İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİRİK OLARAK AYRIŞTIRILABİLEN SABİT-MIKNATISLI YAPILARDA POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLENMESİ İÇİN BİR FOURIER SERİSİ YAKLAŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sinan BAŞARAN

Anabilim Dalı : Mekatronik Mühendisliği

Programı : Mekatronik Mühendisliği

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİLİNDİRİK OLARAK AYRIŞTIRILABİLEN SABİT-MIKNATISLI YAPILARDA POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLENMESİ İÇİN BİR FOURIER SERİSİ YAKLAŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Sinan BAŞARAN
518081027

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Mayıs 2010
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Levent OVACIK (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Canbolat UÇAK (YÜ)
Yrd. Doç. Dr. Erdinç ALTUĞ (İTÜ)

HAZİRAN 2010

ÖNSÖZ

Bu çalışmada beni yönlendiren, bana her konuda yardımcı olup bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen kıymetli hocam, tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Levent OVACIK'a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca bu zamana kadar yetişmemde katkısı olan, bu mesleği bana kazandıran tüm hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yaşamım boyunca benim için her türlü fedakârlığı yapmaktan çekinmeyen aileme ve dostlarıma şükranlarımı sunarım.

Haziran 2010

Sinan BAŞARAN

Elektrik Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ... **iii**
İÇİNDEKİLER ... **v**
KISALTMALAR ... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ... **xi**
SEMBOL LİSTESİ ... **xv**
ÖZET ... **xvii**
SUMMARY ... **xix**
1. GİRİŞ ... **1**
1.1 Tezin Amacı ve Tanımı ... 2
1.2 Literatür İncelemesi ... 2
1.3 Çalışmanın Alanına Katkıları ... 4
1.4 Tezin İçeriği ... 4
2. TEMEL FORMÜLASYON VE MODELLEMELERİN OLUŞTURULMASI **7**
2.1 Manyetik Akı, Manyetik Akı Yoğunluğu ve Manyetik Alan Şiddeti ... 7
2.2 Gauss Yasası, Ampere Yasası ve Genelleştirilmiş Ampere Yasası ... 8
2.3 Mıknatıslanma Vektörü ... 9
2.4 Manyetik Vektör Potansiyeli ... 11
2.5 Neumann ve Dirichlet Sınır Koşulları ... 12
2.6 Silindirik Koordinatlarda Değişkenlerine Ayırma Yöntemiyle Laplace Denkleminin Çözümü ... 12
2.6.1 Laplace denkleminin sabit mıknatıslı yapılar için düzenlenmesi ... 15
2.6.2 Laplace denkleminin yüksek harmonik değerleri için düzenlenmesi ... 17
2.7 Bir Cismin İçerisindeki Mıknatıslanmanın Yüzey Akımları ile Modellenmesi ... 18
2.8 Sınır Koşulu Eşitliklerinin Oluşturulması ... 21
2.8.1 Sınır koşulu eşitliklerinin silindirik simetrik yapılar için oluşturulması ... 22
2.9 Düzgün Mıknatıslanmaya Sahip Yapıların Modellenmesi ve Yüzey Akım Yoğunluğu Eşitliklerinin Oluşturulması ... 26
2.9.1 Yarıçap yönündeki mıknatıslanmanın modellenmesi ... 26
2.9.1.1 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin kutup arkı geometrisi için oluşturulması 27
2.9.1.2 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin halka ve çember yapısı için oluşturulması 31
2.9.2 Paralel mıknatıslanmanın modellenmesi ... 32
2.9.2.1 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin kutup arkı geometrisi için oluşturulması 34
2.9.2.2 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin kutup arkı yapısı için yüzey akım yoğunluklarının oluşturulması 35
3. FOURİER YAKLAŞIMIYLA SABİT MIKNATISLI YAPILARIN MANYETİK ANALİZİ ... **37**

3.1 Poisson Denkleminin Çözümü 37
3.1.1 Bir Yapının Silindirik Simetrik Alt Bölgelere Ayrılması 39
3.1.2 Homojen Olmayan Çözümün İncelenmesi 40
3.2 Homojen Çözümün ve Sınır Koşulu Eşitliklerinin Silindirik Simetrik Alt Bölgelere Ayrılmış Yapıda Birleştirilmesi 42
3.2.1 Neumann ve Dirichlet sınır koşulunun ifadesi 48
3.3 Genel Matrisin Oluşturulması ve Çözümü 49
3.4 Hazırlanan Analiz Programı ve Tanıtımı 54
4. FOURİER YAKLAŞIM YÖNTEMİ SONUÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALAR 57
4.1 Paralel Yönde Mıknatıslanmış Sabit Mıknatıs İçeren Yapıların İncelenmesi.. 57
4.1.1 Çember geometrisinde sabit mıknatıs içeren örnek yapı için elde edilen sonuçlar 57
4.1.2 Halka geometrisinde sabit mıknatıs içeren üç bölgeli örnek yapı için elde edilen sonuçlar 62
4.1.3 Kutup arkı geometrisinde sabit mıknatıs içeren örnek yapı için elde edilen sonuçlar 65
4.2 Yarıçap Yönünde Mıknatıslanmış Sabit Mıknatıs İçeren Yapıların İncelenmesi 70
Çember ve halka geometrisinde yarıçap yönünde mıknatıslanmaya sahip sabit mıknatıs yapılarının fiziksel olarak gerçeklenemeyeceğinden bahsedilmişti. Bu temelde; örnek olarak incelenecek yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs içeren tüm yapılar, kutup arkı geometrisine sahip sabit mıknatıslar içermektedir. Bu yapılar içine de elde edilecek sonuçlar ile yöntemin doğruluğu gösterilmek istenmektedir. 70
4.2.1 Kutup arkı geometrisinde sabit mıknatıs içeren yedi örnek yapı için elde edilen sonuçlar 70
4.2.2 Çift kutup arkı dizesi içeren sabit mıknatıslı örnek yapı için elde edilen sonuçlar 76
4.3 Yarıçap ve Paralel Yönde Mıknatıslanmış Sabit Mıknatıs İçeren Yapıların İncelenmesi 81
5. SONUÇLAR 87
KAYNAKLAR 91

KISALTMALAR

SE **:** Sonlu Elemanlar
SEY **:** Sonlu Elemanlar Yöntemi
MATLAB **:** Mathematics Labarotory

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Örnek 4 kutuplu makinede harmonik değeri 4için oluşan harmonik dağılımı. 50
Çizelge 3.2 : Oluşturulan veri dosyasının genel formu. 54
Çizelge 4.1 : Örnek üç bölgeli makineyi oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri. 58
Çizelge 4.2 : Örnek yeni üç bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri. .. 63
Çizelge 4.3 : Örnek yedi bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri. 65
Çizelge 4.4 : Örnek on dört bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri. .. 77
Çizelge 4.5 : Örnek on üç bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri. 82

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Manyetik akı ve belirli bir yüzey üzerindeki manyetik akı yoğunluğu..... 7
Şekil 2.2 : Halka şeklindeki sargı üzerinde manyetik akı yoğunluğunun incelenmesi 9
Şekil 2.3 : Örnek bir sabit mıknatıslı rotor yapısı..... 16
Şekil 2.4 : Sabit mıknatıslı kutup arkı modeli. 16
Şekil 2.5 : Atomik akımlar ve sınır üzerinde oluşan yüzey akımı..... 18
Şekil 2.6 : Atomik akımların oluştuğu sınır üzerinde büyütülmüş görünümü. 18
Şekil 2.7 : M mıknatıslanma vektörüne sahip dikdörtgensel yapı. 19
Şekil 2.8 : İki komşu hacim arasında mıknatıslanmanın incelenmesi [28]. 20
Şekil 2.9 : Manyetik akı yoğunluğunun kapalı bir yüzey üzerinde incelenmesi 21
Şekil 2.10 : Manyetik alan şiddetinin sınır üzerinde incelenmesi 21
Şekil 2.11 : Manyetik dişli yapısı [29]. 23
Şekil 2.12 : Aralarında yay sınır bulunan iki bölgenin incelenmesi..... 23
Şekil 2.13 : Aralarında yarıçap yönünde düz çizgi sınır bulunan iki bölgenin incelenmesi..... 25
Şekil 2.14 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkının silindirik koordinatlarda görünümü. 27
Şekil 2.15 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkı modeli..... 27
Şekil 2.16 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkı geometrisindeki kutup çifti modeli..... 29
Şekil 2.17 : Kutup çifti üzerinde yüzey akım yoğunluğunun dağılımı..... 29
Şekil 2.18 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış modeller: **(a)** Halka modeli. **(b)** Çember modeli. 32
Şekil 2.19 : Paralel yönde mıknatıslanmış kutup arkının silindirik koordinatlarda görünümü 32
Şekil 2.20 : Kartezyen koordinatlardaki mıknatıslanma vektörünün silindirik koordinatlara dönüşümü..... 33
Şekil 2.21 : Paralel yönde mıknatıslanmış kutup arkı modeli. 35
Şekil 2.22 : Paralel yönde mıknatıslanmış modeller: **(a)** Halka modeli. **(b)** Çember modeli..... 36
Şekil 3.1 : Problemin tanımlı olduğu bölge ve bölge sınırında manyetik vektör potansiyelinin sağladığı eşitlikler..... 37
Şekil 3.2 : Problemin tanımlı olduğu bölgede iki ayrı çözüme ayrıştırılması 38
Şekil 3.3 : Manyetik dişli yapısının silindirik simetrik alt bölgelere ayrılması..... 40
Şekil 3.4 : İçersinde sabit mıknatısı yapısı haricinde bir kaynak bulunmayan yapılarda manyetik vektör potansiyeli çözümünün görünümü. 41
Şekil 3.5 : Örnek 4 kutuplu makine üzerinde bölgelerin görünümü..... 43
Şekil 3.6 : Örnek 4 kutuplu makine üzerinde manyetik vektör potansiyeli ifadeleri ve sınırların görünümü..... 44
Şekil 3.7 : Sınır koşulları uygulanarak elde edilecen denklem sisteminin genel görünümü. 52
Şekil 4.1 : Örnek üç bölgeli yapının görünümü..... 57

Şekil 4.2 : Örnek üç bölgeli yapının çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 58
Şekil 4.3 : Hava aralığı - sabit mıknatıs sınırı üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 59
Şekil 4.4 : Hava aralığı – paslanmaz çelik sınırında manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerlerinin değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 60
Şekil 4.5 : Örnek üç bölgeli en dış sınır koşulu Neumann tipi olarak ele alınan yapının çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 61
Şekil 4.6 : Hava aralığı – paslanmaz çelik bölge sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 62
Şekil 4.7 : Örnek yedi bölgeli yapının çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 63
Şekil 4.8 : Sabit mıknatıs – paslanmaz çelik bölge sınırında hesaplanan manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü. 64
Şekil 4.9 : Örnek 3 bölgeli yapının görünümü. 65
Şekil 4.10 : Örnek yedi bölgeli yapı için oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Harmonik değeri 10 için oluşan dağılım. **c)** Harmonik değeri 20 için oluşan dağılım. **(d)** Harmonik değeri 30 için oluşan dağılım. 66
Şekil 4.11 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış örnek yedi bölgeli yapı için oluşan SE ağının ve SEY çözümü ile oluşan manyetik akı dağılımının görünümü. 67
Şekil 4.12 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında oluşturulan manyetik analiz yöntemiyle elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 10 için oluşan çözüm. **(b)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. 68
Şekil 4.13 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında SEY ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü. 69
Şekil 4.14 : Örnek yedi bölgeli yapı için oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Harmonik değeri 10 için oluşan dağılım. **c)** Harmonik değeri 20 için oluşan dağılım. **(d)** Harmonik değeri 30 için oluşan dağılım. 71
Şekil 4.15 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış örnek yedi bölgeli yapı için oluşturulan SE ağı ve SEY çözümü ile oluşan manyetik akı dağılımı. 72
Şekil 4.16 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Harmonik değeri 5 için. **(b)** Harmonik değeri 20 için. **(c)** Harmonik değeri 20 için. 73
Şekil 4.17 : Bir kutup çifti altındaki manyetik eşdeğer devre modeli 74
Şekil 4.18 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında manyetik eşdeğer devre yöntemi, oluşturulan manyetik analiz yöntemi ve SEY çözümleri ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi. 75
Şekil 4.19 : Örnek yapının görünümü. 76

Şekil 4.20 : Örnek yapıda elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 10 için oluşan dağılım. **c)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(d)** SEY ile elde edilen dağılım. 78
Şekil 4.21 : İçerideki paslanmaz çelik bölge – sabit mıknatıs dizesi sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü..... 79
Şekil 4.22 : Çelik bölge orta noktasında manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin açısal yönde değişimi: **(a)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü..... 80
Şekil 4.23 : Çelik bölge orta noktasında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü. 81
Şekil 4.24 : Örnek yapının görünümü..... 82
Şekil 4.25 : Örnek yapı için elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Harmonik değeri 20 için oluşan dağılım. **c)** Harmonik değeri 25 için oluşan dağılım. **(d)** SEY ile oluşan dağılım.83
Şekil 4.26 : En içteki hava aralığı – paralel mıknatıslanmış sabit mıknatıs sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 25 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü. 84
Şekil 4.27 : Hava aralığı – çelik bölge sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 25 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü..... 85
Şekil 4.28 : Çelik bölge – yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 25 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü. 86

SEMBOL LİSTESİ

$\vec{\mathrm{J}}$	**:** Akım yoğunluğu
a	**:** Atomik akımların oluştuğu çevrenin yarıçapı
μ_{r}	**:** Bağıl geçirgenlik
L	**:** Bir kutup çifti uzunluğu
m	**:** Bölge numarası
BS	**:** Bölge sayısı
$\vec{\mathrm{I}}$	**:** Çevre vektörü
n	**:** Harmonik numarası
μ_0	**:** Boşluğun manyetik geçirgenliği
A_{h}	**:** Homojen manyetik vektör potansiyel değeri
$\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{p}}$	**:** Homojen olmayan manyetik vektör potansiyeli
$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{f}}$	**:** İçi boş bir halka sargısı içerisinde mıknatıslanmanın oluşturduğu manyetik akı yoğunluğu
$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{i}}$	**:** İçi boş bir halka sargısı içerisinde sargılardan geçen akım tarafından oluşturulan manyetik akı yoğunluğu
$\vec{\mathrm{n}}$	**:** İki bölge arasındaki sınırın normal yönündeki birim vektörü
$\vec{\mathrm{t}}$	**:** İki bölge arasındaki sınırın teğetsel yöndeki birim vektörü
x, y	**:** Kartezyen koordinatlardaki eksenler
$KMKS$	**:** Katsayı matrisi kolon sayısı
$KMSS$	**:** Katsayı matrisi satır sayısı
p	**:** Kutup çifti sayısı
γ	**:** Kutup arkının iç açı ölçüsü
∇^2	**:** Laplace operatörü
$\vec{\Phi}$	**:** Manyetik akı
$\vec{\mathrm{B}}$	**:** Manyetik akı yoğunluğu
$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{n}}$	**:** Manyetik akı yoğunluğunun normal bileşeni
$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{t}}$	**:** Manyetik akı yoğunluğunun teğetsel bileşeni
$\vec{\mathrm{H}}$	**:** Manyetik alan şiddeti
$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{t}}$	**:** Manyetik alan şiddeti vektörünün teğetsel bileşeni
μ	**:** Manyetik geçirgenlik
χ_m	**:** Manyetik süseptibilite
$\vec{\mathrm{A}}$	**:** Manyetik vektör potansiyeli
max (n)	**:** Maksimum harmonik sayısı
max (np)	**:** Maksimum np sayısı
$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{c}}$	**:** Mıknatısın zorlayıcı manyetik alan şiddeti
$\vec{\mathrm{M}}$	**:** Mıknatıslanma vektörü
φ	**:** Mıknatıslanma vektörünün kartezyen koordinatlarda x ekseni ile arasındaki açı
$\lvert M \rvert$	**:** Mıknatıslanma vektörünün mutlak değeri
M_x	**:** Mıknatıslanma vektörünün x ekseni üzerindeki bileşeni
M_y	**:** Mıknatıslanma vektörünün y ekseni üzerindeki bileşeni
Ω_m	**:** m-inci bölge

r_{im} : *m*-inci bölge iç yarıçapı
r_{om} : *m*-inci bölge dış yarıçapı
$\vec{B}_m$: *m*-inci bölgedeki manyetik akı yoğunluğu
$\vec{B}_{nm}$: *m*-inci bölgedeki manyetik akı yoğunluğunun normal bileşeni
$\vec{H}_m$: *m*-inci bölgedeki manyetik alan şiddeti
$\vec{H}_{tm}$: *m*-inci bölgedeki manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşeni
$\vec{J}_{msma}$: *m*-inci bölgenin *a*-ıncı sınırdaki yüzey akım yoğunluğu
μ_m : *m*-inci bölgenin manyetik geçirgenliği
p_m : *m*-inci bölgenin kutup çifti sayısı
$\vec{B}_{nm}$: *m*-inci bölgede *n*-inci harmonikteki manyetik akı yoğunluğu
A_{mn} : *m*-inci bölgede *n*-inci harmonikteki manyetik vektör potansiyeli değeri
$a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$: *m*-inci bölgedeki *n*-inci harmonikteki manyetik vektör potansiyelini oluşturan karakteristik katsayılar
$\vec{J}_{msm}$: *m*-inci bölgenin yüzey akım yoğunluğu
∇ : Nabla işleci
$\vec{e}_r$: r ekseni birim vektörü
$\vec{M}_r$: r ekseni yönündeki mıknatıslanma vektörü
R : *r* yarıçap değerine bağlı çözümü içeren fonksiyon
SKS : Sınır koşulu sayısı
SS : Sınır sayısı
θ : Silindirik koordinatlarda açısal bileşen değeri
r, θ, z : Silindirik koordinatlardaki eksenler
r : Silindirik koordinatlarda yarıçap bileşen değeri
ϵ : Sonsuz küçük uzaklık ifadesi
Ω : Tanımlanan bölgenin içi
$\partial\Omega$: Tanımlanan bölge sınırı
$\vec{e}_y$: y ekseni birim vektörü
$\vec{J}_{ms}$: Yüzey akımı yoğunluğu
$\vec{S}$: Yüzey vektörü
$\vec{e}_z$: z ekseni üzerindeki birim vektör
$\vec{e}_x$: x ekseni üzerindeki birim vektör
$\vec{M}_x$: x ekseni yönündeki mıknatıslanma vektörü
$\vec{e}_\theta$: θ ekseni üzerindeki birim vektör
$\vec{M}_\theta$: θ ekseni yönündeki mıknatıslanma vektörü

SİLİNDİRİK OLARAK AYRIŞTIRILABİLEN SABİT-MIKNATISLI YAPILARDA POISSON DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR FOURIER SERİSİ YAKLAŞIMI

ÖZET

Bu tezde, silindirik olarak ayrıştırılabilen sabit mıknatıslı yapıların manyetik analizine olanak sağlayan Poisson denkleminin çözümü için Fourier serisi yaklaşımı kullanılarak yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bütün problem alanı içerisindeki homojen ve homojen olmayan problemlerin çözümlenmesi için süperpozisyon prensibi uygulanarak bir lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Çember, halka ve kutup arkı şeklindeki yarıçap ve paralel yönde mıknatıslanmış mıknatısların yüzey akım yoğunluğu formülleri Fourier serisi kullanılarak elde edilmiştir. Mıknatıslanma vektörünün yüzey akım yoğunluğu eşdeğeri de formüle edilmiştir. Çember ve halka şeklindeki yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatısların modellenemeyeceği Gauss yasası aracılığıyla gösterilmiştir. Paralel mıknatıslanmış sabit mıknatıslara bir model oluşturabilmek amacıyla kartezyen koordinat sistemi kullanılmıştır ve gerekli olan mıknatıslanma vektörünün silindirik koordinatlara dönüşümü sunulmuştur. Mıknatıslanma bölgesi içerisindeki düzgün mıknatıslanmadan kaynaklanan kaynak teriminin homojen çözümü etkilemediği görülmüştür. Silindirik koordinatlarda Laplace denklemini sağlayan vektör potansiyeli için homojen çözüm değişkenlerine ayırma tekniği kullanılarak elde edilmiştir.

Bu yeni yöntem temelinde; yapı bölgesi çember, halka ve kutup arkı olarak farklı silindirik simetrik geometrilere ayrılmıştır. Bu alt bölgelerin sınırlarında, sınır koşulları eşitlikleri bu alt bölgeler arasındaki manyetik bağıntı aracılığıyla elde edilmiştir. Manyetik vektör potansiyeli ifadesi ve sınır koşulu eşitlikleri birleştirilerek dört denklem elde edilmiştir. Ayrıca, Neumann veya Dirichlet sınır koşulu olarak uygulanan problemin dış sınırından iki yeni denklem elde edilmiştir. Tüm eşitlikler Fourier serisi içerisindeki harmonik değerini içererek matris formunda ifade edilmiştir. Büyük seyrek matrislerin hızlı hesaplanarak farklı yapıdaki makine modellerinin çözümünün elde edilmesi için MATLAB tabanlı bir program geliştirilmiştir. Bu program, problem bölgelerinin fiziksel özelliklerini içeren veri dosyası kullanılarak lineer ayrık sistemlerin hızlı bir şekilde oluşturulmasını sağlamaktadır. Bu nedenle, karmaşık, kalıcı mıknatıslı yapıların manyetik analizi hızlı ve doğru bir şekilde elde edilebilmektedir.

Sunulan yöntemin doğruluğunu kanıtlamak amacıyla, farklı yapıdaki çeşitli makine modeli örneklerinin manyetik analizi için bu yöntem ve SEY (Sonlu Elemanlar Yöntemi) karşılaştırılmıştır. Yöntemin doğruluğunun gözlenebilmesi için bu makine modelleri paralel yönde, yarıçap yönünde ve hem paralel hem yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatısları içerecek şekilde üç kategoriye ayrılmıştır. Doğru sonuçları elde edebilmek için SEY çözümlerinde yüksek yoğunlukta ağ oluşturulmuştur. Çeşitli çevreler üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni ve

problem bölgesi içerisindeki manyetik akı dağılımı sunulmuştur. Sunulan yöntem ile elde edilen sonuçlar SEY'den elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Sunulan yöntem, kutup arkı mıknatıslarının arasındaki sınırlar üzerindeki manyetik akı çizgilerinin bozulması haricinde, paralel yönde mıknatıslanmaya sahip sabit mıknatıs içeren modeller için iyi bir performans göstermiştir. Bu bozulma, yüzey akım yoğunluğunun bu sınırlar üzerindeki modelleme eksikliğinden kaynaklanmaktadır. Bu yöntem, Gibbs etkisi haricinde yarıçap yönünde mıknatıslanmış modeller için iyi bir performans göstermiştir. Gibbs etkisinin, Fourier serisi yaklaşımından kaynaklandığı bilinmektedir. Bu yöntemin sonuçlarındaki doğruluğu artırmak için uygun süzme (filtreleme) teknikleri ile Gibbs etkisinin çözümlerdeki etkisi yok edilmiştir. Elde edilen sonuçlar SEY ve manyetik eşdeğer devre yaklaşımı ile elde edilen sonuçlara mükemmel yakınsama sağlamıştır. Sunulan yöntem ile elde edilen tüm sonuçlar, harmonik mertebesinin artırılması ile SEY'den ve MED (Manyetik Eşdeğer Devre) yaklaşımından elde edilen sonuçlara yakınsamıştır. Sunulan yöntemin silindirik olarak ayrıştırılabilen sabit mıknatıslı yapılar içerisindeki manyetik alanı ifade eden iki-boyutlu Poisson denkleminin çözümü için etkin bir yaklaşım olduğu kanıtlanmıştır.

A FOURIER SERIES APPROXIMATION TO SOLUTION OF POISSON'S EQUATION IN CYLINDRICALLY DECOMPOSABLE PERMANENT-MAGNET STRUCTURES

SUMMARY

In this thesis, a new method for the solution of Poisson's equation that enables magnetic analysis of cylindrically decomposable permanent-magnet structures is developed using Fourier series approximation. A set of linear equations for the solution of homogenous and non-homogenous problem within the whole problem domain are obtained by applying the superposition principle. Formulations for the surface current density for circle-, ring- and arc-shaped geometries, and radial and parallel magnetization of magnets are obtained using Fourier series. The surface current density equivalence of magnetization vector is also formulated. It has been shown that modeling of circular and ring-shaped magnets with radial magnetization is impossible by means of Gauss's law. Cartesian coordinate system is used to provide a model of permanent magnets with parallel magnetization, and the required transformation of magnetization vector to cylindrical coordinates is presented. It is shown that the source term due to uniform magnetization within magnet regions does not contribute to the non-homogenous solution. Homogenous solution to vector potential that satisfies Laplace's equation in cylindrical coordinates is obtained by using the separation of variables technique.

Based on this new method, the region of the magnetic structure is divided into different cylindrically symmetric geometries; such as circles, rings or pole arcs. At the boundaries of these sub-regions, the equations for boundary conditions are obtained by the magnetic relationship between these sub-regions. Four equations are obtained by combining the expression of the magnetic vector potential and boundary conditions. Furthermore, two new equations are obtained from the outer boundary of the problem applied as Neumann or Dirichlet boundary conditions. All equations are expressed in the matrix form including the harmonic numbers in Fourier series. A MATLAB-based program is developed for fast computation of the large sparse matrices to obtain the solution for different structured machine models. This program provides a rapid construction of the linear sparse system from a data file including the physical properties of the problem regions. Therefore, magnetic analysis of the complex permanent-magnet structures can be obtained quickly and accurately.

In order to verify the accuracy of the presented method, both this method and FEM is applied for magnetic analysis of different structured machine model examples. In general, these models are divided into three categories including parallel, radial and both parallel and radial magnetized permanent-magnets to observe the accuracy of this method. High density mesh is generated in the FEM solutions to obtain accurate results. The variation of the normal component of magnetic flux density on various paths and magnetic flux distribution in the problem region are presented. The results

obtained by the presented method are compared with the results from the FEM solutions.

The presented method is performed well for the permanent-magnet models which contain parallel magnetization, except the corruption of magnetic field lines between the boundaries of the pole arc magnets. This corruption is caused by the lack of modeling the surface current density on these boundaries. The method is performed well for the radial magnetization model, except the effect of Gibbs phenomenon. It is known that the effect of Gibbs phenomenon is caused by the Fourier series approximation. The Gibbs artifact in solutions is eliminated by proper filtering techniques to enhance the accuracy of the results of this method. The results achieved perfect convergence to the solutions obtained by the FEM and magnetic equivalent circuit (MEC) approach. All the results which are obtained by the presented method are achieved convergence to FEM and MEC results with increasing number of harmonic orders. It has been proven that the presented method is an effective approach for solving two-dimensional Poisson's equation that constitutes magnetic field within cylindrically decomposable permanent magnet structures.

1. GİRİŞ

Günümüzde; sabit mıknatıs yapıları genellikle manyetik rulman, akı sınırlayıcı cihazlar, algılayıcılar, elektrik makineleri ve hoparlör gibi yapılar içerisinde manyetik alan oluşturmak için kullanılmaktadır. Gelişen dünyada sabit mıknatıslı yapılar günden güne gelişmekte yeni tasarımlara sahip sabit mıknatıslı yapılar ortaya çıkmaktadır. Bu yeni tasarımların şekillendirilmesinde elektromanyetik analize ihtiyaç duyulmaktadır. Daha verimli, daha kaliteli makinelerin geliştirilebilmesi tasarım aşamasında elde edilen elektromanyetik analizine doğrudan bağlıdır. Elektromanyetik alan dağılımından elde edilen performans ve parametre karakteristiklerden daha etkin tasarımlar gerçekleştirilebilmektedir. Bu anlamda, daha doğru bir elektromanyetik analizin önemi açıktır.

Manyetik alan hesaplamalarının temelini Poisson denklemi oluşturmaktadır. Poisson denkleminin çözümü ile manyetik vektör potansiyeli elde edilerek, manyetik akı dağılımı ve dolayısıyla manyetik akı yoğunluğu, manyetik alan şiddeti gibi tasarım aşamasında oldukça önemli büyüklükler elde edilmektedir. Poisson denkleminin iki boyutlu çözümü 1930'lardan beri bilinmektedir [1].

Manyetik analiz için yaygın olarak kullanılan ve kabul görmüş yöntem Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY)'dir. SEY ile yeterince etkin manyetik alan analiz yapabilmek için SEY'nin temel prensipleri gereği yapının çok yüksek sayıda geometrik elemanlara bölünmesi gerekmektedir [2]. Bu gereksinim de tasarımı en iyi şekilde gerçekleştirebilme kısmında oldukça uzun zaman ve oldukça yüksek bilgisayar performansı gerektirmektedir. Bu nedenle, genellikle daha yüksek hızdaki bilgisayarlar ile yapılabilmektedir ve elektrik makineleri tasarımında günlük problemlerin çözümüne uygun değildir.

SEY'nin dezavantajlarından dolayı, birçok nümerik ve analitik yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır. Fakat bu yöntemler, genel bir yöntem olmaktan ziyade belirli özel yapıların çözümünü temel almıştır.

1.1 Tezin Amacı ve Tanımı

Söz edilen gereksinimlere bağlı olarak; Poisson denkleminin çözümü ve dolayısıyla manyetik analizin gerçeklenmesi için Fourier yaklaşımıyla bir yöntem tasarlanmıştır. Silindirik simetrik bir geometriye sahip sabit mıknatıslı yapıların manyetik analizi için tasarlanan bu yöntemde, manyetik alan analizi için analitik bir ifade elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Geliştirilen analiz yöntemiyle ele alınan yapıların iki boyutlu analiz yapılması amaçlanmaktadır. Bu yüzden geliştirilen tüm formülasyonlar iki boyutta ele alınmıştır. Silindirik simetrik yapıların modellenmesinde kolaylık sağlayacak silindirik koordinatlar üzerinde modellemeler gerçekleştirilmiştir.

Poisson denklemi homojen ve homojen olmayan vektör potansiyelleri çerçevesinde iki ayrı çözümde incelenmiş ve sabit mıknatıs yapısı için homojen manyetik vektör potansiyeli yapısına indirgenmiştir. Manyetik vektör potansiyelinin bölgelerin sınır değerinin elde edilmesinde; sabit mıknatıs yapılarının yarıçap ve paralel yöndeki mıknatıslanma modellemeleri gerçekleştirilerek, yüzey akım yoğunluğu eşdeğerleri kullanılmıştır.

Oluşturulan yöntemin bir algoritma ile şekillendirilerek bahsedilen özelliklere sahip tüm yapılarda manyetik analizin daha hızlı ve daha doğru olarak elde gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir.

1.2 Literatür İncelemesi

Sabit mıknatıslı yapılarda manyetik alan hesapları yeni değildir. 1970'lerde samaryum kobalt(SmCo) ve 1980'lerde neodimiyum demir bor(NdFeB) gibi nadir toprak sabit mıknatısların kullanılabilir hale gelmesiyle, sabit mıknatıs tahrikli makinelerin manyetik alanının hesaplanması yeniden geçerlilik kazanmıştır. Makinelerde bu mıknatıs yapıları kullanılmadan önce, hava aralıkları çok küçüktü ve bir boyutlu analiz yeterli olmaktaydı. Bu nadir toprak sabit mıknatısları, zorlayıcı kuvveti çok yüksek olduğu için daha büyük hava aralıklarının kullanılmasını sağlamıştır. Bu büyük hava aralıkları manyetik alanın eğrilmesi etkilerine sebep olarak, tek boyutlu analizin geçerliliğini kaybetmesine neden olmuştur.

SEY'nin dezavantajlarından dolayı, birçok nümerik ve analitik yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır. Nümerik yöntemler genellikle SEY temelindedir.

SEY'nin temel prensiplerini kullanarak çeşitli yöntemler geliştirilme çalışmaları sürmektedir. [3] içerisinde geliştirilen bir algoritma ile SEY prensibiyle gerçekleştirilen çözümün tasarlanan bir algoritma ile daha hızlı ve daha az hafıza gerektirecek şekilde çözümlenmesi gerçekleştirilmiştir. [4] ve [5] içerisinde ise, sabit mıknatıslı bir yapı için, manyetik vektör potansiyeli ve ferromanyetik maddelerin mıknatıslanmaları ayrı çözümler şeklinde ele alınarak Sınır Elemanlar Yöntemi ve SEY birleştirilerek bir çözüm elde edilmiştir. [6] ve [8] içerisinde ise köşe elemanlar kullanılarak, SEY temelinde gerçekleştirilen çözümün hızlandırılması için farklı uygulamalar ifade edilmiştir. [7] içerisinde elektrik makinelerinin manyetik analizi için hava aralığı için elde edilen analitik çözüm ile SEY çözümü birlikte kullanılmıştır. [9] içerisinde, SEY ve analitik yöntemin daha iyi çözüm verdiği noktalar birleştirilerek benzer bir karma yöntem ifade edilmiştir.

Analitik çözümün temel avantajı, yüksek doğrulukla çözümün elde edilebilmesi ve manyetik alanın uygulamadaki kolaylığıdır. Fakat bu avantajlar, makine geometrisi basit olduğunda ve kullanılan yapılar lineer karakteristiklerde olduklarında önemli bir etken haline gelmektedir. Bir yapının analitik olarak ifade edilmesi oldukça zor olmaktadır. Bu bakımdan, analitik yöntemler genellikle gerçek makine modellerinin oldukça sadeleştirilmiş yapısını kullanmaktadır. Bu nedenle yapılan çalışmalar ise genel bir yöntemden ziyade özel yapıların manyetik analizine yöneliktir.

Örnek olarak; [10], [11], [12], [13] ve [14] içerisinde sabit mıknatıslı makinelerin iki boyutlu manyetik akı yoğunluğunun analitik hesaplamaları silindirik koordinatlarda açıklanmıştır. [15] içerisinde ise kartezyen koordinatlarda açıklanmıştır. [10], [12], [13] ve [15] içerisinde sabit mıknatıslar yerine yüzey akımı eşdeğerleri kullanılmıştır. [11], [16] ve [17] içerisinde ise mıknatıslanma doğrudan kullanılmıştır.

[18] içerisinde; [10], [12], [13], [15], [16] ve [17] içerisinde de olduğu gibi sabit mıknatıslar yüzeye monte edilmiştir. Zhu ve diğerleri [18] ile ilk kısmı olarak yazdığı dört bölümlük bir seriyi sabit mıknatıslı makinelerdeki manyetik alanın analitik hesaplanmasına ayırmıştır. [19] içerisinde ise Zhu ve diğerleri araya eklenmiş mıknatıslardan kaynaklanan manyetik alanın etkilerini öngörmek için yaptıkları analitik modellemeyi geliştirmişlerdir. [20] içerisinde, [18] temelinde yapılan birçok

gelişim açıklanmıştır. Dahili ve harici rotor yapısı yarıçap ve paralel yöndeki mıknatıslanma için modellenmiştir(yarıçap ve paralel yöndeki mıknatıslanmadan kaynaklanan manyetik alan [10]'da açıklanmıştır).

Watterson ve diğerleri, özellikle dayanıklı sabit mıknatıslı rotor ve sargısız statordan oluşan bir makine için analitik alan hesaplama modeli geliştirmişlerdir[17]. Kim ve diğerleri rotor eksantrikliğine sahip olan bir makinenin silindirik koordinatlardaki iki boyutlu manyetik alan çözümünü açıklamıştır[15]. Zhilichev, SEY üzerindeki doğrulamalar ile analitik alan çözümü hesaplamalarını bileştirerek karma bir yöntem elde etmiştir[14].

[10], [14], [15], [18] ve [20] mıknatısların manyetik alanını elde etmek için manyetik skaler potansiyelini kullanılmıştır. [11], [12], [15], ve [17] ise manyetik vektör potansiyelini kullanılmıştır. [13] içerisinde ise her iki yaklaşımın karışımı kullanılmıştır.

1.3 Çalışmanın Alanına Katkıları

Bu tezin ilk katkısı; Poisson denkleminin, süper pozisyon prensibiyle homojen ve homojen olmayan çözümler çerçevesinde iki ayrı yapıya ayrılarak, sabit mıknatıslı yapılar için homojen çözümden oluştuğunun elde edilmesidir. Diğer bir gelişim ise, Laplace denkleminin çözümünden elde edilen homojen manyetik potansiyeli yapısının Fourier serisi yaklaşımıyla ele alınmasıdır. Bu çerçevede yüzey akımları modellemesi Fourier serisi yaklaşımıyla elde edilmiştir. Çözümü aranan yapı tanımlı olduğu bölgede, farklı manyetik vektör potansiyeli değerine sahip olan silindirik simetrik alt bölgelere indirgenmiştir. Bu alt bölgeler arasındaki bağıntı, sınır koşulu eşitlikleri ile yarıçap ve paralel yönde mıknatıslanmış sabit mıknatıs modellemeleri kullanılarak elde edilmiştir. Bir diğer gelişim ise, bölgeler arasındaki her sınır için elde edilen denklem sisteminin ve dolayısıyla manyetik akı dağılımının MATLAB tabanında hazırlanan bir algoritma ile çözümünün elde edilmesidir.

1.4 Tezin İçeriği

Bu tez beş temel bölümde incelenmiştir. Bölüm 1'de sabit mıknatıslı yapılar ve manyetik alan analizi ile ilgili bir tanıtım bölümüdür. Manyetik alan analizi ile ilgili

bir kaynak araştırmasını içermektedir. Tezin kazanımları da ilk bölümde açıklanmıştır.

Bölüm 2'de bilinen temel elektromanyetik yasaları verilmiştir. Elde edilecek analiz yönteminde kullanılacak bu formülasyonların geliştirilmesi ve yapılan modellemeler de bölüm 2 altında tanıtılmıştır.

Bölüm 3'de Fourier yaklaşımıyla manyetik analizin temelini oluşturan Poisson denkleminin çözümlenmesi açıklanmıştır. Örnek bir yapı üzerinde sınır eşitlikleri oluşturulması açıklanmıştır. Genel bir yapı için sınır koşulu denklemlerinden elde edilecek, denklem sisteminin matris formu açıklanmıştır. MATLAB tabanında hazırlanan algoritmanın çalışma prensibine kısaca değinilmiştir.

Bölüm 4'te geliştirilen manyetik analiz yöntemiyle elde edilen sayısal sonuçları gösterilmiştir. Farklı örnek yapılar ele alınarak oluşturulan manyetik analiz yöntemi sonuçları incelenmiştir. Yöntemin gerçekliğinin test edilebilmesi amacıyla Sonlu Elemanlar Yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılması da Bölüm 4'te incelenmiştir.

Son olarak Bölüm 5 ise; kısaca tezin özetlenmesi, Bölüm 4'te elde edilen sayısal benzetimlerden elde edilen sonuçların tartışılarak tezin sonuçlandırılmasını içermektedir. Geliştirilen yöntem ve tüm bileşenleri detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Bu bölüm, elde edilen analiz yönteminin geliştirilebilmesi için ileriki çalışmalar ile ilgili öneriler ile bitmektedir.

