

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZLEM İÇİ YÜKLÜ DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN
STATİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mehmet Rıza GÜNER**

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

**DÜZLEM İÇİ YÜKLÜ DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN
STATİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mehmet Rıza Gürer
(501061085)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2008

Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Fethi KADIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Nihal ERATLI (İ.T.Ü.)
Doç.Dr. İrfan COŞKUN (Y.T.Ü.)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında bana yol gösteren, bilgi ve fikirlerinden yararlandığım, Sayın Yrd.Doç.Dr. Fethi KADIOĞLU' na, hiçbir fedakarlıktan kaçınmadan çalışmalarımı destekleyen, her zaman sabırla bana yol gösteren aileme, çalışmalarım sırasında fikir ve ilgilerini esirgemeyen Araş.Gör. Bahar AYHAN' a ve Müh. Mustafa GÖNÜL' e ve manevi yardımlarını benden esirgemeyen Aysun Gülsüm ERKEK' e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Mayıs 2008

Mehmet Rıza GÜRER

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı Ve Kapsamı	1
1.2 Konuyla İlgili Çalışmalar	2
2. TEMEL DENKLEMLER	4
2.1 Çubuk Geometrisi	4
2.2 Alan Denklemleri	6
2.2.1 Denge Denklemleri	6
2.2.2 Kinematik Denklemler	8
2.2.3 Bünye Bağintıları	10
2.2.4 Uzaysal Çubuklar için Alan Denklemleri	11
2.3 Düzlem İçi Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	12
3. FONKSİYONELİN ELDE EDİLMESİ	14
3.1 Alan Denklemlerinin Potansiyelliğinin Araştırılması	14
3.2 Düzlem İçi Yüklü Daire Eksenli Kirişler İçin Fonksiyonel	15
4. KARMA SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	17
4.1 Sonlu Eleman Tanımı	17
4.2 Düzlem İçi Yüklü Daire Eksenli Kirişler İçin Sonlu Eleman Formülasyonu	17
5. UYGULAMALAR	23
6. SONUÇLAR	28
KAYNAKLAR	29
EKLER	31
ÖZGEÇMİŞ	40

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 5.1 Ankastre Mesnetli Konsol Çeyrek Çembere Ait Bulunan Sonuçların Teorik Çözümleri ile Karşılaştırılması.....	24
Tablo 5.2 Kirişin Boş Ucuna Ait Dönme ve Deplasmanlar.....	25
Tablo 5.3 Ankastre-Kayıc1 Mesnetli Yarım Çembere Ait Un Değerleri (m)...	27

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Yer Vektörü..	5
Şekil 2.2 : Eksen Takımları ve Kesit Tesirleri.....	5
Şekil 2.3 : Kesit Yüzeylerine ve Çubuk Üzerine Etkiyen Kuvvetler.....	7
Şekil 2.4 : Yer Değiştirme Vektörü.....	8
Şekil 2.5 : Çubuk Eksen Üzerinde Birbirine Çok Yakın İki Nokta Arasındaki Yer Değiştirme Farkı	9
Şekil 4.1 : Daire Eksenli Çubuk İçin Doğrusal Çubuk Elemanı.....	17
Şekil 5.1 : Normali Doğrultusunda Boş Ucundan Tekil Yükle Yüklü Çeyrek Çember Şeklinde Kiriş.....	23
Şekil 5.2 : Normali Doğrultusunda Yüklü Çeyrek Çember Şeklinde Kiriş.....	24
Şekil 5.3 : Eleman Sayısının Çift ve Tek Olmasına Göre U_n Değerlerinin Yakınsaması.....	25
Şekil 5.4 : Eleman Sayısının Çift ve Tek Olmasına Göre U_l Değerlerinin Yakınsaması.....	26
Şekil 5.5 : Eleman Sayısının Çift ve Tek Olmasına Göre Ω_b Değerlerinin Yakınsaması.....	26
Şekil 5.6 : Normali Doğrultusunda Yüklü Yarım Çember Şeklinde Kiriş....	27

SEMBOL LİSTESİ

$\vec{r}$	: Yer vektörü
$\vec{T}, \vec{M}$	: Kesme ve eğilme momenti vektörü
$\vec{p}, \vec{m}$	: Yayılı dış yükler
s	: Çubuk yay boyu
κ	: Eğrilik
τ	: Burulma eğriliği
$\vec{U}$	: Yer değiştirme vektörü
$\vec{\Omega}, \vec{\omega}$	: Eğilmeden dolayı dönme ve birim dönme vektörü
$\vec{\gamma}$	: Birim kayma vektörü
$\mathbf{C}, \mathbf{D}$	: Kayma ve eğilme rijitlik tansörleri
G	: Kayma modülü
E	: Elastisite modülü
A	: Kesit alanı
k', k''	: Kesme kuvveti için katsayılar
I	: Atalet momenti
ν	: Poisson oranı
$<, >$	: İç çarpım
$\mathbf{I}(\mathbf{y})$	: Fonksiyonel
R	: Yarıçap
Ψ	: Şekil fonksiyonu
$[,]_{\sigma}$	: Dinamik sınır koşullarının verildiği yerlerde geçerli
$[,]_{\epsilon}$	: Geometrik sınır koşullarının verildiği yerlerde geçerli

DÜZLEM İÇİ YÜKLÜ DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN STATİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada homojen, izotrop ve lineer elastik malzeme kabulü ile düzlem içi yüklü daire eksenli kirişlerin çeşitli yüklemeler altındaki davranışları incelenmiştir. Gâteaux Türevi yöntemi kullanılarak düzlem içi yüklü daire eksenli kirişler için fonksiyonel elde edilmiş ve karışık sonlu eleman matrisi verilmiştir. Formülasyonda, Timoshenko kiriş kuramına uygun olarak kayma ve uzama etkisi gözönüne alınmıştır.

Birinci bölümde çalışmanın amacı ve kapsamı verilip, literatürde konuyla ilgili yapılan çalışmalar kapsamında birlikte verilmiştir. İkinci bölümde çubuk geometrisiyle ilgili varsayımlar yapıp, eğri eksenli uzaysal çubukların alan denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen oniki adet birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem kullanılarak düzlem içi yüklü daire eksenli kirişler için alan denklemleri bulunmuştur. Üçüncü bölümde, düzlem içi yüklü daire eksenli kirişler için elde edilen denklemler operatör formunda yazılmış ve bu operatörün potansiyel olduğu gösterildikten sonra fonksiyonel elde edilmiştir. Dördüncü bölümde deplasmanların, dönmenin, kuvvetlerin ve momentlerin bilinmeyen olarak tanımlandığı çubuk eleman ele alınarak, bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir. Beşinci bölümde düzlem içi yüklü daire eksenli kirişlere ait çeşitli uygulamalara yer verilmiştir. C++ programlama dilinde geliştirilen bilgisayar programı yardımı ile sonuçlar, literatürdeki problemler ve bu problemlerin kesin çözümünün yanında SAP2000 paket programıyla da karşılaştırılmıştır. Altıncı bölümde çalışma hakkında sonuçlar ve değerlendirmeler verilmiştir. Sonuçların yaklaşımının düzgün olduğu ve mühendislik problemlerinde gerekli olan hassasiyeti sağladığı görülmüştür.

STATIC ANALYSIS OF CIRCULAR BEAMS LOADED IN ITS PLANE

SUMMARY

In this research, circular beams under various loads are studied with homogeneous, isotropic and linear elastic material assumption. Using Gâteaux differential functions of circular beams are presented and corresponding mixed finite element matrices are given. This formulation is also applicable to variable cross-sectional beams. Besides shear and axial effects, all types of loading and boundary conditions are taken into account.

In the first chapter researches done before are given with their explanations. In the second chapter assumptions on frame geometry are given and the field equations of circular beams loaded in its plane are obtained. In the third chapter, field equations are written in the operator form which is shown to be a potential operator and using Gâteaux differential, functional for circular beams loaded in its plane are obtained. In the fourth chapter, to obtain the rigidity matrices, mixed finite element method is used. The principle idea of finite element formulation is to achieve the relationship between the element unknowns at any point and the element nodal point unknowns directly through the use of interpolation functions. Since the functionals have only derivatives of first degree linear shape function for circular beams loaded in its plane would be necessary. In the fifth chapter, comparison with results reported in the literature and also results were compared with SAP2000 finite element programme. To solve the problems, a computer programme is written by using C++ programme language and in the sixth chapter, conclusions are given.

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı Ve Kapsamı

Bu çalışmada homojen, izotrop ve lineer elastik malzeme kabulü ile düzlem içi yüklü daire eksenli kirişlerin çeşitli yüklemeler altındaki davranışları incelenmiştir. Bu çalışma kapsamında yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu birinci mertebe kuramı içinde kalınmıştır. Timoshenko kiriş kuramına uygun olarak kayma ve uzama etkisi gözönüne alınmıştır.

Elastik çubukların hesabında, Elastisite teorisinin kullanılması ile ortaya çıkan sınır değer problemlerinin çözümü basit problemler dışında zorlaşmaktadır. Böyle durumlarda sayısal yöntemlere başvurulur. Günümüzde bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ve programlamaya olan yatkınlığı sebebiyle sonlu eleman yönteminin kullanılması yaygınlaşmıştır.

Sonlu eleman yöntemleri uygulanan varyasyon ilkelerine bağlı olarak;

- Yer değiştirme
- Karma sonlu elemanlar

olarak gruplandırılır. Klasik sonlu eleman çalışmalarında temel bilinmeyen olarak yer değiştirmeler alınmakta ve düğüm noktalarındaki bilinmeyenler komplementer enerji fonksiyonelinin minimize edilmesiyle bulunmaktadır. Karma sonlu elemanlar formülasyonunda ise yer değiştirmelerin yanı sıra kuvvet ve moment türü büyüklüklerde bilinmeyen olarak kullanılabilir. Karma sonlu elemanlar yöntemini üretmek için;

- Potansiyel enerji teoremleri
- Hu-Washizu ve Hellinger-Reissner teorileri

- Varyasyonel formülasyon
- Ağırlık formülasyonu
- Gâteaux Türevi

yöntemlerinden bahsedilebilir. Karma sonlu elemanlar yöntemi kayma kilitlenmesine (locking effect) karşı korunumludur ve eleman en boy oranı sorun oluşturmamaktadır.

1.2 Konu İle İlgili Çalışmalar

Daire eksenli kirişlerin statığı üzerine literatürde çok sayıda çalışma bulmak mümkündür. Ancak literatürdeki çalışmalar incelendiğinde, yapılan çalışmalarda daha çok düzlem dışı için analiz yapıldığı görülmüştür

Love, çubuğu bir parametreye bağlı olarak ele almış ve kullanılacak denklemler skaler büyüklüklerle verilmiştir [1]. Ayrıca daire kesitli, daire eksenli çubukların ve tam halkaların çeşitli yükleme durumları ele alınarak çözülmüştür. Antman, matrisel yöntemler ile çubuk teorisini düzenlemiştir [2].

