

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MİNİMAL YÜZEYLERİN LOG – HARMONİK FONKSİYONLARLA
KARAKTERİZASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu ALAĞAÇ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

OCAK 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MİNİMAL YÜZEYLERİN LOG – HARMONİK FONKSİYONLARLA
KARAKTERİZASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Burcu ALAĞAÇ
(509091008)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Yard.Doç.Dr.Mehmet Ali KARACA

Eş Danışman: Yard.Doç.Dr.Hakan Mete TAŞTAN

OCAK 2012

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509091008 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Burcu ALAĞAÇ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**MİNİMAL YÜZEYLERİN LOG – HARMONİK FONKSİYONLARLA KARAKTERİZASYONU**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Yard.Doç.Dr.Mehmet Ali KARACA**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Eş Danışman : **Yard.Doç.Dr.Hakan Mete TAŞTAN**
İstanbul Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Emanullah HİZEL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma ÖZDEMİR
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yard. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU
İstanbul Kültür Üniversitesi

Teslim Tarihi : **19 Aralık 2011**
Savunma Tarihi : **26 Ocak 2012**

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını, desteğini ve değerli zamanını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yard.Doç.Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a ve değerli hocam Yard.Doç.Dr. Mehmet Ali KARACA'ya, tezimin yazımında göstermiş olduğu titiz yaklaşımdan ötürü Sayın Yard.Doç.Dr. Emel YAVUZ DUMAN hocalarıma sonsuz teşekkür etmek isterim.

Gerek yüksek lisans gerekse yüksek lisans dışında karşılaştığım zorluklarda bana yol gösteren ve cesaretlendiren, beni yetiştirip bugüne getiren Sayın Beşir ve Fatma ALAĞAÇ 'a sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2012

Burcu ALAĞAÇ

(Matematikçi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÖZET.....	xi
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
2. YÜZEYLER TEORİSİ.....	3
2.1 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar.....	3
2.2 Yüzey Kavramı	5
2.2.1 Gauss eğriliğinin geometrik yorumu.....	13
3. LOG-HARMONİK FONKSİYONLAR TEORİSİ.....	17
3.1 Kompleks Analizde Temel Tanımlar	17
3.2 Yalınkat Fonksiyonlar	18
3.3 Harmonik Fonksiyonlar.....	23
3.4 Log-Harmonik Fonksiyonlar	27
3.5 Log-Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar	29
4. MİNİMAL YÜZEYLER	35
4.1 İzotermal Parametrelerle Verilen Minimal Yüzeyler	35
4.2 Minimal Yüzeylerin Weierstrass-Enneper Gösterimi	38
4.2.2 Weierstrass-Enneper gösterimi ile verilen minimal yüzey örnekleri.....	40
4.3 Minimal Yüzeylerin Gauss Eğriliği	44
4.4 Minimal Grafikler ve Harmonik Dönüşümler.....	47
4.5 Minimal Yüzeyler ve Log-Harmonik Fonksiyonlar.....	51
5. BULGULAR.....	57
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ.....	63

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : $\mathcal{U}$ bölgesinin X dönüşümü altında görüntüsü.....	5
Şekil 2.2 : Küre.....	6
Şekil 2.3 : Hiperboloid paraboloid.....	7
Şekil 2.4 : Silindir.....	7
Şekil 2.5 : Teğet düzlem.....	8
Şekil 2.6 : Kürenin teğet düzlemi.....	9
Şekil 2.7 : Gauss eğriliğinin işaretinin durumları.....	14
Şekil 2.8 : Katenary eğrisi.....	14
Şekil 2.9 : Katenoid.....	15
Şekil 2.10: Helisoid.....	16
Şekil 2.11: Helisoidden katenoid yapımı.....	16
Şekil 4.1 : Yalınkat harmonik fonksiyon.....	37
Şekil 4.2 : Enneper yüzeyi.....	42
Şekil 4.3 : Enneper yüzeyinin z -ekseni etrafında 30 derece döndürülmesi.....	43
Şekil 4.4 : Enneper yüzeyinin z -ekseni etrafında 60 derece döndürülmesi.....	43
Şekil 4.5 : Scherk'in birinci yüzeyi.....	44

MINİMAL YÜZEYLERİN LOG-HARMONİK FONKSİYONLARLA KARAKTERİZASYONU

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı izotermal parametrelerle verilen bir minimal yüzeyi yalınkat harmonik ve yalınkat log-harmonik fonksiyonlarla temsil etmek ve belirli tipteki minimal yüzeylerin Weierstrass-Enneper fonksiyonları ve Gauss eğriliği için growth(genişleme) teoremleri vermektir. Çalışma alanı olarak yalınkat log-harmonik fonksiyonlar seçilmiştir. Log-harmonik fonksiyonlar analitik ve ko-analitik iki fonksiyonun çarpımı şeklinde gösterilen ve genel anlamda logaritması harmonik olan fonksiyonlardır. Tez çalışması için yalınkat log-harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\mathcal{S}_{lh*}$ tanımlanmış ve bu sınıfta çalışılmıştır.

Tezimiz beş bölümden oluşmaktadır, ve birinci bölümü minimal yüzey teorisi, harmonik ve log-harmonik fonksiyonlar üzerine yapılmış çalışmaların tarihçesi üzerine ayrılmıştır.

İkinci bölümde; 3- boyutlu Öklid Uzayında temel kavramlar verilmiş, ve ardından yüzeyler teorisine geçilmiştir. Yüzeyler teorisine ait tanım ve teoremlerden sonra minimal yüzeyler ve örnekleri ele alınmıştır .

Üçüncü bölümde , üzerinde çalışacağımız fonksiyonlar incelenmiştir. Öncelikle kompleks analizdeki temel kavramlar verilmiştir. Log-harmonik fonksiyonlara temel oluşturması açısından yalınkat fonksiyonlar ve harmonik fonksiyonlarla ilgili temel kavramlar ele alınmış ve log-harmonik fonksiyonların alt sınıfları incelenmiştir. Yalınkat log-harmonik fonksiyonların tezimizde kullandığımız alt sınıfı olan $\mathcal{S}_{lh*}$ tanımlanmış ve bu sınıfa bir örnek verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise izotermal parametrelerle verilen minimal yüzeyler ele alınmış ve Weierstrass-Enneper gösterimi ve iyi bilinen minimal yüzey örnekleri verilmiştir. Minimal yüzeylerin Gauss eğriliği ve tezin esas kısımlarından biri olan bir minimal yüzeyin bir yalınkat harmonik dönüşümle temsil edilebilmesi için gerek ve yeter koşul verilmiştir. Bu fikir log-harmonik fonksiyonlara genelleştirilmiştir. Yalınkat log-harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\mathcal{S}_{lh*}$ ele alınmıştır. Bu fonksiyon sınıflarında da yalınkat harmonik dönüşümlerde elde edilen benzer sonuçlara ulaşıldığı görülmüş ve bir örnek verilmiştir.

Beşinci bölümde ise çalışmanın genel bir değerlendirmesi yer almaktadır. Tezimizin asıl kısmını oluşturan bu bölümde, planladığımız teoremler ve sonuçlara yer verilmektedir. Ayrıca elde ettiğimiz sonuçları destekleyen bir örnekte yer almaktadır.

CHARACTERIZATION OF MINIMAL SURFACES BY LOG-HARMONIC FUNCTIONS

SUMMARY

A surface can be viewed informally as a two-dimensional set of points in three-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$. Formally, it is a two-dimensional manifold with a smooth structure. For most of our purposes it will suffice to regard a surface $\mathcal{S}$ as an equivalence class of differentiable mappings $X = \Phi(\mathcal{U})$ from a domain $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ onto a set $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Here $\mathcal{U} = (u, v)$ and $X = (x, y, z)$ denote points in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, respectively. Two representations are equivalent if they induce a diffeomorphism between parameter domains. The Jacobian matrix of any parametric representation Φ is

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}.$$

The surface $\mathcal{S}$ is said to be regular at a point if the Jacobian matrix has rank 2 here or, equivalently if the two column vectors X_u and X_v are linearly independent. This means it is possible to solve locally for one of the coordinates x , y , or z in terms of the other two. The surface $\mathcal{S}$ is regular if it is regular at every point. We shall assume that $\mathcal{S}$ is regular throughout this thesis.

