İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP YÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Emel COŞKUN

Anabilim Dalı : **Matematik Mühendisliği**

Programı : **Matematik Mühendisliği**

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Uğur Dursun**

AĞUSTOS 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP YÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emel COŞKUN
(509061008)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	**06 Ağustos 2009**
Tezin Savunulduğu Tarih	:	**31 Ağustos 2009**

Tez Danışmanı	:	**Doç. Dr. Uğur DURSUN (İTÜ)**
Diğer Jüri Üyeleri	:	**Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN (BEYKENT)**
		Doç. Dr. Fatma ÖZDEMİR (İTÜ)

AĞUSTOS 2009

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Uğur Dursun'a, tezin yazımında teknik olarak yardımcı olan arkadaşlarım Araş. Gör. Sibel Kılıçarslan Cansu'ya ve Araş. Gör. Kaan Esin'e, her zaman desteğiyle yanımda olan ve beni cesaretlendiren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yüksek lisans eğitimim boyunca beni finansal olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna teşekkür ederim.

Ağustos 2009 Emel Coşkun

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\widetilde{\nabla}$: Minkowski Uzayının Konneksiyonu
G : Gauss Tasviri
A_G : Weingarten Tasviri
Δ : Laplace Operatörü
Γ : Christoffell Sembolü
H : Ortalama Eğrilik Vektörü
K : Gauss Eğriliği
δ_{ij} : Kronecker Deltası

3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP YÜZEYLERİ

ÖZET

Sonlu tipten alt manifoldlar fikri, 1970 yıllarının sonlarına doğru B.Y. Chen tarafından ortaya atılmış ve Öklidiyen ve yarı Öklidiyen uzaylarının alt manifoldlarının incelenmesinde çok geniş olarak kullanılan bir kavram olmuştur. Ayrıca, bu kavram gerek Öklidiyen gerekse yarı Öklidiyen uzayların alt manifoldları üzerinde tanımlı türevlenebilir tasvirlere genişletilmiştir. Bu tasvirler arasında alt manifoldların Gauss tasvirleri oldukça önemli yer tutmaktadır. Sonlu tipten Gauss tasvirleri alt manifoldların incelenmesinde oldukça geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

Bir alt manifodun Gauss tasviri, türevlenebilir bir F fonksiyonu ve çevreleyen uzaya ait sabit bir C vektörü için $\Delta G = F(G + C)$ diferansiyel denklemini sağlarsa, alt manifolda noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine, eğer C vektörü sıfır ise birinci çeşit aksi durumda ise ikinci çeşittir denir. Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeyleri ve dönel yüzeyleri incelenmektedir.

$\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeylerinin sınıflandırılması için şu sonuçlar ispatlanmıştır: $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında bir M uzaysal doğrusal yüzeyin Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir Öklid düzleminin, hiperbolik silindirin, 1. tip uzaysal helikoidin, 2. tip uzaysal helikoidin veya 2. tip uzaysal Enneper yüzeyin eşleniğinin açık bir parçası olmasıdır. $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında bir M zamansal doğrusal yüzeyin Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir Minkowski düzleminin, Lorentz çembersel silindirin, indeksi 1 olan çembersel silindirin, 1. tip zamansal helikoidin, 2. tip zamansal helikoidin, 3. tip zamansal helikoidin, 2. tip zamansal Enneper yüzeylerin eşleniğinin, eğer B' null ise bir düz B-scroll'un veya eğer B' null değilse bir düz olmayan B-scroll'un açık bir parçası olmasıdır.

$\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerinin karekterizasyon ve sınıflandırılması için şu sonuçlar ispatlanmıştır: $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında bir M dönel yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden

Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olmasıdır. Ayrıca, I. tip rasyonel bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin bir düzlemin ya da bir hiperbolik silindirin açık bir parçası olması gerektiği; II. tip rasyonel bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin bir düzlemin ya da bir çembersel silindirin açık bir parçası olması gerektiği; III. tip rasyonel bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin, katı bir harekete göre, ikinci tip bir Enneper yüzeyin, bir de Sitter uzayın ya da bir anti-de Sitter uzayın açık bir parçası olması gerektiği gösterilmiştir. Son olarak, $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında bir M rasyonel dönel yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun M yüzeyinin bir dik koni ya da bir hiperbolik koninin açık bir parçası olması gerektiği ispatlanmıştır.

SURFACES WITH POINTWISE 1-TYPE GAUSS MAP IN MINKOWSKI SPACE $\mathbb{E}^3_1$

SUMMARY

The notion of finite type submanifolds was introduced by B.Y. Chen during late 1970's, and it has become a useful tool for investigation of submanifolds of Euclidean and pseudo-Euclidean spaces. Also, this notion has been extended to differentiable maps defined on submanifolds of Euclidean and pseudo-Euclidean spaces. Among them Gauss maps of submanifolds are very useful. The finite type Gauss maps are a very extensively used to deal with submanifolds.

The Gauss map of a submanifold is said to have pointwise 1-type Gauss map if it satisfies the differential equation $\Delta G = F(G + C)$ for some differentiable map F and some constant vector C of ambiant space. The pointwise 1-type Gauss map is said to be of the first kind if the vector C is zero vector. Otherwise, the pointwise 1-type Gauss map is said to be of the second kind. In this thesis, the ruled surfaces and surfaces of revolution in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$ with pointwise 1-type Gauss map are studied.

The following results are proved for classification of ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map of the first kind in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$: The Gauss map of a space-like ruled surface M in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$ is of pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if the surface M is an open part of a Euclidean plane, the hyperbolic cylinder, space-like helicoid of the 1st kind, space-like helicoid of the 2nd kind or the conjugate of space-like Enneper's surface of the 2nd kind. The Gauss map of a time-like ruled surface M in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$ is of pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if the surface M is an open part of a Minkowski plane, the Lorentz circular cylinder, the circular cylinder of index 1, time-like helicoid of the 1st kind, time-like helicoid of the 2nd kind, time-like helicoid of the 3rd kind, the conjugate of time-like Enneper's surfaces of the 2nd kind, a flat B-scroll if B' is light-like or a non-flat B-scroll if B' is non-null.

For classification and characterization of surfaces of revolution with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$, the following results are proved: A surface of revolution M in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$ has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if M has constant mean curvature. Besides, it is proved that a rational surface of revolution of type I has pointwise 1-type Gauss

map of the first kind if and only if it is an open part of a plane or a hyperbolic cylinder; a rational surface of revolution of type II has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if it is an open part of a plane or a circular cylinder; a rational surface of revolution of type III has pointwise 1-type Gauss map of the first kind if and only if it is an open part of an Enneper's surface of the second kind, a de-Sitter space or an anti-de Sitter space up to a rigid motion. Finally, it is also proved that a surface of revolution M in Minkowski space $\mathbb{E}^3_1$ has pointwise 1-type Gauss map of the second kind if and only if the surface M is an open part of a right cone or a hyperbolic cone.

1. GİRİŞ

Sonlu tipten alt manifoldlar kavramı 1970'li yılların sonlarına doğru B.Y. Chen tarafından tanıtıldıktan sonra yoğun olarak geometri ile uğraşan pek çok kişi tarafından çalışılmış ve oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu kavram kullanılarak Öklid ve yarı Öklid uzayların alt manifoldlarının birçok karekterizasyonu verilmiş ve önemli sonuçlar bulunmuştur.

M, indeksi s olan $\mathbb{E}_s^m$ yarı Öklidiyen uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun $\mathbb{E}_s^m$ yarı Öklidiyen uzayındaki x yer vektörü, alt manifoldun Δ Laplace operatörüne göre, $\Delta x_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \ldots, k$ olmak üzere

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$$

şeklinde ayrıştırılabilirse M manifolduna sonlu tipten alt manifold denir, burada x_0 sabit bir tasvir, $x_1, \ldots, x_k$ sabit olmayan tasvirler ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sıfır olmayan sabitlerdir. Eğer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ özdeğerlerinin hepsi birbirinden farklı ise M alt manifolduna k-tipinden alt manifold denir. Eğer k sonsuz ise M alt manifolduna sonsuz tipten alt manifold denir. Bu konudaki ilk sonuçlar, B.Y. Chen'in [1] kitabında toparlanmıştır. Daha sonra, geniş kapsamlı bir derleme yine B.Y. Chen'in [2] raporunda yayınlanmıştır. Sonlu tipten kavramı kullanılarak alt manifoldları karekterize etmek veya sınıflandırmak için birçok çalışma yapılmıştır.

Sonlu tip kavramı daha sonra alt manifoldlar üzerinde tanımlı türevlenebilir tasvirlere genişletilmiştir. $\mathbb{E}_s^m$ uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu üzerinde düzgün bir ϕ tasviri, Δ Laplace operatörünün $\mathbb{E}_s^m$-değerli özfonksiyonlarının sonlu bir toplamı şeklinde yazılabilirse ϕ tasvirine sonlu tipten tasvir denir. Sonlu tipten Gauss tasvirine sahip Öklid veya yarı Öklid uzaylarının alt manifoldları birçok geometrici tarafından çalışılmıştır [3-7]. Chen ve Piccinni, sonlu tipten Gauss tasvirine sahip Öklid uzaylarının alt manifoldları üzerine genel bir çalışma yaparak sonlu tipten Gauss tasvirine sahip alt manifoldlar teorisinin temelini oluşturmuştur ve 1-tipinden Gauss tasvirine sahip kompakt yüzeyleri sınıflandırmıştır [8].

Bir Öklidiyen veya yarı Öklidiyen uzayının bir alt manifoldu 1-tipinden G Gauss tasvirine sahipse, G Gauss tasviri $\Delta G = \lambda(G + C)$ denklemini bazı $\lambda \in \mathbb{R}$ ve bazı sabit C vektörleri için sağlar [1, 7, 8]. Ancak birçok yüzeyin Gauss tasviri, F türevlenebilir bir fonksiyon ve C vektörü de sabit olmak üzere

$$\Delta G = F(G + C) \tag{\textbf{1.1}}$$

denklemini sağlar. Örneğin, $\mathbb{E}^3$ uzayında katenoid ve dik koniler [9], ayrıca $\mathbb{E}^3_1$ yarı Öklid uzayında 1., 2. ve 3. tip helikoidler, 2. tip Enneper yüzeylerin eşleniği ve B-scroll [10] yüzeyinin Gauss tasvirleri (**1.1**) denklemini sağlar. Bir Öklid veya yarı Öklid uzayının bir alt manifoldunun G Gauss tasviri, türevlenebilir bir F fonksiyonu ve bir sabit C vektörü için (**1.1**) denklemini sağlarsa, M manifolduna noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahiptir denir. Noktasal 1-tipinden Gauss tasviri C vektörünün sıfır veya sıfırdan farklı olmasına göre, sırasıyla, birinci veya ikinci çeşittendir denir.

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeylerin ve dönel yüzeylerin sınıflandırılması ele alınmış ve bu amaçla [10] ve [11] nolu makaleler detaylı olarak incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, daha sonra kullanılacak olan alt manifoldlar teorisine ait bazı temel tanım ve formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının doğrusal yüzeylerinin tanımı ve sınıflandırılması verilmiş, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeylerin örnekleri ve genel sınıflandırmasını veren temel teoremler geniş bir şekilde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayının noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyleri ele alınmıştır. Bu yüzeylerin tanımı ve sınıflandırılması verilmiş; noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerin örnekleri, genel karekterizasyonunu ve sınıflandırmasını veren temel teoremler geniş bir şekilde incelenmiştir.

2. ALT MANİFOLDLAR TEORİSİNE AİT BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Minkowski uzayının alt manifoldlarına ait bazı temel tanım ve formüller verilmektedir. Bunlar, diğer bölümlerde noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeylerin ve dönel yüzeylerin incelenmesinde kullanılacaktır.

$\mathbb{R}^n$, n-boyutlu reel vektör uzayı, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ve $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ bu uzaya ait iki vektör olsun. $\mathbb{R}^n$ uzayında

$$\langle X, Y \rangle = -X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_nY_n$$

ile tanımlanan $\langle\, , \rangle$ metriği göz önüne alınsın. $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ metrik uzayına Lorentz-Minkowski uzayı denir ve $\mathbb{E}_1^n$ ile gösterilir. Dejenere olmayan ve indeksi 1 olan $\langle\, , \rangle$ metriğine Lorentzian metrik veya Lorentz çarpımı denir.

$\mathbb{E}_1^n$ uzayına ait bir X vektörüne, $\langle X, X \rangle > 0$ veya $X = 0$ ise uzaysal, $\langle X, X \rangle < 0$ ise zamansal, $\langle X, X \rangle = 0,\ X \neq 0$ ise ışıksal veya null vektör denir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında zamansal veya ışıksal bir vektör causal vektör olarak adlandırılır. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında zamansal bir vektöre dik olan bir causal vektör yoktur.

Tanım 2.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında dejenere olmayan indirgenmiş metriğe sahip bir M yüzeyinin normal vektörü zamansal ise M yüzeyine uzaysal, normal vektörü uzaysal ise M yüzeyine zamansal yüzey denir.

Zamansal yüzey üzerindeki indirgenmiş metriğin indeksi 1 dir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında dejenere olmayan metriğe sahip bir yüzeye yarı Riemannian yüzey denir.

Tanım 2.2. I, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde açık bir aralık olmak üzere, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında düzgün bir $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ eğrisi göz önüne alınsın. Bu eğrinin teğet vektörü, sırasıyla, uzaysal, zamansal veya ışıksal(null) ise, α eğrisine uzaysal, zamansal veya ışıksal(null) eğri denir.

Yardımcı Teorem 2.1. İki ışıksal vektörün birbirine dik olması için gerek ve yeter koşul bu vektörlerin lineer bağımlı olmasıdır.

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayına ait iki vektör $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ olsun. X ve Y vektörlerinin Lorentz vektörel çarpımı

$$X \times Y = (-X_2Y_3 + X_3Y_2, X_3Y_1 - X_1Y_3, X_1Y_2 - X_2Y_1)$$

şeklinde tanımlanır. Lorentz vektörel çarpımı aşağıdaki özellikleri sağlar.

Yardımcı Teorem 2.2. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında X, Y, Z ve W vektör alanları için

$$X \times Y = 0 \Leftrightarrow X \text{ ve } Y \text{ lineer bağımlıdır},$$

$$X \times Y = -Y \times X,$$

$$\langle X \times Y, Z \rangle = \langle Y \times Z, X \rangle,$$

$$\langle X \times Y, X \rangle = \langle X \times Y, Y \rangle = 0,$$

$$\langle X \times Y, Z \times W \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle$$

özellikleri sağlanır.

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında

$$S_1^2(1) = \{p \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = 1\}$$

ve

$$H^2(-1) = \{p \in \mathbb{E}_1^3 \mid \langle p, p \rangle = -1\}$$

şeklinde tanımlanan kuadratik yüzeylere, sırasıyla, de Sitter uzayı ve hiperbolik uzay (anti-de Sitter uzayı) denir.

M, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayının bir yarı Riemannian yüzeyi olsun. M yüzeyinin her noktasını yine aynı noktadaki birim normal vektörüne götüren

$$G : M \to Q^2(\varepsilon) \subset \mathbb{E}_1^3$$

tasvirine, M yüzeyinin Gauss tasviri denir, burada $\varepsilon(= \pm 1)$, G vektör alanının işaretini göstermek üzere,

$$Q^{2}(\varepsilon)=\begin{cases} S_1^2(1) & \text{eğer } \varepsilon=1 \text{ ise,} \\ \\ H^2(-1) & \text{eğer } \varepsilon=-1 \text{ ise,} \end{cases}$$

dir. $\mathbb{E}_1^m$ Minkowski uzayında n-boyutlu bir yarı Riemannian M alt manifoldu göz önüne alınsın. M alt manifoldunun üzerindeki $(x^1,\ldots,x^n)$ yerel koordinatlarına göre, M alt manifoldunun Δ Laplace operatörü

$$\Delta=-\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}-\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{x^k}\right) \tag{\textbf{2.1}}$$

şeklinde verilir; burada g^{ij} fonksiyonları g_{ij} metriğinin tersinin bileşenlerini ve Γ_{ij}^k fonksiyonları da

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}\right)$$

şeklinde tanımlanan Christoffell fonksiyonlarını göstermektedir. Bununla beraber, (**2.1**) ifadesi

$$\Delta=-\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{G}|}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\sqrt{|\mathcal{G}|}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \tag{\textbf{2.2}}$$

şeklinde de yazılabilir, burada $\mathcal{G}=\det(g)=\det(g_{ij})$ dir.

G, M yüzeyinin birim normal vektör alanı ve X'de M yüzeyinin bir teğet vektör alanı olsun. M yüzeyinin $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayındaki Weingarten formülü

$$\widetilde{\nabla}_X G=-A_G(X)$$

şeklinde tanımlanır, burada A_G ifadesine M yüzeyinin Weingarten tasviri veya şekil operatörü denir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayının bir M yüzeyi üzerinde yerel olarak tanımlı $\{e_1,e_2\}$ ortonormal teğet baz alanı göz önüne alındığında, M yüzeyinin H ortalama eğriliği ve K Gauss eğriliği

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}A_G=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i\langle A_G(e_i),e_i\rangle$$

ve

$$K=\varepsilon\det A_G$$

şeklinde tanımlanır, burada $\varepsilon_i=\langle e_i,e_i\rangle=\pm1$ ve $\varepsilon=\langle G,G\rangle=\pm1$ dir.

3. $\mathbb{E}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP DOĞRUSAL YÜZEYLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayının doğrusal yüzeylerinin tanımı ve sınıflandırılması verilmiş, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeylerin örnekleri ve genel sınıflandırmasını veren temel teoremler detaylı olarak incelenmiştir. Noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip yüzeyler daha sonra iki çeşide ayrılmıştır ve bu bölümde verilenler, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeyleri içermektedir.

3.1. Doğrusal Yüzeylerin Sınıflandırılması

İlk olarak üç boyutlu, $\mathbb{E}_1^3$, Minkowski uzayında doğrusal yüzey tanımı verilsin. I, $\mathbb{R}$ reel doğrusu üzerinde açık bir aralık olsun ve $\alpha = \alpha(s)$, I üzerinde tanımlı $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir eğri ve $\beta = \beta(s)$, α boyunca tanımlı bir vektör alanı olsun. Reel sayılar kümesinin bir J açık aralığı için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayının bir M doğrusal yüzeyi $s \in I$ ve $t \in J$ olmak üzere

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

olarak parametrelendirilir. Burada $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine yüzeyin taban eğrisi ve $\beta = \beta(s)$ vektör alanına da yüzeyin doğrultman vektörü veya doğrultman eğrisi denir. Doğrultman vektörünün sabit olması veya sabit olmaması durumuna göre doğrusal yüzeye, sırasıyla, silindirik yüzey veya silindirik olmayan yüzey denir.

Öncelikle taban eğrisinin uzaysal veya zamansal olması durumu göz önüne alınsın. Taban eğrisinin ve doğrultman vektörünün karakterine göre beş çeşit doğrusal yüzey vardır. Taban eğrisinin, $\alpha(s)$, uzaysal veya zamansal olması durumuna göre M yüzeyine, sırasıyla, M_+ veya M_- tipinden doğrusal yüzey denir. M_+ tipinden doğrusal yüzey üç tipe ayrılır. Doğrultman vektörü, β, uzaysal olduğu zaman eğer β' vektörü ışıksal değilse yüzeye M_+^1 tipinden veya β' vektörü ışıksal ise M_+^2 tipinden doğrusal yüzey denir. Eğer, β vektörü zamansal ise β' vektörü uzaysaldır. Bu durumda, M_+ doğrusal yüzeye M_+^3 tipinden doğrusal yüzey denir.

Diğer taraftan, M_- doğrusal yüzeyi için β' vektörünün ışıksal olmaması veya ışıksal olması durumuna göre sırasıyla, M_-^1 tipinden veya M_-^2 tipinden doğrusal yüzey denir.

M_+^1 ve M_+^2 tipinden doğrusal yüzeyleri uzaysal yüzeylerdir ve M_+^3, M_-^1 ve M_-^2 tipinden yüzeyleri de zamansal yüzeylerdir.

Bir M doğrusal yüzeyinin taban eğrisinin ve doğrultman vektörünün ışıksal(null) olması durumunda M yüzeyine bir null scroll denir. Cartan bazına sahip bir null scroll yüzeye B-scroll denir ve bu yüzey de zamansaldır.

3.2. Doğrusal Yüzey Örnekleri

Bu kısımda, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzey örnekleri incelenecektir. Bu örnekler daha sonra verilecek sınıflandırma teoreminde kullanılacaktır.

Örnek 3.2.1. (1. Tip Uzaysal Helikoid) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $|a| > |b| > 0$ koşulunu sağlayan a ve b sabitleri için

$$x(s,t) = (-bs, (t+a)\cos s, (t+a)\sin s)$$

ile tanımlanan bir M doğrusal yüzeyi göz önüne alınsın, burada

$$t < \min(-a-b, -a+b) \text{ ya da } t > \max(-a-b, -a+b)$$

dır. Bu parametrelendirme $\mathbb{E}_1^3$ uzayında M_+^1 tipinden silindirik olmayan bir doğrusal yüzey tanımlar. Bu yüzey 1. tip uzaysal helikoid olarak adlandırılır. Burada, $|a| > |b|$ koşulunun niçin gerekli olduğu açıklansın. M_+^1 yüzeyi doğrusal olduğundan $x(s,t)$ ifadesi $x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$ şeklinde yazılırsa

$$\alpha(s) = (-bs, a\cos s, a\sin s), \quad \beta(s) = (0, \cos s, \sin s)$$

olur. M^1_+ tipinden yüzey için α eğrisi uzaysal olduğundan

$$\alpha'(s) = (-b, -a\sin s, a\cos s)$$

teğet vektörü uzaysal olmalıdır. Dolayısıyla $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -b^2 + a^2 > 0$ koşulundan $a^2 > b^2$, buradan da $|a| > |b|$ olması gerektiği görülür.