İnan, çalışmasında çubuğu bir parametreye bağlı olarak ele alınmış ve sınır değer problemi bu tek parametreye bağlı kurmuştur. Elde edilen denklemler, eksenleri herhangi bir eğri olan ve kesitleri keyfi olarak değişebilen çubuklara uygulanabilecek genelliktir [3].

Tekinalp, çalışmasında çubuk teorisinde yer değiştirme ve şekil değiştirme ilişkilerini, hem kayma hem de uzama etkilerini gözönüne alınarak ortaya koymuştur [4]. Daha sonra Cinemre yer değiştirme ve şekil değiştirme ilişkilerini geometrik yoldan elde etmiştir [5]. Şekil değiştirme vektörü olarak, birim dönme vektörü yerine açısız değişim vektörü seçilmiştir. Bu seçim, hesapları biraz güçleştirirken, genelleştirmeye olanak tanınması, şekil değiştirmiş çubuğun geometrisi hakkında bilgi vermesi gibi avantajlara sahiptir.

Just, yayılı yük etkisindeki daire eksenli elemanı kullanarak yer değiştirme ve rijitlik matrisini elde etmiştir. Bu şekilde çözülen örneklerle, sonlu elemanlar yöntemi kullanarak çözüm elde eden çalışmalarla karşılaştırma yapılmıştır [6].

Saje, eksenini herhangi bir düzlem eğri olan elastik bir çubuğun, aksinel uzama ve kayma deformasyonu etkilerini gözönüne alarak, sonlu deformasyon analizini vermiştir. Bir tek değişkene bağlı ifade edilebilen, yeni bir varyasyonel prensip kullanmıştır. Böylece, sonlu elemanlar yönteminde, sadece bir tek fonksiyonun seçilmesi gerekmektedir. Ele alınan sonlu elemanın hassasiyetinin, eleman boyu ve sayısal integrasyonunun mertebesinde çok fazla etkilenmediği gösterilmiştir. Çözülen problemlerde, bir tek eleman kullanılarak, oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir [7].

Klasik sonlu eleman çalışmalarında temel bilinmeyenler olarak deplasmanlar alınmakta ve komplementer enerji fonksiyonelinin minimize edilmesiyle düğüm noktalarındaki bilinmeyenler elde edilebilmektedir. Zienkiewicz ve Cheung' in konuyla ilgili çalışmaları mevcuttur [8].

Bathe, kayma etkisini göz önüne alarak daha hassas sonuçlar elde edebilmiştir [9]. Prathap ve Babu kayma etkisini katıp, deplasmanları ve dönmeleri bilinmeyen olarak alıp oldukça iyi sonuçlar elde edebilmişlerdir [10,11].

Aköz tarafından Gâteaux diferansiyeli [12] kullanılarak karışık sonlu eleman çalışmaları ilk kez çubuklara uygulanmıştır [13,14]. Daha sonra Aköz, Omurtag ve Doğruoğlu uzay çubuklara ait fonksiyoneli elde etmiştir [15]. Bu yöntem Aköz ve çalışma gurubu tarafından çubuk, plak ve kabuklara çeşitli çalışmalarla uygulanmıştır [16 – 20].

2. TEMEL DENKLEMLER

2.1 Çubuk Geometrisi

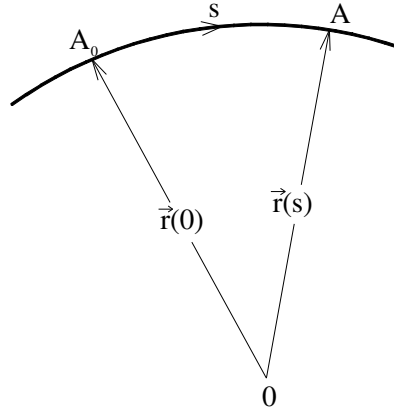
Elastik çubuklar hakkında geniş bilgi [3]' de bulunabilir. Burada kısaca özetlenecektir. Bu çalışmanın kapsamında, yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu birinci mertebe kuramı içinde kalınmıştır. Gerilme hesaplarını kolaylaştırmak amacı ile çubuk adını verdiğimiz cismin enine olan iki boyutunun da çubuk boyu ile eğrilikler yanında çok küçük olduğu varsayılarak hesaplamalar yapılmıştır. Kiriş lineer elastik, homojen ve izotrop bir malzemeden meydana gelmiş olup üniform bir kesit alanına sahiptir. Kuvvet ve deformasyonlar arasında lineer bir ilişki mevcut olarak alınmıştır. Yapılan formülasyonda kayma ve uzama etkisi göz önüne alınmıştır.

Bir çubukta belli başlı iki eleman vardır, biri çubuk eksen diğeri de çubuk dik kesitidir. Çubuk eksen olarak herhangi bir uzay eğrisi düşünülebilir. Bu eğriyi;

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \quad (2.1)$$

yer vektörü ile tarif edebiliriz. Şekil 2.1' de görüldüğü gibi s eğri üzerinde başlangıç olarak seçilen bir A_0 noktasıyla diğeri bir A noktasının arasındaki mesafeyi gösterir.

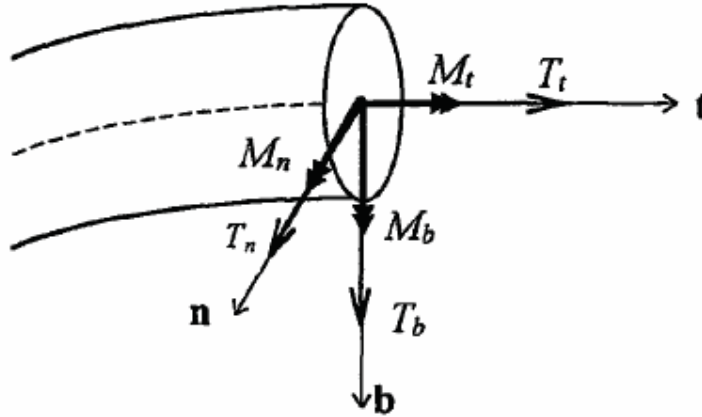
s skaler büyüklüğü seçilen belirli yönde olursa pozitif sayılır. $\vec{r}$ ise 0 mukayese noktasına göre A noktasının yerini belirten bir vektör olup s skalerine bağlıdır.



Şekil 2.1 Yer Vektörü

Şekil 2.2’ deki gibi eksene bağımlı üç birim vektör tarif edilirse; bunların teşkil edecekleri koordinat takımı, hareketli bir mukayese sistemi olup ilerideki bütün hesaplarımızda esas rolü oynayacağı için çok önemlidir.

$\vec{t}$, $\vec{b}$ ve $\vec{n}$ takımlarında kesit tesirlerinin çubuk mukavemetinde kullanılan özel adları vardır.



Şekil 2.2 Eksen Takımları ve Kesit Tesirleri

Bunlardan birincisi teğet birim vektör $\vec{t}$;

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (2.2)$$

$$\left| \vec{t} \right| = 1 \quad (2.3)$$

olarak tarif edilir. Eksen eğrisine teğet olan bu vektörün yönü artan s yönündedir.

İkinci vektör olarak esas normal birim vektörü olan $\vec{n}$ alınacaktır. Bu oskülatör düzlem içinde teğet vektöre dik olup eğrilik merkezine yönelmiştir.

Son olarak binormal vektör olan $\vec{b}$ ele alınacaktır. Bu ise;

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (2.4)$$

şeklinde evvelki iki birim vektörün vektörel çarpımıyla tarif edilmektedir. Bu üç birim vektör arasında Frenet formülleri [21] adı verilen bir takım diferansiyel geometrik bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \kappa \vec{t} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Burada κ eğriliği τ ise burulma eğriliğini göstermektedir.

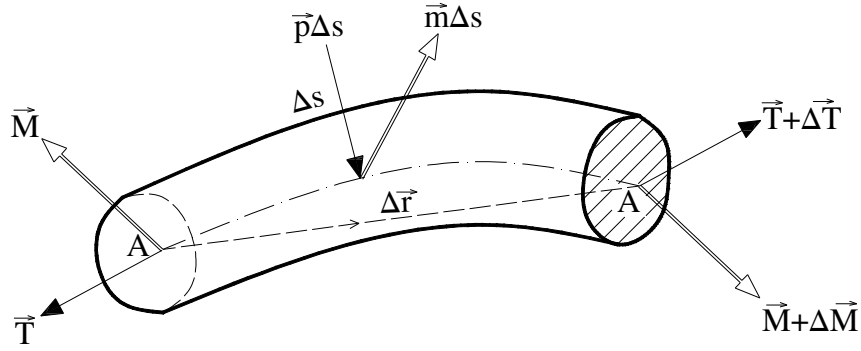
2.2. Alan Denklemleri

Alan denklemleri cismin davranışını temsil eden denklemlerdir. Denge denklemleri, kinematik denklemler, bünye bağıntıları ve sınır koşullarından oluşur.

2.2.1 Denge Denklemleri

Çubuğa etki eden dış kuvvetleri $\vec{p}(s)$ ve $\vec{m}(s)$ gibi iki fonksiyonla ifade edersek, $\vec{T}(s)$ ve $\vec{M}(s)$ iç kuvvet fonksiyonlarının değişimi keyfi olmayıp dış kuvvetlere

bağlıdır. Dış kuvvetler ve iç kuvvetler arasındaki ilişkiyi elde etmek için Δs uzunluğunda bir çubuk elemanı göz önüne alınırsa;



Şekil 2.3 Kesit Yüzeylerine ve Çubuk Üzerine Etkiyen Kuvvetler

Şekil 2.3' de görülen çubuk elemanı üzerinde, denge denklemi ile A noktasına göre yazılan moment denklemi;

$$-\vec{T} + \vec{T} + \Delta\vec{T} + \vec{p}\Delta s = 0 \quad (2.6)$$

$$-\vec{M} + \vec{M} + \Delta\vec{M} + \vec{m}\Delta s + \Delta\vec{r} \times (\vec{T} + \Delta\vec{T}) = 0 \quad (2.7)$$

ifadelerini verir. Daha sonra limite geçilip (2.2) ifadesi dikkate alınarak;

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (2.8)$$

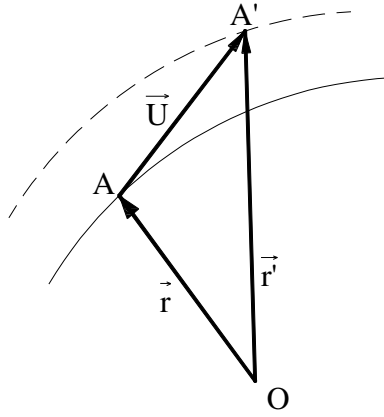
$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \quad (2.9)$$

vektörel diferansiyel denge denklemleri elde edilir.

2.2.2 Kinematik Denklemler

Çubuğun şekil değiştirmeden önce düzlem olan kesiti, şekil değiştirdikten sonra düzlemde sapmalar gösterir. Bu sapmalar ihmal edilerek, şekil değiştirmeden sonra kesitin düzlem kaldığı kabul edilmiştir.