A nonparametric surface is one with the special form $z = f(x, y)$ or with x or y expressed in terms of the other two coordinates. Thus, a regular surface is locally nonparametric but need not be globally nonparametric. Sometimes a nonparametric surface is called a graph.

A surface $\mathcal{S}$ is called a minimal surface, if for each sufficiently small simple closed curve C on $\mathcal{S}$ the portion of $\mathcal{S}$ enclosed by C has the minimum area among all surfaces spanning C . Minimal surfaces can be constructed physically by dipping a loop of wire into soap solution. Because of surface tension, the resulting soap film will assume the shape that minimizes surface area.

A nonparametric minimal surface will be called a minimal graph. By a standart argument in the calculus of variations, a minimal graph $z = f(x, y)$ can be shown to satisfy the nonlinear partial differential equation

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0.$$

This equation has the elegant geometric interpretation that the mean curvature of the surface is everywhere equal to zero.

Indeed, the coefficients of the first and second fundamental forms (E, F, G) and (L, M, N) are easily computed in the nonparametric case, and the minimal surface equation is seen to reduce to $EN - 2FM + GL = 0$ or $H = 0$, where H is the mean curvature of the minimal surface $\mathcal{S}$. It is convenient to take the identical vanishing of the mean curvature as the definition of a minimal surface.

A real-valued function $u(x, y)$ is harmonic if it satisfies Laplace's equation

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Harmonic mappings are complex-valued functions which do not need to be analytic. More precisely, a complex-valued function $f = u + iv$ is called harmonic if its real-valued coordinate functions u and v are harmonic. A harmonic mapping f of a domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ is said to be univalent (or one-to-one) if $f(z_1) \neq f(z_2)$ for all points z_1 and z_2 in $\mathcal{D}$ with $z_1 \neq z_2$. The theory of univalent harmonic mappings is one of the most popular branches of complex analysis. More recently harmonic mappings have been studied actively investigated by complex analysts as generalizations of univalent analytic functions, or conformal mappings. Many classical results of geometric function theory extend to harmonic mappings, but basic questions remain unresolved.

It is the well-known the connection between harmonic mappings and minimal surfaces. The connection arises from the fact that Euclidean coordinates of a minimal surface are harmonic functions of isothermal (or conformal) parameters. The projection of a minimal graph onto its base plane therefore defines a harmonic mapping. Conversely, the harmonic mappings that lift to minimal surfaces have a simple description and the corresponding surfaces can be given by explicit formulas. The representation makes harmonic mappings an effective tool in the study of minimal surfaces.

A log-harmonic mapping is basically complex-valued function which has a harmonic logarithm. Log-harmonic mappings can be represented as a mutiplication of an analytic and a co-analytic mapping. The theory of log-harmonic mappings is relatively new compared to the theory of harmonic mappings. The studies which have been made in this theory are generally analogues of the studies have been for harmonic mappings.

In this thesis we shall represent a minimal surface in isothermal parameters by a univalent log-harmonic mapping. Using this representation, we give some growth theorems of Weierstrass-Enneper functions and Gaussian curvature of a minimal surface which has isothermal parameters.

The thesis is divided into five chapters and each chapter consist of a certain number of subsections.

The first chapter is introductory and is basically intended to call attention to the connection between minimal surfaces and harmonic mappings. In this chapter we also give some historical knowledge of the minimal surface and log-harmonic mappings.

The second chapter is devoted to give fundamental tools of the surfaces which lie in a

three dimensional Euclidean space. In the first subsection of this chapter, topological properties of three dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^3$ are given. The fundamental tools of surface as coordinate patch, Monge patch, tangent plane, the first fundamental form, the second fundamental form, principal curvatures, Gaussian curvature and mean curvature are given in the second subsection of this chapter. Also, the definition of a minimal surface and some examples of minimal surfaces are given in this subsection.

In chapter three we are prepared to introduce the theory of log-harmonic mappings. In the first subsection of this chapter, the fundamental definitions of complex analysis are given, for example singular point, zero point, meromorphic function, etc. In subsection two, the fundamental definitions and theorems of univalent analytic functions are given, for example Schwarz-Pick lemma and Riemann mapping theorem. In third section, we study harmonic mappings. A theorem saying that a harmonic function is univalent in a neighborhood of a point z_0 if and only if $J_f(z_0) \neq 0$ is placed in this subsection. (see the Theorem 3.7) In subsection four, we are interested log-harmonic mappings. We particularly study univalent log-harmonic mappings and define the subclass $\mathcal{S}_{lh*}$ of log-harmonic mappings. we choose this subclass $\mathcal{S}_{lh*}$ for study area.

In chapter four we are interested minimal surfaces. The representation of a minimal surface with isothermal parameters by a univalent harmonic mapping and Weierstrass-Enneper representation are given the first subsection. Some special examples of minimal surfaces are given in the second subsection. Gaussian curvature of minimal surface is investigated in the third subsection. In subsection four, the connection between minimal graphs and harmonic mappings is studied. Last subsection of this chapter we are interested in our main work, namely the connection between minimal surfaces and log-harmonic mappings. Here we define how to represent a (univalent) log-harmonic mapping to a minimal surface with isothermal parameters.(see Definition 4.2 in Chapter 4) We also give a Weierstrass-Enneper type theorem for a minimal surface with isothermal parameters lifted by univalent log-harmonic mapping.(see the Theorem 4.2) In this section we also give a formula for Gaussian curvature of a minimal surface lifted by a (univalent) log-harmonic mapping. (see the Equation 4.33 in Chapter 4)

In last chapter, we obtain main results. First, we give a growth theorem for a function which belongs to subclass Ω_U . The class Ω_U is defined in the second subsection of chapter 3. (see Definition 3.10) Using this growth theorem we obtain growth theorems for the Weierstrass-Enneper functions of a minimal surface lifted by a (univalent) log-harmonic function which belongs to class $\mathcal{S}_{lh*}$. (see the Theorem 5.1) We also give an estimate for Gaussian curvature of a minimal surface lifted by $f \in \mathcal{S}_{lh*}$.

This chapter ends with an example of a (univalent) log-harmonic mapping $f \in \mathcal{S}_{lh*}$ and its second dilatation ω belongs to the class Ω_U . This mapping an example of lifting to minimal surface Catenoid.

Our work is motivated by studies on the theory of minimal surfaces, especially those that are lifted by harmonic mappings; see [5, 23, 24, 25]

1. GİRİŞ

Harmonik tasvirlerle minimal yüzeyler arasındaki ilişki iyi bilinmektedir ve bu ilişki, bir minimal yüzeyin Öklidyen koordinatlarının harmonik fonksiyonlar olmasından kaynaklanır. Bir minimal grafiğin kendi baz düzlemine izdüşümü bir harmonik tasvir tanımlar. Tersine, harmonik tasvirler minimal yüzeyleri lift ederler ve harmonik tasvirlerle karşılık gelen minimal yüzeyler açık formüllerle ifade edilebilirler. Bu gösterim, harmonik tasvirleri minimal yüzeyler teorisi çalışmada etkili bir araç kılar.

L. Euler ve J. L. Lagrange minimum-alan problemini, varyasyon analizinin bir uygulaması olarak ele aldılar ve böylece minimal yüzeyler teorisi başlamış oldu. Minimal-alan problemi, verilen bir sınır için alanı minimum olan bölgenin varlığını sorgulamayı içerir. Fizikçi Joseph Plateau bu problemi sabun filmlerine uyguladıktan sonra, bu problem Plateau problemi olarak bilinmektedir. J. L. Lagrange nin bir minimal yüzeyin diferansiyel denklemini veren çalışması 1762 de basıldı. 1776 da J. B. Meusnier bir minimal yüzeyin ortalama eğriliğinin sıfıra eşit olduğunu göstererek geometrik yorumunu vermiş oldu. 1832 yılına kadar katenoid, helisoid ve düzlem parametrik gösterilişleri bilinen nadir minimal yüzey örnekleriydi. 1832 yılında Heinrich F. Scherk kendi soyadıyla anılan birinci minimal yüzeyini ve 1835 yılında ise Scherk in eyer-kule yüzeyi olarak adlandırılan ikinci minimal yüzeyini betimledi. 19. yüzyılın ortalarına doğru birçok minimal yüzey örnekleri keşfedildi. 1864 ve 1866 yıllarında sırasıyla Alfred Enneper ve Karl Weierstrass birbirinden bağımsız olarak, daha sonra Weierstrass-Enneper gösterimi olarak adlandırılacak olan minimal yüzey gösterimini elde ettiler. Minimal yüzeyler teorisinin tarihsel gelişimini eksiksiz ve bilimsel olarak anlatan çalışma J. C. C. Nitsche tarafından 1989 da basıldı.