M^1_+ yüzeyinin koordinat vektörleri

$$x_s = (-b, -(t+a)\sin s, (t+a)\cos s), \qquad x_t = (0, \cos s, \sin s)$$

şeklindedir. Verilen aralık üzerinde

$$\langle x_s, x_s \rangle = -b^2 + (t+a)^2 > 0 \text{ ve } \langle x_t, x_t \rangle = 1 > 0$$

olduğundan yüzey uzaysaldır. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (t+a, b\sin s, -b\cos s)$$

elde edilir. Yüzey uzaysal olduğundan yüzeyin normal vektörü zamansaldır, yani

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = -(t+a)^2 + b^2 < 0$$

olur. Böylece, $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{(t+a)^2 - b^2}$ dır. Dolayısıyla, M^1_+ yüzeyinin Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}}(t+a, b\sin s, -b\cos s)$$

şeklinde bulunur. M^1_+ yüzeyin metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = (t+a)^2 - b^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$ olarak bulunur. Buna göre, $\mathcal{G} = \det g = (t+a)^2 - b^2$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = \dfrac{1}{(t+a)^2 - b^2}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$ olur. M yüzeyinin Laplace operatörü (**2.2**) formülünden yararlanılarak hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{(t+a)^2 - b^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + (t+a)\frac{\partial}{\partial t} + \big((t+a)^2 - b^2\big)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big) \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi Δ Laplace operatörü Gauss tasvirine uygulansın. Gauss tasvirinin G_s, G_{ss}, G_t, G_{tt} türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}}(0, b\cos s, b\sin s),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \frac{1}{\sqrt{(t+a)^2 - b^2}}(0, -b\sin s, b\cos s),$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \big((t+a)^2 - b^2\big)^{-3/2}\big(- b^2, -(t+a)b\sin s, (t+a)b\cos s\big),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} =&\big((t+a)^2 - b^2\big)^{-5/2}\big(3b^2(t+a), 2b(t+a)^2\sin s + b^3\sin s,\\ &- 2b(t+a)^2\cos s - b^3\cos s\big)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu türevler (**3.2.1**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\Delta G =&\frac{1}{((t+a)^2-b^2)^{5/2}}\Big(\big((t+a)^2 - b^2\big)\big(0, b\sin s, -b\cos s)\big)\\ &+ \big(t+a\big)\big(b^2, (t+a)b\sin s, -(t+a)b\cos s\big)\\ &+ \big(- 3b^2(t+a), -2b(t+a)^2\sin s - b^3\sin s, 2b(t+a)^2\cos s + b^3\cos s\big)\Big)\\ =&\frac{-2b^2}{((t+a)^2-b^2)^{5/2}}\big(t+a, b\sin s, -b\cos s\big)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\Delta G = \frac{-2b^2}{((t+a)^2-b^2)^2}G$$

elde edilir. Bu da G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.2. (2. Tip Uzaysal Helikoid) $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında $|b| > |a| > 0$ koşulunu sağlayan a ve b sabitleri için

$$x(s,t) = ((t+a)\sinh s, (t+a)\cosh s, -bs)$$

ile tanımlanan bir M yüzeyi göz önüne alınsın, burada

$$\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$$

dır. Bu parametrelendirme $\mathbb{E}^3_1$ uzayında M^1_+ tipinden silindirik olmayan bir doğrusal yüzey tanımlar. Bu yüzey 2. tip uzaysal helikoid olarak adlandırılır. M^1_+ yüzeyinin koordinat vektörleri

$$x_s = ((t+a)\cosh s, (t+a)\sinh s, -b), \quad x_t = (\sinh s, \cosh s, 0)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin uzaysal olduğu kolayca görülebilir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (-b\cosh s, -b\sinh s, (t+a))$$

elde edilir. Yüzeyin normal vektörü zamansal olduğundan

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = -b^2 + (t+a)^2 < 0$$

dır ve buradan da

$$\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$$

olduğu görülür. Böylece, $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{b^2 - (t+a)^2}$ olur. Önceki örnekte yapılanlara benzer işlemlerle bu yüzey için

$$\Delta G = \frac{-2b^2}{(b^2 - (t+a)^2)^2} G$$

elde edilir. Bu da, G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.3. (2. Tip Uzaysal Enneper Yüzeyin Eşleniği) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında

$$x(s,t) = (\frac{1}{6}s^3 + ts, -\frac{1}{6}s^3 - ts + s, \frac{1}{2}s^2 + t)$$

ile tanımlanan M_+^2 tipinden silindirik olmayan bir yüzey ele alınsın. Bu yüzey 2. tip uzaysal Enneper yüzeyin eşleniği olarak adlandırılır.

M_+^2 yüzeyinin

$$x_s = (\frac{1}{2}s^2 + t, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s), \quad x_t = (s, -s, 1)$$

koordinat vektörleri uzaysaldır. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (-\frac{1}{2}s^2 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, -s)$$

elde edilir. Yüzeyin normal vektörü zamansal olduğundan

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = 2t - 1 < 0$$

dır; yani $t < \frac{1}{2}$ ve $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{-2t+1}$ olur. Dolayısıyla, M_+^2 yüzeyinin Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{\sqrt{-2t+1}}(-\frac{1}{2}s^2 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, -s)$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = -2t+1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$ olarak bulunur. Buna göre, $\mathcal{G} = \det g = -2t+1$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri de $g^{11} = \frac{1}{-2t+1}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$ olur. M

yüzeyinin Δ Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{-2t+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial t} + (-2t+1)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \qquad (\mathbf{3.2.2})$$

elde edilir.

Gauss tasvirinin $G_s,\ G_{ss},\ G_t,\ G_{tt}$ türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{-2t+1}}(-s, s, -1),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \frac{1}{\sqrt{-2t+1}}(-1, 1, 0),$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -(-2t+1)^{-3/2}\big(t + \frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s\big)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -(-2t+1)^{-5/2}\big(\frac{3}{2}s^2 + t + 1, -\frac{3}{2}s^2 - t + 2, 3s\big)$$

elde edilir. Bu türevler (**3.2.2**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\Delta G =& \frac{1}{(-2t+1)^{5/2}}\Big((2t-1)(-1,1,0) - (t + \frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}s^2 - t + 1, s)\\ &+ (\frac{3}{2}s^2 + t + 1, -\frac{3}{2}s^2 - t + 2, 3s)\Big)\\ =& -\frac{2}{(-2t+1)^{5/2}}(-\frac{1}{2}s^2 + t - 1, \frac{1}{2}s^2 - t, -s)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\Delta G = \frac{-2}{(-2t+1)^2}G, \quad t < \frac{1}{2}$$

elde edilir ki bu da, G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.4. (1. Tip Zamansal Helikoid) $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında $|a| < |b|$ koşulunu sağlayan a ve b sabitleri için

$$x(s,t) = (-bs, (t+a)\cos s, (t+a)\sin s)$$

ile tanımlanan bir M yüzeyi göz önüne alınsın, burada

$$\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$$

dır. Bu parametrelendirme $\mathbb{E}^3_1$ uzayında M^1_- tipinden silindirik olmayan bir yüzey tanımlar. Bu yüzey 1. tip zamansal helikoid olarak adlandırılır.

M_-^1 yüzeyinin koordinat vektörleri

$$x_s = (-b, -(t+a)\sin s, (t+a)\cos s), \qquad x_t = (0, \cos s, \sin s)$$

şeklindedir. Verilen aralık üzerinde x_s vektörü zamansaldır. Ayrıca x_t vektörünün uzaysal olduğu açık olarak görülür. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (t+a, b\sin s, -b\cos s)$$

bulunur. Yüzeyin normali uzaysal olduğundan

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = b^2 - (t+a)^2 > 0$$

dır. Buradan da $\min(-a-b, -a+b) < t < \max(-a-b, -a+b)$ olmalıdır. Dolayısıyla, $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{b^2 - (t+a)^2}$ olduğundan M_-^1 yüzeyinin Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}}(t+a, b\sin s, -b\cos s)$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = (t+a)^2 - b^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$ olarak bulunur. Buna göre, $\mathcal{G} = \det g = (t+a)^2 - b^2$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri de $g^{11} = \dfrac{1}{(t+a)^2 - b^2}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$ olur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{b^2 - (t+a)^2}\Big(\frac{\partial^2}{\partial s^2} - (t+a)\frac{\partial}{\partial t} + \big(b^2 - (t+a)^2\big)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big) \tag{3.2.3}$$

elde edilir.

Gauss tasvirinin G_s, G_{ss}, G_t, G_{tt} türevleri hesaplandığında

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}}(0, b\cos s, b\sin s),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - (t+a)^2}}(0, -b\sin s, b\cos s),$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \big(b^2 - (t+a)^2\big)^{-3/2}\big(b^2, (t+a)b\sin s, -(t+a)b\cos s\big),$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \big(b^2 - (t+a)^2\big)^{-5/2}\big(3b^2(t+a), 2b(t+a)^2\sin s + b^3\sin s, -2b(t+a)^2\cos s - b^3\cos s\big)$$

elde edilir. Bu türevler (**3.2.3**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\Delta G =&\frac{1}{(b^2-(t+a)^2)^{5/2}}\Big(\big(b^2-(t+a)^2\big)\big(0,-b\sin s, b\cos s\big)\big)\\&+\big(t+a\big)\big(b^2,(t+a)b\sin s,-(t+a)b\cos s\big)\\&-\big(3b^2(t+a),2b(t+a)^2\sin s+b^3\sin s,-2b(t+a)^2\cos s-b^3\cos s\big)\Big)\\=&-\frac{2b^2}{(b^2-(t+a)^2)^{5/2}}\big(t+a,b\sin s,-b\cos s\big)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\Delta G=\frac{-2b^2}{(b^2-(t+a)^2)^2}G$$

elde edilir. Bu da G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Aşağıdaki örneklerin hesapları öncekilere benzediği için hesapların detayları verilmeyecektir.

Örnek 3.2.5. (2. Tip Zamansal Helikoid) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $|a|>|b|>0$ koşulunu sağlayan a ve b sabitleri için

$$x(s,t)=((t+a)\sinh s,(t+a)\cosh s,-bs)$$

ile tanımlanan bir M yüzeyi göz önüne alınsın, burada

$$t<\min(-a-b,-a+b)\ \text{ ya da }\ t>\max(-a-b,-a+b)$$

dır. Bu parametrelendirme $\mathbb{E}_1^3$ uzayında M_-^1 tipinden silindirik olmayan bir yüzey tanımlar. Bu yüzey 2. tip zamansal helikoid olarak adlandırılır.

M_-^1 yüzeyinin Gauss tasvirinin ΔG Laplasiyeni

$$\Delta G=\frac{-2b^2}{((t+a)^2-b^2)^2}G$$

olarak belirlenir. Bu da G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.6. (3. Tip Zamansal Helikoid) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $|a|<|b|$ koşulunu sağlayan a ve b sabitleri için

$$x(s,t)=((t+a)\cosh s,bs,(t+a)\sinh s)$$

ile tanımlanan bir M yüzeyi göz önüne alınsın, burada

$$\min(-a-b,-a+b) < t < \max(-a-b,-a+b)$$

dır. Bu parametrelendirme $\mathbb{E}_1^3$ uzayında M_+^3 tipinden silindirik olmayan bir yüzey tanımlar. Bu yüzey 3. tip zamansal helikoid olarak adlandırılır.

M_+^3 yüzeyinin Gauss tasvirinin ΔG Laplasiyeni

$$\Delta G = \frac{2b^2}{(b^2-(t+a)^2)^2}G$$

olarak belirlenir. Bu da G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.7. (2. Tip Zamansal Enneper Yüzeyin Eşleniği) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında

$$x(s,t) = (\frac{1}{6}s^3 + ts + s, -\frac{1}{6}s^3 - ts, \frac{1}{2}s^2 + t)$$

ile tanımlanan M_-^2 tipinden silindirik olmayan bir yüzey ele alınsın. Bu yüzey, 2. tip zamansal Enneper yüzeyin eşleniği olarak adlandırılır.

M_-^2 yüzeyinin Gauss tasvirinin ΔG Laplasiyeni

$$\Delta G = \frac{-2}{(2t+1)^2}G$$

olarak belirlenir, burada $t > -\dfrac{1}{2}$ dir. Bu da, G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

Örnek 3.2.8. (B-scroll [3]) $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında $\gamma = \gamma(s)$ ışıksal(null) bir eğri olsun. Bu eğri boyunca tanımlı ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $A(s), B(s), C(s)$ vektör alanlarına $\gamma(s)$ üzerinde Cartan çatısı denir:

$$\langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \quad \langle A, B\rangle = 1, \quad \langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0,$$

$$\langle C, C\rangle = 1, \quad C = A \times B, \quad \gamma' = A, \quad C' = -aA - k(s)B,$$

burada a bir sabit ve $k(s)$ sıfırdan farklı bir fonksiyondur. Bu A, B, C vektörleri için $A'(s) = k(s)C$ ve $B'(s) = aC$ ifadeleri de sağlanır.

O halde, $x = x(s,t) = \gamma\ (s) + tB(s)$ yüzeyi $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında zamansal bir yüzeydir ve B-scroll olarak adlandırılır.

Bu yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_s = \gamma' + tB' = A + atC, \qquad x_t = B$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (A + atC) \times B = C - atB$$

elde edilir. Yüzey zamansal olduğundan yüzeyin normal vektörü uzaysaldır, yani, $\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = \|x_s \times x_t\| = 1$ dir. Dolayısıyla, yüzeyin Gauss tasviri

$$G = -atB(s) + C(s)$$

şeklinde bulunur. Gauss tasvirinin G_s ve G_t türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} G_s &= -atB' + C' \\ &= -at(aC) - aA - k(s)B = -a(A + atC) - k(s)B \\ &= -ax_s - k(s)x_t \end{aligned}$$

ve

$$G_t = -aB = -ax_t$$

olur. Yüzeyin şekil operatörü A_G ile gösterilirse

$$A_G(x_s) = -G_s = ax_s + k(s)x_t, \quad A_G(x_t) = -G_t = ax_t$$

bulunur. Böylece A_G şekil operatörü

$$A_G = \begin{pmatrix} a & 0 \\ k(s) & a \end{pmatrix}$$

olarak yazılır ve buradan $H = a$ ve $K = a^2$ olup, yüzeyin ortalama eğriğinin ve Gauss eğriliğinin sabit olduğu görülür. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = a^2t^2,\ g_{12} = g_{21} = 1,\ g_{22} = 0$ olarak bulunur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = -1$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri de $g^{11} = 0,\ g^{12} = g^{21} = 1,\ g^{22} = -a^2t^2$ olur. Bu yüzeyin Δ Laplace operatörü hesaplandığında

$$\Delta = -2\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + 2a^2t\frac{\partial}{\partial t} + a^2t^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

elde edilir ve bu operatör Gauss tasvirine uygulandığında

$$\Delta G = 2a^2C - 2a^3tB = 2a^2(C - atB) = 2a^2G$$

bulunur ki bu da, G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu ifade eder.

3.3 Sınıflandırma Teoremleri

Bu kısımda, doğrusal yüzeyler birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirinin yardımıyla sınıflandırılacaktır. M doğrusal yüzeyinin $\Delta G = FG$ koşulunu sağladığı kabul edilsin. O halde, ΔG ifadesinin teğet bileşeni sıfırdır, yani,

$$\Delta G - \varepsilon \langle \Delta G, G \rangle G = 0, \quad \varepsilon = \langle G, G \rangle \qquad \textbf{(3.3.1)}$$

olur. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında doğrusal yüzeyler α taban eğrisi ve β vektör alanının karakterine göre üç belirli tipe ayrılır, yani, silindirik doğrusal yüzeylere, silindirik olmayan doğrusal yüzeylere ve null scroll yüzeylere.

Teorem 3.3.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip, taban eğrisi uzaysal ya da zamansal olan silindirik doğrusal yüzeyler sadece aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasından ibarettir:

1. bir Öklid düzlemi,
2. bir Minkowski düzlemi,
3. hiperbolik silindir,
4. Lorentz çembersel silindir,
5. indeksi 1 olan çembersel silindir.

İspat. M, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında silindirik doğrusal bir yüzey olsun. Yani, $\alpha = \alpha(s)$ uzaysal ya da zamansal bir eğri, $\beta = \beta(s)$ α eğrisi boyunca α ya dik uzaysal ya da zamansal birim, sabit vektör alanı ve s, α eğrisinin yay uzunluğu olsun. O halde, M yüzeyi

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1), \quad \langle \alpha', \beta \rangle = 0, \quad \langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1)$$

olmak üzere

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta$$

şeklinde parametrelendirilir. M silindirik doğrusal yüzey olduğu için $\beta' = 0$ ve

$\langle \beta', \beta' \rangle = 0$ olduğundan β' null bir vektör alanı değildir. Böylece M yüzeyi sadece M_+^1, M_+^3 ya da M_-^1 tipindendir. İspat iki duruma ayrılır.

1. Durum: M yüzeyi, M_+^1 ya da M_-^1 tipinden silindirik bir yüzey olsun, yani, $\varepsilon_2 = 1$ olsun. Bir Lorentz dönüşümü ile, genellik bozulmadan, β vektör alanı $\beta = (0,0,1)$ şeklinde seçilebilir. Böylece, silindirin taban eğrisi β vektörüne dik olan düzlem içinde, yani, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$ olarak alınabilir. Taban eğrisi $\alpha(s)$, yay uzunluğuna göre alındığından $-{\alpha_1'}^2 + {\alpha_2'}^2 = \varepsilon_1 (= \pm 1)$ olur. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_s = \alpha'(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s), 0), \qquad x_t = \beta = (0,0,1)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (-\alpha_2', -\alpha_1', 0) \text{ ve } \langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = -{\alpha_2'}^2 + {\alpha_1'}^2 = -\varepsilon_1$$

elde edilir. Dolayısıyla, yüzeyin Gauss tasviri

$$G = (-\alpha_2', -\alpha_1', 0), \quad \varepsilon = \langle G, G \rangle = -\varepsilon_1$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = \varepsilon_1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = 1$ olur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = \varepsilon_1$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri de $g^{11} = \varepsilon_1,\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = 1$ olur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

elde edilir. Bu operatör Gauss tasvirine uygulandığında

$$\Delta G = (\varepsilon_1 \alpha_2''', \varepsilon_1 \alpha_1''', 0)$$

bulunur. $\Delta G = FG$ koşulu kullanılarak

$$(\varepsilon_1 \alpha_2''', \varepsilon_1 \alpha_1''', 0) = F(s,t)(-\alpha_2', -\alpha_1', 0)$$

buradan da

$$\varepsilon_1 \alpha_2''' = -F(s,t)\alpha_2', \quad \varepsilon_1 \alpha_1''' = -F(s,t)\alpha_1' \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Son ifadeden açıkça görülüyor ki, F sadece s değişkeninin bir fonksiyonudur.

Yukarıdaki denklemlerin çözülmesi için ilk olarak, M yüzeyinin M_+^1 tipinden olduğu kabul edilsin, yani, $\varepsilon_1 = 1$ olsun. Böylece, $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -{\alpha_1'}^2 + {\alpha_2'}^2 = 1$ olur. Buna göre

$$\alpha_1'(s) = \sinh\theta(s), \quad \alpha_2'(s) = \cosh\theta(s)$$

seçilebilir. Buradan

$$\alpha_1'' = \theta' \cosh\theta, \quad \alpha_1''' = \theta'' \cosh\theta + \theta'^2 \sinh\theta$$

ve

$$\alpha_2'' = \theta' \sinh\theta, \quad \alpha_2''' = \theta'' \sinh\theta + \theta'^2 \cosh\theta$$

türevleri bulunur. Bunlar (**3.3.2**) ile verilen denklemlerde yerine yazıldığında

$$(\theta'^2 + F(s,t)) \cosh\theta + \theta'' \sinh\theta = 0$$

ve

$$(\theta'^2 + F(s,t)) \sinh\theta + \theta'' \cosh\theta = 0$$

elde edilir. Bu iki denklemin çözümü

$$\theta'' = 0 \text{ ve } {\theta'}^2 + F(s,t) = 0$$

olmasını gerektirir. Buradan da F fonksiyonunun sabit olduğu görülür. Bu da M yüzeyinin sonlu tipten Gauss tasvirine sahip olduğunu ifade eder. [4] nolu makaledeki 3.1 Önermesi göz önüne alındığında, M yüzeyinin, bir Öklid düzleminin veya bir hiperbolik silindirin açık bir parçası olduğu sonucuna varılır.

