İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WINKLER ZEMİNİNE OTURAN VİSKOELASTİK TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Uğur Burak YÜKSELOĞLU

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği
Programı : Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ

MAYIS 2005

<u>İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ</u>

WINKLER ZEMİNİNE OTURAN VİSKOELASTİK TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE DİNAMİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Uğur Burak YÜKSELOĞLU
(501021082)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2005

Tez Danışmanı : **Yrd. Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ (İ.T.Ü.)**
Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. M. Ertaç ERGÜVEN (İ.T.Ü.)**
Prof. Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Bu tezde, “Winkler Zeminine Oturan Viskoelastik Timoshenko Kirişinin Karışık Sonlu Eleman Yöntemi İle Dinamik Analizi” konusu işlenmiş ve örneklerle pekiştirilmiştir.

Tez çalışmam boyunca, değerli bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah GEDİKLİ’ye teşekkür eder, en derin saygılarımı sunarım. Ayrıca kıymetli yardımları ve katkılarından dolayı Sayın Prof. Dr. M. Ertaç ERGÜVEN’e ve çeşitli tavsiyelerinden yararlandığım Sayın Araş. Gör. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU’na şükranlarımı sunarım.

Bu çalışma, bugünlere gelmemi sağlayan aileme ve emeklerini hiçbir zaman ödeyemeyeceğim teyzelerime ithaf edilmiştir…

Mayıs, 2005 Uğur Burak YÜKSELOĞLU

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Sayfa No

SEMBOL LİSTESİ

σ	: Gerilme
σ_f	: Akma Sınırı
ε	: Uzama Oranı
E	: Elastisite Modülü
η	: Viskozite Katsayısı
$J(t)$, $J_1(t)$	: Normal ve Kayma Şekil Değiştirmeleri için Sünme Fonksiyonları
$Y(t)$, $Y_1(t)$	: Normal ve Kayma Gerilmeleri için Gevşeme Fonksiyonları
ϕ_j , ψ_j	: Enterpolasyon Fonksiyonları
$I(u)$	: Fonksiyonel
δ	: Varyasyonel Sembolü
$[K^e]$	: Eleman Rijitlik Matrisi
$\{ u \}$	: Yerdeğiştirme Vektörü
$\{ F \}$	: Kuvvet Vektörü
w	: Çökme
θ	: Dönme
M	: Moment
T	: Kesme Kuvveti
$q(x)$	: Yayılı Yük
u, v	: Ağırlık Fonksiyonları
ρ	: Birim Boy Kütlesi
k_s	: Kayma Düzeltme Faktörü
G	: Kayma Modülü
ν	: Poisson Oranı
γ	: Kayma Açısı
k	: Zemin Yatak Katsayısı
Λ	: Laplace Operatörü
s	: Laplace Dönüşümü Parametresi
$\bar{f}(s)$	: f(t) fonksiyonunun Laplace Dönüşmüşü
EI	: Eğilme Rijitliği
$\delta(t)$	: Dirac Delta
b	: Kiriş enkesit genişliği
h	: Kiriş enkesit yüksekliği
A	: Kiriş enkesit alanı
I	: Atalet Momenti

WINKLER ZEMİNİNE OTURAN VİSKOELASTİK TIMOSHENKO KİRİŞLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada Winkler zeminine oturan viskoelastik Timoshenko kirişinin dinamik analizi yapılmıştır. Bunun için bir karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Viskoelastik teori gerçeğe yakın sonuç vermesi bakımından önemlidir. Çalışmanın amacı zamanı hesaplarda bir parametre olarak kullanıp, herhangi bir zaman diliminde yapının davranışı hakkında fikir sahibi olmaktır.

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmanın amacı ve kapsamı üzerinde durularak, problemin tanımı yapılmış, daha önce konuyla ilgili yapılan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde viskoelastisitenin tanımı, temel elemanlar, viskoelastik modeller ve integral formlar hakkında bilgiler verilmiştir. Tanıtılan viskoelastik modeller, Maxwell Modeli, Kelvin Modeli ve Üç Parametreli (Standart Katı) Modeldir. Viskoelastik malzemelerin bünye denklemlerinin yazılmasına olanak veren integral formlar ise Bellekli(Hereditary) İntegraller adını alır. Geliştirilen formülasyonun çıkış noktası bu integral formlardır.

Üçüncü bölümde ise sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Sonlu elemanlarda yaklaşım, zayıf formülasyon gibi başlıklar kısaca incelenerek bir problemin sonlu eleman analizindeki basamaklardan bahsedilmiştir. Bu çalışmada geliştirilen fonksiyonel zayıf formülasyon yöntemiyle elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde genel kiriş teorileri hakkında bilgiler verilmiştir. Bunlar Bernoulli-Euler Kiriş Teorisi ve Timoshenko Kiriş Teorisidir. Bu iki teorinin sonlu eleman modelleri kısaca verilerek Karışık Sonlu Eleman Yöntemi tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde ise, kirişin karışık sonlu eleman formülasyonunun elde edilişi yer almaktadır. Kuvvet dengesi ve moment dengesinden zayıf formların elde edilmesi ve bu zayıf formlar kullanılarak fonksiyonelin elde edildiği çözüm anlatılmıştır. Bu aşamalarda zaman bağlı ifadeler Laplace dönüşümü ile Laplace uzayına taşınarak işlemler yapılmıştır.

Altıncı bölümde çeşitli sınır koşulları ve farklı yüklemeler altında bazı sayısal örnekler çözülmüş ve bunların grafikleri verilmiştir. Yüklemeler, sabit yük, zamanla değişen yük ve anlık yük olmak üzere üç başlık altında toplanmış, viskoelastik modellerin karşılaştırması yapılmıştır.

Yedinci bölümde yapılan çalışma ile elde edilen sonuçlar ve geliştirilen formülasyonun avantajları anlatılmıştır.

THE DYNAMIC ANALYSIS OF VISCOELASTIC TIMOSHENKO BEAMS RESTING ON WINKLER FOUNDATION VIA MIXED FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

The dynamic responses of viscoelastic Timoshenko beams resting on Winkler foundation have been investigated and a new mixed finite element formulation is developed in this study. The theory of viscoelasticity is crucial because of giving realistic material behaviour. The main purpose of this work is using time as a variable in formulations and having an opinion about the behaviour of the system in anytime.

This study consists of seven chapters.

The aim of this study and the contents are described and the problem which we deal with introduced in the first chapter. Also the studies about the subject which had been done in the past are given.

An introduction to the theory of viscoelasticity, basic elements, viscoelastic models and integral forms are given in the second chapter. The Models of Maxwell Fluid, Kelvin and Three Parameter Solid Type are presented as viscoelastic models. The Formulaes of constitutive relations of viscoelastic material are named as Hereditary Forms. The formulation developed in this study is based on these forms.

In the third chapter, a brief information about finite element method has been taken place. Weak forms, approximation of the solution, functionals and the steps in a typical finite element problem are given. The functional developed in this study has derived by using weak formulation.

Two beam theories, Bernoulli-Euler Beam Theory -known as conventional beam theory- and Timoshenko Beam Theory –which does not neglect the shear effect on the elastic curvature- are presented in the fourth chapter. A brief finite element models of these two beam theories are mentioned and The Mixed Finite Element Method introduced.

In the fifth chapter, derivation of the mixed finite element formulation is presented. Weak formulations derived from force and moment equilibrium and the solution which gives us the functional are explained. Laplace Transform is used to get the rid of time dependent parameters.

Some numerical problems with various boundary conditions and loadings are solved and related graphics shown in the sixth chapter. The loadings presented in three

titles as constant load, time-dependent load and impulsive load. A comparison of viscoelastic models have been done. It is figured that the comparison of the results with the examples given in the literature was in a good agreement utilizing with the engineering point of view.

The conclusions and the advantages of the formulation which developed in this study are explained briefly in the seventh chapter.

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Günümüzde birçok teoride kolaylık bakımından homojen ve izotrop cisim ve lineer-elastik malzeme kabulü yapılmaktadır. Ancak yapının önemi, malzemenin daha gerçekçi davranışının göz önüne alınmasını gerektirebilir. Bu noktada viskoelastik hesap ön plana çıkar. Viskoelastik teori ile hesap, elastik teoriden çok daha karmaşık olduğu halde, viskoelastik hesap gerçeğe daha yakın sonuç verir. Örneğin, geniş açıklıklı özel yapılar, nükleer santraller, su türbinleri, uzay araçları vb. önem arz eden yapılarda, her malzemede az veya çok var olan viskoelastik malzeme davranışının hesaplarda dikkate alınması zorunlu hâle gelmiştir. Bu çalışmada viskoelastik Timoshenko kirişleri için bir karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiş ve kirişin farklı yüklemeler altındaki davranışları incelenmiştir.

Yapılarda viskoelastik davranış malzemeye bağlı olarak değişik zaman dilimleri içerisinde ortaya çıkabilir. Bu durumda, gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bünye denklemlerinde zamanın da değişken olarak hesaba katılması gereklidir. Zamana bağlı olan viskoelastik problemlerin çözümünde aşağıdaki yöntemler uygulanmaktadır:

- Problemin elastik çözümleri kullanılarak karşıtlık prensibi ile çözüme gidilebilir.
- Çeşitli sayısal yöntemlerden yararlanılarak zaman uzayında, problem çözülebilir.
- İntegral dönüşüm yöntemlerinden yararlanılarak, problem dönüşmüş uzayda çeşitli sayısal yöntemlerle çözüldükten sonra ters dönüşüm yöntemleri ile başlangıçtaki zaman uzayına dönülerek çözüme ulaşılabilir.

Bu çalışmada yapılan viskoelastik hesapta bünye denklemleri zamana bağlı olarak alınmış ve daha sonra işlem kolaylığı olması bakımından Laplace dönüşümü uygulanarak zamana bağlı parametreler ortadan kaldırılmıştır. Böylelikle zaman uzayından Laplace uzayına geçen problem, karışık sonlu eleman formülasyonu uygulanabilir hale gelmiştir. Bu formülasyon Mathematica program dilinde yapılmıştır. Çeşitli yüklemeler ve buna bağlı sınır koşulları altında farklı bir takım örnekler çözüldükten sonra Ters Laplace dönüşümü uygulanarak zaman uzayına geri dönülmüştür. İncelenen kirişin Timoshenko kirişi olması itibariyle kaymanın elastik eğriye yaptığı etki ihmal edilmeyerek, hesaba katılmıştır. Ayrıca dinamik analiz yapıldığı için atalet kuvveti de hesaplarda dikkate alınmıştır.

1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar

1948'de Alfrey, elastik-viskoelastik karşılaştırması yaparak lineer viskoelastik problemlerin çözümüne gitmiştir. Bu konunun bir benzeri ile 1955'de Lee, Laplace dönüşüm yaklaşımını ortaya atmıştır. Bu iki çözümde de elastik çözümün kapalı formunun var olması halindeki viskoelastik problemler çözülmüştür.

1963'de Flaherty, Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak, uzamaya ve yukarıdaki çalışmalara ek olarak kaymaya karşı da viskoelastik kabul edilen Timoshenko kirişinin titreşim problemini ele almış, çalışmasında; uzamadaki viskoelastik operatörün kaymadaki ile orantılı olduğunu düşünmüştür.

1966'da Pan, eksenel viskoelastik bünye bağıntısı kabulü yanı sıra kayma içinde viskoelastik kabul yapmıştır. Ancak, malzemenin sıkışmazlık kabulü özel bünye yapısına dönüşmüştür. Değişkenler, elastik çözüme ait özfonksiyonlar kullanılarak seriye açılmış ve zaman uzayında çözümlere ulaşılmıştır.

1968'de Halpin ve Pagano, anizotrop katılarda Prony serisi ile gösterilebilen viskoelastik malzemenin gevşeme fonksiyonuna simetrik matrislerle ulaşılabilindiğini ispatlamıştır. Aynı yıl, Zienkiewicz ve arkadaşları küçük zaman adımları ile, bu zaman aralığında gerilmelerin sabit olduğu kabulü ile şekil değiştirme uygunluk koşulunu kullanarak adım adım çözüme ulaşmıştır. Ayrıca Berger tarafından kısmi diferansiyel denklem takımına integral dönüşüm teknikleri kullanılarak çözümlere ulaşılmıştır.

1970'de Taylor ve arkadaşları, sıcaklık ve mekanik yükler altında lineer viskoelastik kuazi-statik problemlerin çözümü için ayrı bir hesap algoritması geliştirmişlerdir. Bu algoritmada, stasyoner problem için bölge ayrıklaştırılarak, integral denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

1971’de Huang ve Huang tarafından yapılan Laplace dönüşümü ile karşıtlık prensibi kullanılarak viskoelastik Timoshenko kirişinin serbest titreşimi incelenmiştir. Rizzo ve Shippy tarafından yapılan başka bir çalışmada da yine karşıtlık prensibi kullanılarak lineer viskoelastik malzemeden yapılmış düzlem sınır değer problemleri için Laplace dönüşüm uzayında sayısal çözümlere ulaşılmıştır.

1972’de Aboudi, küresel boşluğa sahip, yüzeyden ani yüklenen viskoelastik problem için Fourier dönüşüm tekniği uygulayarak yaklaşık ters dönüşümle çözüme ulaşmıştır. Aynı yıl Carpenter tarafından Kelvin malzemesi serisi ile gösterilebilen ve Poisson oranı sabit kabul edilebilen özel bir viskoelastik malzeme için t zaman parametresi göz önüne alınarak Runga-Kutta ve sonlu eleman yöntemi kullanılmıştır.

1973’de Adey ve Brebbia tarafından Laplace dönüşümü ile zaman parametresi yok edilerek statik yükler için, problemine karşı gelen elastik yapı sonlu elemanla çözüme ulaşılıyordu. Viskoelastik yapı için kabul edilen özel bir gevşeme fonksiyonu için, ters dönüşümler mümkün olmakta ve çözümlere ulaşılmaktadır.

1974’de Warzee tarafından termoviskoelastik problemler ele alınarak gerçek uzayda sonlu elemanlar ve sonlu farklarla çözülmüştür. Ayrıca dönüşüm tekniği ile zaman parametresi yok edilmiştir. Dönüşüm uzayında ulaşılan sonuçlardan ters dönüşümle çözüme ulaşılmıştır. Aynı yıl Yamada ve arkadaşları, Maxwell ve Kelvin gibi özel malzeme ve harmonik gerilme kabulü ile rijitlik matrisi elde edilerek, serbest titreşim frekanslarına ulaşılmışlardır. Yapılan başka bir çalışmada Holzlöhner tarafından zamana bağlı sonlu eleman problemlerine Laplace dönüşüm teknikleri uygulanmıştır.

1976’da Kıral ve arkadaşları tarafından genel geometriye sahip viskoelastik çubuklara ait integro-diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Denklemleri dinamik yükler altında çözmek için Laplace dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklem taşıma matris yöntemi ile Laplace uzayında çözülmüş ve ters dönüşümlerle sonuca ulaşılmıştır. Aynı yıl Piessens ve Dang tarafından yapılan çalışma ise, sayısal ters Laplace dönüşümü ve uygulamaları için 1934 ile 1976 yılları arasında yapılan 3000’den fazla referanslar gösterilerek derlenmiştir.

1977’de Huang elastik zemine oturan liner viskoelastik Timoshenko kirişinin sabit hızla hareket eden hareketli yükler altındaki davranışını incelemiştir. Aynı yıl Yagawa ve arkadaşları tarafından virtüel iş denklemlerine, yer değiştirme koşullarını katabilmek için Lagrange çarpanı kavramı kullanılmıştır. Böylece süperpozisyon yöntemi genelleştirilmiş düzlem elastisite denklemleri kullanılarak zaman bağlı kiriş eğilme problemlerine çözüm aranmıştır. Başka bir çalışma Aral ve Gülçat tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında zamana bağlı sınır şartları ile dalga denklemlerinin çözümü Laplace uzayında sonlu eleman yöntemi ile elde edilmiş ve ters dönüşüm yöntemi ile sonuçlara ulaşılmıştır.

1979'da Krings ve Waller, taşıma matrisi yöntemini Laplace dönüşümü ile birleştirerek basit kirişin titreşim problemi hakkında çalışmışlardır.

1981'de Manolis ve Beskos, çalışmalarında delik içeren keyfi şekilli bir viskoelastik ortamda düzlem harmonik veya değişken dalga nedeniyle gerilme yığılmalarını sınır integral yöntemiyle bulmuştur.

1982'de Narayanan ve Beskos, kompleks zamana bağlı diğer problemleri sayısal olarak çözmek için Laplace dönüşüm yöntemlerinin kullanılmasında genel ve sistematik bir tartışma sunmuştur. Zaman bölgesindeki çözümü, sayısal ters Laplace alarak , elde edilen çözümle kontrol etmiştir. Ayrıca literatürde varolan sekiz adet sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemlerini kullanımlarına göre incelemişlerdir.

1986'da Podhorecki, çubuğun boyuna titreşimini incelemek için gerçek uzayda sonlu eleman kullanmıştır. Aynı yıl White tarafından Hereditary İntegral tipindeki bünye bağıntıları sonlu farklar ile ayrıklaştırılmış düzlem şekil değiştirme problemine, sonlu eleman yöntemi ile gerçek zaman uzayından statik yükler için çözüm bulunmuştur.

1987'de Chen ve arkadaşları tarafından bir boyutlu ısı problemlerini Laplace dönüşümü kullanarak sonlu eleman yöntemi ile incelemişlerdir. Çalışmada Honig ve Hirdes ters dönüşüm yöntemleri kullanılmıştır.

1988'de Sim ve Kwak tarafından izotropik lineer viskoelastik problemler sınır eleman yöntemi (BEM) ile zaman bölgesinde formüle edilmiştir. Viskoelastik temel çözümler gevşeme fonksiyonlarının sabit katsayıları cinsinden temsil edilmiştir.

1990'da Rencis ve arkadaşları Euler-Bernoulli viskoelastik kirişinin davranışını zaman basamaklı Newman yöntemine dayalı işlem ve sonlu eleman yöntemi kullanmışlardır.

1992’de Lubliner ve Panoskaltsis tarafından viskoelastik malzemeleri tanımlamak için Kuhn modelleri genelleştirilmiş ve sünme fonksiyonları asimptotik olarak logaritmik olan yapı malzemeleri için genelleştirilmiştir. Sünme fonksiyonları kullanılarak Laplace dönüşüm yöntemi ile gevşeme fonksiyonları bulunmuştur.

1995’de Lee zaman bölgesinde sınır eleman (BEM) yöntemiyle viskoelastik cisimlerin gerilme analizini incelemiştir. Temel çözümleri ve gerilme çekirdeğini elastik-viskoelastik karşıtlık prensibi kullanarak elde etmiştir. Aynı yıl Chen tarafından bir çalışma yapılmıştır. Çalışmasında, viskoelastik Timoshenko kirişinin Kuazi-statik ve dinamik analizi için Laplace dönüşümü yardımıyla sonlu eleman yöntemini kullanmıştır. Problemlerinde basitleştirme yapılmış ve özel olarak, kolayca Ters Laplace Dönüşümü alınabilen sünme fonksiyonu Prony serisine açılmıştır. Ayrıca kaymaya karşı olan sünme fonksiyonu da uzamadaki sünme fonksiyonu ile aynı alınmıştır. Bunun anlamı Poisson oranı sabit alınmıştır.

1997’de Johnson ve arkadaşları da, Maxwell katısını Prony serisi ile temsil etmişlerdir. Viskoelastik ince kirişlerin Dinamiği için hareketin elastodinamik denklemlerini virtüel iş prensibinden türeterek sonlu eleman yöntemi ile gerçek uzayda çözülmüştür. Elastik değerlere viskoelastik değerler süperpoze edilmiştir. Aynı yıl başka bir çalışma da Wang ve arkadaşları tarafından yapılmıştır. Çalışmalarında kuazi-statik yüklemeler altında lineer viskoelastik Euler-Bernoulli ve lineer viskoelastik Timoshenko kirişinin eğilme çözümleri arasında kesin ilişkileri sunmaktadır. Bu ilişkiler bilinen Euler-Bernoulli sonuçlarının, Timoshenko sonuçlarına doğrudan geçişi sağlamaktadır.

1999’da Aköz ve Kadıoğlu tarafından yapılan çalışmada viskoelastik Timoshenko kirişinin Kuazi-statik ve dinamik yükler altında davranışı Laplace–Carson uzayında karışık sonlu eleman yöntemi ile incelenmiştir. Çalışmada dönme ve kayma etkileri de dikkate alınmıştır. Ayrıca uzama ve kaymaya karşı her ikisi de farklı viskoelastik özellik gösteren malzeme olarak alınabilmektedir.