Kompleks düzlemde tanımlanmış harmonik fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmayan fonksiyonlardır. Harmonik fonksiyon teorisinin gelişiminde matematiğin bir dalı olan diferansiyel geometri önemli bir rol oynar. 1920 li yılların başlarında

Tibor Rado harmonik fonksiyonları Plateau problemiyle bağlantılı olarak çalıştı. Daha sonra minimal yüzey çalışan diferansiyel geometriciler çalışmalarında harmonik fonksiyonları kullandılar. 1980 li yılların başlarında kompleks analizciler analitik yalınkat (konform) fonksiyonların bir genelleştirilmesi olarak yalınkat harmonik fonksiyonları incelemeye başladılar. Şöyle ki, analitik yalınkat fonksiyonlar için elde edilen bulguların yön-koruyan yalınkat harmonik fonksiyonlar için geçerli olup olmadığı sorusu gündeme geldi. 1984 yılında Clunie ve Sheil-Small [1] yayımladıkları çalışmalarında, analitik yalınkat fonksiyonlar teorisindeki genişleme, distorsiyon, örtülüş teoremleri ve katsayı eşitsizliklerinin yön-koruyan harmonik yalınkat fonksiyonlar için benzerlerini ortaya koyarak bu sorunun yanıtını vermiş oldular. 1986 yılında Hengartner ve Schober, Riemann tasvir teoreminin benzerini harmonik fonksiyonlar için verdiler. Bu çalışmalarla birlikte harmonik fonksiyonlar teorisine ilgi artarak devam etti.

Harmonik fonksiyonlar teorisi üzerine yapılan çalışmalar devam ederken, bunlara paralel olarak log-harmonik fonksiyonlar teorisi ortaya atılmış ve bu alan üzerine çalışmalara başlanmıştır. Bu kez harmonik fonksiyonlar üzerine yapılan araştırmaların benzeri log-harmonik fonksiyonlar için verilmeye çalışılmıştır. Bu alandaki çalışmalar 1984 yılında Z. Abdulhadi ile başlamış ve teoriyi açıklayan ilk yayın 1988 yılında olmuştur [2]. Bu yayında $H.\overline{H}(D)$ ve $F(w, D)$ şeklinde iki sınıf tanımlanmıştır. Yayında bu iki sınıf arasında bağlantılar kurularak log-harmonik ve yalınkat log-harmonik fonksiyonların tanımları verilmiştir. Ardından yapılan çalışmalarda ise log-harmonik fonksiyonlara ait sınıflar tanımlanmış, bunlarla analitik fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. Kurulan bu bağlantılar ile log-harmonik fonksiyonlara dair distorsiyon teoremleri elde edilmiştir.

Biz bu çalışmada, harmonik fonksiyonları ve bazı alt sınıflarını kullanarak belirli tipteki bir minimal yüzeyin Gauss eğriliğini, Weierstrass-Enneper parametreleriyle ifade edip, benzer çalışmayı tanımlamış olduğumuz yalınkat log-harmonik fonksiyonların bir alt sınıfı olan $\mathcal{S}_{lh*}$ için de elde edeceğiz.

2. YÜZEYLER TEORİSİ

2.1 3-Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

$\mathbb{R}$ reel sayılar cismini göstermek üzere 3 boyutlu reel sayılar kümesi

$$\mathbb{R}^3 = \{(p_1, p_2, p_3) | p_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3\}$$

olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^3$ kümesinde toplama işlemi $(p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$(p_1, p_2, p_3) + (q_1, q_2, q_3) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

eşitliği ile verilir. Skalerle çarpma işlemi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\lambda(p_1, p_2, p_3) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda p_3)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^3$ kümesi $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayı olur. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^3 p_i q_i$$

eşitliği ile tanımlanan $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto \langle p, q \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^3$ uzayının doğal iç çarpımı veya Öklid iç çarpımı denir. $p \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

şeklinde tanımlanan $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir norm belirler. Buna göre $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^3$ uzayında metriktir. Bu metrik altında $\mathbb{R}^3$ uzayına Öklid Uzayı denir. Bu uzay kimi zaman E^3 ile gösterilir.

r pozitif bir reel sayı ve $p_0 \in \mathbb{R}^3$ olsun. $\{p : p \in \mathbb{R}^3 \text{ ve } \|p - p_0\| < r\}$ kümesine, p_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir ve $B_r(p_0)$ ile gösterilir. $A \subset \mathbb{R}^3$ olmak üzere A kümesinin her bir p_0 elemanı yine A kümesi içinde kalan en az bir açık yuvarın merkezi oluyorsa A kümesine $\mathbb{R}^3$ kümesinin bir açık alt kümesi denir.

Genel olarak bir fonksiyon tanım kümesindeki her bir elemanı görüntü kümesindeki bir tek elemana eşleştiren bir kuraldır. Örneğin y , x 'in bir fonksiyonudur ifadesi iki sayı cümlesi arasında, cümlelerden birindeki herbir x değerine diğer cümlede belli bir y değeri karşılık gelecek şekilde, bir bağıntıyı açıklamaktadır. Bununla beraber, nesneler geometrik olduğu zaman bu bağıntıya dönüşüm veya resmetme adı verilir.

Reel değişkenli bir vektörel fonksiyon tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi, görüntü kümesi ise vektörler kümesi olan bir fonksiyondur. Örneğin, eğri reel değişkenli bir vektörel fonksiyondur. Vektör değişkenli, vektör değerli bir fonksiyon ise tanım ve görüntü kümesi vektörler kümesi olan bir fonksiyondur. Daha açık bir ifade ile $\mathcal{V}$ vektörler kümesi olmak üzere

$$X : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

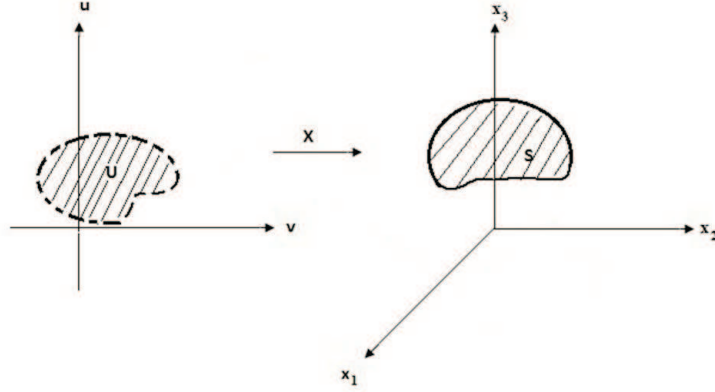
biçiminde tanımlanan X fonksiyonuna vektör değerli vektörel fonksiyon denir. Çalışmada $n = 2$, $m = 3$ olması durumu incelenecektir.

X vektörel fonksiyonunun $I \subset \mathbb{R}$ aralığında 3. mertebeden türevi var ve bu türev fonksiyonu aynı aralıkta sürekli ise X vektörel fonksiyonuna I aralığında 3. sınıftandır denir ve $X \in C^3(I)$ şeklinde gösterilir. I , $\mathbb{R}$ 'nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ biçiminde düzgün (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne, $\mathbb{R}^3$ uzayı içinde bir eğri denir.

X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere $F : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Y uzayının her açık alt kümesinin F fonksiyonu altındaki ters görüntüsü, X uzayının açık bir alt kümesi ise F fonksiyonu süreklidir denir. $F : X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $F^{-1} : Y \rightarrow X$ fonksiyonu da sürekli ise, F fonksiyonu X uzayından Y uzayına bir homeomorfizmdir denir.

