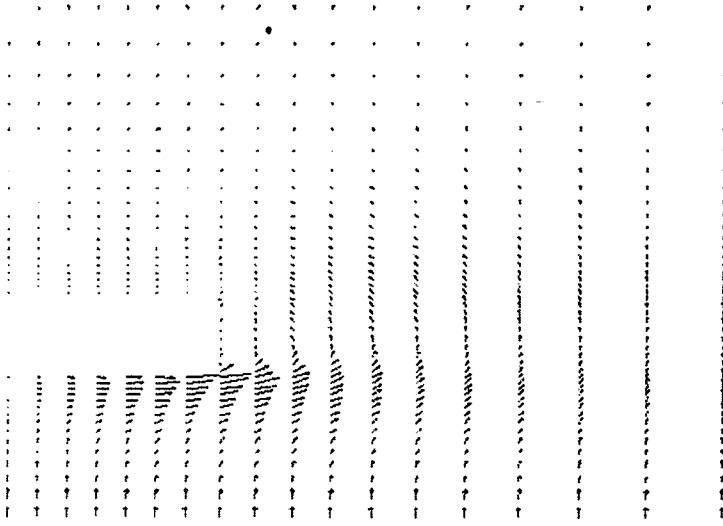
Şekil 4.27-a) Alan daraltma uygulanmış birinci kademe grid için simetri düzleminde hız vektörleri



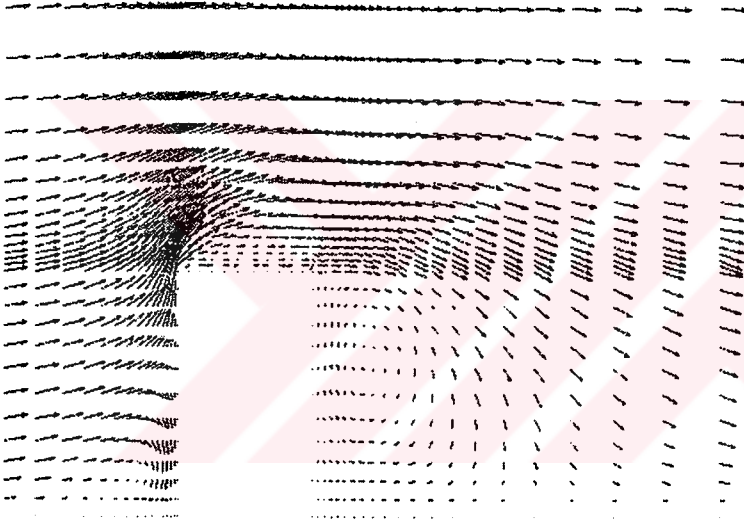
Şekil 4.27-b) Alan daraltma uygulanmış birinci kademe grid için simetri düzleminde hız vektörleri



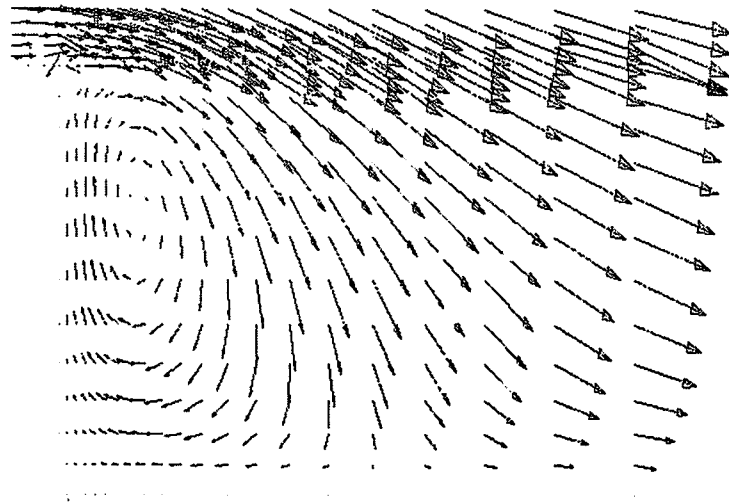
Şekil 4.27-c) Alan daraltma uygulanmış birinci kademe grid için simetri düzleminde hız vektörleri