2.VİSKOELASTİSİTE

2.1. Viskoelastisiteye Giriş

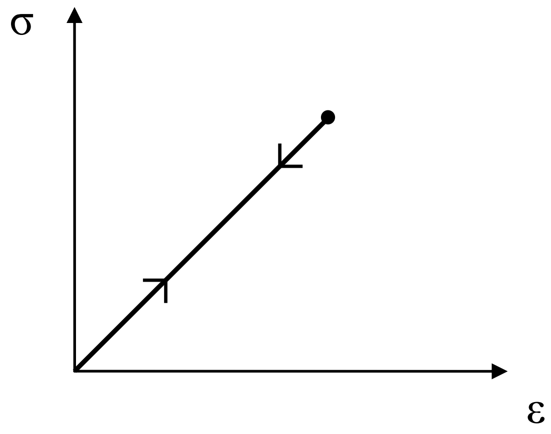
Bazı malzemelerde çevre koşullarına bağlı olarak mekanik davranış yükleme hızına ve süresine bağlı olarak değişir. Bu durumda, malzemelerin gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bünye denklemlerinde, zamanın da bir değişken olarak hesaba katılması gereklidir.

Zamanın mekanik davranışa etkisini incelemek için, t=0 anında bir çubuğa σ_0 sabit gerilmesi uygulanır, t_1 süre sonra boşaltılır. Sonra zaman içinde oluşan şekil değiştirmeler ölçülür. Elde edilen sonuçlarla çizilen şekil değiştirme-zaman eğrileri malzemenin davranışı ve zamana bağlılığı hakkında bilgi verir. Genelde,

- Elastik
- Plastik
- Viskoelastik

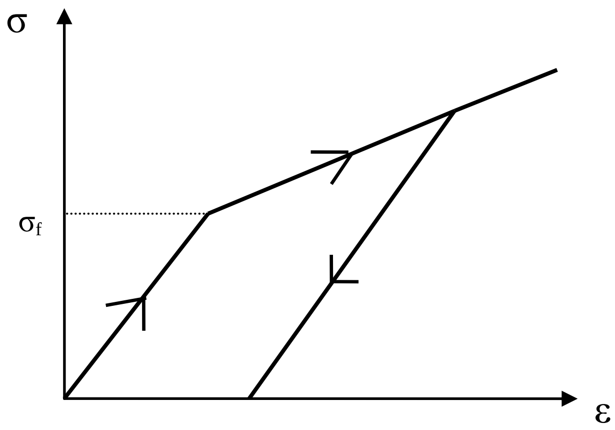
olmak üzere üç çeşit davranış biçimi görülür.

Bunlardan birincisi olan elastik davranışta, malzemeye yükleme yapıldığı zaman şekil değiştirme gerilme ile aynı anda oluşur ve yükleme değişmedikçe gerilme ve şekil değiştirme sabit kalır. Kuvvet kaldırıldığında gerilme ve şekil değiştirme de sıfır olur. Yani ortam başlangıçtaki konumuna geri döner (Bkz. Şekil 2.1).



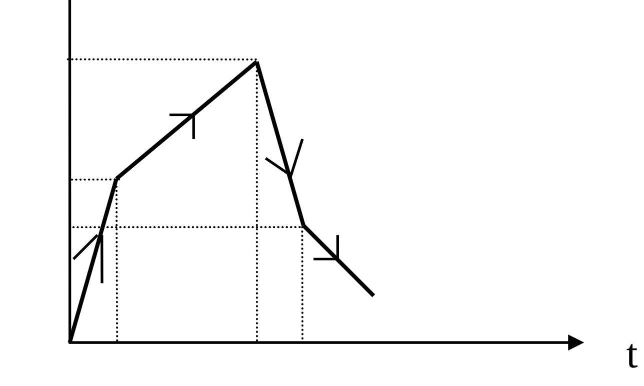
Şekil 2.1 Elastik davranışın σ-ε diyagramı

Şekil 2.2'de görülen plastik davranışta, akma sınırının (σ_f) üstüne çıkan bir gerilme uygulanınca ani şekil değiştirme ve onu izleyen plastik şekil değiştirme kısa sürede oluşur ve zamanla değişmez. Yük kaldırılınca plastik şekil değiştirme kalır. Plastik şekil değiştirme zamandan ve yükleme hızından bağımsız olarak sadece gerilmenin geçmişte aldığı en büyük değerine bağlıdır.



Şekil 2.2 Plastik davranışın σ-ε diyagramı

Viskoelastik davranışta, malzemeye sabit gerilme uygulandığında ani elastik uzama ve hemen ardından zamanla sürekli artan uzama oluşur. Yük kaldırıldığında ise, ani bir geri dönüşü, zamanla azalan bir geri dönüş izler (Bkz. Şekil 2.3). Herhangi bir andaki şekil değiştirme gerilmenin geçmişte aldığı bütün değerlere bağlıdır. Ayrıca viskoelastik davranışta şekil değiştirmeye yükleme hızının ve süresinin de etkisi vardır. Elastik ve plastik davranışta yükleme hızı ne olursa olsun aynı gerilme altında son şekil değiştirmeler aynı olurken viskoelastik cisimde farklı olur.



Şekil 2.3 Viskoelastik davranışın ε-t diyagramı

Yükleme altındaki cisimlerin zamana bağlı davranışı sünme ve gevşeme olarak tanımlanabilir. Sünme, sabit gerilme altında malzemelerde zamanla sürekli oluşan şekil değiştirme olayıdır. Sünme denen bu olay metallerde yüksek sıcaklıklarda, beton, ahşap ve plastiklerde ise oda sıcaklığında oluşur. Malzemenin sünmesi yapı elemanlarının davranışını belirlemede zaman zaman önemli rol oynar. Şekil değiştirmenin uzun süre devam etmesi sonucunda, yapıda istenilmeyen değişiklikler ortaya çıkabilir. Büyük şekil değiştirmeler ortaya çıktığında, bunların mertebesinin hesaplanarak yapının ömrü boyunca emniyetli kalabilmesini sağlamak gerekmektedir. Yapı sistemlerinde gerilmelerin yanında şekil değiştirmenin de sınırlı olması gerekir. Sabit şekil değiştirme altındaki bir malzemede gerilmenin zamanla azalması olayına da gevşeme (relaxation) denir. Gevşeme zamana bağlı bir davranış gösterir. Bazı uygulama alanlarında gevşeme olayının gözönüne alınması gerekir.

2.2. Doğrusallık

Herhangi bir *t* zamanında gerilme, şekil değiştirme ile orantılı ve lineer süperpozisyon ilkesi geçerli ise bu malzemeye doğrusal (lineer) viskoelastisite denir. Bu doğrusallık için sağlanması gereken koşulları,

$$\begin{aligned} £[c\,\sigma(t)] &= c\,£[\sigma(t)] \\ £[\sigma_1(t) + \sigma_2(t - t_1)] &= £[\sigma_1(t)] + £[\sigma_2(t - t_1)] \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde £ bir operatör ve c bir sabit olmak üzere matematik ifadelerle yazabiliriz.

2.3. Temel Elemanlar

Viskoelastik davranışın genel olarak yay ve yağ kutusu (amortisör) diye isimlendirilmiş iki temel elemanı vardır. Yay şeklinde mekanik modelle temsil edilen cisimlerde bünye denklemi,

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{2.2}$$

şeklindedir ve gerilme ile şekil değiştirme orantılı olup bu modele uyan cisimlere Hooke cismi denir. Dashpot olarak isimlendirilen yağlı amortisörlerle mekanik modellendirilmiş cisimlerde bünye denklemi,

$$\sigma = \eta\,\dot{\varepsilon} \tag{2.3}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada η viskozite katsayıdır. Görüldüğü gibi gerilme ile şekil değiştirme hızı orantılıdır. Bu özelliğe sahip cisme Newton cismi denir.

2.4. Viskoelastik Modeller

Gerçek cisimlerin davranışı bu temel modellerin karışımından meydana gelen mekanik modellerin davranışına benzetilir. Bunların karışık olarak birleşmesinden elde edilen çeşitli modellerle viskoelastik cisimlerin davranışı formüle edilir.

2.4.1. Maxwell cismi

Bu model Şekil 2.4'teki gibi bir Hooke cismi ile bir Newton cisminin seri bağlanması ile elde edilmektedir. Aynı σ gerilmesi etkisinde olan bu modelin ε toplam uzaması, yaydaki uzama ε_1 ile amortisördeki uzama ε_2'nin toplamına eşittir. ε toplam uzamanın zamana göre türevi,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \tag{2.4}$$

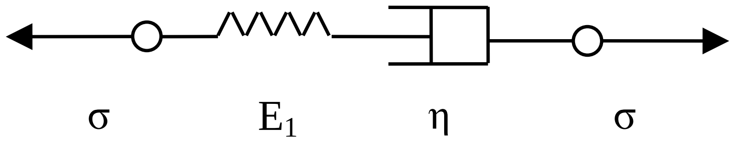
olmak üzere (2.2) ve (2.3) ifadesinden,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{2.5}$$

şeklindeki Maxwell cisminin mekanik davranışının diferansiyel denklemi elde edilir. Bu (2.5) ifadesini düzenlersek bünye denklemi,

$$E_1\,\sigma + \eta\,\dot{\sigma} = E_1\,\eta\,\dot{\varepsilon} \tag{2.6}$$

haline gelir.



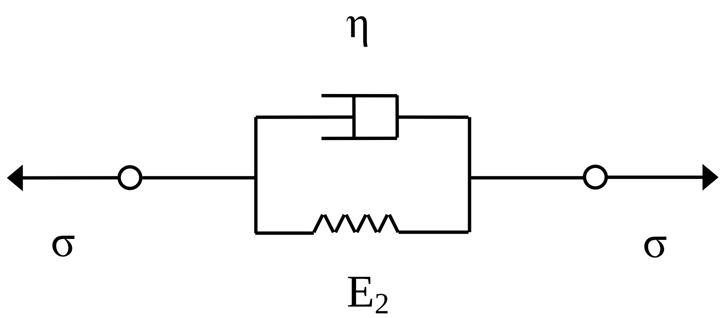
Şekil 2.4 Maxwell cismi

2.4.2. Kelvin cismi

Bu model de Şekil 2.5'te görüldüğü gibi bir yay ile bir amortisörden oluşan iki temel modelin paralel bağlanmasından meydana gelmektedir. Her iki temel model uzaması aynı ε 'dur ve modellere gelen gerilme σ_1 ve σ_2 ise Kelvin cismine uygulanan σ gerilmesi bunların toplamıdır. Buna göre (2.2) ve (2.3)'den cismin mekanik davranışının diferansiyel denklemi,

$$\sigma = E_2\, \varepsilon + \eta\, \dot{\varepsilon} \tag{2.7}$$

şeklindedir.



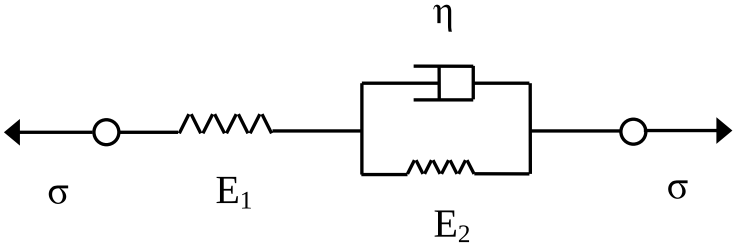
Şekil 2.5 Kelvin cismi

2.4.3. Üç parametreli (standart katı) cisim

Bu model de temel elemanlardan iki tane yay ve bir tane amortisörün bağlanması ile elde edilmektedir. Şekil 2.6'da gösterildiği gibi temel elemanlardan olan bir yayın Kelvin cismine eklenmesiyle meydana gelmiştir. Standart katı cisme uygulanan σ gerilmesi, yaydaki σ gerilmesi ile Kelvin cismine gelen σ gerilmesine eşittir. Uzamalar için ise Standart katı cismin ε uzaması, yaydaki ε_1 uzaması ile Kelvin cisminin ε_2 uzamasının toplamıdır. Böylece (2.2) ve (2.3) ifadelerinden de yararlanarak Standart katı cisim için mekanik davranışının diferansiyel denklemi,

$$(E_1 + E_2)\, \sigma + \eta\, \dot{\sigma} = E_1\, E_2\, \varepsilon + E_1\, \eta\, \dot{\varepsilon} \tag{2.8}$$

şeklinde elde edilir.



Şekil 2.6 Üç parametreli (Standart katı) cisim

2.5. Diferansiyel Form

Bölüm 2.4’te açıklanan basit özel modellerdeki (2.6 - 2.8) bünye denklemleri

$$p_0\,\sigma + p_1\,\dot{\sigma} = q_0\,\varepsilon + q_1\,\dot{\varepsilon} \tag{2.9}$$

formda yazılabilir. Bu ifade genelleştirilmek istenirse viskoelastik malzemelerin bünye denklemleri en genel formda,

$$p_0\,\sigma + p_1\,\dot{\sigma} + p_2\,\ddot{\sigma} + p_3\,\dddot{\sigma} + \ldots = q_0\,\varepsilon + q_1\,\dot{\varepsilon} + q_2\,\ddot{\varepsilon} + q_3\,\dddot{\varepsilon} + \ldots \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edilebilir. O zaman viskoelastik malzemelerin tek eksenli gerilme için gerilme-şekil değiştirme ilişkileri kısaca,

$$P\,\sigma = Q\,\varepsilon \tag{2.11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada P ve Q operatörlerdir. Bu operatörler zamana göre malzeme sabitlerine bağlı lineer diferansiyel operatörlerin serisi olarak,

$$P = \sum_{r=0}^{m} p_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \quad , \quad Q = \sum_{r=0}^{n} q_r \frac{\partial^r}{\partial t^r} \tag{2.12}$$

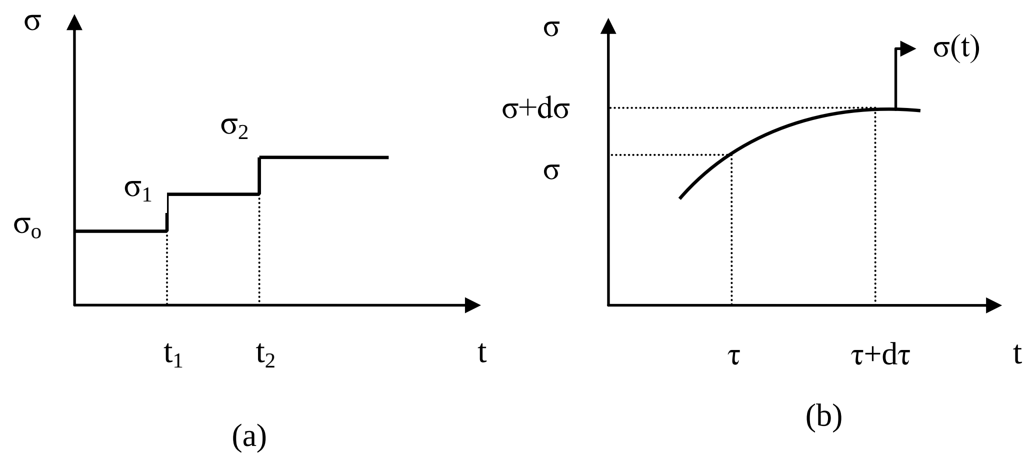
şekilde ifade edilebilir. Burada p_r ve q_r , malzemenin η viskoelastisite katsayıları ile *E* elastisite modullerinin birleşiminden meydana gelmiş katsayılardır. Ayrıca modeldeki elemanların özel olarak sıralanmasına bağlıdırlar. Özellikle serinin belli bir sayıda terimi seçildiğinde, lineer viskoelastik malzemenin özel bir tipinin mekanik davranışına ait bünye denklemini karakterize eder.

2.6. İntegral Form

Lineer viskoelastisitede süperpozisyon prensibi geçerlidir. Böylece, varolan problemin toplam sonucu, her bir sebebin sonuçlarının toplamına eşittir. Buna göre herhangi bir malzemeye Şekil 2.7.a’daki gibi basamak şeklinde gerilme uygulanırsa, yüklemeye yanıt olarak sünme,

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \sigma_1 J(t - t_1) + \sigma_2 J(t - t_2) + \ldots \tag{2.13}$$

biçiminde olacaktır. Burada J(t) sünme fonksiyonudur.



Şekil 2.7 σ – t diyagramı

Bu nedenle Şekil 2.7.b'deki gibi keyfi σ = σ(t) gerilme etkisi altındaki malzemede dσ büyüklüğü şeklinde ve herbirinin sonsuz küçük basamak yüklemeler olarak incelenebilir. Buna karşılık sünme davranışı,

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\,d\sigma$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \tag{2.14}$$

şeklinde integral alarak süperpozisyon ile bulunabilir. Bu tür integraller Bellekli (Hereditary) İntegraller olarak isimlendirilir. Böylece herhangi bir t zamandaki şekil değiştirmenin, uygulanan bütün gerilmenin etkisine bağlı olduğu görülmektedir.

Başlangıçta malzemeler için şekil değiştirme ve gerilmelerin sıfır olduğu söylenebilir. O zaman (2.14) ifadesinde, zamanın negatifliği söz konusu olamaz ve

$$\varepsilon(t) = \int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabilir.

Bundan başka, yüklenen gerilmelerin başlangıçta ani olarak yapıldığı düşünülürse t=0'daki σ(0) büyüklüğü de dikkate alındığı zaman genellikle,

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_{0}^{t} J(t-\tau)\frac{d\sigma}{d\tau}d\tau \tag{2.16}$$

formunda yazılır.

Yukarıdaki benzer düşünce ile, gerilmeler de zamanın bir fonksiyonu olarak,

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \qquad (2.17)$$

şeklinde şekil değiştirmeler integral içine sokularak gösterilebilir. Burada Y(t) gevşeme fonksiyonudur. Malzemeye t=0 anında bakılarak başlangıçta gerilme ve şekil değiştirmenin olmadığı düşünülerek, (2.15) ve (2.16) ifadeleriyle karşılaştırıldığında benzer şekildeki ifadeler,

$$\sigma(t) = \int_{0}^{t} Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \qquad (2.18)$$

ve

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)Y(t) + \int_{0}^{t} Y(t-\tau)\frac{d\varepsilon}{d\tau}d\tau \qquad (2.19)$$

olarak yazılabilir.

3. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

3.1. Sonlu Elemana Giriş

İnsanoğlunun artan bilimsel merakı ve bu hali ivmelendiren gelişen teknoloji dolayısıyla meydana çıkan işlemlerin karmaşıklığı her alanda olduğu gibi mekanikte de artık klasik yöntemlerden ziyade yaklaşık sonuçlar veren yöntemlerin kullanılmasını kaçınılmaz kılmıştır. Günümüzde sistematik yapısının bilgisayara uygulanabilirliği, yaklaşımdaki keskinliği ve hızı nedeniyle kompleks mekanik problemlerinin çözümünde başta gelen yöntemlerden birisi de Sonlu Elemanlar Yöntemidir (FEM). FEM'in temel ilkesi bir problemin tanımlı olduğu tanım kümesini daha basit alt kümelere ayırmak ve bu alt kümeler arası ilişkileri fizik kanunları ile bağıntılayarak problemin ayrık bir benzerini oluşturmaktır. Bu durumun getirdiği avantajlar incelenen probleme göre değişse de biz genel olarak yapı mekaniği için değişken geometrili, karma malzemeli sistemlerin analizine ilişkin olanları sıralayabiliriz. Gerçekten de kompleks geometrili olan bir sistem için en akılcı yol, incelemenin matematiksel olanaklar tanıdığı alt elemanlar oluşturmaktır. Bu şekilde ana sistem daha basit alt sistemlerin birleşik bir bütünüymüş gibi düşünülür. Sonlu Elemanlar Yöntemi'nde izlenen yolu genel olarak üç başlık altında özetleyebiliriz:

1. Bütünü parçalara bölmek: Bu şekilde kompleks geometrili kümeler, geometrisi basit alt kümelerin toplamı olarak işleme girmektedir.
2. Yakınsama fonksiyonlarının her eleman üzerinde türetilmesi: Yakınsama fonksiyonları her eleman üzerinde oluşturulan, genelde cebirsel polinomlardır.
3. Elemanların toplanması: Nodal değerler kullanılarak her parça için cebirsel ilişkilerin kurulması ve bütünün çözümü olacak şekilde bu parçaların birleştirilmesidir.