2.2 Yüzey Kavramı

Tanım 2.1 (Koordinat Yaması) $X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ biçiminde tanımlanan üzerine $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ vektörel fonksiyonu göz önüne alınsın.



Şekil 2.1: $\mathcal{U}$ bölgesinin X dönüşümü altında görüntüsü

$n \geq 1$ olmak üzere $X \in C^n(\mathcal{U})$ ise $\mathcal{S}$ 'ye n -inci sınıftan bir yüzey ve X 'de $\mathcal{S}$ 'nin n -inci sınıftan düzgün parametrik gösterilişi denir. Eğer, her $(u, v) \in \mathcal{U}$ parametreleri için $\text{rank}(JX) = 2$ ise $\mathcal{S}$ 'ye düzgün yüzey adı verilir [3].

X içine dönüşüm olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlıyorsa X 'e $\mathcal{S}$ yüzeyinin n ' inci sınıftan bir koordinat yaması denir [4].

(i) $X \in C^n(\mathcal{U})$ ($n \geq 1$) dir.

(ii) $\forall (u, v) \in \mathcal{U}$ için $X_u \times X_v \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(JX) = 2$ dir. Burada

$$JX = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır.

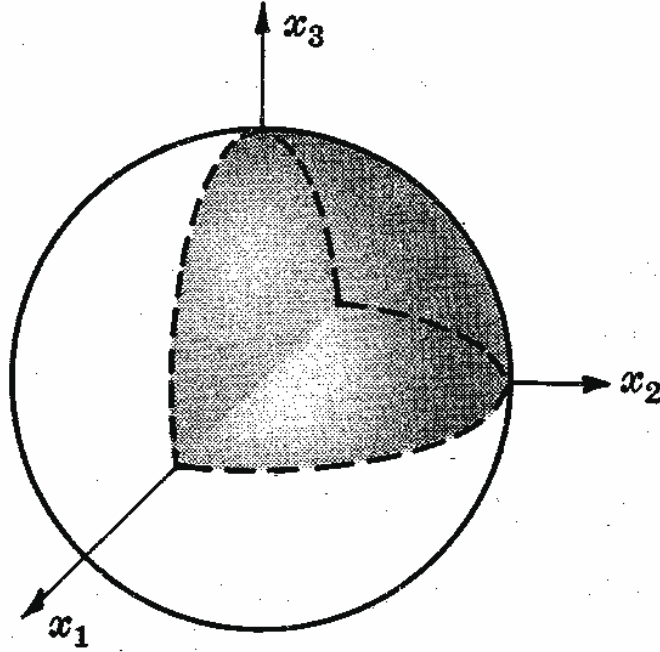
(iii) X bir homeomorfizmadır. (eşyapı, topolojik dönüşüm)

Tanım 2.2 (Monge Yama) $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in C^n(X)$, $n \geq 1$ olmak üzere $X(u, v) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X = (u, v, f(u, v))$ biçiminde tanımlanan yamalara Monge Yaması denir.

Tanım 2.3 (Basit Yüzey) $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ herhangi bir alt küme ve $\mathcal{B} = \{X|X, \mathcal{S}'\text{'nin } n\text{'inci sınıfıtan bir koordinat yaması } \}$ biçiminde tanımlanmış olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{S}'$ ye n 'inci sınıfıtan bir basit yüzey ve $\mathcal{B}'$ ye de $\mathcal{S}'$ 'nin bir tabanı ya da koordinat yama gösterilişı denir [4]:

- (i) $\mathcal{B}, \mathcal{S}'$ yi örter, yani her $p \in \mathcal{S}$ için $p \in X^*(\mathcal{U}^*)$ olacak şekilde en az bir $X^* \in \mathcal{B}$ yaması vardır.
- (ii) Her $X \in \mathcal{B}$ için $X(\mathcal{U}) = G \cap \mathcal{S}$ olacak biçimde en az bir $G \subset \mathbb{R}^3$ açık kümesi vardır.

En iyi bilinen basit yüzey örneğı C^∞ sınıfından olan küre yüzeyidir.



Şekil 2.2: Küre

$$X_1(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \text{ üstten}$$

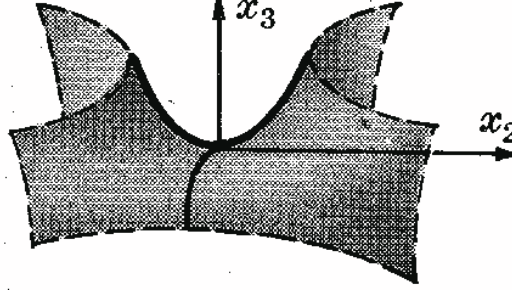
$$X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}) \text{ alttan}$$

$$X_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v) \text{ sağdan}$$

$$X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v) \text{ soldan}$$

$$X_5(u, v) = (\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v) \text{ önden}$$

$X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, u, v)$ arkadan olmak üzere küre yüzeyini örten koordinat yamalarıdır. Bir başka basit yüzey örneği ise C^∞ sınıfından olan ve $X(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2})$ parametrik denklemi ile verilen hiperboloid paraboloid yüzeyidir.



Şekil 2.3: Hiperboloid paraboloid

Basit yüzey kendini kesmez. Örneğin, $r = \sin 2u$, $0 < u < \frac{3}{4}\pi$ kutupsal koordinatlarıyla verilen eğrinin dik koordinatlardaki gösterimi :

$$\alpha(u) = (\sin 2u \cos u, \sin 2u \sin u, 0)$$

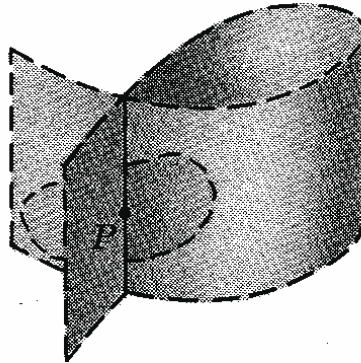
biçimindedir. Bu eğrinin oluşturduğu silindirin parametrik denklemi

$$\mathcal{U} = \left\{ (u, v) \mid 0 < u < \frac{3}{4}\pi, -\infty < v < \infty \right\}$$

olmak üzere,

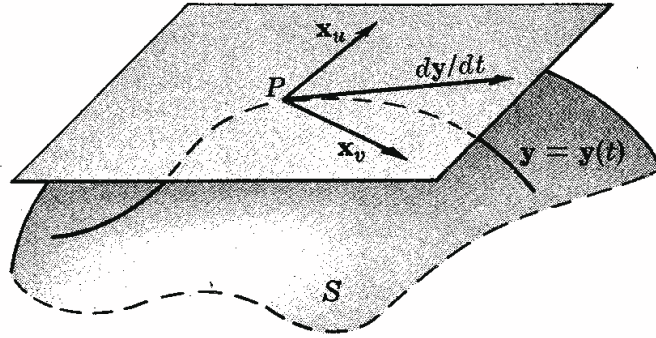
$$X(u, v) = (\sin 2u \cos u, \sin 2u \sin u, v)$$

ile ifade edilir. Silindir yüzeyi kendi kendini kestiğinden dolayı basit olmayan yüzeydir.



Şekil 2.4: Silindir

Tanım 2.4 (Teğet Düzlem) S yüzeyinin $P_0 = X(u_0, v_0) = X(t_0)$ noktasındaki teğet düzlemi P_0 noktasından geçen eğrilerin teğetlerinden oluşur ve $\mathcal{T}_{P_0}(S)$ ile gösterilir.