2. TEMEL FORMÜLASYON VE MODELLEMELERİN OLUŞTURULMASI

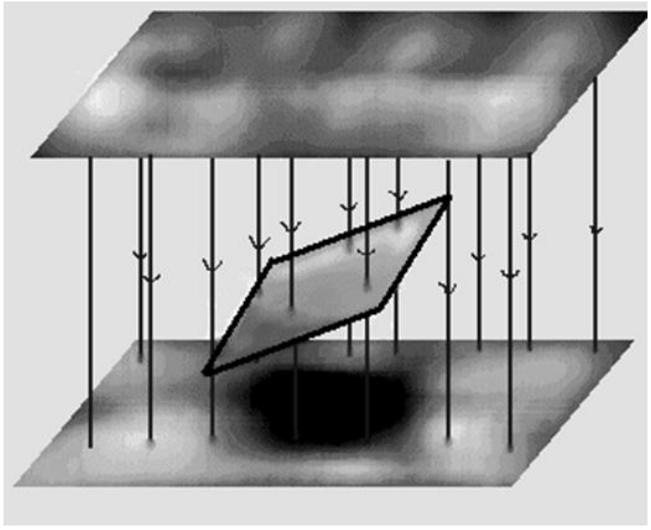
2.1 Manyetik Akı, Manyetik Akı Yoğunluğu ve Manyetik Alan Şiddeti

Manyetik akı, toplam manyetizmanın ölçüsüdür. Basit olarak ifade edilecek olursa, bir mıknatısın kuvvet çizgileri sayısına manyetik akı denir. $\vec{\Phi}$ simgesiyle gösterilir. Birimi Weber'dir.

Manyetik akı yoğunluğu, birim kesit alandan geçen manyetik akı miktarının ölçüsüdür. $\vec{B}$ simgesiyle gösterilir. Şekil 2.1'de manyetik akı ve belirli bir yüzey üzerindeki dağılımı görülmektedir. Birim yüzeyden geçen manyetik kuvvet çizgilerinin sayısı manyetik akı yoğunluğunu oluşturmaktadır. Birimi Wb/m^2'dir. Manyetik akı ile manyetik akı yoğunluğu arasındaki ilişki aşağıdaki eşitlikle ifade edilmektedir [21].

$$\Phi = \iint_S \vec{B}.d\vec{S} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Burada, $\vec{S}$ ile manyetik akı çizgilerinin geçtiği yüzey vektörü ifade edilmiştir. İntegral işaretindeki S ise, integralin yüzey integrali olduğunu ifade etmektedir.



Şekil 2.1 : Manyetik akı ve belirli bir yüzey üzerindeki manyetik akı yoğunluğu

Manyetik alan şiddeti, manyetik alan doğrultusunda ele alınan bir nokta üzerindeki manyetik alanın şiddetidir. $\vec{H}$ simgesi ile gösterilir. Birimi A/m'dir. Manyetik alan şiddeti ile manyetik akı yoğunluğu arasındaki ilişki aşağıdaki ifade ile bilinmektedir [23].

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{2.2}$$

Burada, μ niceliği manyetik geçirgenliktir. Ayrıca, manyetik geçirgenlik ise genel olarak aşağıdaki ifadeyle bilinmektedir[23].

$$\mu = \mu_0\mu_r \tag{2.3}$$

Burada, μ_0 niceliği boşluğun manyetik geçirgenliğidir. μ_r ise bağıl manyetik geçirgenliktir.

2.2 Gauss Yasası, Ampere Yasası ve Genelleştirilmiş Ampere Yasası

Manyetik akının korunumu yasası olarak da bilinen Gauss yasasına göre, herhangi bir kapalı yüzey üzerinden geçen manyetik akı sıfırdır [22]. Gauss yasası, denklem (2.1)'in yeniden düzenlenmesiyle elde edilen aşağıdaki ifade ile bilinmektedir.

$$\Phi = \oint_S \vec{B}.d\vec{S} = 0 \tag{2.4}$$

Ampere yasası, manyetik alan ve elektriksel manyetik akım kaynağıyla ilgilidir. Bu yasaya göre; manyetik akı yoğunluk vektörü $\vec{B}$'nin kapalı bir çevre üzerindeki çizgisel integrali, o çevre içinden geçen $\vec{J}$ olarak ifade edilen akım yoğunluğu vektörünün μ_0 faktörüyle çarpımına eşittir.

$$\oint_C \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 \oint_S \vec{J}.d\vec{S} \tag{2.5}$$

Burada, μ_0 boşluğun manyetik geçirgenliğidir. $\vec{l}$ ile ise, manyetik alan çizgilerinin geçtiği çevre vektörü ifade edilmiştir. İntegral işaretindeki *C* ifadesi ise, integralin çevresel integral olduğunu belirtmektedir.

Denklem (2.5) Kelvin-Stokes teoremine göre düzenlendiğinde, diferansiyel formda aşağıdaki ifadeyle elde edilmektedir.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad \textbf{(2.6)}$$

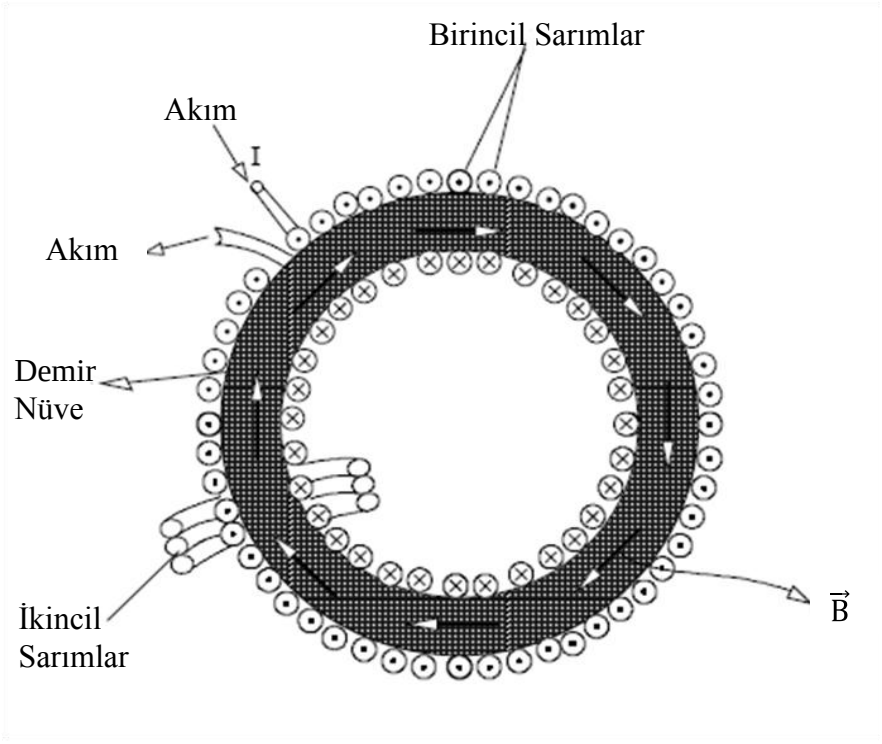
Ampere yasası temeline dayanan ve genelleştirilmiş Ampere yasası olarak bilinen ifade aşağıda gösterilmektedir [22].

$$\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = \oint_S \vec{J}.d\vec{S} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Burada, sol taraftaki terim kapalı bir çevre içinden geçen akımların toplamıdır. Genelleştirilmiş Ampere yasasına göre kapalı bir çevre üzerindeki manyetik alan şiddeti $\vec{H}$, o çevreden geçen net akıma eşittir.

2.3 Mıknatıslanma Vektörü

Maddenin manyetik halini anlatabilmek amacıyla mıknatıslanma vektörü denilen bir nicelik kullanılmaktadır. $\vec{M}$ simgesiyle gösterilir. Birim başına manyetik momenti ifade etmektedir. Birimi A/m'dir.



Şekil 2.2 : Halka şeklindeki sargı üzerinde manyetik akı yoğunluğunun incelenmesi

Bir maddenin toplam manyetik alanı, maddenin mıknatıslanmasına ve ona uygulanan dış alana bağlıdır. Şekil 2.2'de görülen içi boş bir halka şeklindeki sargının içinden geçen akım tarafından oluşturulan manyetik akı yoğunluğu $\vec{B}_i$ olarak ele alınsın. Bu

sarımın iç bölgesine manyetik bir çekirdek madde konulduğunu varsayılırsa, bu çekirdek maddenin oluşturduğu manyetik akı yoğunluğu da $\vec{B}_f$ olarak ele alınsın. Bu koşullar altında sargı içerisinde oluşan toplam manyetik alan değeri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{B}_t = \vec{B}_i + \vec{B}_f \quad \textbf{(2.8)}$$

Manyetik çekirdek tarafından oluşturulan manyetik akı yoğunluğu ile $\vec{M}$ mıknatıslanma vektörü arasındaki bağıntı ise, genelleştirilmiş Ampere yasası temelinde şu şekilde gösterilmektedir [23].

$$\vec{B}_f = \mu_0 \vec{M} \quad \textbf{(2.9)}$$

Bu ifade, denklem (2.8)'de yerine yazıldığında aşağıdaki ifade oluşmaktadır.

$$\vec{B}_t = \vec{B}_i + \mu_0 \vec{M} \quad \textbf{(2.10)}$$

Manyetik akı yoğunluğu ile manyetik alan şiddeti arasındaki genel ifade bu şekilde oluşmaktadır. Manyetik alan şiddeti ile mıknatıslanma vektörü arasındaki bağıntı, lineer manyetik maddeler içerisinde aşağıdaki ifadeyle bilinmektedir[23].

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \textbf{(2.11)}$$

Burada, χ_m ifadesi manyetik süseptibilite olarak bilinmektedir. Bağıl geçirgenlik ile arasındaki bağıntı ise, lineer maddeler içerisinde aşağıda ifadeyle oluşmaktadır.

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad \textbf{(2.12)}$$

Bir mıknatıs yapısı ele alınırsa, denklem (2.11)'den hareketle lineer manyetik yapıya sahip bir mıknatısın zorlayıcı manyetik alanıyla mıknatıslanma vektörü arasındaki ifade ise, denklem (2.13) ile ifade edilebilir.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}_c \quad \textbf{(2.13)}$$

Burada, $\vec{H}_c$ mıknatısın zorlayıcı manyetik alanıdır.

2.4 Manyetik Vektör Potansiyeli

Manyetik vektör potansiyeli, üç boyutlu vektör alanı olarak bilinmektedir. $\vec{A}$ simgesiyle ifade edilir. Rotasyoneli manyetik akı yoğunluğuna eşittir.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{2.14}$$

Diferansiyel formdaki Ampere yasası temel alınarak, manyetik vektör potansiyelini ifade eden denklem (2.14), denklem (2.15) ile elde edilmektedir.

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{J} \tag{2.15}$$

Denklem (2.15) standart vektör özdeşlikleri kullanıldığında, aşağıdaki ifadeye sahip olmaktadır.

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} \tag{2.16}$$

Denklem (2.16)'nin sağ tarafında parantez içerisindeki ifadenin Kulomb gösterimi olarak açılımı aşağıdaki ifadeyle bilinmektedir.

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{2.17}$$

Denklem (2.17)'e göre denklem (2.16) düzenlenirse, yeni bir ifadeye sahip olacaktır [22];

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{2.18}$$

Denklem (2.18), manyetik vektör potansiyelinin genel çözümüdür. Bu denklem, elektrostatik problemlerde de çözümü sıkça aranan formdadır. Bu denklem formu, genel olarak Poisson denklemi olarak adlandırılmaktadır. Denklem (2.18), sağ taraftaki terimin olmaması durumunda şu ifadeyle oluşmaktadır.

$$\nabla^2 \vec{A} = 0 \tag{2.19}$$

Bu ifade, kaynak terimi olan $\vec{J}$ akım yoğunluğu olmadığı koşullarda ortaya çıkan denklem yapısıdır. Denklem (2.19), yine elektrostatik ve manyetostatik problemlerde sıkça karşılaşılan formdadır ve Laplace denklemi olarak bilinir.

2.5 Neumann ve Dirichlet Sınır Koşulları

Dirichlet sınır koşulları, manyetik vektör potansiyelinin belirli bir noktada bilinen bir değer alması durumudur[24].

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{m}} \qquad \textbf{(2. 20)}$$

Burada, $\vec{\mathrm{m}}$ bilinen bir değerdir.

Neumann sınır koşulları ise, manyetik vektör potansiyelinin normal yönündeki türevinin sıfır değerine sahip olması durumudur.

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \vec{\mathrm{n}}} = 0 \qquad \textbf{(2.21)}$$

Burada, $\vec{\mathrm{n}}$ iki bölge arasındaki sınırın normali yönündeki birim vektördür.

Neumann sınır koşulları doğal sınır koşulları olarak bilinir. SEY gibi analiz yöntemlerinde, herhangi bir sınır koşulu belirtilmediğinde, çözüm Neumann sınır koşuluna göre yapılır. Birçok elektrik motorunda yüksüz çalışmada ortaya çıkan koşuldur.

Neumann veya Dirichlet olarak belirtilen sınır değeri, birçok motor ve benzeri yapıların analizinde çok önemli bir sadeleştirme sağlamaktadır.

2.6 Silindirik Koordinatlarda Değişkenlerine Ayırma Yöntemiyle Laplace Denkleminin Çözümü

Silindirik koordinatlarda iki boyutlu Laplace operatörü aşağıdaki ifadeyle tanımlanmaktadır.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad \textbf{(2.22)}$$

Bu eşitlik kullanılarak, (2.19) ile belirtilen Laplace denkleminin çözümü (2.23) ifadesi ile tanımlanabilir[25];

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \textbf{(2.23)}$$

Burada, *A*'nın çözümü *R* ve *Θ* fonksiyonları olarak ifade edilirse;

$$A = R(r)\Theta(\theta) \tag{2.24}$$

Denklem (2.24), denklem (2.23)'te yerine yazılarak;

$$\frac{\Theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = 0 \tag{2.25}$$

Buradaki her bir terim $R\Theta$' ya bölünürse;

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = 0 \tag{2.26}$$

Burada, R ve Θ'nın birbirinden bağımsız olmasından hareketle, denklem (2.27)'yi sağlayan bir n^2 sabitinin olduğu söylenebilir.

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0 \tag{2.27}$$

Denklem (2.25) denklem (2.27)'ye göre yeniden düzenlenirse;

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{\partial r}\right) + (-n^2)R = 0 \tag{2.28}$$

Denklem (2.27)'te, diferansiyel denkleminin çözümünü elde edebilmek için çözümün denklem (2.29) ifadesine sahip olduğunu varsayalım. Bu çözümün diferansiyel denklemi sağlaması gerekmektedir.

$$\Theta(\theta) = u = e^{\theta b} \tag{2.29}$$

Denklem (2.28), denklem (2.29) ifadesine göre yeniden düzenlenirse;

$$(b^2 + n^2)u = 0 \tag{2.30}$$

Denklem (2.30)'un her koşulda sağlanması için çözüm aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$b = \mp jn \tag{2.31}$$

Denklem (2.31)'den hareketle, denklem (2.29) aşağıdaki ifadeyle elde edilebilir.

$$u = Ce^{jn\theta} + De^{-jn\theta} \tag{2.32}$$

C ve *D* keyfi seçilmiş olarak ele alınsın. Denklem (2.32) De Moivre teoremine göre ifade edilirse [25];

$$u = C\cos n\theta + D\sin n\theta \tag{2.33}$$

R fonksiyonuna çözüm bulmak amacıyla, çözümün denklem (2.34) ifadesine sahip olduğunu varsayalım.

$$R(r) = r^{\beta} \tag{2.34}$$

Denklem (2.28), aşağıdaki ifade ile oluşacaktır.

$$(\beta^2 - n^2)r^{\beta} = 0 \tag{2.35}$$

Denklem (2.35)'in çözümü ise;

$$\beta = \mp n \tag{2.36}$$

Bu ifade kullanılarak, *R* fonksiyonu elde edilirse;

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n} \tag{2.37}$$

Denklem (2.37)'e göre genel çözüm olan denklem (2.24) elde edilirse;

$$A = \Theta(\theta)R(r) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n r^n + B_n r^{-n})(C_n\cos n\theta + D_n\sin n\theta) \tag{2.38}$$

Denklem (2.38) katsayıları yeniden düzenlenerek yeniden ifade edilebilir.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}[(a_n r^n + c_n r^{-n})\sin n\theta + (b_n r^n + d_n r^{-n})\cos n\theta] \tag{2.39}$$

Burada *n* olarak ifade edilen indisler, silindirik harmonikler olarak bilinmektedir. Bu harmonikler o bölge için manyetik vektör potansiyelini her bir harmonik temelinde oluşturur. Seçilecek harmonik sayısı arttıkça manyetik vektör potansiyeli daha yüksek sayıda harmonik içerecek ve gerçek değerine yakınsayacaktır. a_n, b_n, c_n, d_n katsayıları manyetik vektör potansiyelini oluşturan karakteristik katsayılardır.

Denklem (2.39) ifadesi Laplace denklemini sağlayan manyetik vektör potansiyelinin çözümünü(yapısını) göstermektedir. Bu denklem, birçok bölgeyi kapsayacak şekilde

m indisi ve açılan harmonik değerinin gözlemlenebilmesi için n indisi ile genelleştirilmektedir.

$$A_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} [(a_{mn} r^n + c_{mn} r^{-n}) \sin n\theta + (b_{mn} r^n + d_{mn} r^{-n}) \cos n\theta] \quad \textbf{(2.40)}$$

Manyetik vektör potansiyeli değeri; elektromanyetik problemlerde sonlu bir değere sahip olacaktır ve çözüm sonlu olacağı için sonsuza ıraksamamalıdır. Bu yüzden, bu denklem yapısı sınırları belirli geometriler için düzenlenmelidir. Çember geometrisi ele alınırsa, $r = 0$' da manyetik vektör potansiyeli değerinin sonlu olması gereklidir. Dolayısıyla, tüm c_{mn} ve d_{mn} katsayıları sıfır değerini alacaktır. Denklem (2.40) çember geometrisi için aşağıdaki ifadeye sahip olmaktadır.

$$A_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{mn} r^n) \sin n\theta + (b_{mn} r^n) \cos n\theta \quad \textbf{(2.41)}$$

Halka, kutup arkı gibi diğer geometrilerde manyetik vektör potansiyelini ifade eden denklem (2.40) sonsuza ıraksamamaktadır. Bu yüzden, halka ve kutup arkı geometrileri için geçerlidir.

2.6.1 Laplace denkleminin sabit mıknatıslı yapılar için düzenlenmesi

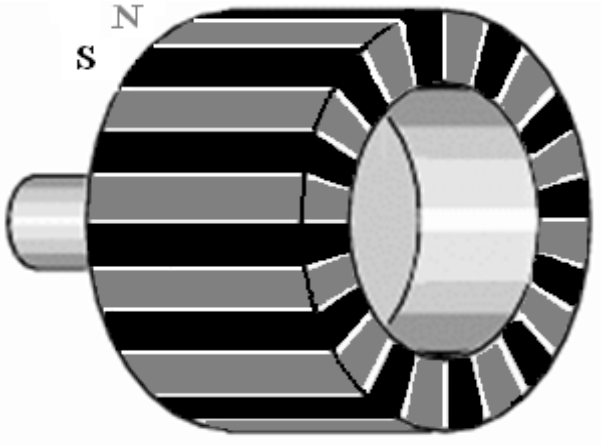
Sadece sabit mıknatıs yapısı içeren yapılarda, sabit bir manyetik vektör potansiyeli değerinin problemin doğasına etkimemesi nedeniyle $n = 0$ için bir değere sahip olmayacaktır. Bu koşula göre denklem (2.40) yeniden düzenlenerek, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$A_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{mn} r^n + c_{mn} r^{-n}) \sin n\theta + (b_{mn} r^n + d_{mn} r^{-n}) \cos n\theta] \quad \textbf{(2.42)}$$

Ayrıca, sabit mıknatıslı yapılar genellikle geometrik olarak kutup arkı yapısındadır. Şekil (2.3) ile kutup arkı geometrisinde kutuplara sahip örnek bir sabit mıknatıslı rotor yapısı gösterilmiştir.

Bu yapılar denklem (2.42)'de görüldüğü üzere, açısal bir çevre boyunca bir tek sinüs ve kosinüs terimi içerecek yapıdadır. Çember ve halka yapıları bir tam çevre boyunca bir tek sinüs kosinüs değeri içermektedir, dolayısıyla denklem (2.42) bu yapılar için geçerlidir. Fakat sabit mıknatıslanmış bir kutup arkı geometrisinde bir kutup çiftini ele alındığında, manyetik vektör potansiyeli formülünün bir açısal çevre boyunca

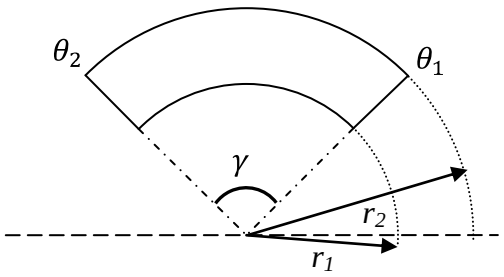
sinüs ve kosinüs terimlerini içerecek şekilde düzenlenmesi gereksinimi ortaya çıkmaktadır [26].



Şekil 2.3 : Örnek bir sabit mıknatıslı rotor yapısı.

Sabit mıknatıs kaynak yapısı gereği; bir kutup çifti üzerinde bir tam sinüs ve kosinüs eğrisi oluşmaktadır. Her bir kutup çifti boyunca sinüs ve kosinüs terimlerinin tekrarlanabilmesi için sinüs ve kosinüs terimleri kutup çifti sayısı olan p katsayısıyla çarpılmalıdır.

Şekil 2.4'de görülen bir kutup arkının matematiksel modeli göz önünde bulundurularak denklemler manyetik vektör potansiyeli ifadesi yeniden düzenlenmelidir.



Şekil 2.4 : Sabit mıknatıslı kutup arkı modeli.

Şekil 2.4'de görülen θ_1 ve θ_2 kutup arkının kartezyen koordinatlarda başladığı ve bittiği noktaların açısal değeridir. r_1 ve r_2 ise kutup arkının yarıçap yönünde sınırlarını belirleyen yarıçap değerleridir. γ ise kutup arkının iç açı ölçüsüdür. Bu model göz önünde bulundurularak tek kutup sayısı $2p$ olarak ifade edilir ise, kutup arkının iç açı ölçüsü aşağıdaki ifadeyle elde edilir.

$$\gamma = \frac{2\pi}{2p} \tag{2.43}$$

Buradan kutup çifti sayısı elde edilebilir.

$$p = \frac{\pi}{\gamma} \tag{2.44}$$

p katsayısı her bir bölge temelinde m indisliyle ifade edilerek manyetik vektör potansiyeli ifadesi ile bütünleştirilirse, denklem (2.42) sabit mıknatıslı yapıları kapsayacak en genel haliyle aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{mn} r^n + c_{mn} r^{-n}) \sin np_m\theta + (b_{mn} r^n + d_{mn} r^{-n}) \cos np_m\theta] \tag{2.45}$$

Denklem (2.45) manyetik vektör potansiyelinin sabit mıknatıslı yapıları içerecek şekilde en genel halini ifade etmektedir. Burada p_m katsayısı kutup arkı geometrisindeki sabit mıknatıslı yapılar için denklem (2.44) ile elde edilir. İçinde sabit mıknatıs yapısını barındırmayan herhangi bir geometri için ise, $p_m = 1$ değerini alır.

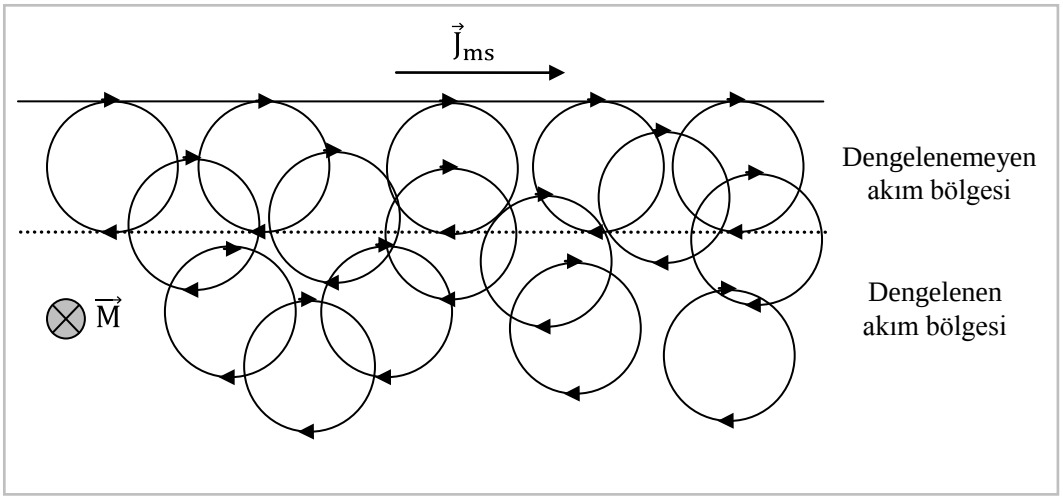
2.6.2 Laplace denkleminin yüksek harmonik değerleri için düzenlenmesi

Denklem (2.45) ile elde edilen manyetik vektör potansiyelinin; sabit mıknatıs yapısını da içerecek şekilde düzenlenen en genel halini ele alırsak, burada yarıçap değeri olan *r* ifadesinin harmonik sayısı ile üstel olarak değiştiği görülmektedir. Çok yüksek harmonik değerleri için r^n değeri çok büyümekte ve r^{-n} değeri ise oldukça küçülmektedir. Manyetik vektör potansiyelinin değerini elde etmek ise yüksek harmonik değerleri için zorlaşmaktadır. Bu sorunu giderebilmek amacıyla manyetik vektör potansiyeli ifadesi; değerinin arandığı bölgenin dış sınırı r_o ve iç sınırı ise r_i olarak ele alınarak, üstel ifadelerin büyümesi engellenmelidir. Buradan hareketle denklem (2.45) yeniden düzenlendiğinde, aşağıdaki ifadeye sahip olmaktadır.

$$A_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_{mn} \left(\frac{r}{r_{om}} \right)^n + c_{mn} \left(\frac{r}{r_{im}} \right)^{-n} \right) \sin np\theta + \left(b_{mn} \left(\frac{r}{r_{om}} \right)^n + d_{mn} \left(\frac{r}{r_{im}} \right)^{-n} \right) \cos np\theta \right] \tag{2.46}$$

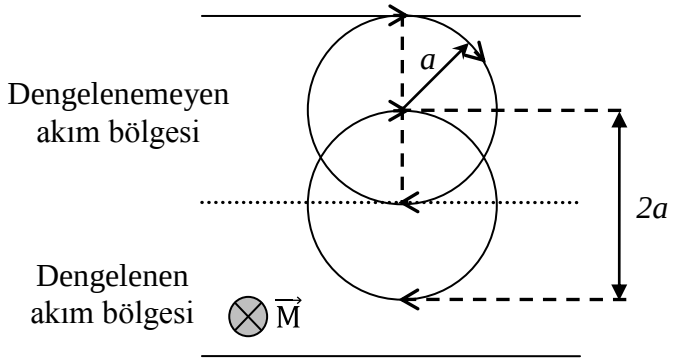
2.7 Bir Cismin İçerisindeki Mıknatıslanmanın Yüzey Akımları ile Modellenmesi

Mıknatıslanmış bir cismin yarattığı manyetik alan, o cismin manyetik özelliklerini gösteren her bir atomunun oluşturduğu akım döngülerinden kaynaklanır. Bu her bir atomik yapının oluşturduğu akım mikroskobik akımlar olarak nitelendirilebilir. Mıknatıslanmış maddenin oluşturduğu manyetik alan, bu mikroskobik akımların meydana getirdiği makroskobik etkiden dolayıdır. Bu mikroskobik etkilerin bileşimi olan makroskobik etkinin yoğunluğu mıknatıslanma vektörü $\vec{M}$ olarak ifade edilir.



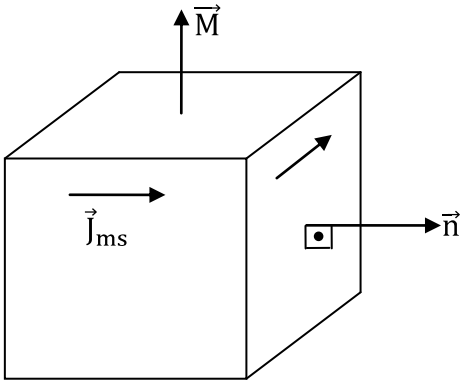
Şekil 2.5 : Atomik akımlar ve sınır üzerinde oluşan yüzey akımı.

Öncelikle mıknatıslanmış maddenin bir parçasını ele alırsak, Şekil 2.5'de görüldüğü üzere mıknatıslanma vektörünün yüzeye dik olduğunu varsayalım. Düzgün bir mıknatıslanma varsa, ele aldığımız parça içerisinde atomik akımların makroskobik etkisi sıfırdır. Fakat yüzeye yakın bir tabaka üzerinde dengelenememiş akımlar bulunur ve ince bir akım tabakası oluşturur. Bu akım tabakasının kalınlığı atomik akım döngülerinin çapı kadardır. Ve bu yüzden yüzey akımı olarak nitelendirilebilir.



Şekil 2.6 : Atomik akımların oluştuğu sınır üzerinde büyütülmüş görünümü.

Yüzey akımının yoğunluğu, birim uzunluktaki bir şerit üzerinden geçen akım şiddetidir. Şekil 2.6, Şekil 2.5'in büyütülmüş halidir. Yüzey akımlarının yoğunluğu belirlemek için, birim uzunluktaki şerit üzerinden geçen toplam akımı belirlemek gerekmektedir. Sadece sınıra bitişik bölgede yarıçapı a ve birim uzunluktaki bir bölgede atomik döngülerin etkisi olur. Bunun haricindeki tüm bölgede döngüler birbirinin etkisini yok eder. Yani mıknatıslanmış bir madde yüzey akımları şeklinde modellenebilmektedir.



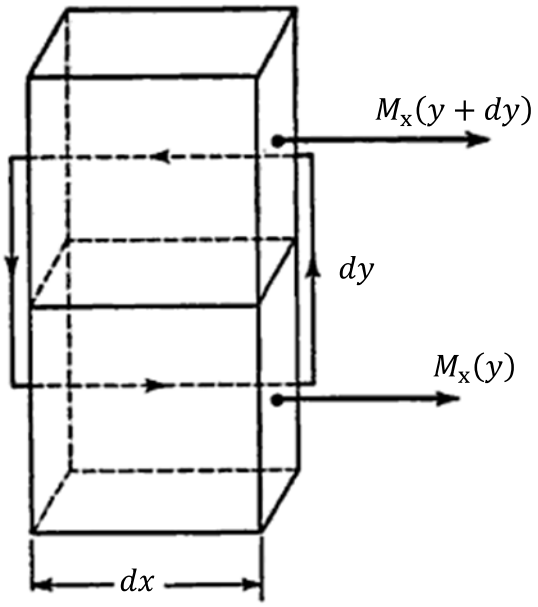
Şekil 2.7 : $\vec{M}$ mıknatıslanma vektörüne sahip dikdörtgensel yapı.

Şekil 2.7'de görüldüğü gibi bir eksen boyunca mıknatıslanmış küçük dikdörtgensel bir yapıyı ele alalım. Bu yapı içerisinde düzgün bir mıknatıslanma olduğunu varsayalım. Ortamın manyetik etkisi yüzeyden geçen akımlar olarak modellenebilir. Mıknatıslanmış yapının yüzeyinden geçen yüzey akımlarının yoğunluğu sayısal olarak değeri mıknatıslanma vektörüne eşittir. Bu yüzden yüzey akımları yoğunluğu vektör eşitliğiyle aşağıdaki ifadeyle bilinmektedir [28];

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \vec{n} \qquad \textbf{(2.47)}$$

Burada $\vec{n}$ vektörü hacmi oluşturan yüzeylerdeki normal yönündeki birim vektördür.

Bir hacim içinde sürekli olan ve noktadan noktaya değişken bir mıknatıslanma varsa, o hacim içinden dışarıya akan bir akım bulunmaktadır. Şekil 2.8'de görüleceği üzere iki komşu hacim ele alınmıştır. Üstteki hacim, alttaki hacme göre y ekseni boyunca dy kadar uzaklığa yerleştirilmiştir. x ekseni yönündeki mıknatıslanma vektörü bileşenleri $M_x(y)$ ve $M_x(y+dy)$ olsun. Şekil 2.8'de çizilen çevreyi ele alırsak, içerisinden akan akım $\vec{J}dxdy$ şeklinde yazılabilir. Burada $\vec{J}$ akım yoğunluğudur.



Şekil 2.8 : İki komşu hacim arasında mıknatıslanmanın incelenmesi [28].

Manyetik moment ile akım yoğunluğu arasındaki ifade;

$$\vec{M}_x(y+dy) + \vec{M}_x(y) = \vec{J}dxdy \qquad \textbf{(2.48)}$$

dx ve dy'nin çok küçük olduğu ele alınarak yeniden düzenlenirse;

$$J\vec{e}_x = \frac{\partial M_y}{\partial x}\vec{e}_x \qquad \textbf{(2.49)}$$

$\vec{J}$'nin z ekseni yönünde de bir bileşeni bulunmaktadır ve bu bileşen üzerinde de benzer şekilde bir dağılım olacağı açıktır.

$$J\vec{e}_z = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\vec{e}_z \qquad \textbf{(2.50)}$$

Denklem (2.49) ve (2.50) birleştirilerek akım yoğunluğu ifadesi elde edilebilir.

$$\vec{J} = \frac{\partial M_y}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{M_x}{\partial y}\vec{e}_z \qquad \textbf{(2.51)}$$

Bu eşitlikten; akım yoğunluğu, vektör eşitliği olarak elde edilebilir.

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{M} \qquad \textbf{(2.52)}$$

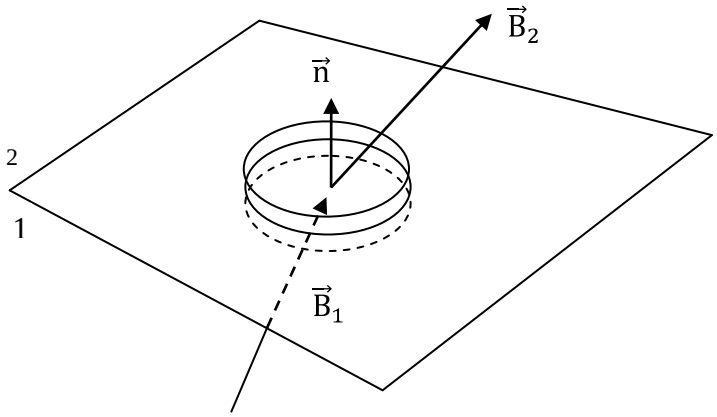
Mıknatıslanmış bir yapının düzgün olmayan bir mıknatıslanma vektörüne sahip olması durumunda, bölge içerisindeki akım yoğunluğu bu şekilde oluşmaktadır.

2.8 Sınır Koşulu Eşitliklerinin Oluşturulması

Sınır koşulları, bir yüzeyin iki tarafındaki iki bölge içerisindeki iki nokta arasındaki manyetik akı yoğunluğu ve manyetik alan şiddeti eşitliklerini içeren bağıntılardır. Gauss yasasına göre; çok ince bir silindir yapısını ele alırsak ve burada manyetik akının korunumu yasasını uygularsak, kapalı yüzey üzerinden geçen manyetik akı sıfırdır. Buradan hareketle aşağıdaki ifade elde edilir [22].

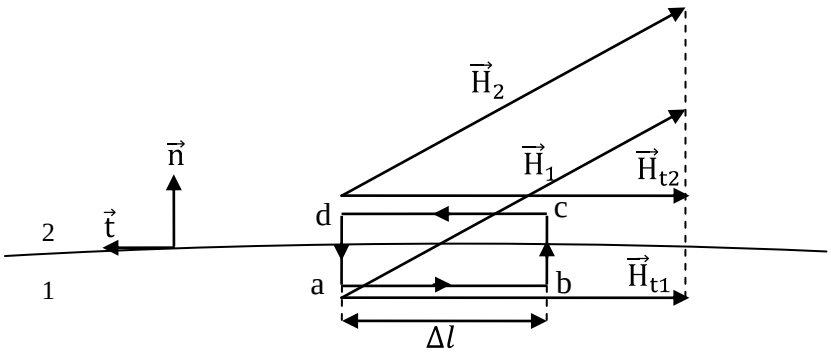
$$B_{\mathrm{n}1} = B_{\mathrm{n}2} \qquad \textbf{(2.53)}$$

Burada, 1 ve 2 olarak belirtilen indisler, iki bölgenin numaralarını ifade etmektedir. B_{n} ise manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenidir. Bu eşitlik, sınır koşullarının manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenleri cinsinden gösterimidir



Şekil 2.9 : Manyetik akı yoğunluğunun kapalı bir yüzey üzerinde incelenmesi

Şekil 2.9 incelendiğinde, normal bileşenlerin eşitliği koşulu daha net olarak anlaşılabilir. Benzer şekilde sınır koşulları, manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşenleri için de oluşturulabilir.



Şekil 2.10 : Manyetik alan şiddetinin sınır üzerinde incelenmesi

Genelleştirilmiş Ampere yasası gösterimi olan denklem (2.6)'ya göre, iki bölge arasındaki yüzeyde yüzey akımlarının olduğunu varsayalım. Şekil 2.10'da görüldüğü üzere kapalı bir çevre alınır ve burada genelleştirilmiş Ampere yasası uygulanırsa;

$$\oint_C \vec{\mathrm{H}}.d\vec{\mathrm{l}} = I \qquad \textbf{(2.54)}$$

Burada integrali alınan çevre, 2 farklı yüzey integraline indirgenebilir.

$$\oint_{a-b} \vec{\mathrm{H}}.d\vec{\mathrm{l}} + \oint_{c-d} \mathrm{H}.d\vec{\mathrm{l}} = I \qquad \textbf{(2.55)}$$

Buradaki iki entegral açıldığında;

$$H_{t1}.\Delta l - H_{\mathrm{t2}}.\Delta l = I = J_{\mathrm{ms}}\Delta l \qquad \textbf{(2. 56)}$$

Buradan hareketle, sınırında yüzey akımı olan iki bölge arasındaki manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşenleri arasındaki ilişki aşağıdaki ifadeyle edilir [22].