Kesitin hareketinin öteleme ve dönmeden oluştuğunu düşünebiliriz. Şekil 2.4' te gösterildiği gibi çubuk şekil değiştirdikten sonra A noktası A' konumunu alır. $\vec{AA'} = \vec{U}(s)$ vektörüne yer değiştirme vektörü denir. $\vec{U}(s)$ vektörü dik kesitin ağırlık merkezine ait ötelemeyi ve $\vec{\Omega}(s)$ vektörü kesitin ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirtir.



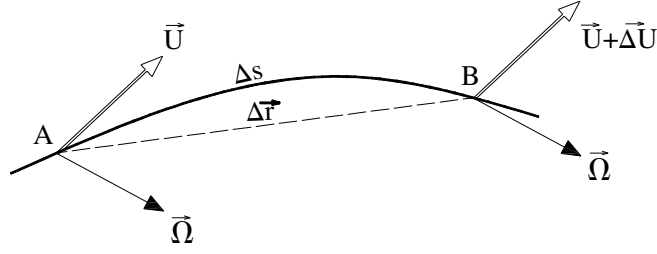
Şekil 2.4 Yer Değiştirme Vektörü

$\vec{U}(s)$ ve $\vec{\Omega}(s)$ vektörleri arasında bir diferansiyel bağıntı vardır ve bu bağıntıyı çıkarabilmek için birim uzunluklu çubuk için relatif tarif edilmiş iki yeni vektör tarif edeceğiz. $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ sırasıyla relatif birim kayma ve relatif birim dönme vektörüdür. $\vec{U}(s)$, $\vec{\Omega}(s)$, $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ vektörlerinin şiddetlerinin çok küçük olduğu kabul edilmiştir.

$\vec{\omega}$ vektörünün tarifi

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{ds} \quad (2.10)$$

şeklindedir.



Şekil 2.5 Çubuk Ekseni Üzerinde Birbirine Çok Yakın İki Nokta Arasındaki Yer Değiştirme Farkı

A ve B çubuk ekseni üzerinde birbirine çok yakın iki nokta olmak üzere, Şekil 2.5'te görüldüğü gibi B noktasındaki yer değiştirmenin A noktasından farkını $\Delta \vec{U}$ ile gösterelim. B noktası A' ya göre relatif olarak $\vec{\gamma} \Delta s$ kadar farklı hareket eder. A dan geçen kesit $\vec{\Omega}$ dönmesini yapınca B noktası da $\vec{\Omega} \times \Delta \vec{r}$ ile gösterilen hareketi yapar. Relatif yer değiştirme;

$$\Delta \vec{U} = \vec{\gamma} \Delta s + \vec{\Omega} \times \Delta \vec{r} \quad (2.11)$$

bağıntısıyla ifade edilir. Denklem Δs 'e bölünüp, (2.2) bağıntısı göz önüne alınarak limiti alınırsa

$$\frac{d\vec{U}}{ds} = \vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad (2.12)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı $\vec{U}$ ile $\vec{\Omega}$ arasındaki ilişkiyi göstermektedir ve uygunluk şartı olarak adlandırılır . Kinematik denklemler aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} = 0 \quad (2.14)$$

2.2.3 Bünve Bağıntıları

Malzemenin homojen, izotrop ve elastik olduğunu ve Hooke kanununa uyduğunu kabul edeceğiz. $\vec{T}$ ve $\vec{M}$ ile $\vec{\omega}$ ve $\vec{\gamma}$ arasındaki ilişki

$$\vec{T} = \mathbf{C} \vec{\gamma} \quad (2.15)$$

$$\vec{M} = \mathbf{D} \vec{\omega}$$

biçimindedir. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ sırasıyla kayma ve eğilme rijitlik tansörleridir. $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ tansörleri sadece çubuk malzemesine ve geometrisine bağlıdır. $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ takımı kesitin asal eksenleriyle üst üste gelirse tansörler

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_n & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & C_t \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_n & 0 & 0 \\ 0 & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_t \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

biçimindedir ve yalnız köşegen değerleri sıfırdan farklıdır. Sıfırdan farklı olan rijitlikler;

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{GA}{k'} \quad ; \quad C_b = \frac{GA}{k''} \quad ; \quad C_t = EA \\ D_n &= EI_n \quad ; \quad D_b = EI_b \quad ; \quad D_t = EI_t \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklindedir. Burada I_t kutupsal atalet momenti, I_n ve I_b sırasıyla $\vec{n}$ ve $\vec{b}$ eksenlerine göre atalet momentleri, E elastisite modülü, $G = E / [2(1+\nu)]$ kayma modülü, ν poisson oranı, k' ve k'' kesme etkisini katan sabitleri ve A çubuk dik kesit alanını ifade etmektedir.

Rijitlik tansörlerinin koordinatlarının belirttiği determinant sıfırdan farklı olduğu için terslerini tarif edebiliriz. (2.15) denklemleri,

$$\vec{\gamma} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \vec{T}$$

$$\vec{\omega} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \vec{M} \quad (2.19)$$

şeklini alır.

2.2.4 Uzaysal Çubuklar için Alan Denklemleri

Uzaysal çubuklar için alan denklemleri; çubuk elemanında diferansiyel denge denklemleri olan (2.8), (2.9); şekil değiştirme ve yer değiştirmedeki uygunluğu gösteren (2.13), (2.14) denklemleri ile, Genel Hooke kanunları yerine geçen (2.15) denklemlerinden ibarettir. Gerekli matematiksel işlemler yapılırsa denge denklemleri;

$$\frac{dT_t}{ds} = \kappa T_n - p_t \quad (2.20)$$

$$\frac{dT_n}{ds} = -\kappa T_t + \tau T_b - p_n \quad (2.21)$$

$$\frac{dT_b}{ds} = -\tau T_n - p_b \quad (2.22)$$

$$\frac{dM_t}{ds} = \kappa M_n - m_t \quad (2.23)$$

$$\frac{dM_n}{ds} = T_b - \kappa M_t + \tau M_b - m_n \quad (2.24)$$

$$\frac{dM_b}{ds} = -T_n - \tau M_n - m_b \quad (2.25)$$

ve kinematik denklemler;

$$\frac{d\Omega_t}{ds} = \kappa \Omega_n + \frac{M_t}{D_t} \quad (2.26)$$

$$\frac{d\Omega_n}{ds} = -\kappa \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{M_n}{D_n} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\Omega_b}{ds} = -\tau \Omega_n + \frac{M_b}{D_b} \quad (2.28)$$

$$\frac{dU_t}{ds} = \kappa U_n + \frac{T_t}{C_t} \quad (2.29)$$

$$\frac{dU_n}{ds} = -\kappa U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{T_n}{C_n} \quad (2.30)$$

$$\frac{dU_b}{ds} = -\tau U_n - \Omega_n + \frac{T_b}{C_b} \quad (2.31)$$

olarak oniki adet birinci mertebeden diferansiyel denklem elde edilir. Alan denklemlerinin elde edilmesi [EK.1]' de gösterilmiş. Bu denklemler çubuk ekseninin bulunduğu düzlem ve bu düzleme dik doğrultudaki düzlem olmak üzere yükleme durumlarına göre iki gruba ayrılabilir. Elde edilen denklemler üç boyutlu herhangi eğri eksenli bir çubuk için geçerlidir.

2.3 Düzlem İçi Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Uzaysal çubuklar için elde edilen alan denklemlerinde $\tau=0$ ve R herhangi bir dairenin yarıçapı olmak üzere $\kappa = 1 / R$ olarak yerine yazılır ve dairede ds uzunluk elemanı

$$ds=R d\theta \quad (2.32)$$

olarak alınır. Düzlem içi yükleme durumunu ifade eden (2.20), (2.21), (2.25), (2.28), (2.29) ve (2.30) denklemleri, (2.32) dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılarak, denge denklemleri;

$$\begin{aligned} \frac{dT_t}{d\theta} &= T_n - R p_t \\ \frac{dT_n}{d\theta} &= -T_t - R p_n \\ \frac{dM_b}{d\theta} &= -R T_n - R m_b \end{aligned} \quad (2.33)$$

kinematik denklemler;

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Omega_b}{d\theta} &= R \frac{M_b}{D_b} \\
 \frac{dU_t}{d\theta} &= U_n + R \frac{T_t}{C_t} \\
 \frac{dU_n}{d\theta} &= -U_t + R \Omega_b + R \frac{T_n}{C_n}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

ve sınır koşulları sembolik olarak;

$$\begin{aligned}
 T_n &= \hat{T}_n \\
 T_t &= \hat{T}_t \\
 M_b &= \hat{M}_b \\
 -\Omega_b &= -\hat{\Omega}_b \\
 -U_n &= -\hat{U}_n \\
 -U_t &= -\hat{U}_t
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

biçimde yazılır.

3. FONKSİYONELİN ELDE EDİLMESİ

3.1 Alan Denklemlerinin Potansiyelliğinin Araştırılması

(2.33), (2.34) ve (2.35) denklemlerinin tümü $\mathbf{Q}=\mathbf{Ly-f}$ şeklinde bir operatör olarak gösterebiliriz.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{d}{d\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{d\theta} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{d\theta} & 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{d}{d\theta} & -\frac{R}{D_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{d}{d\theta} & 0 & 0 & -\frac{R}{C_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{d\theta} & 1 & -R & 0 & 0 & -\frac{R}{C_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3.1)

şeklinde olup $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{f}$ vektörleri ise;

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} U_n \\ U_t \\ \Omega_b \\ M_b \\ T_t \\ T_n \\ U_n \\ U_t \\ \Omega_b \\ M_b \\ T_t \\ T_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} R p_n \\ R p_t \\ R m_b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{T}_n \\ \hat{T}_t \\ \hat{M}_b \\ -\hat{\Omega}_b \\ -\hat{U}_t \\ -\hat{U}_n \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindeedir. Burada $\mathbf{L}$ türev operatörünü, $\mathbf{y}$ bilinmeyenleri ve $\mathbf{f}$ dış yükleri ifade eder. $\mathbf{Q}=\mathbf{L}\mathbf{y}-\mathbf{f}$ operatörünün potansiyel bir fonksiyon olabilmesi için;

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (3.3)$$

eşitliği sağlamalıdır. Burada $\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle$ iki vektörün iç çarpımı ve $d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})$

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \eta \bar{\mathbf{y}})}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (3.4)$$

biçiminde olup $\mathbf{Q}$ operatörünün Gâteaux türevini ifade etmektedir. $\mathbf{Q}$ operatörünün potansiyel olduğu işlemi [EK.2]' de gösterilmiştir.

3.2 Düzlem İçi Yüklü Daire Eksenli Kirişler İçin Fonksiyonel

Alan denklemlerinin fonksiyonel karşılığı Oden ve Reddy tarafından [12]' de verildiği gibi;

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = \int_0^1 \langle \mathbf{Q}(s\mathbf{y}, \mathbf{y}), \mathbf{y} \rangle ds \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada s skaler bir büyüklüktür. Yapılan matematiksel işlemler [EK.3] te verilmiştir.