Şimdi M yüzeyinin M_-^1 tipinden olduğu kabul edilsin, yani, $\varepsilon_1 = -1$ olsun. Böylece $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -{\alpha_1'}^2 + {\alpha_2'}^2 = -1$ olur. Buna göre

$$\alpha_1'(s) = \cosh\theta(s), \quad \alpha_2'(s) = \sinh\theta(s)$$

seçilebilir. Buradan

$$\alpha_1'' = \theta' \sinh\theta, \quad \alpha_1''' = \theta'' \sinh\theta + \theta'^2 \cosh\theta$$

ve

$$\alpha_2'' = \theta' \cosh\theta, \quad \alpha_2''' = \theta'' \cosh\theta + \theta'^2 \sinh\theta$$

türevleri bulunur. Bunlar (**3.3.2**) ile verilen denklemlerde yerine yazıldığında

$$(\theta'^2 - F(s,t))\sinh\theta + \theta''\cosh\theta = 0,$$

$$(\theta'^2 - F(s,t))\cosh\theta + \theta''\sinh\theta = 0$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü

$$\theta'' = 0 \text{ ve } \theta'^2 - F(s,t) = 0$$

denklemlerini verir. Buradan da F fonksiyonunun sabit olduğu görülür. [4] nolu makaledeki 3.1 Önermesi göz önüne alındığında, M yüzeyinin, bir Minkowski düzleminin veya bir Lorentz çembersel silindirin açık bir parçası olduğu sonucuna varılır.

2. Durum: M, M^3_+ tipinden silindirik bir yüzey olsun, yani, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ olsun. Bir Lorentz dönüşümüyle, genellik bozulmadan, β vektör alanı $\beta = (1,0,0)$ şeklinde seçilebilir. Böylece silindirin taban eğrisi β vektörüne dik olan düzlem içinde, yani, $\alpha(s) = (0, \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ olarak alınabilir. Taban eğrisi $\alpha(s)$ yay uzunluğuna göre alındığından $\langle\alpha', \alpha'\rangle = {\alpha'_2}^2 + {\alpha'_3}^2 = 1$ olur. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_s = \alpha'(s) = (0, \alpha'_2(s), \alpha'_3(s)), \qquad x_t = \beta = (1,0,0)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (0, \alpha'_3, -\alpha'_2) \text{ ve } \langle x_s \times x_t, x_s \times x_t\rangle = {\alpha'_2}^2 + {\alpha'_3}^2 = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla, yüzeyin Gauss tasviri

$$G = (0, \alpha'_3, -\alpha'_2)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzey için $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g^{ij} = \delta_{ij}$, $\mathcal{G} = \det g = 1$ olur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplandığında

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

elde edilir ve bu operatör G tasvirine uygulanırsa

$$\Delta G = (0, -\alpha'''_3, \alpha'''_2)$$

bulunur. $\Delta G = FG$ koşulu kullanılarak

$$\alpha_3''' = -F(s,t)\alpha_3', \quad \alpha_2''' = -F(s,t)\alpha_2' \qquad (\mathbf{3.3.3})$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Burada da F fonksiyonunun sadece s değişkenine bağlı olduğu görülür. Şimdi $\langle \alpha', \alpha' \rangle = {\alpha_2'}^2 + {\alpha_3'}^2 = 1$ olması göz önüne alınarak

$$\alpha_2'(s) = \cos\theta(s), \quad \alpha_3'(s) = \sin\theta(s)$$

seçilebilir. Buradan

$$\alpha_2'' = -\theta' \sin\theta, \quad \alpha_2''' = -\theta'' \sin\theta - \theta'^2 \cos\theta$$

ve

$$\alpha_3'' = \theta' \cos\theta, \quad \alpha_3''' = \theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta$$

türevleri bulunur. Bunlar (**3.3.3**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\theta'' \cos\theta - (\theta'^2 - F(s,t)) \sin\theta = 0$$

ve

$$\theta'' \sin\theta + (\theta'^2 - F(s,t)) \cos\theta = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklem sisteminin çözümünden

$$\theta'' = 0 \text{ ve } \theta'^2 - F(s,t) = 0$$

denklemleri elde edilir. Buradan da F fonksiyonunun sabit olduğu görülür. [4] nolu makaledeki 3.2 Önermesi göz önüne alınırsa M yüzeyinin bir Minkowski düzleminin veya indeksi 1 olan çembersel bir silindirin açık bir parçası olduğu sonucuna varılır.

Teorem 3.3.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, M silindirik olmayan ve taban eğrisi uzaysal ya da zamansal olan doğrusal bir yüzey olsun. M yüzeyinin Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçası olmasıdır:

1. Birinci tip uzaysal ya da zamansal helikoid yüzeyi,
2. İkinci tip uzaysal ya da zamansal helikoid yüzeyi,

3. Üçüncü tip zamansal helikoid yüzeyi,

4. İkinci tip uzaysal ya da zamansal Enneper yüzeylerinin eşleniği.

İspat. İspat iki duruma ayrılır.

1. Durum: M, α taban eğrisi ve β doğrultman vektörünün karakterine göre M_+^1, M_+^3 ya da M_-^1 tiplerinden biri olan, silindirik olmayan doğrusal bir yüzey olsun. Bu durumda sırasıyla,

1. $\alpha = \alpha(s)$ uzaysal ve $\beta = \beta(s)$ uzaysaldır,
2. $\alpha = \alpha(s)$ uzaysal ve $\beta = \beta(s)$ zamansaldır,
3. $\alpha = \alpha(s)$ zamansal ve $\beta = \beta(s)$ uzaysaldır,

burada s, β doğrultman vektörünün yay uzunluğudur. Uygun bir katı harekete göre, M doğrusal yüzeyi

$$\langle \alpha', \beta \rangle = 0, \quad \langle \beta, \beta \rangle = \varepsilon_2 (= \pm 1), \quad \langle \beta', \beta' \rangle = \varepsilon_3 (= \pm 1)$$

olacak şekilde

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

ile ifade edilir. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_s = \alpha' + t\beta', \quad x_t = \beta \tag{\textbf{3.3.4}}$$

yüzey üzerinde doğal bir teğet baz alanı belirler. Sonradan kullanılmak üzere, q, u ve v differansiyellenebilir fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$q = \|x_s\|^2 = \varepsilon_4 \langle x_s, x_s \rangle, \quad u = \langle \alpha', \beta' \rangle, \quad v = \langle \alpha', \alpha' \rangle, \tag{\textbf{3.3.5}}$$

burada $\varepsilon_4 (= \pm 1)$, x_s vektörünün işaretidir. Yani,

$$\begin{aligned} \langle x_s, x_s \rangle =& \langle \alpha' + t\beta', \alpha' + t\beta' \rangle \\ =& t^2 \langle \beta', \beta' \rangle + 2t \langle \alpha', \beta' \rangle + \langle \alpha', \alpha' \rangle \\ =& \varepsilon_3 t^2 + 2tu + v \end{aligned}$$

$$q = \varepsilon_4 (\varepsilon_3 t^2 + 2tu + v) \tag{\textbf{3.3.6}}$$

olur. Dolayısıyla, M üzerinde indirgenmiş pseudo-Riemannian g metriğinin bileşenleri $g_{11} = \varepsilon_4 q$, $g_{12} = g_{21} = 0$ ve $g_{22} = \varepsilon_2$ elde edilir. Buna göre $\mathcal{G} = \det g =$

$\varepsilon_2\varepsilon_4 q$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri de $g^{11} = \dfrac{\varepsilon_4}{q},\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = \varepsilon_2$ olur. M yüzeyinin x_s ve x_t koordinat vektörlerinin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (\alpha' + t\beta') \times \beta = \alpha' \times \beta + t\beta' \times \beta = A + tB$$

elde edilir, burada $A = \alpha' \times \beta$ ve $B = \beta' \times \beta$ dir. Böylece

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = \langle x_s, x_t \rangle^2 - \langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle = -\varepsilon_2\varepsilon_4 q$$

bulunur ve yüzeyin normalinin işareti $\varepsilon = -\varepsilon_2\varepsilon_4$ elde edilir. Dolayısıyla $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{q}$ ve yüzeyin Gauss tasviri

$$G = q^{-1/2}(A + tB)$$

şeklinde bulunur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\varepsilon_4\Big(\frac{1}{q}\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{1}{2q^2}\frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}\Big) - \varepsilon_2\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2q}\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Big) \qquad \mathbf{(3.3.7)}$$

elde edilir. Bu operatörün G tasvirine uygulanması için $q_s,\ q_t,\ G_s,\ G_t,\ G_{ss},\ G_{tt}$ türevleri hesaplandığında

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \varepsilon_4(2tu' + v'), \qquad \frac{\partial q}{\partial t} = 2\varepsilon_4(\varepsilon_3 t + u),$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = -\frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-3/2}(2tu' + v')(A + tB) + q^{-1/2}(A' + tB') \qquad \mathbf{(3.3.8)}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\varepsilon_4 q^{-3/2}(\varepsilon_3 t + u)(A + tB) + q^{-1/2}B, \qquad \mathbf{(3.3.9)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial s^2} =& \Big(\frac{3}{4}q^{-5/2}(2tu' + v')^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_4 q^{-3/2}(2tu'' + v'')\Big)(A + tB) \\ &- \varepsilon_4 q^{-3/2}(2tu' + v')(A' + tB') + q^{-1/2}(A'' + tB''),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 3q^{-5/2}(\varepsilon_3 t + u)^2(A + tB) - \varepsilon_3\varepsilon_4 q^{-3/2}(A + tB) - 2\varepsilon_4 q^{-3/2}(\varepsilon_3 t + u)B$$

bulunur. Bu türevler (**3.3.7**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\Delta G =& \Big\{\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 q^{-1} - 2\varepsilon_2 q^{-2}(\varepsilon_3 t + u)^2 - \varepsilon_4 q^{-3}(2u't + v')^2 \\ &+ \frac{1}{2}q^{-2}(2u''t + v'')\Big\}q^{-1/2}(A + tB) \\ &+ \frac{1}{2}q^{-5/2}\Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_4 q\big((\varepsilon_3 t + u)B + \varepsilon_3 A - \varepsilon_3 A\big) \\ &- 2\varepsilon_4 q(A'' + tB'') + 3(2u't + v')(A' + tB')\Big\},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta G =& \Big\{\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 q^{-1} - 2\varepsilon_2 q^{-2}(\varepsilon_3 t + u)^2 - \varepsilon_4 q^{-3}(2u't + v')^2 \\
&+ \frac{1}{2}q^{-2}(2u''t + v'')\Big\} q^{-1/2}(A + tB) + \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 q^{-3/2}(A + tB) \\
&+ \frac{1}{2}q^{-5/2}\Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_4 q(-\varepsilon_3 A + uB) - 2\varepsilon_4 q(A'' + tB'') \\
&+ 3(2u't + v')(A' + tB')\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta G =& \Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 q^{-1} - 2\varepsilon_2 q^{-2}(\varepsilon_3 t + u)^2 - \varepsilon_4 q^{-3}(2u't + v')^2 + \frac{1}{2}q^{-2}(2u''t + v'')\Big\} G \\
&+ \frac{1}{2}q^{-5/2}\Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_4 q(-\varepsilon_3 A + uB) - 2\varepsilon_4 q(A'' + tB'') + 3(2u't + v')(A' + tB')\Big\}
\end{aligned}
\tag{\textbf{3.3.10}}
$$

olur. Şimdi $a = a(s)$ fonksiyonu ve $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}(s)$ vektörü

$$
a = 2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 q^{-1} - 2\varepsilon_2 q^{-2}(\varepsilon_3 t + u)^2 - \varepsilon_4 q^{-3}(2u't + v')^2 + \frac{1}{2}q^{-2}(2u''t + v''),
$$

$$
\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}q^{-5/2}\{2\varepsilon_2\varepsilon_4 q(-\varepsilon_3 A + uB) - 2\varepsilon_4 q(A'' + tB'') + 3(2u't + v')(A' + tB')\}
$$

şeklinde alınırsa (**3.3.10**) ifadesi $\Delta G = aG + \overrightarrow{b}$ olur. Sonra (**3.3.1**) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\Delta G - \varepsilon\langle \Delta G, G\rangle G &= aG + \overrightarrow{b} - \varepsilon(a\varepsilon + \langle b, G\rangle)G \\
&= \overrightarrow{b} - \varepsilon\langle b, G\rangle G = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}q^{-5/2}\Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_4 q(-\varepsilon_3 A + uB) - 2\varepsilon_4 q(A'' + tB'') + 3(2u't + v')(A' + tB')\Big\} \\
&- \frac{1}{2}\varepsilon q^{-7/2}(A + tB)\Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_4 q\big(-\varepsilon_3\langle A, A\rangle - \varepsilon_3 t\langle A, B\rangle + u\langle A, B\rangle + ut\langle B, B\rangle\big) \\
&- 2\varepsilon_4 q\big(\langle A'', A\rangle + t\langle A'', B\rangle + t\langle A, B''\rangle + t^2\langle B, B''\rangle\big) + 3(2u't + v')\big(\langle A', A\rangle \\
&+ t\langle A', B\rangle + t\langle A, B'\rangle + t^2\langle B', B\rangle\big)\Big\} = 0
\end{aligned}
\tag{\textbf{3.3.11}}
$$

olur. Yukarıdaki denklemde geçen bazı büyüklükler hesaplandığında

$$
\begin{gathered}
\langle A, A\rangle = -\varepsilon_2 v, \quad \langle A, B\rangle = -\varepsilon_2 u, \quad \langle B, B\rangle = -\varepsilon_2\varepsilon_3, \\
\langle A', A\rangle = -\frac{\varepsilon_2}{2}v', \quad \langle B', B\rangle = 0, \quad \langle A', B\rangle + \langle A, B'\rangle = -\varepsilon_2 u'
\end{gathered}
$$

bulunur. Şimdi (**3.3.11**) ifadesi $q^{7/2}$ ile çarpılıp, iç çarpımlar ve q fonksiyonu yerine koyulursa

$$\Big\{2\varepsilon_2\varepsilon_4(\varepsilon_3t^2+2tu+v)^2(-\varepsilon_3A+uB)-2\varepsilon_4(\varepsilon_3t^2+2tu+v)^2(A''+tB'')$$
$$+3\varepsilon_4(\varepsilon_3t^2+2tu+v)(2u't+v')(A'+tB')\Big\}$$
$$-\varepsilon(A+tB)\Big\{2(\varepsilon_3t^2+2tu+v)(\varepsilon_3v-u^2)-2(\varepsilon_3t^2+2tu+v)\big(\langle A'',A\rangle$$
$$+t\langle A'',B\rangle+t\langle A,B''\rangle+t^2\langle B,B''\rangle\big)-\frac{3}{2}\varepsilon_2(2u't+v')^2\Big\}=0$$

olur ve buradan da

$$(t^4+4\varepsilon_3ut^3+4u^2t^2+2\varepsilon_3vt^2+4uvt+v^2)(-2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4A+2u\varepsilon_2\varepsilon_4B-2\varepsilon_4A''$$
$$-2\varepsilon_4tB'')+3\varepsilon_4(2\varepsilon_3u't^3+\varepsilon_3t^2v'+4uu't^2+2uv't+2u'vt+vv')(A'+tB')$$
$$-\varepsilon(A+tB)\Big\{2(\varepsilon_3t^2+2tu+v)\big(\varepsilon_3v-u^2-\langle A'',A\rangle-t\langle A'',B\rangle-t\langle A,B''\rangle$$
$$-t^2\langle B,B''\rangle\big)-\frac{3}{2}\varepsilon_2(4u'^2t^2+v'^2+4u'v't)\Big\}=0$$

elde edilir. Bu ifade t değişkenine göre düzenlenirse

$$t^5\Big[-2\varepsilon_4B''+2\varepsilon\varepsilon_3\langle B'',B\rangle B\Big]+$$
$$t^4\Big[-2\varepsilon_4A''-2\varepsilon_4(\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle B'',B\rangle)A-8\varepsilon_3\varepsilon_4uB''+6\varepsilon_3\varepsilon_4u'B'$$
$$+2\varepsilon_4\big(\varepsilon_2u+\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle A'',B\rangle+\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle A,B''\rangle+2\varepsilon\varepsilon_4u\langle B,B''\rangle\big)B\Big]+$$
$$t^3\Big[-8\varepsilon_3\varepsilon_4uA''+6\varepsilon_3\varepsilon_4u'A'-\big(8\varepsilon_2\varepsilon_4u-2\varepsilon\varepsilon_3\langle A'',B\rangle-2\varepsilon\varepsilon_3\langle A,B''\rangle$$
$$-4\varepsilon u\langle B,B''\rangle\big)A-(4\varepsilon_3\varepsilon_4v+8\varepsilon_4u^2)B''+(12\varepsilon_4uu'+3\varepsilon_3\varepsilon_4v')B'$$
$$+\big(8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4u^2+2\varepsilon\varepsilon_3u^2-2\varepsilon v+6\varepsilon\varepsilon_2u'^2+2\varepsilon\varepsilon_3\langle A,A''\rangle+4\varepsilon u\langle A'',B\rangle$$
$$+4\varepsilon u\langle A,B''\rangle+2\varepsilon v\langle B'',B\rangle\big)B\Big]+$$
$$t^2\Big[-\varepsilon_4(4\varepsilon_3v+8u^2)A''+\varepsilon_4(12uu'+3\varepsilon_3v')A'-\big(4\varepsilon_2\varepsilon_4v+8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4u^2$$
$$+2\varepsilon v-2\varepsilon\varepsilon_3u^2-6\varepsilon\varepsilon_2u'^2-2\varepsilon\varepsilon_3\langle A,A''\rangle-4\varepsilon u\langle A'',B\rangle-4\varepsilon u\langle A,B''\rangle$$
$$-2\varepsilon v\langle B'',B\rangle\big)A-8\varepsilon_4uvB''+\varepsilon_4(6u'v+6uv')B'+\big(4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4uv$$
$$+8\varepsilon_2\varepsilon_4u^3-4\varepsilon\varepsilon_3uv+4\varepsilon u^3+6\varepsilon\varepsilon_2u'v'+4\varepsilon u\langle A,A''\rangle+2\varepsilon v\langle A'',B\rangle$$
$$+2\varepsilon v\langle A,B''\rangle\big)B\Big]+$$
$$t\Big[-8\varepsilon_4uvA''+\varepsilon_4(6u'v+6uv')A'-\big(8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4uv+4\varepsilon\varepsilon_3uv-4\varepsilon u^3-6\varepsilon\varepsilon_2u'v'$$

$$
\begin{aligned}
&- 4\varepsilon u\langle A, A''\rangle - 2\varepsilon v\langle A'', B\rangle - 2\varepsilon v\langle A, B''\rangle\big)A - 2\varepsilon_4 v^2 B'' + 3\varepsilon_4 vv'B' \\
&+ \big(8\varepsilon_2\varepsilon_4 u^2 v - 2\varepsilon\varepsilon_3 v^2 + 2\varepsilon u^2 v + \frac{3}{2}\varepsilon\varepsilon_2 v'^2 + 2\varepsilon v\langle A, A''\rangle\big)B\Big] + \\
&\Big[- 2\varepsilon_4 v^2 A'' + 3\varepsilon_4 vv'A' - \big(2\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 v^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3 v^2 - 2\varepsilon u^2 v - \frac{3}{2}\varepsilon\varepsilon_2 v'^2 \\
&\quad - 2\varepsilon v\langle A, A''\rangle\big)A + 2\varepsilon_2\varepsilon_4 uv^2 B\Big] = 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu da katsayıları s'nin fonksiyonu olan t değişkenine göre bir polinomdur. Bu polinomun katsayıları sıfır olmalıdır. Yani,

$$
B'' - \varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle B'', B\rangle B = 0, \tag{3.3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&A'' + (\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle B'', B\rangle)A + 4\varepsilon_3 uB'' - 3\varepsilon_3 u'B' - (\varepsilon_2 u + \varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle A'', B\rangle \\
&+ \varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\langle A, B''\rangle + 2\varepsilon\varepsilon_4 u\langle B, B''\rangle)B = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&8\varepsilon_3\varepsilon_4 uA'' - 6\varepsilon_3\varepsilon_4 u'A' + \big(8\varepsilon_2\varepsilon_4 u - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A'', B\rangle - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A, B''\rangle \\
&- 4\varepsilon u\langle B, B''\rangle\big)A + (4\varepsilon_3\varepsilon_4 v + 8\varepsilon_4 u^2)B'' - (12\varepsilon_4 uu' + 3\varepsilon_3\varepsilon_4 v')B' \\
&- \big(8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 u^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3 u^2 - 2\varepsilon v + 6\varepsilon\varepsilon_2 u'^2 + 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A, A''\rangle + 4\varepsilon u\langle A'', B\rangle \\
&+ 4\varepsilon u\langle A, B''\rangle + 2\varepsilon v\langle B'', B\rangle\big)B = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_4(4\varepsilon_3 v + 8u^2)A'' - \varepsilon_4(12uu' + 3\varepsilon_3 v')A' + \big(4\varepsilon_2\varepsilon_4 v + 8\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 u^2 + 2\varepsilon v - 2\varepsilon\varepsilon_3 u^2 \\
&- 6\varepsilon\varepsilon_2 u'^2 - 2\varepsilon\varepsilon_3\langle A, A''\rangle - 4\varepsilon u\langle A'', B\rangle - 4\varepsilon u\langle A, B''\rangle - 2\varepsilon v\langle B'', B\rangle\big)A + 8\varepsilon_4 uvB'' \\
&- \varepsilon_4(6u'v + 6uv')B' - \big(4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 uv + 8\varepsilon_2\varepsilon_4 u^3 - 4\varepsilon\varepsilon_3 uv + 4\varepsilon u^3 + 6\varepsilon\varepsilon_2 u'v' \\
&+ 4\varepsilon u\langle A, A''\rangle + 2\varepsilon v\langle A'', B\rangle + 2\varepsilon v\langle A, B''\rangle\big)B = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&16\varepsilon_4 uvA'' - \varepsilon_4(12u'v + 12uv')A' + \big(16\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 uv + 8\varepsilon\varepsilon_3 uv - 8\varepsilon u^3 - 12\varepsilon\varepsilon_2 u'v' \\
&- 8\varepsilon u\langle A, A''\rangle - 4\varepsilon v\langle A'', B\rangle - 4\varepsilon v\langle A, B''\rangle\big)A + 4\varepsilon_4 v^2 B'' - 6\varepsilon_4 vv'B' \\
&- \big(16\varepsilon_2\varepsilon_4 u^2 v - 4\varepsilon\varepsilon_3 v^2 + 4\varepsilon u^2 v + 3\varepsilon\varepsilon_2 v'^2 + 4\varepsilon v\langle A, A''\rangle\big)B = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\varepsilon_4 v^2 A'' - 6\varepsilon_4 vv'A' + \big(4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 v^2 + 4\varepsilon\varepsilon_3 v^2 - 4\varepsilon u^2 v - 3\varepsilon\varepsilon_2 v'^2 - 4\varepsilon v\langle A, A''\rangle\big)A \\
&- 4\varepsilon_2\varepsilon_4 uv^2 B = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.17}
$$