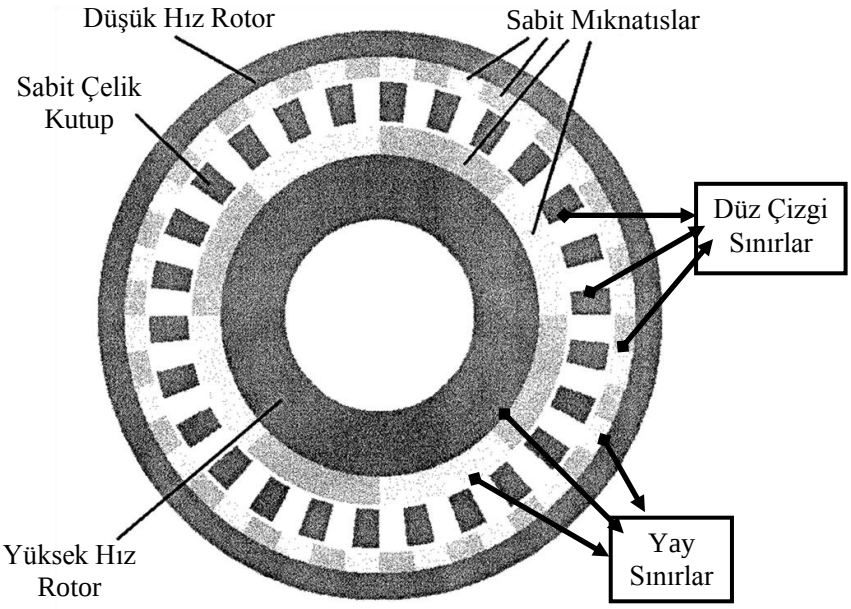
$$H_{\mathrm{t1}} - H_{\mathrm{t2}} = J_{\mathrm{ms}} \qquad \textbf{(2.57)}$$

Burada, 1 ve 2 olarak belirtilen indisler iki bölgenin bölge numaralarını ifade etmektedir. H_{t} ise manyetik alan şiddetin teğetsel bileşenidir. Burada, yüzey akımları her iki bölge tarafından da oluşturulabilir. Daha genel bir formda J_{ms1} 1.bölge ve J_{ms2} 2.bölge yüzey akım yoğunluğunu ifade edecek şekilde genelleştirilebilir

$$H_{\mathrm{t1}} - H_{\mathrm{t2}} = J_{\mathrm{ms1}} + J_{\mathrm{ms2}} \qquad \textbf{(2.58)}$$

2.8.1 Sınır koşulu eşitliklerinin silindirik simetrik yapılar için oluşturulması

Şekil 2.11'de karmaşık ve silindirik simetrik bir yapıya sahip olan bir manyetik dişli yapısı görülmektedir. Manyetik dişli yapısının sahip olduğu bölgeler görülmektedir. Görüldüğü üzere, bu bölgeler arasında yay ve düz çizgi sınır olarak iki tip sınır tipine sahiptir. Benzer şekilde herhangi farklı bir silindirik simetrik yapıda da yay ve düz çizgi sınır tipleri bulunabilir. Silindirik simetrik yapıların incelenebilmesi için bu iki sınır tipi temelinde sınır koşullarının elde edilmesi gerekmektedir. Manyetik vektör potansiyelinin tanımı olarak ifade edilen denklem (2.14)'e göre sınır koşulları her iki sınır tipi için oluşturulabilir.

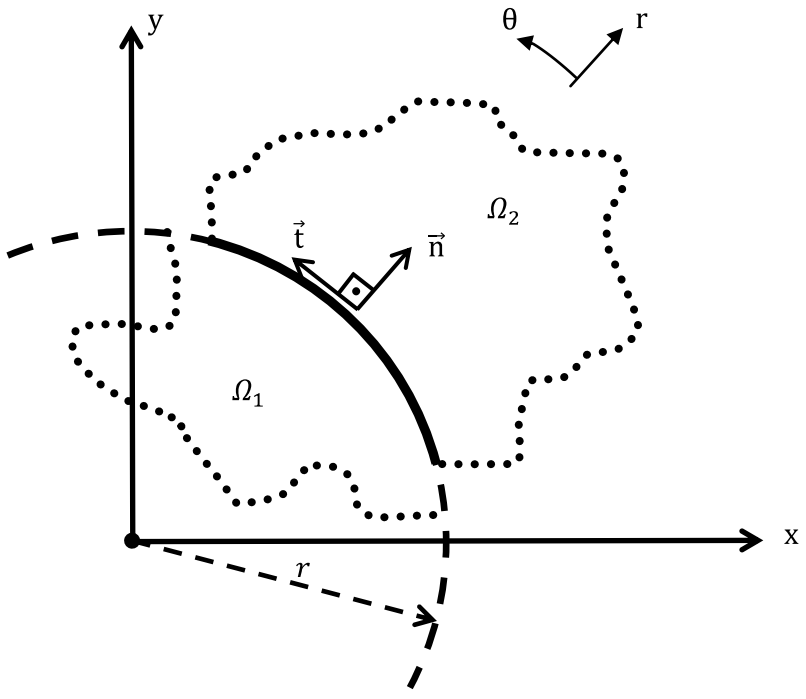


Şekil 2.11 : Manyetik dişli yapısı [29].

Denklem (2.14) silindirik koordinatlar için açılacak olursa manyetik akı yoğunluğu aşağıdaki ifadeye sahip olacaktır.

$$\vec{\mathrm{B}} = \nabla \times \vec{\mathrm{A}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\theta} \qquad \textbf{(2.59)}$$

Manyetik akı yoğunluğunun silindirik koordinatlardaki iki eksen değerine ayrıştırılmış ifadesi bu şekilde oluşmaktadır.



Şekil 2.12 : Aralarında yay sınır bulunan iki bölgenin incelenmesi.

Öncelikle yay sınır tipini ele alırsak, Şekil 2.12'de görüldüğü üzere Ω_1 *ve* Ω_2 ile belirtilen iki bölge arasındaki yay sınırın normal bileşeni r ekseni, teğetsel bileşeni ise θ ekseni yönündedir. Buradan hareketle, denklem (2.59) ile iki ayrı eksen değerine ayrıştırılmış manyetik akı yoğunluğunun normal ve teğetsel bileşenleri elde edilebilir. Yüzey üzerinde yüzey normal vektör yönünde olan manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni ve yüzey üzerinde teğetsel vektör yönünde olan manyetik akı yoğunluğu teğetsel bileşeni denklem (2.59)'dan elde edilebilir.

$$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{n}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} \qquad \textbf{(2.60)}$$

$$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{t}} = \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\theta} \qquad \textbf{(2.61)}$$

Burada, $\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{n}}$ manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenidir. $\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{t}}$ ise, manyetik akı yoğunluğunun teğetsel bileşenidir.

Denklem (2.2)'de belirtilen manyetik akı yoğunluğu ve manyetik alan şiddeti bağıntısına göre, denklem (2.61)'den manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşeni elde edilebilir.

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\theta} \qquad \textbf{(2.62)}$$

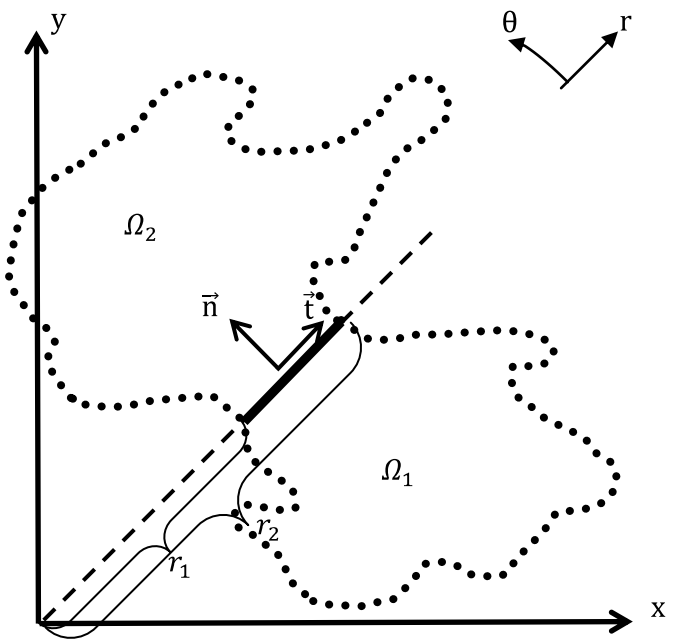
Denklem (2.53) ve (2.58) ile ifade edilen temel sınır koşulu eşitlikleri, Şekil 2.12' de görülen iki bölge arasındaki yay sınır için, denklem (2.60) ve (2.62) ile elde edilmiştir.

A_1 ve A_2 arasında yay sınır bulunan iki bölgenin manyetik vektör potansiyeli ifadeleri olarak ele alınırsa, denklem (2.60) ve (2.62) her iki bölge manyetik vektör potansiyeli ifadelerini içerecek şekilde düzenlenebilir.

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \textbf{(2.63)}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial r}\right) - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial r}\right) = J_{\mathrm{ms1}} + J_{\mathrm{ms2}} \qquad \textbf{(2.64)}$$

Temel sınır koşulu ifadeleri, yay sınır için genel olarak bu şekilde elde edilmektedir.



Şekil 2.13 : Aralarında yarıçap yönünde düz çizgi sınır bulunan iki bölgenin incelenmesi.

Düz sınır tipini ele alırsak, Şekil 2.13'de görüleceği üzere manyetik akı yoğunluğunun normal bileşeni θ, teğetsel bileşeni ise r ekseni yönündedir. Yine benzer şekilde denklem (2.59) ile normal ve teğetsel bileşenler kolayca elde edilebilir.

$$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{n}} = \left(\frac{\partial A}{\partial r}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\theta} \qquad \textbf{(2.65)}$$

$$\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} \qquad \textbf{(2.66)}$$

Yüzey normali ve teğetsel bileşeni yay sınıra göre farklı yönlerde oluştuğu için elde edilen elde edilen manyetik akı yoğunluğunun bileşenleri yay sınır için elde edilen bileşenlerden farklı olarak oluşmuştur.

Denklem (2.2)'deki bağıntıya göre, manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşeni aşağıdaki ifadeyle elde edilebilir.

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_h}{\partial \theta}\right)\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} \qquad \textbf{(2.67)}$$

Benzer şekilde denklem (2.53) ve (2.58) kullanılarak, Şekil 2.13'de görülen iki bölge arasındaki düz çizgi sınır için temel sınır koşulları eşitlikleri elde edilebilir.

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial A_2}{\partial r}\right) = 0 \quad \textbf{(2.68)}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\mu_2}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \theta}\right) = J_{\text{ms1}} + J_{\text{ms2}} \quad \textbf{(2.69)}$$

Burada, A_1 ve A_2 arasında çizgi sınır bulunan iki bölgenin manyetik vektör potansiyeli ifadeleridir.

Sınır koşulları uygulanarak; manyetik vektör potansiyeli ve yüzey akımları arasındaki bağıntı yay sınır ve düz çizgi sınır için denklem (2.63),(2.64) ve (2.68), (2.69) ile elde edilmiştir.

2.9 Düzgün Mıknatıslanmaya Sahip Yapıların Modellenmesi ve Yüzey Akım Yoğunluğu Eşitliklerinin Oluşturulması

Motor, jeneratör gibi makinelerde kullanılan sabit mıknatıs yapısı genel olarak iki çeşitte karşımıza çıkmaktadır. Bunlardan ilki yarıçap yönünde mıknatıslanmış mıknatıs, ikincisi ise paralel mıknatıstır. Sıkça kullanılan bu mıknatıslanma çeşitleri için yüzey akım yoğunluğu ifadesi elde edilecektir.

Denklem (2.64) ve (2.69)'un sağ tarafındaki yüzey akımları ifadesi düzgün mıknatıslanmaya sahip yapılar için denklem (2.47) ile elde edilmişti. Sınır koşulu ifadelerinin bahsedilen mıknatıslanma türleri temelinde özelleştirilmesi için yüzey akımlarının elde edilmesi gerekmektedir.

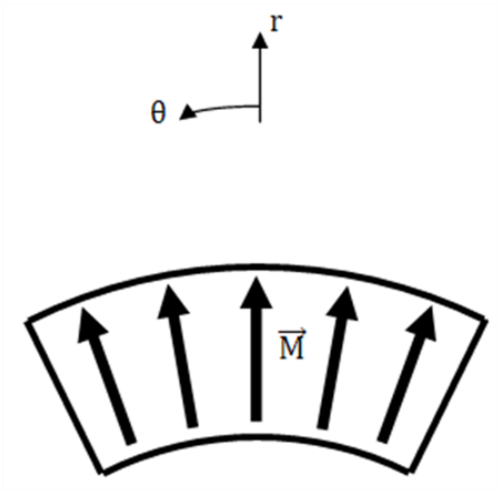
2.9.1 Yarıçap yönündeki mıknatıslanmanın modellenmesi

Bu mıknatıslanma adından da anlaşılacağı üzere, silindirik koordinatlardaki r ekseni yani yarıçap yönündeki mıknatıslanmadır. Dolayısıyla yarıçap yönündeki mıknatıslanma yalnızca $\vec{e}_r$ birim vektörü bileşene sahiptir. Mıknatıslanma vektörü matematiksel olarak aşağıdaki ifadeyle oluşmaktadır[31].

$$\overrightarrow{M} = |M| \times \vec{e}_r \quad \textbf{(2.70)}$$

Burada, $|M|$ mıknatıslanma vektörünün mutlak değeridir.

Şekil 2.14'de yarıçap yönünde mıknatıslanmaya sahip kutup arkı geometrisindeki bir mıknatıs gösterilmiştir.

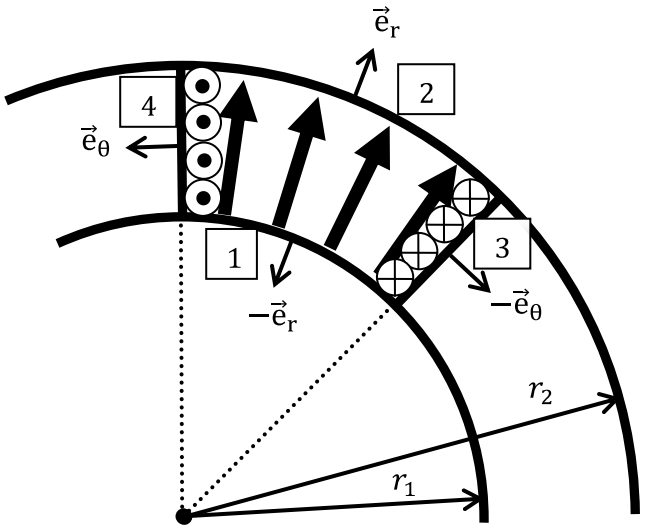


Şekil 2.14 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkının silindirik koordinatlarda görünümü.

Şekil 2.14'te görüldüğü üzere $\vec{M}$ mıknatıslanma vektörü θ ekseni yönünde bir bileşene sahip değildir. Sadece yarıçap yönünde bir bileşenden oluşmaktadır.

2.9.1.1 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin kutup arkı geometrisi için oluşturulması

Şekil 2.15'de kutup arkı geometrisine sahip yarıçap yönünde mıknatıslanmış bir yapının modeli görülmektedir. Bölgenin sınırları 1, 2, 3 ve 4 numaralarıyla gösterilmiştir. Bu sınırlar üzerindeki yüzey normal vektörleri ise silindirik koordinatlara göre şekil üzerinde gösterilmiştir. Mıknatıslanmanın yönü koyu çizgilerle belirtilmiş, yarıçap doğrultusunda olduğu görülmektedir.



Şekil 2.15 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkı modeli.

Denklem (2.47) ile ifade edilen yüzey akım yoğunluğu 1 ve 2 numaralarıyla gösterilen yay sınırlar için denklem (2.70) ile birleştirilerek, değeri elde edilmektedir [31].

$$\vec{J}_{msm1} = |M| \times \vec{e}_r \times -\vec{e}_r = 0 \quad \textbf{(2.71)}$$

$$\vec{J}_{msm2} = |M| \times \vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0 \quad \textbf{(2.72)}$$

$\vec{J}_{msm1}$ ve $\vec{J}_{msm2}$, 1 ve 2 numaralı sınırlar üzerinde oluşan yüzey akım yoğunluklarıdır. m bölge numarasını belirten indistir ve bölge numarası belirtilmediği için genel bir ifadeyle gösterilmiştir.

Denklem (2.71) ve (2.72) ile yarıçap yönünde mıknatıslanmış bir kutup arkı yapısında yay sınırlar üzerinde bir yüzey akımı oluşmayacağı görülmektedir.

Denklem (2.47) kullanılarak düz çizgi sınırlar olarak gösterilen 3 ve 4 numaralı sınırlar için yüzey akım yoğunlukları elde edilebilir.

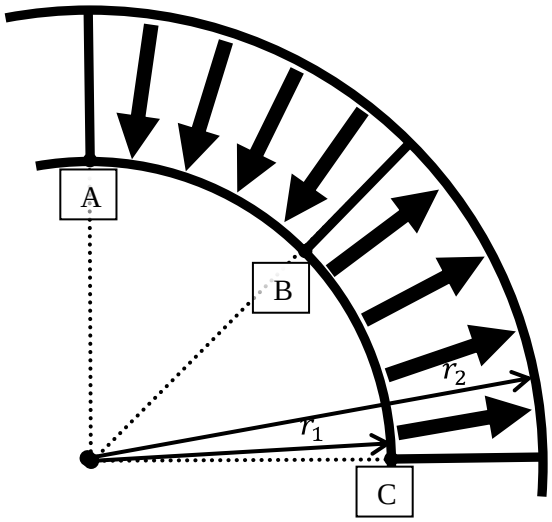
$$\vec{J}_{msm3} = |M| \times \vec{e}_r \times -\vec{e}_\theta = -|M|\vec{e}_z \quad \textbf{(2.73)}$$

$$\vec{J}_{msm4} = |M| \times \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = |M|\vec{e}_z \quad \textbf{(2.74)}$$

$\vec{J}_{msm3}$ ve $\vec{J}_{mms4}$, sırasıyla 3 ve 4 numaralı düz çizgi sınırlar için yüzey akımı yoğunluğudur. Görüleceği üzere yarıçap yönünde mıknatıslanmış bir kutup arkı yapısında düz çizgi sınırlar üzerinde silindirik koordinatlardaki z ekseni yönünde yüzey akım yoğunlukları oluşmaktadır.

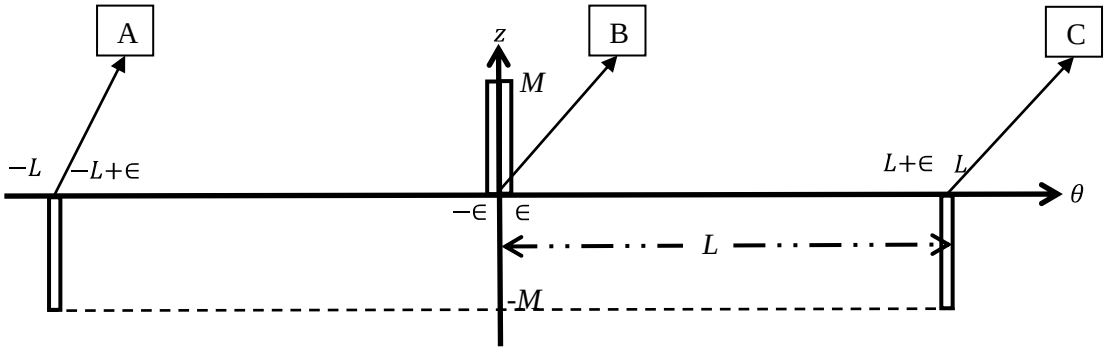
Şekil 2.15 üzerinde düz çizgi sınırlara bitişik olarak gösterildiği üzere, 3 numaralı sınırda sayfa içine doğru yani $-\vec{e}_z$ yönünde, 4 numaralı sınır üzerinde ise $\vec{e}_z$ yönünde bir yüzey akım yoğunluğu oluşur.

3 ve 4 numaralı sınırlar üzerindeki yüzey akım yoğunluğu düşünülecek olursak, bu sınırların yay sınırlarla kesiştiği noktalarda Dirac delta fonksiyonu şeklinde bir dağılım olacaktır. Denklem (2.71) ve (2.72) ile ifade edilen yay sınırlar üzerinde bir dağılım olmadığından ve bir yüzey akım yoğunluğu oluşmadığından bahsedilmişti. Fakat bu Dirac delta fonksiyonu şeklindeki dağılım yay sınırlar üzerine etkimektedir. Buradan hareketle; bahsedilen denklemler, bu dağılım etkisini içerecek şekilde yeniden düzenlenmelidir.



Şekil 2.16 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkı geometrisindeki kutup çifti modeli.

Bu çerçevede, Şekil 2.16 ile gösterilen yarıçap yönünde mıknatıslanmış bir kutup çifti ele alınırsa, burada A, B ve C ile belirtilen noktalar üzerinde fonksiyonun görünümü Şekil (2.17) ile gösterilebilir.



Şekil 2.17 : Kutup çifti üzerinde yüzey akım yoğunluğunun dağılımı.

Şekil 2.17'de görülen dağılımın Fourier dönüşümü ile ifade edilerek, yay sınırlar üzerindeki dağılımın elde edilmesi gereklidir. Bu fonksiyonun Fourier katsayıları ise şu şekilde oluşmaktadır.

$$a_0 = 0 \tag{2.75}$$

$$a_{\mathrm{n}} = 0 \tag{2.76}$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{2M}{n\pi} \sin \frac{\mathrm{n}\pi\epsilon}{L} (1 - \cos \mathrm{n}\pi) \tag{2.77}$$

Denklem (2.77)'de n ifadesi harmonik numarasını, ϵ sonsuz küçük bir mesafedeki uzaklığı, L kutup teki arkının uzunluğunu ifade etmektedir. Şekil 2.17'de ifade edilen fonksiyonun Fourier serisi olarak ifadesi aşağıda gösterilmektedir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2M}{n\pi} \sin\frac{n\pi\epsilon}{L} (1 - \cos n\pi) \cos np_m\theta \qquad \textbf{(2.78)}$$

Şekil 2.17'de, ϵ kadar bir sınır üzerinde M mıknatıslanma vektörünün oluştuğu görülmektedir. Yüzey akımları modellemesi temelinde, bu M mıknatıslanma vektörü ile yüzey akım yoğunluğu arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_m\epsilon = J_{\mathrm{ms}ma}(r_{\mathrm{o}m} - r_{\mathrm{i}m}) \qquad \textbf{(2.79)}$$

Burada, M_m m bölge indisi ifadesini içerecek şekilde genelleştirilmiş mıknatıslanma vektörü ifadesidir. $J_{\mathrm{ms}ma}$ ifadesi ise genel formda yüzey akım yoğunluğunu belirtmektedir. a indisi ile sınır numarası belirtilmiştir. Denklemin sağ tarafında bulunan $(r_{\mathrm{o}m} - r_{\mathrm{i}m})$ ifadesi ise Şekil 2.16 ile gösterilen kutup arkının dış ve iç yarıçapları arasındaki mesafedir. Genel bir ifadeyle m bölge indisi ifadesini içerecek şekilde yazılmıştır. Bu terimin oluşması iki kutup arkı arasındaki sınır üzerinde oluşan yüzey akım yoğunluğunun B noktası üzerinde üzerindeki dağılımından kaynaklanmaktadır. Bu dağılım M mıknatıslanma vektörünün B noktası üzerinde denklem (2.79) ile oluşmasını sağlamaktadır. Buradan hareketle, denklem (2.79)'a göre denklem (2.78) yeniden düzenlenirse;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{\mathrm{ms}ma}(r_{\mathrm{o}m} - r_{\mathrm{i}m})}{L} \mathrm{sinc}\frac{n\pi\epsilon}{L} (1 - \cos n\pi) \cos np_m\theta \qquad \textbf{(2.80)}$$

Denklem (2.80)'deki sinc fonksiyonu ϵ değerinin çok küçük bir değer olduğu göz önünde bulundurulursa, yaklaşık 1 değerini alacaktır. Yeniden ifade edilirse;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_{\mathrm{ms}ma}(r_{\mathrm{o}m} - r_{\mathrm{i}m})}{L} (1 - \cos n\pi) \cos np_m\theta \qquad \textbf{(2.81)}$$

Denklem (2.81)'de görülen L, Şekil 2.17'den görüldüğü üzere bir kutup teki altındaki uzunluktur ve aşağıdaki ifade ile elde edilebilir.

$$L = \frac{\pi}{p_m} r \qquad \textbf{(2.82)}$$

Denklem (2.82)'ye göre denklem (2.81) yeniden ifade edilecek olursa;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_m J_{\mathrm{msma}}(r_{\mathrm{om}} - r_{\mathrm{im}})}{\pi r}(1 - \cos n\pi)\cos np_m\theta \qquad \textbf{(2.83)}$$

Yarıçap yönünde mıknatıslanmış bir kutup çiftinin yay sınırları üzerindeki yüzey akım yoğunluğu, denklem (2.83) ifadesiyle gerçekleşmektedir. Denklem (2.71) ve (2.72) bu çerçevede yeniden düzenlenerek denklem (2.84) ve (2.85) ile ifade edilebilir.

$$\vec{\mathrm{J}}_{\mathrm{ms}m1} = \frac{2J_{msm3}(r_{\mathrm{om}} - r_{\mathrm{im}})}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\cos np_m\theta \qquad \textbf{(2.84)}$$

$$\vec{\mathrm{J}}_{\mathrm{ms}m2} = \frac{2J_{msm3}(r_{\mathrm{om}} - r_{\mathrm{im}})}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\cos np_m\theta \qquad \textbf{(2.85)}$$

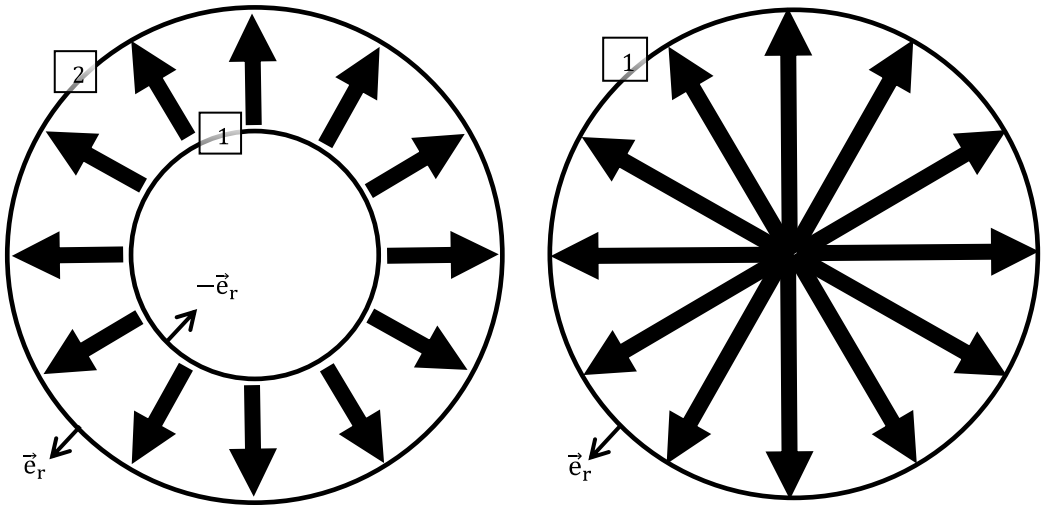
Denklem (2.82)'deki $J_{\mathrm{ms}m}$ifadesinin yerine 3 veya 4 numaralı sınırlar üzerindeki yüzey akımı yoğunluğu gelmektedir çünkü oluşan dağılım o sınırlar üzerindeki yüzey akım yoğunluğundan kaynaklanmaktadır.

Şekil 2.15'e dönülerek, yeniden ifade edilecek olursa; 1, 2, 3, 4 numaralı sınırlar üzerindeki yüzey akım yoğunluğu ifadeleri sırasıyla denklem (2.84), (2.85), (2.71), (2.72) ile elde edilmiştir.

2.9.1.2 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin halka ve çember yapısı için oluşturulması

Şekil 2.18 (a) ile halka geometrisine sahip mıknatıslanmış sabit mıknatıs görülmektedir. Mıknatıslanmış bölgenin sınırları 1 ve 2 numaralarıyla gösterilmiştir. Bu sınırlar üzerindeki normal vektörleri ise silindirik koordinatlara göre şekil üzerinde gösterilmiştir. Bu halka yapısı için 1 ve 2 numaralı sınırlar üzerinde yüzey akım yoğunluğu oluşmamaktadır. Yüzey akım yoğunluğu modellemesi ise yapılamamaktadır. Bölge içerisindeki atomik akımlar bir sınır üzerinde oluşamamaktadır ve bütün yapı içerisinde yayılarak oluşmaktadır.

Ayrıca; aynı yapı manyetik kanunlar çerçevesinde, fiziksel olarak ele alındığında da bu yapının modellenmesi mümkün görünmemektedir. Sabit mıknatısların yarattığı manyetik akı sonsuza doğru dağılmakta ve devresini tamamlayamayarak manyetik akının korunumu yasasını sağlayamamaktadır. Bu çerçevede iki boyutta, fiziksel olarak böyle bir mıknatıs yapısının oluşması mümkün değildir.



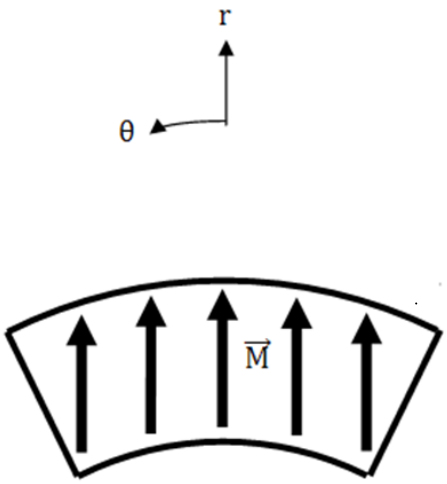
(a) **(b)**

Şekil 2.18 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış modeller: **(a)** Halka modeli. **(b)** Çember modeli.

Benzer bir durum çember yapısı için de görülmektedir. Şekil 2.18 (b) ile gösterilen yarıçap yönünde bir mıknatıslanmaya sahip çember yapısı için yüzey akım yoğunluğu modellemesi yapılamamaktadır. Ayrıca yine benzer şekilde manyetik akı çizgilerinin devresini tamamlaması fiziksel olarak mümkün değildir. Diğer bir ifadeyle çember şeklinde bir geometriye sahip yarıçap yönünde mıknatıslanmış bir sabit mıknatıs yapısının fiziksel olarak gerçeklenmesi mümkün değildir.

2.9.2 Paralel mıknatıslanmanın modellenmesi

Paralel mıknatıslanma paralel yönde mıknatıslanma vektörüne sahip mıknatıslanmadır.



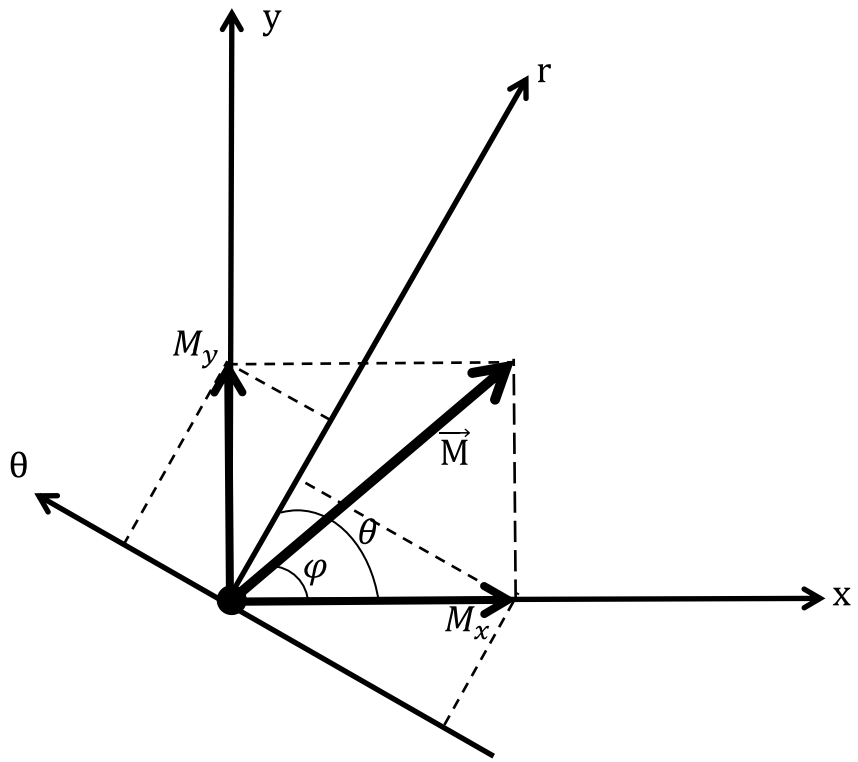
Şekil 2.19 : Paralel yönde mıknatıslanmış kutup arkının silindirik koordinatlarda görünümü

Şekil 2.19 ile paralel yönde mıknatıslanmaya sahip bir kutup arkının silindirik koordinatlardaki görünümü verilmiştir. Görüleceği üzere paralel mıknatıslanmaya sahip bir yapı silindirik koordinatlarda bir simetriye sahip değildir. Bu yüzden silindirik koordinatlarda modellenmesi zor olacaktır. Fakat kartezyen koordinatlarda bir simetriye sahiptir ve modellenmesi kolayca elde edilebilecektir. Bu noktada, kartezyen koordinatlarda modellenen mıknatıslanma silindirik koordinatlara dönüştürülerek silindirik koordinatlar cinsinden ifade edilecektir.

İki boyutlarda incelenen mıknatıslanma vektörünün, kartezyen koordinatlardaki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\overrightarrow{\mathrm{M}} = M_x \vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + M_y \vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}} \qquad \textbf{(2.86)}$$

Şekil 2.20'de, mıknatıslanma vektörünün iki boyutta kartezyen ve silindirik koordinatlara göre konumu gösterilmektedir. Burada φ açısı $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ mıknatıslanma vektörünün kartezyen koordinatlarda x ekseniyle yaptığı açıdır. θ açısı, ise x ve r eksenleri ve dolayısıyla y ve θ eksenleri arasındaki açıdır. Mıknatıslanma vektörünün M_x x ekseni ve M_{y} ise y ekseni üzerindeki bileşenleridir.



Şekil 2.20 : Kartezyen koordinatlardaki mıknatıslanma vektörünün silindirik koordinatlara dönüşümü.

Şekil 2.20 göz önünde bulundurarak M_x ve M_{y} mıknatıslanma bileşenleri matematiksel olarak aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$M_x = |M| \cos \varphi \tag{2.87}$$

$$M_{\mathrm{y}} = |M| \sin \varphi \tag{2.88}$$

Benzer şekilde M_x ve M_{y} bileşenlerinin r ve θ eksenleri üzerindeki iz düşümü olan M_r ve M_{θ} aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_r = M_{\mathrm{x}} \cos \theta + M_{\mathrm{y}} \sin \theta \tag{2.89}$$

$$M_{\theta} = -M_{\mathrm{x}} \sin \theta + M_{\mathrm{y}} \cos \theta \tag{2.90}$$

Denklem (2.87) ve (2.88) içerisindeki M_{x}ve M_{y} mıknatıslanma bileşenleri denklem (2.89) ve (2.90)'da yerine yazılarak $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ mıknatıslanma vektörünün silindirik koordinatlardaki bileşenleri elde edilir.

$$M_{\mathrm{r}} = |M| \, cos \, \varphi \cos \theta + |M| \sin \varphi \sin \theta \tag{2.91}$$

$$M_{\theta} = -|M| \cos \varphi \sin \theta + |M| \sin \varphi \cos \theta \tag{2.92}$$

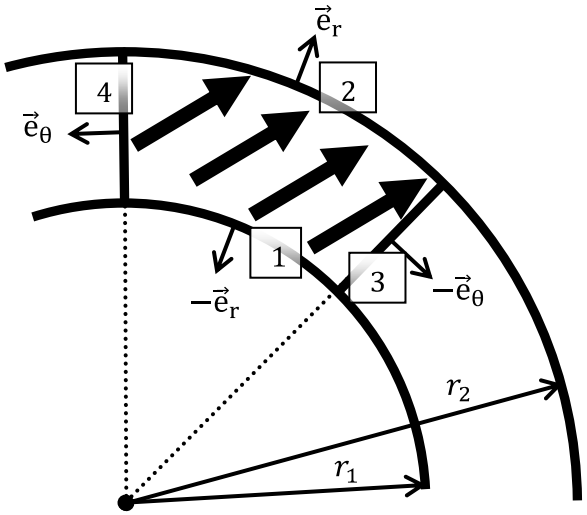
Denklem (2.86) ile gösterilen mıknatıslanma vektörünün silindirik koordinatlardaki genel ifadesi ise aşağıdaki gibi oluşmaktadır.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{M}} = {} & (|M| \, cos \, \varphi \cos \theta + |M| \sin \varphi \sin \theta) \vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} \\ & + (-|M| \cos \varphi \sin \theta + |M| \sin \varphi \cos \theta) \vec{\mathrm{e}}_{\theta} \end{aligned} \tag{2.93}$$

Burada, φ ifadesi $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ mıknatıslanma vektörünün kartezyen koordinatlarda x ekseni ile arasındaki açıdır. Denklem (2.93) ile paralel mıknatıslanma yönü bilinen bir yapı sınırında oluşan yüzey akım yoğunluğu elde edilebilir.

2.9.2.1 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin kutup arkı geometrisi için oluşturulması

Şekil 2.21'de kutup arkı geometrisine sahip paralel yönde mıknatıslanmış sabit mıknatıs yapısı görülmektedir. Her sınır şekil üzerinde numaralandırılmış ve yüzey vektörleri de belirtilmiştir.



Şekil 2.21 : Paralel yönde mıknatıslanmış kutup arkı modeli.

Denklem (2.47) ile elde edilen yüzey akım yoğunluğu ile yüzey vektörü arasındaki bağıntı, Şekil 2.21 ile gösterilen model üzerindeki 1, 2, 3 ve 4 numaralarıyla gösterilen sınırlar için uygulanarak yüzey akım yoğunluğu vektörleri elde edilebilir.

$$\vec{J}_{msm1} = \overrightarrow{M} \times -\vec{e}_r = (|M| \cos\varphi \sin\theta + |M| \sin\varphi \cos\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.94)}$$

$$\vec{J}_{msm2} = \overrightarrow{M} \times \vec{e}_r = -(|M| \cos\varphi \sin\theta + |M| \sin\varphi \cos\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.95)}$$

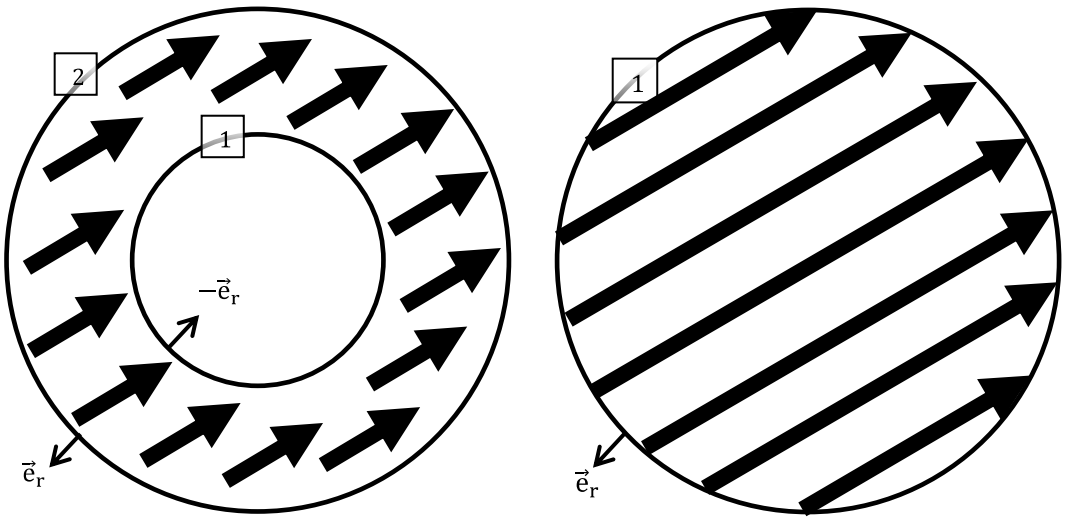
$$\vec{J}_{msm3} = \overrightarrow{M} \times \vec{e}_\theta = -(|M| \cos\varphi \cos\theta + |M| \sin\varphi \sin\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.96)}$$

$$\vec{J}_{msm4} = \overrightarrow{M} \times \vec{e}_\theta = -(|M| \cos\varphi \cos\theta + |M| \sin\varphi \sin\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.97)}$$

$\vec{J}_{msm1}$, $\vec{J}_{msm2}$, $\vec{J}_{msm3}$ ve $\vec{J}_{msm4}$ sırasıyla, Şekil 2.21 üzerinde gösterilen 1, 2, 3 ve 4 numaralı sınırlar üzerinde oluşan yüzey akımı yoğunluklarıdır. Görüleceği üzere 4 sınır üzerinde de bir yüzey akım yoğunluğu dağılımı gerçekleşmiştir.