3.2. Sonlu Elemanlarda Yaklaşım

Genel olarak herhangi bir diferansiyel denklemin çözümünü problemin sınır şartlarını sağlayan N adet ψ_i fonksiyonlarının çözüm oluşması için belirlenmesi gereken u_i katsayıları ile çarpımının lineer toplamı şeklinde belirtilir. Buna göre bağımlı değişkeni u olan bir fonksiyon için

$$u \approx U_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \psi_i \tag{3.1}$$

kabulünü yaparak işimizin her eleman için önceden belirlenmiş ψ_i fonksiyonlarına çözüm olacak uygun u_i katsayılarının bulunması olduğunu söyleyebiliriz. ψ_i fonksiyonları ile çözüm olan u aynı boyutta oldukları için u' nun sağlaması gereken sınır koşulları ψ_i ifadeleri de sağlanmalıdır. Katsayıları belirlerken kullandığımız ifade

$$\int wRdx = 0 \tag{3.2}$$

şeklindedir. Bu ifadeye ağırlıklı integral denir. Yine burada R, U_N şeklinde yaptığımız çözüm kabulünün ilgili diferansiyel denkleme yerleştirilmesi ile elde edilen yeni diferansiyel denklem, artan olarak adlandırılır. w ise ağırlık fonksiyonu olarak ifade edilir. Çözümün yakınsaması için w'nin R'ye uygun olarak seçilmesi gerekir. Burada dikkat çeken husus U_N'nin yaklaşık olup "0"(sıfır) olmadığıdır. Aksi halde integral ifadenin sıfır edeceği aşikârdır.

Burada uygulayacağımız yaklaşık hesaplar ile ilgili olarak 'Varyasyon Hesabı' bahsine değinmek gereklidir. Varyasyon Hesabı (Değişim Hesabı) fiziksel anlamı olan ifadeleri ilgili fiziksel prensipler (örneğin minimum potansiyel enerji) gereği ekstremum yapan çözüm kabullerinin aranmasıdır. Buna göre bir problemin bağımsız değişkeni için

$$U_N = \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i + \phi_0 \tag{3.3}$$

şeklindeki çözümlerin arandığı, c_i katsayılarının belirlendiği ve bu amaç için yukarıda verilen benzer integral ifadelerin kullanıldığı yöntemlere genel olarak Varyasyonel yöntemler denir. Varyasyonel yöntemler, seçilen integral ifade, kullanılan ağırlık fonksiyonu (w) ve dolayısıyla başlangıçta kabul edilen belirli şartları sağlaması gereken ϕ_i fonksiyonları bakımından birbirlerinden ayrılırlar.

Varyasyon hesabı için bir takım kavramlara daha ihtiyaç vardır: Seçilen koordinat fonksiyonlarının (ϕ_i) matematiksel karakterinin belirtilmesi açısından süreklilik (continuity) tiplerini açıklamak gerekirse; Herhangi bir tanım kümesinde çeşitli sayıda bağımsız değişkenle tanımlanmış herhangi bir fonksiyonun m de dahil olmak üzere m kere kısmi türetilmesi mümkünse ve bu türevler sürekliyse bu tip fonksiyonlar ‘ C^m tipindedir’ diye adlandırılır. Buna göre C^0 tipindeki bir fonksiyonun ise sadece 1. türevleri mevcuttur fakat bu türevlerin sürekli olmaları gerekmez. Örneğin bağımsız değişken x olmak üzere $\frac{\partial f}{\partial x}$ bulunmalı ama sürekli olması şart değildir. İncelenen fonksiyon tek değişkenli ise tanım kümesi bir doğru veya eğri, iki değişkenli ise tanım kümesi bir yüzey mesela bir düzlem olabilir.

Sonlu Elemanlar Yöntemi’nde karşılaşılan problem tipleri

- Sınır Değer Problemi
- Başlangıç Değer Problemi
- Özdeğer Problemi

olarak sınıflandırabilir. Sınır değer probleminde diferansiyel denklemin bağımlı değişkeninin tanımlı olduğu kümenin sınırlarında önceden belirlenmiş bir takım değerleri alması öngörülür. Mesela ankastre bir kirişin eğilme problemi inceleniyorsa başlangıçta çökme ve dönmelerin her koşulda sıfır ön değerini alması gerekir. Bu şartlar problemin çözülebilmesi için gereken verilerin bir kısmını oluşturmaktadır. Başlangıç değer problemleri ise genelde zaman alanında tanımlı olup örneğin zamanın başlangıcında t=0 iken problemin bağımlı değişkenlerine ön değerler atanmaktadır. Özdeğer problemleri ise diferansiyel denklemlerde çözüm oluşturacak bazı özel değerlerin hesap edilmesini içermektedir. Yukarıda ifade edilen sınır ve/veya başlangıç koşulları sıfır ise homojen aksi halde ise homojen olmayan denklemler söz konusudur.

3.2.1. Fonksiyonel kavramı

Varyasyonel işlemlerin temel matematik denklemlerini kurarken en çok karşılaşılan ifadelerden olan fonksiyonel kavramı, kısaca fonksiyonların fonksiyonu olarak açıklanabilir.

$$I(u) = \int_a^b F(x,u;u^l)dx \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilebilen en basit fonksiyonel bağımsız değişken x, bağımlı değişken u ve onun türevi $\frac{du}{dx}$ 'i içeren bir integral ifadedir. İntegralin değeri u'ya bağlı olduğundan I(u) şeklinde yazılmıştır. Burada I(u) skaler bir büyüklüktür.

3.2.2. Varyasyonel sembol

I(u) fonksiyoneli keyfi fakat sabit bir x noktası için u ve $\frac{du}{dx}$ değerlerine bağlıdır. u' nun değerindeki αv gibi bir değişim (α sabit olmak üzere) δu ile gösterilir ve buna u'nun varyasyonu denir.

$$\delta u = \alpha v \tag{3.5}$$

δ operatörüne varyasyonel sembolü adı verilir. Söylediklerimizi toparlayacak olursak δu, u fonksiyonunun keyfi sabit bir x noktası için kabul edilebilir değişimini ifade etmektedir. Sınır durumda veya u'nun değişimi sıfır olacağı için tanım gereği δu=0 olmalıdır, çünkü u sabittir. Varyasyonel artım sanaldır. u→u + δu olurken I(u) da değişir. I(u)'nun içindeki varyasyonel artım ise,

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dikkat edilirse x sabit olduğu için dx=0 alınmış ve bu terim düşmüştür. Bu ifadeden ve tanımdan anlaşılacağı üzere δ ve ∂ operatörleri arasında tam bir analoji vardır. Buradan hareketle:

$$\frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{d}{dx}(\alpha u) = \alpha u' = \delta u' = \delta\left(\frac{du}{dx}\right) \tag{3.7}$$

$$\delta\int u dx = \alpha\int u dx = \int \alpha u dx = \int \delta u dx \tag{3.8}$$

eşitlikleri kolayca bulunabilir.

3.3. Zayıf Formülasyon

Herhangi bir problemin matematiksel modelini oluşturan diferansiyel denklemle meydana getirilmiş ağırlıklı integral ifadede türev işleminin ağırlık fonksiyonu üzerine dağıtılması ile elde edilen yeni yapıya denklemin zayıf formu denir. Bu işlem için kısmi integrasyon kullanılır. Bu şekilde, probleme ait bir grup özel sınır koşulu da denkleme sokulmuş olur. Önceden hatırlanacağı gibi ağırlıklı formu oluşturmanın amacı yapılan yaklaşık tahmindeki katsayıları çözüm olacak şekilde belirleyebilecek

N adet bağımsız lineer denklem bulmak idi. Bunun için de N adet lineer bağımsız ağırlık fonksiyonu(w) seçilmesi gerekir.

3.3.1. Bir denklemin zayıf formunun oluşturulması

Bu işlemi üç adımda açıklamak mümkündür:

1. Diferansiyel denklemde bütün terimler bir tarafa toplanır ve w ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak tanım kümesi üzerinde integre edilir. Daha önce de belirtildiği gibi u yerine yaklaşığı olan U_N konulacağı için integral ifade sıfır etmeyecektir. Bundan sonra seçilecek N adet lineer bağımsız w için kurulacak N ayrı denklemle U_N fonksiyonundaki belirsiz katsayılar hesaplanır. Dolayısıyla w=0 seçilmesi uygun olmaz. Genel olarak w fonksiyonu u'dan daha düşük seviyede süreklilik gerektirir.
2. İntegral ifade bu şekliyle w için kabuller yapılarak çözülebilir ancak bu durumda ϕ_i fonksiyonları yeterli sürekliliğe sahip olmalıdır. Eğer türev U_N ve w üzerine dağıtılırsa ϕ_i fonksiyonlarının gerçeklemesi gereken süreklilik şartları hafifleyecektir. Bu yüzden zayıflatılmış süreklilik koşullarına izafeten bu yapıya zayıf form denmektedir. Bu durumun iki önemli avantajı vardır:

a) Bağımlı değişken için daha az süreklilik ve çözümün ilerleyen safhalarında görüleceği üzere katsayıların simetrik çıkması dolayısıyla denklem takımının kolay çözülebilmesi.

b) Doğal sınır koşulları adını verdiğimiz tipteki sınır koşullarının problemin içine dahil edilebilmesi sonucu U_N kabulünün sadece esas tipte sınır koşullarını sağlamasının yeterli oluşu.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta da türevin eşit dağıtılabilmesi için bağımlı değişkenin çift mertebede türeve sahip olması gerektiğidir. Bu dağıtımın yapılabilmesi için sürekliliğe bakılmaksızın fiziksel anlamı olan sınır koşullarının denkleme sokulması gerekir.

İntegral ifadede sınır koşulları gösteren terimde w ve/veya w' (ağırlık fonksiyonu veya onun türevi) fonksiyonlarının katsayılarına ikincil değişken denir. Bu ikincil değişkenlerin sınırlarda belirtilmesiyle doğal sınır koşulları elde edilir. Ikincil değişkenler daima fiziksel bir anlama sahiptirler. Sınır terimde geçen ve problemin bağımlı değişkeni olan u ise birincil değişken olarak adlandırılır. Yine sınır koşullarının u fonksiyonuna atanmasıyla esas sınır koşulları elde edilir. Birincil ve ikincil değişkenlerin sayısı incelenen problemin diferansiyel denkleminin mertebesine bağlıdır. Matematiksel olarak her birincil değişken için bir ikincil eş değişken vardır. Buna örnek olarak yapı problemlerinin sonlu eleman analizinde uç deplasmanları ile uç kuvvetleri arasındaki ilişki verilebilir. Birincil değişkenlerin sayısı ile ikincil değişkenlerin sayısı eşit olmalıdır. Burada dikkat edilmesi gereken noktalardan en önemli olanı bir sınır noktasında eş olan birincil ve ikincil değişkenlerden sadece bir tanesinin belitilebilecek olmasıdır. Çünkü eş olan birincil ve ikincil değişkenler birbirine bağımlı olup denklemlerde biri yekdiğeri ile bulunacaktır.

3. Bu adımda yapılacak işlem, bir önceki adımda zayıf formunu oluşturduğumuz denkleme sınır şartlarını dahil etmektir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, esas sınır koşullarının belirtildiği sınırlarda w ağırlık fonksiyonunun kaybolması gerektiğidir. Bunun sebebi zayıf formülasyonda w'nin birincil değişkenin varyasyonu olarak düşünülmesidir. Birincil değişken sınır koşullarında sabit bir değer aldığından onun varyasyonu olan w fonksiyonu da sıfır değerini alacaktır. Yani $u(0)=u_0$(sabit) ise $w(0)=0$ olacaktır.

3.3.2. Lineer ve bilineer formlar ile kuadratik fonksiyoneller

Bir diferansiyel denklemin zayıf formu, aynı diferansiyel denklemden oluşturulan kuadratik fonksiyonelin minimumuna karşılık gelir. Zayıf formdaki terimleri u ve w fonksiyonlarını birlikte içerenler ve sadece w fonksiyonunu içerenler olarak ikiye ayırıp, ilkine B(w,u) ve ikincisine de l(w) diyelim. Bu ayrımdan sonra zayıf form,

$$B(w,u) - l(w) = 0 \tag{3.9}$$

haline gelir ve böylelikle problem,

$$B(w,u) = l(w) \tag{3.10}$$

koşulunu sağlayacak uygun u fonksiyonunu bulmaya indirgenmiş olur.u^* gerçek çözüm olmak üzere; w ağırlık fonksiyonu, u^* ın varyasyonu olarak ele alınır,

$$u = u^* + w \tag{3.11}$$

kabul edilirse, u'nun ve u^* ın da esas sınır koşullarını sağlamaları gerekeceğinden, w'nin esas sınır koşullarının homojen halini sağlaması gerektiği ortaya çıkar. (3.7) ifadesine göre w, $w=\delta u$ çözümünün varyasyonu olduğundan,

$$0 = B(\delta u,u) - l(\delta u) \tag{3.12}$$

yazılabilir.

B(w,u) bilineer ve simetrik, l(w) lineer ise,

$$0 = \delta[1/2B(u,u)] - \delta[l(u)]$$

$$0 = \delta[I(u)] \qquad (3.13a)$$

elde edilir.

$$I(u)= 1/2B(u,u) - l(u) \qquad (3.13b)$$

bulunur.

(3.13a) ifadesi I(u) fonksiyonelinin ekstremum değere sahip olması için gereken şartı gösterir. Katı cisimler mekaniğinde, I(u) toplam potansiyel enerji prensibini temsil eder. Buna göre:

"Toplam potansiyel enerji I(u)'yu minimum yapan, kabul edilebilir bütün u çözümleri, aynı zamanda diferansiyel denklemi ve doğal sınır koşullarını da sağlar."

Diğer bir deyişle, zayıf form, toplam potansiyel enerjinin minimumuna karşılık gelmektedir.

3.4. Tipik Bir Problemin Sonlu Eleman Analizindeki Basamaklar

Çözüme ulaşılabilmesi için yapılması gerekenler kolaylık olması bakımından adım adım açıklanırsa;

1) Ayrıklaştırma: Verilen bir kümenin önceden belirlenmiş sonlu elemanlara ayrıştırılması ve bu şekilde kümenin sembolize edilmesi.

a) Sonlu Eleman Ağının Oluşturulması: Bu ağ bütün kümenin parçalanmış haldeki elemanlarının sınırlarını ve kesişim noktalarını gösterir.

b) Birleşim Noktalarına ve Elemanlara Numara Verilmesi: Eleman numaraları kimlik kartı vazifesi görürken, birleşim noktalarının numaralandırılması da elemanların birbirlerine göre konumlarını belirtmektedir.

2) Ağdaki her tip eleman için eleman denklemlerinin türetilmesi.

a) Verilen diferansiyel denklemin bir tip eleman üzerinde varyasyonel formunun oluşturulması.

b) Daha önce bahsedilen $u \approx U_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \psi_i$ kabulüyle adım 2a'ya gidilerek

$$[K^e]\{u^e\}=\{F^e\} \qquad (3.14)$$

şeklinde eleman denkleminin bulunması. Burada ilk kısım eleman rijitlik matrisi ve bunun çarpanı ise birincil bilinmeyenlerdir. Eşitliğin karşısındaki ise ikincil bilinmeyenlerdir.

c) Eleman enterpolasyon fonksiyonlarının (ϕ_i) ve eleman matrislerinin elde edilmesi.

3) Her eleman için yukarıda takip edilen işlemler neticesinde bulunan denklemlerin toplanması.

a) Elemanlar arası süreklilik koşullarının dikkate alınarak birincil değişkenlerin(u) kullanılmasıyla yerel ve genel ilişkilerin kurulması

b) Denge şartlarının tespiti için ikincil değişkenlerin(F) göz önüne alınması.

c) 3a ve 3b'yi kullanarak eleman denklemlerinin toplanması.

4) Sınır koşullarının denkleme sokulması.

5) Yukarıdaki işlemler neticesinde elde edilen denklemin çözümü.

6) Sonuçlar üzerindeki ileri işlemler

a) Bulunan birincil değişkenlerden istenen diğer değerlerin hesaplanması.

b) Sonuçların tablo veya grafik formunda gösterilmesi.

3.5. Çözümün Yakınsaması

Zayıf form doğal sınır koşullarını kısmi integrasyonla içermektedir. Yaklaşım fonksiyonları düğüm noktalarındaki birincil değişkenlerin(u) önceden belirlenmiş değerleri alabileceği şekilde seçilmelidir. Sonlu elemanlarda kullanılan enterpolasyon fonksiyonları genelde cebirsel polinomlar olarak seçilirler. Bunun iki ana nedeni vardır: Birincisi, sistematik olarak sayısal analizin enterpolasyon teorisini kullanma imkanı doğar; İkincisi, sayısal integrasyon polinomlar için uygun ve kolaydır. Burada dikkat edilmesi gereken kısım yaklaşımın sağlanabilmesi için seçilecek polinomların birtakım özelliklere sahip olması gerektiğidir.

Buna göre:

1) Seçilen fonksiyon eleman üzerinde devamlı olmalı ve zayıf formun gerektirdiği sayıda türevlenebilmeli. Yani en az bir türevinin olması gerekirse en küçük polinomun birinci derece(a+bx) olacağı aşikârdır.

2) İfade tam seri bir polinom olmalı yani içinde bağımsız değişkenin en küçük derecelisinden en büyük derecelisine kadar bütün mertebeleri bulundurmalıdır.

3) Birincil değişkenin düğüm noktaları için enterpolant olmalıdır.

İlk özellik, denklemin sıfır olmamasını garanti ederken, ikinci özellik ise çözüme ait bütün formları yakalamayı amaçlar. Son özellik ise polinomların düğüm noktalarında esas değerleri sağlamaları gerektiğini belirtir.

Çözümü oluşturacak enterpolasyon fonksiyonları,

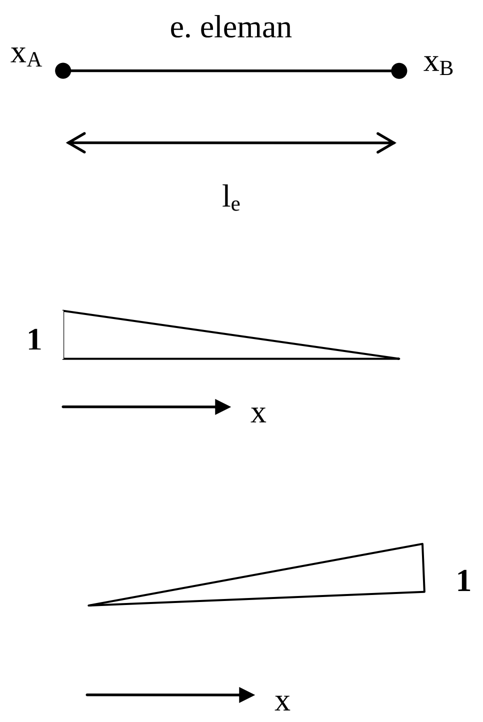
$$\phi_1 = (1 - \frac{x}{l_e}) \quad , \quad \phi_2 = \frac{x}{l_e} \tag{3.15}$$

şeklindedir.

Böylece genel olarak enterpolasyon ifadesi,

$$u \approx U^e(x) = \phi_1(x)u_1 + \phi_2(x)u_2 = \sum_{i=1}^{N} \phi_i u_i \tag{3.16}$$

olarak bulunur.



Şekil 3.1 İki nodlu bir eleman için yaklaşım fonksiyonları

Görüldüğü gibi her yaklaşım fonksiyonu çarpanı olduğu noktada 1, çarpanı olmadığı noktada 0 değerini almaktadır. Eğer eleman boyunca $u_s=u_1=u_2$ olmak üzere, herhangi bir x noktasında $u(x)=u_s$ olması gerektiğinden yaklaşım fonksiyonlarının eleman boyunca herhangi bir x noktasında toplamlarının 1 edeceği aşikârdır.

$$\sum_{i=1}^{N} \phi_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{d\phi_i}{dx} = 0 \tag{3.17}$$

olacağı kolayca anlaşılmaktadır.

Bir eleman üzerinde oluşturulmak istenen yaklaşım fonksiyonunun derecesi n ise n+1 adet bilinmeyen olacağından yaklaşım fonksiyonları kurabilmek için eleman üzerinde n+1 adet nokta alınmalıdır. Buna göre örneğin 2. mertebeden kuadratik bir fonksiyon için $u(x)=a+bx+cx^2$ formunda olacağı için eleman üzerinde en az 3 nokta almak gerekecektir.

3.6. Elemanların Birleştirilmesi

Elemanların düğüm noktalarında tek adet birincil değişken olacağından bütün elemanlar için bu ifadelerin düğüm noktası sayısı ile ifade edilmesi gerekir. Buna göre örneğin 1. elemanın 2. noktası ile 2. elemanın 1. noktasında birincil değişkenler yerine sadece u_2 demek yeterli olacaktır. İkincil değişkenler için ise eğer göz önüne alınan düğüm noktasına dış kuvvet etkimiyorsa bu ikincil değişkenlerin toplamı olacak ifade 0 değerini alacaktır. Çünkü eleman uç kuvvetleri kendi aralarında dengede olup toplamları daima 0 eder. Eğer noktaya dış kuvvet etkiyor ise ikincil değişkenlerin toplamı bu kuvvete eşdeğer olacaktır.