olur. Önceden $\langle B', B\rangle = 0$ olduğu biliniyor. Bu kullanılırsa (**3.3.12**)'den

$$
\langle B'', B'\rangle = 0 \tag{3.3.18}
$$

olur, yani bir c sabiti için $\langle B', B'\rangle = c$ dir. Ayrıca $\langle B', B\rangle = 0$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\langle B'', B\rangle + \langle B', B'\rangle = 0 \text{ ve } \langle B'', B\rangle = -c \tag{\textbf{3.3.19}}$$

bulunur. Böylece (**3.3.12**) denklemi

$$B'' = -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 cB \tag{\textbf{3.3.20}}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin A ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle A, B''\rangle = -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 c\langle A, B\rangle = \varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 cu \tag{\textbf{3.3.21}}$$

olur. Şimdi (**3.3.18**),(**3.3.19**),(**3.3.20**) ve (**3.3.21**) eşitlikleri kullanılarak A'', A' ve B' ifadeleri yok edilsin. Sonra (**3.3.13**) denkleminin B ile iç çarpımı alınır ve ilgili eşitlikler kullanılırsa $\langle A'', B\rangle = -\varepsilon_3 cu$ bulunur. Böylece (**3.3.13**) denklemi

$$A'' + (\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 c)A - (\varepsilon_2 u + \varepsilon_2 cu + \varepsilon\varepsilon_4 cu)B - 3\varepsilon_3 u'B' = 0 \tag{\textbf{3.3.22}}$$

olur. Benzer şekilde (**3.3.17**) denkleminin A ile iç çarpımı alınır ve ilgili eşitlikler kullanılırsa

$$\langle A'', A\rangle = -\frac{3}{4v}\varepsilon_2 v'^2 + \varepsilon_3 v - u^2$$

elde edilir. Dolayısıyla, (**3.3.17**) denklemi

$$4\varepsilon_4 v^2 A'' - 6\varepsilon_4 vv'A' + 4\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 v^2 A - 4\varepsilon_2\varepsilon_4 uv^2 B = 0$$

olur. Şimdi bu denklemde A'' yerine (**3.3.22**)'daki ifade yazılırsa

$$4\varepsilon\varepsilon_3 cv^2 A - 4cuv^2(\varepsilon + \varepsilon_2\varepsilon_4)B + 6\varepsilon_4 vv'A' - 12\varepsilon_3\varepsilon_4 u'v^2 B' = 0 \tag{\textbf{3.3.23}}$$

elde edilir. Benzer düzenlemeler (**3.3.14**), (**3.3.15**) ve (**3.3.16**) denklemleri için yapılırsa sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} &4cuv(\varepsilon + \varepsilon_2\varepsilon_4)A - (8\varepsilon_3 cu^2 v(\varepsilon + \varepsilon_2\varepsilon_4) - 4\varepsilon cv^2 - 12\varepsilon\varepsilon_2 vu'^2 + 3\varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3 v'^2)B \\ &+ 12\varepsilon_3\varepsilon_4 u'vA' - 6\varepsilon_4 v(4uu' - \varepsilon_3 v')B' = 0, \end{aligned} \tag{\textbf{3.3.24}}$$

$$\begin{aligned} &(4\varepsilon cv^2 + 8\varepsilon_3 cu^2 v(\varepsilon + \varepsilon_2\varepsilon_4) + 12\varepsilon\varepsilon_2 u'^2 v - 3\varepsilon\varepsilon_2\varepsilon_3 v'^2)A + (4\varepsilon_3 cuv^2(\varepsilon - \varepsilon_2\varepsilon_4) \\ &- 16cu^3 v(\varepsilon + \varepsilon_2\varepsilon_4) + 6\varepsilon\varepsilon_2 v'(2u'v - uv'))B + 6\varepsilon_4 v(4uu' + \varepsilon_3 v')A' \\ &+ (12\varepsilon_4 v(uv' - u'v) - 48\varepsilon_3\varepsilon_4 u^2 u'v)B' = 0 \end{aligned} \tag{\textbf{3.3.25}}$$

ve

$$(4\varepsilon_3cuv^2(3\varepsilon+\varepsilon_2\varepsilon_4)+6\varepsilon\varepsilon_2v'(2u'v-uv'))A+(4\varepsilon\varepsilon_3cv^3-16cu^2v^2(\varepsilon+\varepsilon_2\varepsilon_4))B$$
$$+12\varepsilon_4v(u'v+uv')A'+6\varepsilon_4v^2(v'-8\varepsilon_3uu')B'=0. \qquad \textbf{(3.3.26)}$$

[10] nolu makalede (**3.3.13**), (**3.3.14**), (**3.3.15**), (**3.3.16**) ve (**3.3.17**) ile belirtilen denklemlerde A' ve B''lü ifadelerde ε çarpanı hatalı olarak yazılmıştır. Ayrıca, (**3.3.14**) denkleminde B'li ilk ifadenin de ε_4 çarpanı yazılmamıştır. Burada düzeltilmiş hali yazılıdır.

Elde edilen (**3.3.23**),(**3.3.24**),(**3.3.25**),(**3.3.26**) denklemlerinde A' ve B' terimleri yok edilirse

$$(v'^2-4\varepsilon_3u'^2v)A+(8vuu'^2-4\varepsilon_3u'vv')B=0 \qquad \textbf{(3.3.27)}$$

ve

$$(4u'vv'-2uv'^2)A+(vv'^2-4\varepsilon_3u'^2v^2)B=0 \qquad \textbf{(3.3.28)}$$

denklemleri bulunur. A ve B vektörlerinin, I aralığına ait bazı s değerleri için lineer bağımlı olduğu kabul edilsin. O halde, bir κ_1 sabiti için $A=\kappa_1B$ yazılır. A ve B vektörlerinin ifadeleri göz önüne alınırsa $\alpha'\times\beta=\kappa_1\beta'\times\beta$ olur. Buradan

$$(\alpha'-\kappa_1\beta')\times\beta=0$$

olur, yani bir κ_2 sabiti için $\alpha'-\kappa_1\beta'=\kappa_2\beta$ yazılır. Bu eşitliğin sırasıyla β' ve α' ile iç çarpımı alınırsa $u=\varepsilon_3\kappa_1$ ve $v=\kappa_1u=\varepsilon_3\kappa_1^2$ bulunur. Şimdi (**3.3.6**) ifadesi u ve v değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned}q=&\varepsilon_4(\varepsilon_3t^2+2tu+v)\\=&\varepsilon_3\varepsilon_4(t^2+2\kappa_1t+\kappa_1^2)\\=&\varepsilon_3\varepsilon_4(t+\kappa_1)^2\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $t=-\kappa_1$ için $q=0$ olur, yani yüzeyin G normali tanımsız olur. Bu da q fonksiyonunun pozitif bir fonksiyon olmasıyla çelişir. O halde, A ve B vektörleri tüm $s\in I$ için lineer bağımsızdır. Buradan (**3.3.27**) ve (**3.3.28**) denklemlerindeki A ve B vektörlerinin katsayıları sıfır olmalıdır, yani

$$v'^2-4\varepsilon_3u'^2v=0, \qquad \textbf{(3.3.29)}$$

$$u'v(2uu' - \varepsilon_3 v') = 0, \qquad (\mathbf{3.3.30})$$

$$2u'vv' - uv'^2 = 0, \qquad (\mathbf{3.3.31})$$

$$vv'^2 - 4\varepsilon_3 u'^2 v^2 = 0 \qquad (\mathbf{3.3.32})$$

olur.

$\mathcal{U} = \{p \in M \mid u'(p) \neq 0\}$ açık kümesinin boş kümeden farklı olduğu kabul edilsin. $\mathcal{U}$ kümesi üzerinde, (**3.3.30**) nolu denklemden

$$v' = 2\varepsilon_3 uu'$$

olur. Bu ifade kullanılarak (**3.3.29**) denkleminden $u'^2(u^2 - \varepsilon_3 v) = 0$ olur. $\mathcal{U}$ kümesi üzerinde $u' \neq 0$ olduğu için

$$u^2 = \varepsilon_3 v$$

elde edilir. Şimdi u ve v ifadeleri kullanılırsa (**3.3.6**) denkleminden

$$\begin{aligned} q =& \varepsilon_4(\varepsilon_3 t^2 + 2tu + v) \\ =& \varepsilon_3\varepsilon_4(t^2 + 2\varepsilon_3 ut + u^2) \\ =& \varepsilon_3\varepsilon_4(t + \varepsilon_3 u)^2 \end{aligned}$$

olur. Buna göre $t = -\varepsilon_3 u$ için $q = 0$ olur, yani yüzeyin G normali tanımsız olur. Bu da q fonksiyonunun pozitif bir fonksiyon olmasıyla çelişir. O halde, $\mathcal{U}$ kümesi boş kümedir, yani $u' = 0$ ve (**3.3.29**)'dan $v' = 0$ olur.
Şimdi $B = \beta' \times \beta$ vektöründen türev alınarak

$$B' = \beta'' \times \beta + \beta' \times \beta' = \beta'' \times \beta \text{ ve } B'' = \beta''' \times \beta + \beta'' \times \beta'$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca, (**3.3.20**) eşitliğinin β ile iç çarpımı alınır ve B'' vektörü kullanılırsa

$$\langle B'', \beta \rangle = -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 c \langle B, \beta \rangle,$$

$$\langle \beta''' \times \beta + \beta'' \times \beta', \beta \rangle = -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4 c \langle \beta' \times \beta, \beta \rangle = 0$$

ve böylece

$$\langle \beta'' \times \beta', \beta \rangle = 0$$

bulunur. Dolayısıyla, $\beta = \kappa_1\beta' + \kappa_2\beta''$ olacak şekilde κ_1 ve κ_2 differansiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu eşitliğin β' ile iç çarpımı alınır ve ilgili eşitlikler kullanılırsa

$$\langle \beta, \beta' \rangle = \kappa_1 \langle \beta', \beta' \rangle + \kappa_2 \langle \beta'', \beta' \rangle = 0$$

ve böylece $\kappa_1 = 0$ olur. Yani $\beta = \kappa_2\beta''$ olup β ve β'' vektörleri paraleldir.
Ayrıca, (**3.3.5**) denklemindeki u ve v fonksiyonlarının türevi alınıp, $u' = v' = 0$ ifadesi kullanılırsa

$$\langle \alpha'', \alpha' \rangle = v' = 0 \qquad (\mathbf{3.3.33})$$

ve

$$\begin{aligned} &\langle \alpha'', \beta' \rangle + \langle \alpha', \beta'' \rangle = u' = 0, \\ &\langle \alpha'', \beta' \rangle + \langle \alpha', \frac{1}{\kappa_2}\beta \rangle = 0, \\ &\langle \alpha'', \beta' \rangle + \frac{1}{\kappa_2}\langle \alpha', \beta \rangle = 0, \\ &\langle \alpha'', \beta' \rangle = 0 \qquad (\mathbf{3.3.34}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buna göre α', β, β' ve α'' vektör alanları için,

$$\alpha'' = \kappa_1\alpha' + \kappa_2\beta' + \kappa_3\beta$$

ifadesi bazı κ_1, κ_2 ve κ_3 türevlenebilir fonksiyonları için yazılabilir. Bu eşitliğin β ile iç çarpımı alınırsa

$$\langle \alpha'', \beta \rangle = \varepsilon_2\kappa_3$$

olur. Bununla beraber (**3.3.33**) ve (**3.3.34**) denklemleri göz önüne alınırsa $\alpha'' = \kappa_3\beta$ olur, yani α'' ve β vektörleri paraleldir.
M yüzeyinin H ortalama eğrilik vektörü hesaplansın. Şimdi (**3.3.8**) eşitliği

$$G_s = q^{-1/2}(A' + tB') = q^{-1/2}(\alpha'' \times \beta + \alpha' \times \beta' + t\beta'' \times \beta)$$

olup α'' ve β vektörleri ile β ve β'' vektörleri paralel olduğundan

$$G_s = q^{-1/2}(\alpha' \times \beta')$$

bulunur. Şekil operatörünün $\{x_s, x_t\}$ bazına göre bileşenleri a_{ij} ile gösterilirse

$$-q^{-1/2}(\alpha' \times \beta') = a_{11}x_s + a_{21}x_t$$

olur. Bu denklem, (**3.3.4**) ifadesindeki x_s ve x_t vektörleri ile sırasıyla çarpılırsa

$$-q^{-1/2}\langle \alpha' \times \beta', \alpha' + t\beta' \rangle = \varepsilon_4 a_{11} q,$$

$$a_{11} = 0,$$

$$-q^{-1/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle = \varepsilon_2 a_{21},$$

$$a_{21} = -\varepsilon_2 q^{-1/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle$$

bulunur. Benzer şekilde (**3.3.9**) kullanılırsa

$$\varepsilon_4 q^{-3/2}(\varepsilon_3 t + u)(A + tB) - q^{-1/2}B = a_{12}x_s + a_{22}x_t$$

olur. Bu denklem, (**3.3.4**) ifadesindeki x_s ve x_t vektörleri ile sırasıyla çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$a_{12} = -\varepsilon_4 q^{-3/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle \text{ ve } a_{22} = 0$$

elde edilir. Böylece şekil operatörü

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_4 q^{-3/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle \\ -\varepsilon_2 q^{-1/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta \rangle & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur ve dolayısıyla $H = 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak [12] nolu makalede minimal bir yüzeyin sınıflandırma teoremi kullanılarak, M_+^1 tipinden yüzeyler 1. tip uzaysal helikoidin ve 2. tip uzaysal helikoidin açık bir parçasıdır. Benzer şekilde, M_-^1 tipinden yüzeyler 1. tip zamansal helikoidin ve 2. tip zamansal helikoidin açık bir parçasıdır. M_+^3 tipinden yüzey ise 3. tip zamansal helikoidin açık bir parçasıdır. Teoremin tersinin ispatı 3.2. bölümde verilen örneklerden açıkça görülür.

2. Durum: M, M_+^2 ya da M_-^2 tipinden silindirik olmayan doğrusal bir yüzey olsun. M doğrusal yüzeyi

$$\langle \beta, \beta \rangle = 1, \quad \langle \alpha', \beta \rangle = 0, \quad \langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon_1 (= \pm 1)$$

ve β' null olacak şekilde

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + t\beta(s)$$

ile ifade edilebilir. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_s = \alpha' + t\beta', \quad x_t = \beta$$

şeklindedir. Yüzey üzerinde

$$q = \|x_s\|^2 = \varepsilon_4 \langle x_s, x_s \rangle, \quad u = \langle \alpha', \beta' \rangle$$

differansiyellenebilir fonksiyonları tanımlansın, burada $\varepsilon_4 (= \pm 1)$, x_s vektörünün işaretidir. Yani,

$$\begin{aligned}\langle x_s, x_s \rangle =& \langle \alpha' + t\beta', \alpha' + t\beta' \rangle \\ =& t^2 \langle \beta', \beta' \rangle + 2t \langle \alpha', \beta' \rangle + \langle \alpha', \alpha' \rangle \\ =& 2tu + \varepsilon_1\end{aligned}$$

ve

$$q = \varepsilon_4 (2tu + \varepsilon_1)$$

olur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = \varepsilon_4 q$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 1$ olarak bulunur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = \varepsilon_4 q$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = \dfrac{\varepsilon_4}{q}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$ olur. Yüzeyin x_s ve x_t koordinat vektörlerinin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (\alpha' + t\beta') \times \beta = \alpha' \times \beta + t\beta' \times \beta = A + tB$$

elde edilir, burada $A = \alpha' \times \beta$ ve $B = \beta' \times \beta$ dir. Buna göre

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = \langle x_s, x_t \rangle^2 - \langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle = -\varepsilon_4 q$$

ve $\varepsilon = -\varepsilon_4$ olduğundan $\|x_s \times x_t\| = \sqrt{q}$ bulunur. Dolayısıyla, yüzeyin Gauss tasviri

$$G = q^{-1/2}(A + tB)$$

şeklinde bulunur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\varepsilon_4 \Big(-\frac{1}{2q^2} \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \Big) - \Big(-\frac{1}{2q} \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big)$$

elde edilir. Bir önceki duruma benzer hesaplamalarla ΔG ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\Delta G =& \big\{-2u^2q^{-2}+u''tq^{-2}-4\varepsilon_4u'^2t^2q^{-3}\big\}G\\ &+q^{-5/2}\big\{\varepsilon_4uBq+3u't(A'+tB')-\varepsilon_4(A''+tB'')q\big\}. \qquad (\mathbf{3.3.35})\end{aligned}$$

Eğer $a=a(s)$ fonksiyonu ve $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}(s)$ vektörü

$$a=-2u^2q^{-2}+u''tq^{-2}-4\varepsilon_4u'^2t^2q^{-3},$$

$$\overrightarrow{b}=q^{-5/2}\big\{\varepsilon_4uBq+3u't(A'+tB')-\varepsilon_4(A''+tB'')q\big\}$$

şeklinde alınırsa, (**3.3.35**) ifadesi $\Delta G=aG+\overrightarrow{b}$ olur. Dolayısıyla, (**3.3.1**) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\Delta G-\varepsilon\langle\Delta G,G\rangle G &= aG+\overrightarrow{b}-\varepsilon(a\varepsilon+\langle b,G\rangle)G\\ &=\overrightarrow{b}-\varepsilon\langle b,G\rangle G=0\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}&q^{-5/2}\Big\{\varepsilon_4uBq+3u't(A'+tB')-\varepsilon_4(A''+tB'')q\Big\}\\ &-\varepsilon q^{-7/2}(A+tB)\Big\{\varepsilon_4uq(\langle A,B\rangle+t\langle B,B\rangle)+3u't(\langle A',A\rangle+t\langle A',B\rangle\\ &+t\langle A,B'\rangle+t^2\langle B',B\rangle)-\varepsilon_4q(\langle A'',A\rangle+t\langle A'',B\rangle+t\langle A,B''\rangle\\ &+t^2\langle B,B''\rangle)\Big\}=0 \qquad (\mathbf{3.3.36})\end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıdaki büyüklükler hesaplamalarda kullanılacaktır:

$$\langle A,A\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle A,B\rangle=-u,\quad \langle B,B\rangle=0,$$

$$\langle A',A\rangle=0,\quad \langle B',B\rangle=0,\quad \langle A',B\rangle+\langle A,B'\rangle=-u'.$$

Eğer (**3.3.36**) eşitliğinin her iki tarafı $q^{7/2}$ ile çarpılıp, yukarıdaki iç çarpımlar ve q fonksiyonu yerine koyulursa

$$\begin{aligned}&\varepsilon_4uB(2ut+\varepsilon_1)^2+3\varepsilon_4u't(2ut+\varepsilon_1)(A'+tB')-\varepsilon_4(2ut+\varepsilon_1)^2(A''+tB'')\\ &+\varepsilon(A+tB)\Big\{u^2(2ut+\varepsilon_1)+3u'^2t^2+(2ut+\varepsilon_1)(\langle A'',A\rangle+t\langle A'',B\rangle\\ &+t\langle A,B''\rangle+t^2\langle B,B''\rangle)\Big\}=0\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade t değişkeninin derecelerine göre düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
&t^4\Big[2\varepsilon u\langle B'',B\rangle B\Big]+\\
&t^3\Big[2\varepsilon u\langle B'',B\rangle A-4\varepsilon_4 u^2 B''+6\varepsilon_4 uu'B'+\varepsilon(3u'^2+2u\langle A'',B\rangle+2u\langle A,B''\rangle\\
&\quad+\varepsilon_1\langle B,B''\rangle)B\Big]+\\
&t^2\Big[-4\varepsilon_4 u^2 A''+6\varepsilon_4 uu'A'+\varepsilon(3u'^2+2u\langle A'',B\rangle+2u\langle A,B''\rangle+\varepsilon_1\langle B,B''\rangle)A\\
&\quad-4\varepsilon_1\varepsilon_4 uB''+3\varepsilon_1\varepsilon_4 u'B'+(4\varepsilon_4 u^3+2\varepsilon u^3+2\varepsilon u\langle A,A''\rangle+\varepsilon\varepsilon_1\langle A'',B\rangle\\
&\quad+\varepsilon\varepsilon_1\langle A,B''\rangle)B\Big]+\\
&t\Big[-4\varepsilon_1\varepsilon_4 uA''+3\varepsilon_1\varepsilon_4 u'A'+\varepsilon(2u^3+2u\langle A,A''\rangle+\varepsilon_1\langle A'',B\rangle+\varepsilon_1\langle A,B''\rangle)A\\
&\quad-\varepsilon_4 B''+(4\varepsilon_1\varepsilon_4 u^2+\varepsilon\varepsilon_1 u^2+\varepsilon\varepsilon_1\langle A,A''\rangle)B\Big]+\\
&\Big[-\varepsilon_4 A''+\varepsilon\varepsilon_1(u^2+\langle A,A''\rangle)A+\varepsilon_4 uB\Big]=0
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da katsayıları s'e bağlı olan t değişkenine göre bir polinomdur. Bu polinomun katsayıları sıfır olmalıdır. Dolayısıyla

$$\varepsilon u\langle B'',B\rangle B=0, \qquad \textbf{(3.3.37)}$$

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon u\langle B'',B\rangle A-4\varepsilon_4 u^2 B''+6\varepsilon_4 uu'B'+\varepsilon(3u'^2+2u\langle A'',B\rangle+2u\langle A,B''\rangle\\
&+\varepsilon_1\langle B,B''\rangle)B=0, \qquad \textbf{(3.3.38)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\varepsilon_4 u^2 A''-6\varepsilon_4 uu'A'-\varepsilon(3u'^2+2u\langle A'',B\rangle+2u\langle A,B''\rangle+\varepsilon_1\langle B,B''\rangle)A\\
&+4\varepsilon_1\varepsilon_4 uB''-3\varepsilon_1\varepsilon_4 u'B'-(4\varepsilon_4 u^3+2\varepsilon u^3+2\varepsilon u\langle A,A''\rangle+\varepsilon\varepsilon_1\langle A'',B\rangle\\
&+\varepsilon\varepsilon_1\langle A,B''\rangle)B=0, \qquad \textbf{(3.3.39)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&4\varepsilon_1\varepsilon_4 uA''-3\varepsilon_1\varepsilon_4 u'A'-\varepsilon(2u^3+2u\langle A,A''\rangle+\varepsilon_1\langle A'',B\rangle+\varepsilon_1\langle A,B''\rangle)A\\
&+\varepsilon_4 B''-(4\varepsilon_1\varepsilon_4 u^2+\varepsilon\varepsilon_1 u^2+\varepsilon\varepsilon_1\langle A,A''\rangle)B=0, \qquad \textbf{(3.3.40)}
\end{aligned}
$$

$$A''-\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_4(u^2+\langle A,A''\rangle)A-uB=0 \qquad \textbf{(3.3.41)}$$

denklemleri elde edilir. [10] nolu makalede (**3.3.40**) ile belirtilen denklemde A'''lü ifadenin u çarpanı yazılmamıştır. Burada düzeltilmiş hali yazılıdır.