2.9.2.2 Yüzey akım yoğunluğu eşitliklerinin kutup arkı yapısı için yüzey akım yoğunluklarının oluşturulması

Şekil 2.22 (a) ile halka ve Şekil 2.22 (b) ile ise çember geometrisindeki sabit mıknatıs yapıları gösterilmektedir. Sabit mıknatıslanmış bölgelerin sınırları numaralandırılarak şekil üzerinde gösterilmektedir. Bu sınırlar üzerindeki normal vektörleri ise silindirik koordinatlara göre gösterilmiştir.



(a) **(b)**

Şekil 2.22 : Paralel yönde mıknatıslanmış modeller: **(a)** Halka modeli. **(b)** Çember modeli.

Denklem (2.47) ile ifade edilen yüzey akım yoğunlukları ile yüzey vektörü arasındaki bağıntı kullanılarak, Şekil 2.22 (a) üzerinde 1 ve 2 numaralarıyla gösterilen sınırlar için oluşan yüzey akım yoğunluğu vektörleri;

$$\vec{J}_{msm1} = \overrightarrow{M} \times -\vec{e}_r = (|M| \cos\varphi \sin\theta + |M| \sin\varphi \cos\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.98)}$$

$$\vec{J}_{msm2} = \overrightarrow{M} \times \vec{e}_r = -(|M| \cos\varphi \sin\theta + |M| \sin\varphi \cos\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.99)}$$

Aynı bağıntı, Şekil 2.21 (b) ile gösterilen paralel yönde bir mıknatıslanmaya sahip çember yapısı için gerçekleştirilirse 1 numaralı sınır için oluşan yüzey akım yoğunluğu vektörü;

$$\vec{J}_{msm1} = \overrightarrow{M} \times \vec{e}_r = -(|M| \cos\varphi \sin\theta + |M| \sin\varphi \cos\theta)\vec{e}_z \quad \textbf{(2.100)}$$

3. FOURİER YAKLAŞIMIYLA SABİT MIKNATISLI YAPILARIN MANYETİK ANALİZİ

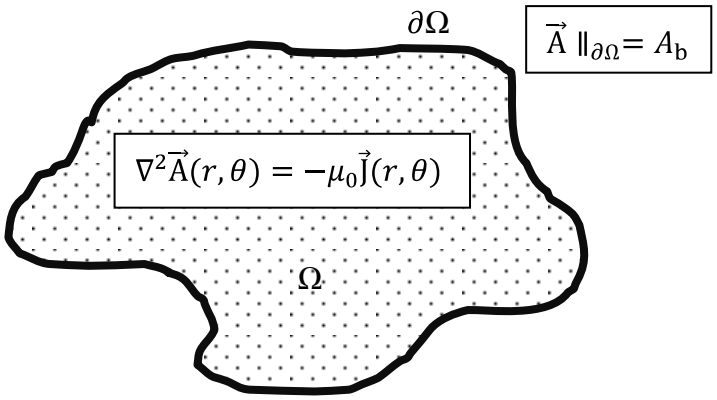
3.1 Poisson Denkleminin Çözümü

Poisson denkleminin çözümüyle, manyetik vektör potansiyeli $\vec{A}$'nın değeri elde edilmektedir. Geliştirilen manyetik analizin iki boyutlu problemler için geçerli olduğundan bahsedilmişti. Buradan hareketle, çözümü aranan manyetik vektör potansiyeli de iki boyutta oluşmaktadır. Poisson denklemi olarak ifade edilen denklem (2.18) bu koşul altında yeniden düzenlenirse;

$$\nabla^2\vec{\mathrm{A}}(\mathrm{r},\theta) = -\mu_0\vec{\mathrm{J}}(\mathrm{r},\theta) \qquad \textbf{(3. 1)}$$

Burada, r ve θ silindirik koordinatlardaki eksenlerdir ve manyetik vektör potansiyeli ile akım yoğunluğunun bu eksenlerde bir değere sahip olduğunu ifade etmektedir.

Elektromanyetik çözümü aranan bir bölgede oluşan manyetik vektör potansiyeli eşitlikleri, Şekil 3.1'de gösterilmektedir. Çözümü aranan bölge Ω ve sınırı ise $\partial\Omega$ olarak belirtilmiştir. Bu bölge içerisinde, manyetik vektör potansiyeli denklem (3.1) ile belirtilen Poisson denklemini sağlamaktadır. Bölgenin sınırında ise, A_b ile ifade edilen bilinmeyen bir değere eşittir.



Şekil 3.1 : Problemin tanımlı olduğu bölge ve bölge sınırında manyetik vektör potansiyelinin sağladığı eşitlikler.

Manyetik vektör potansiyeli, homojen manyetik vektör potansiyel $\vec{A}_h$ ve homojen olmayan vektör potansiyel $\vec{A}_p$ olarak iki ayrı niceliğin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\vec{A}(r,\theta) = \vec{A}_h(r,\theta) + \vec{A}_p(r,\theta) \quad \textbf{(3. 2)}$$

Şekil 3.1ile çözümü aranan bölgede tanımlanan problem yapısı, homojen ve homojen olmayan manyetik vektör potansiyeline göre süperpoze edilebilir. Uygulanan süperpozisyon ile bölge içerisinde Laplace denklemini sağlayan ve bölge sınırında ise bir A_b gibi bir değere sahip olan çözüm, homojen manyetik vektör potansiyel olarak ele alınabilir.

$$\nabla^2\vec{A}_h(r,\theta) = 0 \quad \textbf{(3.3)}$$

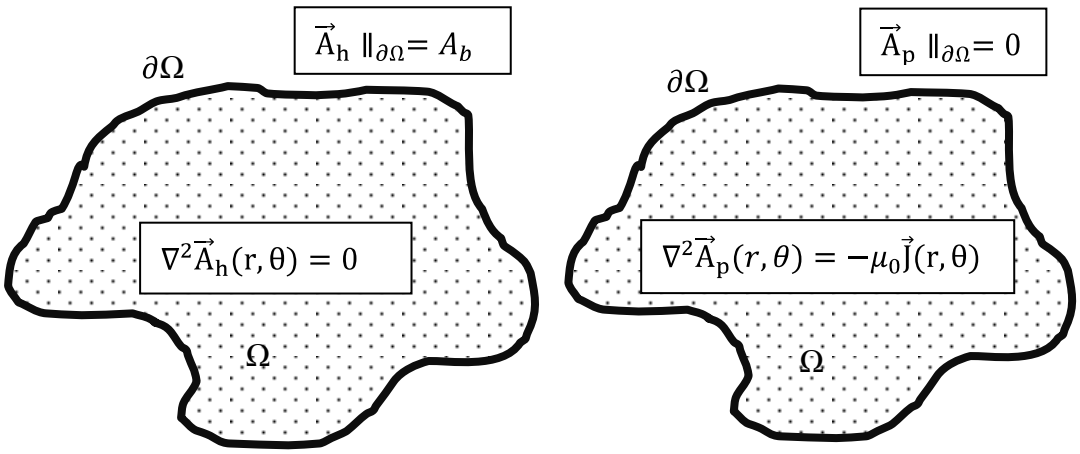
$$\vec{A}_h \|_{\partial\Omega} = A_b \quad \textbf{(3.4)}$$

Benzer şekilde, problemin tanımlı bölge içerisinde Poisson denklemini sağlayan ve bölge sınırında bir değere sahip olmayan çözüm ise, homojen olmayan çözüm olarak ele alınabilir.

$$\nabla^2\vec{A}_p(r,\theta) = -\mu_0\vec{J}(r,\theta) \quad \textbf{(3.5)}$$

$$\vec{A}_p \|_{\partial\Omega} = 0 \quad \textbf{(3.6)}$$

Problemin tanımlı olduğu bölge içerisindeki ve sınırındaki ifadeleri incelenirse, denklemlerin birçok problem çözümünde kullanılan süper pozisyon çözüm sistemi temelinde iki ayrı yapıya ayrıldığı görülmektedir.



Şekil 3.2 : Problemin tanımlı olduğu bölgede iki ayrı çözüme ayrıştırılması.

Çözümü aranılan yapılar sabit mıknatıs haricinde bir kaynak barındırmayan yapılardır. Bu yapılar yüzey akım yoğunluğu modellemesi yapılarak, bölge içerisinde bir kaynak terimine sahip olmayacağı Bölüm 2.9'da ifade edilmişti. Buradan hareketle, sabit mıknatıs yapısı için bölge içerisinde bir kaynak terimine sahip olmayan Laplace denkleminin geçerli olduğu açıktır. Yüzey üzerinde bir akım yoğunluğu değerine sahip sabit mıknatıs yapısının o bölgesi sınırında ise bilinmeyen manyetik vektör potansiyeli değerdedir. Şekil 3.2'den de görüleceği üzere, bu eşitlikleri oluşturan çözüm olan homojen manyetik vektör potansiyeli sabit mıknatıs yapısının sahip olduğu manyetik vektör potansiyeli değerini oluşturmaktadır. Homojen olmayan manyetik vektör potansiyelinin sağladığı çözüm ise, sabit mıknatıs yapıları için oluşmamaktadır. Bu çerçevede, Bölüm 2'de çözümü elde edilen Laplace denklemi homojen manyetik vektör potansiyelini oluşturmaktadır.

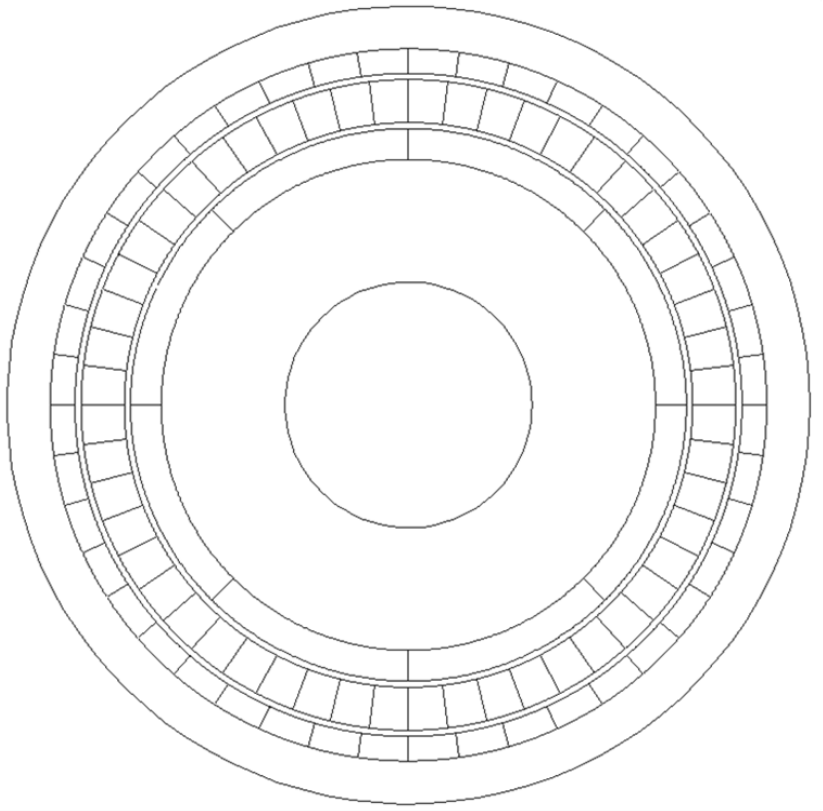
$$A_{\mathrm{hm}}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_{mn} \left(\frac{r}{r_{om}} \right)^{n} + c_{mn} \left(\frac{r}{r_{im}} \right)^{-n} \right) sin\, np_m\theta + \left(b_{mn} \left(\frac{r}{r_{om}} \right)^{n} + d_{mn} \left(\frac{r}{r_{im}} \right)^{-n} \right) cos\, np_m\theta \right] \tag{3.7}$$

Homojen olmayan manyetik vektör potansiyelinin ifadesinden bahsedilmeden önce ele alınacak yapıların silindirik simetrik alt bölgelere ayrılmasından bahsedilecektir. Homojen olmayan vektör potansiyeli silindirik simetrik alt bölgelere ayrılmış yapılar göz önünde bulundurularak ele alınacaktır.

3.1.1 Bir Yapının Silindirik Simetrik Alt Bölgelere Ayrılması

Analizi yapılacak yapılar, silindirik simetrik bir geometriye sahip yapılardır. Ele alınan bir manyetik yapı genel olarak; farklı manyetik geçirgenliklerde, içerisinde kaynak barındıran veya barındırmayan birçok bölgeden oluşmaktadır. Oluşturulan manyetik analiz yöntemi prensibi gereği, temel yapı içerisindeki bu bölgeler ayrıştırılarak farklı alt bölgeler olarak ele alınmaktadır. Ayrıca; geçirgenlik, kaynak bulundurma veya bulundurmama gibi özelliklerine göre alt bölgelere ayrılan bu yapılar, silindirik simetrik bir geometriye de sahip olmalıdır. Böyle bir geometriye sahip değil ise, silindirik simetrik geometrideki daha küçük alt bölgelere ayrılmalıdır. Silindirik simetrik olarak ele alınan alt bölgeler ise, analiz yönteminin prensibi gereği; çember, halka veya kutup arkı şeklinde bir geometriye sahip olmalıdır. Yani manyetik analizi yapılacak bir yapı; geçirgenlik, kaynak bulundurma gibi koşullara

ek olarak çember, halka veya kutup arkı geometrisine sahip olan alt bölgelerde incelenecektir. Şekil 3.3'de, daha önce Şekil 2.11 ile gösterilen manyetik dişli yapısının alt bölgeleri görülmektedir. Bu yapı; çember, halka ve kutup arkı geometrilerindeki silindirik simetrik alt bölgelerden oluşmaktadır.



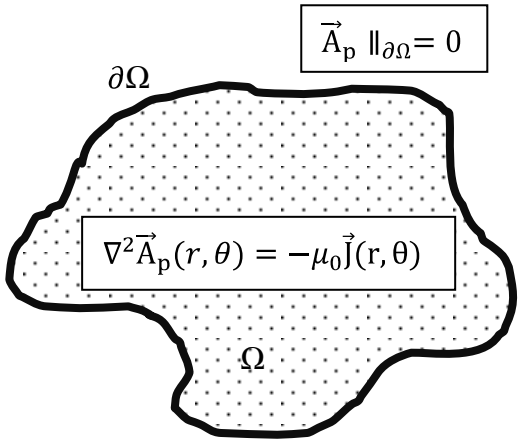
Şekil 3.3 : Manyetik dişli yapısının silindirik simetrik alt bölgelere ayrılması.

Manyetik analizi yapılacak bir yapı, bu prensip doğrultusunda alt bölgelere ayrılır ve bu alt bölgelerde manyetik vektör potansiyeli ifadeleri incelenir.

3.1.2 Homojen Olmayan Çözümün İncelenmesi

Şekil 3.2'de görüldüğü üzere homojen olmayan vektör potansiyeli Poisson denklemini sağlamaktadır, yani bir kaynak terimi ile oluşmaktadır. Ele alınan yapılar, daha önce de bahsedildiği üzere sabit mıknatıslı yapılardır. Dolayısıyla kaynak terimi oluşturacak yapı sadece sabit mıknatıslardır. Sabit mıknatıslı yapılar ise, bölüm 2.4'de açıklandığı üzere yüzey akım yoğunluğu şeklinde modellenmiştir. Bu yüzey akım yoğunlukları ise sabit mıknatıs içeren yapının sınırında mevcut olacaktır. Ele alınacak yapılar ise bölüm 3.1.1 içerisinde ifade edildiği üzere kaynak bulundurma, manyetik geçirgenlik gibi özelliklerine göre silindirik simetrik geometrilerdeki alt bölgelerde incelenecektir. Buradan hareketle; bahsedilen yüzey akım yoğunlukları,

sabit mıknatıs yapısı içeren alt bölgenin yüzeyinde oluşacaktır. Yani mıknatıslanmış yapıdaki bir alt bölgenin içerisinden akan bir akım olmamaktadır. Bu yüzey akım yoğunlukları ise, homojen manyetik vektör potansiyelinin sınır eşitliği ifadesine etkimektedir. Bu koşullar çerçevesinde, alt bölge içerisinde bir kaynak terimi oluşmayacağı açıktır. Dolayısıyla prensipte kaynak olarak sadece sabit mıknatıs yapılarını barındıracak manyetik analiz yönteminde de bu kaynak terimi oluşmamaktadır. Bu yüzden manyetik analiz yönteminde homojen olmayan manyetik vektör potansiyeli ifadesi bulunmamaktadır. Şekil 3.4'de sabit mıknatıs yapısı haricinde bir kaynak bulundurmayan yapılarda manyetik vektör potansiyeli ifadesinin görünümü şematik olarak gösterilmiştir. Manyetik analiz yöntemi ile Şekil 3.3'de görüldüğü üzere, sadece homojen manyetik vektör potansiyeli oluşan yapılarda çözüm aranmaktadır.



Şekil 3.4 : İçerisinde sabit mıknatısı yapısı haricinde bir kaynak bulunmayan yapılarda manyetik vektör potansiyeli çözümünün görünümü.

Homojen manyetik vektör potansiyelinin bölge içerisindeki ifadesine (denklem (3.7)) ek olarak, bölge sınırındaki değerin de sağlanması gerekmektedir. Şekil 3.4'de sınır eşitliği olarak görülen denklem (3.5), homojen vektör potansiyeli çözümünün bölge sınırında bir değere sahip olduğunu ifade etmektedir. Bir yapıda bölge sınırlarındaki manyetik vektör potansiyeli değerinin belirlenebilmesi, sınır koşulları olarak bilinen eşitlikler ile elde edilebilir.

Bu eşitlikler manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenleri ve manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşenlerini içeren eşitliklerdir. Bu sınır koşulları, bölüm 2.8'de denklem (2.53) ve (2.58) ile ifade edilmişti. Bu denklemlerin silindirik simetrik yapılarda manyetik vektör potansiyeli çözümünü içerecek şekilde ifadeleri ise bölüm 2.8.1'de ifade edilmişti. Ayrıca bölge sınırındaki değeri etkileyen bir diğer etmen ise

Neumann veya Dirichlet tipi olarak belirtilen sınır koşulu yapısıdır. Bu sınır koşulu yapısı ise, Bölüm 2.5'te açıklanmıştı.

3.2 Homojen Çözümün ve Sınır Koşulu Eşitliklerinin Silindirik Simetrik Alt Bölgelere Ayrılmış Yapıda Birleştirilmesi

Bölüm 3.1'de denklem (3.7) ile belirtilen homojen manyetik vektör potansiyeli ifadesinin; alt bölgelerdeki değeri aranmaktadır. Bu alt bölgelerdeki homojen vektör potansiyeli elde edilerek, yapı içerisindeki manyetik akı dağılımı elde edilebilir. Manyetik akı dağılımının elde edilebilmesi için, homojen manyetik vektör potansiyelinin karakteristik katsayılarının değerlerinin elde edilmesi gereklidir. Bu katsayılar ise sınır koşulu eşitlikleri ile elde edilebilir. Alt bölgeler arasındaki sınırlarda homojen manyetik vektör potansiyeli, her sınırda farklı değerlere sahip olmaktadır. Bu değerler ise, sınır koşulu eşitliklerini sağlamalıdır. Silindirik simetrik yapılarda, sınır koşulları manyetik vektör potansiyeli ifadesini içerecek şekilde yay ve düz çizgi sınır tipleri için sırasıyla denklem (2.63),(2.64) ve (2.68), (2.69) ile elde edilmişti. Denklem (2.63) ve (2.68) manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenleri, denklem (2.64) ve (2.69) ise manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşenlerinden oluşan eşitliklerdi.

Bölüm 3.1'de açıklandığı üzere manyetik vektör potansiyeli sadece homojen çözümden oluşmaktadır. Bu çerçevede, Laplace çözümünden elde edilen homojen vektör potansiyeli denklemi (3.7) ile sınır koşulu denklemleri (2.63) ve (2.64) birleştirilebilir.

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_{h1}}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_{h2}}{\partial \theta}\right) = 0 \qquad \textbf{(3.8)}$$

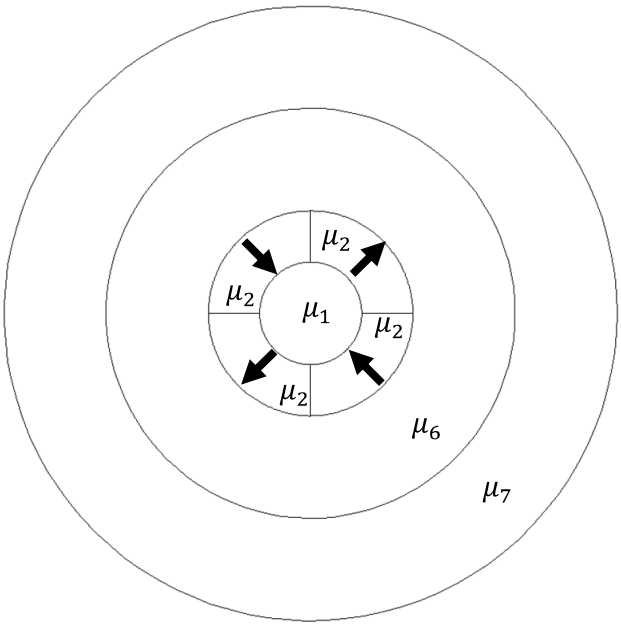
$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{h1}}{\partial r}\right) - \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_{h2}}{\partial r}\right) = J_{\mathrm{ms1}} + J_{\mathrm{ms2}} \qquad \textbf{(3.9)}$$

Benzer şekilde; denklem (3.7) ile denklem (2.68) ve denklem (2.69) birleştirilirse;

$$\left(\frac{\partial A_{h1}}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial A_{h2}}{\partial r}\right) = 0 \qquad \textbf{(3.10)}$$

$$\frac{1}{r}\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial A_{h1}}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial A_{h2}}{\partial \theta}\right) = J_{\mathrm{ms1}} + J_{\mathrm{ms2}} \qquad \textbf{(3.11)}$$

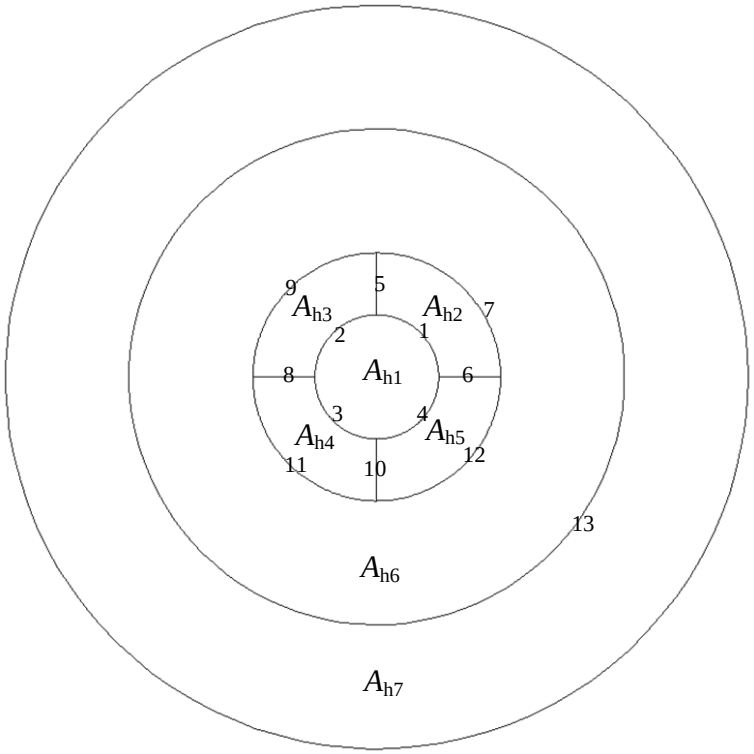
Şekil 3.5'te 7 adet silindirik simetrik alt bölgeden oluşan 4 kutuplu örnek bir yapı görülmektedir. Bu yapı içerisindeki sabit mıknatısların mıknatıslanma yönleri yarıçap doğrultusundadır ve şekil üzerinde gösterilmiştir. Bölgelerin manyetik geçirgenlikleri de şekil üzerinde belirtilmiştir. Böyle bir yapıda her bir alt bölge farklı bir manyetik vektör potansiyeli değerine sahiptir. Çünkü her bir sınır koşulu denklemi her bir bölge için farklı olarak uygulanarak, manyetik akı yoğunluğu ve manyetik alan şiddeti eşitlikleri her sınır üzerinde sağlanmalıdır.



Şekil 3.5 : Örnek 4 kutuplu makine üzerinde bölgelerin görünümü.

Şekil 3.6'da aynı yapıda; 1 ve 2 numaralı bölgelerdeki homojen manyetik vektör potansiyeli sırasıyla A_{h1}ve A_{h2} şeklinde oluşacağı gösterilmektedir. Her bir sınır ise numaralandırılarak şekil üzerinde belirtilmiştir. 1, 2, 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13 numaralı sınırlar yay sınırlardır. 5, 6, 8, 10 numaralı sınırlar ise düz çizgi sınırlardır.

Şekil 3.6'da görüldüğü üzere yapının en dışındaki sınırda üzerinde bir numaralandırma yapılmamıştır. Çünkü manyetik analiz yöntemi prensibi gereği, yapının en dışındaki sınır için Neumann ya da Dirichlet tipi sınır koşulu olarak ele alınacaktır. Buradan hareketle, en dış sınırın homojen manyetik vektör potansiyeline etkisi ayrı bir denklem yapısı ile ifade edilecektir. Neumann veya Dirichlet sınır tipi olarak incelenen en dış sınır üzerinde, homojen manyetik vektör potansiyeli çözümünün sonlu bir ifadeye sahip olması sağlanmaktadır. Çözümü aranan yapının dışarısında bir manyetik vektör potansiyelinin oluşması engellenerek, değeri daha doğru olarak elde edilir.



Şekil 3.6 : Örnek 4 kutuplu makine üzerinde manyetik vektör potansiyeli ifadeleri ve sınırların görünümü.

Her bir bölge için manyetik vektör potansiyeli ifadeleri şekil üzerinde gösterilmiştir. Şekil 3.6'da görülen düz çizgi ve yay sınırlar için sınır koşuları ve homojen manyetik vektör potansiyeli ifadesi birleştirilerek, o bölge için manyetik vektör potansiyeli yapısını oluşturan a_{mn}, b_{mn}, c_{mn} ve d_{mn} katsayıları(karakteristik katsayılar) bulunabilecektir. Örnek olarak; Şekil 3.6'da görülen 7 numaralı yay sınır için, sınır koşulu denklemleri (3.8), (3.9) ile homojen manyetik vektör potansiyeli denklemi (3.7) birleştirilirse;

$$
\begin{aligned}
&np_2\left[\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^{n} a_{2\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} c_{2\mathrm{n}}\right]\cos np_2\theta \\
&- np_6\left[\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^{n} a_{6\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n} c_{6\mathrm{n}}\right]\cos np_6\theta \\
&+ np_2\left[\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^{n} b_{2\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} d_{2\mathrm{n}}\right]\sin np_2\theta \\
&- np_6\left[\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^{n} b_{6\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n} d_{6\mathrm{n}}\right]\sin np_6\theta = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3.13)}
$$

$$\left[\frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^n a_{2\mathrm{n}} - \frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} c_{2\mathrm{n}}\right]\sin np_2\theta$$
$$+\left[\frac{n}{\mu_6 r}\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^n a_{6\mathrm{n}} - \frac{n}{\mu_6 r}\left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n} c_{6\mathrm{n}}\right]\sin np_6\theta$$
$$+\left[\frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^n b_{2\mathrm{n}} - \frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} d_{2\mathrm{n}}\right]\cos np_2\theta \quad \textbf{(3.14)}$$
$$+\left[\frac{n}{\mu_6 r}\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^n b_{6\mathrm{n}} - \left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n}\frac{n}{\mu_6 r} d_{6\mathrm{n}}\right]\cos np_6\theta = J_{\mathrm{ms}27} + J_{\mathrm{ms}67}$$

Burada, yüzey akım yoğunluğu ifadesi J_{ms}'nin ilk indisi hangi bölgeye ait yüzey akım yoğunluğu olduğunu ve ikinci indisi ise hangi sınır üzerinde olduğunu belirten indislerdir.

Denklem (3.13) ve (3.14) yay sınırlar için oluşturulan denklemlerdir. Yay sınır üzerinde θ açısı değişkendir ve sinüs ve kosinüs fonksiyonları olarak ayrıştırılabilir. Öncelikle (3.13) denkleminde bu ayrıştırma gerçekleştirilirse;

$$np_2\left[\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^n a_{2\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} c_{2\mathrm{n}}\right]\cos np_2\theta$$
$$- np_6\left[\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^n a_{6\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n} c_{6\mathrm{n}}\right]\cos np_6\theta = 0 \quad \textbf{(3.15)}$$

$$np_2\left[\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^n b_{2\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} d_{2\mathrm{n}}\right]\sin np_2\theta$$
$$- np_6\left[\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^n b_{6\mathrm{n}} + \left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n} d_{6\mathrm{n}}\right]\sin np_6\theta = 0 \quad \textbf{(3.16)}$$

Benzer şekilde, denklem (3.14)'te de bu ayrıştırma gerçekleştirilirse;

$$\left[\frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^n a_{2\mathrm{n}} - \frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} c_{2\mathrm{n}}\right]\sin np_2\theta$$
$$+\left[\frac{n}{\mu_6 r}\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^n a_{6\mathrm{n}} - \frac{n}{\mu_6 r}\left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n} c_{6\mathrm{n}}\right]\sin np_6\theta = J_{\mathrm{ms}27} + J_{\mathrm{ms}67} \quad \textbf{(3.17)}$$

$$\left[\frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^n b_{2\mathrm{n}} - \frac{n}{\mu_2 r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} d_{2\mathrm{n}}\right]\cos np_2\theta$$
$$+\left[\frac{n}{\mu_6 r}\left(\frac{r}{r_{o6}}\right)^n b_{6\mathrm{n}} - \left(\frac{r}{r_{i6}}\right)^{-n}\frac{n}{\mu_6 r} d_{6\mathrm{n}}\right]\cos np_6\theta = J_{\mathrm{ms}27} + J_{\mathrm{ms}67} \quad \textbf{(3.18)}$$

Burada *r* yarıçap değeri iki bölge arasındaki sınırın yarıçap değeridir. Bilenen bir değer olan bu yarıçap değeri (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) denklemlerinde ve 2 ve 6 numaralı bölgelerin J_{ms} yüzey akım yoğunluğu değeri denklem (3.17) ve (3.18) yerine yazılarak sınır koşulu eşitlikleri uygulanmış olur. *n* olarak ifade edilen

harmonik değeri değiştirilerek her bir harmonik bazında bu sınır eşitlikleri uygulanabilir.

2 ve 6 numaralı bölgeler arasındaki 7 numaralı yay sınır için sınır koşulu eşitlikleri denklem (3.15), (3.16), (3.17) ve (3.18) ile elde edilmiştir. Benzer şekilde düz çizgi sınır olan 5 numaralı sınır için sınır homojen vektör potansiyeli denklemi ile sınır koşulu eşitlikleri birleştirilirse;

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^{n} a_{2\mathrm{n}} - \frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} c_{2\mathrm{n}}\right] \sin np_2\theta \\
&+ \left[\frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^{n} b_{2\mathrm{n}} - \frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} d_{2\mathrm{n}}\right] \cos np_2\theta \\
&- \left[\frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{o3}}\right)^{n} a_{3\mathrm{n}} - \frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{i3}}\right)^{-n} c_{3\mathrm{n}}\right] \sin np_3\theta \\
&- \left[\frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{o3}}\right)^{n} b_{3\mathrm{n}} - \frac{n}{r}\left(\frac{r}{r_{i3}}\right)^{-n} d_{3\mathrm{n}}\right] \cos np_3\theta = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{np_2}{r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^{n} a_{2\mathrm{n}} - \frac{np_2}{r}\left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} c_{2\mathrm{n}}\right] \cos np_2\theta \\
&- \left[\frac{np_2}{r}\left(\frac{r}{r_{o2}}\right)^{n} b_{2\mathrm{n}} - \left(\frac{r}{r_{i2}}\right)^{-n} \frac{np_2}{r} d_{2\mathrm{n}}\right] \cos np_2\theta \\
&+ \left[\frac{np_3}{r}\left(\frac{r}{r_{o3}}\right)^{n} a_{3\mathrm{n}} - \frac{np_3}{r}\left(\frac{r}{r_{i3}}\right)^{-n} c_{3\mathrm{n}}\right] \sin np_3\theta \\
&- \left[\frac{np_3}{r}\left(\frac{r}{r_{o3}}\right)^{n} b_{3\mathrm{n}} - \frac{np_3}{r}\left(\frac{r}{r_{i3}}\right)^{-n} d_{3\mathrm{n}}\right] \cos np_3\theta = J_{ms25} + J_{ms65}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Denklem (3.19) ve (3.20) düz çizgi sınırlar için oluşturulan denklemlerdir. Düz çizgi bir sınır üzerinde r değeri değişkendir, bu yüzden denklem (3.19) ve (3.20) üstel fonksiyonlar temelinde ayrıştırılabilir. Öncelikle denklem (3.19) bu şekilde ayrıştırılırsa;

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{n}{{r_{o2}}^{n}}\left(a_{2\mathrm{n}} \sin np_2\theta + b_{2\mathrm{n}} \cos np_2\theta\right)\right. \\
&\left. - \frac{n}{{r_{o3}}^{n}}\left(a_{3\mathrm{n}} \sin np_3\theta + b_{3\mathrm{n}} \cos np_3\theta\right)\right] r^{n-1} = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&\left[-\frac{n}{{r_{i2}}^{-n}}\left(c_{2\mathrm{n}} \sin np_2\theta + d_{2\mathrm{n}} \cos np_2\theta\right)\right. \\
&\left. + \frac{n}{{r_{i3}}^{-n}}\left(c_{3\mathrm{n}} \sin np_3\theta + d_{3\mathrm{n}} \cos np_3\theta\right)\right] r^{-n-1} = 0
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Benzer şekilde denklem (3.20) düzenlenirse;

$$\left[\frac{np_2}{\mu_2 {r_{o2}}^n}(a_{2\mathrm{n}}\cos np_2\theta - b_{2\mathrm{n}}\sin np_2\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{np_3}{\mu_3 {r_{o3}}^n}(a_{3\mathrm{n}}\cos np_3\theta - b_{3\mathrm{n}}\sin np_3\theta)\right] r^{n-1} = J_{ms25} + J_{ms65} \quad \textbf{(3.23)}$$

$$\left[\frac{np_2}{\mu_2 {r_{o2}}^n}(c_{2\mathrm{n}}\cos np_2\theta - d_{2\mathrm{n}}\sin np_2\theta)\right.$$
$$\left.+\frac{np_3}{\mu_3 {r_{o3}}^n}(c_{3\mathrm{n}}\cos np_3\theta - d_{3\mathrm{n}}\sin np_3\theta)\right] r^{-n-1} = J_{ms25} + J_{ms65} \quad \textbf{(3.24)}$$

2 ve 3 numaralı bölgeler arasındaki 5 numaralı düz çizgi sınır için sınır koşulu eşitlikleri elde edilmiştir.

Yay sınır için denklem (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) olmak üzere dört, düz çizgi sınır için ise denklem (3.21), (3.22), (3.23), (3.24) olmak üzere yine dört denklem elde edilmiştir. Yani silindirik simetrik yapılar için uygulanan sınır koşulları her bir sınır için dört adet denklemden oluşmaktadır.

Burada denklemlerin sağ tarafını oluşturan kaynak terimleri(yüzey akım yoğunlukları), Bölüm 2.9'da yapılan yüzey akım yoğunluğu modellemeleri ve Fourier açılımı çerçevesinde sınır koşulu denklemlerinde yerine yazılmaktadır. Örneğin; denklemleri elde edilen 4 kutuplu makine modeli ele alınırsa, 7 numaralı sınır için kaynak terimi ifadeleri elde edilebilir.

$$J_{\mathrm{ms27}} = \frac{2J_{msm6}(r_{o6} - r_{i6})}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\cos np_2\theta \quad \textbf{(3.25)}$$

$$J_{\mathrm{ms67}} = 0 \quad \textbf{(3.26)}$$

J_{ms27} Bölüm 2.9 da açıklandığı üzere, Fourier açılımı çerçevesinde bu şekilde oluşmaktadır. J_{ms67} ise 6 numaralı bölgede bir sabit mıknatıs yapısı, yani bir kaynak bulunmadığından sıfır değerini almıştır.

Yine benzer şekilde 4 kutuplu makine modelinde, 5 numaralı düz çizgi sınır için kaynak terimleri Bölüm 2.9'da açıklandığı üzere elde edilebilir. Her iki bölge için de kaynak terimleri mıknatıslanma vektörünün mutlak değerine eşit olacaktır.

$$J_{ms25} = |M| \quad \textbf{(3.27)}$$

$$J_{\mathrm{ms65}} = -|M| \quad \textbf{(3.28)}$$

Bu şekilde yapılarda, sınır üzerindeki yüzey akım yoğunluğu eşdeğerleri kullanılarak, farklı yapıların sahip olduğu kaynak terimleri elde edilmektedir.

3.2.1 Neumann ve Dirichlet sınır koşulunun ifadesi

Ele alınan yapılarda, problemin en dıştaki sınırının Neumann veya Dirichlet sınır koşulu olarak belirtilmesi ile çözümün daha doğru bir şekilde elde edilmesi amaçlanmaktadır. Manyetik vektör potansiyeli çözümü bu sınır koşulundan da etkilenmektedir. Homojen manyetik vektör potansiyeli formülasyonu bu koşul etkisiyle yeniden düzenlenerek, çözümün sınır koşulunu da ihtiva edecek şekilde oluşturulması gerekmektedir. Öncelikle Dirichlet sınır koşulu ele alınırsa; Bölüm 2.5'te açıklandığı üzere, sınır üzerinde manyetik vektör potansiyelinin sabit bir değer alması durumudur. Yapılan manyetik analizlerde ise Dirichlet sınır koşulu özelleştirilerek manyetik vektör potansiyelinin sıfır değerini alması olarak uygulanmaktadır. Manyetik vektör potansiyeli ifadesiyle Dirichlet sınır koşulu birleştirilerek elde edilebilir.

$$\left[a_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n}+c_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n}\right]sin\,np_m\theta + \left[b_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n}+d_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n}\right]cos\,np_m\theta=0 \tag{3.29}$$

Problemin en dışındaki sınırının Dirichlet veya Neumann koşulu olarak ele alındığından bahsedilmişti. Herhangi silindirik simetrik bir problemde ise en dıştaki sınır yay sınır tipinde olacaktır. Bu yüzden sabit bir r değerine ve değişken bir θ değerine sahiptir. Bu koşul altında denklem (3.29) incelenirse, sinüs ve kosinüs ifadeleri hiçbir zaman sıfır olmayacaktır. Bu yüzden parantez içerisindeki r'ye bağlı ifadelerin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu yüzden, aşağıda gösterildiği üzere iki farklı denkleme ayrıştırılabilir.

$$a_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n}+c_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n}=0 \tag{3.30}$$

$$b_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n}+d_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n}=0 \tag{3.31}$$

Burada r değeri, sınırında Dirichlet koşulu olan bölgenin bu koşula sahip sınırının yarıçap değeridir.