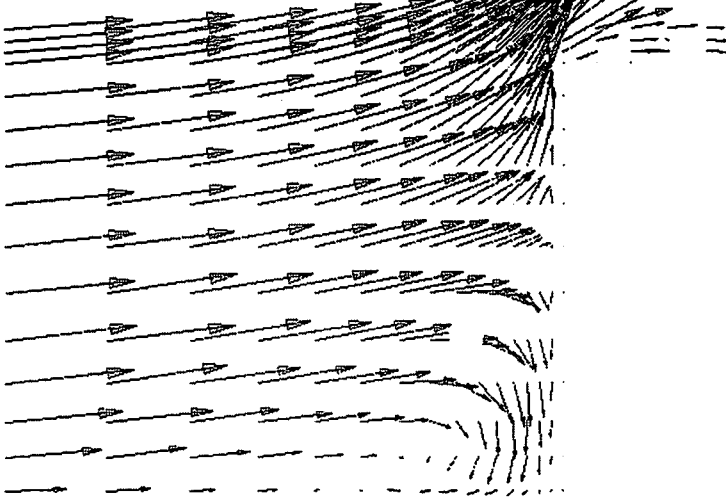
Şekil 4.27-d) Alan daraltma uygulanmış birinci kademe grid için yer düzleminde hız vektörleri



Şekil 4.28-a) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe grid için simetri düzleminde hız vektörleri