Düzlem içi yüklü daire eksenli kirişler için elde edilen fonksiyonel

$$\begin{aligned}
I(y) = & -R[T_n, \Omega_b] - [T_t, U_n] + [T_n, U_t] - [T_n', U_n] - [T_t', U_t] - [M_b', \Omega_b] \\
& - \frac{R}{2D_b} [M_b, M_b] - \frac{R}{2C_t} [T_t, T_t] - \frac{R}{2C_n} [T_n, T_n] \\
& - R[p_n, U_n] - R[p_t, U_t] - R[m_b, \Omega_b] \\
& + [\hat{\Omega}_b, M_b]_{\varepsilon} + [\hat{U}_n, T_n]_{\varepsilon} + [\hat{U}_t, T_t]_{\varepsilon} \\
& + [(T_n - \hat{T}_n), U_n]_{\sigma} + [(T_t - \hat{T}_t), U_t]_{\sigma} + [(M_b - \hat{M}_b), \Omega_b]_{\sigma}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

şekildedir. Burada köşeli parantezler (3.7) ifadesinde verildiği gibi belirli bir aralıkta bir fonksiyonla bir değişkenin çarpımının integralini göstermek üzere,

$$[f(x), y^*] = \int_b^a f(x) y^* dx \tag{3.7}$$

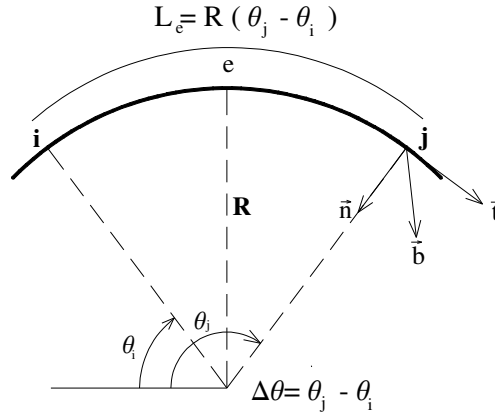
şeklindedir. Burada $[\ ,]_{\varepsilon}$ ve $[\ ,]_{\sigma}$ sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarının verildiği yerde geçerli olan terimlerdir.

4. KARMA SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ

4.1 Sonlu Eleman Tanımı

Sonlu elemanlar yöntemi, matematiksel olarak çözümü zor olan veya çözülemeyen karmaşık sistemlerin çözümüne olanak sağlayan ve mühendislikte yaygın olarak kullanılan sayısal bir çözüm yöntemidir. Şekil fonksiyonları yardımıyla elemanın herhangi bir yerindeki bilinmeyenler ile, eleman düğüm noktalarındaki bilinmeyenler arasındaki ilişkileri doğrudan elde etmektedir. Daire eksenli çubuk denklemleri birinci mertebeden diferansiyel denklemlerden oluştuğu için, kullanılan şekil fonksiyonlarının doğrusal olması yeterlidir.

4.2 Düzlem İçi Yüklü Daire Eksenli Kirişler İçin Sonlu Eleman Formülasyonu



Şekil 4.1 Daire Eksenli Çubuk İçin Doğrusal Çubuk Elemanı

Şekil 4.1' den görüleceği gibi daire eksenli çubuklar için eleman boyu

$$L_e = R(\theta_j - \theta_i) \quad (4.1)$$

olmak üzere, kullanılan iki düğüm noktalı şekil fonksiyonları;

$$\Psi_i = \frac{R(\theta_j - \theta)}{L_e} \quad \Psi_j = \frac{R(\theta - \theta_i)}{L_e} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Her düğüm noktasında altı bilinmeyen mevcuttur dolayısıyla bir eleman oniki bilinmeye sahiptir. Bu bilinmeyenler ve dış yükler şekil fonksiyonları cinsinden;

$$\begin{aligned} U_n &= U_{ni} \Psi_i + U_{nj} \Psi_j \\ U_t &= U_{ti} \Psi_i + U_{tj} \Psi_j \\ \Omega_b &= \Omega_{bi} \Psi_i + \Omega_{bj} \Psi_j \\ M_b &= M_{bi} \Psi_i + M_{bj} \Psi_j \\ T_t &= T_{ti} \Psi_i + T_{tj} \Psi_j \\ T_n &= T_{ni} \Psi_i + T_{nj} \Psi_j \\ p_n &= p_{ni} \Psi_i + p_{nj} \Psi_j \\ p_t &= p_{ti} \Psi_i + p_{tj} \Psi_j \end{aligned} \quad (4.3)$$

yazılır. Fonksiyoneldeki türevli terimler için gerekli olan bilinmeyenlerin türevleri

$$\begin{aligned} M'_b &= M_{bi} \Psi'_i + M_{bj} \Psi'_j \\ T'_t &= T_{ti} \Psi'_i + T_{tj} \Psi'_j \\ T'_n &= T_{ni} \Psi'_i + T_{nj} \Psi'_j \end{aligned} \quad (4.4)$$

ve buradaki şekil fonksiyonlarının türevleri

$$\begin{aligned} \Psi'_i &= -\frac{R}{L_e} \\ \Psi'_j &= \frac{R}{L_e} \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. Elde edilen bu denklemler düzlem içi yüklü daire eksenli çubuklar için elde edilen (3.6)' da verilen fonksiyonelde yerine yazılırsa bir eleman için;

$$\begin{aligned}
I^e = & -R \left[(T_{ni} \psi_i + T_{nj} \psi_j), (\Omega_{bi} \psi_i + \Omega_{bj} \psi_j) \right] - \left[(T_{ti} \psi_i + T_{tj} \psi_j), (U_{ni} \psi_i + U_{nj} \psi_j) \right] \\
& + \left[(T_{ni} \psi_i + T_{nj} \psi_j), (U_{ti} \psi_i + U_{tj} \psi_j) \right] - \left[(T_{ni} \psi'_i + T_{nj} \psi'_j), (U_{ni} \psi_i + U_{nj} \psi_j) \right] \\
& - \left[(T_{ti} \psi'_i + T_{tj} \psi'_j), (U_{ti} \psi_i + U_{tj} \psi_j) \right] - \left[(M_{bi} \psi'_i + M_{bj} \psi'_j), (\Omega_{bi} \psi_i + \Omega_{bj} \psi_j) \right] \\
& - \frac{R}{2 D_b} \left[(M_{bi} \psi_i + M_{bj} \psi_j), (M_{bi} \psi_i + M_{bj} \psi_j) \right] - \frac{R}{2 C_t} \left[(T_{ti} \psi_i + T_{tj} \psi_j), (T_{ti} \psi_i + T_{tj} \psi_j) \right] \\
& - \frac{R}{2 C_n} \left[(T_{ni} \psi_i + T_{nj} \psi_j), (T_{ni} \psi_i + T_{nj} \psi_j) \right] - R \left[(p_{ni} \psi_i + p_{nj} \psi_j), (U_{ni} \psi_i + U_{nj} \psi_j) \right] \\
& - R \left[(p_{ti} \psi_i + p_{tj} \psi_j), (U_{ti} \psi_i + U_{tj} \psi_j) \right] \tag{4.6}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (4.6) ifadesi düzenlenerek açık formda aşağıdaki şekilde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
I^e = & -RT_{ni}\Omega_{bi}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta - RT_{ni}\Omega_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - RT_{nj}\Omega_{bi}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - RT_{nj}\Omega_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta \\
& - T_{ti}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta - T_{ti}U_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - T_{tj}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - T_{tj}U_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta \\
& + T_{ni}U_{ti}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta + T_{ni}U_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta + T_{nj}U_{ti}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta + T_{nj}U_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta \\
& - T_{ni}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi'_i\psi_id\theta - T_{ni}U_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi'_i\psi_jd\theta - T_{nj}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi'_jd\theta - T_{nj}U_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi'_jd\theta \\
& - T_{ti}U_{ti}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi'_i\psi_id\theta - T_{ti}U_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi'_i\psi_jd\theta - T_{tj}U_{ti}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi'_jd\theta - T_{tj}U_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi'_jd\theta \\
& - M_{bi}\Omega_{bi}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi'_i\psi_id\theta - M_{bi}\Omega_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi'_i\psi_jd\theta - M_{bj}\Omega_{bi}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi'_jd\theta - M_{bj}\Omega_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi'_jd\theta \\
& - \frac{R}{2 D_b} M_{bi}M_{bi}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta - \frac{R}{2 D_b} M_{bi}M_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - \frac{R}{2 D_b} M_{bi}M_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta \\
& - \frac{R}{2 D_b} M_{bj}M_{bj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta - \frac{R}{2 C_t} T_{ti}T_{ti}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta - \frac{R}{2 C_t} T_{ti}T_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - \frac{R}{2 C_t} T_{ti}T_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta \\
& - \frac{R}{2 C_t} T_{tj}T_{tj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta - \frac{R}{2 C_n} T_{ni}T_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta - \frac{R}{2 C_n} T_{ni}T_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - \frac{R}{2 C_n} T_{ni}T_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta \\
& - \frac{R}{2 C_n} T_{nj}T_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta - Rp_{ni}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta - Rp_{ni}U_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta - Rp_{nj}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta
\end{aligned}$$

$$-Rp_{nj}U_{nj}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta-Rp_{ni}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_id\theta-Rp_{ij}U_{ij}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta-Rp_{ij}U_{ni}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_i\psi_jd\theta-Rp_{ij}U_{ij}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\psi_j\psi_jd\theta$$

(4.7)

ifadesine dönüşür. (4.7)' deki integraller tek tek alınıp (4.8) de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}\int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi_i\Psi_id\theta &= \frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta_j-\theta)(\theta_j-\theta)d\theta = \frac{R^2}{L_e^2}\left(\theta_j^2\theta-\theta_j\theta^2+\frac{\theta^3}{3}\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = \frac{L_e}{3R} \\ \int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi_j\Psi_jd\theta &= \frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta-\theta_i)(\theta-\theta_i)d\theta = \frac{R^2}{L_e^2}\left(\theta_i^2\theta-\theta_i\theta^2+\frac{\theta^3}{3}\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = \frac{L_e}{3R} \\ \int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi_i\Psi_jd\theta &= \frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta_j-\theta)(\theta-\theta_i)d\theta = \frac{R^2}{L_e^2}\left(\frac{\theta_j\theta^2}{2}-\theta_i\theta_j\theta+\frac{\theta_i\theta^2}{2}-\frac{\theta^3}{3}\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = \frac{L_e}{6R} \\ \int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi_i\Psi'_id\theta &= -\frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta_j-\theta)d\theta = -\frac{R^2}{L_e^2}\left(\theta_j\theta-\frac{\theta^2}{2}\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = -\frac{1}{2} \\ \int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi_i\Psi'_jd\theta &= \frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta_j-\theta)d\theta = \frac{R^2}{L_e^2}\left(\theta_j\theta-\frac{\theta^2}{2}\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = \frac{1}{2} \\ \int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi'_i\Psi_jd\theta &= -\frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta-\theta_i)d\theta = -\frac{R^2}{L_e^2}\left(\frac{\theta^2}{2}-\theta_i\theta\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = -\frac{1}{2} \\ \int_{\theta_i}^{\theta_j}\Psi_j\Psi'_jd\theta &= \frac{R}{L_e}\frac{R}{L_e}\int_{\theta_i}^{\theta_j}(\theta-\theta_i)d\theta = \frac{R^2}{L_e^2}\left(\frac{\theta^2}{2}-\theta_i\theta\right)\Big|_{\theta_i}^{\theta_j} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4.8)