Neumann sınır koşulu ise, manyetik vektör potansiyeli değerinin normal vektöre göre türevinin sıfıra eşit olması durumuydu. Silindirik simetrik yapılarda en dıştaki sınır yay sınır tipinde olacağı belirtilmişti. Burada normal vektörü *r* ekseni yönünde oluşmaktadır. Yani Neumann sınır koşulu manyetik vektör potansiyelinin *r*'ye göre türevidir. Buradan hareketle manyetik vektör potansiyeli denklemi düzenlenirse;

$$\left[a_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n} - c_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n}\right] sin\, np_m\theta + \left[b_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n} - d_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n}\right] cos\, np_m\theta = 0 \quad \textbf{(3.32)}$$

Dirichlet sınır koşulunda da belirtildiği üzere iki ayrı denkleme ayrıştırılabilir.

$$a_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n} - c_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n} = 0 \quad \textbf{(3.33)}$$

$$b_{mn}\left(\frac{r}{r_{om}}\right)^{n} - d_{mn}\left(\frac{r}{r_{im}}\right)^{-n} = 0 \quad \textbf{(3.34)}$$

Görüleceği üzere; manyetik analiz prensibinde, bölgenin en dışındaki sınır değeri olarak belirtilen Neumann veya Dirichlet sınır tipi iki adet denklem oluşturmaktadır.

3.3 Genel Matrisin Oluşturulması ve Çözümü

Sınır koşulları ve Laplace çözümü temelinde farklı yapılar için farklı denklem yapıları oluşacaktır. Bölüm 3.3'te açıklandığı üzere, temel olarak her bir sınır için 4 adet denklem ve en dış sınır için ise 2 adet denklemin oluşturduğu bir denklem sistemi oluşacaktır. Farklı yapılar için elde edilen bu denklemler, bir matris yapısında ele alınacaktır. Fakat öncelikle yapıyı oluşturan bölgeler arasındaki harmonik dağılımı incelenmelidir.

Şekil 3.6'da görülen sınır koşulu denklemleri incelenen 4 kutuplu makine modelini ele alalım. 7 numaralı yay sınır için, Bölüm 3.3'te denklem (3.13) ve (3.14) ile sınır koşulu denklem yapısı ifade edilmişti. Bu denklemlerde sinüs ve kosinüs terimlerinin denklemi sağlaması için, her iki bölgenin np terimlerinin eşit olması gerekmektedir. Farklı p katsayısına sahip iki bölge arasında sınır eşitliklerinin sağlanması eşleşen np terimlerine bağlıdır. Bu çerçevede, her bir yapı için harmonik dağılımı olarak ifade edilen np değerleri elde edilmelidir.

Aynı 4 kutuplu makine modeli ele alınırsa; Bölüm 2.6.2'de açıklandığı üzere, sabit mıknatısların bulunduğu 2, 3, 4 ve 5 numaralı bölgeler için sınır koşulu eşitliklerinde $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 2$ olacaktır. Bu bölgeler haricindeki bölgeler sabit mıknatıs yapısı içermediğinden dolayı, manyetik vektör potansiyeli ifadesinde $p_1 = p_6 = p_7 = 1$ olacaktır.

Çizelge 3.1'de, 4 kutuplu makinede her bir harmonik değeri için tüm bölgelerde oluşan np değerleri görülmektedir. n harmonik değeri 4 değerine kadar açılarak, oluşan np dağılımı elde edilmiştir.

Çizelge 3.1'den hareketle; 7 numaralı sınır ele alınırsa, 2 ve 6 numaralı bölgeler arasında eşleşen np değerleri $np = 2$ ve $np = 4$ olduğu görülmektedir. 7 numaralı sınır için daha önce ifade edilen (3.15), (3.16), (3.17) ve (3.18) denklemleri $np = 2$ ve $np = 4$ değerlerinde her iki bölgenin terimlerini içerecek şekilde oluşur. $np = 2$ değeri için 2.bölgenin harmonik değeri 1 ve 6. bölgenin harmonik değeri ise 2 olacaktır. Benzer şekilde, $np = 4$ değeri için 2. bölgenin harmonik değeri 2 ve 6. bölgenin harmonik değeri ise 4 olacaktır. Bu şekilde eşleşen harmonik dağılımları için sınır eşitliği ifadeleri her iki bölge terimlerini içerecek şekilde oluşur.

Çizelge 3.1 : Örnek 4 kutuplu makinede harmonik değeri 4için oluşan harmonik dağılımı.

Bölge Numarası	*n*=1	*n*=2	*n*=3	*n*=4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	2	4	6	8
4	2	4	6	8
5	2	4	6	8
6	1	2	3	4
7	1	2	3	4

Eşleşmeyen np değerleri ise; sınır koşulu denklemleri oluşturulurken, sadece o np değerini içeren bölgenin katsayıları gelecektir. Örneğin $np = 3$ için 2 ve 6 numaraları arasındaki 7 numaralı sınır denklemleri oluşturulurken, $np = 3$ değeri için sadece 6. bölgenin katsayıları denklemi oluşturacaktır. Harmonik değeri ise o denklem için $n = 3$ olacaktır.

Benzer şekilde düz çizgi sınırlar için bu harmonik dağılımı çerçevesinde eşleşen np değerleri elde edilerek, denklemler bu şekilde oluşturulur. Fakat incelenen 4 kutuplu makine için, oluşan düz çizgi sınırlar sabit mıknatıs içeren bölgeler arasındadır.

Dolayısıyla arasında düz çizgi sınır bulunan bölgelerin, p değerleri aynı olacaktır. Bu çerçevede, oluşan bütün np değerleri de Çizelge 3.1'den de görüleceği üzere aynıdır.

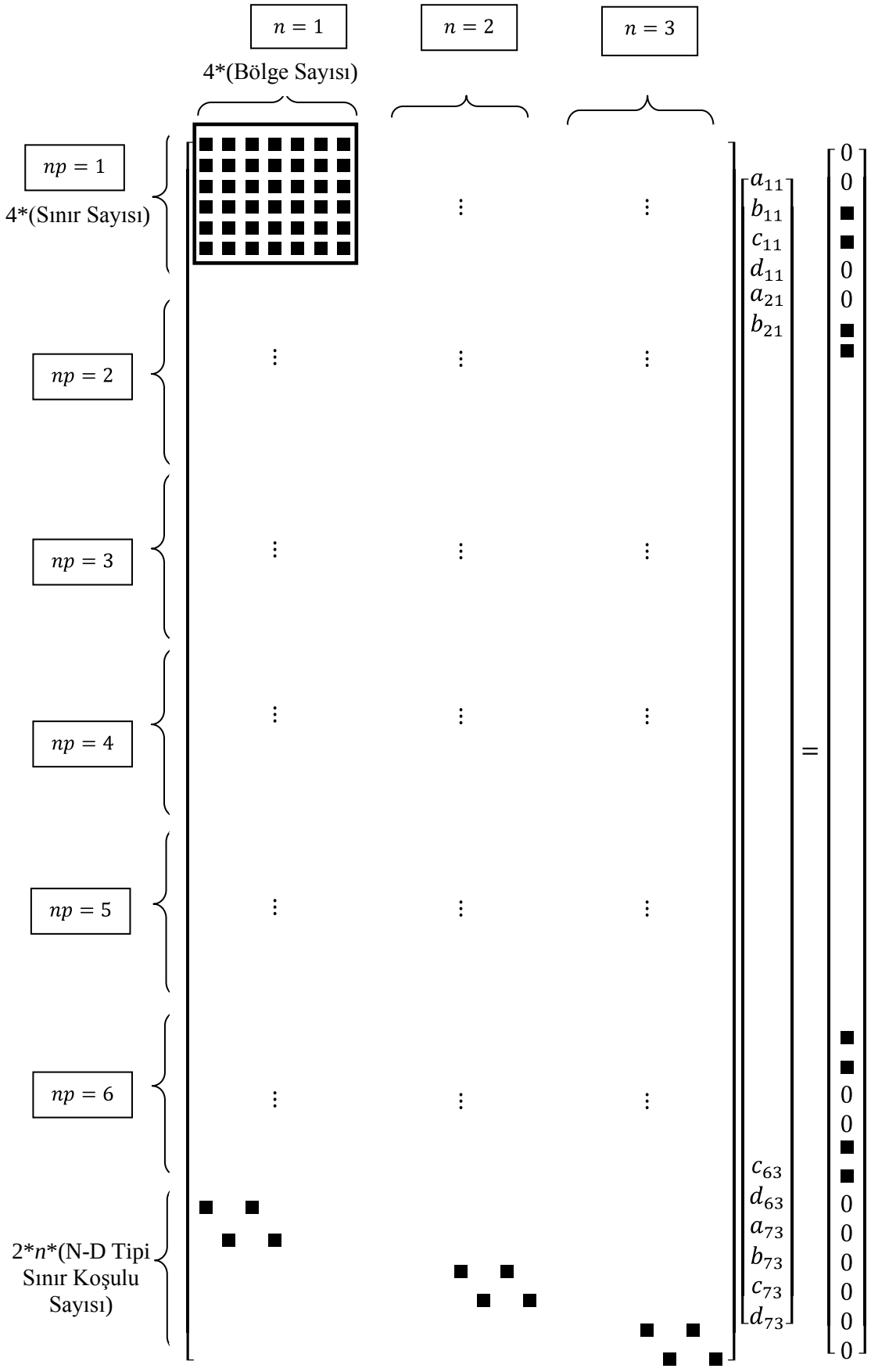
Ele alınan, her farklı yapı için farklı bir np dağılımı oluşur ve bu np dağılımlarına göre farklı yapılarda sınır denklemleri oluşur. Şekil 3.7'de; bahsedilen 4 kutuplu makine modeli temel alınarak, sınır koşullarından oluşan denklem sisteminin matris formu görülmektedir. Harmonik değerinin 3'e kadar açıldığı durumda oluşacak matrisin genel formu, genel matris yapısının oluşumunun açıklanabilmesi amacıyla gösterilmiştir. Şekil 3.7'de görülen matris sistemi genel bir ifadeyle aşağıda gösterilen formdadır.

$$\mathbf{Kx = F} \tag{3.35}$$

Denklem (3.31) ile ifade edilen **K** matrisi, homojen manyetik vektör potansiyeli ifadesini oluşturan karakteristik katsayıların sınır koşullarından elde edilen baş katsayılarıdır. **K** matrisi katsayı matrisi olarak ifade edilmektedir. **x** matrisi ise, manyetik vektör potansiyelinin karakteristik katsayılarıdır, karakteristik katsayı matrisi olarak ifade edilmektedir. Çözümü aranan matris te **x** matrisidir. **F** matrisi ise, sınır koşulu denklemlerinde kaynak terimlerinin oluşturduğu matristir, kaynak matrisi olarak ifade edilmektedir.

Öncelikle Şekil 3.7'de çerçeve içerisinde gösterilen matris yapısını ele alalım. Bu çerçeve içerisindeki yapı, her bir sınır için 4 adet denklemi içeren temel yapıdır. Bölüm 3.3'te her bir sınır için 4 adet denklem oluştuğu açıklanmıştı. Bu çerçevede belirtilen yapının satır sayısı şekil üzerinde belirtildiği üzere sınır sayısının 4 katı olarak oluşur. Sütun sayısı ise her bir bölge için $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$ terimlerinin katsayılarını içereceği için, bölge sayısının 4 katı olarak oluşur.

Matrisin genel formunu ele alacak olursak, her bir harmonik değeri için farklı sınır koşulu denklemleri oluşacaktır ve dolayısıyla $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$ terimleri her bir harmonik için farklı katsayılara sahip olacaktır. Bu çerçevede, bahsedilen yapı her bir harmonik değeri için yeni bir sütun oluşturmaktadır. Harmonik değerlerinden oluşan np değeri ise, sınır koşulu denklemlerini oluşan np değerlerine göre artıracaktır. Buradan hareketle, genel matrisin satır sayısı açılan harmonik değerine karşılık oluşan maksimum np değerine kadar oluşacaktır.



Şekil 3.7 : Sınır koşulları uygulanarak elde edilecen denklem sisteminin genel görünümü.

Diğer bir ifadeyle, Şekil 3.7 üzerinde çerçeve içerisindeki matris yapısı oluşan maksimum np değerine kadar tekrarlanacaktır. Her np değeri için tüm sınırlar taranarak, oluşan np değerleri için o satırda sınır koşulu denklemine yazılacaktır. Diğer taraftan; her bir harmonik değeri için oluşan katsayı değerleri için ise, sütun sayısı harmonik değeri kadar tekrarlanacaktır.

Genel matris olarak ifade edilen **K** matrisinin son satırları ise; Bölüm 3.1'de açıklandığı üzere, çözümü aranan yapının en dıştaki sınırının Neumann veya Dirichlet tipindeki koşuluna göre 2 adet denklemden oluşmaktadır. Bu sınır koşulu eşitliği her harmonik değeri için uygulanmaktadır. Şekil 3.7'de görüldüğü üzere genel matrisin son satırları Neumann-Dirichlet tipi sınır koşullarından oluşmaktadır. Genel olarak; ele alınan yapıların en dış sınırı için uygulanan bu sınır koşulu, yapının iç sınırlarında da uygulanabilir. Bu amaçla, Şekil 3.7'de genel bir formda gösterilmiştir.

Bu koşullar altında; Şekil 3.7'den de görüldüğü üzere oluşan katsayı matrisinin satır sayısı ve kolon sayısı sırasıyla denklem (3.36) ve (3.37) ile ifade edilebilir.

$$KMSS = 4 * SS * \max(np) + 2 * \max(n) * SKS \quad \textbf{(3.36)}$$

$$KMKS = 4 * BS * \max(n) \quad \textbf{(3.37)}$$

Denklem (3.36)'da; $KMSS$ katsayı matrisi satır sayısını ifade etmektedir. SS ele alınan yapıdaki sınır sayısıdır, SKS Neumann veya Dirichlet olarak belirtilen sınır koşulları sayısıdır. $\max(np)$ açılan harmonik değerine karşılık oluşan maksimum np değeridir. $\max(n)$ ise açılan maksimum harmonik sayısıdır. Denklem (3.37)'de ise, $KMKS$ katsayı matrisi kolon sayısını ifade etmektedir. BS ise ele alınan yapının bölge sayısıdır.

x matrisi manyetik vektör potansiyelinin karakteristik katsayılarını her bölge ve her harmonik için içeren sütun matristir. Çözümü aranan matristir. Bu matrisin çözümü ile homojen manyetik vektör potansiyeli karakteristik katsayıları elde edilerek, homojen çözüm elde edilir. **x** matrisinin satır sayısı ise $KMKS$ ile eşit olacaktır. Kaynak terimlerinin içeren kaynak terimi matrisinin satır sayısı ise $KMSS$ ile eşit olacaktır.

Şekil 3.7'de kaynak terimi matrisinde belirtilen noktalar, manyetik akı yoğunluğu ve manyetik alan şiddeti denklemlerinden oluşan kaynak terimleri simgesel olarak ifade edilmiştir. Benzer şekilde Neumann-Dirichlet tipi sınır için dolu olarak gösterilen noktalar simgesel ifade edilmiştir, gerçekte tüm bu matris yapıları oldukça büyük bir formda oluşmaktadır.

3.4 Hazırlanan Analiz Programı ve Tanıtımı

Bölüm 3.4'de ele alınan bir yapıda oluşacak matris yapısının genel formu ifade edilmişti. Bu matris yapısının değişik yapılar için farklı şekilde oluşacağından bahsedilmişti. Şekil 3.7 ile gösterilen bu matris yapısı çok bölgeli yapılar için oldukça büyümekte ve bir bilgisayar programı temelinde çözümü zorunlu hale gelmektedir. Bütün farklı yapıların çözümünün elde edilebilmesi ve çok büyük yapılarda oluşacak matris sisteminin çözümlenebilmesi amacıyla MATLAB tabanında bir program tasarlamıştır.

Çizelge 3.2 : Oluşturulan veri dosyasının genel formu.

Bölge Numarası	Bölge Tipi	r_1	r_2	θ_1	θ_2	Kaynak Tipi	M	φ	μ_r
1									
2									
3									
4									
.									
.									
.									
Bölge Numarası	Komşu Bölge Sayısı	Komşu Bölgeler							
1									
2									
3									
4									
.									
.									
.									
Bölge Numarası	Sınır Numarası	Sınır Koşulu Tipi (N-D)							
1									
.									

Hazırlanan bu program çerçevesinde, öncelikle ele alınan yapıya özgün bir veri dosyası oluşturulmaktadır. Oluşturulan bu veri dosyası çözümü aranan yapının alt bölgeler ayrılmış yapısını programa tanıtan bir ara yüz görevi yapmaktadır. Alt bölgelere ayrılmış bir formda oluşturulan bu veri dosyası formatı Çizelge 3.2 ile gösterilmiştir.

Bu şekilde oluşturulan veri dosyası ile ele alınan yapı, hazırlanan program ile bölgeler arasındaki sınırların geometrileri çözümlenir. Elde edilen bu geometriler üzerinde manyetik akı yoğunluğunun normal bileşeni ve manyetik alan şiddetinin teğetsel bileşeni eşitlikleri uygulanarak, her bir sınır için denklemler elde edilir. Bu denklemler her harmonik ve her harmonik dağılımı çerçevesinde tekrarlanarak Şekil 3.7 ile ifade edilen denklem yapısı oluşturulur. Bu denklem yapısı hazırlanan program çerçevesinde lineer denklem sistemi olarak çözümlenir ve her bölge için tüm harmonik değerlerini içeren homojen manyetik vektör potansiyeli katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayı değerleri ile çözümü aranan yapı içerisindeki her bölgede homojen vektör potansiyeli denklemi uygulanarak manyetik akı dağılımı elde edilmektedir.

Bu program ile silindirik simetrik yapıdaki sabit mıknatıslı tüm yapıların manyetik analizinin gerçeklenmesi sağlanmaktadır.

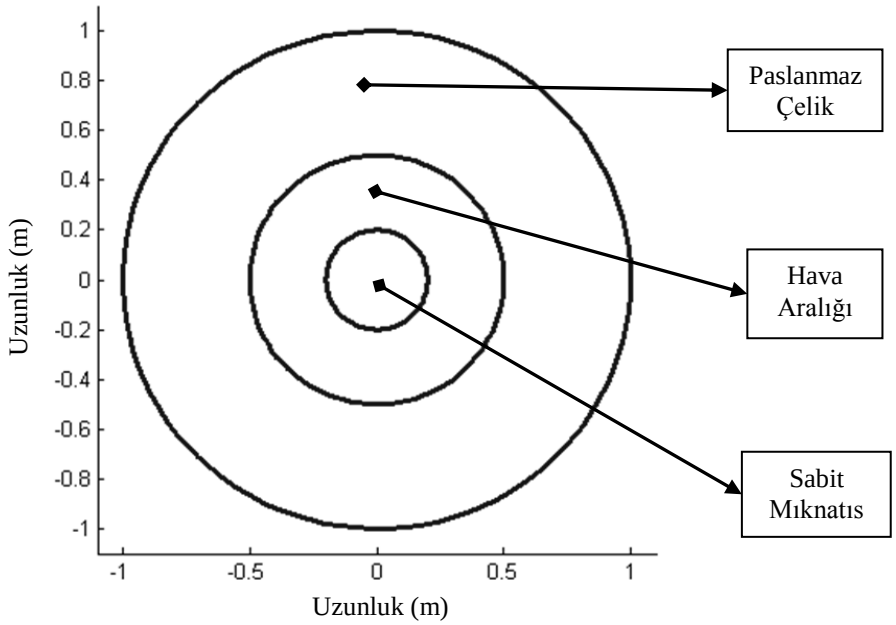
4. FOURİER YAKLAŞIM YÖNTEMİ SONUÇLARI VE KARŞILAŞTIRMALAR

Bu bölümde, oluşturulan manyetik analiz yönteminin doğruluğu gösterebilmek amacıyla elde edilen sonuçlar SEY çözümü sonuçları karşılaştırılacaktır. Bu amaçla farklı yapıdaki birçok farklı model ele alınmıştır. Manyetik analiz, içerisinde birçok niceliği barındıran genel bir kavramdır. Bu çerçevede, manyetik akı yoğunluğunun normal bileşeni ve manyetik akı eş potansiyel çizgileri temel alınarak yöntemin bu niceliklerin karşılaştırılması yapılacaktır. Dördüncü bölümün ilk alt başlığı altında paralel yönde mıknatıslanmaya sahip yapılar incelenecektir. İkinci alt başlık altında ise yarıçap yönünde mıknatıslanmış yapılar ele alınacaktır.

4.1 Paralel Yönde Mıknatıslanmış Sabit Mıknatıs İçeren Yapıların İncelenmesi

4.1.1 Çember geometrisinde sabit mıknatıs içeren örnek yapı için elde edilen sonuçlar

Basit bir yapıya sahip Şekil 4.1 ile gösterilen üç bölgeli yapı ele alınmaktadır.



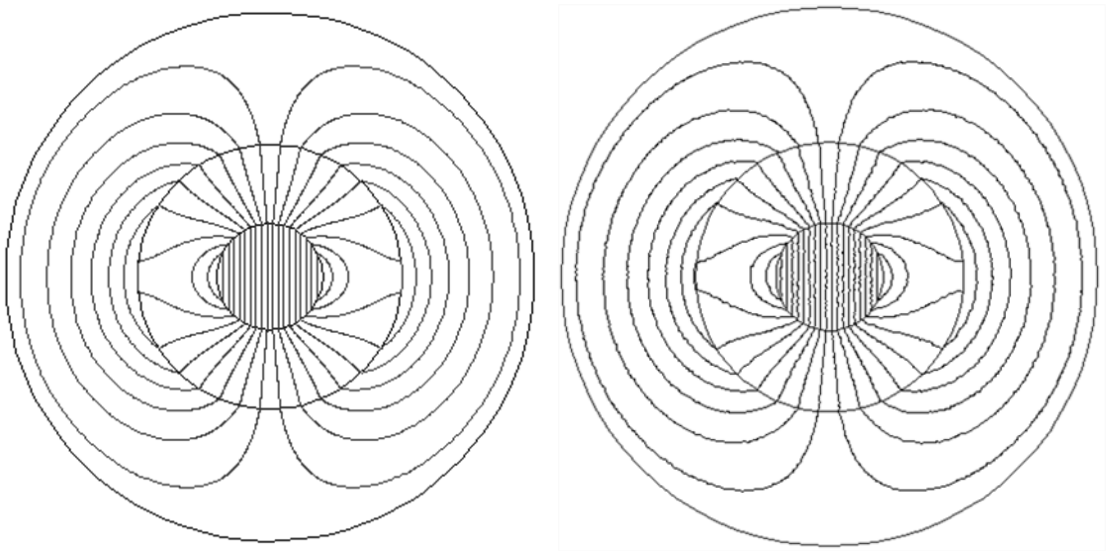
Şekil 4.1 : Örnek üç bölgeli yapının görünümü.

Bu üç bölgeli yapı; Şekil 4.1'de görüleceği üzere en içteki yapı sabit mıknatıs, ara bir bölge olarak hava aralığı ve en dışta ise yüksek manyetik geçirgenliğe sahip bölgelerden oluşmaktadır. Bu yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri ise Çizelge 4.1 ile gösterilmiştir.

Çizelge 4.1 : Örnek üç bölgeli makineyi oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri.

Parametre	
Sabit mıknatıs yarıçapı	0.2 m
Sabit mıknatıs bağıl geçirgenliği	μ_r=1.045
Sabit mıknatıs zorlayıcı manyetik alanı	883310 A/m
Sabit mıknatıs mıknatıslanma yönü	90°
Hava aralığı dış yarıçapı	0.5 m
Hava aralığı bağıl geçirgenliği	μ_r=1
Paslanmaz çelik dış yarıçapı	1 m
Paslanmaz çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=500
Dış sınır koşulu	Dirichlet

Çizelge 4.1 ile sahip olduğu bölgelerin fiziksel değerleri gösterilen bu yapı içerisinde, SEY ve oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile elde edilen manyetik akı dağılımları gösterilmiştir. Şekil 4.2'den görüleceği üzere manyetik akı dağılımları her iki yöntem çözümüyle oldukça benzer şekilde elde edilmiştir.



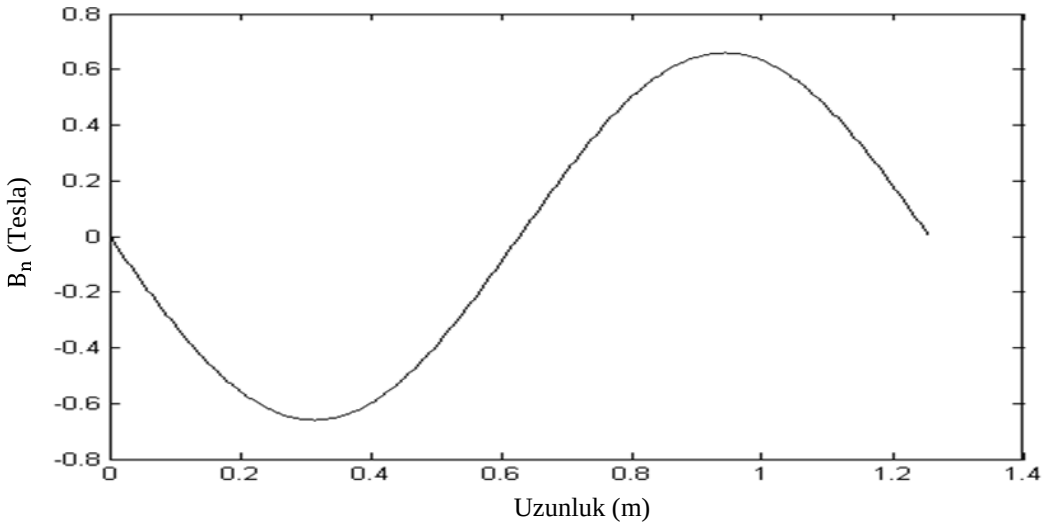
(a) **(b)**

Şekil 4.2 : Örnek üç bölgeli yapının çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

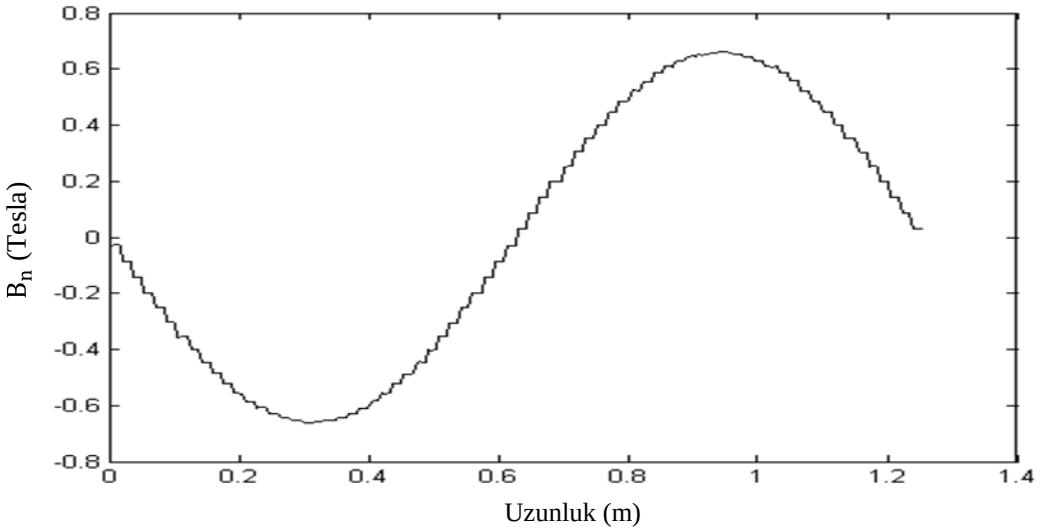
Çizelge 4.1'de, yapının en dış sınır koşulu Dirichlet tipi olarak belirtilmişti. Dirichlet tipi sınır koşulu ise; oluşturulan manyetik analiz yöntemi prensibinde, manyetik vektör potansiyelinin sıfır olması olarak ele alınmaktaydı. Şekil 4.2'de görüleceği

üzere akı çizgileri en dış sınırdan geçmemektedir ve Dirichlet sınır koşulu bu sınır üzerinde sağlanmaktadır.

Şekil 4.2 ile elde edilen manyetik akı dağılımı çözümlerine ek olarak; manyetik akı yoğunluğunun normal bileşeni değerleri karşılaştırılarak, oluşturulan manyetik analiz yöntemiyle elde edilen sonuçların doğruluğu hakkında daha net bir kanıya varılabilir. Şekil 4.1'de gösterilen yapıda, hava aralığı ile sabit mıknatıs arasındaki sınırı üzerinde, manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi Şekil 4.3'te verilmiştir.



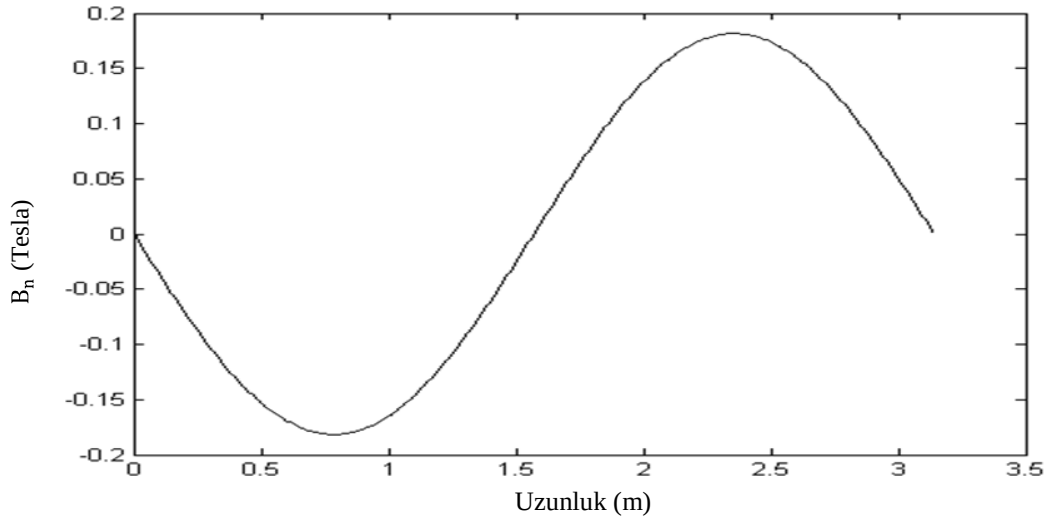
(a)



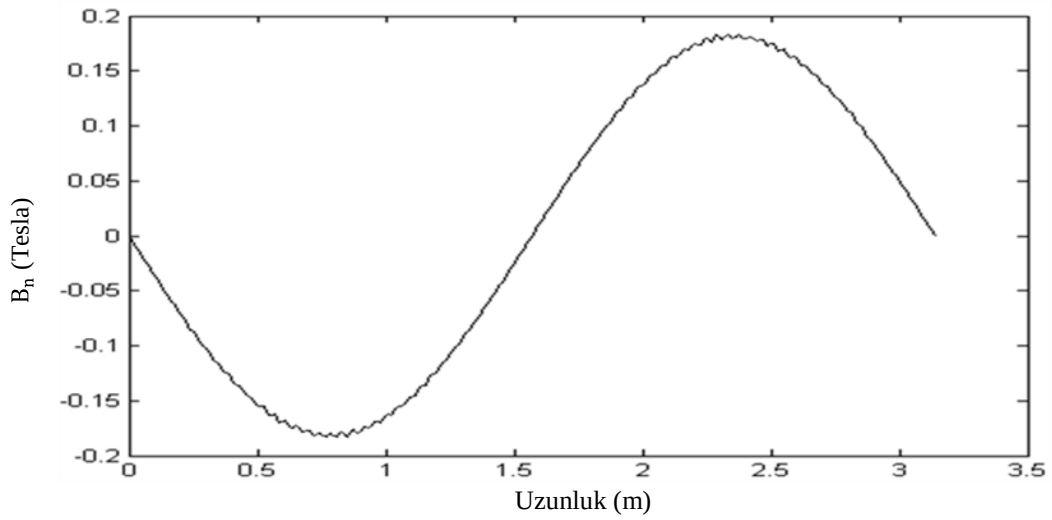
(b)

Şekil 4.3 : Hava aralığı - sabit mıknatıs sınırı üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

Şekil 4.3'te gösterildiği üzere hava aralığı ile sabit mıknatıs arasındaki sınırda manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenleri benzer değerlerde elde edilmiştir. Hava aralığı ile paslanmaz çelik bölge arasındaki sınır üzerindeki manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerleri ise Şekil 4.4 ile gösterilmiştir. Şekil 4.4 (a) ile oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ve Şekil 4.4 (b) ile ise SEY çözümü gösterilmiştir.



(a)

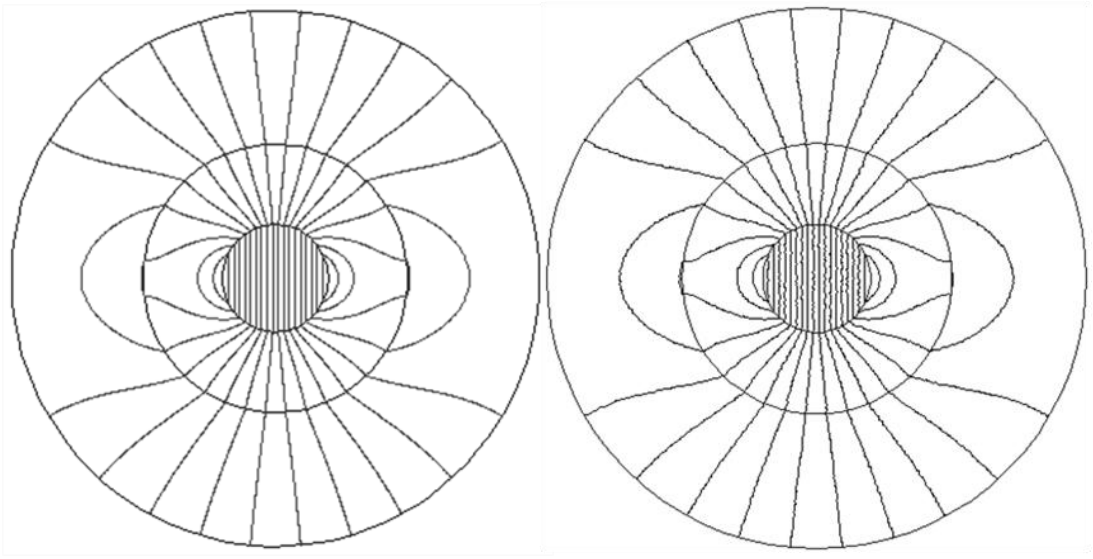


(b)

Şekil 4.4 : Hava aralığı – paslanmaz çelik sınırında manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerlerinin değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

Şekil 4.4'de gösterilen oluşturulan manyetik analiz yöntemi ve SEY çözümü oldukça benzer elde edilmiştir.

Şekil 4.2 – 4.4 ile gösterildiği üzere SEY ile oluşturulan manyetik analiz yöntemi sonuçları ile SEY sonuçları oldukça yakın değerlerde elde edilmiştir. Bu sonuçlar, en dış sınırın Dirichlet tipi sınır koşuluna sahip olmasıyla elde edilmişti. Aynı yapı üzerinde; en dış sınır koşulu Neumann tipi olarak ele alınarak, manyetik akı dağılımı ve manyetik akı yoğunluğu bileşenleri elde edilebilir. Böylece oluşturulan manyetik analiz yönteminin doğruluğu hakkında bir veri daha elde edilebilir. Bu çerçevede çözümü elde edilecek yapı, Çizelge 4.1 ile ifade edilen yapıdan farklı olarak sadece en dış sınır tipi Neumann olarak ele alınmaktadır.

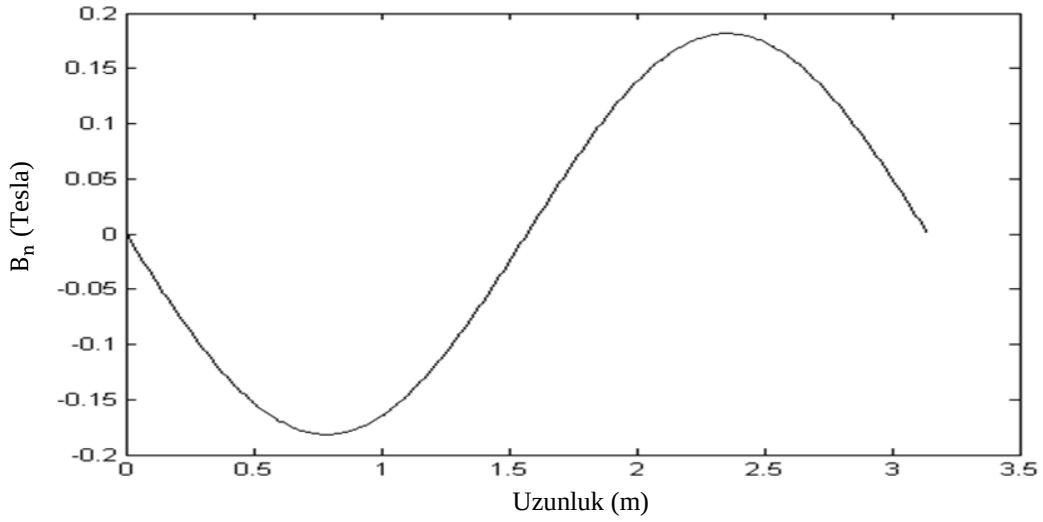


(a) **(b)**

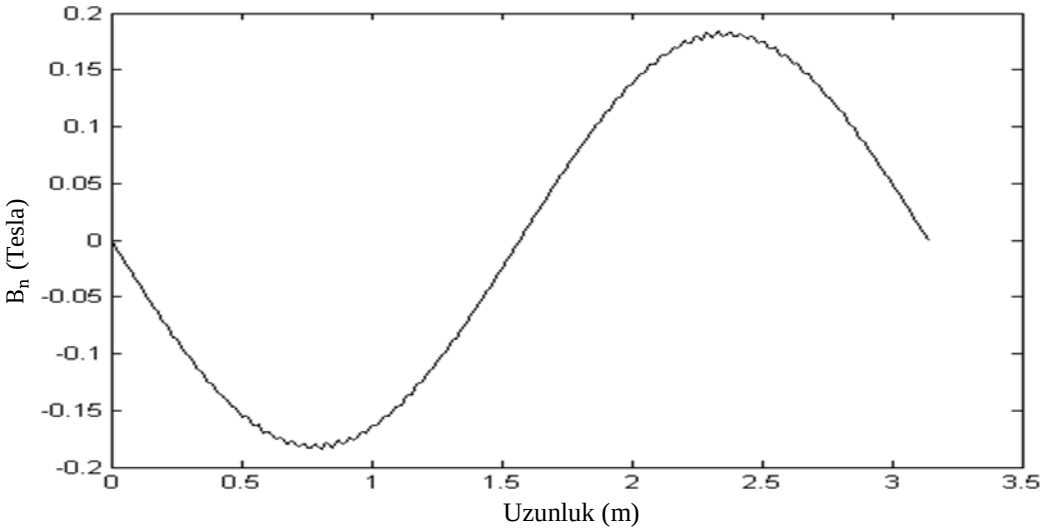
Şekil 4.5 : Örnek üç bölgeli en dış sınır koşulu Neumann tipi olarak ele alınan yapının çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

Şekil 4.5 ile görüldüğü üzere manyetik akı dağılımı en dış sınır koşulu Neumann tipi olarak ele alındığında manyetik akı dağılımları her iki analiz yöntemiyle benzer şekilde oluşmaktadır. Neumann sınır koşulu, manyetik vektör potansiyelinin normal yönündeki türevinin sıfır değerini alması durumuydu. En dış sınır koşulu Neumann olarak belirtilen üç bölgeli yapıda, manyetik akı çizgileri incelendiğinde en dış sınır üzerinde dik olarak oluştuğu görülmektedir. Neumann sınır koşulu tanımından, akının sınır üzerinde doğru bir dağılıma sahip olduğu söylenebilir.