Şekil 2.5: Teğet düzlem

Dolayısıyla herhangi bir teğet vektör

$$\mathbf{X}'(t_0) = \mathbf{X}_u \frac{du}{dt}(t_0) + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}(t_0)$$

olduğundan bu teğet düzlem $\mathbf{X}_u$ ve $\mathbf{X}_v$ tarafından gerilir. $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ lineer bağımsız vektörleri S 'nin teğet düzlemlerinin bir tabanı (bazı) olarak alınabilir. Bu teğet düzlemin birim normal vektörü :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.5 (Birinci Temel Form) $C : X(t)$, S yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. C 'nin teğeti

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}$$

olmak üzere C 'nin yay uzunluğu fonksiyonu

$$s = \int_{t_0}^t |\mathbf{X}'(t)| dt$$

şeklinde tanımlanır. Yay uzunluğu fonksiyonunun t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{X}'(t)| \Rightarrow ds = |\mathbf{X}'(t)| dt$$

elde edilir. $d\mathbf{X} = \mathbf{X}'(t)dt$ olduğundan $ds = |d\mathbf{X}|$ yazılabilir.

Buradan

$$\begin{aligned} ds^2 &= |d\mathbf{X}|^2 = \langle d\mathbf{X}, d\mathbf{X} \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}_u du + \mathbf{X}_v dv, \mathbf{X}_u du + \mathbf{X}_v dv \rangle \\ &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle du^2 + 2 \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle dudv + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle dv^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

olduğu görülür. $E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle$, $G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$ denilirse ve bu değerler (2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

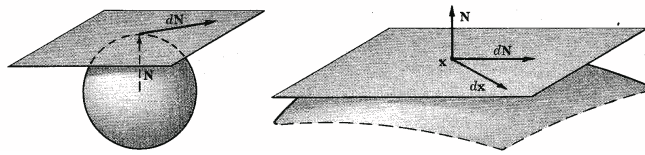
$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = I(du, dv)$$

şeklinde bir ifade elde edilir. $I(du, dv)$ ifadesine $\mathcal{S}$ yüzeyinin birinci temel formu denir. Birinci temel form $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerindeki iç çarpımı ifade eder ve parametre değişimden etkilenmez; fakat katsayıları etkilenebilir.

Tanım 2.6 (İkinci Temel Form) $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$, $\mathcal{S}$ yüzeyi üzerinde en az ikinci sınıftan bir koordinat yaması olsun. Bu durumda yama üzerinde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}$$

birim normal vektörü en az birinci sınıftandır. $\mathbf{n}$ birim normal vektör olduğundan $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ dir. Buradan diferansiyel alınarak $\langle d\mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğu kolayca görülür. Bu iç çarpımın sıfır olması $d\mathbf{n} \perp \mathbf{n}$ olduğunu gösterir. Öte yandan $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ olduğundan diferansiyeli $d\mathbf{n} = \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv$ biçimindedir.



Şekil 2.6: Kürenin teğet düzlemi

Şimdi aşağıdaki eşitlik göz önüne alınsın:

$$\begin{aligned} II &= -\langle d\mathbf{X}, d\mathbf{n} \rangle = -\langle \mathbf{X}_u du + \mathbf{X}_v dv, \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv \rangle \\ &= -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{n}_u \rangle du^2 - (\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{n}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{n}_u \rangle) dudv - \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{n}_v \rangle dv^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Burada

$$-\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{n}_u \rangle = L, \quad -(\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{n}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{n}_u \rangle) = 2M, \quad -\langle \mathbf{X}_v, \mathbf{n}_v \rangle = N$$

olarak isimlendirilsin. Bu değerler (2.2) de yerine yazıldığında bir yüzeyin ikinci temel formu denilen

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

eşitliği elde edilir. X_u ve X_v her $(u, v) \in \mathcal{U}$ noktasında $\mathbf{n}$ 'ye dik olduğundan $\langle X_u, \mathbf{n} \rangle = 0$ 'dır. Buradan u ya göre türev alınırsa

$$\frac{d}{du} \langle X_u, \mathbf{n} \rangle = \langle X_{uu}, \mathbf{n} \rangle + \langle X_u, \mathbf{n}_u \rangle = 0, \quad -\langle X_u, \mathbf{n}_u \rangle = \langle X_{uu}, \mathbf{n} \rangle = L$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde $\langle X_v, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğundan v ye göre türev alındığında

$$\frac{d}{dv} \langle X_v, \mathbf{n} \rangle = \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle + \langle X_v, \mathbf{n}_v \rangle = 0, \quad -\langle X_v, \mathbf{n}_v \rangle = \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle = N$$

elde edilir. $\langle X_u, \mathbf{n} \rangle = 0$ olduğundan bu ifadeden v ye göre türev alındığında

$$\frac{d}{dv} \langle X_u, \mathbf{n} \rangle = \langle X_{uv}, \mathbf{n} \rangle + \langle X_u, \mathbf{n}_v \rangle = 0, \quad -\langle X_u, \mathbf{n}_v \rangle = \langle X_{uv}, \mathbf{n} \rangle$$

sonucu bulunur. Benzer şekilde $\langle X_v, \mathbf{n} \rangle$ ifadesinin u 'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{du} \langle X_v, \mathbf{n} \rangle = \langle X_{vu}, \mathbf{n} \rangle + \langle X_v, \mathbf{n}_u \rangle = 0, \quad -\langle X_v, \mathbf{n}_u \rangle = \langle X_{vu}, \mathbf{n} \rangle$$

elde edilir. X en az ikinci sınıftan olduğundan ikinci dereceden kısmi türevleri süreklidir. Dolayısıyla $X_{uv} = X_{vu}$ sağlanır. Bu durumda

$$II(du, dv) = \langle X_{uu}, \mathbf{n} \rangle du^2 + 2 \langle X_{uv}, \mathbf{n} \rangle dudv + \langle X_{vv}, \mathbf{n} \rangle dv^2 = \langle dX^2, \mathbf{n} \rangle$$

oldüğundan $II(du, dv) = \langle dX^2, \mathbf{n} \rangle$ biçiminde de yazılabilir. II 'ye S yüzeyinin ikinci temel formu denir. Bu form $\mathbf{n}$ birim normal vektörünün işaretini koruduğu parametre dönüşümlerinden etkilenmez.

Tanım 2.7 (Eğrilik Kavramı) S en az ikinci sınıftan bir yüzey, $X = X(u, v)$ $p \in S$ 'yi içeren bir koordinat yaması ve $C : X(t) = X(u(t), v(t))$ ise p noktasından geçen ikinci sınıftan bir düzgün eğri olsun. C eğrisinin yay uzunluğunun s cinsinden parametrizasyonu $C : X(s)$ göz önüne alınsın. O halde birim teğet vektör $T = \dot{X}(s)$ olur. Eğrilik vektörü $\dot{T}$ 'nin $\mathbf{n}$ birim normal vektörüne dik izdüşümüne C eğrisinin p noktasında T yönündeki normal eğrilik vektörü denir ve

$$k_n = \langle \dot{T}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$$

ile gösterilir. Bu vektörün bileşenine, yani $\langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{n} \rangle$ sayısına C 'nin p noktasındaki normal eğriliği denir ve

$$\kappa_n = \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{n} \rangle$$

olarak gösterilir. C eğrisinin p noktasındaki birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{X}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|}$$

ve eğrilik vektörü

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|}$$

dir. C eğrisi boyunca $\mathbf{T}$, $\mathbf{n}$ 'ye diktir. Dolayısıyla $\langle \mathbf{T}, \mathbf{n} \rangle = 0$ olur. Buradan t 'ye göre türev alınır

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{T}, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right\rangle = 0 \text{ ve } \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle = - \left\langle \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right\rangle$$

elde edilir. Buna göre normal eğrilik κ_n aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|}, \mathbf{n} \right\rangle = \frac{\left\langle \frac{d\mathbf{T}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|} \\ &= - \frac{\left\langle \mathbf{T}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right\rangle}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|} = - \frac{\left\langle \frac{d\mathbf{X}}{dt}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right\rangle}{\left| \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|^2} = - \frac{\left\langle \frac{d\mathbf{X}}{dt}, \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right\rangle}{\left\langle \frac{d\mathbf{X}}{dt}, \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right\rangle} \\ &= - \frac{\left\langle \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}, \mathbf{n}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{n}_v \frac{dv}{dt} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt}, \mathbf{X}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{X}_v \frac{dv}{dt} \right\rangle} \quad (2.3) \\ &= \frac{- \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{n}_u \rangle \left(\frac{du}{dt} \right)^2 - \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{n}_v \rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{n}_u \rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{n}_v \rangle \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}{\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u \rangle \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} \\ &= \frac{L \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2M \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + N \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}. \end{aligned}$$

$u' = \frac{du}{dt}$ ve $v' = \frac{dv}{dt}$ olduğundan κ_n normal eğriliği, C eğrisinin p noktasındaki teğeti $\mathbf{T}$ 'nin yönüne bağlıdır. Dolayısıyla

$$\kappa_n = \frac{L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2} = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)}$$

elde edilir. Eğer p noktasında $\kappa_n > 0$ ise o noktada yüzey $\mathbf{n}$ yönünde dışa doğru, $\kappa_n < 0$ ise içe doğru eğiliyor demektir. Ayrıca $\kappa_n = \frac{II(du, dv)}{I(du, dv)}$ olduğundan κ_n normal eğriliği

parametre değişiminden bağımsızdır. $I \geq 0$ olduğundan κ_n nin işareti II ikinci temel formun işaretine bağlıdır.