Daha sonra (4.8)' de elde edilen sonuçlar (4.7)' de yerlerine yazılırsa fonksiyonel;

$$\begin{aligned}I^e &= -\frac{L_eT_{ni}\Omega_{bi}}{3} - \frac{L_eT_{ni}\Omega_{bj}}{6} - \frac{L_eT_{nj}\Omega_{bi}}{6} - \frac{L_eT_{nj}\Omega_{bj}}{3} - \frac{L_eT_{ti}U_{ni}}{3R} - \frac{L_eT_{ti}U_{nj}}{6R} - \frac{L_eT_{tj}U_{ni}}{6R} - \frac{L_eT_{tj}U_{nj}}{3R} \\ &+ \frac{L_eT_{ni}U_{ti}}{3R} + \frac{L_eT_{ni}U_{tj}}{6R} + \frac{L_eT_{nj}U_{ti}}{6R} + \frac{L_eT_{nj}U_{tj}}{3R} + \frac{T_{ni}U_{ni}}{2} + \frac{T_{ni}U_{nj}}{2} + \frac{T_{nj}U_{ni}}{2} + \frac{T_{nj}U_{nj}}{2} \\ &+ \frac{T_{ti}U_{ti}}{2} + \frac{T_{ti}U_{tj}}{2} - \frac{T_{tj}U_{ti}}{2} - \frac{T_{tj}U_{tj}}{2} + \frac{M_{bi}\Omega_{bi}}{2} + \frac{M_{bi}\Omega_{bj}}{2} - \frac{M_{bj}\Omega_{bi}}{2} - \frac{M_{bj}\Omega_{bj}}{2} \\ &- \frac{L_eM_{bi}M_{bi}}{6D_b} - \frac{L_eM_{bi}M_{bj}}{6D_b} - \frac{L_eM_{bj}M_{bj}}{6D_b} - \frac{L_eT_{ti}T_{ti}}{6C_i} - \frac{L_eT_{ti}T_{tj}}{6C_i} - \frac{L_eT_{tj}T_{tj}}{6C_i} \\ &- \frac{L_eT_{ni}T_{ni}}{6C_n} - \frac{L_eT_{ni}T_{nj}}{6C_n} - \frac{L_eT_{nj}T_{nj}}{6C_n} - \frac{L_eP_{ni}U_{ni}}{3} - \frac{L_eP_{ni}U_{nj}}{6} - \frac{L_eP_{nj}U_{ni}}{6} - \frac{L_eP_{nj}U_{nj}}{3} \\ &- \frac{L_eP_{ti}U_{ti}}{3} - \frac{L_eP_{ti}U_{tj}}{6} - \frac{L_eP_{tj}U_{ti}}{6} - \frac{L_eP_{tj}U_{tj}}{3}\end{aligned}$$

(4.9)

biçiminde elde edilir. Fonksiyonelde oniki adet bilinmeyen vardır. (4.10)'da gösterildiği gibi Her bir bilinmeyene göre fonksiyoneli ekstremum yapacak şekilde türev alınıp sıfıra eşitlendiği takdirde;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial U_{ni}} &= 0 \dots\dots\dots 1 \\
\frac{\partial I^e}{\partial U_{nj}} &= 0 \dots\dots\dots 2 \\
\frac{\partial I^e}{\partial U_{ti}} &= 0 \dots\dots\dots 3 \\
\frac{\partial I^e}{\partial U_{tj}} &= 0 \dots\dots\dots 4 \\
\frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{bi}} &= 0 \dots\dots\dots 5 \\
\frac{\partial I^e}{\partial \Omega_{bj}} &= 0 \dots\dots\dots 6 \\
\frac{\partial I^e}{\partial M_{bi}} &= 0 \dots\dots\dots 7 \\
\frac{\partial I^e}{\partial M_{bj}} &= 0 \dots\dots\dots 8 \\
\frac{\partial I^e}{\partial T_{ni}} &= 0 \dots\dots\dots 9 \\
\frac{\partial I^e}{\partial T_{nj}} &= 0 \dots\dots\dots 10 \\
\frac{\partial I^e}{\partial T_{ti}} &= 0 \dots\dots\dots 11 \\
\frac{\partial I^e}{\partial T_{tj}} &= 0 \dots\dots\dots 12
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

şeklinde oniki adet eleman denklemi elde edilir. Elde edilen oniki denklem, matris formunda verilmiştir. (4.11)' de verilen eleman matrisi incelendiğinde simetrik olduğu görülür.

$$P = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_e}{3R} & -\frac{L_e}{6R} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_e}{6R} & -\frac{L_e}{3R} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{3R} & \frac{L_e}{6R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{6R} & \frac{L_e}{3R} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{L_e}{3} & -\frac{L_e}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{L_e}{6} & -\frac{L_e}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{L_e}{3D_b} & -\frac{L_e}{6D_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{L_e}{6D_b} & -\frac{L_e}{3D_b} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{L_e}{3R} & -\frac{L_e}{6R} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_e}{3C_t} & -\frac{L_e}{6C_t} & 0 & 0 \\ -\frac{L_e}{6R} & -\frac{L_e}{3R} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_e}{6C_t} & -\frac{L_e}{3C_t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{L_e}{3R} & \frac{L_e}{6R} & -\frac{L_e}{3} & -\frac{L_e}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_e}{3C_n} & -\frac{L_e}{6C_n} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{L_e}{6R} & \frac{L_e}{3R} & -\frac{L_e}{6} & -\frac{L_e}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L_e}{6C_n} & -\frac{L_e}{3C_n} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

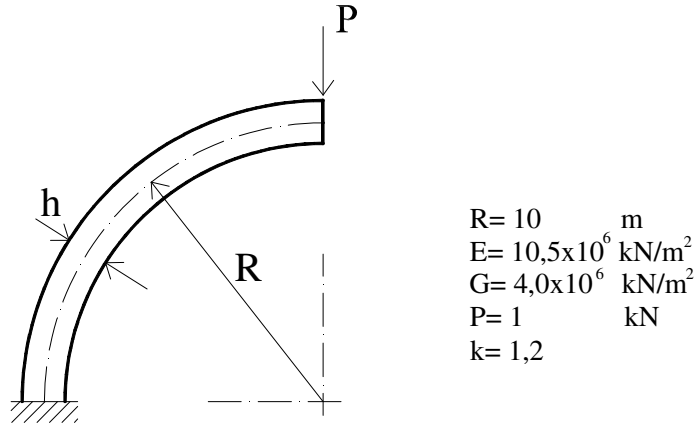
$$[P] \begin{Bmatrix} u_{ni} \\ u_{nj} \\ u_{ti} \\ u_{tj} \\ \Omega_{bi} \\ \Omega_{bj} \\ M_{bi} \\ M_{bj} \\ T_{ti} \\ T_{tj} \\ T_{ni} \\ T_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L_e p_{ni}}{3} + \frac{L_e p_{nj}}{6} \\ \frac{L_e p_{ni}}{6} + \frac{L_e p_{nj}}{3} \\ \frac{L_e p_{ti}}{3} + \frac{L_e p_{tj}}{6} \\ \frac{L_e p_{ti}}{6} + \frac{L_e p_{tj}}{3} \\ \frac{L_e m_{bi}}{3} + \frac{L_e m_{bi}}{6} \\ \frac{L_e m_{bi}}{6} + \frac{L_e m_{bi}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

5. UYGULAMALAR

Düzlem içi yüklü daire eksenli kirişler için eleman matrisi elde edildikten sonra, C++ programlama dilinde yazılan program ile seçilen problemlerin çözümleri yapılmıştır. Yazılan bilgisayar programı CD eki olarak [EK.4]' de verilmiştir.

Örnek 1

Bu örnekte dikdörtgen kesitli, Şekil 5.1' de görülen çeyrek çember şeklinde, bir ucu ankastre olan konsol kiriş, boş ucundan kirişin normali doğrultusunda tekil yükle yüklenmiştir. Kesit genişliği sabit olmak üzere kiriş ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.1 Normali Doğrultusunda Boş Ucundan Tekil Yükle Yüklü
Çeyrek Çember Şeklinde Kiriş

Kirişin boş ucuna ait deplasmanlar ve dönme değerleri, Castigliano Enerji Teoremi kullanılarak;

$$U_n = \frac{\pi PR}{4} \left(\frac{R^2}{EI} + \frac{1}{Gak'} + \frac{1}{EA} \right) \quad (5.1)$$

$$U_t = \frac{PR^3}{2EI} - \frac{PR}{2GAk'} - \frac{PR}{2EA} \quad (5.2)$$

$$\Omega_b = \frac{PR^2}{EI} \quad (5.3)$$

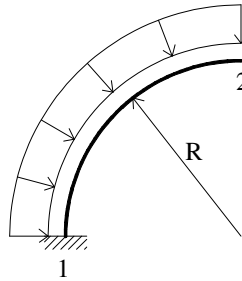
şeklinde ifade edilir. Kiriş altı ve oniki adet sonlu elemana bölünerek, R/h oranının 4 ile 1000 arasında değiştiği çeşitli durumlara göre bulunan sonuçlar, Tablo 5.1’ de gösterilen problemin teorik çözümü ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.1 Ankastre Mesnetli Konsol Çeyrek Çembere Ait Bulunan Sonuçların Teorik Çözümleri ile Karşılaştırılması

R/h	6 eleman			12 eleman		
	$U_n / U_{n (teorik)}$	$U_t / U_{t (teorik)}$	$\Omega_b / \Omega_{b (teorik)}$	$U_n / U_{n (teorik)}$	$U_t / U_{t (teorik)}$	$\Omega_b / \Omega_{b (teorik)}$
4	1.01789	1.01596	1.00507	1.00807	1.02524	1.00124
10	1.01366	0.99260	1.00507	1.00392	1.00154	1.00125
20	1.01305	0.98932	1.00507	1.00332	0.99821	1.00124
50	1.01287	0.98840	1.00507	1.00315	0.99728	1.00125
100	1.01285	0.98827	1.00507	1.00312	0.99715	1.00125
200	1.01284	0.98824	1.00507	1.00312	0.99712	1.00124
500	1.01284	0.98823	1.00507	1.00311	0.99710	1.00125
1000	1.01284	0.98823	1.00507	1.00312	0.99710	1.00125

Örnek 2

Bu örnekte daire bir kesite sahip, Şekil 5.2’ de görülen çeyrek çember şeklinde, bir ucu ankastre konsol kiriş, normalı doğrultusunda düzgün yayılı olarak yüklenmiştir. $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $R = 1 \text{ m}$, $\nu = 0.2$ ve $k' = 10/9$ olmak üzere kiriş kesit yarıçapı 10 cm’ dir. Kiriş normalı doğrultusunda $q_n = 10 \text{ kN/m}$ olarak yüklenmiştir.