4. GENEL KİRİŞ TEORİLERİ

4.1. Bernoulli - Euler Kiriş Teorisi

Bu teoriye göre kesitlerin eğilmeden(deformasyon) sonra düzleme ve elastik eğriye dik kaldığı kabul edilir. Kesme kuvvetinin elastik eğri oluşumuna katkısı ihmal edilmiştir. Bu kabul, yükün tekil ve büyük, açıklığın kiriş yüksekliğine oranının küçük, kesitin putrel veya sandık gibi ince olması durumları dışında büyük geçerliliğe sahiptir. Denge denklemlerini ifade edersek:

$$-\frac{dT}{dx} = q(x)\,,\; T = \frac{dM}{dx} \quad ,\; M = -EI(x)\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada w çökmeyi, M momenti, T kesme kuvvetini ve q(x) ise yayılı yükü göstermektedir. Buradaki w'nin ayrıca çözüm olabilmesi için belirli sınır koşullarını da sağlaması gerekir. Denklemler yukarıdaki sırasıyla birbiri içinde yazılarak,

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2 w}{dx^2}\right] = q(x) \tag{4.2}$$

elde edilir.

4.1.1. Zayıf formülasyon

(4.2) ifadesi υ ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak eleman üzerinde integre edildiğinde,

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} v\left[\frac{d^2}{dx^2}\left[EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right] - q\right]dx \tag{4.3}$$

formunu alır. (4.3) ifadesi iki kez kısmi integrasyona tabi tutulduğunda,

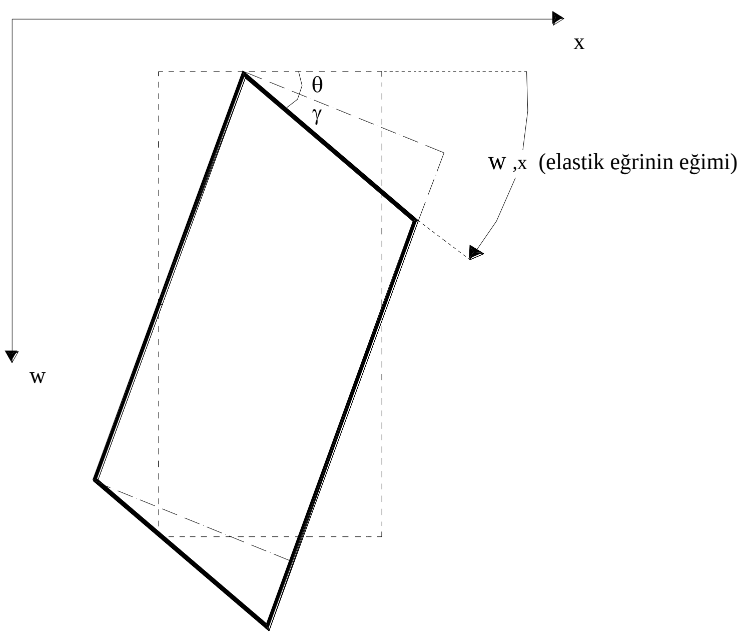
$$0 = \int_{X_A}^{X_B}\left[EI\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{d^2 w}{dx^2} - vq\right]dx + \left[v\frac{d}{dx}\left[EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right] - \frac{dv}{dx}EI\frac{d^2 w}{dx^2}\right]_{X_A}^{X_B} \tag{4.4}$$

zayıf form elde edilir.

Sınır terimlerin incelenmesinden w (çökme) ve $\frac{dw}{dx}$ (dönme)'nin birincil, moment ve kesme kuvvetinin ikincil tipte değişkenler oldukları anlaşılır. Buradan hareketle, w ve θ Esas Sınır Koşulları, M ve V ise Doğal Sınır Koşulları olmak üzere, problemin dört adet sınır koşulu vardır.

4.2. Timoshenko Kiriş Teorisi

Bu teoriye göre kaymanın elastik eğriye yaptığı etki ihmal edilmeyerek hesaba katılır. Deformasyondan sonra kesitlerin düzlem kaldığı kabul edilmekle beraber, elastik eğriye dik olmayıp belli bir açı ile geldikleri düşünülür. Bu durumda Timoshenko Kirişi'nde kesitin toplam dönmesi, Şekil 4.1'de de görüldüğü gibi eğilmeden gelen kısım ile kesmeden gelen kısmın toplamına eşit olacaktır. Bu problemde kesitin dönme ataleti hesaba katılmayacaktır.



Şekil 4.1 Eğilme ve kayma etkisi sonucu deforme olmuş kiriş elemanı

w deplasman, θ eğilme deformasyonu, γ kayma açısı olmak üzere;

$$w_{,x} = \theta + \gamma \tag{4.5}$$

Denge denklemleri ise,

$$M_{,x} = T \tag{4.6}$$

$$T_{,x} = -q \tag{4.7}$$

şeklindedir.

Kuvvet yer değiştirme bağıntıları ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$M = -EI\theta_{,x} \tag{4.8}$$

$$T = GAk_s\gamma \tag{4.9}$$

(4.9) ifadesinde $G = \dfrac{E}{2(1+v)}$ kayma modülünü, k_s ise kayma düzeltme faktörünü belirtmektedir. Dikdörtgen kesitler için, ν Poisson oranı olmak üzere, $k_s = [10(1+v)]/(12+11v)$, dairesel kesitler içinse genellikle k_s = 0.9 olarak alınmaktadır (Cowper, 1966).

(4.6) ve (4.9) ifadeleri kullanılarak, kayma açısı

$$\gamma = M_{,x} / GAk_s \tag{4.10}$$

elde edilir.

(4.5), (4.6), (4.8), (4.9) ve (4.10) ifadelerinden, yönetici denklemler

$$M_{,xx} = -q \tag{4.11}$$

$$w_{,xx} = \theta_{,x} + \gamma_{,x} = -\frac{M}{EI} + \frac{M_{,xx}}{GAk_s} \tag{4.12}$$

olarak bulunur.

4.2.1. Zayıf formülasyon

(4.11) ve (4.12) ifadeleri ağırlık fonksiyonları ile çarpılıp sonrasında integre edilerek zayıf formları elde edilir. u ve v ağırlık fonksiyonları olmak üzere;

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} u(M_{,xx} + q)dx \tag{4.13}$$

$$0 = \int_{x_A}^{x_B} v\left[w_{,xx} + \frac{M}{EI} - \frac{M_{,xx}}{GAk_s} \right] dx \tag{4.14}$$

elde edilir. Her ifade birer defa kısmi integrasyona tabi tutulursa;

$$0 = -\int_{x_A}^{x_B} (u_{,x}M_{,x} - uq)dx - u(x_A)M_{,x}(x_A) + u(x_B)M_{,x}(x_B) \tag{4.15}$$

$$0 = -\int_{x_A}^{x_B} \left(v_{,x}w_{,x} - \frac{vM}{EI} - \frac{v_{,x}M_{,x}}{GAk_s} \right) dx - v(x_A)\left[w_{,x} - \frac{M_{,x}}{GAk_s} \right]\Bigg|_{x_A} + v(x_B)\left[w_{,x} - \frac{M_{,x}}{GAk_s} \right]\Bigg|_{x_B} \tag{4.16}$$

formuna girer.

4.2.2. Karışık sonlu eleman formülasyonu

(4.15) ve (4.16) ifadelerinin sınır terimlerindeki u ve v ağırlık fonksiyonlarının katsayıları sırasıyla T ve θ 'dır. Burada T kesme kuvvetini, θ ise dönmeyi belirtmektedir. u'nun çökme boyutunda(w) ve v'nin ise moment boyutunda(M) seçilmesi terimlerin birimlerini enerji yapar. İşlemlerin varyasyonel olarak yürütülebilmesi için u ≈ δw ve v ≈ δM alınırsa ifadeler toplam potansiyel enerjinin minimum olması koşuluna indirgenebilir. Bu hale ait denklemler ise,

$$0 = -\delta \int_{x_A}^{x_B} \left(w_{,x} M_{,x} - wq \right) dx - \delta w(x_A) M_{,x}(x_A) + \delta w(x_B) M_{,x}(x_B) \tag{4.17}$$

$$0 = -\delta \int_{x_A}^{x_B} \left(M_{,x} w_{,x} - \frac{M^2}{2EI} - \frac{M_{,x}^2}{2GAk_s} \right) dx - \delta M(x_A) \left[w_{,x} - \frac{M_{,x}}{GAk_s} \right]_{x_A} + \delta M(x_B) \left[w_{,x} - \frac{M_{,x}}{GAk_s} \right]_{x_B} \tag{4.18}$$

biçimindedir. Sınır terimleri yorumlandığında, w ve M'nin esas sınır koşullarını, V($M_{,x}$) ve θ 'nın da doğal sınır koşullarını teşkil ettiği görülmektedir. Burada ifade edildiği üzere, kuvvet ve deplasman olarak farklı türden birincil değişkenlerin bir arada bulunduğu formülasyonlara "Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu" denir.

Esas Sınır Koşulları : w ve M (birincil değişkenler)

Doğal Sınır Koşulları: θ ve $M_{,x}$ (ikincil değişkenler)

şeklinde ifade edilebilir.

4.2.3. Sonlu eleman modeli

Sonlu eleman modelini oluşturmak için yaklaşım fonksiyonları (Reddy, 1993)

$$w = \sum_{j=1}^{m} w_j \psi_j \tag{4.19}$$

$$M = \sum_{j=1}^{n} M_j \phi_j \tag{4.20}$$

şeklinde seçilerek (4.19) ve (4.20)'de verilen zayıf formlarda yerine yerleştirilir. $\phi_i = \psi_i$ ve n=2 alınarak buradan sonlu eleman denklemi,

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^1 \\ F^2 \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

formuna girmiş olur.

Matris terimlerini açık olarak ifade edersek,

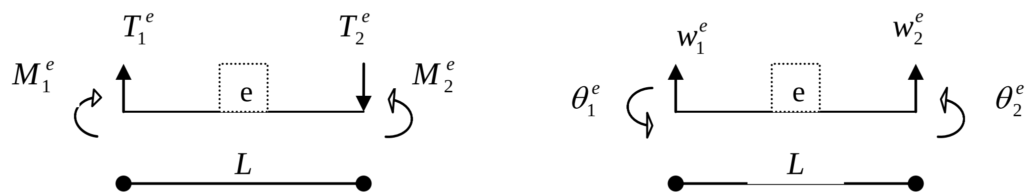
$$K_{ij}^{11} = 0 \qquad K_{ij}^{12} = \int_{x_A}^{x_B} \psi_{i,x}\phi_{j,x}dx \qquad F_i^1 = \int_{x_A}^{x_B} (\psi_i q)dx - \psi_i(x_A)T_1 + \psi_i(x_B)T_2$$

$$K_{ij}^{21} = K_{ji}^{12} \qquad K_{ij}^{22} = \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{\phi_i\phi_j}{EI} + \frac{\phi_{i,x}\phi_{j,x}}{GAk_s} \right\} dx \qquad F_i^2 = -\phi_i(x_A)\theta_1 + \phi_i(x_B)\theta_2$$

$$T_1 = M_{,x}(x_A) \qquad T_2 = M_{,x}(x_B)$$

$$\theta_1 = \left(w_{,x} - \frac{M_{,x}}{GAk_s} \right)\Bigg|_{x_A} \qquad \theta_2 = \left(w_{,x} - \frac{M_{,x}}{GAk_s} \right)\Bigg|_{x_B} \tag{4.22}$$

şeklindedir. T_i ve $\theta_i (i = 1,2)$ uç nodlarda w ve M ile birleşen ikincil değişkenlerdir (Bkz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2 L uzunluğundaki bir e elemanındaki uç kuvvetler ve yer değiştirmeler

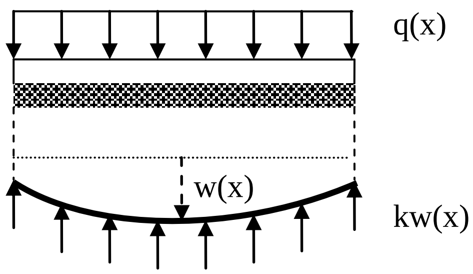
5. KİRİŞİN KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

5.1. Kuvvet Dengesinden Zayıf Formun Elde Edilmesi

Şekil 5.1'de görülen Winkler zeminine oturan kirişe etkiyen q(x) yayılı yükü kirişe w(x) çökmelerini yaptırır ve zeminden kw(x) tepkilerini görür. Burada *k* zemin yatak katsayısı olup kiriş genişliği ile çarpılarak alınmıştır. Bu durumda kirişe etkiyen bileşke yüklerin q(x) - kw(x) şeklinde alınması uygun olacaktır. Kirişin elemanter bir parçasına etkiyen atalet kuvveti, ρ birim boy kütlesi, $\ddot{w}$ çökmenin zamana göre ikinci türevi olmak üzere, $\rho\ddot{w}$ olarak kuvvet dengesinin içine katılır. Elde edilen denge denklemi,

$$M_{,xx}(x,t) + q(x,t) - kw(x,t) - \rho\ddot{w}(x,t) = 0 \tag{5.1}$$

şeklindedir.



Şekil 5.1 Winkler zeminine oturan kiriş

Zayıf formu elde etmek için kuvvet dengesinin Laplace dönüşümü alınarak ağırlık fonksiyonunun Laplace dönüşmüşü olan $\bar{u}$ ile çarpılır ve sıfırdan L 'ye integre edilir.

$$\int_0^L \bar{u}\,[M_{,xx}(x,t) + q(x,t) - kw(x,t) - \rho\ddot{w}(x,t)]\,dx = 0 \tag{5.2}$$

$$\int_0^L \bar{u}\left[\overline{M}_{,xx} + \bar{q} - k\bar{w} - \rho(s^2\bar{w} - sw(x,0) - \dot{w}(x,0))\right]dx = 0 \tag{5.3}$$

(5.3) ifadesinde görülen $\bar{u}, \bar{M}_{,xx}$, $\bar{q}$, $\bar{w}$ gösterimleri u, $M_{,xx}$, q , w ’nin Laplace dönüşmüşlerini simgelemektedir. Laplace operatörü uygulandıktan sonra türev mertebelerini eşitlemek amacıyla kısmi integrasyona tabi tutulan denklem,

$$-\int_0^L \bar{u}_{,x}\, \bar{M}_{,x}\, dx + \int_0^L \bar{u}\,\bar{q}\, dx - \int_0^L \bar{u}(k+\rho s^2)\bar{w}\, dx + \int_0^L \bar{u}\rho\, s w(x,0)\, dx + \int_0^L \bar{u}\rho \dot{w}(x,0)\, dx + \left.\bar{u}\bar{M}_{,x}\right|_0^L = 0$$

(5.4)

şeklini alır. Burada sınır terimleri incelendiğinde, $\bar{M}_{,x}$ terimi (4.6) ifadesinde de belirtildiği gibi problemin kesme terimine yani $\bar{T}$ ’ye eşit olacağı için aşağıdaki şekilde bir değişiklik yapabilmek mümkündür:

$$-\int_0^L \bar{u}_{,x}\, \bar{M}_{,x}\, dx + \int_0^L \bar{u}\,\bar{q}\, dx - \int_0^L \bar{u}(k+\rho s^2)\bar{w}\, dx + \int_0^L \bar{u}\rho\, s w(x,0)\, dx + \int_0^L \bar{u}\rho \dot{w}(x,0)\, dx + \left.\bar{u}\bar{T}\right|_0^L = 0$$

(5.5)

Böylelikle kuvvet dengesinden zayıf form teşkil edilmiş olur.

5.2. Moment Dengesinden Zayıf Formun Elde Edilmesi

Moment dengesinden yazılan (4.12) yönetici denklemi düzenlenirse,

$$w_{,xx} + \frac{M}{EI} - \frac{M_{,xx}}{GAk_s} = 0 \tag{5.6}$$

bulunur. $w_{,xx}$ ’e (4.5) ifadesinin x’e göre türevi alınarak ulaşılacağı aşikârdır.

$$w_{,xx} = \theta_{,x} + \gamma_{,x} \tag{5.7}$$

Viskoelastik malzemelerin bünye bağıntıları bellekli (hereditary) integral formda (2.19) denkleminden kısmi integrasyon ile, uzamaya karşı (Flügge, 1975):

$$\sigma(t) = Y(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \frac{dY(t-\tau)}{d(t-\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau \tag{5.8}$$

kaymaya karşı,

$$\tau(t) = Y_1(0)\gamma(t) + \int_0^t \frac{dY_1(t-\tau)}{d(t-\tau)}\gamma(\tau)d\tau \tag{5.9}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada Y(t), Y_1(t) sırasıyla normal ve kayma gerilmelerine karşı gelen gevşeme modülüdür. Denklem (5.8) ve (5.9)'un ters ilişkileri de J(t) ve J_1(t) sünme fonksiyonları olmak üzere, (2.16) denkleminden kısmi integrasyon ile,

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)}\sigma(\tau)d\tau \tag{5.10}$$

ve kayma terimi için,

$$\gamma(t) = J_1(0)\tau(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)}\tau(\tau)d\tau \tag{5.11}$$

şeklinde yazılabilir.

Enkesit üzerinde ortalama kayma gerilmesi olarak,

$$\tau(t) = \frac{T(t)}{Ak_s} \tag{5.12}$$

yazılabilir. γ teriminin yerine (5.11) bünye denklemi kullanılarak,

$$\gamma(t) = \frac{1}{k_s A}\left\{ J_1(0)T(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)}T(\tau)d\tau \right\} \tag{5.13}$$

bulunur. (5.13) denkleminin x'e göre bir kere türevi alındığında,

$$\frac{d\gamma(t)}{dx} = \frac{1}{k_s A}\left\{ J_1(0)\frac{d^2M(t)}{dx^2} + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)}\frac{d^2M(\tau)}{dx^2}d\tau \right\} \tag{5.14}$$

elde edilir. Bernoulli-Navier prensibine göre düzlem kesitlerin eğilmeden sonra düzlem kalması kuralı geçerli olduğundan,

$$\varepsilon = \theta(t)\, y \tag{5.15}$$

denklemi yazılarak denklemin her iki tarafı y ile çarpılıp alan üzerinde integre edilirse,

$$\theta(t)\int_A y^2 dA = J(0)\int_A \sigma(t)ydA + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau \int_A \sigma(\tau)ydA \tag{5.16}$$

bulunur.

$$M\ (t) = \int_A \sigma y dA \tag{5.17}$$

olduğundan (5.16) ifadesi,

$$\theta(t)I = J(0)M(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M(\tau)d\tau \tag{5.18}$$

şeklinde gösterilebilir. Bu ifadenin x'e göre türevi alındığında,

$$\theta,_x(t) = -\frac{1}{I}\left\{ J(0)M,_x(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M,_x(\tau)d\tau \right\} \tag{5.19}$$

bulunur. (5.14) ve (5.19) ifadeleri, (5.7)'de yerine yazıldığında aşağıdaki formu alır.

$$w,_{xx} = -\frac{1}{I}\left\{ J(0)M,_x(t) + \int_0^t \frac{dJ(t-\tau)}{d(t-\tau)} M,_x(\tau)d\tau \right\} + \frac{1}{k_s A}\left\{ J_1(0)M,_{xx}(t) + \int_0^t \frac{dJ_1(t-\tau)}{d(t-\tau)} M,_{xx}(\tau)d\tau \right\} \tag{5.20}$$

Görüldüğü gibi denklemin sağ tarafı aynı argümanlı ifadeleri bünyesinde barındırmaktadır. Burada Konvolüsyon teoreminin tanımı hatırlanacak olursa;

$$\Lambda\left[\int_0^t f(t-u)g(u)du \right] = \Lambda\left[\int_0^t g(t-u)f(u)du \right] = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \tag{5.21}$$

Zamana göre birinci türevin Laplace dönüşümü ise (Kreyszig, 1993):

$$\Lambda\left[\frac{df(t)}{dt} \right] = s\bar{f}(s) - f(0) \tag{5.22}$$

şeklindedir. (5.21) ve (5.22)'deki tanımları göz önüne alarak, zamana bağlı ifadeleri ortadan kaldırmak amacıyla (5.20) ifadesine Laplace dönüşümü uygulandığında denklem,

$$\overline{w},_{xx} + \frac{s}{I}\{\bar{J}\,\overline{M},_x\} - \frac{s}{k_s A}\{\bar{J}_1\overline{M},_{xx}\} = 0 \tag{5.23}$$

formuna girer.

Elde edilen (5.23) denklemine sonlu eleman formülasyonu uygulamak için denklem ağırlık fonksiyonunun dönüşmüşü olan $\bar{v}$ ile çarpılarak, sınır üzerinde integre edilirse,

$$\int_0^L \bar{v}\left(w,_{xx} + \frac{s}{I}\{\bar{J}\,\overline{M},_x\} - \frac{s}{k_s A}\{\bar{J}_1\overline{M},_{xx}\} \right)dx = 0 \tag{5.23}$$

elde edilir.