$B=\beta'\times\beta$ vektörünün bir $s\in I$ noktasında sıfır olduğu kabul edilsin. O halde, β ve β' vektörleri paraleldir, yani $\beta'=\lambda\beta$ olacak şekilde bir λ sayısı vardır.

Buna göre $\langle \beta', \beta' \rangle = \langle \lambda\beta, \lambda\beta \rangle = \lambda^2 \langle \beta, \beta \rangle = \lambda^2 > 0$ olur. Bu da β' vektörünün null olması ile çelişir. Böylece B vektörünün sıfırdan farklı bir vektör olduğu sonucuna ulaşılır.

Şimdi $\mathcal{U} = \{p \in M \mid \langle B, B'' \rangle(p) \neq 0\}$ kümesi göz önüne alınsın. Eğer $\mathcal{U}$ boş kümeden farklıysa, (**3.3.37**) denkleminden $\mathcal{U}$ kümesi üzerinde $u = 0$ ve (**3.3.38**) denkleminden ise $\langle B, B'' \rangle B = 0$ elde edilir. Bu da $\mathcal{U}$ kümesinin boş kümeden farklı olması ile çelişir. Yani $\mathcal{U}$ boş kümedir. Böylece $\langle B, B'' \rangle = 0$ elde edilir.

Şimdi bu ifade kullanılarak (**3.3.38**), (**3.3.39**), (**3.3.40**) ve (**3.3.41**) denklemlerindeki A'', B'', A' ve B' ifadeleri yok edilirse

$$2\varepsilon_1 u u'^2 A - u'^2 B = 0 \qquad \textbf{(3.3.42)}$$

bulunur. I aralığına ait bazı s değerleri için A ve B vektörlerinin lineer bağımlı olduğu kabul edilsin, yani $A = \kappa_1 B$ olacak şekilde bir κ_1 sabiti vardır. Buradan $\alpha' \times \beta = \kappa_1 \beta' \times \beta$ ifadesi $(\alpha' - \kappa_1 \beta') \times \beta = 0$ şeklinde yazılırsa

$$\alpha' - \kappa_1 \beta' = \kappa_2 \beta$$

olacak şekilde bir κ_2 sabiti vardır. Bu eşitliğin β ile iç çarpımı alınırsa, α ve β'nın özellikleri kullanılırsa

$$\langle \alpha', \beta \rangle - \kappa_1 \langle \beta', \beta \rangle = \kappa_2 \langle \beta, \beta \rangle = \kappa_2,$$

$$\kappa_2 = 0, \quad \alpha' = \kappa_1 \beta'$$

ve

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle \kappa_1 \beta', \kappa_1 \beta' \rangle = \kappa_1^2 \langle \beta', \beta' \rangle = 0$$

olur, yani α' null vektördür; bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla, A ve B vektörleri lineer bağımsızdır ve (**3.3.42**) denkleminden

$$2\varepsilon_1 u u'^2 = 0, \quad u'^2 = 0$$

elde edilir, yani $u' = 0$'dır. $B = \beta' \times \beta$ vektörünün türevi alınırsa

$$B' = \beta'' \times \beta, \quad B'' = \beta''' \times \beta + \beta'' \times \beta'$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned}\langle B, B'\rangle &= \langle \beta' \times \beta, \beta'' \times \beta\rangle \\ &= \langle \beta', \beta\rangle\langle \beta, \beta''\rangle - \langle \beta', \beta''\rangle\langle \beta, \beta\rangle \\ &= -\langle \beta', \beta''\rangle\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\langle B, B''\rangle &= \langle \beta' \times \beta, \beta''' \times \beta + \beta'' \times \beta'\rangle \\ &= \langle \beta' \times \beta, \beta''' \times \beta\rangle + \langle \beta' \times \beta, \beta'' \times \beta'\rangle \\ &= -\langle \beta', \beta'''\rangle\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\langle B, B'\rangle = \langle B, B''\rangle = 0$ olduğu kullanılarak

$$\langle \beta', \beta''\rangle = \langle \beta', \beta'''\rangle = 0$$

elde edilir. Bunlar kullanılarak $\langle \beta', \beta''\rangle = 0$ ifadesinin türevinden $\langle \beta'', \beta''\rangle = 0$ olduğu görülür, yani, β'' null ya da sıfır vektördür.

Şimdi β'' vektörünün null olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 2.1. ve $\langle \beta', \beta''\rangle = 0$ ifadesinden $\beta'' = \kappa\beta'$ olacak şekilde sıfırdan farklı differansiyellenebilir bir $\kappa = \kappa(s)$ fonksiyonu vardır ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ olmak üzere $i = 1, 2, 3$ için $\beta_i'' = \kappa\beta_i'$ diferansiyel denklemleri yazılır. Bu denklemlerin çözümünden $\beta_i = F(s)d_i$, yani, $\beta = F(s)\mathbb{D}$ olacak şekilde pozitif differansiyellenebilir bir $F(s)$ fonksiyonu ve $\mathbb{E}_1^3$ uzayında $\mathbb{D} = (d_1, d_2, d_3)$ sabit bir null vektörü vardır. Dolayısıyla $\langle \beta, \beta\rangle = F^2\langle \mathbb{D}, \mathbb{D}\rangle = 0$ olup, β vektörünün zamansal olması ile çelişir. O halde, β'' sıfır vektördür.

Bir önceki durumda olduğu gibi, α', β, β' ve α'' vektörleri arasındaki ilişki incelenirse α'' ve β vektörlerinin paralel olduğu bulunur. Bir önceki durumda yapılanlara benzer hesaplarla, α ve β'nın özellikleri göz önüne alındığında yüzeyin şekil operatörü

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_4 q^{-3/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta\rangle \\ -q^{-1/2}\langle \alpha' \times \beta', \beta\rangle & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan da $H = 0$ olur. [12] nolu makalede minimal bir yüzeyin sınıflandırma teoremi kullanılarak M_+^2 tipinden yüzeyler 2. tip uzaysal Enneper yüzeylerin eşleniğinin açık bir parçasıdır. Benzer şekilde, M_-^2 tipinden yüzeyler 2. tip zamansal Enneper yüzeylerin eşleniğinin açık bir parçasıdır. Teoremin tersinin ispatı 3.2. bölümde verilen örneklerden açıkça görülür.

Teorem 3.3.3. M, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir null scroll olsun. O halde, M yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır:

1. bir Minkowski düzlemi,
2. bir düz B-scroll eğer B' null ise,
3. bir düz olmayan B-scroll eğer B' null değilse.

İspat. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında α taban eğrisi null bir eğri ve $B = B(s)$, α boyunca null bir vektör alanı olsun. M null scrollu

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0, \quad \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle \alpha', B \rangle = 1$$

olacak şekilde

$$x = x(s,t) = \alpha(s) + tB(s)$$

ile ifade edilir. Yüzeyin

$$x_s = \alpha' + tB', \quad x_t = B$$

koordinat vektörleri yüzey üzerinde bir baz alanı belirler. Yüzey üzerinde tekrar q, u ve v differansiyellenebilir fonksiyonları tanımlansın:

$$q = \|x_s\|^2 = \langle x_s, x_s \rangle, \quad u = \langle \alpha', B' \rangle, \quad v = \langle B', B' \rangle.$$

Doğrudan hesapla $q = t^2 v + 2tu$ olduğu görülür. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = t^2 v + 2tu$, $g_{12} = g_{21} = 1$, $g_{22} = 0$ olarak bulunur. Buna göre, $\mathcal{G} = \det g = -1$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = 0$, $g^{12} = g^{21} = 1$, $g^{22} = -t^2 v - 2tu$ olur. Yüzeyin x_s ve x_t vektörlerinin vektörel çarpımından

$$x_s \times x_t = (\alpha' + tB') \times B = \alpha' \times B + tB' \times B = C + tD$$

elde edilir, burada $C = \alpha' \times B$ ve $D = B' \times B$ dir. Yüzey üzerinde

$$\langle x_s \times x_t, x_s \times x_t \rangle = \langle x_s, x_t \rangle^2 - \langle x_s, x_s \rangle \langle x_t, x_t \rangle = 1$$

olduğundan yüzeyin normali uzaysaldır. Dolayısıyla, yüzeyin Gauss tasviri

$$G = C + tD \tag{3.3.43}$$

şeklinde bulunur. Öncekilere benzer şekilde M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -2\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

elde edilir. Bu operatör G Gauss tasvirine uygulanırsa

$$\Delta G = -2D' + 2(vt + u)D \tag{3.3.44}$$

bulunur. M yüzeyinin noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğu kabul edilsin. O halde, (**3.3.43**) ifadesi kullanılarak

$$\Delta G = FG = F(C + tD) = FC + FtD$$

ve (**3.3.44**) ifadesi de göz önüne alınırsa

$$2D' + (Ft - 2u - 2vt)D + FC = 0$$

olur ve bu ifadenin sırasıyla C' ve D' ile iç çarpımları alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$v' + Fvt - 2v^2 t = 0 \tag{3.3.45}$$

ve

$$2v^2 - Fv = 0 \tag{3.3.46}$$

denklemleri bulunur.

Şimdi $\mathcal{U} = \{p \in M \mid v(p) \neq 0\}$ açık kümesi göz önüne alınsın. $\mathcal{U}$ kümesinin boş kümeden farklı olduğu kabul edilsin. O halde (**3.3.46**) ifadesi kullanılarak $\mathcal{U}$ kümesinin bir $\mathcal{C}$ bileşeni üzerinde $F = 2v$ bulunur ve (**3.3.45**) ifadesi kullanılarak v'nin sabit olduğu görülür. Sonuç olarak, süreklilik göz önüne alınırsa $\mathcal{C}$, M

uzayının tümünden ibaret olmalıdır. Bu durumda $\mathbb{E}_1^3$ uzayında

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \langle B, B \rangle = 0, \quad \langle \alpha', B \rangle = 1, \quad \langle \alpha', C \rangle = \langle B, C \rangle = 0, \quad \langle C, C \rangle = 1,$$
$$\alpha'' = -u\alpha' + \langle \alpha'', \alpha' \times B \rangle C,$$
$$B' = uB + \langle \alpha' \times B, B' \rangle C,$$
$$C' = -\langle \alpha' \times B, B' \rangle \alpha' - \langle \alpha'', \alpha' \times B \rangle B$$

olacak şekilde $\{\alpha', B, C\}$ null çatısı vardır. Eğer v ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} v &= \langle B', B' \rangle = u\langle B, B' \rangle + \langle \alpha' \times B, B' \rangle \langle C, B' \rangle \\ &= \langle \alpha' \times B, B' \rangle^2 \end{aligned}$$

bulunur ve v'nin sabit olmasından dolayı $\langle \alpha' \times B, B' \rangle$ sabittir. Ayrıca, $u = 0$ olacak şekilde α' ifadesinin bir değişken dönüşümü vardır [13]. Böylece M bir B-scroll'dur.
[10] nolu makalede $2v = \langle \alpha' \times B, B' \rangle$ yazılmıştır. Burada düzeltilmiş hali yazılıdır.

İlk olarak $v = 0$ olduğu kabul edilsin. O halde, B' sıfır ya da null bir vektördür. B' vektörünün sıfır vektör olduğu kabul edilsin, yani B sabit bir vektördür. Dolayısıyla $D = B' \times B = 0$ ve (**3.3.44**)'den $\Delta G = 0$ olur. Sonuç olarak, M bir Minkowski düzlemidir.

B' vektörünün null olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 2.1.'den B' ve B vektörleri lineer bağımlıdır. Dolayısıyla $D = B' \times B = 0$ ve (**3.3.44**) denkleminden $\Delta G = 0$ bulunur.
M yüzeyinin H ortalama eğriliğinin ve K Gauss eğriliğinin bulunması için yüzeyin şekil operatörü hesaplansın. Yüzeyin $\{x_s, x_t\}$ teğet bazına göre

$$k(s)B = a_{11}x_s + a_{21}x_t$$

yazılır ve

$$a_{11} = 0, \quad a_{21} = k(s)$$

bulunur, burada $k(s) = \langle \alpha'', \alpha' \times B \rangle$ dir. Benzer şekilde

$$a_{12}x_s + a_{22}x_t = 0$$

yazılır ve

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0$$

bulunur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k(s) & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan da $H = 0$ ve $K = 0$ olur. O halde, M bir düz B-scroll'dur.
Şimdi $v \neq 0$ olduğu kabul edilsin. O halde, B' null bir vektör değildir. Yüzeyin $\{x_s, x_t\}$ teğet bazına göre

$$\sqrt{v}\alpha' + k(s)B + tvC = a_{11}x_s + a_{21}x_t$$

yazılır ve

$$a_{11} = \sqrt{v}, \quad a_{21} = k(s)$$

bulunur, burada $k(s) = \langle \alpha'', \alpha' \times B \rangle$ dir. Benzer şekilde

$$-D = a_{12}x_s + a_{22}x_t$$

yazılır ve

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = \sqrt{v}$$

bulunur. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{v} & 0 \\ k(s) & \sqrt{v} \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan da $H = \sqrt{v}$ ve $K = v \neq 0$ olur. O halde, M bir düz olmayan B-scroll'dur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.
Teorem 3.3.1., Teorem 3.3.2. ve Teorem 3.3.3.'ün sonuçları birleştirilerek aşağıdaki sınıflandırma teoremleri ifade edilebilir.

Teorem 3.3.4. M, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında uzaysal doğrusal bir yüzey olsun. Bu durumda yüzeyin Gauss tasvirinin noktasal 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçası olmasıdır:
1. bir Öklid düzlemi,
2. hiperbolik silindir,

3. 1. tip uzaysal helikoid,

4. 2. tip uzaysal helikoid,

5. 2. tip uzaysal Enneper yüzeyin eşleniği.

Teorem 3.3.5. M, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında zamansal doğrusal bir yüzey olsun. Bu durumda yüzeyin Gauss tasvirinin noktasal 1-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçası olmasıdır:

1. bir Minkowski düzlemi,
2. Lorentz çembersel silindir,
3. indeksi 1 olan çembersel silindir,
4. 1. tip zamansal helikoid,
5. 2. tip zamansal helikoid,
6. 3. tip zamansal helikoid,
7. 2. tip zamansal Enneper yüzeylerin eşleniği,
8. bir düz B-scroll eğer B' null ise,
9. bir düz olmayan B-scroll eğer B' null değilse.

4. $\mathbb{E}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYININ NOKTASAL 1-TİPİNDEN GAUSS TASVİRİNE SAHİP DÖNEL YÜZEYLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayının dönel yüzeylerinin tanımı ve sınıflandırılması verilmiş, noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeylerin örnekleri ve genel karekterizasyonunu veren temel teoremler geniş bir şekilde incelenmiştir.

4.1. Dönel Yüzeylerin Sınıflandırılması

I bir açık aralık, $\gamma : I \to \Pi$, $\mathbb{E}_1^3$ uzayının bir Π düzleminde bir düzlem eğri ve l, γ eğrisiyle kesişmeyen Π düzleminde bir doğru olsun. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında dönme ekseni l olan bir M dönel yüzeyi, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında l dönme ekseninin her noktasını sabit bırakan ortogonal dönüşümleri ile oluşturulan, γ eğrisinin yörüngesi olarak tanımlanır. Ayrıca γ eğrisine dönel yüzeyin profil eğrisi denir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında dört çeşit dönel yüzey elde edilir. Eğer l ekseni uzaysal ise uygun bir Lorentz dönüşümüyle l ekseni x_1-ekseni ya da x_2-eksenine taşınabilir ve l ekseni zamansal ise yine uygun bir Lorentz dönüşümüyle l ekseni x_0-eksenine taşınabilir. Böylece, genellik bozulmadan, l null değilse dönme ekseni x_2-ekseni ve x_0-ekseni olarak alınabilir. Eğer eksen null ise bu eksenin, $\mathcal{O}x_0x_1$ düzleminde $(1,1,0)$ vektörüyle oluşturulan bir doğru olduğu kabul edilir.

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında üç farklı tipten dönel yüzey ifade edilir.

I. Tip. Dönme ekseni uzaysal bir doğru olsun. Genellik bozulmadan, γ eğrisinin x_1x_2-düzleminde ya da x_0x_2-düzleminde olduğu kabul edilsin. Sırasıyla γ eğrisi

$$\gamma(u) = (0, f(u), g(u)) \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

ya da

$$\gamma(u) = (f(u), 0, g(u)) \qquad \textbf{(4.1.2)}$$

şeklinde ifade edilir, burada $f = f(u) > 0$ ve $g = g(u)$ I aralığı üzerinde differansiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece M dönel yüzeyi

$$x(u,v) = (f(u)\sinh v, f(u)\cosh v, g(u)) \qquad \textbf{(4.1.3)}$$

ya da

$$x(u,v) = (f(u)\cosh v, f(u)\sinh v, g(u)) \qquad \textbf{(4.1.4)}$$

olarak tanımlanır. Burada dönme eksenini sabit bırakan dönüşüm matrisi

$$\begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir.

II. Tip. Dönme ekseni zamansal bir doğru olsun. Genellik bozulmadan, γ eğrisinin x_0x_1-düzleminde olduğu kabul edilsin. Böylece γ eğrisi

$$\gamma(u) = (g(u), f(u), 0) \qquad \textbf{(4.1.5)}$$

ifade edilir, burada $f = f(u) > 0$ ve $g = g(u)$ I aralığı üzerinde differansiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece M dönel yüzeyi

$$x(u,v) = (g(u), f(u)\cos v, f(u)\sin v) \qquad \textbf{(4.1.6)}$$

olarak tanımlanır. Burada dönme eksenini sabit bırakan dönüşüm matrisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir.

III. Tip. Dönme ekseni null bir doğru olsun, yani, $\mathcal{O}x_0x_1$ düzleminde $(1,1,0)$ vektörüyle oluşturulan bir doğru olsun. M yüzeyi dejenere olmadığından γ eğrisinin x_0x_1-düzleminde olduğu kabul edilebilir ve γ eğrisinin parametrelendirilmesi

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), 0) \tag{4.1.7}$$

olarak verilebilir, burada $f = f(u) > 0$ ve $g = g(u)$ I aralığı üzerinde differansiyellenebilir fonksiyonlardır. Öyle ki $h(u) = f(u) - g(u) \neq 0$. Böylece M dönel yüzeyi

$$x(u,v) = (f(u) + \frac{v^2}{2}h(u), g(u) + \frac{v^2}{2}h(u), vh(u)) \tag{4.1.8}$$

ile parametrelendirilebilir. Burada dönme eksenini sabit bırakan dönüşüm matrisi

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1-\frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir.

Eğer $f(u)$ ve $g(u)$ fonksiyonları polinom ise dönel yüzeye bir polinomsal tipten dönel yüzey; $f(u)$ ve $g(u)$ fonksiyonları rasyonel ise dönel yüzeye bir rasyonel tipten dönel yüzey denir. Kısaca rasyonel tipten bir dönel yüzeye, rasyonel dönel yüzey denir.