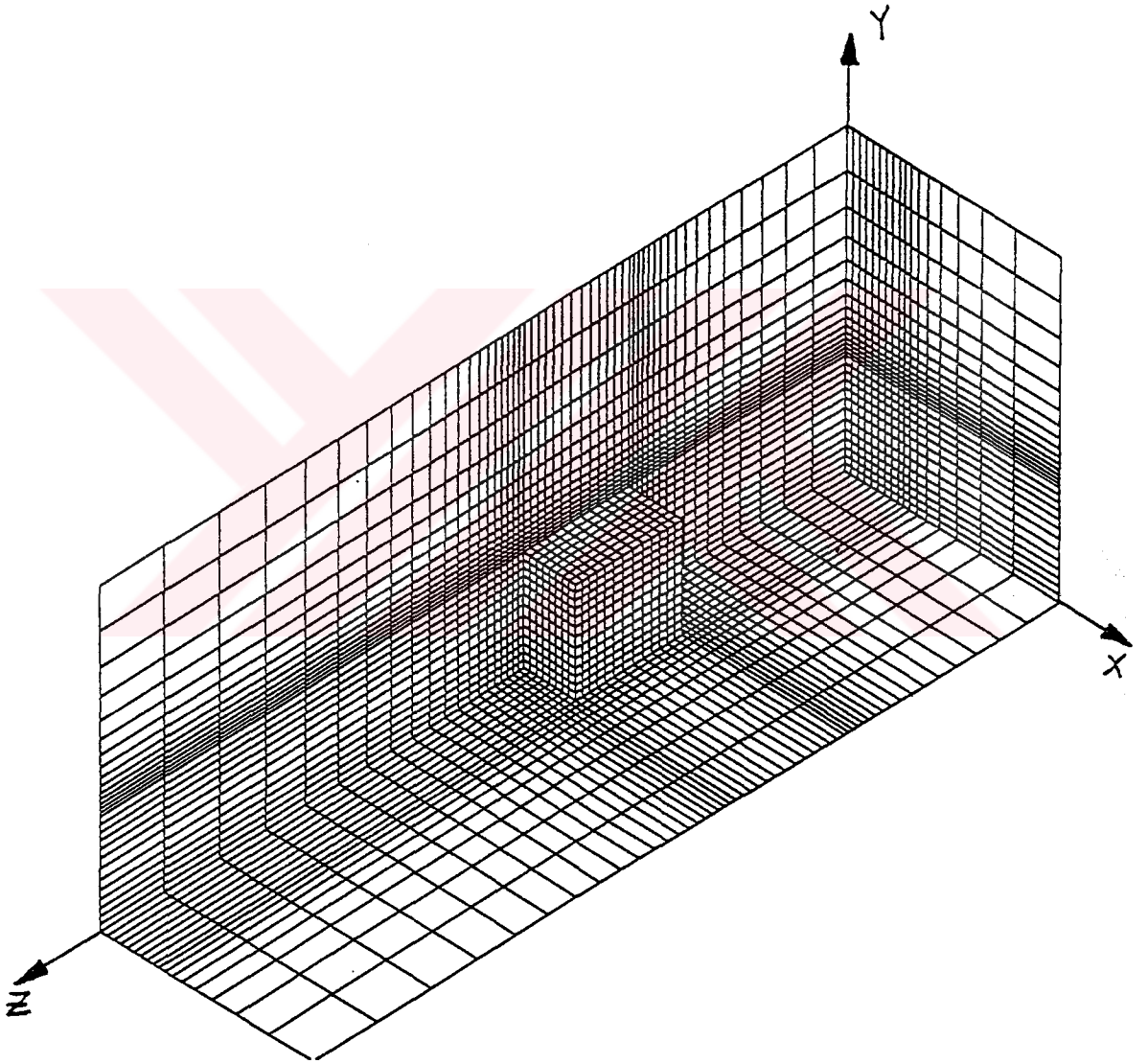


Şekil 4.28-b) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe grid için simetri düzleminde hız vektörleri



Şekil 4.28-c) Alan daraltma uygulanmış ikinci kademe grid için simetri düzleminde hız vektörleri





Şekil 4.29) Bina etrafındaki akış çözümü için 3 boyutlu sonlu eleman ağının görünüşü

5. Değerlendirmeler ve Öneriler

Bu çalışmada, özellikle üç boyutlu uygulamalarda artan nokta sayısı ve bunun neden olduğu bilgisayar bellek gereksiniminin artması problemini çözmek amacıyla “Alan Daraltma Yöntemi” kullanılmıştır.

Bu yöntem önce küre etrafındaki akışa uygulanarak test edilmiştir. Elde edilen sonuçların literatür ile uyumlu olduğu görülmüştür. Daha sonra yöntem, yer üzerine oturmuş bir bina etrafındaki akışa uygulanmıştır.

Şekil (4.23) te alan daraltma uygulanmış ikinci kademe bina gridleri üzerinde alınan çeşitli istasyon noktalarındaki hız dağılımlarına bakıldığında w yönündeki hız bileşeninde merkezi fark kullanımından dolayı oluşmuş bir zigzag görülmektedir. Meydana gelen bu titreme hızların averajlanması ile ortadan kaldırılabilir.

Küre ve bina çözümlerinde iki farklı grid yapısı kullanılmıştır. Küre çözümünde kullanılan grid yapısının alan daraltma metodu için daha uygun olduğu görülmüştür. Bu yapının avantajı, dış sınırlardaki nokta sayısı değiştirilmeden kolaylıkla daraltma yapılabilmesidir. Bina çözümü, küre çözümünde kullanılan grid yapısı ile çözülerek grid oluşturma işlemi basitleştirilebilir ve bina çözümünde dış akım sınır koşulları üzerinde yapılan interpolasyon nedeni ile oluşan ek hata ortadan kalkmış olur.

Alan daraltma yönteminin bina etrafındaki akışa uygulanması sonucu elde edilen çözümler, gerek grid yapısı gerek sınır şartları üzerinde değiştirmeler yapılarak tekrarlanabilir.

EK : İnterpolasyon Yöntemi

Bölüm (4.2.2) de Alan daraltma uygulanmış bina üzerindeki akışa lineer yüzey interpolasyonu uygulanmıştır. Bu bölümde interpolasyonun uygulanışı açıklanmaktadır.

Değeri bulunacak noktada interpolasyon yapmak üzere yeni oluşturulmuş gridin dış akım sınır şartı verilmiş olan yüzeyi üzerinde, seyrek grid sisteminde bu noktaya en yakın aynı doğru üzerinde olmayan 3 nokta bulunmaktadır. Bu noktalar üzerinde sırasıyla u, v ve w hız bileşenleri için interpolasyon yapılarak yeni noktanın hız bileşenleri elde edilmektedir. İnterpolasyon yöntemi aşağıda ki şekildedir:

x - z düzleminde x, z noktasının u hız bileşeni için intepolasyon yapmak üzere en yakın 3 noktanın x ve z koordinatları x_1, z_1, x_2, z_2 ve x_3, z_3 , u hız bileşenleri u_1, u_2 ve u_3 ise, x, z, u koordinat sisteminde $x_1, z_1, u_1, x_2, z_2, u_2$ ve x_3, z_3, u_3 noktalarından geçen düzlem denklemi bulunmaktadır. Bu düzlemde x, z için u hesaplanarak interpolasyon değeri elde edilmektedir. Düzlem denklemi