Türev mertebelerini eşitlemek için kısmi integrasyon uygulandığında;

$$-\int_0^L \bar{v},_x \bar{w},_x dx + \frac{1}{I}\int_0^L \bar{v}\{s\bar{J}\,\overline{M},_x\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \bar{v},_x \{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}dx + \bar{v}\,\bar{w},_x\Big|_0^L - \frac{\bar{v}}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}\Bigg|_0^L = 0$$

(5.24)

Sınır terimleri düzenlendiğinde,

$$-\int_0^L \bar{v},_x \bar{w},_x dx + \frac{1}{I}\int_0^L \bar{v}\{s\bar{J}\,\overline{M},_x\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \bar{v},_x \{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}dx + \bar{v}\left(\bar{w},_x\Big|_0^L - \frac{1}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}\Bigg|_0^L\right) = 0$$

(5.25)

elde edilir. Burada parantez içindeki ifadeye,

$$\left(\bar{w},_x\Big|_0^L - \frac{1}{k_s A}\{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}\Bigg|_0^L\right) = \bar{\theta}\Big|_0^L \qquad (5.26)$$

şeklinde bir gösterim yapılması uygun olacaktır. (5.25) ifadesi düzenlendiğinde aşağıdaki formu alır:

$$-\int_0^L \bar{v},_x \bar{w},_x dx + \frac{1}{I}\int_0^L \bar{v}\{s\bar{J}\overline{M}\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \bar{v},_x \{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}dx + \bar{v}\bar{\theta}\Big|_0^L = 0 \qquad (5.27)$$

Böylelikle moment dengesinden zayıf form teşkil edilmiş olur.

5.3. Zayıf Formlar Kullanılarak Fonksiyonelin Elde Edilmesi

(5.5) ve (5.27) ifadelerinde ağırlık fonksiyonu olarak kullanılan u ve v terimleri ile türevleri olan $u,_x$ ve $v,_x$'in yerlerine aşağıda belirtilen varyasyonları yazılarak,

$$\bar{u} = \delta\bar{w}$$

$$\bar{v} = \delta\overline{M} \qquad (5.28)$$

$$\bar{u},_x = \delta\bar{w},_x$$

$$\bar{v},_x = \delta\overline{M},_x$$

bu ifadeler zayıf formlarda yerlerine yazıldığında,

$$\delta\ \bar{I}_1 = -\int_0^L \delta\overline{M},_x\ \overline{w},_x\ dx + \frac{1}{I}\int_0^L \delta\overline{M}\{s\bar{J}\overline{M}\}dx + \frac{1}{k_s A}\int_0^L \delta\overline{M},_x\ \{s\bar{J}_1\overline{M},_x\}dx + \delta\overline{M}\,\bar{\theta}\Big|_0^L = 0$$

$$\delta\ \bar{I}_2 = -\int_0^L \delta\overline{w},_x\ \overline{M},_x\ dx + \int_0^L \delta\overline{w}\,\overline{q}dx - \int_0^L \delta\overline{w}\,\overline{w}(k+\rho\, s^2)dx + \int_0^L \delta\overline{w}\rho\, s\hat{w}dx + \int_0^L \delta\overline{w}\rho\dot{\hat{w}}dx + \delta\overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L = 0$$

(5.29)

elde edilir. Burada $\hat{w} = w(x,0)$ olup başlangıç koşulunu ifade etmektedir. $\bar{I}(\overline{w},\overline{M})$ terimine fonksiyonel denir. Fonksiyonel toplam potansiyel enerjiyi ifade etmektedir. Toplam potansiyel enerji iç kuvvetlerin yaptığı iş ile dış kuvvetlerin yaptığı işin toplamıdır. $\delta I = 0$ olması enerjinin minimum yada maksimum değer aldığını ifade eder. Varyasyonun özellikleri hatırlanacak olursa;

$$\delta\overline{M} * \overline{M} = \frac{1}{2}\delta(\overline{M},\overline{M})$$

$$\delta\overline{M} * \overline{w} = \frac{1}{2}\delta(\overline{M},\overline{w}) \qquad (5.30)$$

$$\delta\overline{w} * \overline{w} = \frac{1}{2}\delta(\overline{w},\overline{w})$$

şeklinde olduğundan (5.29) ifadesindeki terimler aşağıdaki gibi varyasyonun içerisine sokularak düzenlendiğinde;

$$\delta\ \bar{I}_1 = -\frac{1}{2}\int_0^L \delta\overline{M},_x\ \overline{w},_x\ dx + \frac{1}{2I}\int_0^L s\delta\overline{M}^2\bar{J}dx + \frac{1}{2k_s A}\int_0^L s\delta\overline{M}^2,_x\ \bar{J}_1 dx + \delta\overline{M}\,\bar{\theta}\Big|_0^L = 0$$

$$\delta\ \bar{I}_2 = -\frac{1}{2}\int_0^L \delta\overline{w},_x\ \overline{M},_x\ dx + \int_0^L \delta\overline{w}\,\overline{q}dx - \frac{1}{2}\int_0^L \delta\overline{w}^2(k+\rho\, s^2)dx + \int_0^L \delta\overline{w}\rho\, s\hat{w}dx + \int_0^L \delta\overline{w}\rho\dot{\hat{w}}dx$$

$$+\,\delta\overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L = 0 \qquad (5.31)$$

elde edilir. Varyasyonel sembollerin yok edilmesiyle enerji ifadeleri aşağıdaki hali alır:

$$\bar{I}_1 = -\frac{1}{2}\int_0^L \overline{M},_x\ \overline{w},_x\ dx + \frac{1}{2I}\int_0^L s\overline{M}^2\bar{J}dx + \frac{1}{2k_s A}\int_0^L s\overline{M}^2,_x\ \bar{J}_1 dx + \overline{M}\,\bar{\theta}\Big|_0^L$$

$$\bar{I}_2 = -\frac{1}{2}\int_0^L \overline{w},_x\ \overline{M},_x\ dx + \int_0^L \overline{w}\,\overline{q}dx - \frac{1}{2}\int_0^L \overline{w}^2(k+\rho\, s^2)dx + \int_0^L \overline{w}\rho\, s\hat{w}dx + \int_0^L \overline{w}\rho\dot{\hat{w}}dx + \overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L$$

(5.32)

Böylece genel ifade,

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \tag{5.33}$$

olmak üzere, iki fonksiyonelin toplanmasıyla oluşan ifade,

$$\begin{aligned}\bar{I} = &-\int_0^L \overline{M},_x\, \overline{w},_x\, dx + \frac{1}{2I}\int_0^L s\overline{M}^2 \bar{J} dx + \frac{1}{2k_s A}\int_0^L s\overline{M}^2,_x\, \bar{J}_1 dx \;- \frac{1}{2}\int_0^L (\mathrm{k} + \rho\, \mathrm{s}^2)\overline{w}^2 dx + \\ &\rho\, s\int_0^L \overline{w}\hat{w} dx + \rho\int_0^L \overline{w}\dot{w} dx + \int_0^L \overline{w}\overline{q} dx + \overline{M}\,\overline{\theta}\Big|_0^L + \overline{w}\,\overline{T}\Big|_0^L\end{aligned} \tag{5.34}$$

şeklindedir.

5.4. Yaklaşım Fonksiyonları ve Enterpolasyon Fonksiyonlarının Oluşturulması

Sonlu Eleman Formülasyonunda enterpolasyon fonksiyonlarını oluşturacak yaklaşım fonksiyonları aşağıdaki formdadır:

$$\phi_1 = (1 - \frac{x}{L})$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L} \tag{5.35}$$

Bu yaklaşım fonksiyonlarıyla, enterpolasyon fonksiyonları lineer alınarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\overline{w} = \phi_1 \overline{w}_1 + \phi_2 \overline{w}_2$$

$$\overline{M} = \phi_1 \overline{M}_1 + \phi_2 \overline{M}_2 \tag{5.36}$$

5.5. Çözüm Yöntemi

Enterpolasyon fonksiyonları elde edilen fonksiyonelde yerine yazılarak aşağıdaki eleman rijitlik matrisi elde edilir:

$$[\overline{K}^e] = \begin{bmatrix} -\frac{kL}{3} & -\frac{kL}{6} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{kL}{6} & -\frac{kL}{3} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & \frac{\bar{J}_1 s}{Ak_s L} + \frac{\bar{J}Ls}{3I} & -\frac{\bar{J}_1 s}{Ak_s L} + \frac{\bar{J}Ls}{6I} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{\bar{J}_1 s}{Ak_s L} + \frac{\bar{J}Ls}{6I} & \frac{\bar{J}_1 s}{Ak_s L} + \frac{\bar{J}Ls}{3I} \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

Burada $\bar{J}$ ve $\bar{J}_1$ sünme fonksiyonlarının Laplace dönüşmüşlerini belirtmektedir. Kütle (atalet) dikkate alındığında ise (5.37) matrisindeki k teriminin yerine, ρ birim boy kütlesi olmak üzere,

$$k+\rho s^2 \tag{5.38}$$

alınmalıdır.

Yük terimi ise şu şekildedir:

$$\left[\bar{q}^e\right] = \frac{\bar{q}L}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{5.39}$$

Burada $\bar{q}$ yük teriminin Laplace dönüşmüşüdür. Sistem kaç eş parçaya ayrılarak çözülecekse, yani kaç eleman alınarak çözüm yapılacaksa, ona göre sistem rijitlik matrisi oluşturulur. Elemanların düğüm noktalarında eleman rijitlik matrislerinin birleştirilmesi(assemblage) suretiyle sistem rijitlik matrisi yani global matris elde edilir. Bu aşamada denklem takımı,

$$\left[\bar{K}\right]\begin{Bmatrix}\bar{w}\\ \bar{M}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\bar{T}\\ \bar{Q}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix} \tag{5.40}$$

şeklindedir. Burada, $\left[\bar{K}\right]$ global matristir. Yukarıdaki hale gelen problemde $\begin{Bmatrix}\bar{w}\\ \bar{M}\end{Bmatrix}$ vektörünün çözümü için, eşitliğin her iki tarafı sembolik olarak $[\bar{K}]^{-1}$ ile çarpılır.

$$\begin{Bmatrix}\bar{w}\\ \bar{M}\end{Bmatrix} = \left[\bar{K}\right]^{-1}\begin{Bmatrix}\bar{T}\\ \bar{Q}\end{Bmatrix} + \left[\bar{K}\right]^{-1}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix} \tag{5.41}$$

formunu alan denklemde s Laplace dönüşüm uzayındaki ifadeler Ters Laplace dönüşümü uygulanarak zaman uzayına geçirilir. Böylece birincil değişkenler olan çökme ve momentler elde edilmiş olur. Bu bölümde anlatılan çözüm yöntemi için ‘Mathematica’ programlama dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiş ve sayısal örnekler bu program kullanılarak çözülmüştür.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde şimdiye kadar teorisi anlatılan konuya dair sayısal örnekler yer almaktadır. Bu örneklerde farklı yükleme ve sınır koşulları altında farklı modellerden bir takım problemler incelenmiştir. Sistemin başlangıçta durağan olduğu kabul edilmektedir. Bütün örneklerde çözüm 8 eleman alınarak (sistem 8 eş parçaya bölünerek) yapılmıştır. k zemin yatak katsayısı kiriş genişliği ile çarpılarak kN/m^2 boyutunda alınmıştır. Aksi belirtilmediği sürece tüm problemlerde ortak olarak kullanılan malzeme özellikleri ve kiriş boyutları şunlardır:

E_o= 9.8 × 10^7 N/m^2

E_1= 9.8 ×10^7 N/m^2

E_2= 2.45 ×10^7 N/m^2

η= 2.744 ×10^8 Ns/m^2

ν= 0.3

ρ= 500 kg/m^3

b= 2 m.

h= 0.5 m.

L=10 m.

I= 1/48 m^4

A= 1 m^2

Viskoelastik modeller için aşağıdaki sünme fonksiyonları kullanılmıştır:

Maxwell Modeli için;

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta} \tag{6.1}$$

Kelvin Modeli için;

$$J(t) = \frac{1}{E_0}(1 - e^{-\frac{E_0 t}{\eta}}) \tag{6.2}$$

Üç Parametreli Model (TPM) için;

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}(1 - e^{-\frac{E_2 t}{\eta}}) \tag{6.3}$$

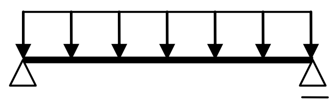
6.1. Sabit Yük Altında Dinamik Davranışın İncelenmesi

Bu başlık altında bahsedilen ‘sabit yük’ ifadesi ile kastedilen, yükün birim basamak fonksiyonu formunda olduğudur. Başka bir deyişle t=0 başlangıç anından itibaren uygulanmaya başlanması ve değişmemesidir.

Sabit yük olarak q=10 N/m düzgün yayılı yük ve p=10 kN tekil yük altındaki basit mesnetli ve serbest oturan kiriş problemleri Maxwell Modeli, Kelvin Modeli ve Üç Parametreli Model (TPM) kullanılarak incelenmiş ve bulunan sonuçlar daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

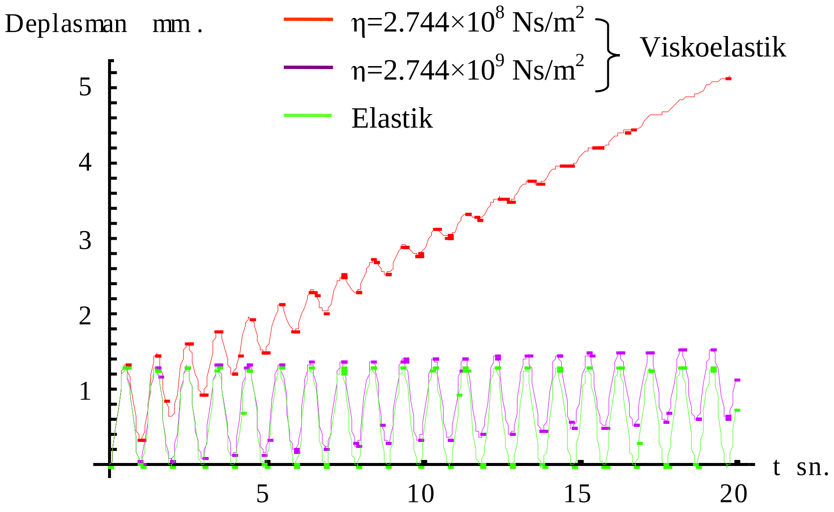
6.1.1. Örnek 1

Şekil 6.1’de görülen L=10 m. uzunluğunda q=10 N/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasmanların zamana göre değişimi viskozite katsayısı $\eta=2.744\times10^{8}$ Ns/m^2 ve $\eta=2.744\times10^{9}$ Ns/m^2 seçilmek suretiyle Maxwell Modeli ve Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenerek Elastik Model ile karşılaştırılmıştır.

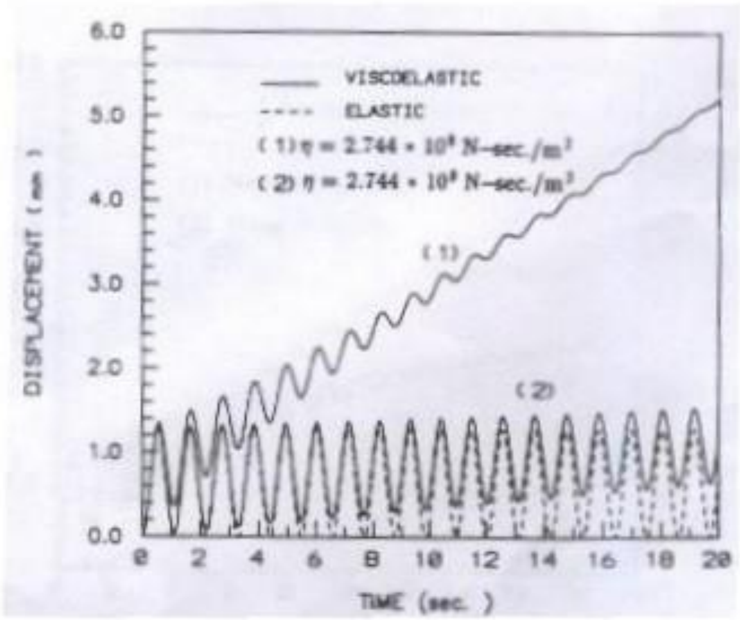


Şekil 6.1 Kirişin yükleme durumu

Şekil 6.2’de de görüldüğü gibi viskozite katsayısının artırılması beklenildiği üzere kirişin yaptığı deplasmanı küçültmüştür. Yüksek viskozite katsayısı alınması sonucu Maxwell Modeli çözümlerinin Elastik Model’e yaklaştığı görülmektedir. Viskoelastik kirişin dinamik davranışının bir süre sonra kaybolduğu ve kararlı hale (kuazi-statik hal) geçtiği gözlemlenmiştir. Bu çalışma sonucu bulunan Şekil 6.2’deki grafiğin, daha önce aynı problem için, farklı bir yöntem izlenerek elde edilen Şekil 6.3’teki grafiğe çok benzediği açıkça görülmektedir.

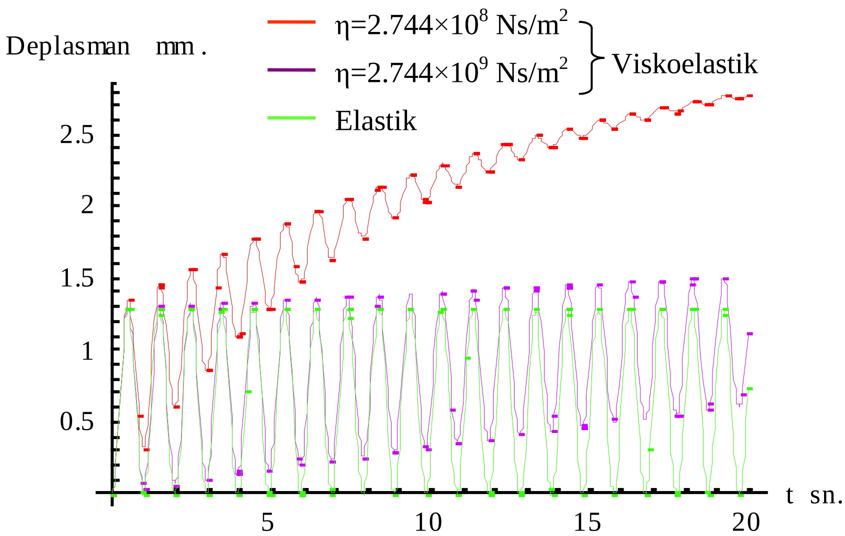


Şekil 6.2 Farklı viskozitelerdeki Maxwell Modeli ile Elastik Model'in karşılaştırılması.

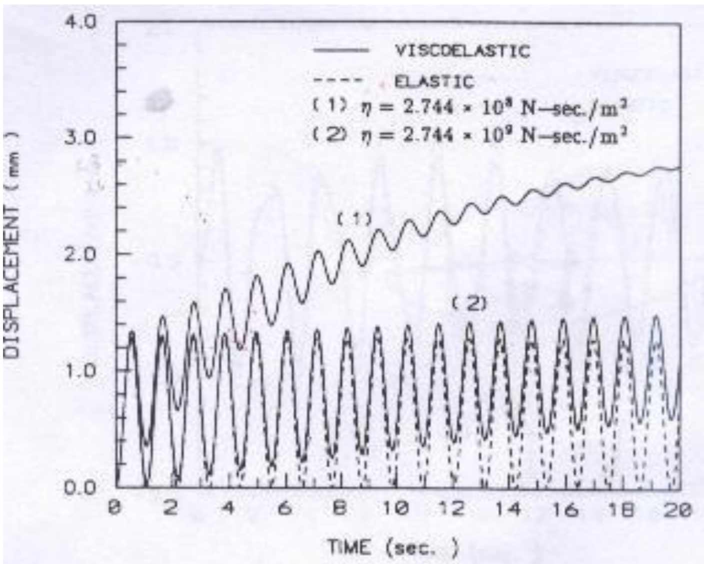


Şekil 6.3 Chen (1995)'te farklı viskozitelerdeki Maxwell Modeli ile Elastik Model'in karşılaştırılması.

Üç Parametreli Model (TPM) ile L=10 m. boyunda ve q=10 kN/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli kiriş için viskozite katsayıları değiştirilerek elde edilen deplasmanların zamanla değişimleri Elastik Model ile karşılaştırılarak Şekil 6.4'te gösterilmiştir. Şekil 6.5'te ise aynı problem için daha önce yapılan çalışmanın zamanla değişen deplasmanları verilmiştir. Bu iki grafiğin de birbirine yakınsadığı görülmektedir. Üç Parametreli Model'in bir süre sonra sönümlenerek kararlı hale geçtiği saptanmıştır.



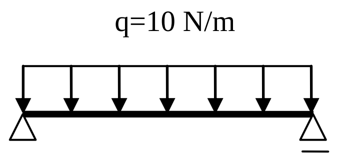
Şekil 6.4 Farklı viskozitelerdeki TPM ile Elastik Model'in karşılaştırılması.