Yardımcı Teorem 4.1.1. $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında, M dönel yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip bir dönel yüzey olsun. O halde (**1.1**) ifadesindeki F fonksiyonu sadece profil eğrisinin parametresine bağlıdır ve C vektörü de dönel yüzeyin eksenine paraleldir.

İspat. İspat, eksenlerin ve profil eğrilerinin karakterine göre üç duruma ayrılır.

1. Durum: M yüzeyi, $\mathbb{E}^3_1$ uzayında f ve g türevlenebilir fonksiyonları için (**4.1.3**) ile parametrelendirilen I. tip bir dönel yüzey olsun ve (**4.1.1**) ile verilen γ eğrisinin birim hızlı olduğu (yay uzunluğu parametresine göre parametrelendirildiği) kabul edilsin, yani $|\gamma'| = \sqrt{f'^2 + g'^2} = 1$ olsun. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (f'(u)\sinh v, f'(u)\cosh v, g'(u)), \qquad x_v = (f(u)\cosh v, f(u)\sinh v, 0)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = (g' f \sinh v, g' f \cosh v, -f f')$$

elde edilir ve buradan

$$\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v \rangle = (g' f)^2 + (f f')^2 = f^2 (f'^2 + g'^2) = f^2 > 0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla yüzeyin normali uzaysaldır. Böylece $\|x_u \times x_v\| = f$ olur ve yüzeyin Gauss tasviri

$$G = (g' \sinh v, g' \cosh v, -f') \qquad (\mathbf{4.1.9})$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = -f^2$ olarak yazılır. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = -f^2$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = 1,\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = -\dfrac{1}{f^2}$ olur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{f}\left(f' \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \qquad (\mathbf{4.1.10})$$

elde edilir. $G_u,\ G_{uu},\ G_v,\ G_{vv}$ türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
G_u &= (g'' \sinh v, g'' \cosh v, -f''), \\
G_{uu} &= (g''' \sinh v, g''' \cosh v, -f'''), \\
G_v &= (g' \cosh v, g' \sinh v, 0), \\
G_{vv} &= (g' \sinh v, g' \cosh v, 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu türevler ($\mathbf{4.1.10}$) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\Delta G = -\frac{1}{f}\Big((f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f}) \sinh v, (f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f}) \cosh v, -f'f'' - ff'''\Big) \qquad (\mathbf{4.1.11})$$

olur. M yüzeyi, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğundan ($\mathbf{1}.1$) ifadesi sıfırdan farklı bir F fonksiyonu ve sıfırdan farklı sabit bir $C = (c_1, c_2, c_3)$ vektörü için sağlanır ve ($\mathbf{4.1.9}$) ifadesi kullanılarak

$$\Delta G = F(g' \sinh v + c_1, g' \cosh v + c_2, -f' + c_3)$$

yazılır ve (**4.1.11**) eşitliği kullanılarak $c_1 = c_2 = 0,\ c_3 = c \neq 0$ ve

$$F(u,v)g' = -\frac{1}{f}(f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f}),$$
$$F(u,v)(-f' + c) = \frac{1}{f}(f'f'' + ff''') \qquad (\mathbf{4.1.12})$$

olur, burada $C = (0,0,c)$ vektörü x_2 dönme eksenine paraleldir. Son iki ifade kullanılarak f' ve g' sıfırdan farklı olduğundan F fonksiyonu v değişkenine bağlı değildir. Eğer M yüzeyi (**4.1.4**) ile parametrelendirilse aynı sonuç bulunur.

2. Durum: M yüzeyi, $\mathbb{E}^3_1$ uzayında f ve g düzgün fonksiyonları için (**4.1.6**) ile parametrelendirilen II. tip bir dönel yüzey olsun ve (**4.1.5**) ile verilen γ eğrisinin birim hızlı olduğu kabul edilsin, yani $|\gamma'| = \sqrt{\varepsilon(f'^2 - g'^2)} = 1$ olsun; burada ε, γ' vektörünün işaretini göstermektedir. İlk olarak $\forall\, u \in I$ için

$$f'^2 - g'^2 = 1$$

olduğu kabul edilsin. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (g'(u), f'(u)\cos v, f'(u)\sin v,), \qquad x_v = (0, -f(u)\sin v, f(u)\cos v)$$

uzaysal vektörlerdir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = -(ff', g'f\cos v, g'f\sin v) \qquad (\mathbf{4.1.13})$$

elde edilir ve

$$\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v \rangle = (g'f)^2 - (ff')^2 = f^2(f'^2 - g'^2) = -f^2 < 0$$

dır. Dolayısıyla yüzeyin Gauss tasviri

$$G = -(f', g'\cos v, g'\sin v) \qquad (\mathbf{4.1.14})$$

şeklinde bulunur. Öncekine benzer hesaplarla

$$\Delta G = \frac{1}{f}\big(f'f'' + ff''', (f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f})\cos v, (f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f})\sin v\big) \qquad (\mathbf{4.1.15})$$

elde edilir. M yüzeyi, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğundan (**1.1**) ifadesi sıfırdan farklı bir F fonksiyonu ve sıfırdan farklı sabit bir $C = (c_1, c_2, c_3)$ vektörü için sağlanır ve (**4.1.14**) ifadesi kullanılarak

$$\Delta G = F(-f' + c_1, -g'\cos v + c_2, -g'\sin v + c_3) \qquad (\mathbf{4.1.16})$$

yazılır ve (**4.1.15**) eşitliği kullanılarak $c_2 = c_3 = 0,\ c_1 = c \neq 0$ ve

$$F(u,v)g' = -\frac{1}{f}(f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f}),$$
$$F(u,v)(-f' + c) = \frac{1}{f}(f'f'' + ff''') \qquad \textbf{(4.1.17)}$$

olur, burada $C = (c, 0, 0)$ vektörü x_0 dönme eksenine paraleldir. Son iki ifade kullanılarak f' ve g' sıfırdan farklı olduğundan F fonksiyonu v değişkenine bağlı değildir. Eğer $f'^2 - g'^2 = -1$ olursa, benzer işlemlerle aynı sonuç bulunur.

3. Durum: M yüzeyi, türevlenebilir bir $\gamma(u)$ eğrisinin null bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen III. tip bir dönel yüzey olsun. Genellik bozulmadan, orijin ve $(1, 1, 0)$ vektörüyle tanımlanan dönme ekseni seçilebilir. M yüzeyinin parametrelendirilmesi

$$x(u,v) = (f(u) + \frac{v^2}{2}h(u), g(u) + \frac{v^2}{2}h(u), h(u)v)$$

şeklinde verilir, burada $h(u) = f(u) - g(u) \neq 0$ dır. M dejenere olmadığından $-f'^2 + g'^2$ sıfırdan farklıdır ve $\forall\, u \in I$ için $h'(u) = f'(u) - g'(u) \neq 0$ dır. Parametre $h(u) = -2u$ olacak şekilde alınabilir. Ayrıca $k(u) = f(u) + u$ olsun. O halde, f ve g fonksiyonları

$$f(u) = k(u) - u, \quad g(u) = k(u) + u$$

olur. Böylece M yüzeyinin parametrelendirilmesi

$$x(u,v) = (k(u) - u - uv^2, k(u) + u - uv^2, -2uv)$$

şeklinde olur. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (k' - 1 - v^2, k' + 1 - v^2, -2v), \qquad x_v = (-2uv, -2uv, -2u)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = (2uk' + 2u + 2uv^2, 2uk' - 2u + 2uv^2, 4uv)$$

elde edilir. Şimdi $u > 0$ ve $k'(u) > 0$ için yüzeyin normali zamansal olduğundan

$$\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v \rangle = -16u^2k' < 0$$

dır. Böylece $\|x_u \times x_v\| = 4u\sqrt{k'}$ bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = 4k',\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = 4u^2$ olur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = 16k'u^2$

ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = \dfrac{1}{4k'}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \dfrac{1}{4u^2}$ bulunur. M yüzeyinin üzerindeki $\langle .,. \rangle$ indirgenmiş metrik dejenere olmadığından $\det g = 16k'u^2 \neq 0$ olur, yani $k'u$ her zaman sıfırdan farklıdır. Böylece G Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{2\sqrt{k'}}(k' + 1 + v^2, k' - 1 + v^2, 2v) \tag{4.1.18}$$

olur. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{4u\sqrt{k'}}\Big(\frac{2k' - uk''}{2k'\sqrt{k'}}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{u}{\sqrt{k'}}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\sqrt{k'}}{u}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big) \tag{4.1.19}$$

elde edilir. G_u, G_{uu}, G_v, G_{vv} türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial u} &= -\frac{k''}{4(k')^{3/2}}(v^2 + 1, v^2 - 1, 2v) + \frac{k''}{4\sqrt{k'}}(1, 1, 0),\\
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} &= -\frac{2k'k''' - 3(k'')^2}{8(k')^{5/2}}(v^2 + 1, v^2 - 1, 2v) + \frac{2k'k''' - (k'')^2}{8(k')^{3/2}}(1, 1, 0),\\
\frac{\partial G}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{k'}}(v, v, 1), \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{1}{\sqrt{k'}}(1, 1, 0)
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

bulunur. Bu türevler (**4.1.19**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\Delta G = &\frac{1}{4u\sqrt{k'}}\Big(\frac{k'k'' + uk'k''' - 2u(k'')^2}{4(k')^3}(v^2 + 1)\\
&- \frac{k'k''u - u^2(k'')^2 + k'k'''u^2 + 4(k')^2}{4u(k')^2},\\
&\frac{k'k'' + uk'k''' - 2u(k'')^2}{4(k')^3}(v^2 - 1)\\
&- \frac{k'k''u - u^2(k'')^2 + k'k'''u^2 + 4(k')^2}{4u(k')^2},\\
&2v(\frac{k'k'' + uk'k''' - 2u(k'')^2}{4(k')^3})\Big)
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

olur. M yüzeyi, ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğundan (**1.1**) ifadesi sıfırdan farklı bir F fonksiyonu ve sıfırdan farklı sabit bir $C = (c_1, c_2, c_3)$ vektörü için sağlanır ve (**4.1.18**) ifadesi kullanılarak

$$\Delta G = F\Big(\frac{k' + 1 + v^2}{2\sqrt{k'}} + c_1, \frac{k' - 1 + v^2}{2\sqrt{k'}} + c_2, \frac{v}{\sqrt{k'}} + c_3\Big) \tag{4.1.22}$$

yazılır. Sonra (**4.1.22**) ifadesinin bileşenleri ayrı ayrı yazılır ve birinci bileşenden ikinci bileşen çıkarılırsa

$$\frac{k'k'' + uk'k''' - 2u(k'')^2}{8u(k')^{7/2}} = F(u, v)(\frac{1}{\sqrt{k'}} + c_1 - c_2) \tag{4.1.23}$$

olur. İşlemlerin basitliği için

$$A(u)=\frac{k'k''+uk'k'''-2u(k'')^2}{8u(k')^{7/2}}$$

olsun. O halde (**4.1.23**) ve ΔG ifadesinin üçüncü bileşeni, sırasıyla

$$\begin{aligned} F(u,v)(\frac{1}{\sqrt{k'}}+c_1-c_2)&=A(u) \\ F(u,v)(\frac{v}{\sqrt{k'}}+c_3)&=vA(u) \end{aligned} \qquad (\mathbf{4.1.24})$$

olarak yazılır. Böylece $c_1=c_2=c$ ve $c_3=0$ olur, burada $C=(c,c,0)$ vektörü, $(1,1,0)$ vektörünün belirlediği dönme eksenine paraleldir ve F fonksiyonu sadece u değişkenine bağlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. Dönel Yüzey Örnekleri

Bu alt bölümde, birinci çeşit ve ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzey örnekleri incelenecektir.

Örnek 4.2.1. (Hiperbolik Silindir) Bir $a>0$ sabiti için

$$x(u,v)=(a\sinh v,a\cosh v,u)$$

ile parametrelendirilen bir hiperbolik silindir ele alınsın. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u=(0,0,1),\quad x_v=(a\cosh v,a\sinh v,0)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u\times x_v=(a\sinh v,a\cosh v,0)$$

elde edilir ve

$$\langle x_u\times x_v,x_u\times x_v\rangle=a^2>0$$

dır. Böylece $\|x_u\times x_v\|=a$ olur. Dolayısıyla hiperbolik silindirin Gauss tasviri

$$G=(\sinh v,\cosh v,0)$$

şeklinde bulunur. Bu yüzeyin Laplace operatörü hesaplandığında

$$\Delta=-\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2} \qquad (\mathbf{4.2.1})$$

elde edilir. $G_u,\ G_{uu},\ G_v,\ G_{vv}$ türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = (\cosh v, \sinh v, 0), \quad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = (\sinh v, \cosh v, 0)$$

bulunur. Bu türevler (**4.2.1**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{1}{a^2}(\sinh v, \cosh v, 0) \\ &= \frac{1}{a^2} G \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu gösterir, ayrıca Gauss tasviri 1-tipindendir.

Örnek 4.2.2. (Dik Koni) Bir dik koni $u > 0$ ve bir $a > 1$ sabiti için

$$x(u, v) = (au, u\cos v, u\sin v)$$

şeklinde parametrelendirilir. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (a, \cos v, \sin v), \quad x_v = (0, -u\sin v, u\cos v)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = -(u, au\cos v, au\sin v)$$

elde edilir ve

$$\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v \rangle = u^2(a^2 - 1) > 0$$

dır. Böylece $\|x_u \times x_v\| = u\sqrt{a^2-1}$ olur. Dolayısıyla dik koninin Gauss tasviri

$$G = -\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}(1, a\cos v, a\sin v)$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = \frac{1}{u^2(a^2-1)}\left(u\frac{\partial}{\partial u} + u^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + (1-a^2)\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) \qquad \textbf{(4.2.2)}$$

elde edilir. $G_u,\ G_{uu},\ G_v,\ G_{vv}$ türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(0, \sin v, -\cos v), \quad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(0, \cos v, \sin v)$$

elde edilir. Bu türevler (**4.2.2**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\Delta G &= -\frac{a}{u^2\sqrt{a^2-1}}\,(0,\cos v,\sin v)\\ &= -\frac{1}{u^2\sqrt{a^2-1}}\,(1,a\cos v,a\sin v)+\frac{1}{u^2\sqrt{a^2-1}}\,(1,0,0)\\ &= \frac{1}{u^2}\left(G+\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\,(1,0,0)\right)\end{aligned}$$

bulunur. Bu da, G Gauss tasvirinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğunu gösterir.

Örnek 4.2.3. (Hiperbolik Koni) Bir $a \neq 0$ sabiti için

$$x(u,v) = (u\sinh v, u\cosh v, au)$$

ile parametrelendirilen hiperbolik koni ele alınsın. Benzer işlemlerle hiperbolik koni için

$$G = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\,(a\sinh v, a\cosh v, -1)$$

ve

$$\Delta G = \frac{1}{u^2}\left(G+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\,(0,0,1)\right)$$

bulunur. Yani, yüzeyin G Gauss tasviri ikinci çeşit noktasal 1-tipindendir.

Örnek 4.2.4. (İkinci tip Enneper yüzeyi [14]) İkinci tip Enneper yüzeyi bir $a \neq 0$ sabiti için

$$x(u,v) = a\left(\frac{1}{3}u^3-u-uv^2, \frac{1}{3}u^3+u-uv^2, -2uv\right)$$

ile parametrelendirilir. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = a(u^2-1-v^2, u^2+1-v^2, -2v), \quad x_v = -2ua(v,v,1)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = 2a^2u(u^2+v^2+1, u^2+v^2-1, 2v)$$

elde edilir ve

$$\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v\rangle = -16a^4u^4 < 0$$

dır. Böylece $\|x_u \times x_v\| = 4a^2u^2$ bulunur. Dolayısıyla ikinci tip Enneper yüzeyin

Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{2u}\,(u^2 + v^2 + 1, u^2 + v^2 - 1, 2v)$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = 4a^2u^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 4a^2u^2$ şeklindedir. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = 16a^4u^4$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = \frac{1}{4a^2u^2}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = \frac{1}{4a^2u^2}$ olur. Yüzeyin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{4a^2u^2}\,(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}) \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

elde edilir. G_u, G_{uu}, G_v, G_{vv} türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{1}{2u^2}(u^2 - v^2 - 1, u^2 - v^2 + 1, -2v),\\
\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} &= \frac{1}{u^3}(v^2 + 1, v^2 - 1, 2v),\\
\frac{\partial G}{\partial v} &= \frac{1}{u}\,(v, v, 1), \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = \frac{1}{u}\,(1, 1, 0)
\end{aligned}$$

bulunur ve bu türevler (**4.2.3**) ifadesinde yerine yazıldığında $u > 0$ için

$$\begin{aligned}
\Delta G &= -\frac{1}{4a^2u^5}\,(u^2 + v^2 + 1, u^2 + v^2 - 1, 2v)\\
&= -\frac{1}{2a^2u^4}\,G
\end{aligned}$$

olur. Böylece G Gauss tasvirinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğu görülür.

4.3. $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski Uzayının Birinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Dönel Yüzeyleri

Bu kısımda birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip dönel yüzeyleri karakterize eden ve sınıflandıran teoremler ispatlanıyor.

Teorem 4.3.1. *M, 3-boyutlu Minkowski uzayında dönel bir yüzey olsun. M yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmasıdır.*

İspat. M yüzeyi birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olsun.

1. Durum: M yüzeyi (**4.1.3**) ifadesi ile verilen I. tip bir dönel yüzey olsun. O halde (**4.1.12**) ifadesinde $c = 0$ alınarak

$$F(u)g' = -\frac{1}{f}\,(f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f}),$$
$$F(u)f' = -\frac{1}{f}\,(f'f'' + ff''') \qquad (\mathbf{4.3.1})$$

denklem sistemi elde edilir ve $f'^2 + g'^2 = 1$ olduğundan $t = t(u)$ için

$$f'(u) = \cos t(u), \quad g'(u) = \sin t(u)$$

alınabilir. Şimdi

$$f'' = -t'\sin t(u), \quad f''' = -t''\sin t(u) - t'^2\cos t(u),$$

$$g'' = t'\cos t(u), \quad g''' = t''\cos t(u) - t'^2\sin t(u)$$

türevleri (**4.3.1**) denklem sisteminde yerine koyulup düzenlenirse

$$-\frac{\sin t\cos t}{f^2} + \frac{t'\cos t}{f} + t'' = 0$$

olur. Buradan $\dfrac{\sin t}{f} + t'$ ifadesinin türevi $-\dfrac{\sin t\cos t}{f^2} + \dfrac{t'\cos t}{f} + t'' = 0$ olduğundan $\dfrac{\sin t}{f} + t'$ ifadesinin sabit olduğu görülür.

Yüzeyin A şekil operatörü hesaplandığında

$$A = \begin{pmatrix} f''g' - f'g'' & 0 \\ 0 & -\frac{g'}{f} \end{pmatrix}$$

bulunur ve dolayısıyla $H = \dfrac{1}{2}\,(f''g' - f'g'' - \dfrac{g'}{f})$ olur. İlgili türevler yerine yazılıp düzenlenirse

$$H = -\frac{1}{2}\,(\frac{\sin t}{f} + t')$$

olur ve H ortalama eğriliği sabit bulunur.

M yüzeyi (**4.1.4**) ifadesi ile verilen I. tip bir dönel yüzey ise benzer işlemlerle aynı sonuç bulunur.

2. Durum: M yüzeyi (**4.1.6**) ifadesi ile verilen II. tip bir dönel yüzey olsun, burada $f'^2 - g'^2 = 1$ dir. O halde (**4.1.17**) ifadesinde $c = 0$ alınarak

$$F(u)g' = -\frac{1}{f}\,(f'g'' + fg''' - \frac{g'}{f}),$$
$$F(u)f' = -\frac{1}{f}\,(f'f'' + ff''') \qquad (\mathbf{4.3.2})$$

denklem sistemi elde edilir ve $t = t(u)$ için

$$f'(u) = \cosh t(u), \quad g'(u) = \sinh t(u)$$

alınabilir. Şimdi

$$f'' = t'\sinh t(u), \quad f''' = t''\sinh t(u) + t'^2\cosh t(u)$$

$$g'' = t'\cosh t(u), \quad g''' = t''\cosh t(u) + t'^2\sinh t(u)$$

türevleri (**4.3.2**) denklem sisteminde yerine koyulup düzenlenirse

$$t'' + \frac{t'\cosh t}{f} - \frac{\sinh t\cosh t}{f^2} = 0$$

olur. Burada $\frac{\sinh t}{f} + t'$ ifadesinin türevi $t'' + \frac{t'\cosh t}{f} - \frac{\sinh t\cosh t}{f^2} = 0$ olduğundan $\frac{\sinh t}{f} + t'$ ifadesinin sabit olduğu görülür.

Yüzeyin A şekil operatörü hesaplandığında

$$A = \begin{pmatrix} f'g'' - f''g' & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f} \end{pmatrix}$$

bulunur ve $H = \frac{1}{2}\,(f'g'' - f''g' + \frac{g'}{f})$ olur. İlgili türevler yerine yazılır ve düzenlenirse

$$H = \frac{1}{2}\,(\frac{\sinh t}{f} + t')$$

olur ve H ortalama eğriliği sabit bulunur.

Ayrıca $f'^2 - g'^2 = -1$ durumunda ise benzer işlemlerle aynı sonuç elde edilebilir.