Şekil 4.4'de gösterilen en dış sınır koşulu Dirichlet olarak incelenen yapıda, hava aralığı ile paslanmaz çelik arasındaki sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerleri elde edilmişti. Aynı yapının en dış sınırı Neumann tipi alınırsa, manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi Şekil 4.6'da elde edilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 4.6 : Hava aralığı – paslanmaz çelik bölge sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

Şekil 4.6'da görülen manyetik akı yoğunluğu normal bileşenleri SEY ve oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümleri ile oldukça yakın değerlerde elde edilmiştir.

4.1.2 Halka geometrisinde sabit mıknatıs içeren üç bölgeli örnek yapı için elde edilen sonuçlar

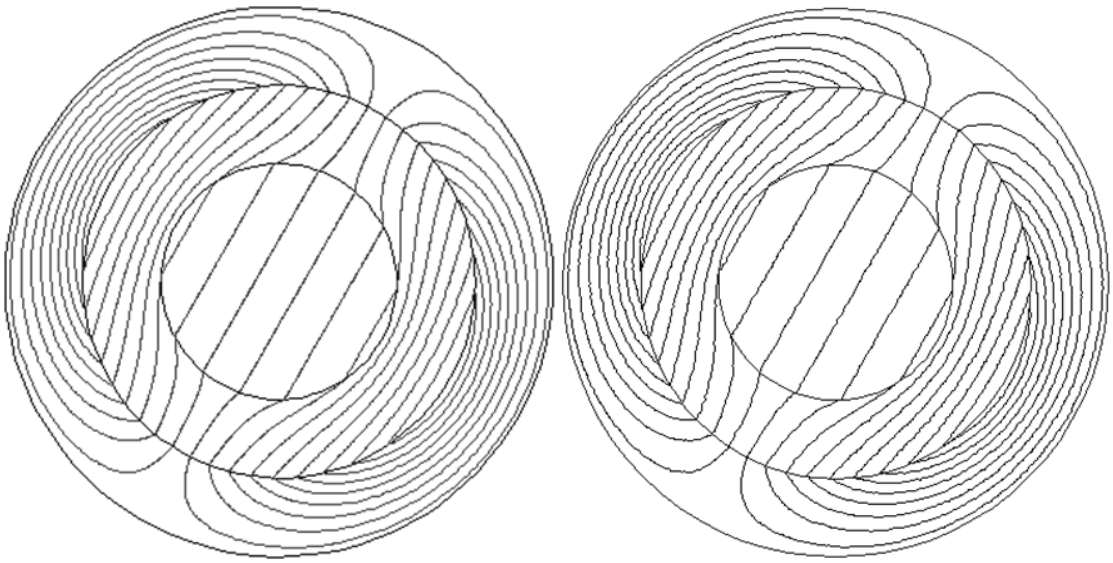
Şekil 4.1 ile incelenen yapı; hava aralığı ve sabit mıknatıs içeren bölgeler değiştirilerek elde edilen, yine üç bölgeden oluşan bir yapı ele alınsın. Elde edilen bu yeni yapı için, manyetik akı dağılımları ve manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni

değerleri incelenecektir. Sabit mıknatıs yapısının halka geometrisine sahip olduğu böyle bir yapıdaki sonuçların gösterilecektir. Bağıl geçirgenlik, bölge geometrileri ve mıknatıslanma yönü önceki yapıya göre farklı değerlerde belirlenmiştir.

Çizelge 4.2 : Örnek yeni üç bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri.

Parametre	
Hava aralığı dış yarıçapı	0.3 m
Hava aralığı bağıl geçirgenliği	μ_r=1
Sabit mıknatıs dış yarıçapı	0.5 m
Sabit mıknatıs bağıl geçirgenliği	μ_r=1.045
Sabit mıknatıs zorlayıcı manyetik alanı	883310 A/m
Sabit mıknatıs mıknatıslanma yönü	60°
Paslanmaz çelik dış yarıçapı	0.7 m
Paslanmaz çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=700
Dış sınır koşulu	Dirichlet

Çizelge 4.2 ile oluşturulan bu benzer yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel özellikleri gösterilmiştir.



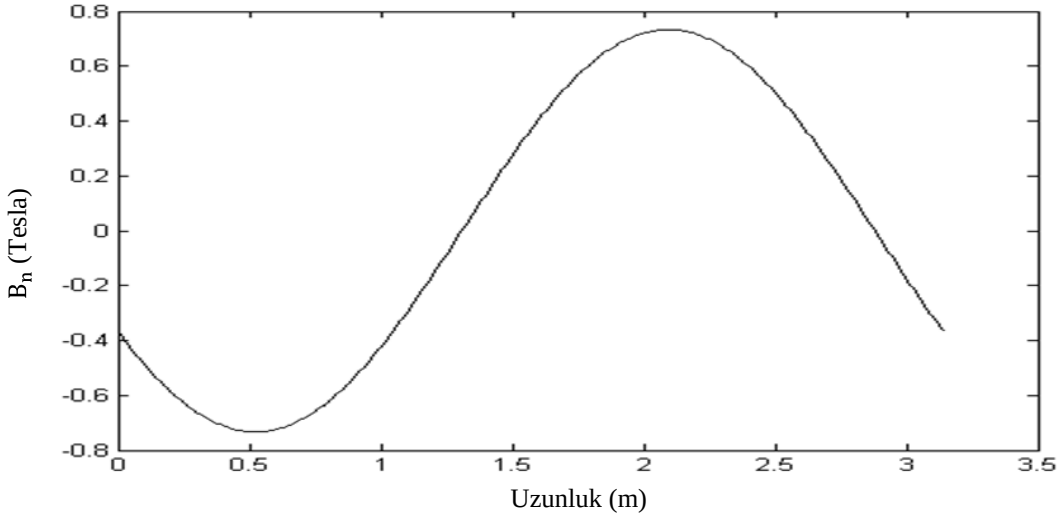
(a) **(b)**

Şekil 4.7 : Örnek yedi bölgeli yapının çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

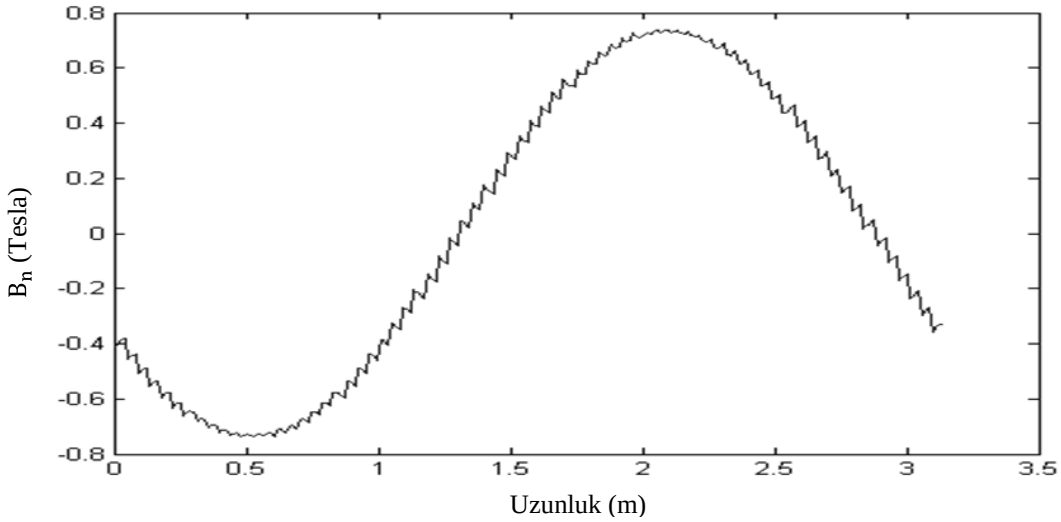
Çizelge 4.2 ile gösterilen değerlere sahip bu yapı içerisindeki manyetik akı dağılımı Şekil 4.7 ile gösterilmiştir. Görüleceği üzere manyetik akı dağılımları oldukça benzer şekilde elde edilmiştir.

Şekil 4.7 ile elde edilen manyetik akı dağılımı sonuçlarına ek olarak; manyetik akı yoğunluğu normal bileşenleri değerleri karşılaştırılarak elde edilen sonuçların

doğruluğu hakkında bir veri daha elde edilecektir. Bu çerçevede; sabit mıknatıs yapısının, paslanmaz çelik yapısına bitişik sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerleri Şekil 4.8 ile gösterilmiştir.



(a)



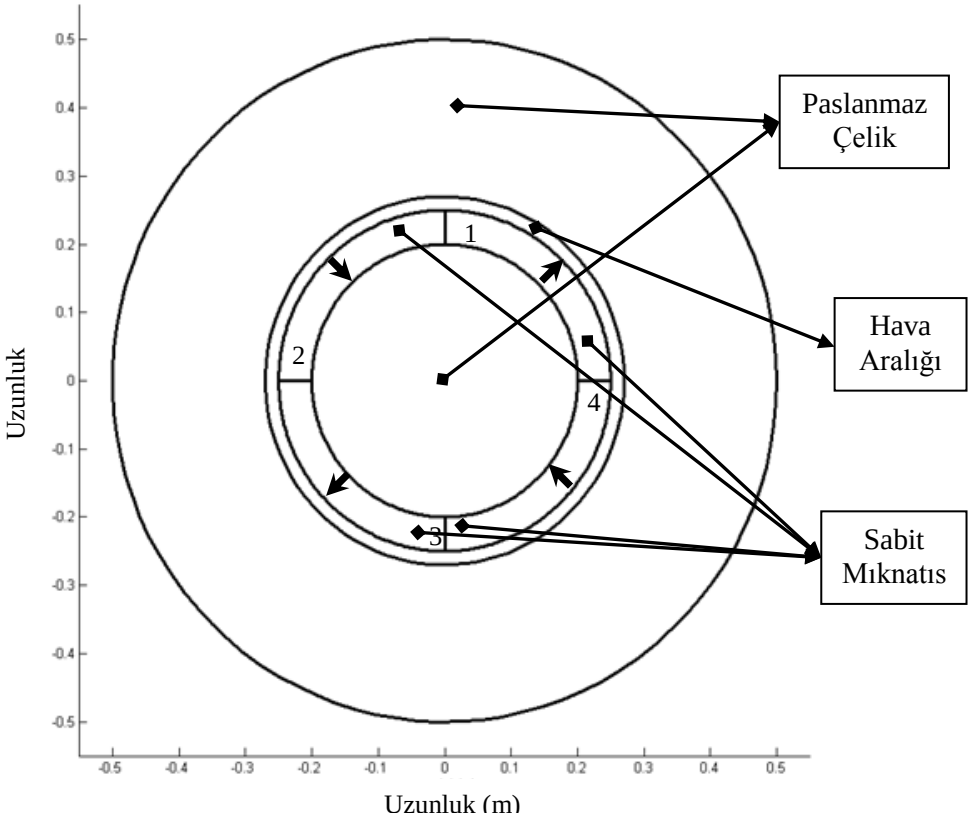
(b)

Şekil 4.8 : Sabit mıknatıs – paslanmaz çelik bölge sınırında hesaplanan manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü. **(b)** SEY çözümü.

Görüldüğü üzere sabit mıknatıs ile paslanmaz çelik yapı arasındaki sınırda manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerleri oldukça benzerdir. Halka şeklindeki bir kalıcı mıknatıs yapısı için de manyetik akı dağılımı ve manyetik akı yoğunluk vektörünü bileşenlerinin, oldukça yakın değerlerde oluştuğu görülmektedir.

4.1.3 Kutup arkı geometrisinde sabit mıknatıs içeren örnek yapı için elde edilen sonuçlar

Şekil 4.9'da görülen yedi bölgeye sahip bir yapı ele alınmaktadır. Bu örnek yapı paralel yönde mıknatıslanmış iki kutup çiftinden oluşan sabit mıknatıs içermektedir. Mıknatısların, mıknatıslanma yönü şekil üzerinde belirtilmiştir. Sabit mıknatısların her biri numaralandırılarak şekil üzerinde gösterilmiştir.



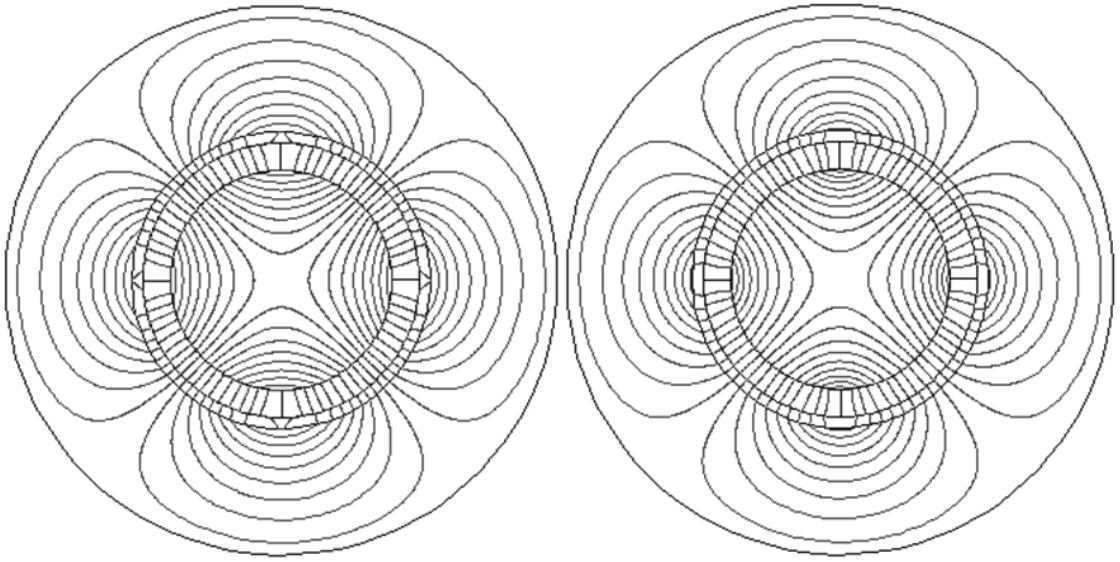
Şekil 4.9 : Örnek 3 bölgeli yapının görünümü.

Bu yapıyı oluşturan bölgelere ait fiziksel özellikler Çizelge 4.3 ile gösterilmiştir.

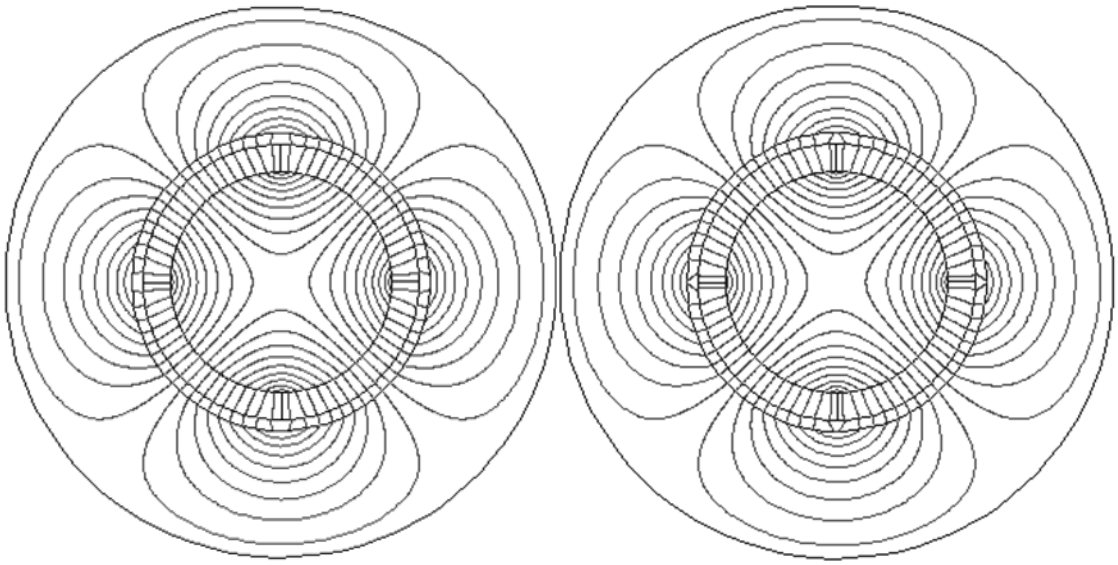
Çizelge 4.3 : Örnek yedi bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri.

Parametre	
İçerideki paslanmaz çelik bölge yarıçapı	0.2 m
Sabit mıknatıs dış yarıçapı	0.25 m
Sabit mıknatıs bağıl geçirgenliği	μ_r=1.045
Sabit mıknatıs zorlayıcı manyetik alanı	883310 A/m
Sabit mıknatıs mıknatıslanma yönleri(numara sırasıyla)	45°-315°-225°-135°
Hava aralığı dış yarıçapı	0.27
Hava aralığı bağıl geçirgenliği	μ_r=1
Dışarıdaki paslanmaz çelik bölge dış yarıçapı	0.5 m
Paslanmaz çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=500
Dış sınır koşulu	Dirichlet

Şekil 4.10 ile bu yapı üzerinde oluşan manyetik akı dağılımının oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile elde edilen sonuçları gösterilmiştir. Şekil 4.10 (a) harmonik sayısı 5 değerine kadar açıldığında, Şekil 4.10 (b) harmonik sayısı 10 değerine kadar açıldığında elde edilen sonuçları göstermektedir. Şekil 4.10 (c) ve Şekil 4.10 (d) ise sırasıyla harmonik sayısı sırasıyla 20 ve 30 değerine kadar açıldığında elde edilen sonuçları göstermektedir.



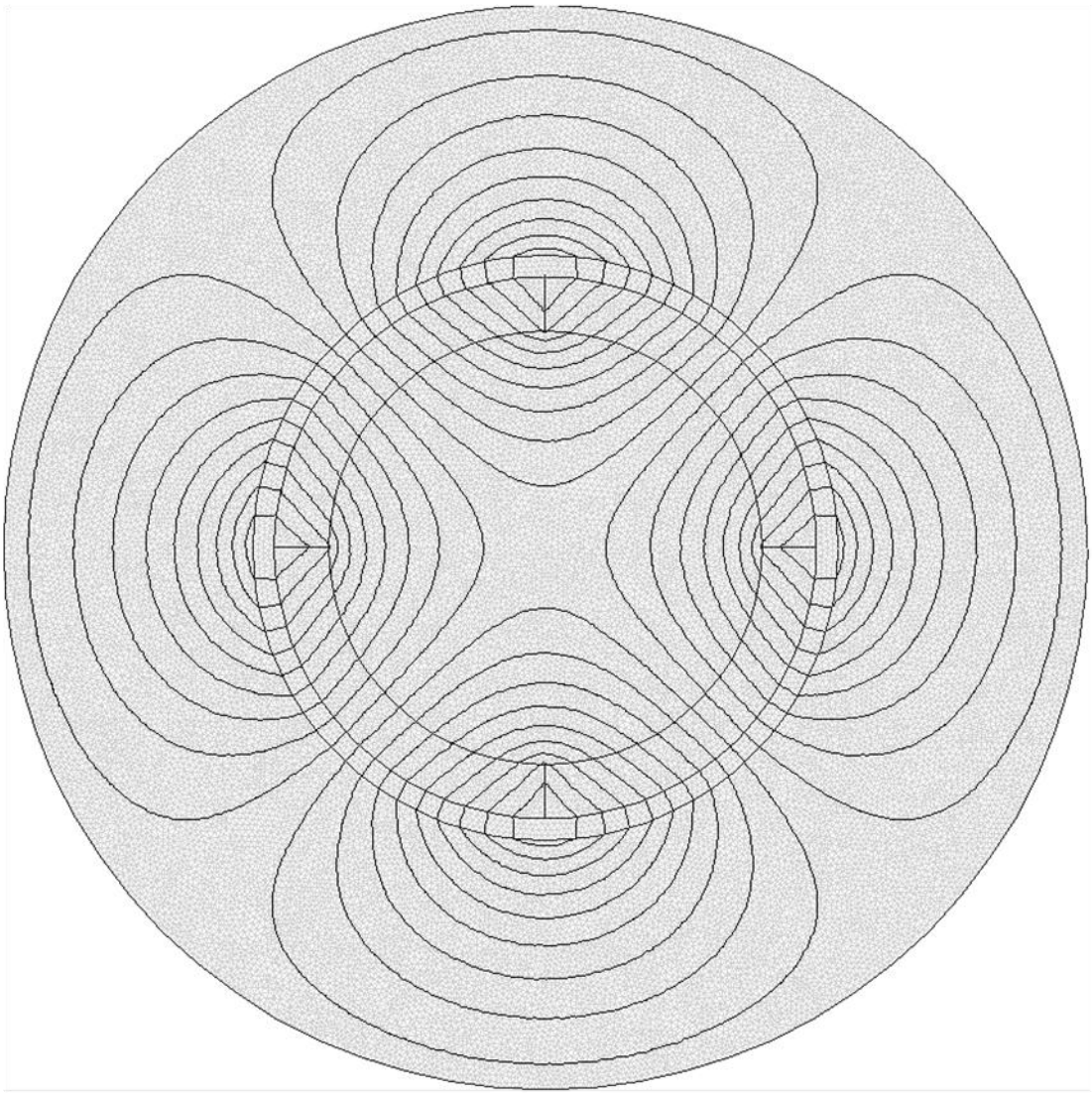
(a) **(b)**



(c) **(d)**

Şekil 4.10 : Örnek yedi bölgeli yapı için oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Harmonik değeri 10 için oluşan dağılım. **c)** Harmonik değeri 20 için oluşan dağılım. **(d)** Harmonik değeri 30 için oluşan dağılım.

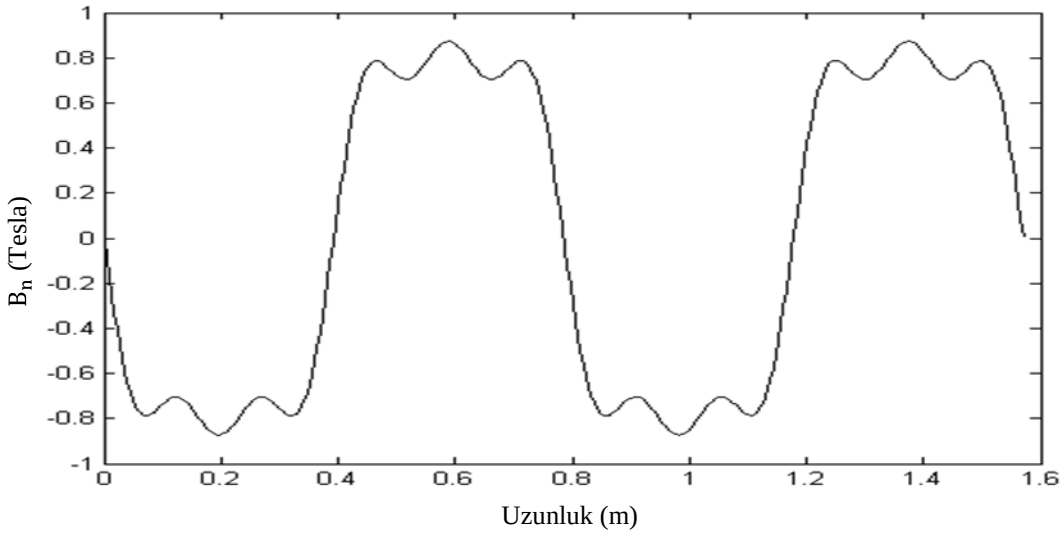
Şekil 4.11, aynı problemin SEY çözümünü göstermektedir. Her iki yöntem için elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında, harmonik sayısı 20 değerine kadar açıldığında manyetik akı dağılımının SEY çözümüne yakınsadığı görülmektedir. Yapılan modellemelerde kaynak terimleri Fourier yaklaşımıyla oluşturulmuştu. Bu çerçevede; yüksek harmonik değeri manyetik akı dağılımının gerçek çözüme yakınsaması beklenen bir sonuçtur.



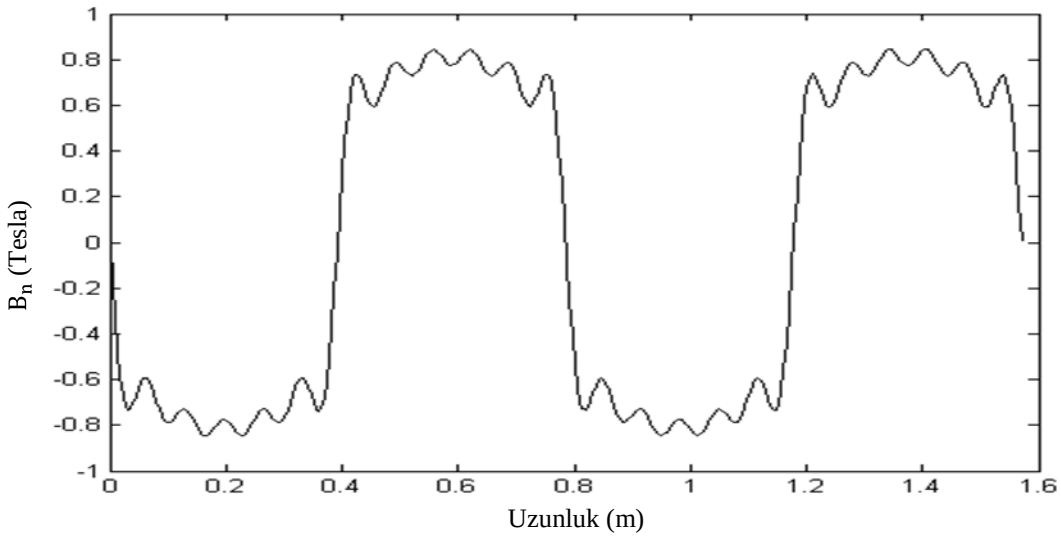
Şekil 4.11 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış örnek yedi bölgeli yapı için oluşan SE ağının ve SEY çözümü ile oluşan manyetik akı dağılımının görünümü.

Şekil 4.10 – 4.11 incelendiğinde sabit mıknatıs kutupları arasındaki sınırlarda SEY ve oluşturulan manyetik analiz yöntemi sonuçları arasında bir farklılık görülmektedir. Bu farklılığın temel sebebi, harmonik yaklaşımıyla oluşturulan kaynak terimlerinin düz çizgi sınır olan bu sınırlar üzerindeki Dirac fonksiyonunun etkisini içermemesidir. Paralel mıknatıslanış bir kutup arkı yapısı için elde edilen

kaynak terimi, düz çizgi üzerinde oluşan yüzey akım yoğunluğu içerecek şekilde modellenmemiştir. Bu modelleme eksikliği manyetik akı bahsedilen sınırlarda yakın noktalarda manyetik akı üzerinde bir bozulmaya sebep olmaktadır. Bu etki kaynak terimin Dirac fonksiyonu etkisini içerecek şekilde modellenmesiyle giderilebilir. Fakat bu çalışma bu modellemeyi içermemektedir. Bu bozulma haricinde ise manyetik akı dağılımı, SEY çözümüne oldukça yakın bir şekilde oluşmuştur. Sabit mıknatıs yapısı içerisinde, manyetik akı çizgilerinin paralel olarak oluştuğu görülmektedir.



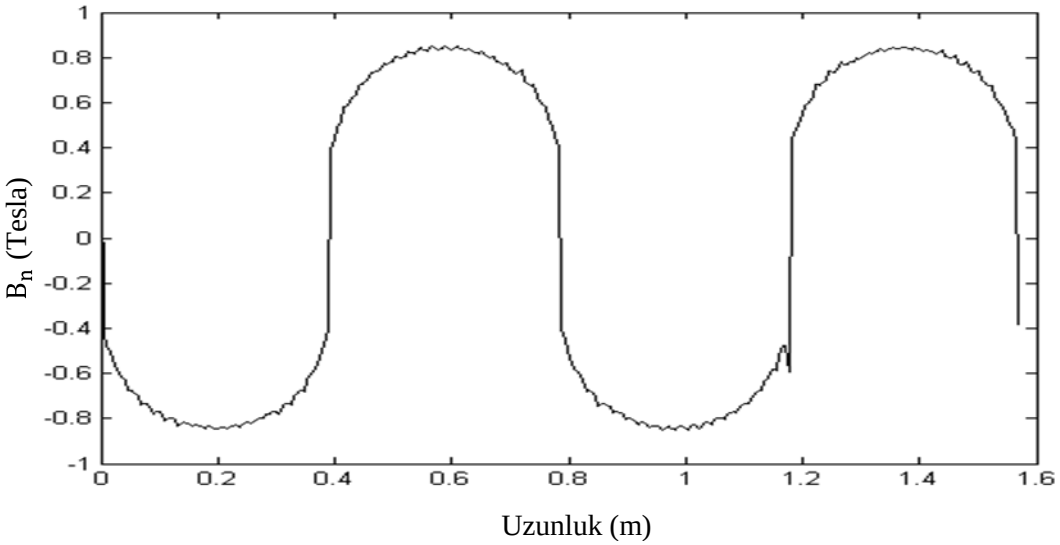
(a)



(b)

Şekil 4.12 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında oluşturulan manyetik analiz yöntemiyle elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 10 için oluşan çözüm. **(b)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm.

Şekil 4.12 ile ise hava aralığı ile sabit mıknatıs yapısı arasındaki sınır üzerinde, oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü gösterilmektedir. Şekil 4.12 (a) harmonik değeri 10 için ve Şekil 4.18 (b) ise harmonik değeri 20 için elde edilen sonuçları göstermektedir.



Şekil 4.13 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında SEY ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü.

Şekil 4.13 ise aynı sınır üzerinde SEY ile elde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimini göstermektedir. Şekil 4.13 göz önünde bulundurulduğunda her iki yöntem için elde edilen sonuçların oldukça yakın olduğu görülmektedir. Harmonik değeri arttırıldıkça oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile elde edilen çözümün SEY çözümüne yaklaştığı görülmektedir. Fourier serisi yaklaşımıyla oluşturulan yöntemde çözümün harmonik değeri arttırıldıkça gerçek değere yakınsaması beklenmektedir.

Oluşturulan manyetik analiz yönteminde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerinin bir dalgalanma gösterdiği görülmektedir ve bahsedildiği üzere yine Fourier yaklaşımından kaynaklanmaktadır. Çok yüksek harmonik değeri alınarak yapılacak çözümlerde bu dalgalanma azalarak, SEY çözümüne daha fazla yaklaşacaktır. Şekil 4.12'de de görüldüğü üzere; harmonik sayısı arttırıldıkça, manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi SEY çözümüne yaklaşmaktadır.

Ele alınan bu yedi bölgeli 4 kutuplu paralel mıknatıslanmış yapıda oluşan manyetik akı dağılımı simetriktir. Bu simetriyi sağlayan etken ise mıknatıslanma yönleridir. Örnek yapıda belirtilen mıknatıslanma yönleri, sabit mıknatıslar üzerinde akı

dağılımının yarıçap yönündeki mıknatıslanmada olduğu gibi simetrik bir yapıda oluşmasını sağlamaktadır. Fakat bu simetriyi sağlayamayan mıknatıslanma yönlerine sahip yapılarda çözüm elde edilememektedir.

Bölüm 2.6.1'de, manyetik vektör potansiyeli ifadesi sabit mıknatıslı yapıları içerecek şekilde elde edilmişti. Fakat bu formül bir kutup çifti altında bir tam sinüs ve kosinüs terimi içerecek yapılar için geçerlidir. Paralel mıknatıslanmış bir kutup çifti, bu simetriyi sağlamayan mıknatıslanma yönlerine sahip kutuplardan oluşuyorsa belirtilen manyetik vektör potansiyeli ifadesi geçerliliğini yitirmektedir. Manyetik vektör potansiyeli ifadesi, farklı yönlerde mıknatıslanan kutup çiftlerini de içerecek şekilde düzenlenerek yöntem geliştirilebilir. Fakat bu çalışma, simetriyi bozan yapılara çözüm sağlamamaktadır.

4.2 Yarıçap Yönünde Mıknatıslanmış Sabit Mıknatıs İçeren Yapıların İncelenmesi

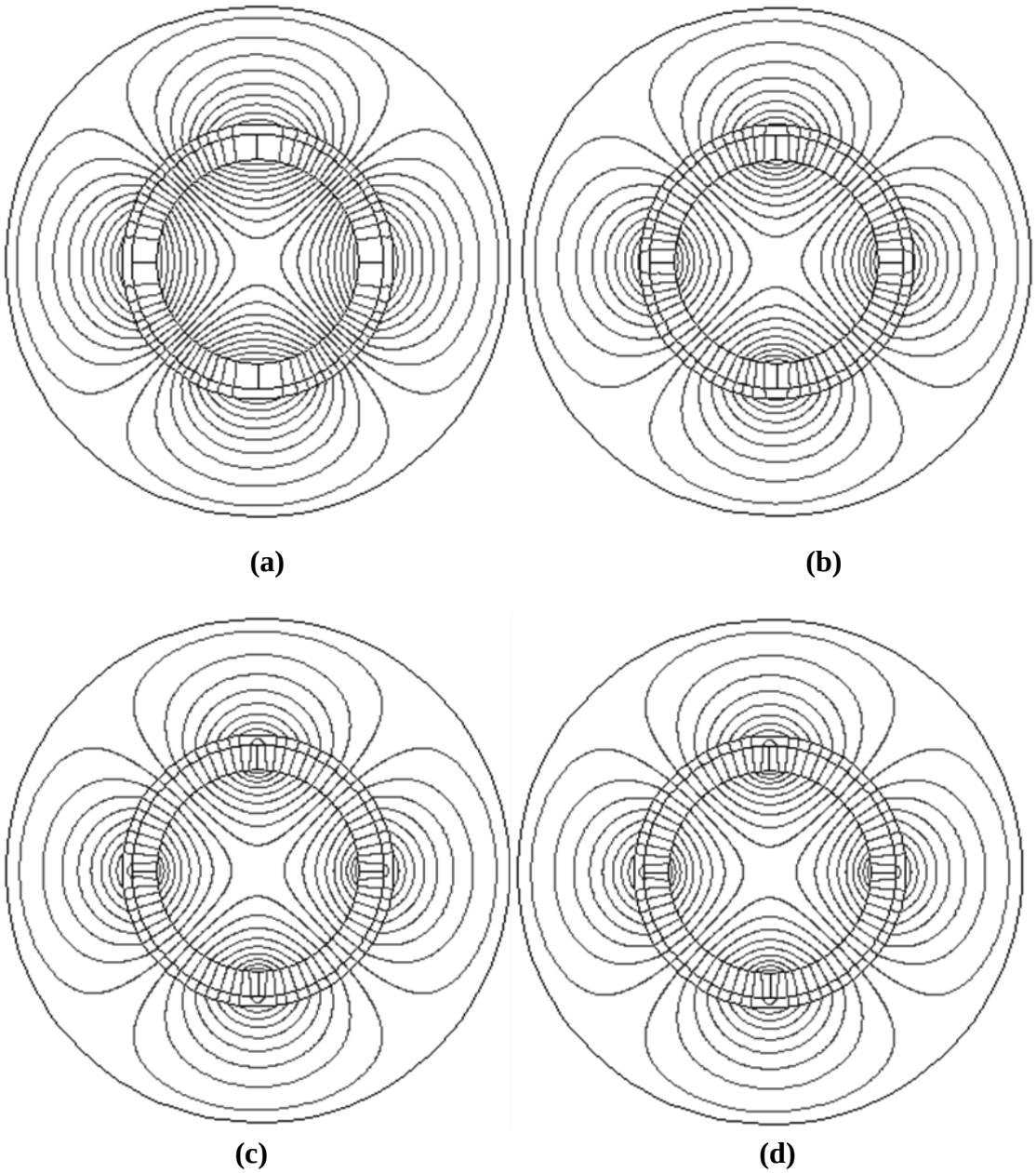
Çember ve halka geometrisinde yarıçap yönünde mıknatıslanmaya sahip sabit mıknatıs yapılarının fiziksel olarak gerçeklenemeyeceğinden bahsedilmişti. Bu temelde; örnek olarak incelenecek yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs içeren tüm yapılar, kutup arkı geometrisine sahip sabit mıknatıslar içermektedir. Bu yapılar içine de elde edilecek sonuçlar ile yöntemin doğruluğu gösterilmek istenmektedir.

4.2.1 Kutup arkı geometrisinde sabit mıknatıs içeren yedi örnek yapı için elde edilen sonuçlar

Şekil 4.9'da, incelenen örnek yapı sabit mıknatısların yarıçap yönünde mıknatıslandığı ele alınarak oluşturulan yeni bir örnek yapı için manyetik analiz sonuçları elde edilecektir. Mıknatıslanma yönleri Şekil 4.9'da ve bölgelerin fiziksel özellikleri ise önceki yapı ile tamamen aynıdır ve Çizelge 4.3 ile belirtildiği gibidir.