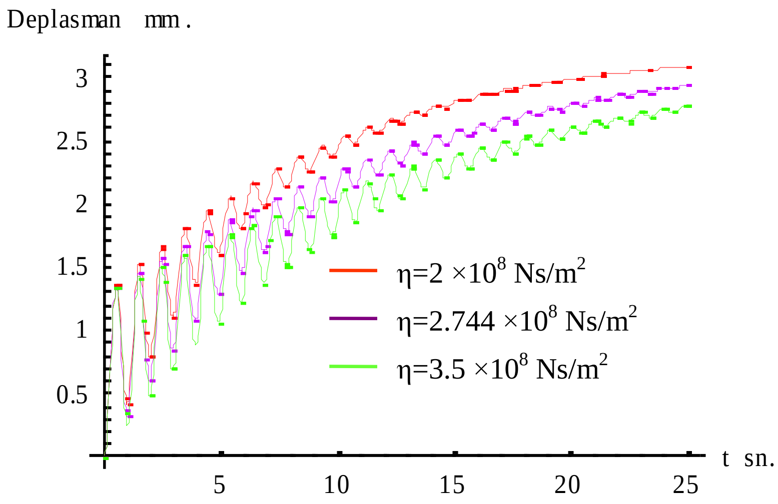
Şekil 6.5 Chen (1995)'te farklı viskozitelerdeki TPM ile Elastik Model'in karşılaştırılması.

6.1.2. Örnek 2

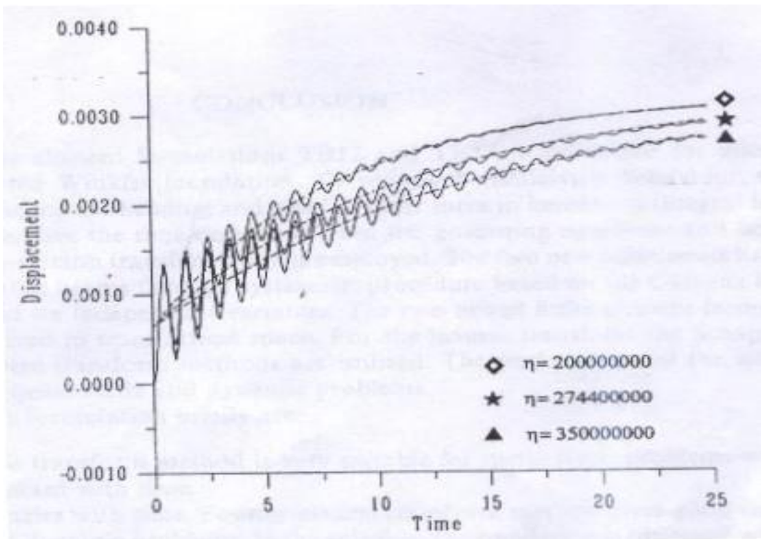
Bu örnekte Şekil 6.6'da görülen L=10 m. uzunluğunda ve q=10 N/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli Timoshenko kirişinde viskozite katsayısı değişiminin etkisi Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir.



Şekil 6.6 Kirişin yükleme durumu



Şekil 6.7 TPM için viskozite katsayısı değişiminin deplasmana etkisi.

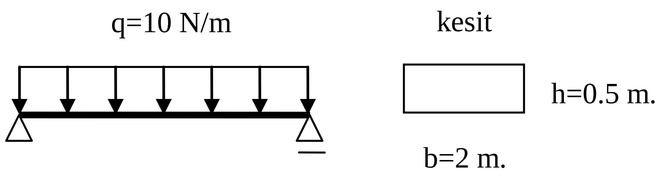


Şekil 6.8 Aköz ve Kadıoğlu (1999)'da TPM için viskozite katsayısı değişiminin deplasmana etkisi.

Viskozite katsayısı arttıkça kirişin yaptığı deplasmanın azaldığı Şekil 6.7'de açıkça görülmektedir. Grafiğin aynı viskozite katsayıları için elde edilen Şekil 6.8'deki çalışmaya oldukça yakın değerler verdiği gözlenmiştir.

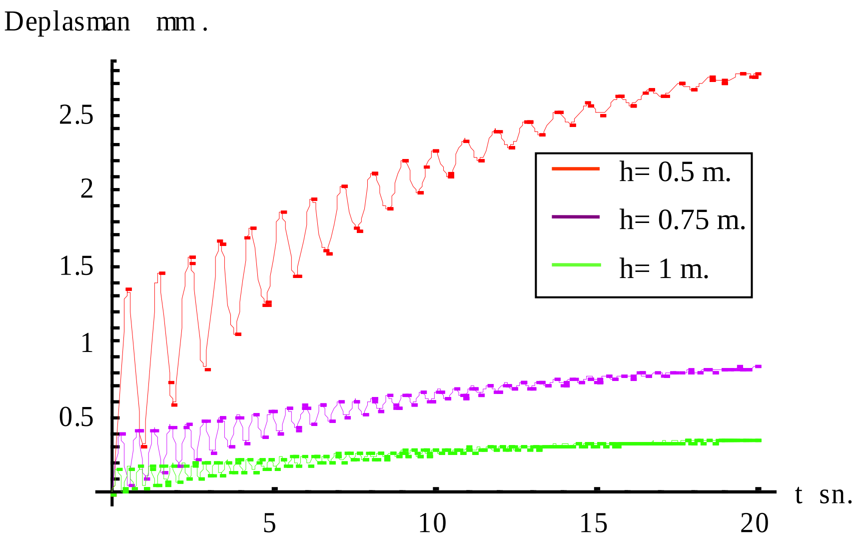
6.1.3. Örnek 3

Şekil 6.9'da yükleme durumu verilen L=10 m. uzunluğunda ve q=10 N/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli Timoshenko kirişinde h kesit yüksekliği değişiminin dinamik davranışa etkisi Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir.

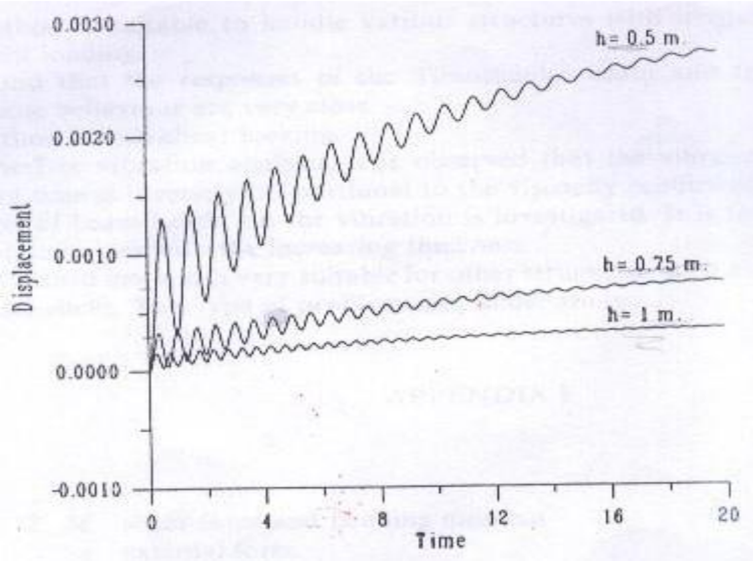


Şekil 6.9 Kirişin yükleme durumu ve kesiti

Şekil 6.10'da üç farklı kesit yüksekliğine göre Üç Parametreli Model ile bulunan zamana bağlı deplasmanlar görülmektedir. Kirişin yüksekliği artırıldıkça daha rijit bir davranış beklendiğinden deplasmanlar azalmıştır. Burada görülen bir diğer etki ise kiriş kalınlığı arttıkça titreşim frekansının azalmasıdır. Şekil 6.11'de görülen grafik aynı probleme ait zamanla değişen deplasmanları göstermektedir. Bu çalışma sonucu elde edilen grafik Şekil 6.11'deki sonuçlara yakınsak değerler vermiştir.



Şekil 6.10 TPM için h kesit yüksekliği değişiminin deplasmana etkisi.

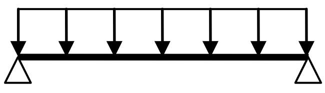


Şekil 6.11 Aköz ve Kadıoğlu (1999)'da TPM için h kiriş yüksekliği değişiminin deplasmana etkisi.

6.1.4. Örnek 4

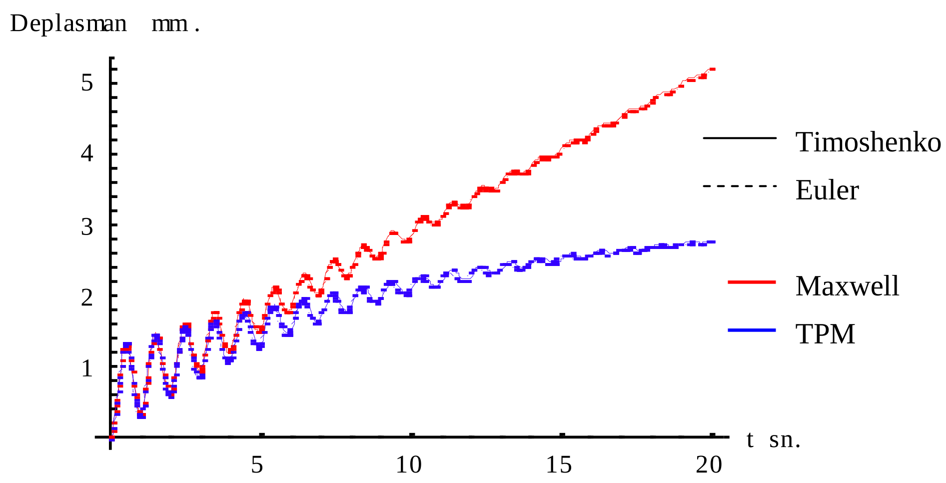
Şekil 6.12'de görülen L=10 m. uzunluğunda ve q=10 N/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli Timoshenko ve Euler kirişinin orta noktasındaki deplasmanlar Üç Parametreli Model (TPM) ve Maxwell Modelleri kullanılarak kıyaslanmıştır.

q=10 N/m

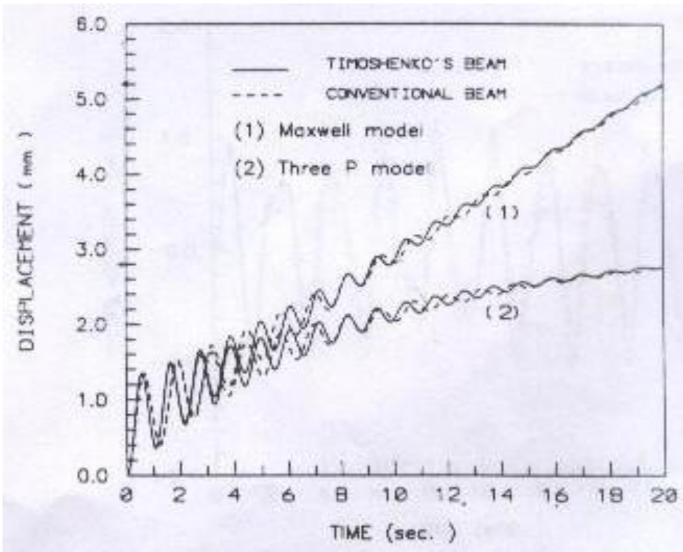


Şekil 6.12 Kirişin yükleme durumu

Şekil 6.13'te Timoshenko kirişi ve Euler kirişi için elde edilen deplasmanlar Maxwell Modeli ve Üç Parametreli Model (TPM) ile bulunmuştur. Maxwell Modelinin yaptığı deplasmanın, TPM ile elde edilen deplasmandan büyük olduğu çok açık biçimde görülmektedir. Şekil 6.14'te aynı problemi ele alan grafik ile bu çalışma sonucu elde edilen grafiğin birbirlerine çok benzer oldukları görülmektedir.



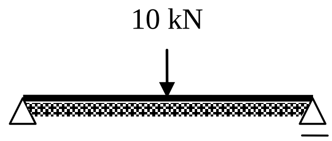
Şekil 6.13 Timoshenko ve Euler kirişinin orta noktasındaki deplasmanların Maxwell Modeli ve TPM ile karşılaştırılması.



Şekil 6.14 Chen (1995)'te Timoshenko ve Euler kirişinin orta noktasındaki deplasmanların Maxwell Modeli ve TPM ile karşılaştırılması.

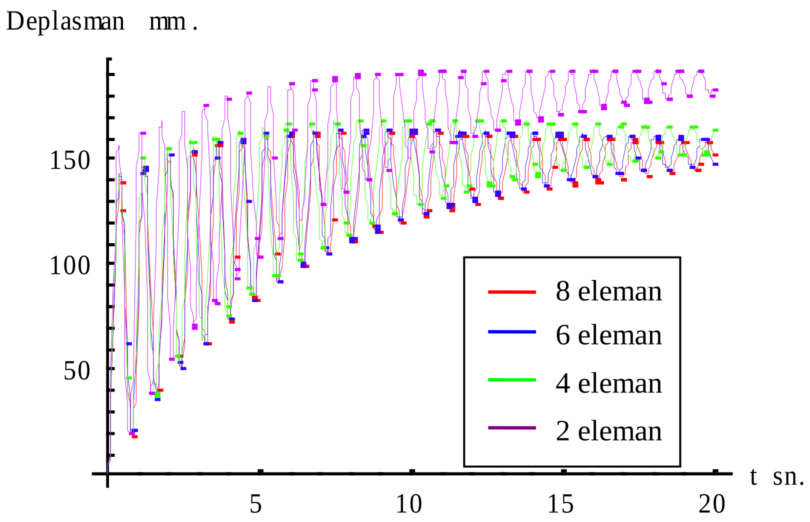
6.1.5. Örnek 5

Şekil 6.15'te görülen, yatak katsayısı k=10 kN/m^2 olan zemine oturan L=10 m. boyunda ve 10 kN. tekil yük altındaki Timoshenko kirişi farklı eleman sayıları alınarak orta noktasındaki deplasman Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir. 'farklı eleman sayısı' ifadesi bütünün kaç parçaya bölündüğünü belirtmektedir.



Şekil 6.15 Kirişin yükleme durumu

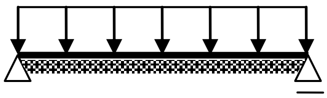
Farklı eleman sayıları ile çözüme gidilmesi sonucu elde edilen deplasman-zaman grafiği Şekil 6.16'da verilmiştir. 8 eleman ve 6 eleman ile yapılan çözümlerin birbirine yakınsadığı, 4 eleman ile çözümün 8 eleman ve 6 elemana yakın olduğu, 2 eleman ile bulunan değerlerin ise çözümden uzaklaştığı gözlemlenmiştir. Bu çalışmada çözülen tüm problemler 8 eleman alınarak yapılmıştır.



Şekil 6.16 TPM ile zemine oturan p=10 kN tekil yük altındaki basit mesnetli kirişin farklı eleman sayıları ile bulunan orta noktasındaki deplasman değerlerinin kıyaslanması (L=10 m. , k=10 kN/m^2)

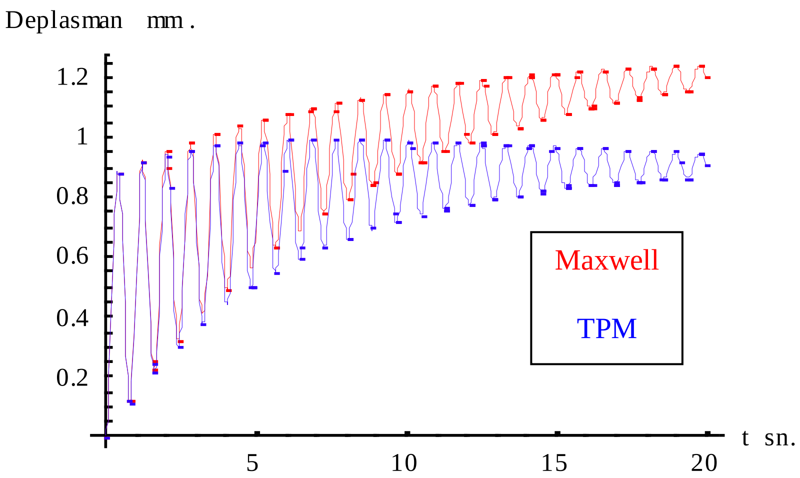
6.1.6. Örnek 6

Bu problemde Winkler zeminine oturan, yükleme durumu Şekil 6.17'de verilen L=10m. boyunda ve q=10 N/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasman ve momentin zamana bağlı değişimleri Maxwell Modeli ve Üç Parametreli Model(TPM) ile incelenmiştir. Zemin yatak katsayısı k=10 kN/m^2 alınmıştır.



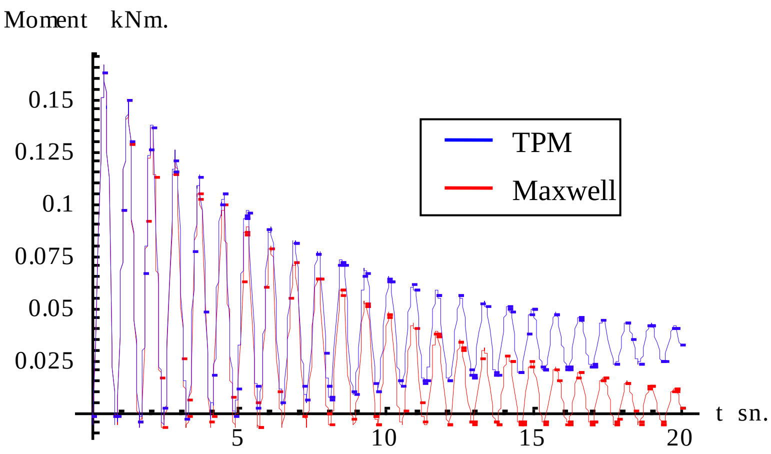
Şekil 6.17 Kirişin yükleme durumu

Düzgün yayılı yük etkisindeki kirişin orta noktasındaki deplasman zamana bağlı olarak Şekil 6.18'deki gibi değişmektedir. Maxwell Modeli ile elde edilen deplasmanlar, TPM'den büyüktür. Bununla birlikte TPM'nin bir süre sonra sönümlenerek kararlı hale ulaşacağı görülmektedir. Çünkü TPM, 20 saniyenin sonunda sabit bir deplasman değerine yakınsamaktadır.



Şekil 6.18 Maxwell Modeli ve TPM ile zemine oturan q=10 N/m düzgün yayılı yük altındaki basit kirişin orta noktasındaki deplasmanın değişimi(L=10m., k=10 kN/m^2).

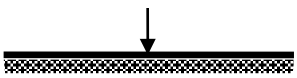
Bu problemin mesnete oturan hali olan Örnek 1'deki deplasman grafikleri Şekil 6.2 ve Şekil 6.4 hatırlanırsa, zeminin deplasman üzerindeki sönümleyici etkisi anlaşılır. Mesnete oturan basit kiriş probleminde deplasmanlar arasında büyük fark varken, zemine oturan basit kirişte iki modelin yaptığı deplasmanlar birbirine yakındır. Moment değerinin zamanla değişimi Şekil 6.19'da görülmektedir. Maxwell Modeli'nin momenti sönümlenmiştir. TPM'nin momenti ise tıpkı deplasmandaki gibi sabit bir değere yakınsamıştır.



Şekil 6.19 Maxwell Model ve TPM ile zemine oturan q=10 kN/m düzgün yayılı yük altındaki basit mesnetli kirişin orta noktasındaki momentin zamanla değişimi (L=10m. , k=10 kN/m^2)

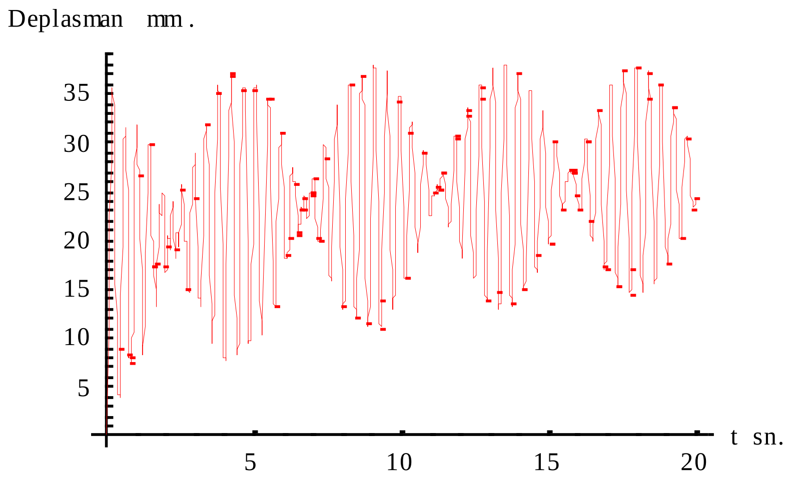
6.1.7. Örnek 7

Şekil 6.20'de zemine serbest oturan L=15 m. boyunda ve p=10 kN tekil yük altındaki Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasman Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir. Zemin yatak katsayısı k=100 kN/m^2 alınmıştır.