3. Durum: M yüzeyi

$$x(u,v) = (f(u) + \frac{v^2}{2}\,h(u), g(u) + \frac{v^2}{2}\,h(u), h(u)v)$$

ile parametrelendirilen III. tip bir dönel yüzey olsun, burada $h(u) = f(u) - g(u) \neq 0$ dır. Şimdi $f'^2 - g'^2 = -1$ olduğu kabul edilsin. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (f' + \frac{v^2}{2}\,h', g' + \frac{v^2}{2}\,h', h'v), \qquad x_v = (vh, vh, h)$$

şeklindedir. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = (\frac{1}{2}v^2hh' - g'h, \frac{1}{2}v^2hh' - f'h, vhh')$$

elde edilir ve

$$\langle x_u \times x_v, x_u \times x_v \rangle = -h^2 < 0$$

dır. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = h^2$ olarak bulunur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = h^2$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = 1,\ g^{12} = g^{21} = 0,\ g^{22} = \dfrac{1}{h^2}$ olur. M yüzeyinin Gauss tasviri

$$G = (\frac{1}{2}v^2h' - g', \frac{1}{2}v^2h' - f', vh')$$

olarak hesaplanır. M yüzeyinin Laplace operatörü hesaplanırsa

$$\Delta = -\frac{1}{h^2}\big(hh'\frac{\partial}{\partial u} + h^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\big) \tag{4.3.3}$$

elde edilir. $G_u,\ G_{uu},\ G_v,\ G_{vv}$ türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} G_u &= (\frac{1}{2}v^2h'' - g'', \frac{1}{2}v^2h'' - f'', vh''), \\ G_{uu} &= (\frac{1}{2}v^2h''' - g''', \frac{1}{2}v^2h''' - f''', vh'''), \\ G_v &= (vh', vh', h'), \quad G_{vv} = (h', h', 0) \end{aligned}$$

bulunur ve bu türevler (**4.3.3**) ifadesinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \Delta G = &\frac{1}{h}\big(h'g''hg''' - \frac{1}{2}v^2h'h'' - \frac{1}{2}v^2hh''' - \frac{h'}{h}, \\ &h'f''hf''' - \frac{1}{2}v^2h'h'' - \frac{1}{2}v^2hh''' - \frac{h'}{h}, \\ &- vh'h'' - vhh'''\big) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

olur. M birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olduğundan ve (**1.1**) denkleminden bir F fonksiyonu için

$$\frac{1}{h}(h'g''hg''' - \frac{1}{2}v^2h'h'' - \frac{1}{2}v^2hh''' - \frac{h'}{h}) = F(u)(-g' + \frac{1}{2}v^2h') \tag{4.3.5}$$

$$\frac{1}{h}(h'f''hf''' - \frac{1}{2}v^2h'h'' - \frac{1}{2}v^2hh''' - \frac{h'}{h}) = F(u)(-f' + \frac{1}{2}v^2h') \tag{4.3.6}$$

$$\frac{1}{h}(vh'h'' + vhh''') = -F(u)vh' \tag{4.3.7}$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Şimdi, yukardaki denklemlerden (**4.3.5**) ile

(**4.3.6**), (**4.3.5**) ile (**4.3.7**) ve (**4.3.6**) ile (**4.3.7**) oranlanıp düzenlenirse sırasıyla

$$h'(g'f''-f'g'')+h(g'f'''-f'g''')+\frac{h'^2}{h}+\frac{1}{2}v^2h'h''(f'-g')+$$
$$\frac{1}{2}v^2hh'''(f'-g')+\frac{1}{2}v^2h'^2(g''-f'')+\frac{1}{2}v^2hh'(g'''-f''')=0, \qquad (\mathbf{4.3.8})$$

$$vh'(h'g''-g'h'')+vh(h'g'''-g'h''')-\frac{vh'^2}{h}=0, \qquad (\mathbf{4.3.9})$$

$$vh'(h'f''-f'h'')+vh(h'f'''-f'h''')-\frac{vh'^2}{h}=0 \qquad (\mathbf{4.3.10})$$

olur. Son iki denklemin farkından

$$vh'^2(f''-g'')-vh'h''(f'-g')+vhh'(f'''-g''')-vhh'''(f'-g')=0 \quad (\mathbf{4.3.11})$$

bulunur. Ayrıca (**4.3.11**) denklemi $\frac{1}{2}v$ ile çarpılıp (**4.3.8**) denklemi ile toplanırsa

$$h'(g'f''-f'g'')+h(g'f'''-f'g''')+\frac{h'^2}{h}=0 \qquad (\mathbf{4.3.12})$$

elde edilir. Şimdi $f'^2-g'^2=-1$ olduğu kullanılarak $t=t(u)$ için

$$f'(u)=\sinh t(u), \quad g'(u)=\cosh t(u)$$

alınabilir. Bu fonksiyonların

$$f''=t'\cosh t(u), \quad f'''=t''\cosh t(u)+t'^2\sinh t(u),$$

$$g''=t'\sinh t(u), \quad g'''=t''\sinh t(u)+t'^2\cosh t(u)$$

türevleri (**4.3.12**) denkleminde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$t''+\frac{h't'}{h}+\frac{h'^2}{h^2}=0$$

elde edilir ki bu da $t'-\frac{h'}{h}$ ifadesinin sabit olduğunu ifade eder.
Yüzeyin A şekil operatörü hesaplandığında

$$A=\begin{pmatrix} f''g'-f'g'' & 0 \\ 0 & -\frac{h'}{h} \end{pmatrix}$$

bulunur ve böylece $H=\frac{1}{2}(f''g'-f'g''-\frac{h'}{h})$ olur, burada $h(u)=f(u)-g(u)\neq 0$ dır. Daha önce hesaplanan f', f'', g', g'' türevleri kullanılırsa

$$H=\frac{1}{2}(t'-\frac{h'}{h})$$

bulunur ki bu da H ortalama eğriliğinin sabit olduğunu gösterir.
Ayrıca, $f'^2 - g'^2 = 1$ olması durumunda da benzer işlemlerle aynı sonuç elde edilebilir.

Tersine olarak M yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması durumunda ispat doğrudan hesapla veya

$$\Delta G = \varepsilon_G \|A_G\|^2 G + 2\nabla H$$

formülünden görülür [15].

Teorem 4.3.2. (Sınıflandırma) I. tip rasyonel bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin bir düzlemin ya da bir hiperbolik silindirin açık bir parçası olmasıdır.
II. tip rasyonel bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin bir düzlemin ya da bir çembersel silindirin açık bir parçası olmasıdır.
III. tip rasyonel bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin, katı bir harekete göre, ikinci tip bir Enneper yüzeyin, bir de Sitter uzayın ya da bir anti-de Sitter uzayın açık bir parçası olmasıdır.

İspat. M yüzeyinin I. tip rasyonel bir dönel yüzey olduğu kabul edilsin. O halde M yüzeyinin bir parametrelendirilmesi (**4.1.3**) ile verilir. Eğer f fonksiyonu bir sabit ise yüzey bir hiperbolik silindirdir. Eğer f bir sabit değilse, genellik bozulmadan, $f(u) = u,\ u > 0$ alınabilir. Bu durumda M yüzeyi

$$x(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, g(u))$$

ile paramatrelendirilir. Yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (\sinh v, \cosh v, g'(u)), \qquad x_v = (u \cosh v, u \sinh v, 0)$$

şeklindedir ve yüzeyin zamansal olduğu x_v vektöründen görülür. Bu vektörlerin vektörel çarpımından

$$x_u \times x_v = (ug' \sinh v, ug' \cosh v, -u)$$

elde edilir ve yüzeyin Gauss tasviri

$$G = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}(g' \sinh v, g' \cosh v, -1) \qquad \textbf{(4.3.13)}$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin g metrik tensörünün bileşenleri $g_{11} = 1 + g'^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = -u^2$ olarak bulunur. Buna göre $\mathcal{G} = \det g = -u^2(1+g'^2)$ ve metrik tensörün tersinin bileşenleri $g^{11} = \dfrac{1}{1+g'^2}$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = -\dfrac{1}{u^2}$ olur. Yüzeyin A şekil operatörü hesaplandığında

$$A = \begin{pmatrix} -g''(1+g'^2)^{-3/2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{g'}{u}(1+g'^2)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

elde edilir ve böylece $H = -\frac{1}{2}\left[g''(1+g'^2)^{-3/2} + \frac{g'}{u}(1+g'^2)^{-1/2}\right]$ olur. Düzenleme yapıldığında

$$g'' + \frac{g'}{u}(1+g'^2) + 2H(1+g'^2)^{3/2} = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda M dönel yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşul bir α sabiti için $g = g(u)$ fonksiyonunun

$$g'' + \frac{g'}{u}(1+g'^2) + 2\alpha(1+g'^2)^{3/2} = 0 \qquad \textbf{(4.3.14)}$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olmasıdır. İlk olarak $g' = \sinh y$ değişken dönüşümü yapılırsa (**4.3.14**) denklemi

$$y' + \frac{1}{u}\sinh y \cosh y + 2\alpha \cosh^2 y = 0 \qquad \textbf{(4.3.15)}$$

olur. Sonra $y = \tanh^{-1} w$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$y' = \frac{w'}{1-w^2}, \quad \cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \text{ ve } \sinh y = \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}$$

elde edilir. Bu ifadeler (**4.3.15**) denkleminde yerine yazılırsa

$$uw' + w + 2\alpha u = 0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$w = \frac{a - \alpha u^2}{u}$$

bulunur. Değişken dönüşümleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g' &= \sinh(\tanh^{-1} w) = \sinh(\tanh^{-1}(\frac{a-\alpha u^2}{u})) \\ &= \frac{a-\alpha u^2}{\sqrt{u^2-(a-\alpha u^2)^2}} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(u) = \int \frac{a-\alpha u^2}{\sqrt{u^2-(a-\alpha u^2)^2}}\,\mathrm{d}u$$

bulunur.

Eğer $a = \alpha = 0$ ise g bir sabittir. Bu durumda yüzey bir düzlemin açık bir parçasıdır. Eğer $\alpha = 0$ ve $a \neq 0$ ise

$$g(u) = \int \frac{a}{\sqrt{u^2-a^2}}\,\mathrm{d}u = a\cosh^{-1}(\frac{u}{a}) + c_1$$

bulunur ve bu bir rasyonel fonksiyon değildir. Bu durumda yüzey rasyonel tipten değildir. Eğer $a = 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise

$$g(u) = \int \frac{-\alpha u}{\sqrt{1-\alpha^2 u^2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - u^2} + c_2$$

bulunur. Yüzeyin parametrelendirilmesi

$$x(u,v) = (u\sinh v, u\cosh v, \sqrt{\alpha^{-2}-u^2} + c_2)$$

şeklinde olur. Burada $C = (0,0,c_2)$ olmak üzere

$$\langle x(u,v) - C, x(u,v) - C \rangle = \frac{1}{\alpha^2}$$

bulunur. Yani, yüzey, uygun bir katı harekete göre, bir de Sitter uzayıdır ve rasyonel tipten değildir. Eğer $a \neq 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise $g(u)$ eliptik fonksiyonların yardımıyla ifade edilebilir ve rasyonel tipten değildir. Teoremin tersinin ispatı 4.2. bölümde verilen örneklerden açıkça görülür.

Eğer M yüzeyi (**4.1.4**) ile parametrelendirilirse benzer işlemlerle aynı sonuç bulunur.

Şimdi, M yüzeyinin, (**4.1.6**) ile parametrelendirilen II. tip rasyonel bir dönel yüzey olduğu kabul edilsin. Eğer f fonksiyonu bir sabit ise yüzey bir çembersel silindirdir. Eğer f sabit değilse, genellik bozulmadan, $f(u) = u,\ u > 0$ alınabilir.

O halde M yüzeyi

$$x(u,v) = (g(u), u\cos v, u\sin v) \qquad (\mathbf{4.3.16})$$

ile paramatrelendirilir. İlk olarak $g'^2 > 1$ olduğu kabul edilsin. Önceki durumda yapılanlara benzer işlemlerle, M dönel yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşulun, bir α sabiti için $g = g(u)$ fonksiyonunun

$$g'' - \frac{g'}{u}(g'^2 - 1) + 2\alpha(g'^2 - 1)^{3/2} = 0 \qquad (\mathbf{4.3.17})$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olmasıdır. İlk olarak $g' = \cosh y$ değişken dönüşümü yapılırsa (**4.3.17**) denklemi

$$y' - \frac{1}{u}\sinh y \cosh y + 2\alpha \sinh^2 y = 0 \qquad (\mathbf{4.3.18})$$

olur. Sonra $y = \coth^{-1} w$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$y' = \frac{w'}{1-w^2}, \quad \cosh y = \frac{w}{\sqrt{w^2-1}} \text{ ve } \sinh y = \frac{1}{\sqrt{w^2-1}}$$

bulunur. Bu ifadeler (**4.3.18**) denkleminde yerine yazılırsa

$$uw' + w - 2\alpha u = 0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$w = \frac{a + \alpha u^2}{u}$$

bulunur. Değişken dönüşümleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g' &= \cosh(\coth^{-1} w) = \cosh(\coth^{-1}(\frac{a+\alpha u^2}{u})) \\ &= \frac{a+\alpha u^2}{\sqrt{(a+\alpha u^2)^2 - u^2}} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(u) = \int \frac{a+\alpha u^2}{\sqrt{(a+\alpha u^2)^2 - u^2}} \mathrm{d}u$$

elde edilir.

Eğer $a = \alpha = 0$ ise g bir sabittir. Bu durumda yüzey bir düzlemin açık bir parçasıdır. Eğer $\alpha = 0$ ve $a \neq 0$ ise

$$g(u) = \int \frac{a}{\sqrt{a^2 - u^2}} \mathrm{d}u = a \arcsin(\frac{u}{a}) + c_3$$

bulunur. Bu durumda [12] nolu makaleden yüzey bir katenoidin açık bir parçasıdır ve rasyonel tipten değildir. Eğer $a = 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise

$$g(u) = \int \frac{\alpha u}{\sqrt{\alpha^2 u^2 - 1}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{u^2 - \alpha^{-2}} + c_4$$

dir. Yüzeyin parametrelendirilmesi

$$x(u, v) = (\sqrt{u^2 - \alpha^{-2}} + c_4, u\cos v, u\sin v)$$

şeklinde olur. Burada $D = (c_4, 0, 0)$ olmak üzere

$$\langle x(u, v) - D, x(u, v) - D\rangle = \frac{1}{\alpha^2}$$

bulunur, yani, yüzey uygun bir katı harekete göre bir de Sitter uzayıdır ve rasyonel tipten değildir. Eğer $a \neq 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise $g(u)$ eliptik fonksiyonların yardımıyla ifade edilebilir ve rasyonel tipten değildir. Teoremin tersinin ispatı 4.2. bölümde verilen örneklerden açıkça görülür.
Ayrıca, ${g'}^2 < 1$ durumunda benzer işlemlerle aynı sonuçlar elde edilir.

Son olarak M yüzeyi (**4.1.8**) ifadesindeki gibi parametrelendirilen III. tip rasyonel bir dönel yüzey olsun. Yardımcı Teorem 4.1.1.'de 3. durumda verilen

$$x(u, v) = (k(u) - u - uv^2, k(u) + u - uv^2, -2uv)$$

parametrelendirme kullanılsın. Yüzeyin A şekil operatörü hesaplanırsa

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{k''}{4}(k')^{-3/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2u}(k')^{-1/2} \end{pmatrix}$$

elde edilir ve $H = \frac{1}{2}[-\frac{k''}{4}(k')^{-3/2} + \frac{1}{2u}(k')^{-1/2}]$ olur. Düzenleme yapıldığında

$$k'' - \frac{2k'}{u} = -8H(k')^{3/2}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, eğer $k'(u) > 0$ ve $u > 0$ ise, M dönel yüzeyinin ortalama eğriliğinin sabit olması için gerek ve yeter koşul bir α sabiti için $k = k(u)$ fonksiyonunun

$$k'' - \frac{2}{u}k' = -8\alpha(k')^{3/2} \qquad \textbf{(4.3.19)}$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olmasıdır. Şimdi $k'(u) = y(u)$ alınırsa

$$y' - \frac{2}{u}y = -8\alpha y^{3/2}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$k'(u) = \frac{u^2}{(2\alpha u^2 + a)^2}$$

elde edilir, burada $a \in \mathbb{R}$. Eğer $\alpha = 0$ ve $a \neq 0$ ise

$$k(u) = \frac{u^3}{3a^2} + b$$

bulunur, burada $b \in \mathbb{R}$. Daha önce verilen $f(u) = k(u) - u$ ve $g(u) = k(u) + u$ göz önüne alınırsa yüzeyin rasyonel tipten olduğu görülür. Böylece [14] nolu makaleden yüzey ikinci tip Enneper yüzeyin açık bir parçasıdır.

Eğer $a = 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise bir b integral sabiti için

$$k(u) = -\frac{1}{4\alpha^2}\frac{1}{u} + b$$

bulunur. Yüzeyin parametrelendirilmesi

$$x(u,v) = (-\frac{1}{4\alpha^2}\frac{1}{u} + b - u - uv^2, -\frac{1}{4\alpha^2}\frac{1}{u} + b + u - uv^2, -2uv)$$

şeklinde olur. Burada $B = (b, b, 0)$ olmak üzere

$$\langle x(u,v) - B, x(u,v) - B\rangle = -\frac{1}{4\alpha^2}$$

bulunur. Yani, yüzey, uygun bir katı harekete göre, bir anti-de Sitter uzayın açık bir parçasıdır. Eğer $a \neq 0$ ve $\alpha \neq 0$ ise $k(u)$ rasyonel bir fonksiyon olarak ifade edilemez. Benzer şekilde, eğer $k'(u)u < 0$ ise, M ikinci tip Enneper yüzeyin ya da bir de Sitter uzayın açık bir parçasıdır. Teoremin tersinin ispatı 4.2. bölümde verilen örneklerden açıkça görülür.

4.4. Minkowski Uzayının İkinci Çeşit Noktasal 1-Tipinden Gauss Tasvirine Sahip Dönel Yüzeyleri

I. tip ya da II. tip dönel yüzeyler için, genellik bozulmadan, $f(u) = u$ olduğu kabul edilebilir. Dolayısıyla $\mathbb{E}^3_1$ Minkowski uzayında I. tip dönel yüzey

$$x(u,v) = (u\sinh v, u\cosh v, g(u)) \qquad \textbf{(4.4.1)}$$

ya da

$$x(u,v) = (u\cosh v, u\sinh v, g(u)) \qquad \textbf{(4.4.2)}$$

şeklinde parametrelendirilir ve II. tip dönel yüzey de

$$x(u,v) = (g(u), u\cos v, u\sin v) \qquad \textbf{(4.4.3)}$$

ile parametrelendirilir. I. tip dönel yüzey durumunda (**4.4.1**) ifadesinin ele alınması yeterli olacaktır.

Teorem 4.4.1. M yüzeyi I. tip ya da II. tip polinom bir dönel yüzey olsun. M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin bir hiperbolik koni ya da bir dik koninin açık bir parçası olmasıdır.

İspat. M yüzeyi ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olsun.

1. Durum: M yüzeyi, bir $g(u)$ differansiyellenebilir fonksiyonu için (**4.4.1**) ifadesi ile verilen bir dönel yüzey olsun. Yüzeyin Gauss tasviri, (**4.3.13**) nolu ifadeden,

$$G = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}(g'\sinh v, g'\cosh v, -1)$$

şeklinde bulunur. Yüzeyin Laplace operatörü

$$\Delta = -\frac{1}{u(1+g'^2)}\left(\frac{1+g'^2-ug'g''}{1+g'^2}\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{1+g'^2}{u}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

olarak elde edilir ve bu G tasvirine uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Delta G = -\frac{1}{u\sqrt{1+g'^2}}\Bigg\{&\left[\frac{(g''+ug''')(1+g'^2)-4ug'g''^2}{(1+g'^2)^3} - \frac{g'}{u}\right]\sinh v,\\ &\left[\frac{(g''+ug''')(1+g'^2)-4ug'g''^2}{(1+g'^2)^3} - \frac{g'}{u}\right]\cosh v,\\ &\frac{(g'g''+ug''^2+ug'g''')(1+g'^2)-4ug'^2g''^2}{(1+g'^2)^3}\Bigg\}\end{aligned} \qquad \textbf{(4.4.4)}$$

bulunur. Yardımcı Teorem 4.1.1.'den bir F fonksiyonu ve sıfırdan farklı bir $C=(0,0,c)$ sabiti için

$$\Delta G = F(u)(G+(0,0,c))$$

olur. Bu ifadenin (**4.4.4**) ile eşitliğinden

$$\frac{1}{u}g''(1+g'^2)+g'''(1+g'^2)-4g'g''^2-\frac{g'}{u^2}(1+g'^2)^3=-F(u)g'(1+g'^2)^3,$$

$$\frac{1}{u}g'g''(1+g'^2)+g''^2+g'g'''(1+g'^2)-3g'^2g''^2=F(u)(1+g'^2)^3\big(1-c\sqrt{1+g'^2}\big)$$

bulunur. Bu iki denklem oranlanır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}&ug''(1+g'^2)^2+u^2g'''(1+g'^2)^2-3u^2g'g''^2(1+g'^2)-g'(1+g'^2)^3=\\&c\sqrt{1+g'^2}\big[ug''(1+g'^2)+u^2g'''(1+g'^2)-4u^2g'g''^2-g'(1+g'^2)^3\big]\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem

$$P(u)=c\sqrt{1+g'^2}\,Q(u) \qquad (\mathbf{4.4.5})$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\begin{aligned}P(u)&=ug''(1+g'^2)^2+u^2g'''(1+g'^2)^2-3u^2g'g''^2(1+g'^2)-g'(1+g'^2)^3,\\Q(u)&=ug''(1+g'^2)+u^2g'''(1+g'^2)-4u^2g'g''^2-g'(1+g'^2)^3\end{aligned} \qquad (\mathbf{4.4.6})$$

dır. Burada $g(u)$ polinomunun derecesi deg $g(u)$ ile gösterilsin. Eğer deg $g(u)\geq 2$ ise deg $P(u)$ = deg $Q(u)\geq 7$ olup, (**4.4.5**) denkleminden çelişki elde edilir. Böylece deg $g(u)=1$ olur. Bir $a\neq 0$ sabiti için $g'(u)=a$ yazılırsa, (**4.4.5**) denkleminden $c=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ elde edilir. Böylece M yüzeyinin parametrelendirilmesi

$$x(u,v)=(u\sinh v,u\cosh v,au),\quad a\neq 0,\quad a\in\mathbb{R}$$

olur, yani M dönel yüzeyi bir hiperbolik koninin açık bir parçasıdır. M bir $g(u)$ differansiyellenebilir fonksiyonu için (**4.4.2**)'de verilen bir dönel yüzey ise benzer işlemlerle aynı sonuç bulunur.