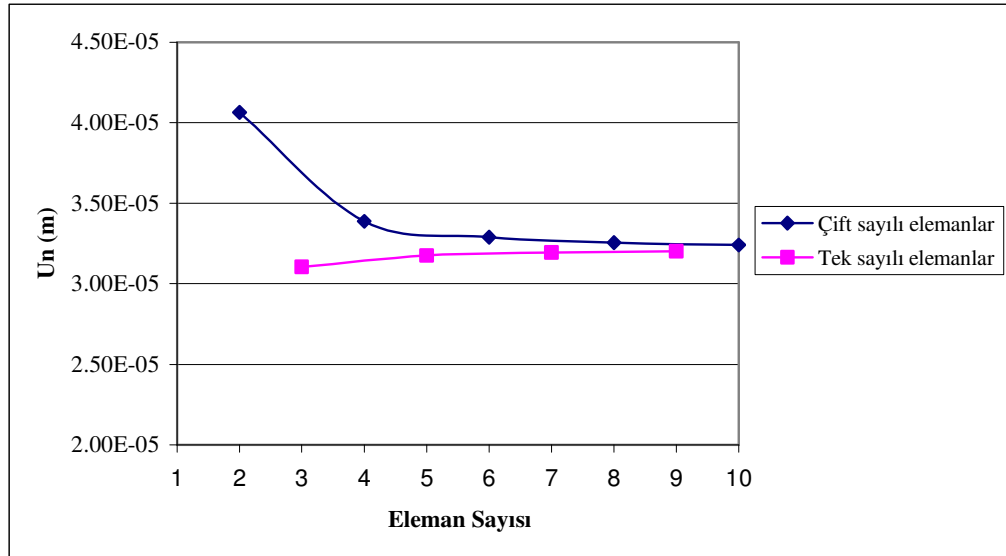


Şekil 5.2 Normali Doğrultusunda Yüklü Çeyrek Çember Şeklinde Kiriş

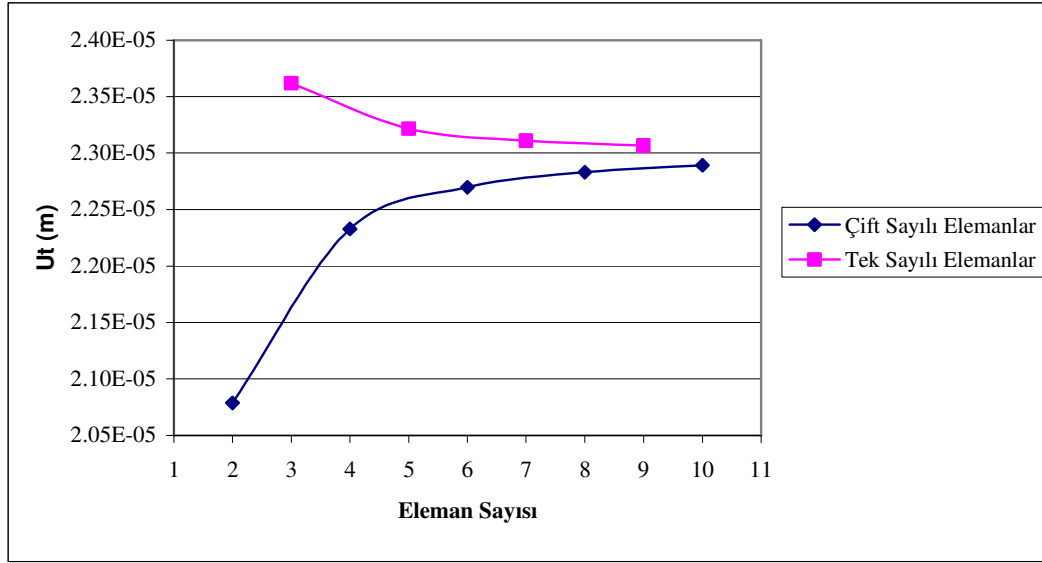
Kiriş iki ve on eleman arasında parçalara ayrılıp, 2 düğüm noktasının normal ve teğeti doğrultusundaki deplasmanları ve dönmesi incelenmiş, sonuçlar Tablo 5.2’ de verilmiş. Tablo 5.2’ de verilen sonuçlar, eleman sayısının tek ve çift olmasına göre U_n değerlerinin yakınsaması Şekil 5.3’ de, U_t değerlerinin yakınsaması Şekil 5.4’ de ve Ω_b değerlerinin yakınsaması Şekil 5.5’ de verilmiştir.

Tablo 5.2 Kirişin Boş Ucuna Ait Dönme ve Deplasmanlar

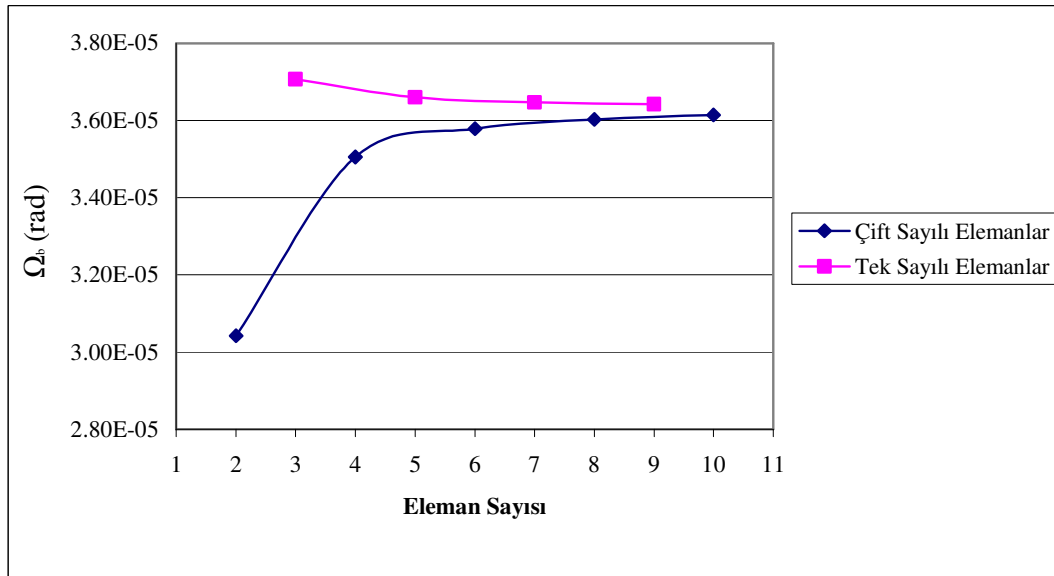
Eleman sayısı (n)	U_n (m)	U_t (m)	Ω_b (rad)
2	4.06251e-005	2.07549e-005	3.04256e-005
3	3.10533e-005	2.36184e-005	3.70684e-005
4	3.38861e-005	2.23296e-005	3.50569e-005
5	3.17529e-005	2.3216e-005	3.66002e-005
6	3.28906e-005	2.26967e-005	3.57822e-005
7	3.19432e-005	2.31104e-005	3.64717e-005
8	3.25576e-005	2.28294e-005	3.6028e-005
9	3.20213e-005	2.30677e-005	3.64189e-005
10	3.2406e-005	2.28915e-005	3.61403e-005



Şekil 5.3 Eleman Sayısının Çift ve Tek Olmasına Göre U_n Değerlerinin Yakınsaması



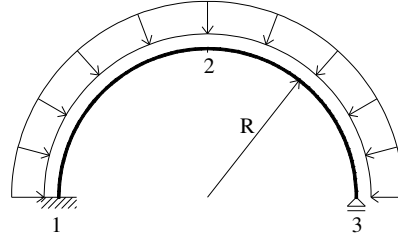
Şekil 5.4 Eleman Sayısının Çift ve Tek Olmasına Göre U_t Değerlerinin Yakınsaması



Şekil 5.5 Eleman Sayısının Çift ve Tek Olmasına Göre Ω_b Değerlerinin Yakınsaması

Örnek 3

Bu örnekte dikdörtgen bir kesite sahip, Şekil 5.6' de görülen yarım çember şeklinde, bir ucu ankastre diğer ucu kayıcı mesnetli kiriş, normali doğrultusunda düzgün yayılı olarak yüklenmiştir. $E=2.85 \times 10^8 \text{ kN} / \text{m}^2$, $R = 1 \text{ m}$, $\nu=0.2$ ve $k'=1.2$ olmak üzere kiriş yüksekliği $h= 50 \text{ cm}$, kiriş genişliği $b= 25 \text{ cm}$ dir. Kiriş normali doğrultusunda $q_n = 10 \text{ kN} / \text{m}$ olarak yüklenmiştir.



Şekil 5.6 Normali Doğrultusunda Yüklü Yarım Çember Şeklinde Kiriş

Kiriş 20 eşit sonlu eleman parçasına bölünerek 2 ve 3 düğüm noktalarının normali doğrultusundaki deplasmanları incelenmiş, sonuçlar Tablo 5.3’ de görüldüğü gibi SAP2000 programıyla karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.3 Ankastre-Kayıcı Mesnetli Yarım Çembere Ait U_n Değerleri (m)

	Bu çalışmada	SAP 2000	Fark
U_{n_2}	2.808E-6	2.854E-6	1.638%
U_{n_3}	5.615E-6	5.404E-6	3.758%

6. SONUÇLAR

Düzlem içi daire eksenli kirişlerin statik analizi için Gâteaux Türevi yöntemiyle fonksiyonel elde edilmiştir. Formülasyona kayma ve uzama etkileri dahil edilmiştir ve fonksiyonelde değişken eğilme rijitliği gözönüne alınmıştır. Fonksiyonel çeşitli çubuk geometrisine bağlı olarak geliştirilebilir.

Geliştirilen sonlu elemanda deplasmanlar ve dönmelerin yanında kuvvetler ve momentlerde temel bilinmeyen olarak alınmaktadır.

Geliştirilen sonlu eleman çeşitli örnekler üzerinde denenmiştir. Sonuçlar literatürdeki problemler ve bu problemlerin kesin çözümünün yanında SAP2000 paket programıyla da karşılaştırılmıştır. Sonuçların yaklaşımının düzgün olduğu ve mühendislik problemlerinde gerekli olan hassasiyeti sağladığı görülmüştür. Bu çalışmada ele alınan problemlerin çözümü için C++ programlama dilinde bir program yazılmıştır ve programlama diline ait kütüphanelerde mevcut olmayan denklem çözümünü yapan fonksiyon geliştirilmiştir. Hazırlanan programda herhangi bir düğüm noktası sınırı bulunmamaktadır.