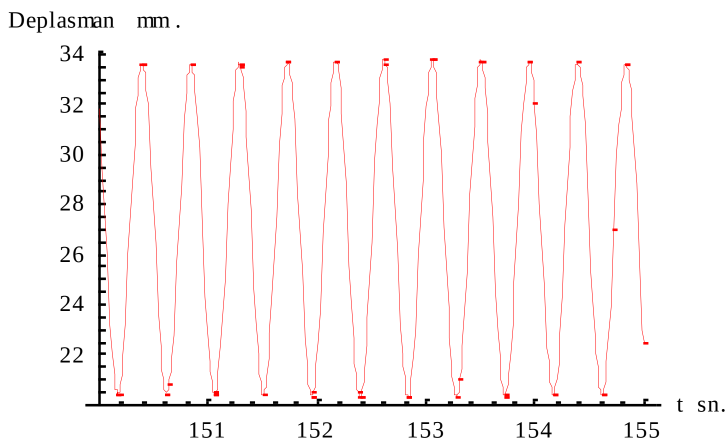


Şekil 6.20 Kirişin yükleme durumu

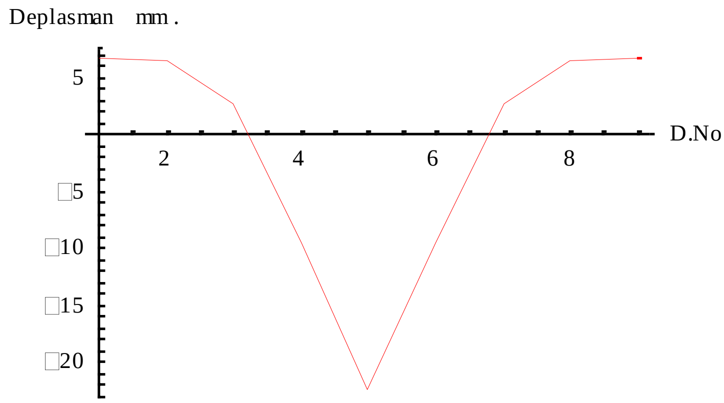
Serbest oturan kirişin orta noktasının deplasman grafiği Şekil 6.21'deki gibidir. Sistem mesnetli olmadığı için zeminle etkileşiminden dolayı bir süre sonra rijiit cisim hareketi yapmaya başlamaktadır. Kirişin şekil değiştirmesinde sönüm söz konusudur. Bunun bir göstergesi olarak 150. ve 155. saniyeler arasındaki deplasman grafiği Şekil 6.22'de verilmiştir. Burada deplasmanın artık sabit bir değere yakınsadığı gözlenmektedir. t=155. saniyedeki elastik eğri de Şekil 6.23'te verilmiştir. Kirişin artık belli bir form aldığı görülmektedir.



Şekil 6.21 TPM ile zemine serbest oturan p=10 kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (L=15 m. , k=100 kN/m^2).



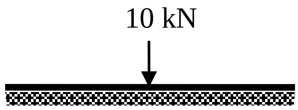
Şekil 6.22 Kirişin t=150-155. saniyeler arasındaki deplasman-zaman grafiği



Şekil 6.23 Kirişin t=155. saniyedeki elastik eğrisi

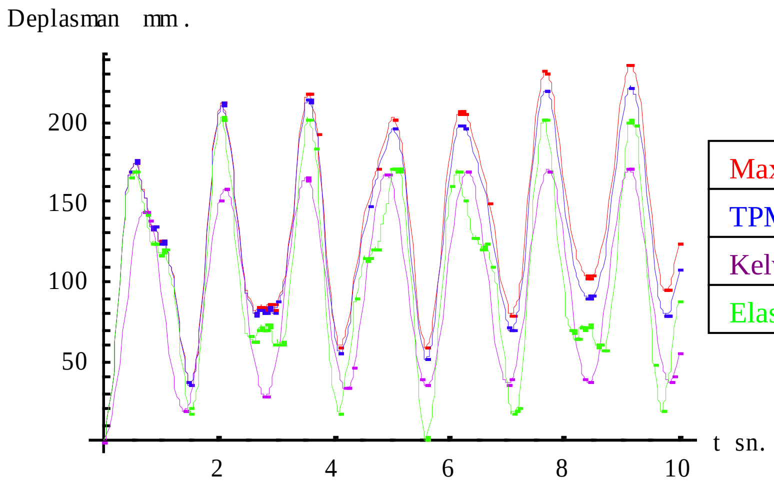
6.1.8. Örnek 8

Şekil 6.24'te zemine serbest oturan L=15 m. boyunda ve p=10 kN tekil yük altındaki Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasmanlar Maxwell Modeli, Üç Parametreli Model, Kelvin Modeli ve Elastik Model ile incelenmiştir. Zemin yatak katsayısı $k=10\ kN/m^2$ alınmıştır.



Şekil 6.24 Kirişin yükleme durumu

Farklı modellerle elde edilen deplasman grafiği Şekil 6.25'te verilmiştir. Kiriş serbest oturduğundan dolayı deplasmanlar değişkenlik göstermektedir. 10. saniye itibariyle Maxwell Modeli'nin en yüksek deplasmanı yaptığı görülmektedir. Üç Parametreli Model(TPM), Maxwell Modeli'ne yakın deplasmanlar yapmıştır. Elastik Model ilk saniyelerde, TPM ve Maxwell Modeli'ne yakınsamış ancak ilerleyen saniyelerde aralarındaki fark açılmıştır. Kelvin Modeli limite doğru gitmektedir. Bir süre sonra şekil değiştirmede sönüm söz konusu olacaktır. Ancak sistemde sönüm beklenmemektedir. Bunu Kelvin Modeli'nin bünye denklemi göz önüne alınarak, $t \rightarrow \infty$' a giderken modelin sonlu bir değere yakınsaması ile açıklamak mümkündür.

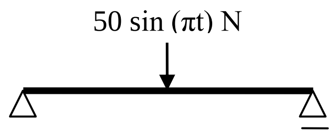


Şekil 6.25 Zemine serbest oturan p=10 kN tekil yüklü kirişteki deplasmanların farklı modellerle karşılaştırılması (L=15 m. , $k=10\ kN/m^2$).

6.2. Zamanla Değişen Yük Altında Dinamik Davranışın İncelenmesi

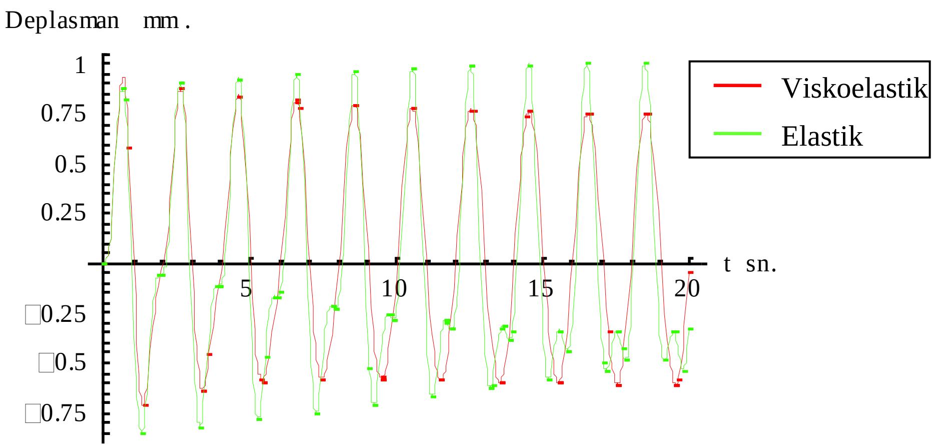
6.2.1 Örnek 1

Şekil 6.26'da görülen bu örnekte Maxwell Modeli ve Üç Parametreli Model (TPM) ile L=10m. boyunda ve p=50 sin(πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi incelenerek Elastik Model ile karşılaştırılmıştır.

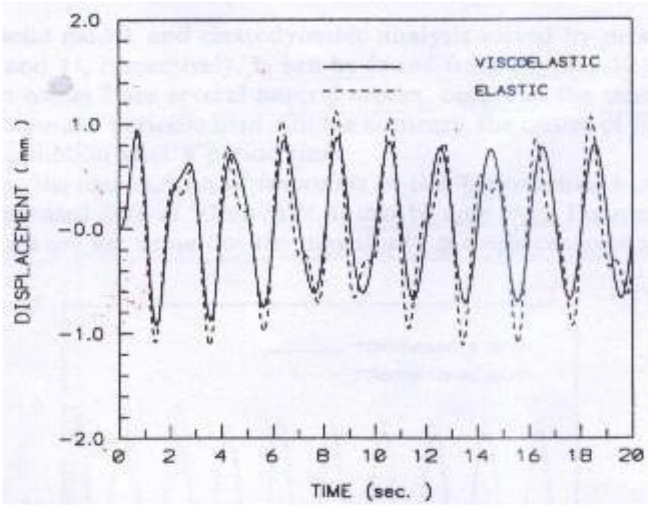


Şekil 6.26 Kirişin yükleme durumu

Şekil 6.27'de kirişin yaptığı deplasmanlar Maxwell Modeli için elde edilerek Elastik Model ile karşılaştırılmıştır. Bu problem için elde edilen Şekil 6.28'deki grafiğin bu çalışma sonucu bulunan grafiğe yakın olduğu açıkça görülmektedir.

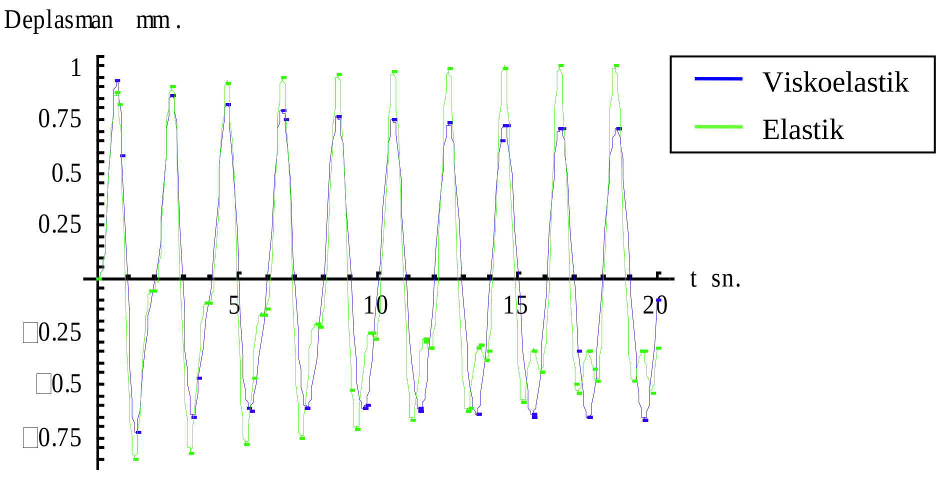


Şekil 6.27 Maxwell Modeli ile 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli kirişin orta noktasındaki deplasmanların Elastik Model ile karşılaştırılması.

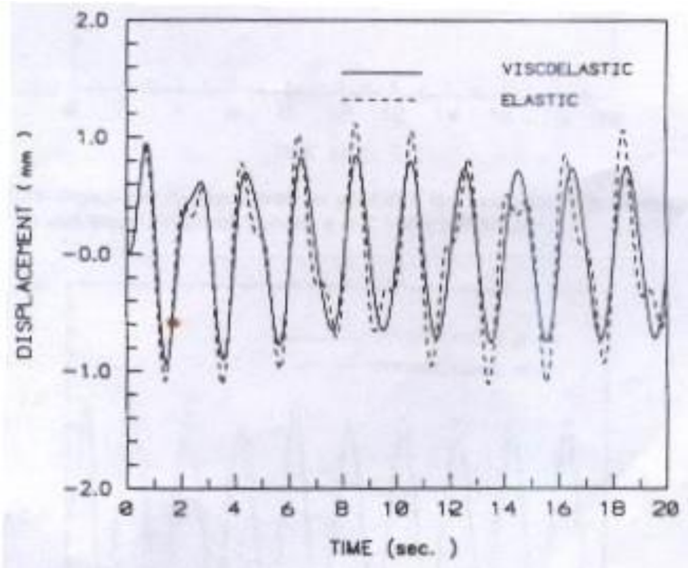


Şekil 6.28 Chen (1995)'te Maxwell Modeli ile Elastik Model karşılaştırması.

Şekil 6.29'da tekil sinüzoidal yük altındaki kiriş probleminin Üç Parametreli Model ile elde edilen zamana bağlı deplasman grafiği görülmektedir. Burada viskoelastik ve elastik model karşılaştırması yapılmıştır. Aynı problem için daha önce yapılmış çalışmanın deplasman grafiği Şekil 6.30'da verilmiştir. Bu iki grafik yakın sonuçlar içermektedir.



Şekil 6.29 TPM ile 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli kirişin orta noktasındaki deplasmanların Elastik Model ile karşılaştırılması.

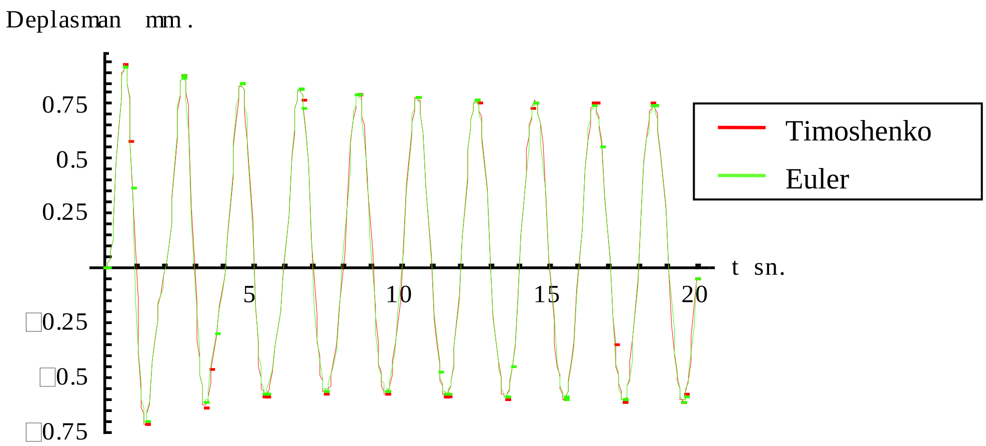


Şekil 6.30 Chen (1995)'te 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli kirişte TPM ile Elastik Model karşılaştırması.

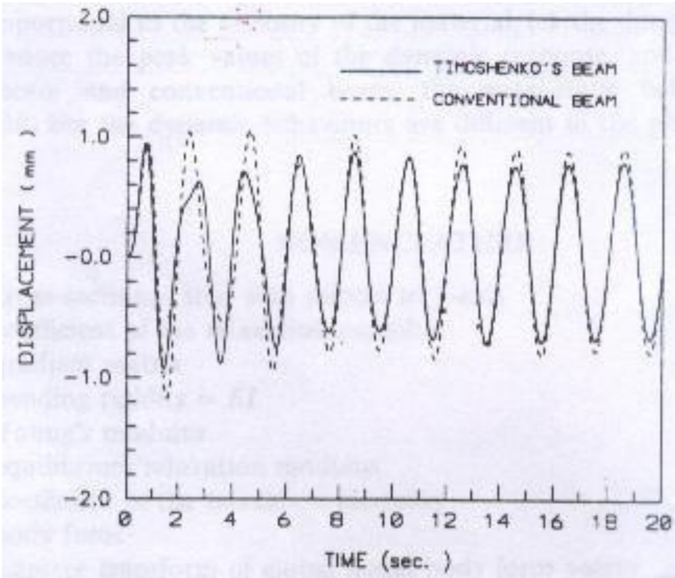
6.2.2 Örnek 2

Bu örnekte Şekil 6.26'da yükleme durumu verilen L= 10 m. boyunda ve p= 50 sin(πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli Timoshenko ve Euler kirişlerinin orta noktasındaki deplasman ve momentlerin zamanla değişimi Maxwell Modeli ve Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir.

Elde edilen deplasman grafiği Şekil 6.31'de Timoshenko ve Euler kirişinin frekansları aynı, deplasmanları yakınsaktır. Şekil 6.32'de ise deplasmanlar arasındaki fark göze çarpmaktadır. Ancak genel olarak iki grafik birbirine benzemektedir.

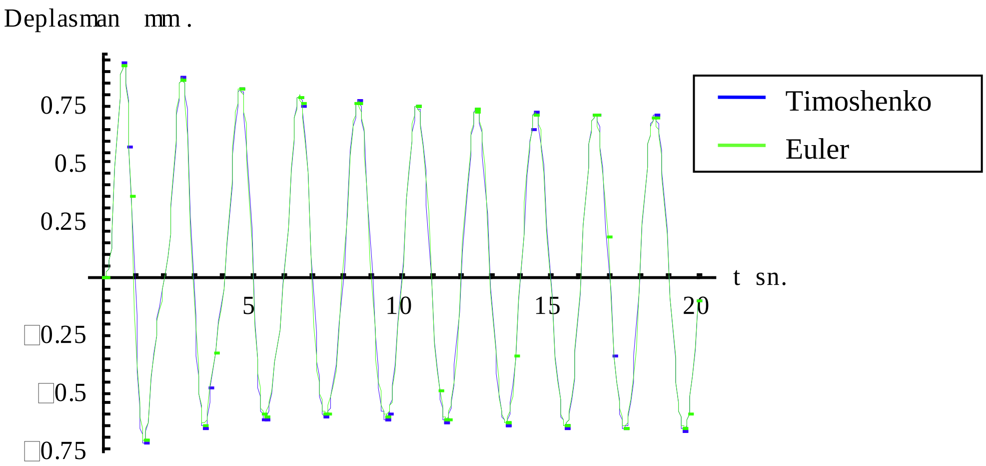


Şekil 6.31 Maxwell Modeli ile 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli Timoshenko ve Euler kirişinin karşılaştırılması.

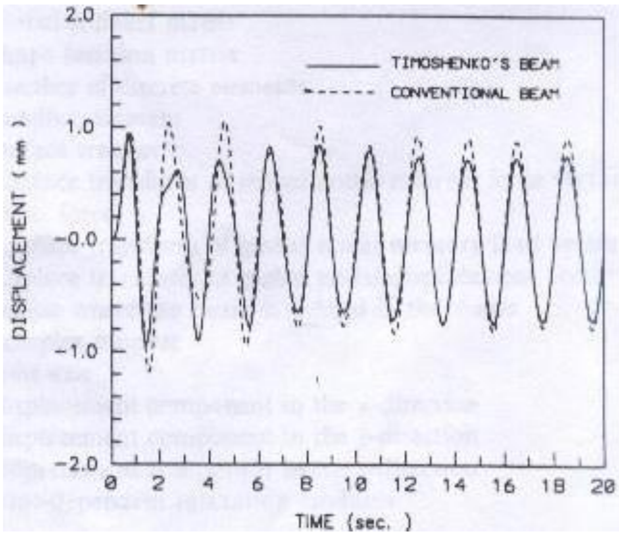


Şekil 6.32 Chen (1995)'te Maxwell Modeli ile 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli Timoshenko ve Euler kirişinin karşılaştırılması.

TPM ile elde edilen Şekil 6.33'te Timoshenko ve Euler kirişi kıyası yer almaktadır. Aynı problem için daha önce yapılan çalışmada bulunan Şekil 6.34'te frekansların aynı olduğu ancak deplasmanlar arasında fark olduğu göze çarpmaktadır. Şekil 6.33'te ise deplasman değerleri birbirine oldukça yakındır.



Şekil 6.33 TPM ile 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli Timoshenko ve Euler kirişinin karşılaştırılması.



Şekil 6.34 Chen (1995)'te TPM ile 50 sin (πt) N tekil yük altındaki basit mesnetli Timoshenko ve Euler kirişinin karşılaştırılması.

6.3. Anlık Yük Altında Dinamik Davranışın İncelenmesi

Anlık Yük olarak 10 δ(t) kN altındaki kirişin dinamik davranışı incelenmiştir. Burada δ(t) Dirac Delta fonksiyonudur. Başlangıçta bu yükün bir kez etkitilerek kaldırıldığı düşünülmüştür.

Elastik zemine oturan, L boyundaki düzgün bir kiriş için rijitlik oranı λL şu şekilde verilebilir (Bowles, 1996):

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{6.4}$$

olmak üzere;

$$\begin{array}{lll} \lambda L < \pi/4 & \text{ise} & \text{kısa kiriş} \\ \pi/4 < \lambda L < \pi & \text{ise} & \text{orta kiriş} \\ \pi < \lambda L & \text{ise} & \text{uzun kiriş} \end{array} \tag{6.5}$$

adını alır. Bu tanım Bernoulli-Euler kirişleri için yapılan bir önermedir.

k= 10 kN/m^2
E= 9.8 ×10^4 kN/m^2
I=1/48 m^4
için λ= 0.187 bulunur.