Tanım 2.8 (Asal Eğrilik, Gauss Eğrilik ve Ortalama Eğrilik) $\kappa_n = \kappa_n(T)$ fonksiyonunun ekstremleri $\kappa_1 = \min \kappa_n(T)$ ve $\kappa_2 = \max \kappa_n(T)$ ile gösterilsin. Bu değerlere S yüzeyinin p noktasındaki asal eğrilikleri denir. S 'nin p noktasındaki ortalama eğriliği ve gauss eğriliği sırasıyla :

$$H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2)$$

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

şeklinde tanımlanır. S 'nin asal eğrilikleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$\frac{du}{dt} = \xi$ ve $\frac{dv}{dt} = \eta$ olsun. Bu ifadeler (2.3) de yerine yazılırsa

$$\kappa_n = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}$$

elde edilir. Bu fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini $E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$ koşulu altında Lagrange Çarpanlar Yöntemi ile hesaplanabilir:

$$L\xi + M\eta = \lambda (E\xi + F\eta) \quad (2.4)$$

$$M\xi + N\eta = \lambda (F\xi + G\eta) \quad (2.5)$$

ve $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ olduğundan

$$B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisi olmak üzere $|B - \lambda A| = 0$ denklemi sağlanır. (2.4) eşitliği ξ ile (2.5) eşitliği ise η ile çarpıp toplanırsa,

$$L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = \lambda (E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2) = \lambda 1 = \lambda$$

elde edilir. λ 'nın özdeğerleri olan κ_1 ve κ_2 asal eğrilikleri aynı zamanda $|B - \lambda A| = 0$ denkleminin de kökleridir. B ve A matrisleri yerine konulursa

$$|B - \lambda A| = \begin{vmatrix} L - \lambda E & M - \lambda F \\ M - \lambda F & N - \lambda G \end{vmatrix} = 0$$

elde edilmiş olur. Bu matrisin determinanı

$$LN - \lambda GL - \lambda EN + \lambda^2 EG - \lambda^2 F^2 + 2\lambda FM - M^2 = 0$$

dır. Bir başka ifadeyle

$$\lambda^2 (EG - F^2) - \lambda (EN + GL - 2FM) + LN - M^2 = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri $\kappa_1 = \lambda_1$ ve $\kappa_2 = \lambda_2$ olduğundan ortalama eğrilik

$$H = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \right)$$

ve gauss eğriliği de

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

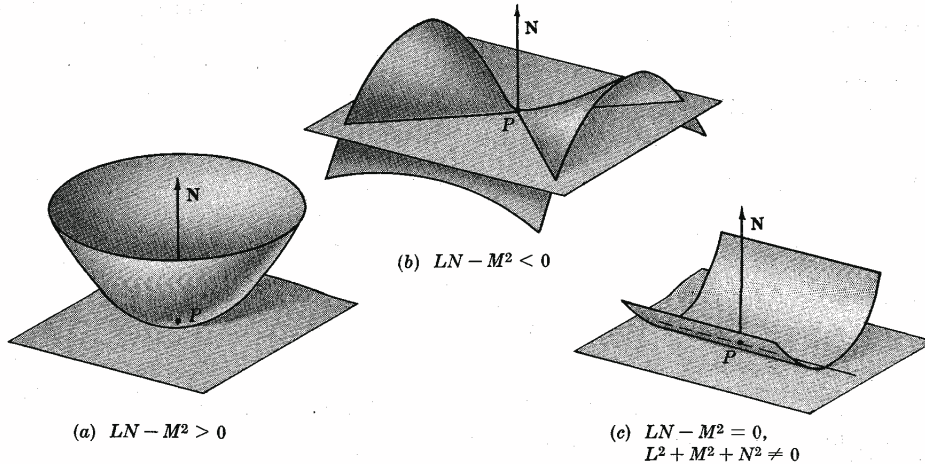
şeklinde elde edilir [5].

2.2.1 Gauss eğriliğinin geometrik yorumu

Gauss eğriliğinin işaret değiştirmesi sonucunda oluşan yüzey noktalarının cinsi aşağıdaki durumlarda ifade edilir:

- (1) $K_p = \kappa_1 \kappa_2 > 0$ ise verilen noktada κ_1 ve κ_2 asal eğriliklerinin işaretleri aynıdır. Dolayısıyla bu noktanın bir komşuluğunda da işaretlerini korurlar. Yüzey verilen noktada ya hep içe doğru ya da hep dışa doğru eğiliyor demektir. Bu tip noktalara eliptik noktalar denir. Örneğin, küre yüzeyinin her noktası eliptiktir.
- (2) $K_p = \kappa_1 \kappa_2 < 0$ ise verilen noktada κ_1 ve κ_2 asal eğrilikleri ters işaretlidir. Yani yüzey bu noktada bir yönde dışa doğru eğilirken, başka bir yönde içe doğru eğiliyor demektir. Bu tip noktalara hiperbolik noktalar denir. Örneğin, hiperboloid yüzeyinin her noktası hiperboliktir.
- (3) $K_p = \kappa_1 \kappa_2 = 0$ ve $(\kappa_1, \kappa_2) \neq (0, 0)$ olması durumunda asal eğriliklerden biri sıfırdır. Bu tip noktalara parabolik noktalar denir. Örneğin, dairesel silindirin her noktası paraboliktir.
- (4) $K_p = \kappa_1 \kappa_2 = 0$ ve κ_1, κ_2 asal eğriliklerinin ikisi birden sıfır ise bu tip noktalara düzlemsel noktalar denir. Örneğin, düzlemin her noktası düzlemseldir.

Tanım 2.9 (Minimal Yüzey) S yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir.



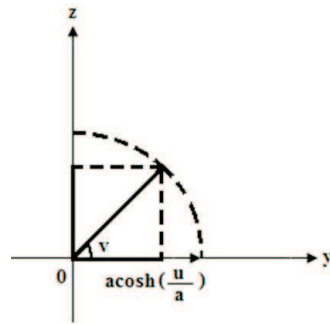
Şekil 2.7: Gauss eğriliğinin işaretinin durumları

Önerme 2.1 S minimal yüzey ise her $p \in S$ için $K_p \leq 0$ dır.

İspat . S minimal yüzey olduğundan $H = 0$ dır. $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ olduğu göz önüne alınarak $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ ve buradan $\kappa_1 = -\kappa_2$ bulunur. Buna göre $K_p = \kappa_1 \kappa_2 = -(\kappa_2)^2$ elde edilir. Dolayısıyla $K_p \leq 0$ olduğu açıktır. Böylece S bir minimal yüzey ise eliptik noktalara sahip olmadığı anlaşılır [6].

Minimal Yüzey Örnekleri

- (1) **Katenoid:** xy -düzlemindeki $y = a \cosh(\frac{x}{a})$ katenary eğrisinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen yüzeye katenoid denir. Katenary eğrisinin parametrisasyonu $\alpha(u) = (u, a \cosh(\frac{u}{a}), 0)$ biçimindedir.