Çalışmada sınır koşullarının etkisi dikkate alınmıştır. Her türlü dış yük ve sınır koşulları altında düzlem içi daire eksenli ve enkesiti de değişken olabilen kirişlere ait sonuçları elde etmek mümkündür.

KAYNAKLAR

- [1]. **Love, A.E.H.**, 1944. A Treatise On the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publication, New York.
- [2]. **Antman, S.S.**, 1972. The theory of rods, *Handbuch der physik* Vol. VI a/2, pp. 641-703, C.Truesdell, ed.Springer Verlag.
- [3]. **İnan, M.**, 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İ.T.Ü yayını, İstanbul.
- [4]. **Tekinalp, B.**, 1951. Generalization of the conjugate beam method to space rods, *İ.T.Ü Bülteni*, Cilt 4, s.29-36.
- [5]. **Cinemre, V.**, 1982. Çubuk teorisinde yer ve şekil değiştirme ilişkileri, *İ.T.Ü. Dergisi*, Cilt 40, No:3-6.
- [6]. **Just, D.J.**, 1982. Circularly curved beams under plane loads, *Proc.ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol.108, ST8, pp.1858-1873.
- [7]. **Saje, M.**, 1993. Finite element formulation of planar deformations of curved elastic beams, *Computers & Structures*, V.39, No.3/4, pp.3239-3258.
- [8]. **Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K.**, 1970. The Finite Element Method in Structural and Continium Mechanics , Mc. Graw-Hill.
- [9]. **Bathe, K.J.** 1982. The Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [10]. **Prathap, G. and Babu C.R.** 1986. Field-consistent strain interpolations for the quadratic shear flexible beam element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, pp. 1973-1984.
- [11]. **Prathap, G. and Babu C.R.** 1980. An isoparametric quadratic thick curved beam element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, 273-289.
- [12]. **Oden, J.T. and Reddy, J.N.** 1976. Variational Methods in Theoretical Mechanics, Springer Verlag.
- [13]. **Aköz, A.Y.** 1985. Çubuklar için yeni enerji fonksiyonelleri ve uygulamaları, *IV.Ulusal Mekanik Kongresi*, Bayramoğlu.

- [14]. **Aköz, A.Y.** 1987. Çubuk genel denklemlerine ait fonksiyoneller ve uygulamaları, *V.Ulusal Mekanik Kongresi*, Kirazlıyayla.
- [15]. **Aköz, A.Y., Omurtag, M.H., Doğruoğlu, A.N.,** 1991. The mixed finite element formulation for three dimensional bars, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 28, No.2, 225-234.
- [16]. **Kadioğlu, F.,** 1994. Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubuklar. *Yüksek lisans tezi*, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [17]. **Aköz, A.Y., ve Kadioglu, F.** 1996. The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation. *Computers&Structures*, **60**(4) 643-651.
- [18]. **Aköz, A.Y., ve Eratlı, N.** 2002. Free vibration analysis of reissner plates by mixed finite element. *Structural Engineering And Mechanics*, **13**(3) 277-298
- [19]. **Kadioğlu, F. ve Aköz, A.Y.,** 2003. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *An Int.Journal, Structural Engineering and Mechanics*, **15**(6) 735-752 .
- [20]. **Aköz, A.Y. ve Özütok A.,** 2000. A functional for shells of arbitrary geometry and the mixed finite element method for parabolic and circular shells, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **47** 1933-1981.
- [21]. **Sokolnikoff, İ.S., Redeffier, R.M.,** 1958. Mathematics of Physics and Modern Engineering, McGraw-Hill, Tokyo.

EKLER

EK 1: Uzaysal Çubuklar İçin Alan Denklemlerinin Elde Edilmesi

Denge denklemleri, kinematik denklemler, vektörel olarak;

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{ds} - \vec{\omega} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d\vec{U}}{ds} + \vec{t} \times \vec{\Omega} - \vec{\gamma} = 0, \quad (2.14)$$

ve Frenet formülleri ;

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$

şeklinde tekrar verilmiştir. Denge ve kinematik denklemdeki vektör terimleri

$\vec{n}$, $\vec{b}$ ve $\vec{t}$ eksen takımları üzerinde açık olarak;

$$\vec{T} = T_n \vec{n} + T_b \vec{b} + T_t \vec{t} \quad (1)$$

$$\vec{M} = M_n \vec{n} + M_b \vec{b} + M_t \vec{t} \quad (2)$$

$$\vec{\Omega} = \Omega_n \vec{n} + \Omega_b \vec{b} + \Omega_t \vec{t} \quad (3)$$

$$\vec{U} = U_n \vec{n} + U_b \vec{b} + U_t \vec{t} \quad (4)$$

$$\vec{p} = p_n \vec{n} + p_b \vec{b} + p_t \vec{t} \quad (5)$$

$$\vec{m} = m_n \vec{n} + m_b \vec{b} + m_t \vec{t} \quad (6)$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} + \gamma_t \vec{t} \quad (7)$$

$$\vec{\omega} = \omega_n \vec{n} + \omega_b \vec{b} + \omega_t \vec{t} \quad (8)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra Frenet formülleri (2.5) gözönüne alınarak (1) ve (5), (2.9)' da yerine yazılarak gerekli matematiksel işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{ds} (T_n \vec{n} + T_b \vec{b} + T_t \vec{t}) + (p_n \vec{n} + p_b \vec{b} + p_t \vec{t}) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{dT_n}{ds} \vec{n} + T_n \frac{d\vec{n}}{ds} \right) + \left(\frac{dT_b}{ds} \vec{b} + T_b \frac{d\vec{b}}{ds} \right) + \left(\frac{dT_t}{ds} \vec{t} + T_t \frac{d\vec{t}}{ds} \right) \\ + (p_n \vec{n} + p_b \vec{b} + p_t \vec{t}) &= 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{dT_n}{ds} \vec{n} + T_n (\tau \vec{b} - \kappa \vec{t}) + \frac{dT_b}{ds} \vec{b} + T_b (-\tau \vec{n}) + \frac{dT_t}{ds} \vec{t} + T_t (\kappa \vec{n}) \right] \\ + (p_n \vec{n} + p_b \vec{b} + p_t \vec{t}) &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{dT_n}{ds} - \tau T_b + T_t \kappa + p_n \right) \vec{n} + \left(\frac{dT_b}{ds} + T_n \tau + p_b \right) \vec{b} + \left(\frac{dT_t}{ds} - T_n \kappa + p_t \right) \vec{t} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dT_n}{ds} = -\kappa T_t + \tau T_b - p_n \quad (1) \\ \Rightarrow \frac{dT_b}{ds} = -\tau T_n - p_b \quad (2) \\ \Rightarrow \frac{dT_t}{ds} = \kappa T_n - p_t \quad (3) \end{aligned}$$

şeklinde denge denklemlerinden üç tanesi elde edilmiş olur. Aynı işlemler (1) , (2) ve (6) dikkate alınarak (2.9)' da yerine yazılırsa

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}(M_n \vec{n} + M_b \vec{b} + M_t \vec{t}) + \vec{t} \times (T_n \vec{n} + T_b \vec{b} + T_t \vec{t}) + m_n \vec{n} + m_b \vec{b} + m_t \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dM_n}{ds} \vec{n} + M_n \frac{d\vec{n}}{ds} \right) + \left(\frac{dM_b}{ds} \vec{b} + M_b \frac{d\vec{b}}{ds} \right) + \left(\frac{dM_t}{ds} \vec{t} + M_t \frac{d\vec{t}}{ds} \right) + T_n \vec{b} - T_b \vec{n}$$

$$+ m_n \vec{n} + m_b \vec{b} + m_t \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM_n}{ds} \vec{n} + M_n (\tau \vec{b} - \kappa \vec{t}) + \frac{dM_b}{ds} \vec{b} + M_b (-\tau \vec{n}) + \frac{dM_t}{ds} \vec{t} + M_t (\kappa \vec{n}) + T_n \vec{b}$$

$$- T_b \vec{n} + m_n \vec{n} + m_b \vec{b} + m_t \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dM_n}{ds} - \tau M_b + \kappa M_t - T_b + m_n \right) \vec{n} + \left(\frac{dM_b}{ds} + \tau M_n + T_n + m_b \right) \vec{b}$$

$$+ \left(\frac{dM_t}{ds} - \kappa M_n + m_t \right) \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM_n}{ds} = +T_b - \kappa M_t + \tau M_b - m_n \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{dM_b}{ds} = -T_n - \tau M_n - m_b \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{dM_t}{ds} = +\kappa M_n - m_t \quad (6)$$

geri kalan üç denge denklemi de elde edilmiş olur. Kinematik denklemler için aynı işlemler tekrarlanır. Frenet formülleri (2.5) ve bünye bağıntıları (2.19) dikkate alınarak (3) ve (8), (2.13)' de yerine yerleştirilir ve gerekli işlemler yapılsa;

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (\Omega_n \vec{n} + \Omega_b \vec{b} + \Omega_t \vec{t}) - (\omega_n \vec{n} + \omega_b \vec{b} + \omega_t \vec{t}) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\Omega_n}{ds} \vec{n} + \Omega_n \frac{d\vec{n}}{ds} \right) + \left(\frac{d\Omega_b}{ds} \vec{b} + \Omega_b \frac{d\vec{b}}{ds} \right) + \left(\frac{d\Omega_t}{ds} \vec{t} + \Omega_t \frac{d\vec{t}}{ds} \right)$$

$$-(\omega_n \vec{n} + \omega_b \vec{b} + \omega_t \vec{t}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega_n}{ds} \vec{n} + \Omega_n (\tau \vec{b} - \kappa \vec{t}) + \frac{d\Omega_b}{ds} \vec{b} + \Omega_b (-\tau \vec{n}) + \frac{d\Omega_t}{ds} \vec{t} + \Omega_t (\kappa \vec{n})$$

$$-(\omega_n \vec{n} + \omega_b \vec{b} + \omega_t \vec{t}) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\Omega_n}{ds} - \tau \Omega_b + \kappa \Omega_t - \omega_n \right) \vec{n} + \left(\frac{d\Omega_b}{ds} + \tau \Omega_n - \omega_b \right) \vec{b} + \left(\frac{d\Omega_t}{ds} - \kappa \Omega_n - \omega_t \right) \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega_n}{ds} = -\kappa \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{M_n}{D_n} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega_b}{ds} = -\tau \Omega_n + \frac{M_b}{D_b} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega_t}{ds} = \kappa \Omega_n + \frac{M_t}{D_t} \quad (9)$$

denklemleri elde edilir. İşlemler (2.14) için benzer şekilde tekrarlanırsa;

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} (U_n \vec{n} + U_b \vec{b} + U_t \vec{t}) + \vec{t} \times (\Omega_n \vec{n} + \Omega_b \vec{b} + \Omega_t \vec{t}) - (\gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} + \gamma_t \vec{t}) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dU_n}{ds} \vec{n} + U_n \frac{d\vec{n}}{ds} \right) + \left(\frac{dU_b}{ds} \vec{b} + U_b \frac{d\vec{b}}{ds} \right) + \left(\frac{dU_t}{ds} \vec{t} + U_t \frac{d\vec{t}}{ds} \right)$$

$$+ \vec{t} \times (\Omega_n \vec{n} + \Omega_b \vec{b} + \Omega_t \vec{t}) - (\gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} + \gamma_t \vec{t}) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dU_n}{ds} \vec{n} + U_n (\tau \vec{b} - \kappa \vec{t}) + \frac{dU_b}{ds} \vec{b} + U_b (-\tau \vec{n}) + \frac{dU_t}{ds} \vec{t} + U_t (\kappa \vec{n}) \right] + (\Omega_n \vec{b} - \Omega_b \vec{n})$$

$$-(\gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} + \gamma_t \vec{t}) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dU_n}{ds} - \tau U_b + \kappa U_t - \Omega_b - \gamma_n \right) \vec{n} + \left(\frac{dU_b}{ds} + \tau U_n + \Omega_n - \gamma_b \right) \vec{b} + \left(\frac{dU_t}{ds} - \kappa U_n - \gamma_t \right) \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dU_n}{ds} = -\kappa U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{T_n}{C_n} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{dU_b}{ds} = -\tau U_n - \Omega_n + \frac{T_b}{C_b} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \frac{dU_t}{ds} = \kappa U_n + \frac{T_t}{C_t} \quad (12)$$

toplaml olarak uzaysal çubuklar için oniki adet alan denkleml elde edilmiş olur.