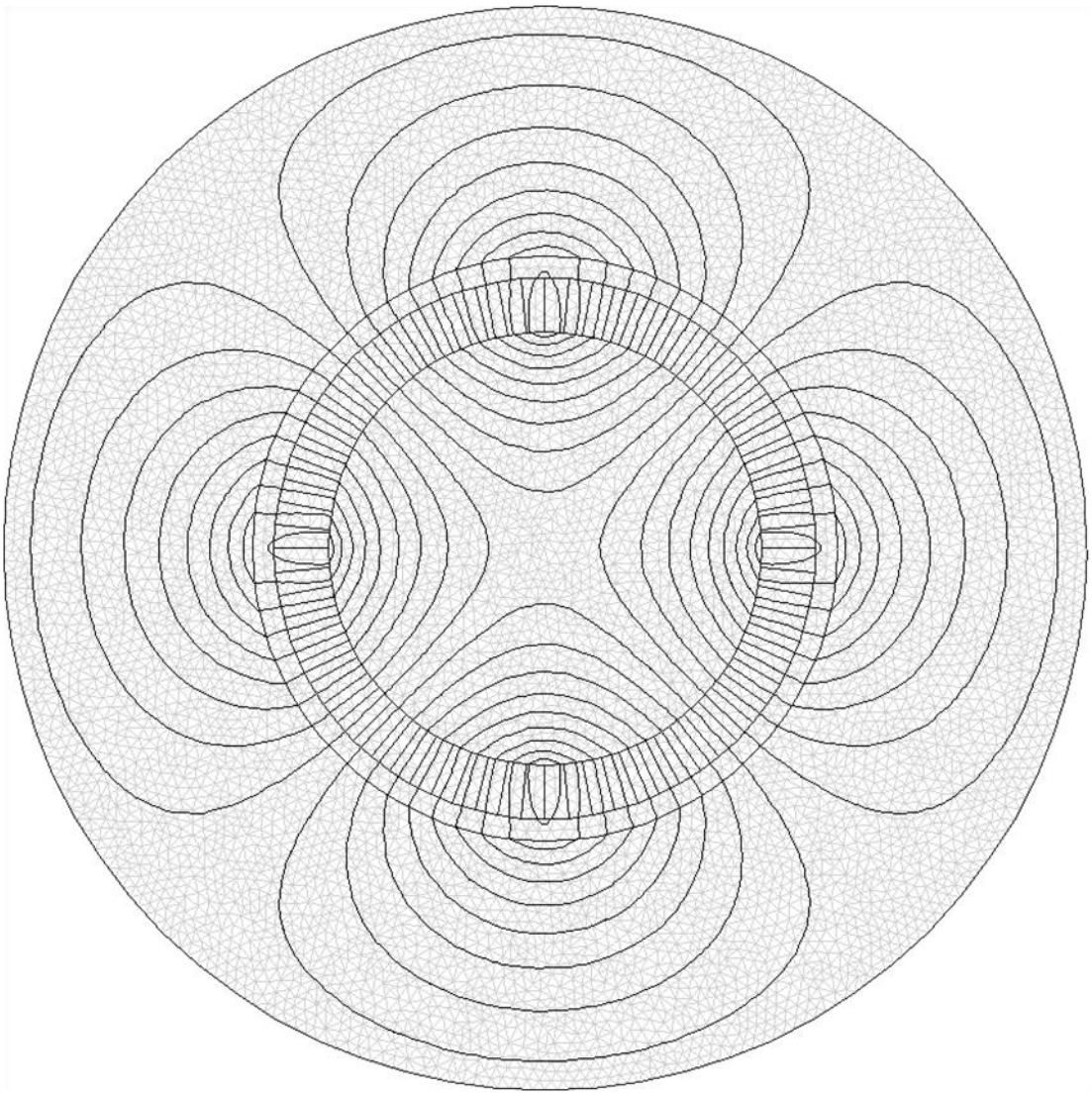
Çizelge 4.3 ile fiziksel özellikleri gösterilen, Şekil 4.9'da gösterilen bu yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıslar içeren örnek yapı için manyetik akı ve manyetik akı yoğunluğu normal bileşenleri oluşturulan manyetik analiz yöntemi ve SEY çözümleri ile elde edilerek karşılaştırılacaktır. Şekil 4.14 (a) harmonik sayısı 5 değerine kadar açıldığında, Şekil 4.14 (b) harmonik sayısı 10 değerine kadar açıldığında elde edilen sonuçları göstermektedir. Şekil 4.14 (c) ve Şekil 4.14 (d) ise

sırasıyla harmonik sayısı sırasıyla 20 ve 30 değerine kadar açıldığında elde edilen sonuçları göstermektedir. Şekil 4.15 ise aynı problemin SEY çözümünü göstermektedir.



Şekil 4.14 : Örnek yedi bölgeli yapı için oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ile elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Harmonik değeri 10 için oluşan dağılım. **c)** Harmonik değeri 20 için oluşan dağılım. **(d)** Harmonik değeri 30 için oluşan dağılım.

Her iki yöntem için elde edilen sonuçlar göz önüne alındığında, oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümünün harmonik değeri 20 değerine kadar açıldığında SEY çözümüne yakınsadığı görülmektedir.

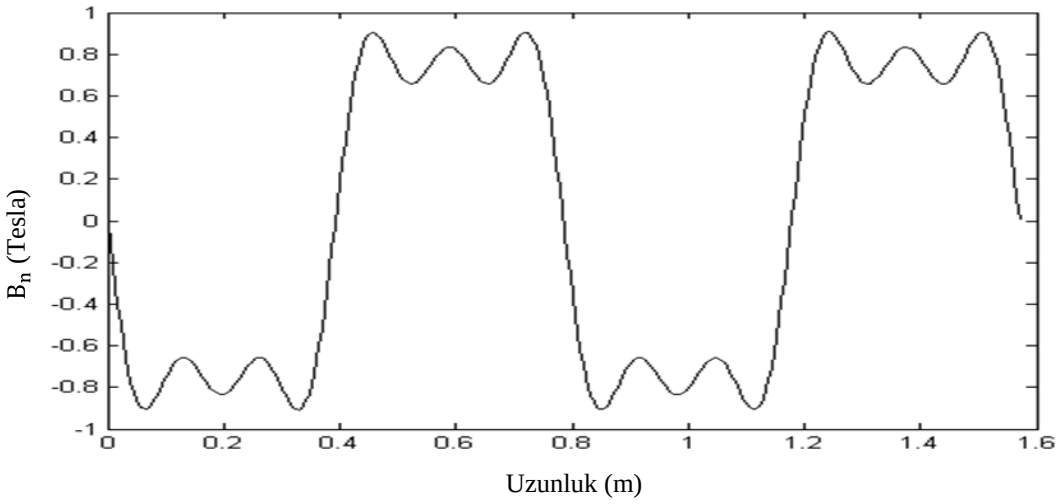


Şekil 4.15 : Yarıçap yönünde mıknatıslanmış örnek yedi bölgeli yapı için oluşturulan SE ağı ve SEY çözümü ile oluşan manyetik akı dağılımı.

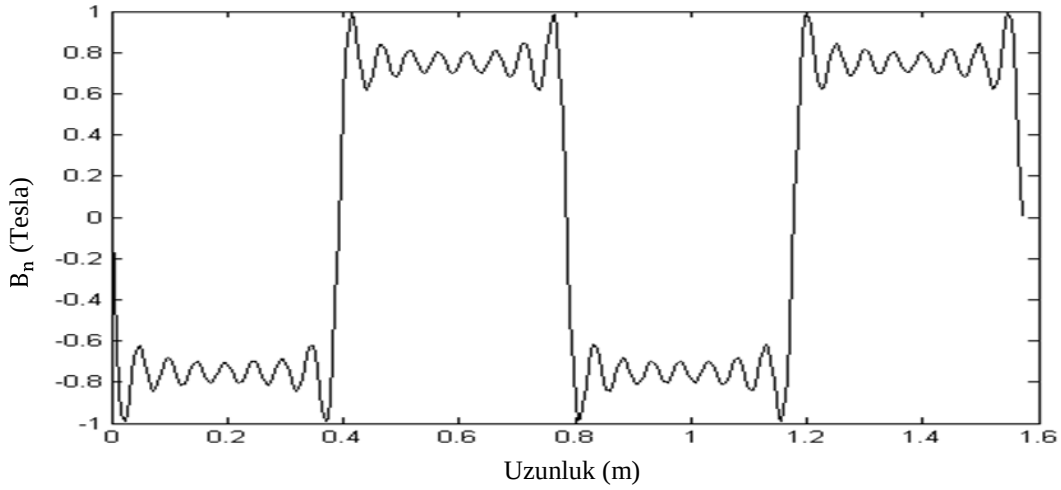
Oluşturulan manyetik analiz yönteminin, harmonik temelinde oluşturulduğundan bahsedilmişti. Yapılan modellemeler ve sınırlar üzerindeki eşitlikler için elde edilen kaynak terimleri Fourier yaklaşımıyla oluşturulmuştu. Bu çerçevede; harmonik değeri arttırıldıkça manyetik akı dağılımının gerçek çözüme yakınsaması beklenen bir sonuçtur.

Şekil 4.16'da hava aralığı ile sabit mıknatıs yapısı arasındaki sınır üzerinde, oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü gösterilmektedir. Şekil 4.16 (a) harmonik değeri 5 için ve Şekil 4.16 (b) ise harmonik değeri 20 için elde edilen sonuçları göstermektedir.

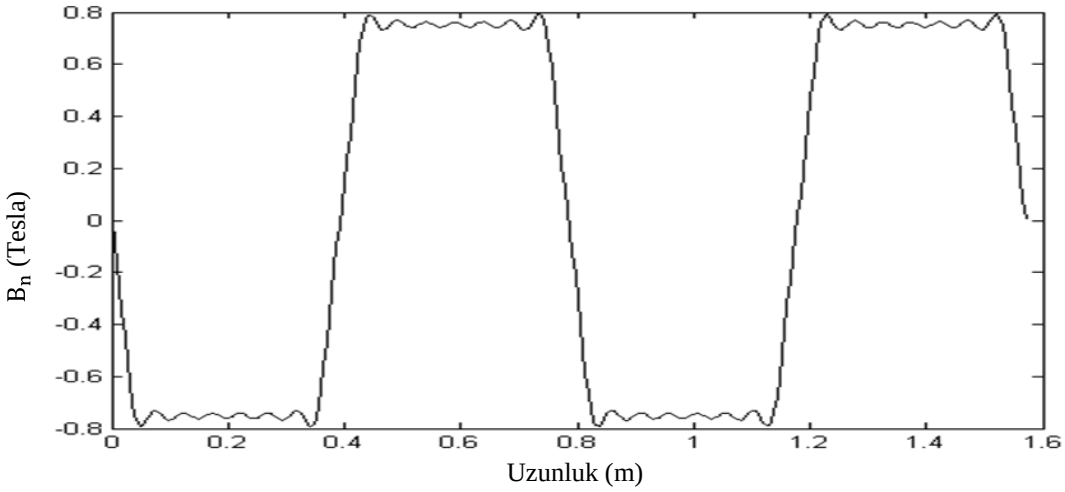
Şekil 4.16'de, manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerinin yön değiştirdiği noktada bir ani yükselme sonrasında gerçek değere yaklaşıldığı gözlemlenmektedir.



(a)



(b)



(c)

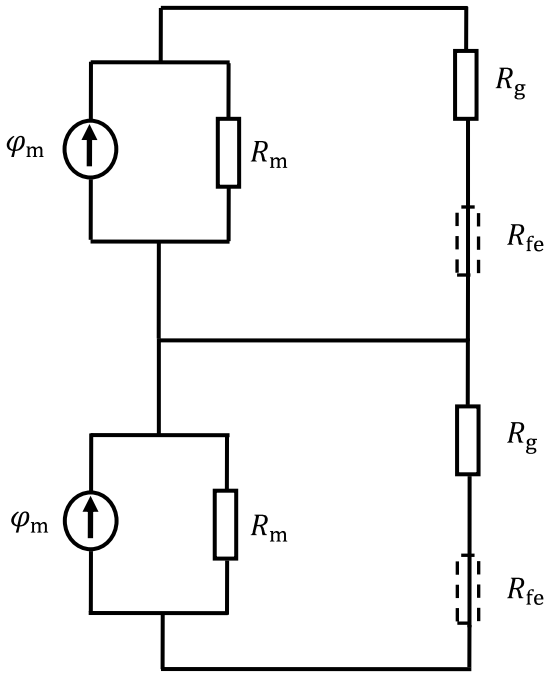
Şekil 4.16 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Harmonik değeri 5 için. **(b)** Harmonik değeri 20 için. **(c)** Harmonik değeri 20 için.

Bu ani yükselme oluşturulan manyetik analiz yönteminin yarıçap yönünde mıknatıslanmış yapıların modellenmesinin Fourier serisi ile elde edilmesinden kaynaklanmaktadır. Fourier serisinin yapısı gereği türev değerinin sonsuz olduğu durumlarda bir süreksizlik oluşturmaktadır. Literatürde Gibbs olayı olarak adlandırılan bu davranış için çeşitli çözümler önerilmektedir. Fourier serisi olarak yapılan modelleme üzerinde çeşitli fonksiyonlarla filtreleme yapılarak Gibbs etkisinin yok edilmesi mümkündür [32].

Bu yöntemlerden biri de, sinc fonksiyonu ile Fourier serisinden kaynaklanan Gibbs etkisinin yok edilmesidir. Gibbs etkisiyle oluşan Şekil 4.16 (b) için bu yöntem kullanılarak Gibbs etkisi Şekil 4.16 (c) ile gösterildiği üzere yok edilmiştir. Fourier serisi denklemi, $\mathrm{sinc}(n * \in)$ şeklindeki bir fonksiyon ile çarpılarak Gibbs etkisi minimize edilmiştir. $\in$, Gibbs etkisini yok edecek şekilde 0.1 alınmıştır.

Bahsedilen bu $\in$ katsayısı farklı yapılar için farklı değerlere sahip olacaktır. Her farklı yapı için farklı bir optimum değer alacaktır. Bu optimumu değere göre çok küçük $\in$ değerleri Gibbs etkisini yok edememekte ve çok yüksek $\in$ değeri ise fonksiyonun yapısını bozmaktadır.

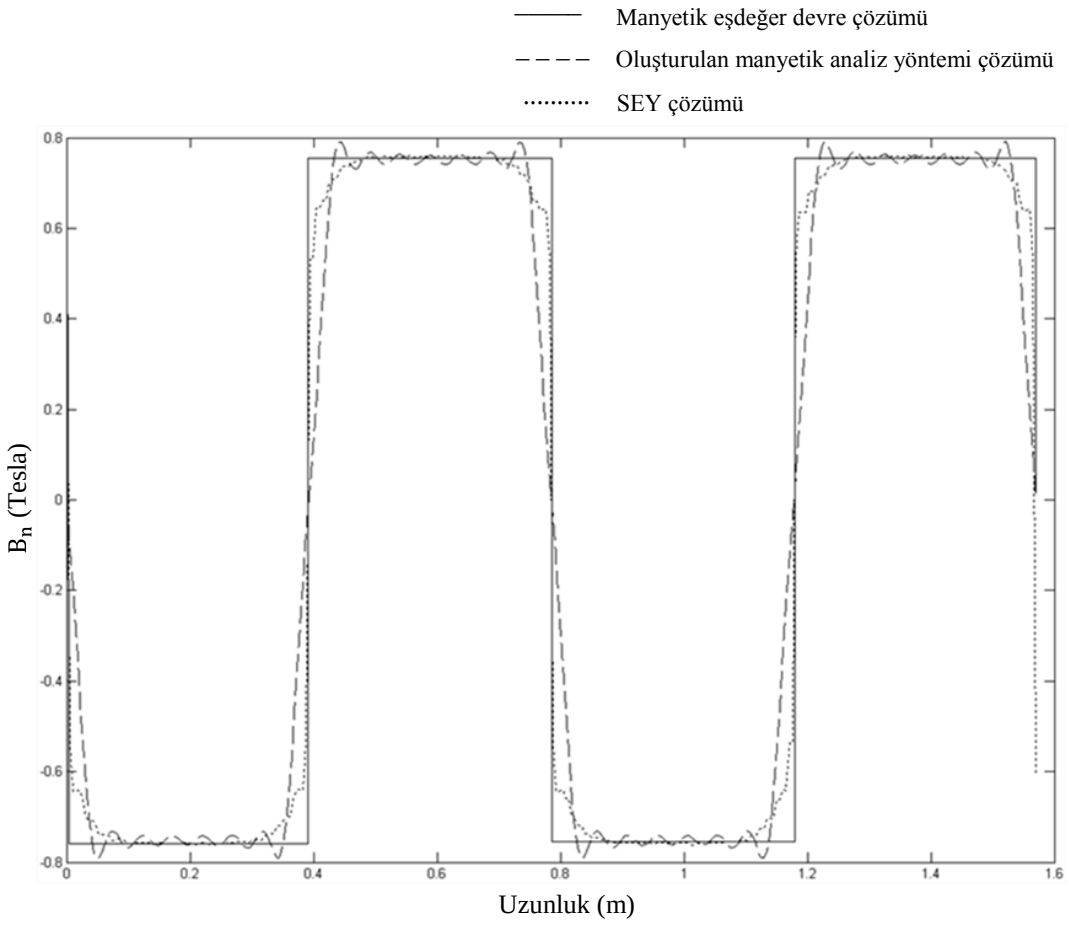
Bahsedilen bu yöntem, Gibbs etkisini yok ederek, sonucun daha doğru bir şekilde elde edilmesini sağlamaktadır. Fakat her yapı için kullanımı farklı olacağından detaylı bir şekilde incelenmesi gerekmektedir.



Şekil 4.17 : Bir kutup çifti altındaki manyetik eşdeğer devre modeli

Şekil 4.16 ile oluşturulan manyetik analiz yöntemiyle sabit mıknatıs ile hava aralığı sınırındaki akı yoğunluğun ifade edilmişti. Bu sınır üzerinde elde edilen sonuçlar, SEY ve manyetik eşdeğer devre yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

Şekil 4.17, ele alınan yapı için bir kutup çifti altındaki manyetik eşdeğer devre modelini göstermektedir. Bu model üzerinde gösterilen R_{g} bir kutup altındaki hava aralığı relüktansıdır. φ_{m} incelenen örnek yapıdaki sabit mıknatısların akısıdır. R_{m} ise, mıknatısın iç relüktansıdır. R_{fe} de yüksek manyetik geçirgenliğe sahip paslanmaz çelik bölgenin relüktansıdır ve R_{g} hava aralığı manyetik relüktansına göre çok küçük bir değere sahip olduğu için ihmal edilmektedir. Bu model kullanılarak elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni bir kutup çifti altında 0.76 T elde edilmiştir. Bu değer her bir kutup çifti altında mıknatıslanmanın yön değiştirmesiyle işaret değiştirecektir.

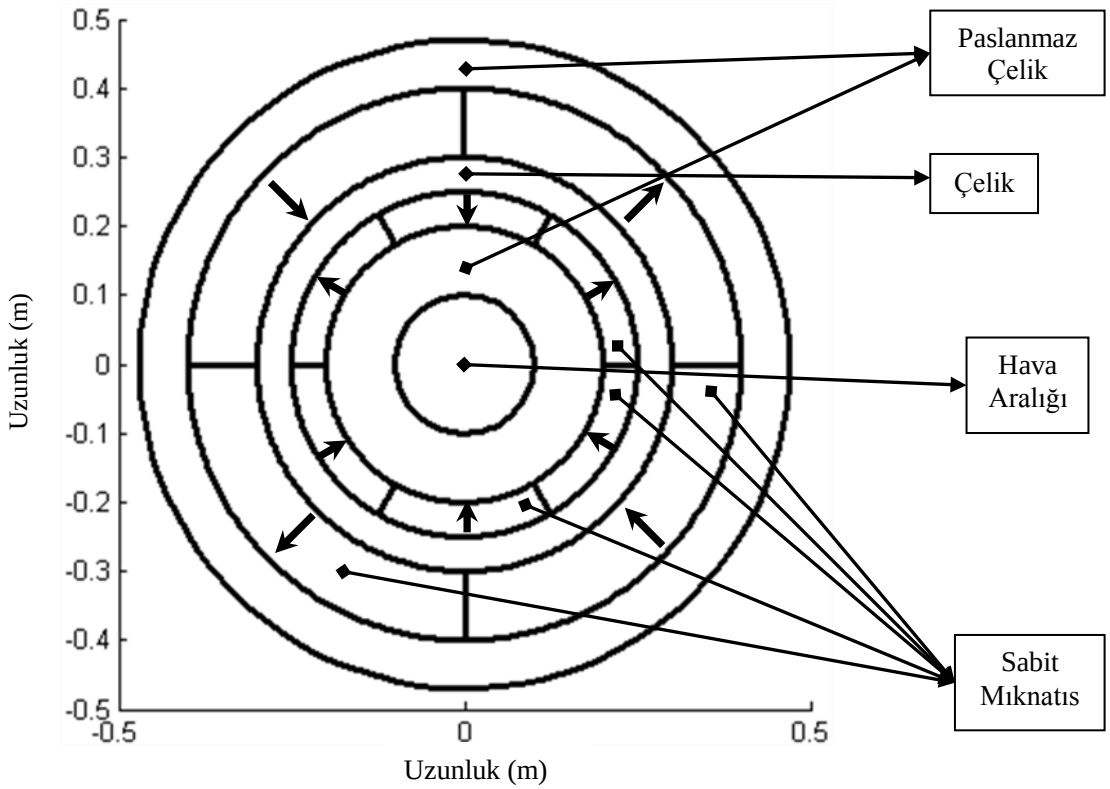


Şekil 4.18 : Sabit mıknatıs – hava aralığı sınırında manyetik eşdeğer devre yöntemi, oluşturulan manyetik analiz yöntemi ve SEY çözümleri ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi.

Şekil 4.18 ile görüldüğü üzere, manyetik akı yoğunluğunun normal bileşenin değişimi her üç yöntem için oldukça yakın şekilde elde edilmiştir. Gibbs etkisi yok edilen Fourier serisi ile elde edilen çözümün her iki yöntem çözümüne oldukça yakın bir şekilde oluştuğu görülmektedir. Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile elde edilen sonuç, sinc fonksiyonu kullanılarak Gibbs etkisi yok edilmiş çözümden elde edilmiştir. Harmonik değeri ise 20 olarak alınmıştır.

4.2.2 Çift kutup arkı dizesi içeren sabit mıknatıslı örnek yapı için elde edilen sonuçlar

Şekil 4.19 ile gösterilen yarıçap yönünde mıknatıslanmış iki ayrı sabit mıknatıs kutup dizesi içermektedir. İçerideki kutup dizesi üç kutup çiftinden, dışarıdaki kutup dizesi ise iki kutup çiftinden oluşmaktadır. Mıknatıslanma yönü her bir mıknatıs için şekil üzerinde belirtilmiştir. Yapının ortasındaki bölge ve en dış bölge paslanmaz çelikten oluşmaktadır. İki adet ayrı hava aralığı şekil üzerinde belirtilmiştir. Tüm sabit mıknatıs yapıları eşit fiziksel özelliklere sahiptir. Bu yapıyı oluşturan bölgelere ait fiziksel özellikler Çizelge 4.4 ile gösterilmektedir. Düşük geçirgenlikteki bir çelik bölge ve nazaran yüksek geçirgenliğe sahip bir paslanmaz çelik bölge tanımlanmıştır.



Şekil 4.19 : Örnek yapının görünümü.

Çizelge 4.4 : Örnek on dört bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri.

Parametre	
İçerideki hava aralığı dış yarıçapı	0.1 m
İçerideki paslanmaz çelik bölge dış yarıçapı	0.2 m
İçerideki sabit mıknatıs dizesi dış yarıçapı	0.25 m
Çelik bölge dış yarıçapı	0.3 m
Dışarıdaki sabit mıknatıs dizesi dış yarıçapı	0.4 m
Dışarıdaki paslanmaz çelik bölge dış yarıçapı	0.47 m
Sabit mıknatıs bağıl geçirgenliği	μ_r=1.045
Sabit mıknatıs zorlayıcı manyetik alanı	883310 A/m
Hava aralığı bağıl geçirgenliği	μ_r=1
Paslanmaz çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=500
Çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=100
Dış sınır koşulu	Dirichlet

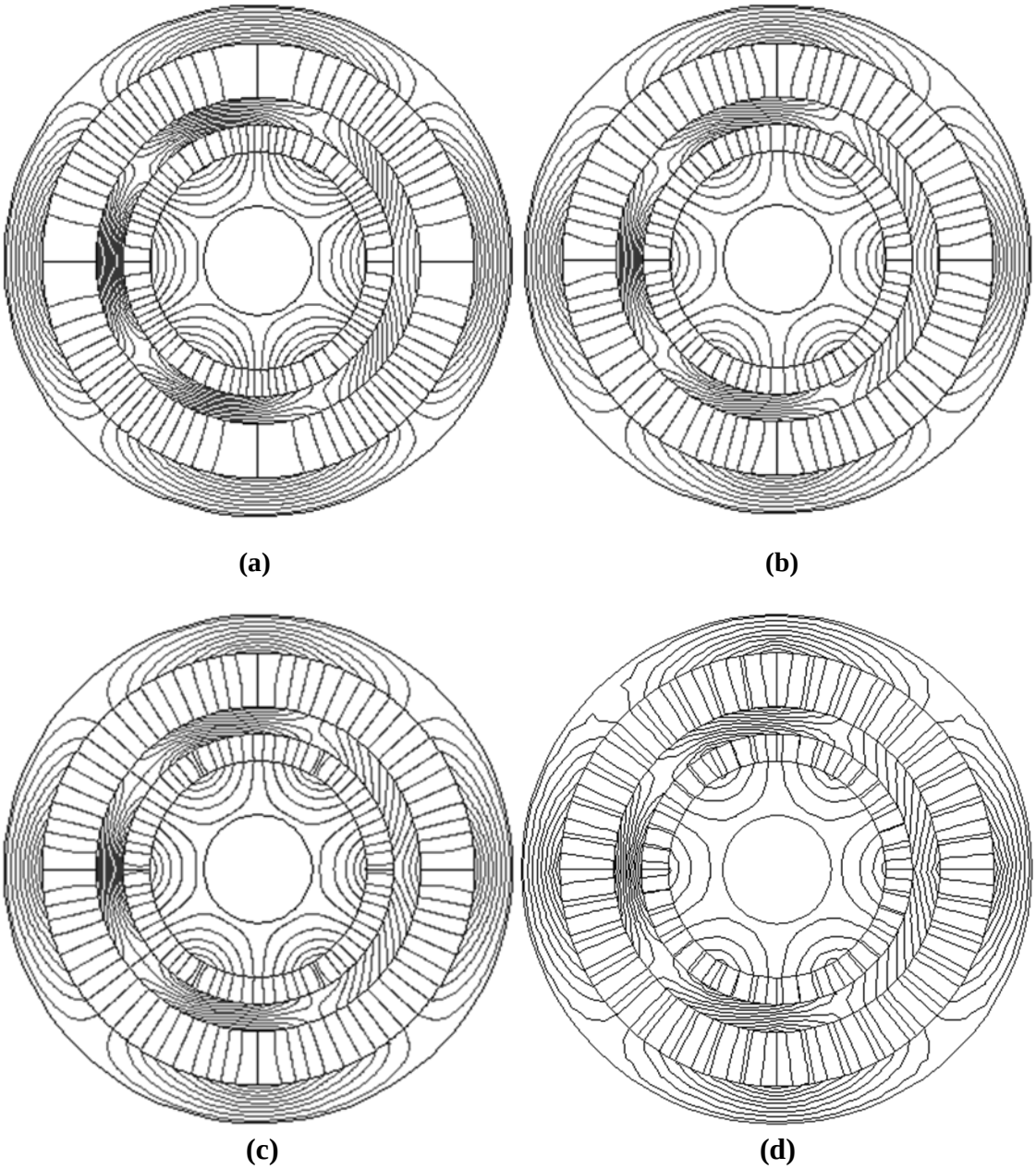
Bu yapı üzerinde, oluşturulan manyetik analiz yöntemi ve SEY çözümüyle elde edilen manyetik akı dağılımları Şekil 4.20'de gösterilmektedir. Şekil 4.20 (a) harmonik sayısı 5 değerine kadar açıldığında, Şekil 4.20 (b) ve 4.20 (c) ise sırasıyla harmonik sayısı 10 ve 15 değerine kadar açıldığında oluşan dağılımı göstermektedir. Şekil 4.20 (d) ise SEY ile elde edilen çözümü göstermektedir. Daha önce incelenen yapılarda olduğu gibi harmonik değeri belirli bir değere ulaştığında manyetik akı dağılımı SEY çözümüne oldukça yakınsamaktadır. 10 ve 15 olarak seçilen harmonik değeri için elde edilen sonuçlar, SEY çözümü ile elde edilen sonuçlara benzer şekilde oluşmuştur.

Oluşturulan manyetik analiz yönteminin doğruluğu için incelenen bir diğer nicelik ise manyetik akı yoğunluğu normal bileşenleri idi. Bu yapının sahip olduğu farklı bölgeler üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni elde edilerek, yöntemin bu yapı için SEY çözümüne yakınsaklığı incelenecektir.

Öncelikle, içerideki paslanmaz çelik bölge ile iç sabit mıknatıs dizesi arasındaki sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi Şekil 4.21 ile gösterilmektedir. Görüleceği üzere, her iki yöntem için elde edilen sonuçlar oldukça yakındır. Şekil 4.21 (a) harmonik değeri 30 olarak alınarak oluşturulan manyetik analiz çözümüyle elde edilen değişimi göstermektedir. Şekil 4.21 (b) ise, SEY çözümüyle elde edilen değişimi göstermektedir.

Her iki yöntem çözümünün birbirine yakınsadığı görülmektedir. Fakat oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümünün Fourier serisi yaklaşımın kaynaklanan Gibbs etkisiyle oluştuğu görülmektedir. Bir önceki örnekte bahsedilen Gibbs etkisini

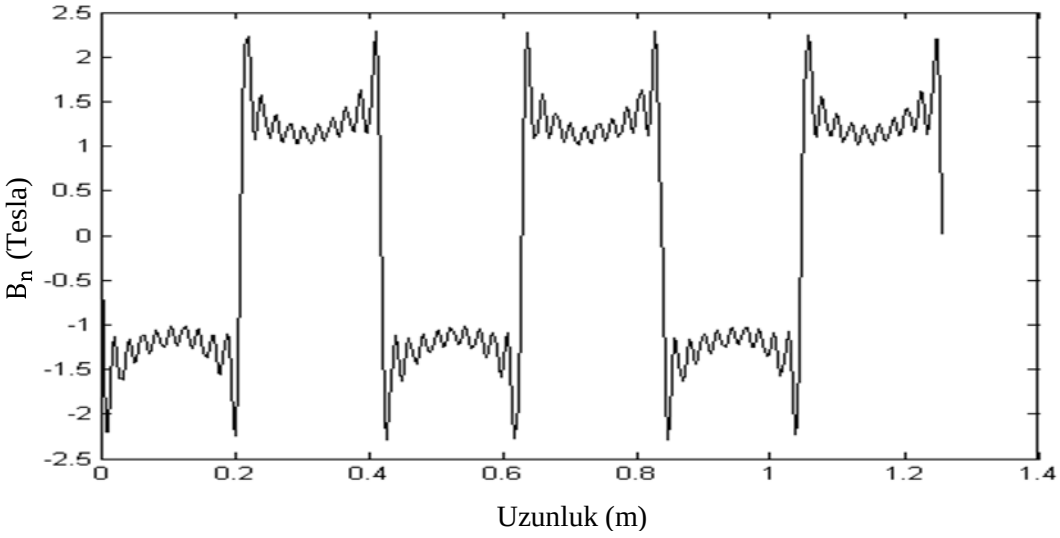
filtreleme yöntemi bu örnek için kullanılmamıştır ve dolayısıyla manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni bu etkiyi barındırmaktadır.



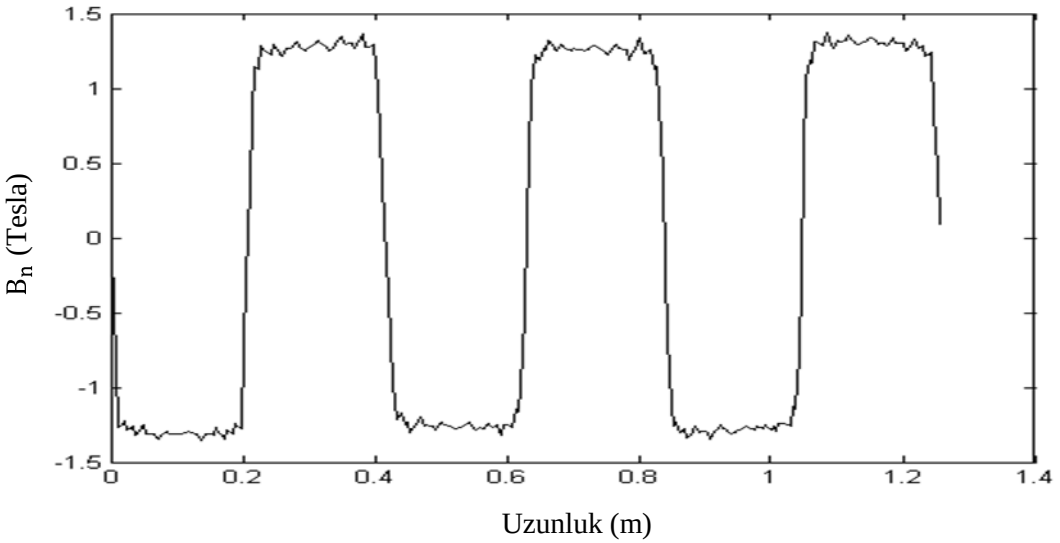
Şekil 4.20 : Örnek yapıda elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 10 için oluşan dağılım. **c)** Oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(d)** SEY ile elde edilen dağılım.

Çelik bölge orta noktasında açısal yönde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimi ise Şekil 4.22 ile gösterilmektedir. Şekil 4.22 (a) harmonik değeri 30 olarak ele alındığında oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ile elde edilen değişimi

göstermektedir. Şekil 4.22 (b) ise aynı çevre üzerinde SEY ile elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimini göstermektedir.



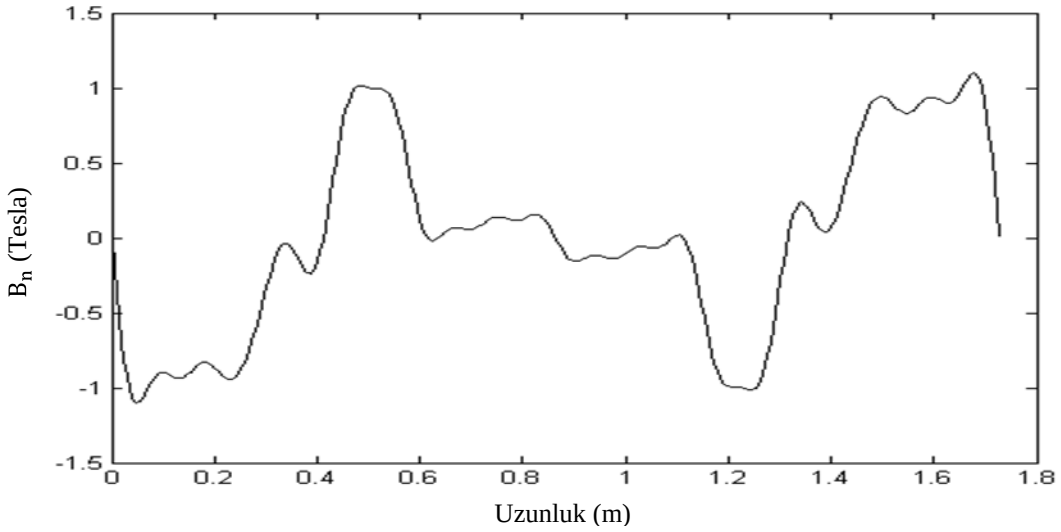
(a)



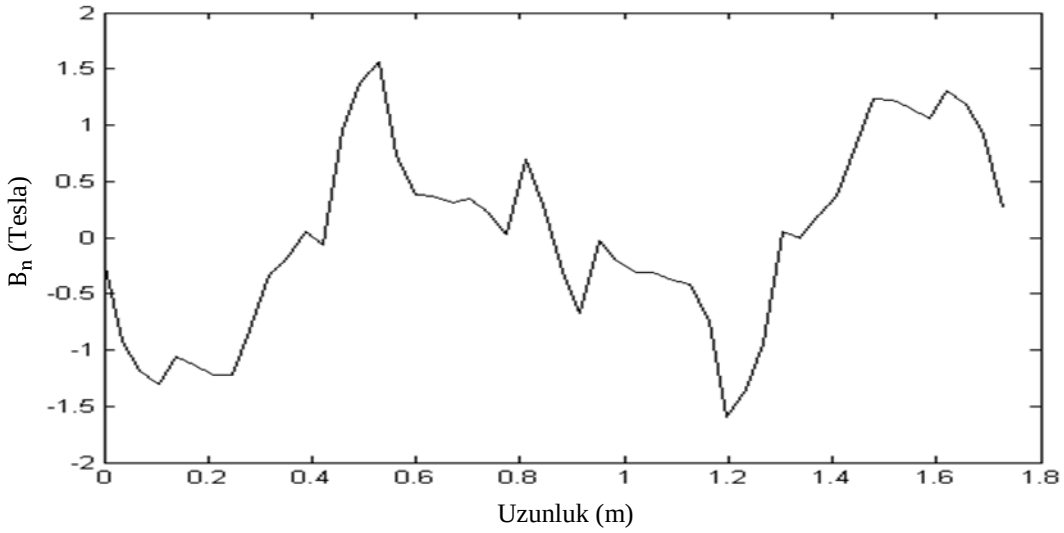
(b)

Şekil 4.21 : İçerideki paslanmaz çelik bölge – sabit mıknatıs dizesi sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü.

Her iki yöntem için elde edilen sonuçlar incelendiğinde, yine benzer bir değişim görülmektedir. Şekil 4.22 (a) ile görüleceği üzere belirtilen çevre üzerindeki oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümünde Gibbs etkisi görülmemektedir. Bunun sebebi ise bu sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğunun türevinin sonsuz değerine ulaşmamasıdır. Fourier serisi, yalnızca türev değerinin sonsuza ıraksadığı fonksiyonlara yaklaşırken Gibbs etkisini içermektedir.