Şekil 2.8: Katenary eğrisi

Bu eğri x -ekseni etrafında döndürülürse parametrik denklemleri

$$x = u, \quad y = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \cos v, \quad z = a \cosh\left(\frac{u}{a}\right) \sin v$$

olan katenoid elde edilir. Birinci temel form katsayıları:

$$E = \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right), \quad F = 0, \quad G = a^2 \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right)$$

İkinci temel form katsayıları:

$$L = -\frac{1}{a}, \quad M = 0, \quad N = -a$$

Asal eğrilikleri:

$$\kappa_1 = \frac{1}{a} \operatorname{sech}^2\left(\frac{u}{a}\right), \quad \kappa_2 = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}\left(\frac{u}{a}\right)$$

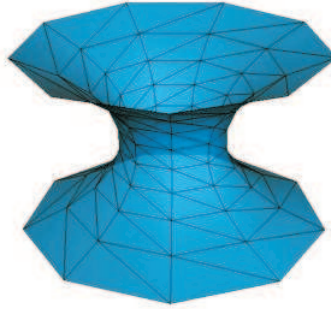
Ortalama eğriliği:

$$H = EN + GL = \left[\cosh^2\left(\frac{u}{a}\right) \right] (-a) + \left[a^2 \cosh^2\left(\frac{u}{a}\right) \right] \left(\frac{1}{a} \right) = 0$$

Gauss eğriliği:

$$K = -\frac{1}{a^2} \operatorname{sech}^4\left(\frac{u}{a}\right)$$

şeklindedir.



Şekil 2.9: Katenoid

(2) **Helisoid:** Parametrik denklemleri

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = cv, \quad c = \text{sabit}$$

şeklinde verilen helisoid için, birinci temel form katsayıları:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = c^2 + u^2$$

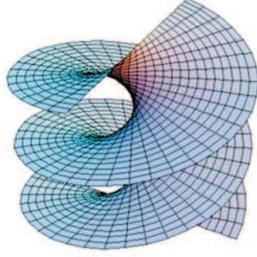
İkinci temel form katsayıları:

$$L = 0, \quad M = -\frac{c}{c^2 + u^2}, \quad N = 0$$

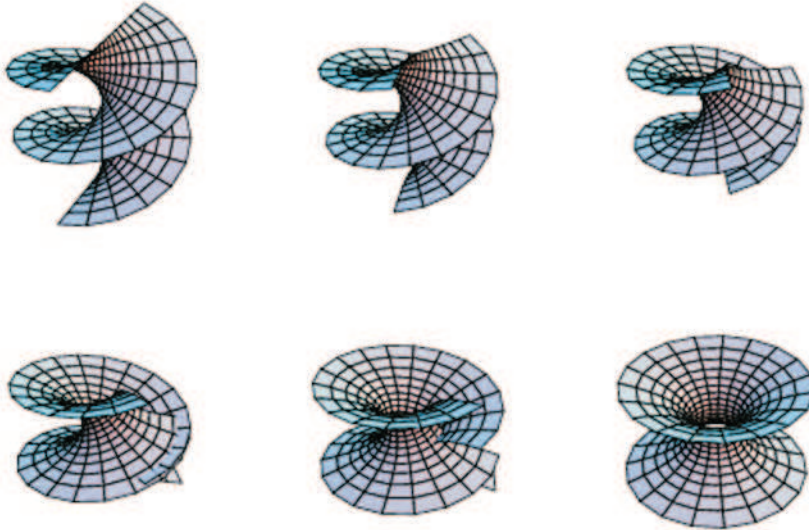
Ortalama ve Gauss eğriliği:

$$H = 0, \quad K = -\frac{c^2}{(c^2 + u^2)^2}$$

şeklindedir.



Şekil 2.10: Helisoid



Şekil 2.11: Helisoidden katenoid yapımı

3. LOG-HARMONİK FONKSİYONLAR TEORİSİ

3.1 Kompleks Analizde Temel Tanımlar

Tanım 3.1 (Tekil (Singüler) Nokta) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olmasın. Fakat z_0 'ın her civarında analitik olduğu bir nokta bulunuyorsa, z_0 noktasına f 'nin tekil noktası denir.

f fonksiyonu ve tekil noktası z_0 verilsin. Eğer z_0 'ın bu nokta hariç her yerinde f 'nin analitik olduğu bir komşuluğu varsa, z_0 'a f 'nin ayrık tekil noktası denir.

Örneğin, $f(z) = \frac{1}{z}$, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, ($z \neq 0$) fonksiyonu $z = 0$ noktası hariç her noktada analitiktir. Ayrıca $z = 0$ 'da sürekli değildir ve dolayısıyla $f'(0)$ tanımlı değildir. $z = 0$ noktası bu fonksiyonun tekil noktasıdır. Diğer taraftan, $|z|^2$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik olmadığından tanım gereği bu fonksiyon tekil noktaya sahip değildir.

Rasyonel fonksiyonların paydasını sıfır yapan noktalar dışında analitiktir. Paydayı sıfır yapan değerler fonksiyonun tekil noktasıdır.

Tanım 3.2 (Kutup Yeri) Bir ayrık tekil nokta olan z_0 civarındaki ve bir $0 < |z - z_0| < r$ bağlantılı bölgesinde f fonksiyonunu gösteren

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

Laurent serisinde, $(z - z_0)$ 'ın negatif kuvvetleri serisine $f(z)$ 'nin z_0 civarındaki esas parçası denir.

Esas parça yalnız sonlu sayıda terimi kapsasın. Bu durumda $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots$ katsayılarının tümü sıfır olacak şekilde bir m tamsayısı vardır ve bu pozitif r sayısı için $0 < |z - z_0| < r$ kaldığında

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad b_m \neq 0$$

şeklinde olur. Bu durumda ayrık tekil nokta olan z_0 noktasına f fonksiyonunun m ' inci

mertebeden kutup noktası denir. 1' inci mertebeden kutup noktası yerine basit kutup denir. f 'nin z_0 noktası civarında esas parçasının sonsuz sayıda terimi varsa bu noktaya f fonksiyonunun esas tekil noktası denir. Örneğin,

$$\frac{z^2 - 2z - 3}{z - 2} = -\frac{3}{z - 2} + 2 + (z - 2)$$

fonksiyonunun $z = 2$ 'de basit kutbu vardır. Diğer bir örnek, ($|z| > 0$)

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} z + \frac{1}{7!} z^3 + \dots$$

fonksiyonunun $z = 0$ 'da 3' üncü mertebeden bir kutbu vardır. Fakat

$$\cosh\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}}$$

fonksiyonunun $z = 0$ da esas tekil noktası vardır.

Tanım 3.3 (Sıfır Noktası) $f(z) = 0$ olan z değerine f fonksiyonunun sıfır noktası denir. f , z_0 'da analitik ve f ile onun $(m-1)$ ' inci dereceden türevlerinin z_0 'daki değerleri sıfır, fakat m ' inci türevi yani $f^m(z_0) \neq 0$ durumuna, f 'nin m ' inci dereceden sıfır noktası denir.

Tanım 3.4 (Holomorfik Fonksiyon) $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ açık alt kümesinde tanımlı, her $a \in \mathcal{D}$ için f fonksiyonu türevli ve aldığı değerler yine $\mathcal{D}$ açık alt kümesinde kalıyorsa f 'ye holomorfik ya da analitik fonksiyon denir.

Tanım 3.5 (Meromorfik Fonksiyon) $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde kutup noktaları dışında holomorfik(analitik) olan fonksiyonlara meromorfik fonksiyon denir [7].

3.2 Yalınkat Fonksiyonlar

$\mathbb{C}$ kompleks düzleminde açık bağlantılı bir kümeye bölge denir. Bir bölgenin tümleyeni bağlantılı ise kendisi basit bağlantılı olarak isimlendirilir. Bir doğru parçasının sürekli görüntüsüne kompleks düzlemde bir yay denir. Kendi kendini kesmeyen bir yaya Jordan yayı adı verilir. Kapalı eğri, bir çemberin sürekli görüntüsüdür. Basit bağlantılı eğri ya da Jordan eğrisi kendi kendini kesmeyen kapalı bir eğridir. Jordan eğrisinin içi Jordan bölgesi olarak isimlendirilir. Bu çalışmada basit bağlantılı bölgeleri temsil için $\mathcal{D}$ kullanılmıştır. $|z| < 1$ eşitsizliğini gerçekleyen $z \in \mathbb{C}$ noktalarının cümlesi

(açık) birim disk olarak isimlendirilir ve bu özel basit bağlantılı cümle $\mathbb{U}$ notasyonu ile gösterilmiştir.