EK 2: Q Operatörünün Potansiyel Olduğunun Gösterimi

İç çarpım aşağıdaki denklemler arasında gerçekleştirilir;

$$-\frac{dT_t}{d\theta} + T_n - R p_t = 0 \Leftrightarrow U_t$$

$$-\frac{dT_n}{d\theta} - T_t - R p_n = 0 \Leftrightarrow U_n$$

$$-\frac{dM_b}{d\theta} - R T_n - R m_b = 0 \Leftrightarrow \Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\theta} - R \frac{M_b}{D_b} = 0 \Leftrightarrow M_b$$

$$\frac{dU_t}{d\theta} - U_n - R \frac{T_t}{C_t} = 0 \Leftrightarrow T_t$$

$$\frac{dU_n}{d\theta} + U_t - R \Omega_b - R \frac{T_n}{C_n} = 0 \Leftrightarrow T_n$$

(3.3) denklemini sol tarafı ;

$$\begin{aligned} \langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle = & -\left[\bar{T}_n', U_n^*\right] - \left[\bar{T}_t, U_n^*\right] - R\left[p_n, U_n^*\right] - \left[\bar{T}_t', U_t^*\right] + \left[\bar{T}_n, U_t^*\right] - R\left[p_t, U_t^*\right] \\ & - \left[M_b', \Omega_b^*\right] - R\left[\bar{T}_n, \Omega_b^*\right] - R\left[m_b, \Omega_b^*\right] + \left[\bar{\Omega}_b', M_b^*\right] - \frac{R}{D_b}\left[\bar{M}_b, M_b^*\right] + \left[\bar{U}_t', T_t^*\right] - \left[\bar{U}_n, T_t^*\right] \\ & - \frac{R}{C_t}\left[\bar{T}_t, T_t^*\right] - \left[\bar{U}_n', T_n^*\right] + \left[\bar{U}_t, T_n^*\right] - R\left[\bar{\Omega}_b, T_n^*\right] - \frac{R}{C_n}\left[\bar{T}_n, T_n^*\right] \end{aligned}$$

şeklinde, sağ tarafı ise;

$$\begin{aligned} \langle dQ(y, y^*), \bar{y} \rangle = & -\left[T_n^*, \bar{U}_n\right] - \left[T_t^*, \bar{U}_n\right] - R\left[p_n, \bar{U}_n\right] - \left[T_t^*, \bar{U}_t\right] + \left[T_n^*, \bar{U}_t\right] - R\left[p_t, \bar{U}_t\right] \\ & - \left[M_b^*, \bar{\Omega}_b\right] - R\left[T_n^*, \bar{\Omega}_b\right] - R\left[m_b, \bar{\Omega}_b\right] + \left[\Omega_b^*, \bar{M}_b\right] - \frac{R}{D_b}\left[M_b^*, \bar{M}_b\right] + \left[U_t^*, \bar{T}_t\right] - \left[U_n^*, \bar{T}_t\right] \\ & - \frac{R}{C_t}\left[T_t^*, \bar{T}_t\right] + \left[U_n^*, \bar{T}_n\right] + \left[U_t^*, \bar{T}_n\right] - R\left[\Omega_b^*, \bar{T}_n\right] - \frac{R}{C_n}\left[T_n^*, \bar{T}_n\right] \end{aligned}$$

şeklinde açık olarak ifade edilir. (3.3) denkleminin sol tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle = & -[\bar{T}_n, U_n^*]_0 + [\bar{T}_n, U_n'^*] - R[p_n, U_n^*] - [\bar{T}_t, U_t^*]_0 + [\bar{T}_t, U_t'^*] - R[p_t, U_t^*] \\ & - [\bar{M}_b, \Omega_b^*]_0 + [\bar{M}_b, \Omega_b'^*] - R[m_b, \Omega_b^*] + [\bar{\Omega}_b, M_b^*]_0 - [\bar{\Omega}_b, M_b'^*] + [\bar{U}_t, T_t^*]_0 - [\bar{U}_t, T_t'^*] \\ & + [\bar{U}_n, T_n^*]_0 - [\bar{U}_n, T_n'^*] \end{aligned}$$

0 alt indisli terimler sınır koşullarını ifade etmektedir ve açık şekli aşağıda verilmiştir.

$$[\]_0 = [\]_\sigma + [\]_\varepsilon$$

σ ve ε alt indisleri sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarını ifade etmektedir. Bu duruma göre;

$$\begin{aligned} \langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle - \langle dQ(y, y^*), \bar{y} \rangle = & -[\bar{T}_n, U_n^*]_\sigma - [\bar{T}_n, U_n^*]_\varepsilon - [\bar{M}_b, \Omega_b^*]_\sigma - [\bar{M}_b, \Omega_b^*]_\varepsilon \\ & + [\bar{\Omega}_b, M_b^*]_\sigma + [\bar{\Omega}_b, M_b^*]_\varepsilon + [\bar{U}_t, T_t^*]_\sigma + [\bar{U}_t, T_t^*]_\varepsilon + [\bar{U}_n, T_n^*]_\sigma + [\bar{U}_n, T_n^*]_\varepsilon - [\bar{T}_t, U_t^*]_\sigma \\ & - [\bar{T}_t, U_t^*]_\varepsilon \end{aligned}$$

kalan terimler sınır koşulları oluştururlar. Sınır koşullarının etkileride dikkate alındığında hiçbir terim kalmaz ve dolayısıyla potansiyellik sağlanmış olur.

EK 3: Fonksiyonelin Elde Edilmesi

(3.5)' de verilen ifadeye göre integral;

$$\begin{aligned} I(y) = & \int_0^1 (-sT_t U_n - sT'_n U_n - sT'_t U_t + sT_n U_t - sM'_b \Omega_b - sRT_n \Omega_b + s\Omega'_b M_b - \frac{sR}{D_b} M_b M_b \\ & - sU_n T_t + sU'_t T_t - \frac{sR}{C_t} T_t T_t + sU'_n T_n + sU_t T_n - sR\Omega_b T_n - \frac{sR}{C_n} T_n T_n + sT_n U_{n\sigma} + sT_t U_{t\sigma} + sM_b \Omega_{b\sigma} \\ & - s\Omega_b M_{b_e} - sU_t T_{t_e} - sU_n T_{n_e} - Rp_n U_n - Rp_t U_t - RM_b \Omega_b - \hat{T}_n U_{n\sigma} - \hat{T}_t U_{t\sigma} - \hat{M}_b \Omega_{b\sigma} + \hat{\Omega}_b M_{b_e} \\ & + \hat{U}_t T_{t_e} + \hat{U}_n T_{n_e}) ds \end{aligned}$$

şeklinde açık olarak yazılır ve integral alınırsa;

$$\begin{aligned} I(y) = & -R[T_n, \Omega_b] - \frac{R}{2D_b} [M_b, M_b] - \frac{R}{2C_t} [T_t, T_t] - \frac{R}{2C_n} [T_n, T_n] - R[p_n, U_n] - R[p_t, U_t] \\ & - R[M_b, \Omega_b] - [T_t, U_n] - \frac{1}{2} [T'_n, U_n] - \frac{1}{2} [T'_t, U_t] + [T_n, U_t] - \frac{1}{2} [M'_b, \Omega_b] + \frac{1}{2} [M_b, \Omega'_b] + \frac{1}{2} [U'_t, T_t] \\ & + \frac{1}{2} [U'_n, T_n] + \frac{1}{2} [T_n, U_n]_{\sigma} + \frac{1}{2} [T_t, U_t]_{\sigma} + \frac{1}{2} [M_b, \Omega_b]_{\sigma} - \frac{1}{2} [M_b, \Omega_b]_{\varepsilon} - \frac{1}{2} [U_t, T_t]_{\varepsilon} - \frac{1}{2} [U_n, T_n]_{\varepsilon} \\ & - [\hat{T}_n, U_n]_{\sigma} - [\hat{T}_t, U_t]_{\sigma} - [\hat{M}_b, \Omega_b]_{\sigma} + [\hat{\Omega}_b, M_b]_{\varepsilon} + [\hat{U}_t, T_t]_{\varepsilon} + [\hat{U}_n, T_n]_{\varepsilon} \end{aligned}$$

integral bu formu alır. Gerekli işlemler yapıp ifade düzenlenirse fonksiyonel;

$$\begin{aligned} I(y) = & -R[T_n, \Omega_b] - [T_t, U_n] + [T_n, U_t] - [T'_n, U_n] - [T'_t, U_t] - [M'_b, \Omega_b] \\ & - \frac{R}{2D_b} [M_b, M_b] - \frac{R}{2C_t} [T_t, T_t] - \frac{R}{2C_n} [T_n, T_n] \\ & - R[p_n, U_n] - R[p_t, U_t] - R[m_b, \Omega_b] \\ & + [\hat{\Omega}_b, M_b]_{\varepsilon} + [\hat{U}_n, T_n]_{\varepsilon} + [\hat{U}_t, T_t]_{\varepsilon} \\ & + [(T_n - \hat{T}_n), U_n]_{\sigma} + [(T_t - \hat{T}_t), U_t]_{\sigma} + [(M_b - \hat{M}_b), \Omega_b]_{\sigma} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Bandırma’ da doğdu. İlköğretimini Bandırma Kültür ve Eğitim Vakfı Özel Lisesi İlk Kısım’ da tamamladı. 2002 yılında Bandırma Anadolu Lisesi’ nden mezun olarak aynı yıl Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümüne başladı. 2006 yılında lisans eğitimi tamamlayarak aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği programında yüksek lisans eğitimine başlamıştır.