$$ax + bz + c = u \quad (\text{EK 1})$$

şeklinde dir. Burada a, b, c katsayılarını hesaplamak için

$$\begin{bmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{EK 2})$$

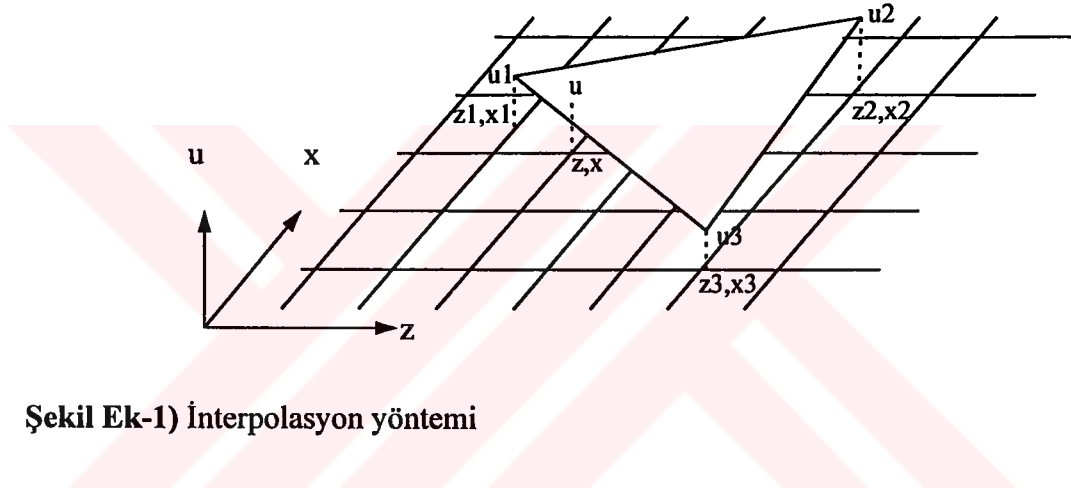
matris denklemi çözülerek

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{EK 3})$$

şeklinde katsayılar elde edilmektedir. Böylece u değeri

$$u = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (\text{EK 4})$$

İnterpolasyon yöntemi Şekil (Ek-1)'de gösterilmiştir. v ve w hız bileşenleri ve x - y dış yüzeyi içinde aynı interpolasyon yöntemi kullanılmaktadır.



Şekil Ek-1) İnterpolasyon yöntemi

Kaynaklar

- [1] HINATSU, M., "Numerical Computation of Unsteady Incompressible Flow In Complex Geometry Using A Composite Multigrid Technique", International Journal For Numerical Methods In Fluids, Vol. 13, pp 971-997, 1991.
- [2] GURGEY EMRE, "Nümerical Solution of 3-D Unsteady, Incompressible Viscous Flow Via FEM", M.Sc. Thessis, ITU, 1988.
- [3] MIZUKAMI, A., TSUCHIYA, M., "A Finite Element Method For The 3-D Steady Navier-Stokes Equations", Int. J. Num. Meth. In Fluids, Vol 4, pp349-357, 1984
- [4] ASLAN, R., EDIS, F.O., GULCAT, Ü. and GURGEY, E., "Prediction of General Viscous Flow Using a Finite Element Method", Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Swansea, U.K., July 18-23, 1993
- [5] GULCAT, Ü., "An Explicit FEM For 3-D Viscous Incompressible Flows, With EBE/PCG Iterative Algorithm", Comp.Fluid Dyn., Vol. 4, pp73-85, 1995
- [6] LÖHNER, R., "Finite Elements in CFD: What Lies Ahead", International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol 24, pp 1741-1756, 1987.
- [7] LÖHNER, R., MORGAN, K., "An Unstructured Multigrid Method For Elliptic Problems", International Journal For Numerical Methods In Engineering, Vol 24, pp 101-115, 1987.

- [8] SCHLICHTING, H., "Boundary Layer Theory," Translated by KESTIN J., 6th Ed., Mc Graw Hill, 1968
- [9] WHITE, F.M., "Viscous Fluid Flow," Mc Graw Hill, 1974
- [10] RIMON, Y., CHENG, S.I "Numerical Solution of a Uniform Flow Over a Sphere at Intermediate Reynolds Numbers", The Physics of Fluids, Vol 12, pp 949-959, 1969.



Özgeçmiş

Kamertap CAN, 22 Nisan 1971 Eskişehir doğumludur. 1992 yılında İstanbul Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümünü bitirdikten sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Uzay Bilimleri ve Teknolojisi Bölümünde Yüksek Lisans eğitime başlamıştır.