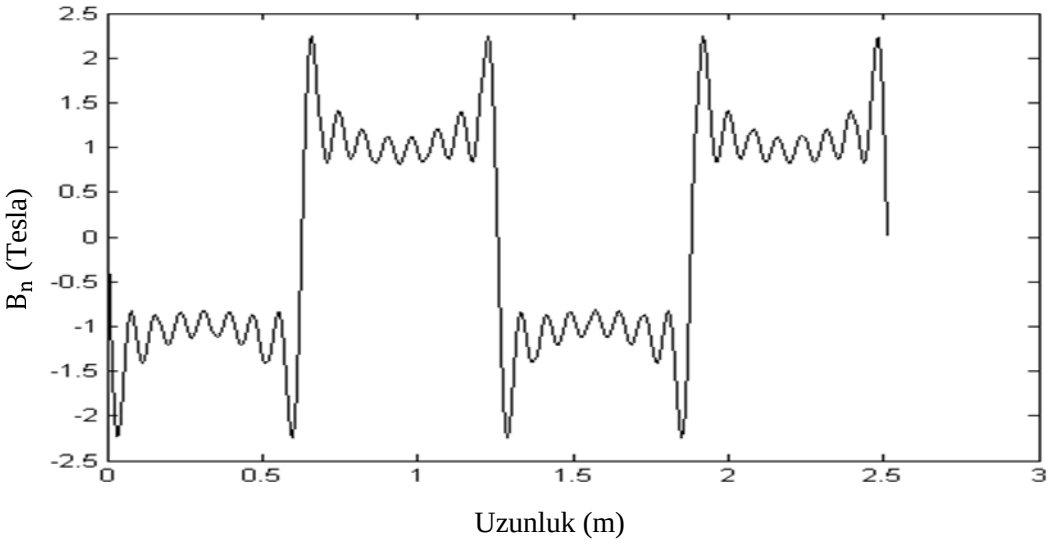
(a)



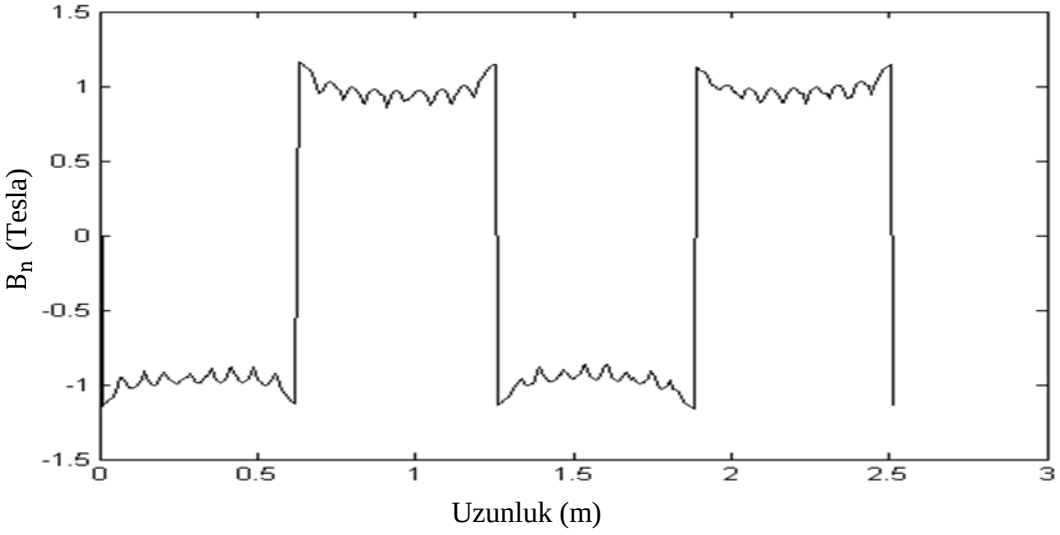
(b)

Şekil 4.22 : Çelik bölge orta noktasında manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin açısal yönde değişimi: **(a)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü.

Şekil 4.23 ise dışarıdaki sabit mıknatıs dizesi ile dış paslanmaz çelik bölge arasındaki sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimini göstermektedir. Şekil 4.23 (a) oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 30 için elde edilen değişim ve Şekil 4.23 (b) ise SEY ile elde edilen değişimi göstermektedir. Görüleceği üzere, yine her iki yöntem için elde edilen sonuçlar benzer değişime sahiptir. Fakat yine oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü ile elde edilen değişim Gibbs etkisini içermektedir. SEY çözümünden de görüleceği üzere türevin sonsuz olduğu noktalar bulunmaktadır ve dolayısıyla oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümünde Gibbs etkisinin oluşması beklenmektedir.



(a)



(b)

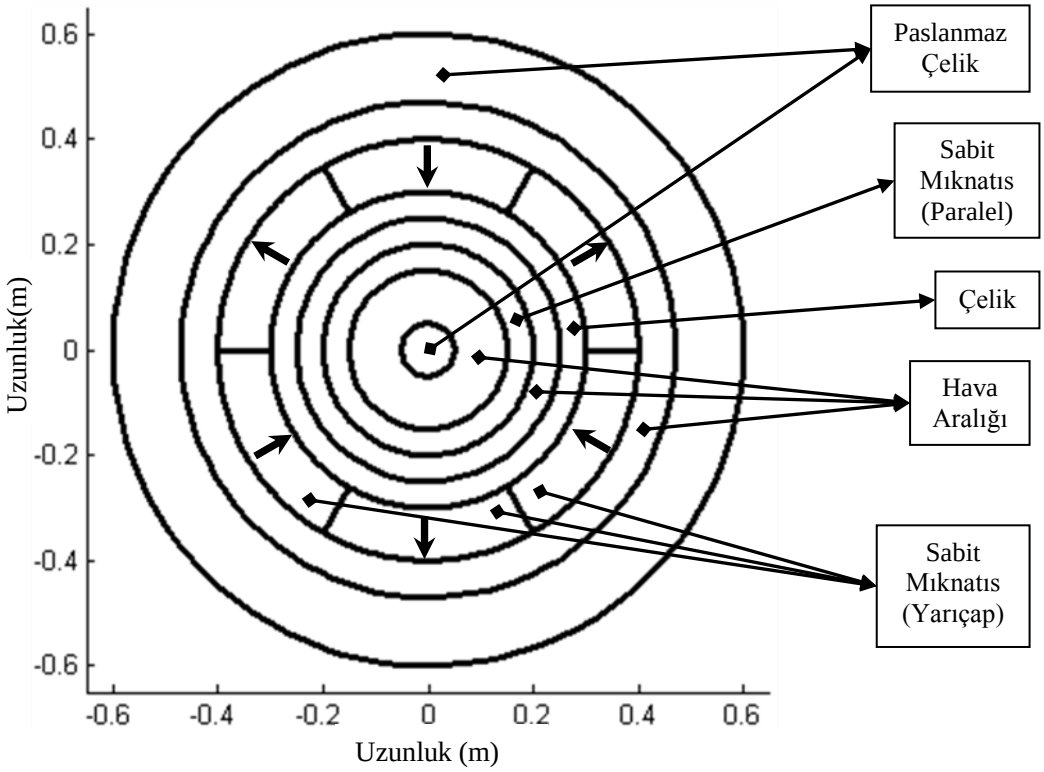
Şekil 4.23 : Çelik bölge orta noktasında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değişimi: **(a)** Harmonik değeri 30 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü.

Bu yapı için de elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında oluşturulan manyetik analiz yöntemini SEY ile yakın değerlerde oluştuğu söylenebilir.

4.3 Yarıçap ve Paralel Yönde Mıknatıslanmış Sabit Mıknatıs İçeren Yapıların İncelenmesi

Şekil 4.24'te görüleceği üzere on dört bölgeye sahip bir yapı ele alınmaktadır. Bu yapı, halka şeklinde paralel mıknatıslanmış ve üç kutup çiftinden oluşan yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs yapısı barındırmaktadır. Yapının en iç ve en

dış bölge paslanmaz çelik olarak belirtilen yüksek geçirgenlikteki yapılardan oluşmaktadır. Üç adet ayrı hava aralığı şekil üzerinde belirtilmiştir.



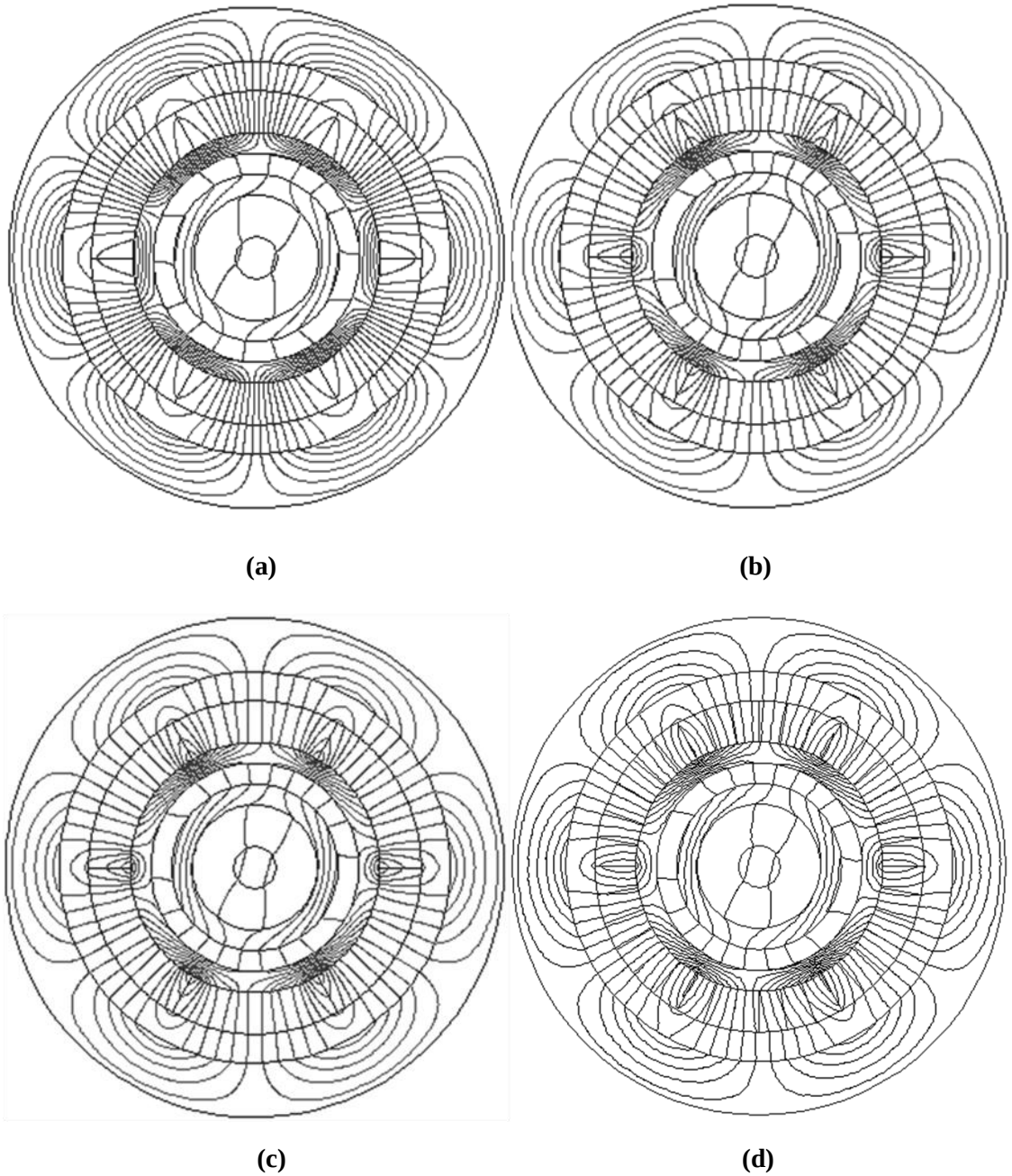
Şekil 4.24 : Örnek yapının görünümü.

Tüm yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs yapıları eşit fiziksel özelliklere sahiptir. Bu yapıyı oluşturan bölgelere ait fiziksel özellikler Çizelge 4.5 ile gösterilmiştir.

Çizelge 4.5 : Örnek on üç bölgeli yapıyı oluşturan bölgelerin fiziksel değerleri.

Parametre	
İçerideki paslanmaz çelik bölge dış yarıçapı	0.05 m
İçerideki hava aralığı dış yarıçapı	0.15 m
Sabit mıknatıs(paralel) dış yarıçapı	0.2 m
Ortadaki hava aralığı dış yarıçapı	0.25 m
Çelik bölge dış yarıçapı	0.3 m
Sabit mıknatıs kutup dizesi(yarıçap) dış yarıçapı	0.4 m
Dıştaki hava aralığı dış yarıçapı	0,.47
Dıştaki paslanmaz çelik bölge dış yarıçapı	0.6
Sabit mıknatıs bağıl geçirgenliği	μ_r=1.045
Sabit mıknatıs zorlayıcı manyetik alanı	883310 A/m
Sabit mıknatıs(paralel) mıknatıslanma yönü	75°
Hava aralığı bağıl geçirgenliği	μ_r=1
Paslanmaz çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=800
Çelik bağıl geçirgenliği	μ_r=100
Dış sınır koşulu	Dirichlet

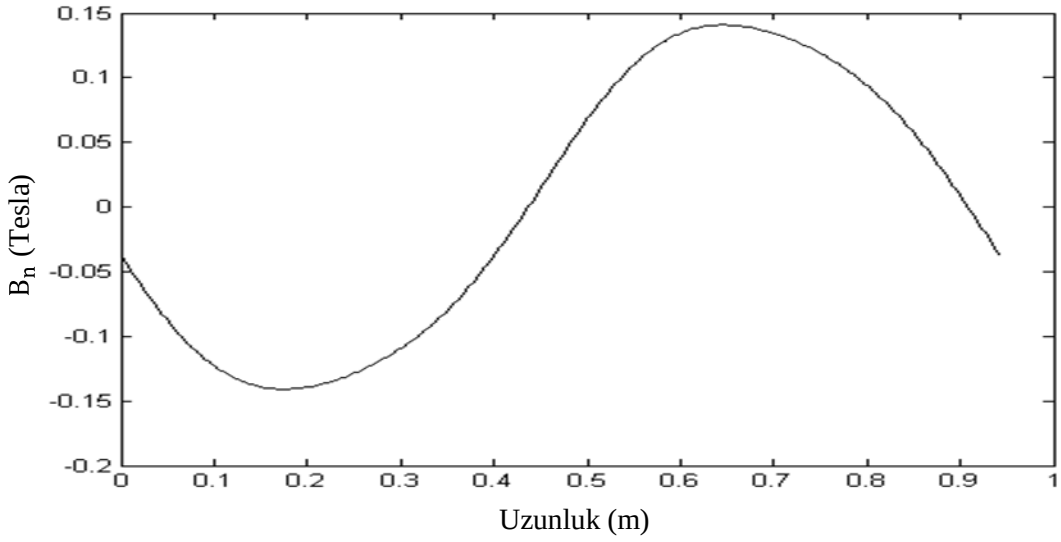
Şekil 4.24'te gösterilen bu yapı için manyetik akı ve manyetik akı yoğunluğu normal bileşenleri oluşturulan manyetik analiz yöntemi ve SEY çözümleri Şekil 4.25 ile gösterilmiştir. Her iki yöntem ile benzer bir dağılımın oluşuğu görülmektedir. Oluşturulan manyetik yönteminde, harmonik değeri arttırıldıkça SEY çözümüne yakınsamaktadır.



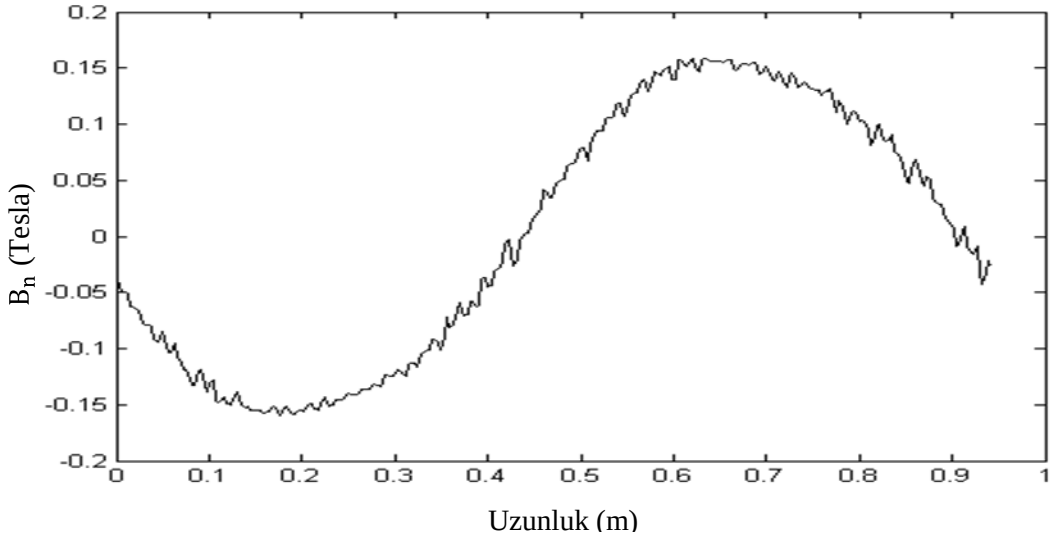
Şekil 4.25 : Örnek yapı için elde edilen manyetik akı dağılımları: **(a)** Harmonik değeri 5 için oluşan dağılım. **(b)** Harmonik değeri 20 için oluşan dağılım. **c)** Harmonik değeri 25 için oluşan dağılım. **(d)** SEY ile oluşan dağılım.

Şekil 4.26 ise, en içteki hava aralığı ile paralel yönde mıknatıslanmış sabit mıknatıs arasındaki sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşenlerinin değişimini

göstermektedir. Şekil 4.25(a) oluşturulan manyetik analiz yöntemi ile harmonik değeri 25 için elde edilen çözümü, Şekil 4.25 (b) ise SEY ile elde edilen çözümü göstermektedir. Görüleceği üzere her iki yöntem için elde edilen sonuçlar oldukça yakındır.



(a)

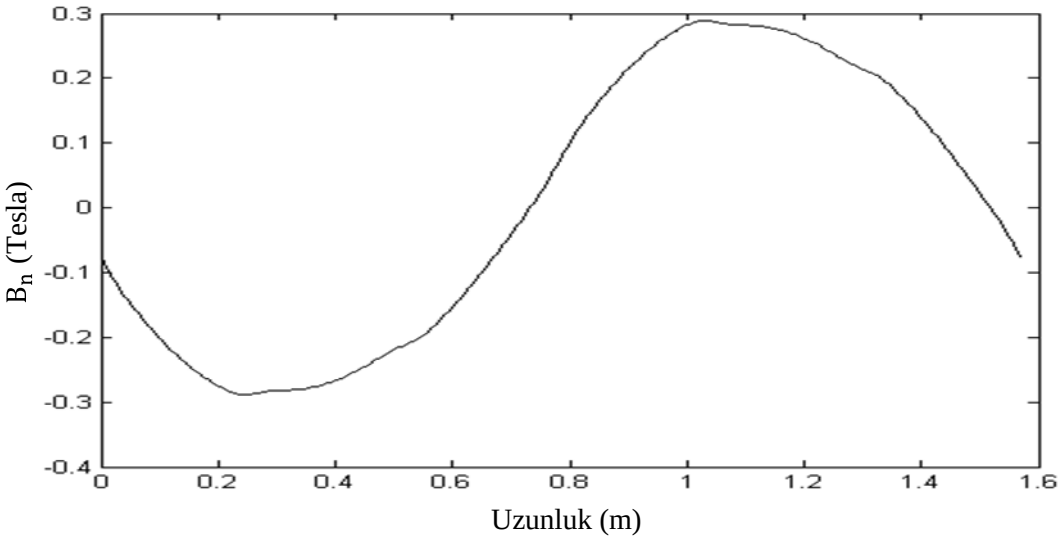


(b)

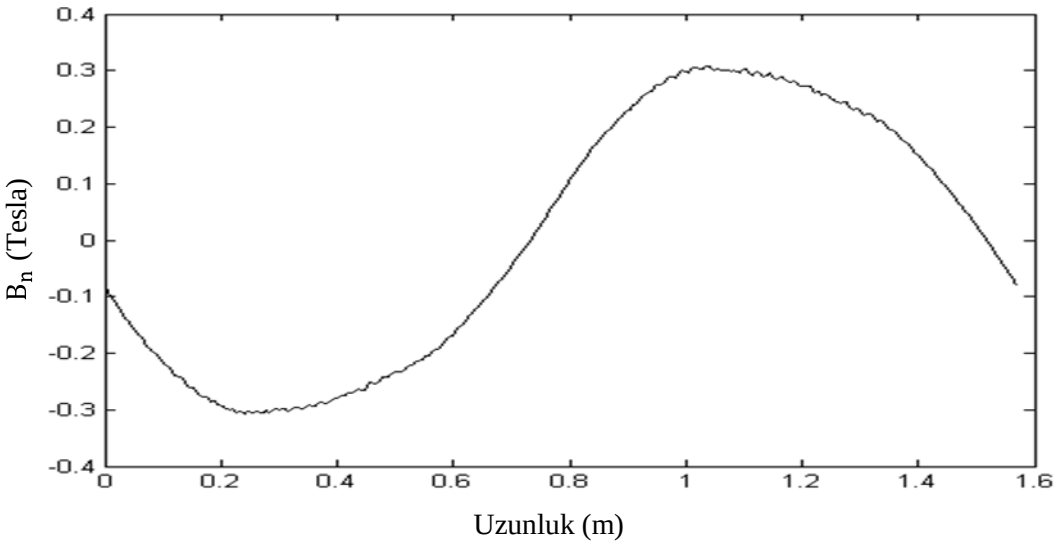
Şekil 4.26 : En içteki hava aralığı – paralel mıknatıslanmış sabit mıknatıs sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 25 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü.

Manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değeri birçok sınırda elde edilerek yöntemin doğruluğu hakkında daha net bir kanıya varılabilir. Şekil 4.27, Şekil 4.24'de görülen yapının ortasında yer alan hava aralığı ile çelik bölge arasındaki sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimini göstermektedir.

Şekil 4.27'den görüldüğü üzere hava aralığı ile çelik bölge sınırında da manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni oldukça yakın bir değişim göstermektedir.



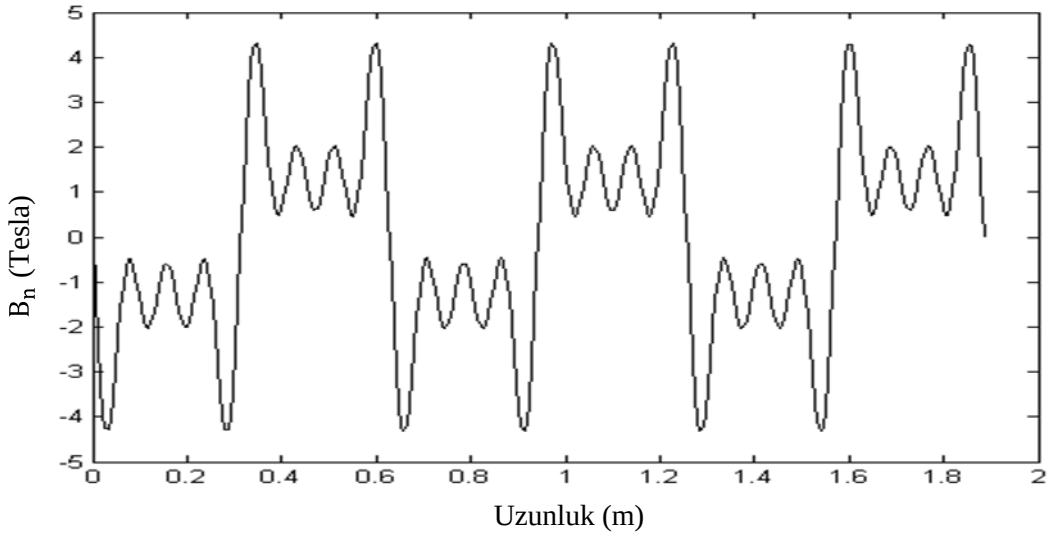
(a)



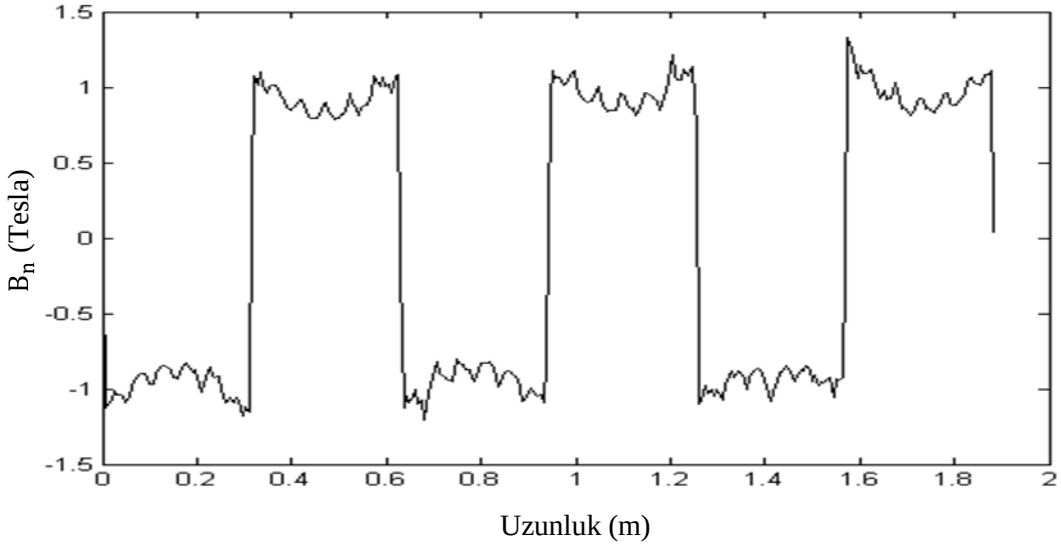
(b)

Şekil 4.27 : Hava aralığı – çelik bölge sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 25 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü.

Şekil 4.28 ise çelik bölge ile yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs dizesi arasındaki sınır üzerinde manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin değişimini göstermektedir. Şekil 4.28'de görüleceği üzere çelik bölge ile mıknatıs dizesi arasındaki sınır üzerinde de manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni, her iki yöntem için benzer bir değişim sergilese de arada önemli bir fark oluşmaktadır.



(a)



(b)

Şekil 4.28 : Çelik bölge – yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs sınırında elde edilen manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni çözümü: **(a)** Harmonik değeri 25 için oluşan çözüm. **(b)** SEY çözümü.

Gibbs etkisi, bahsedilen sınır üzerinde elde edilen çözümde görülmektedir ve SEY çözümü ile oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümü arasında önemli bir fark yaratmaktır. Bu yapıda bulunan çift kutup dizgesinin Gibbs etkisini güçlendirdiği ve Gibbs etkisinin de sonuçlarda önemli bir fark yarattığı öngörülmektedir.

5. SONUÇLAR

Bu tez içerisinde; yapıların manyetik analizinin gerçekleştirilebilmesinde çok önemli olan Poisson denkleminin çözümü için bir yöntem geliştirilmiştir. Silindirik simetrik bir geometriye sahip sabit mıknatıslı yapıların iki boyutlu manyetik analizinin gerçekleştirilmesini sağlayan bu yöntem; manyetik yapıların tanımlı olduğu bölgede sahip olduğu denklem yapısının, süperpozisyon yöntemi kullanılarak iki farklı çözümde ele alınmasıyla oluşturulmuştur. Paralel ve yarıçapsal yönde mıknatıslanmış sabit mıknatıslı yapılar için yüzey akım yoğunluğu modellemesi Fourier serisi de kullanılarak gerçekleştirilmiş ve bu yapıların tanımlı olduğu bölgede denklem yapısının bir tek çözümden oluştuğu gösterilmiştir. Laplace denklem çözümü kullanılarak ve sınır koşulları uygulanarak elde edilen bu çözüm detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Laplace denklem çözümü ile elde edilen manyetik vektör potansiyeli ifadesinin Fourier serisi yaklaşımıyla incelenmesi ve sabit mıknatıslı yapılar için düzenlenmesi tez içerisinde açıklanmıştır. Yöntemin doğruluğunun gözlenebilmesi amacıyla oluşturulan birçok farklı model için elde edilen manyetik analiz yöntemi sonuçları ve SEY sonuçları karşılaştırılmıştır.

Oluşturulan manyetik analiz yöntemi sonuçları çember ve halka geometrisinde paralel yönde mıknatıslanmış sabit mıknatıs içeren iki farklı yapıda SEY sonuçları ile eksiksiz bir benzerlik göstermiştir. Bu yapılar için oluşturulan SEY çözümü oldukça sık bir SE ağına sahiptir. Bir diğer örnek olarak incelenen kutup arkı geometrisine sahip sabit mıknatıs içeren örnek yapıda harmonik değeri 20 ve daha fazla seçildiğinde oluşturulan manyetik analiz yöntemi çözümüyle elde edilen manyetik akı dağılımı, SEY çözümüyle elde edilen dağılıma bir yakınsama sağlamaktadır. Yüksek harmonik değerleri için yakınsamanın artması Fourier yaklaşımıyla oluşturulan yöntem için beklenen bir sonuçtur. Fakat kutupların kesiştiği noktalarda iki farklı yöntemle elde edilen akı çizgileri arasında bir farklılık bulunmaktadır. Bunun farklılığın temel sebebi, harmonik yaklaşımıyla oluşturulan kaynak terimlerinin düz çizgi sınır olan bu sınırlar üzerindeki Dirac fonksiyonun etkisini içermemesidir. Paralel yönde mıknatıslanmış bir kutup arkı yapısı için elde edilen

kaynak teriminin düz çizgi üzerinde oluşan yüzey akım yoğunluğunu içerecek şekilde modellenmesiyle bu problem çözülebilir.

Çember ve halka geometrilerine sahip yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatısların modellenemeyeceği detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Kutup arkı geometrisine sahip yarıçap yönünde mıknatıslanmış sabit mıknatıs yapısı için ise elde edilen sonuçlar yine yüksek harmonik değerleri için SEY çözümüne yakınsak olarak elde edilmiştir. Yarıçap yönünde mıknatıslanmış kutup arkları için oluşan manyetik akı yoğunluğu normal bileşeninin kutup çiftlerinin kesiştiği noktalarda sonsuz bir türeve sahip olması nedeniyle oluşturulan manyetik analiz yöntemi sonuçlarında Gibbs etkisi görülmüştür. Bu etkinin yok edilmesi için kullanılan yöntemlerden biri olan Fourier serisinin sinc fonksiyonu ile filtrelenmesi uygulanarak, Gibbs etkisinin filtrelenmesi sağlanmıştır. Bu etki yok edilmesiyle elde edilen oluşturulan manyetik analiz yöntemi sonuçları, SEY ve manyetik eşdeğer devre yöntemi sonuçları ile karşılaştırılarak sonuçların yakınsaklığı gözlenmiştir.

Paralel yönde mıknatıslanmış kutup arkı geometrisine sahip sabit mıknatıslardan oluşan çift dizeli örnek yapı için de sonuçlar benzer olarak elde edilmiştir. Fakat Gibbs etkisi yok edilmediği için sonuçlarda bu farklılık görülmektedir. Yarıçap ve paralel yönde mıknatıslanmış sabit mıknatıslar içeren örnek yapı için de yüksek harmonik değeri seçilerek elde edilen manyetik akı dağılımı SEY ile elde edilen dağılıma benzer şekilde oluşmuştur. Manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni sonuçları ise yine Gibbs etkisinden kaynaklanan bir farklılık ile elde edilmiştir.

Sonuçlar ile doğruluğu gösterilen bu yöntem; sadece silindirik simetrik geometriye sahip yapıların iki boyutlu manyetik analizinin gerçekleştirilmesini sağlamaktadır. Buna karşın, SEY'de olduğu gibi bir SE ağına ihtiyaç duymayacağı için hareketli parçaları olan elektromanyetik sistemlerin analizinde önemli bir kolaylık sağlaması beklenmektedir. Ayrıca, SE ağı oluşturulmaması nedeniyle hız ve performans yönünden SEY'ne göre daha iyi olabileceği öngörülmektedir.

Bu yöntem, çalışmalar için bir temel teşkil ederek farklı geometrilerdeki yapıların çözümünü kapsayacak şekilde geliştirilebilir. Ayrıca yapılan bu çalışma, silindirik simetrik alt bölgeler olarak çember halka ve kutup arkı yapılarını barındırmaktadır. Yöntemin sınırları genişletilerek, farklı silindirik simetrik bölgeler içerisinde de çözümlerin elde edilebilmesi sağlanabilir. Ayrıca; yarıçap yönünde mıknatıslanmış

sabit mıknatıs içeren modellerde manyetik akı yoğunluğu normal bileşenlerinin Gibbs etkisiyle oluştuğundan bahsedilmişti. Bu Gibbs etkisinin yok edilmesi için çeşitli yöntemler uygulanarak manyetik akı yoğunluğu normal bileşeni değerinin daha doğru elde edilmesi sağlanabilir. Paralel yönde mıknatıslanmış kutup arkı yapısının çözümlenebilmesi için mıknatıslanma yönlerinin bir simetriye sahip olması gerektiğinden bahsedilmişti. Manyetik vektör potansiyeli ifadesi bu koşul altında yeniden düzenlenerek, periyodik olmayan yapılar için de çözümü kapsayacak şekilde elde edilmelidir. Böylece, bahsedilen simetriye sahip olmayan yapılar için de çözümün elde edilmesi sağlanabilir. Yapılabilecek bir diğer geliştirme ise, sabit mıknatıslanmış kutup çiftlerinin bitişik olmadığı koşullar için çözümün elde edilebilmesidir. Bu problemin çözümü, yine manyetik vektör potansiyeli ifadesinin periyodik olmayan dağılımlarını içerecek şekilde yeniden düzenlenmesiyle gerçekleştirilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Hague, B.,** 1929. *Electromagnetic Problems in Electrical Engineerings*, Oxford University Press..

[2] **Tomczuk, B., Schröder, G., and Waindok, A.,** 2007: Finite Element Analysis of the Magnetic Field and Electromechanical Parameters Calculation for a Slotted Permanent Magnet Tubular Linear Motor, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **43**, No.7, pp. 1410-1413.

[3] **Li, S., and Lu, Y.,** 2007: Topology Finite Element Method for Field Calculation Problems, *Progress In Electromagnetics Research Symposium*, Prague, Czech-Republic, 27-30 August.

[4] **Rischmüller, V., Fetzer, J., Haas, M., Kurz, S., and Rucker, W. M.,** 1998: Computational efficient BEM-FEM coupled analysis of 3D nonlinear eddy current problems using domain decomposition., *Proceeding of the 8th International IGTE Symposium*, Graz, Austria.

[5] **Kurz, S., and Russenschsuk, S.,** 1999: Accurate Calculation of Magnetic Fields in the End Regions of Duperconducting Accelarator Magnets using the BEM-FEM Coupling Method, *Particle Accelarator Conference*, New York, USA, March 29-April 2.

[6] **Schinnerl, M., Schöberl K., and Kaltenbacher M.,** 2000: Nested Multigrid Methods for the Fast Numerical Computation of 3D Magnetic Fields, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **36**, No. 4, pp. 1557-1560.

[7] **Zhang, Y., Chau K., Jiang J., and Zhang D.,** 2006: A Finite Element-Analytical Method for Electromagnetic Field Analysis Electrical Machines with Free Rotation , *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **42**, No. 10, pp. 3392-3394.

[8] **Sakiyama, K., Kotera, H., and Ahagon, A.,** 1990: 3-D Electromagnetic Field Mode Analysis Using Finite Element Method by Edge Element, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **26**, No. 5, pp. 1759-1761.

[9] **Chen, S. X., Liu, Z. J., and Low, T. S.,** 1994: Electromagnetic Field Analysis in Rotational Electric Machines Using Finite Element- Analytical Hybrid Method, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **30**, No. 6, pp. 4314-4316.

[10] **Boules, N.,** 1984: Two Dimensional Field Analysis of Cylindrical machines with Permanent Magnet Structures, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. **IA-20**, pp. 1267-1277.

[11] **Polinder, H.,** 1998: On the Losses in a High-Speed Permanent Magnet Generator with Rectifier, *Ph. D. Dissertation*, Faculty ITS, Delft University of Technology, Delft, Netherlands.

[12] **Mosebach, H.,** 1998: Einfache Analytische Rechenmodelle für Permanentmag-Neterregte Synchronmachinen, *Electrical Engineering*, ser. 3., Berlin, Germany, Springer Verlag, Vol. **81**, pp 171-176.

[13] **Rasmussen, K. F., Davies, J. H., Miller T. J. E., McGilp, M. I., and Olaru, M.,** 1984: Analytical and numerical computation of air-gap magnetic fields in brushless motors with surface permanent magnets, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. **36**, No. 6, pp. 1547-1554.

[14] **Zhilichev, Y.,** 2000: Analysis of Permanent Magnet Machines Using Macro-Elements, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **36**, No. 5, pp. 3122-3124.

[15] **Mosebach, H.,** 1998: Direct two dimensional analytical thrust calculation of Permanent Magnet ExcitedLinear Synchronous Machines, *Conference Record, 2nd International Symposium on Linear Drives for Industry Applications*, IEE, Japan, pp. 396-399,Tokyo, Japan.

[16] **Kim, U., and Lieu, D. K.,** 1998: Magnetic Field Calculation in Permanent Magnet Motors with Rotor Eccentricity: Without Slotting Effect, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **34**, No. 4, pp. 2243-2252.

[17] **Watterson, P. A., Zhu, J. G., and Ramsden, V. S.,** 1992: Optimization of Permanent Magnet Motors Using Field Calculations of Increasing Precision, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **28**, No. 2, pp. 1589-1592.

[18] **Zhu, Z. Q., Howe, D., Bolte, E., and Ackermann, B.,** 1993: Instantaneous Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet DC Motors, Part1: Open-Circuit Field, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **29**, No. 1, pp. 124-135.

[19] **Zhu, Z. Q., Howe, D., Bolte, E., and Ackermann, B.,** 1994: Prediction of Open-Circuit Airgap Field Distribution in Brushless Machines Having an Inset Permanent Magnet Rotor Topology, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **30**, No. 1, pp. 98-107.

[20] **Zhu, Z. Q., Howe, D., and Chan, C. C.,** 1994: Improved Analytical Model for Predicting the Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent-Magnet Machines, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. **38**, No. 1, pp. 229-238.

[21] **Ida, N.,** 2004. *Engineering Electromagnetics*, Springer Verlag New York.

[22] **Popovic, P. D.,** 1971. *Introductory Engineering Electromagnetics*, Addison Wesley Publishing Company.

[23] **Lacheisserie, E. D. T., Gignoux, D., and Schlenker, M.,** 2005. *Magnetism Fundamentals*, Kluwer Academic Publishers.

[24] **Gieras, J. F., and Wing, M.,** 2002. *Permanent Magnet Motor Technology: Design and Applications*, Marcel Dekker Inc.

[25] **Bradshaw, M. D., and Byatt, W. J.,** 1967. *Introductory Engineering Field Theory*, Prentice-Hall.

[26] **Polinder, H., and Hoeijmakers, M. J.,** 1997: Analytical Calculation of the Magnetic Field in PM Machines, *IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, New Orleans, Louisiana, 5–9 October.

[27] **Salon, S. J.,** 1995. *Finite Element Analysis of Electrical Machines,* Kluwer Academic Publishers.

[28] **Slater, J. C., and Frank, N. H.,** 1969. *Electromagnetism*, Mc-Graw-Hill Book Company Inc.

[29] **Atallah, K., and Howe, D.,** 2002: A Novel High Performance Magnetic Gear, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 37, No. **4**, pp. 2844-2846.

[30] **Zhu, Z. Q., Howe D., and Chan, C. C.,** 2002: Improved Analytical Model for Predicting the Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent Magnet Machines, *IEEE Transactions on Magnetics,* Vol. **38**, No. 1, pp. 229-238.

[31] **Boules, N.,** 1985:Prediction of No-Load Flux Density Distribution in permanent Magnet Structures, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. IA-21, No. **4**, pp. 633-643.

[32] **Triscoll, T. A., Fornberg, B.** 2004: A Padé-based algorithm for overcoming the Gibbs phenomenon, *Numarical Algorithms*, Vol. **26**, No. 1, pp. 77-92.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad:	**Sinan BAŞARAN**
Doğum Yeri ve Tarihi:	**İstanbul, 31.05.1986**
Adres:	**Firuzköy Mah. Ali Gülmez Cad. Bambu Sok. No: 19 34850 Avcılar - İSTANBUL**
Lisans Üniversite:	**Yıldız Teknik Üniversitesi – Elektrik Mühendisliği**