2. Durum: M yüzeyi bir $g(u)$ differansiyellenebilir fonksiyonu için (**4.4.3**)'de verilen bir dönel yüzey olsun. İlk olarak $g'^2>1$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda yüzeyin Gauss tasviri

$$G=-\frac{1}{\sqrt{g'^2-1}}(1,g'\cos v,g'\sin v)$$

olur. Yüzeyin Laplace operatörü

$$\Delta=-\frac{1}{u(g'^2-1)}\Big(\frac{1-g'^2+ug'g''}{g'^2-1}\frac{\partial}{\partial u}-u\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{g'^2-1}{u}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Big)$$

olarak bulunur ve bu G tasvirine uygulanırsa

$$\Delta G = \frac{1}{u\sqrt{g'^2-1}} \left\{ \frac{(g'g''+ug''^2+ug'g''')(g'^2-1)-4ug'^2g''^2}{(g'^2-1)^3}, \right.$$
$$\left[\frac{(g''+ug''')(g'^2-1)-4ug'g''^2}{(g'^2-1)^3}-\frac{g'}{u}\right]\cos v,$$
$$\left.\left[\frac{(g''+ug''')(g'^2-1)-4ug'g''^2}{(g'^2-1)^3}-\frac{g'}{u}\right]\sin v \right\} \qquad \textbf{(4.4.7)}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.1.1.'den bir F fonksiyonu ve sıfırdan farklı bir $C=(c,0,0)$ sabiti için

$$\Delta G = F(u)(G+(c,0,0))$$

olur. Bu ifadenin (**4.4.7**) ile eşitliğinden

$$\frac{1}{u}g'g''(g'^2-1)-g''^2+g'g'''(g'^2-1)-3g'^2g''^2 = F(u)(g'^2-1)^3(-1+c\sqrt{g'^2-1}),$$
$$\frac{1}{u}g''(g'^2-1)+g'''(g'^2-1)-4g'g''^2-\frac{g'}{u^2}(g'^2-1)^3 = -F(u)g'(g'^2-1)^3$$

bulunur. Bu iki denklem oranlanır ve düzenlenirse

$$ug''(g'^2-1)^2+u^2g'''(g'^2-1)^2-3u^2g'g''^2(g'^2-1)+g'(g'^2-1)^3 =$$
$$c\sqrt{g'^2-1}\big[-ug''(g'^2-1)-u^2g'''(g'^2-1)+4u^2g'g''^2+g'(g'^2-1)^3\big]$$

elde edilir ve bu denklem

$$A(u) = c\sqrt{g'^2-1}\,B(u) \qquad \textbf{(4.4.8)}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$A(u) = ug''(g'^2-1)^2+u^2g'''(g'^2-1)^2-3u^2g'g''^2(g'^2-1)+g'(g'^2-1)^3,$$
$$B(u) = -ug''(g'^2-1)-u^2g'''(g'^2-1)+4u^2g'g''^2+g'(g'^2-1)^3 \qquad \textbf{(4.4.9)}$$

dır. Eğer $\deg g(u) \geq 2$ ise $\deg A(u) = \deg B(u) \geq 7$ olup (**4.4.8**) denkleminden çelişki elde edilir. Böylece $\deg g(u) = 1$ olur. Bir $a \neq 0$, $|a| \neq 1$ sabiti için $g'(u) = a$ yazılırsa, (**4.4.8**) denkleminden $c = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ elde edilir. Böylece M yüzeyinin parametrelendirilmesi

$$x(u,v) = (au, u\cos v, u\sin v), \quad a>1 \text{ ya da } a<-1$$

olur, yani M dönel yüzeyi bir dik koninin açık bir parçasıdır. Ayrıca $g'^2 < 1$

durumunda ise benzer işlemlerle aynı sonuç bulunur.

Teoremin tersinin ispatı 4.2. bölümde verilen örneklerden açıkça görülür.

Teorem 4.4.2. Polinom yüzeylerinden başka ikinci çeşit noktasal 1- tipinden Gauss tasvirine sahip I tipinden ya da II tipinden rasyonel dönel yüzey yoktur.

İspat. M bir rasyonel dönel yüzey olsun, yani $g(u)$ fonksiyonu u değişkenine bağlı rasyonel bir fonksiyon olsun. Böylece $g'(u)$ fonksiyonu da rasyonel bir fonksiyondur. Eğer $g'(u)$ bir sabit değilse

$$g'(u) = \frac{r(u)}{q(u)}$$

şeklinde alınabilir, burada $r(u)$ ve $q(u)$ fonksiyonlarının derecesi 1 den büyük eşit ortak bir çarpanı yoktur. Burada deg $q(u) = m$ olsun. İspat iki duruma ayrılır.

1. Durum: M yüzeyi I tipinden olsun.

Eğer (**4.4.5**) denklemi göz önüne alınırsa $\sqrt{1+g'^2}$ ifadesinin rasyonel bir fonksiyon olduğu görülür. Eğer $g'(u)$ sabit değilse

$$q^2(u) + r^2(u) = p^2(u)$$

eşitliğini sağlayan bir $p(u)$ polinomu vardır, burada $q(u)$, $r(u)$ ve $p(u)$ aralarında asaldır. Aşağıdaki

$$\begin{aligned} &P_1(u) = ug''(1+g'^2)^2, \quad P_2(u) = u^2 g'''(1+g'^2)^2, \\ &P_3(u) = u^2 g' g''^2 (1+g'^2), \quad P_4(u) = g'(1+g'^2)^3, \\ &Q_1(u) = ug''(1+g'^2), \quad Q_2(u) = u^2 g'''(1+g'^2), \\ &Q_3(u) = u^2 g' g''^2, \quad Q_4(u) = P_4(u) \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

rasyonel fonksiyonlar göz önüne alınsın. Böylece (**4.4.6**) ifadesindeki $P(u)$ ve $Q(u)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} P(u) &= P_1(u) + P_2(u) - 3P_3(u) - P_4(u), \\ Q(u) &= Q_1(u) + Q_2(u) - 4Q_3(u) - Q_4(u) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$1 + g'^2 = 1 + \frac{r^2}{q^2} = \frac{q^2 + r^2}{q^2} = \frac{p^2}{q^2},$$

$$g'' = \frac{r'q - rq'}{q^2}, \quad g''' = \frac{(r''q - rq'')q - 2q'(r'q - rq')}{q^3}$$

ifadeleri (**4.4.10**)'da verilen fonksiyonlarda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
P_1(u) &= up^4 \frac{r'q - rq'}{q^6}, & P_2(u) &= u^2p^4 \frac{(r''q - rq'')q - 2q'(r'q - rq')}{q^7}, \\
P_3(u) &= u^2rp^2 \frac{(r'q - rq')^2}{q^7}, & P_4(u) &= \frac{rp^6}{q^7}, \\
Q_1(u) &= up^2 \frac{r'q - rq'}{q^4}, & Q_2(u) &= u^2p^2 \frac{(r''q - rq'')q - 2q'(r'q - rq')}{q^5}, \\
Q_3(u) &= u^2r \frac{(r'q - rq')^2}{q^5}, & Q_4(u) &= P_4(u)
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $m \geq 1$ olduğu varsayılsın. Yukarıdaki ifadelerden $i = 1, \ldots, 4$ için $q^7 P_i(u)$ ifadesinin ve $i = 1, 2, 3$ için $q^6 Q_i(u)$ ifadesinin bir polinom olduğu görülür. Fakat $q^6 Q_4(u)$ ifadesi

$$q^6 Q_4(u) = \frac{rp^6}{q} \qquad (\mathbf{4.4.11})$$

olup bir rasyonel fonksiyondur ve (**4.4.5**) ifadesi

$$P(u) = c\,\frac{p}{q}\,Q(u)$$

olur. Burada $q^7 P(u)$ polinom olduğundan yukarıdaki ifade göz önüne alınarak $q^6 Q(u)$ ifadesinin de bir polinom olduğu görülür. Ancak bu (**4.4.11**) ile çelişir, çünkü p, q ve r aralarında asaldır. Böylece $m = 0$ olur, yani $g(u)$ bir polinomdur.

2. Durum: M yüzeyi II tipinden olsun.

Eğer (**4.4.8**) denklemi göz önüne alınırsa, $\sqrt{g'^2 - 1}$ ifadesinin rasyonel bir fonksiyon olduğu görülür. Eğer $g'(u)$ sabit değilse

$$r^2(u) - q^2(u) = p^2(u)$$

eşitliğini sağlayan bir $p(u)$ polinomu vardır, burada $q(u)$, $r(u)$ ve $p(u)$ aralarında asaldır. Bu denklem $\deg r(u) \geq \deg q(u)$ durumunda tanımlıdır. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde, $m \geq 1$ olmasından çelişki elde edilir. Böylece $m = 0$ olur, yani, $g(u)$ bir polinomdur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.3. Minkowski 3-uzayında ikinci çeşit noktasal 1- tipinden Gauss tasvirine sahip III tipinden rasyonel dönel yüzey yoktur.

İspat. M yüzeyi III tipinden rasyonel bir dönel yüzey olsun. Gauss tasvirinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden olduğu varsayılsın, yani, Yardımcı Teorem 4.1.1.'den bir $F(u)$ fonksiyonu ve sıfırdan farklı bir $C = (c, c, 0)$ vektörü için

$$\Delta G = F(G + C) \qquad \textbf{(4.4.12)}$$

yazılırsa, (**4.1.23**) ifadesi

$$F(u) = \frac{k'k'' + uk'k''' - 2u(k'')^2}{8u(k')^3}$$

olur. Bu ifade kullanılarak (**4.1.21**) ile (**4.4.12**) ifadelerinin birinci bileşeni eşitlenirse

$$\sqrt{k'}\{2u^2k'k''' - 3u^2k''^2 + 2uk'k'' + 4k'^2\} + 2cu\{uk'k''' - 2uk''^2 + k'k''\} = 0 \qquad \textbf{(4.4.13)}$$

bulunur. M yüzeyi rasyonel bir dönel yüzey olduğundan $k(u)$ ve (**4.4.13**) ifadesinden $Q(u) = \sqrt{k'}$ rasyonel fonksiyonlardır. Ayrıca

$$k' = Q^2(u), \quad k'' = 2QQ', \quad k''' = 2Q'^2 + 2QQ''$$

türevleri kullanılarak (**4.4.13**) ifadesi $Q(u)$ fonksiyonuna göre yeniden düzenlenirse

$$u^2Q^2Q'' - 2u^2QQ'^2 + uQ^2Q' + Q^3 = -c\{u^2QQ'' - 3u^2Q'^2 + uQQ'\} \qquad \textbf{(4.4.14)}$$

olur. Şu andan itibaren Q rasyonel fonksiyonu kompleks bir meromorfik fonksiyon olarak kabul edilsin, yani $Q(z) = \dfrac{q(z)}{p(z)}$ olsun, burada p ve q aralarında asal polinomlardır. İlk olarak bir a sabiti ve negatif olmayan bir m tamsayısı için $q(z) = az^m$ olduğu gösterilsin. Bir $z_0 \neq 0$ için $q(z_0) = 0$ olsun. O zaman $Q(z_0) = 0$ olur; $k \geq 1$ ve $a_k \neq 0$ sayıları için

$$Q(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

şeklinde yazılır ve $z = z_0 + (z - z_0)$ olduğundan $z^2 = z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2$ yazılabilir. Sonra (**4.4.14**) denkleminde u yerine z aldıktan sonra denklemin her iki tarafının en küçük dereceleri kıyaslansın:

$$z^2Q^2Q'' - 2z^2QQ'^2 + zQ^2Q' + Q^3 = -c\{z^2QQ'' - 3z^2Q'^2 + zQQ'\}, \qquad \textbf{(4.4.15)}$$

$$\big[z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2\big]Q^2Q'' - 2\big[z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2\big]QQ'^2 +$$
$$(z_0 + (z - z_0))Q^2Q' + Q^3 =$$
$$-\,c\Big\{\big[z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2\big]QQ'' - 3\big[z_0^2 + 2z_0(z - z_0) + (z - z_0)^2\big]Q'^2 +$$
$$(z_0 + (z - z_0))QQ'\Big\}. \qquad (\mathbf{4.4.16})$$

Burada $n = k$ için hesaplanan

$$Q(z) = a_k(z - z_0)^k,$$
$$Q'(z) = ka_k(z - z_0)^{k-1},$$
$$Q''(z) = k(k-1)a_k(z - z_0)^{k-2}$$

ifadeleri kullanılarak (**4.4.16**) eşitliğinin sol ve sağ tarafındaki terimlerin en küçük dereceleri sırasıyla $3k - 2$ ve $2k - 2$ olur. Böylece sağ tarafta $2k - 2$ dereceli terimin katsayısı sıfır olmalıdır, yani

$$0 = c\,(z_0^2\, a_k^2\, k(k-1) - 3z_0^2\, k^2\, a_k^2) = -cz_0^2\, a_k^2(2k^2 + k)$$

olur; ancak bu ifade sıfırdan farklı olup çelişki elde edilir. Böylece bir a sabiti ve negatif olmayan bir m tamsayısı için $q(z) = az^m$ ve

$$Q(z) = \frac{az^m}{p(z)}$$

yazılır. Şimdi $m \geq 1$ olduğu varsayılsın ve $p(z) = z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k$ olsun. Burada $(p, q) = 1$ olduğundan $a_k \neq 0$ dır. Böylece $Q(z)$ fonksiyonunun $z = 0$'da seri açılımı

$$Q(z) = az^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \ldots$$

şeklinde olur. Sonra (**4.4.15**) eşitliğinin sol ve sağ tarafındaki terimlerin en küçük dereceleri sırasıyla $3m$ ve $2m$ bulunur. Burada $m \geq 1$ olduğundan $2m$ dereceli terimin katsayısı sıfır olmalıdır, yani

$$0 = -c\,\{m(m-1)a^2 - 3m^2a^2 + ma^2\} = 2ca^2m^2$$

olur; ancak bu ifade sıfırdan farklı olup çelişki elde edilir. Böylece $m = 0$ olur ve Q fonksiyonu

$$Q(z) = \frac{a}{p(z)}$$

şeklinde yazılır. Son olarak, $\deg p = k \geq 1$ olduğu varsayılsın. Bazı $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ kompleks sayıları için $p(z)$ fonksiyonu

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_k)$$

şeklinde yazılabilir. Bununla beraber

$$\frac{1}{z - \alpha_1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1 - \alpha_1/z}\right) = \frac{1}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_1^2}{z^3} + \ldots \qquad (|z| > |\alpha_1|)$$

olduğundan, bir $r > 0$ sayısı için $Q(z)$ meromorfik fonksiyonu

$$\begin{aligned} Q(z) &= a\left(\frac{1}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_1^2}{z^3} + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \frac{\alpha_2^2}{z^3} + \cdots\right) \ldots \left(\frac{1}{z} + \frac{\alpha_k}{z^2} + \frac{\alpha_k^2}{z^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{a}{z^k} + \frac{\alpha_1}{z^{k+1}} + \frac{\alpha_2}{z^{k+2}} + \cdots \qquad (|z| > r) \end{aligned} \tag{\textbf{4.4.17}}$$

şeklinde yazılır. Şimdi (**4.4.17**) ifadesi (**4.4.15**)'de yerine yazılırsa eşitliğin sol ve sağ tarafındaki $\frac{1}{z}$'li terimlerinin en küçük dereceleri sırasıyla $3k$ ve $2k$ olur. Böylece $2k$ dereceli terimin katsayısı sıfır olmalıdır, yani

$$0 = -ca^2\{k(k+1) - 3k^2 - k\} = 2ca^2k^2$$

olmalıdır. Ancak bu ifade sıfırdan farklı olup, çelişki elde edilir. Sonuç olarak, $c \neq 0$ olduğundan (**4.4.15**) denkleminin rasyonel çözümleri sabit fonksiyonlardır ve (**4.4.15**) denkleminden $Q(z) = 0$ bulunur. Böylece k' sıfır olur ve (**4.1.18**) ifadesinden G tanımsız olur, yani M yüzeyi dejenere olmadığından çelişki elde edilir. Böylece ikinci çeşit noktasal 1- tipinden Gauss tasvirine sahip III tipinden rasyonel dönel yüzey yoktur.

Teorem 4.4.1., Teorem 4.4.2. ve Teorem 4.4.3.'ün sonuçları birleştirilerek aşağıdaki karekterizasyon teoremi ifade edilebilir.

Teorem 4.4.4. (Karekterizasyon) M bir rasyonel dönel yüzey olsun. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında M yüzeyinin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir dik koni ya da bir hiperbolik koninin açık bir parçası olmasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında, birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip uzaysal ve zamansal doğrusal yüzeylerinin tam sınıflandırılması yapılmıştır ve sınıflandırmaya giren yüzeyler belirlenmiştir. Bununla beraber, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında bir dönel yüzeyin birinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olmasının karakterizasyonu verilmiş ve ilgili sınıfa giren rasyonel dönel yüzeylerinin tam sınıflandırılması yapılmıştır. Rasyonel bir dönel yüzeyin ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin bir dik koninin ya da bir hiperbolik koninin açık bir parçası olması gerektiği sonucuna varılmıştır.

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında ikinci çeşit noktasal 1-tipinden Gauss tasvirine sahip doğrusal yüzeylerin sınıflandırılması henüz tamamlanmamıştır. Bu yüzeylerin sınıflandırılması ve var olan sonuçların yüksek boyutlu uzaylardaki karşılıkları çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.Y.**, 1984. Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, *World Scientific*, Singapore and New Jersey.

[2] **Chen, B.Y.**, 1996. A report on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.* **22**, p. 117-337.

[3] **Alias, L.J., Ferrandez, A., Lucas, P. and Merono, M.A.**, 1998. On the Gauss map of B-scrolls, *Tsukuba J. Math.*, **22**, p. 371-377.

[4] **Choi, S.M.**, 1995. On the Gauss map of ruled surfaces in a three dimensional Minkowski Space, *Tsukuba J. Math.*, **19**, p. 285-304.

[5] **Baikoussis, C.,Chen, B.Y. and Verstraelen, L.**, 1993. Ruled surfaces and tubes with finite type Gauss map, *Tokyo J. Math*, **16**, p. 341-348.

[6] **Baikoussis, C.,Chen, B.Y. and Verstraelen, L.**, 1992. Surfaces with Finite Type Gauss Map, Geometry and Topology of Submanifolds, **4**, *World Scientific*, Singapore, p. 214-216.

[7] **Kim, Y.H. and Yoon, D.W.**, 2000. Ruled surfaces with finite type Gauss map in Minkowski space, *Soochow J. Math.*, **26**, p. 85-96.

[8] **Chen, B.Y. and Piccinni, P.**, 1987. Submanifolds with finite type Gauss map, *Aust. Math. Soc.*, **35**, p. 161-186.

[9] **Chen, B.Y., Choi, M. and Kim, Y.H.**, 2005. Surfaces of Revolution with pointwise 1-type Gauss map, *J. Korean Math*, **42**, p. 447-455.

[10] **Kim, Y.H. and Yoon, D.W.**, 2000. Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map, *Geom. Phys. J.*, **34**, p. 191-205.

[11] **Ki, U.H., Kim, D.S., Kim, Y.H. and Roh, Y.M.**, 2009. Surfaces of Revolution with pointwise 1-type Gauss map in Minkowski 3-space, *Taiwanese J. Math.*, **13**, n. 1, p. 317-338.

[12] **Woestijne, I.V.de**, 1990. Minimal Surfaces in the Three-dimensional Minkowski space, Geometry and Topology of Submanifolds, **2**, *World Scientific*, Singapore, p. 344-369.

[13] **Balgetir, H., Bektaş M. and Inoguchi, J.I.**, 2004. Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations, *Note di Matematica*, **23**, n. 1, p. 7-13.

[14] **Kobayashi, O.**, 1983. Maximal Surfaces in the three-dimensional Minkowski space L^3, *Tokyo J. Math.*, **6**, p. 297-309.

[15] **Dursun, U.**, 2009. Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map in Lorentz- Minkowski space, *Proc. Est. Acad. Sci.*, submitted for publications.

ÖZGEÇMİŞ

Emel COŞKUN, 23.10.1984 İstanbul'da doğdu. 2003 yılında Zeytinburnu Adile Mermerci Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl girdiği Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2007 yılında bitirdikten sonra, 2007 Eylül döneminde İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği yüksek lisans programına başladı.