Bu şartları sağlayan L uzunlukları,

Kısa kiriş için   L= 3 m.

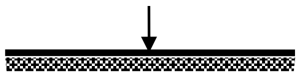
Orta kiriş için   L= 10 m.

Uzun kiriş için   L= 30 m.   olarak seçilmiştir.

Örnek 1, Örnek 2, Örnek 3 için yukarıdaki tanımdan yararlanılacaktır.

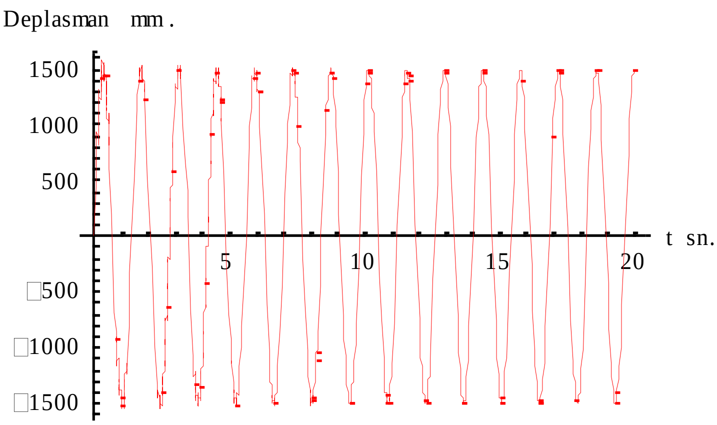
6.3.1 Örnek 1

Şekil 6.35'te yatak katsayısı $k=10\ kN/m^2$ olan zemine serbest oturan L=3 m. boyunda ve $p=10\ \delta(t)$ kN tekil yük altındaki Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasman ve moment Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir.

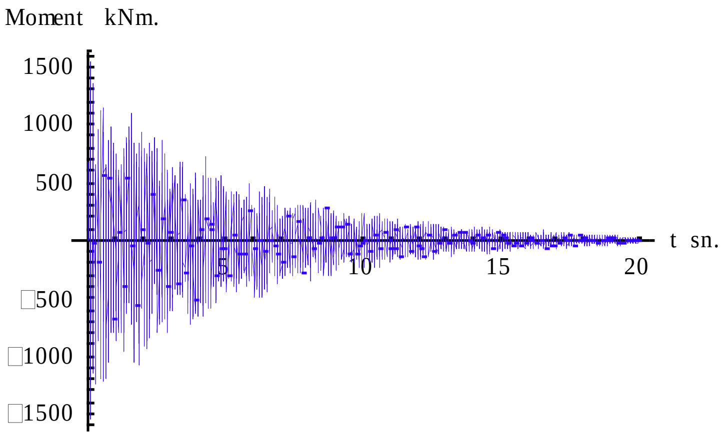


Şekil 6.35 Kirişin yükleme durumu

Zemine serbest oturan kısa kirişin yaptığı deplasman Şekil 6.36'da görülmektedir. Yük başlangıçta bir kez uygulanıp kaldırılmıştır. Başlangıçtaki deplasman azalarak belli bir diğerde seyretmiştir. Deplasman uzun bir süre sonunda bile salınıma devam etmektedir. Bunun nedeni sistemin çok rijit olmasıdır.



Şekil 6.36 TPM ile zemine serbest oturan $q=10\ \delta(t)$ kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (L=3 m., $k= 10\ kN/m^2$).

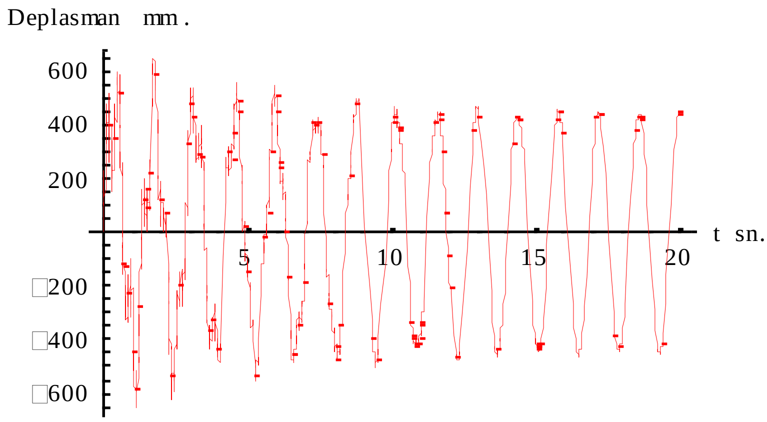


Şekil 6.37 TPM ile zemine serbest oturan q=10 δ(t) kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki momentin zamanla değişimi (L=3 m., k= 10 kN/m^2).

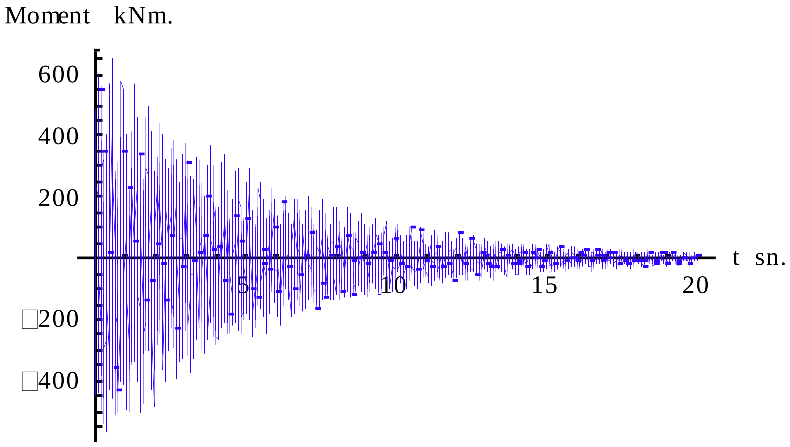
Kısa kirişin zamanla değişen moment grafiği Şekil 6.37'deki gibidir. Burada çok açık bir biçimde görüldüğü gibi başlangıçta bir kez uygulanıp bırakılan yükün etkisi sonucu moment belli bir değer aldıktan sonra sönümlenmeye başlamıştır. 35. saniye civarında momentin sönüme ulaştığı gözlemlenmiştir.

6.3.2 Örnek 2

Şekil 6.35'te yatak katsayısı k=10 kN/m^2 olan zemine serbest oturan L=10 m. boyunda ve p=10 δ(t) kN tekil yük altındaki Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasman ve moment Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir.



Şekil 6.38 TPM ile zemine serbest oturan q=10 δ(t) kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (L=10 m., k= 10 kN/m^2).



Şekil 6.39 TPM ile zemine serbest oturan q=10 δ(t) kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki momentin zamanla değişimi (L=10 m., k= 10 kN/m^2).

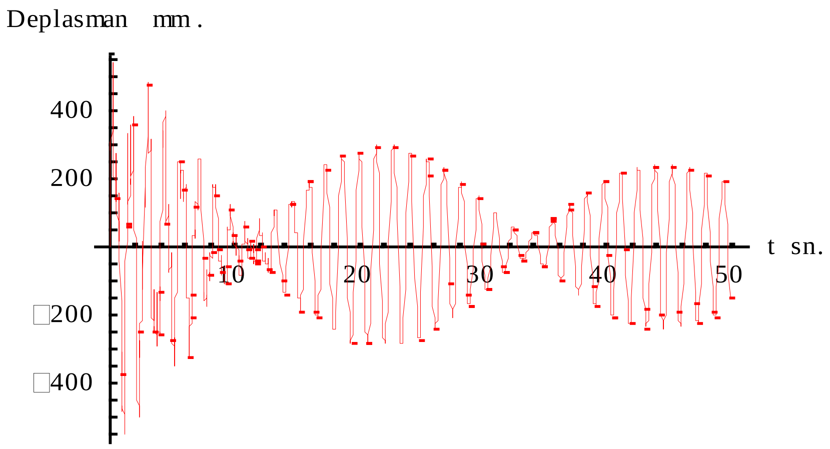
L=10 m. boyundaki orta kirişin deplasman grafiği Şekil 6.38’de görülmektedir. Ani uygulanan yük sonucu deplasman bir süre kararsız izlemiş daha sonra sabit bir sayıya yakınsayarak kararlı hale geçmiştir.

Şekil 6.39’da ise orta kirişin moment grafiği yer almaktadır. Başlangıçta bir anlık uygulanan yük sonucu moment bir değere ulaşmış ve sonrasında azalarak sönümlenmeye başlamıştır. Yaklaşık 50. saniyede momentin sönümlendiği gözlenmiştir.

6.3.3 Örnek 3

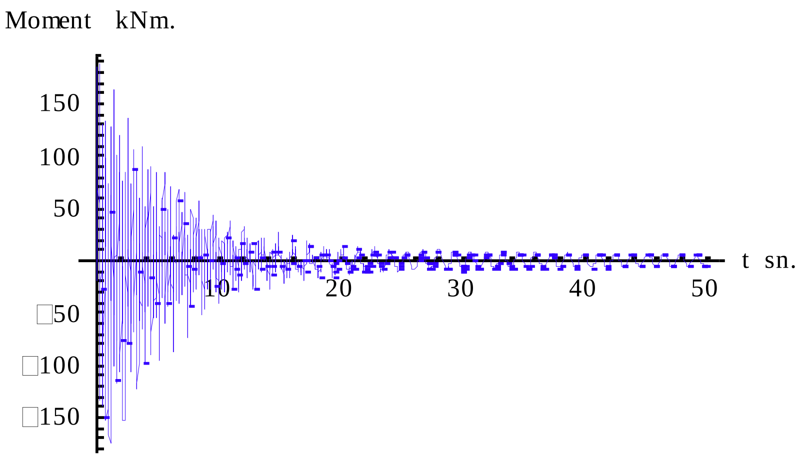
Şekil 6.35’te yükleme durumu verilen, yatak katsayısı k=10 kN/m^2 olan zemine serbest oturan L=30 m. boyunda ve p=10 δ(t) kN tekil yük altındaki Timoshenko kirişinin orta noktasındaki deplasman ve moment Üç Parametreli Model (TPM) ile incelenmiştir.

L=30 m. boyundaki uzun kirişin t=50 sn. için deplasman grafiği Şekil 6.40’de gösterilmiştir. Sistem periyodik olarak sönüme uğramaktadır. Ancak bir süre sonra bu sönem ortadan kalkmış, sistem sabit bir değere yakınsayarak limite ulaşmıştır.



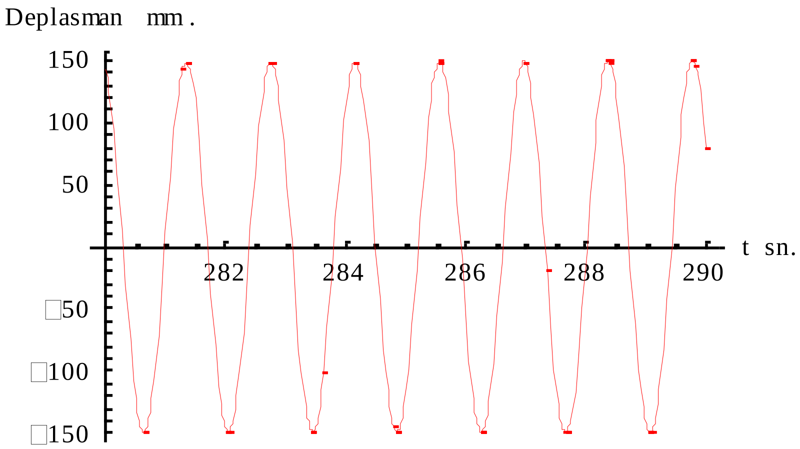
Şekil 6.40 TPM ile zemine serbest oturan q=10 δ(t) kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (L=30 m., k= 10 kN/m^2).

Uzun kirişin moment grafiği ise Şekil 6.46'da verilmiştir. Anlık yük uygulanan kirişin momentinin sönüme doğru gittiği görülmektedir.



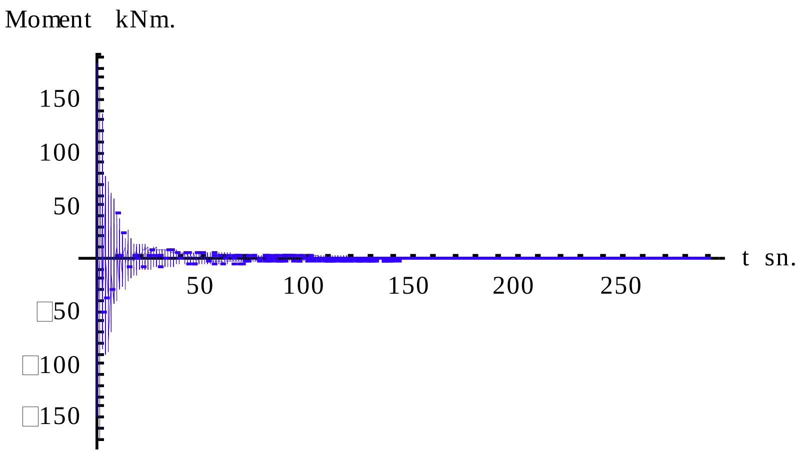
Şekil 6.41 TPM ile zemine serbest oturan q=10 δ(t) kN tekil yük altındaki kirişin orta noktasındaki momentin zamanla değişimi (L=30 m., k= 10 kN/m^2).

Sistemin t=280 sn. ve t=290. saniyelerdeki deplasman zaman grafiği Şekil 6.42'de verilmiştir. Görüldüğü gibi sistemin şekil değiştirmesi sönüme uğramıştır. Deplasman limite ulaşmış, sabit bir değerde seyretmektedir.



Şekil 6.42 Uzun kirişin t=280-290. saniyeler arası deplasmanı

Sistemin t= 0 ve t=290. saniyelerdeki moment zaman grafiği ise Şekil 6.43'te verilmiştir. Moment sönümlenmiş ve sıfıra yakınsamıştır.



Şekil 6.43 Uzun kirişin t=0-290. saniyeler arası momenti

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada Winkler zeminine oturan viskoelastik Timoshenko kirişi için bir karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Viskoelastik malzeme kabulü yapılan hesapta gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bünye denklemleri zamana bağlı olarak alınmış ve daha sonra işlem kolaylığı olması bakımından zamana bağlı ifadeler Laplace dönüşüm uzayına taşınmıştır. İncelenen kirişin Timoshenko kirişi olması itibariyle kaymanın elastik eğriye yaptığı etkiler de dikkate alınmıştır. Laplace uzayında sonlu eleman mantığıyla gerekli işlemler yapıldıktan Ters Laplace dönüşümü uygulanarak başlangıçtaki hal olan zaman uzayına geri dönülmüştür. Sonlu eleman formülasyonu için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu program ile çeşitli yüklemeler ve sınır koşulları altındaki kirişler çözülebilmektedir. Program sabit veya değişken yük altındaki kirişlerin çözümünü mümkün kılmaktadır. Farklı eleman sayıları alınarak çözümün yakınsaklığı takip edilebilmektedir. Bu çalışmada yapılan dinamik analizin yanı sıra kuazi-statik analiz yapma olanağı da sunmaktadır. Ayrıca altında elastik zemin olan veya zemin olmadan sadece mesnete oturan kirişlerin çözümü için de elverişlidir. Program Ters Laplace dönüşümünü kapalı olarak yapabilmektedir. Bu sayede zaman uzayına dönmek için büyük kolaylık sağlamaktadır. Yapılan sayısal uygulamalarda farklı yükleme ve sınır koşullarında, farklı viskoelastik modeller kullanılarak elastik zemine oturan ve zemine oturmayan problemler incelenmiştir. Ayrıca bu çözümler, kayma etkilerinin ihmal edildiği Euler kirişi ve zamanın etkisinin göz önüne alınmadığı Elastik Model ile karşılaştırılmıştır. Çözülen problemlerde, geliştirilen formülasyonun iyi sonuç verdiği gözlenmiştir. Uygulamalarda viskoelastik model olarak Kelvin Modeli, Maxwell Modeli ve Üç Parametreli Model (TPM) kullanılmıştır. Elde edilen bazı sonuçlar şunlardır:

1. Farklı viskoelastik modeller kullanılarak yapılan çözümlerde viskoelastik kirişin dinamik davranışının bir süre sonra kaybolduğu ve kararlı hale yani kuazi-statik hale geçtiği belirlenmiştir.

2. Sabit yük altında, zeminin deplasman üzerinde etkisi araştırılmış ve farklı modellerle yapılan uygulamalarda zeminin deplasmanı büyük ölçüde azalttığı görülmüştür. Aynı sınır koşulları altında mesnete oturan kiriş probleminde Maxwell Modeli ve TPM'nin deplasmanları arasında büyük fark varken, bu kirişin zemine oturması halinde iki modelin yaptıkları deplasmanların birbirine yaklaştığı görülmüştür.

3. Zamanla değişen yük altında incelenen problemlerde Timoshenko kirişi ile Euler kirişinin frekanslarının aynı, genliklerinin ise yakınsak olduğu görülmüştür. Yapılan viskoelastik model- elastik model kıyaslamasında frekansların aynı, genliklerin ise farklı olduğu görülmüştür.

4. Anlık yük ile yapılan uygulamalarda, zemine serbest oturan kirişte momentin bir süre sonra sönümlendiği deplasmanın kararlı hale ulaştığı görülmüştür. Aynı problemde kiriş boyu arttırıldıkça sistemin başlangıçta periyodik olarak sönüme uğradığı ancak bir süre sonra kararlı hale geçtiği gözlenmiştir.

5. Kiriş kalınlığının deplasmana etkisi incelenmiş ve kalınlık arttırıldıkça sistemin yaptığı deplasmanın azaldığı, titreşim frekansının ise arttığı gözlenmiştir.

6. Viskozite katsayısının deplasmana etkisi araştırılmış ve viskozite katsayısı arttırıldıkça sönümün daha çabuk gerçekleştiği görülmüştür.

7. Farklı eleman sayıları alınarak çözülen problemlerde, eleman sayısı artırıldıkça sonuçların sabit bir değere yakınsadığı gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

Aköz, Y. ve Kadıoğlu, F., 1999. The Mixed Finite Element Method For The Quasi-Static and Dynamic Analysis Of Viscoelastic Timoshenko Beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **44**, 1909-1932.

Bowles, J.T., 1996. Foundation Analysis and Design, McGraw-Hill, New York

Brown, P.T. and Booker, J.R., 1979. Numerical Analysis Of Rafts On Viscoelastic Media Using Eigenvector Expansions, *Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomechanics,* **3**, 363-78.

Celep, Z. ve Kumbasar, N., 2001. Yapı Dinamiği, Rehber Matbaacılık, İstanbul.

Chen, T.M., 1995. The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied To The Quasi-Static and Dynamic Analysis Of Viscoelastic Timoshenko Beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **38**, 509-522.

Cowper, G.R., 1966. The Shear Coefficient In Timoshenko's Beam Theory, *J. Appl. Mech.*, **33**, 335-340.

Ergüven, M.E. and Gedikli, A., 2003. A Mixed Finite Element Formulation For Timoshenko Beam On Winkler Foundation, *Computational Mechanics*, **31**, 229-237.

Flügge, W., 1975. Viscoelasticity, 2nd Ed., Springer, Berlin.

İlyasov, M.H. and Aköz, A.Y., 2000. The Vibration And Dynamic Stability Of Viscoelastic Plates, *Int. J. Engng. Science*, **38**, 695-714.

İnan, M., 2001. Cisimlerin Mukavemeti, İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları, İstanbul.

Kadıoğlu, F., 1999. Viskoelastik Çubukların Kuazi-Statik ve Dinamik Analizi, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kayan, İ., 1992. Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.

Kreyszig, E., 1993. Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons Inc., New York.

Lakes, R.N. and Vanderby, R., 1999. Interrelation of Creep and Relaxation: A Modeling Approach for Ligaments, *J. Biomech. Engineering*, **121**, 612-615.

Reddy, J.N., 1993. An Introduction To The Finite Element Method, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York.

Schanz, M. and Antes, H., 2001. A Boundary Integral Formulation for the Dynamic Behaviour of a Timoshenko Beam, *Advances in Boundary Element Tecniques II*, 475-482.

Wang, C.M., Yang, T.Q. and Lam, K.Y., 1997. Viscoelastic Timoshenko Beam Solutions From Euler-Bernoulli Solutions, *J. Engng. Mech*., **123**, 746-748

ÖZGEÇMİŞ

Uğur Burak YÜKSELOĞLU, 18.12.1979 tarihinde İstanbul'da doğdu. Ailesinin görevi nedeniyle öğrenimini yurdun çeşitli il ve ilçelerinde sürdürdü. Lise öğrenimini 1997 yılında Şanlıurfa Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Lisans eğitimini 1998-2002 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde tamamladıktan sonra, 2002 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Mekanik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başlamıştır.