Tanım 3.6 (Diferansiyellenebilme) [8] Kompleks değerli bir f fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

türevine sahipse diferansiyellenebilirdir denir. Aynı f fonksiyonu z_0 noktasının komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise z_0 noktasında analitiktir denir.

Kompleks değerli f fonksiyonu bir bölgenin her z_0 noktasında tanımlı ve türevi varsa, bölgede analitiktir. Bu durumda f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir olduğundan her mertebeden türeve sahiptir ve

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$$

şeklinde Taylor Serisi'ne sahip olur. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) kompleks fonksiyonu geometrik olarak z -düzlemindeki bir bölgeyi w -düzlemindeki bir bölgeye resmeden bir dönüşüm olarak da düşünülebilir. Eğer f analitik ise

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar. Bu aynı zamanda yeter şarttır. $f = u + iv$ fonksiyonunun Jakobiye

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik f fonksiyonu için Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak

$$J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = |u_x + iu_y|^2 = |f'(z)|^2 \quad (3.1)$$

eşitliği her zaman doğrudur.

Tanım 3.7 (Yalınkat Fonksiyon) Bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesindeki her $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ için $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ bire-birlik koşulu gerçekleyen analitik f fonksiyonuna yalınkat fonksiyon denir.

Tanım 3.8 f fonksiyonu bir z_0 noktasının komşuluğunda yalınkat ise yerel yalınkat fonksiyon adını alır.

Teorem 3.1 [9] *Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.*

İspat . (3.1) şeklinde verilen analitik f fonksiyonunun Jakobiyeninin Teorem 3.1'den dolayı sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter şart yerel yalınkat olmasıdır.

Tanım 3.9 İki diferansiyellenebilir yay arasındaki açıyı koruyan fonksiyona konform fonksiyon denir.

Teorem 3.2 *Analitik yalınkat fonksiyonlar konform fonksiyonlardır.*

İspat . $C_1 : z_1(t)$, $a \leq t \leq b$ ve $C_2 : z_2(s)$, $c \leq s \leq d$ olmak üzere C_1 ve C_2 eğrileri, bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde kesişen iki düzgün Jordan yayı olsun ve herhangi bir $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında kesişsinler. Yani $z_0 = z(t_0) = z(s_0)$ ifadesi gerçeklensin. Öte yandan $w = f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik ve yalınkat olsun. $C_1 : z_1(t)$ ve $C_2 : z_2(s)$ eğrileri $\mathcal{D}$ de iki düzgün Jordan yayı olduğundan

$$z'(t_0) \neq 0, z'(s_0) \neq 0 \quad (3.2)$$

eşitsizliklerini sağlarlar. f , $\mathcal{D}$ 'de yalınkat olduğu için $\mathcal{D}$ 'nin her noktasında yerel yalınkattır, ve $f'(z) \neq 0$ eşitsizliğini sağlar. O halde C_1 ve C_2 eğrilerinin kesişim noktası olan $z_0 \in \mathcal{D}$ için de

$$f'(z_0) \neq 0 \quad (3.3)$$

eşitsizliği gerçekenir. (3.2) ve (3.3)'deki eşitsizlikler birlikte düşünüldüğü zaman

$$w'_t(t_0) = f'(z_0)z'_t(t_0) \neq 0$$

$$w'_s(s_0) = f'(z_0)z'_s(s_0) \neq 0$$

elde edilir. Buradan ise

$$\arg w'_t(t_0) = \arg [f'(z_0)z'_t(t_0)] = \arg f'(z_0) + \arg z'_t(t_0)$$

$$\arg w'_s(s_0) = \arg [f'(z_0)z'_s(s_0)] = \arg f'(z_0) + \arg z'_s(s_0)$$

buradan

$$\Rightarrow \arg w'_t(t_0) - \arg w'_s(s_0) = \arg z'_t(t_0) - \arg z'_s(s_0) \Rightarrow \Psi = \Phi$$

bulunur [10, 11].

Teorem 3.3 [9] f fonksiyonu analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulunu sağlıyorsa, $w = f(z)$ transformasyonu konformdur.

Her Möbius transformasyonu; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi kendi üzerine resmeden konform bir fonksiyonu gösterir.

Teorem 3.4 [12] z_0 noktasında $w = f(z)$ fonksiyonu analitik olsun ve $f'(z_0) \neq 0$ eşitsizliği sağlansın. Buna göre $w_0 = f(z_0)$ noktasının bir komşuluğunda analitik $z = g(w)$ ters fonksiyonu vardır. Ayrıca, $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$ sağlanır. Bu teorem bir konform tasvirin ters görüntüsünün yine konform olduğunu verir.

Lemma 3.1 [8] f fonksiyonu birim disk $\mathbb{U}$ da analitik, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$ olsun. Bu durumda $|f'(0)| < 1$ ve $|f(z)| < |z|$ eşitsizlikleri gerçekleşir.

Tanım 3.10 $\phi(z)$ analitik fonksiyonlarının ailesi Ω , her $z \in \mathbb{U}$ için, $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$ koşullarını sağlasın. $\Omega(a)$, $a = |b_1|$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}$ için, $\mathbb{U}$ de analitik olan ve $\omega(0) = b_1 \neq 0$, $|\omega| < 1$ koşullarını sağlayan $\omega(z)$ fonksiyonlarının sınıfı olsun. $\Omega_{\cup}$ kümesini de bütün $\Omega(a)$ sınıflarının birleşimi olarak alalım. Yani $\bigcup_{a \in (0,1)} \Omega(a)$ olsun.

Lemma 3.2(Schwarz-Pick Lemması) f aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathbb{U}$ da analitik bir fonksiyon olsun :

(i) $|f(z)| < 1$ her z için ve,

(ii) $f(a) = b$, herhangi bir $(a, b) \in \mathbb{U}(0, 1)$ için.

o halde

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $\bar{z}$ kompleks eşlenik olmak üzere $f(a_1) = b_1$ ve $f(a_2) = b_2$ ise

$$\left| \frac{b_2 - b_1}{1 - \bar{b}_1 b_2} \right| \leq \left| \frac{a_2 - a_1}{1 - \bar{a}_1 a_2} \right|$$

eşitsizliği sağlanır. Bunun sonucu olarak, $a_1 \neq a_2$ için

$$|f'(a)| = \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$$

ya da

$$\left| \frac{b_2 - b_1}{1 - \overline{b_1}b_2} \right| = \left| \frac{a_2 - a_1}{1 - \overline{a_1}a_2} \right|$$

eşitsizliklerinden biri sağlanırsa, f , $\mathbb{U}(0, 1)$ üzerine konformal bir tasvir olur. Açıkça belirtildiği üzere Schwarz-Pick Lemması şu koşulu sağlar: Eğer f , herhangi iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklığı koruyan $\mathbb{U}$ den $\mathbb{U}$ üzerine analitik bir tasvirse, f bütün uzaklıkları koruyan bir disk tasvirdir [8, 10].

Teorem 3.5(Riemann Gönderim Teoremi) [8] $\mathcal{D}$, z -düzleminde basit bağlantılı bir bölge olmak üzere $z_0 \in \mathcal{D}$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliklerini sağlayan ve $\mathcal{D}$ bölgesini açık birim disk üzerine konform olarak resmeden, $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik ve yalınkat bir f fonksiyonu tek türlü biçimde vardır.

Bu teoremden herhangi iki basit bağlantılı bölgenin konform olarak eşdeğer, yani kompleks düzlem içinde kalan herhangi iki basit bağlantılı bölgenin birbirleri üzerine konform olarak tasvir edilebileceği sonucu çıkar.

Tanım 3.11 (Normalize Edilmiş Yalınkat Fonksiyonlar) Riemann Gönderim Teoremi göz önüne alındığında yalınkat fonksiyonlar teorisinde tüm kompleks düzlemde çalışmanın aslında birim disk içinde çalışmaya denk olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ şeklinde bir normalizasyon yapmak yine Riemann Gönderim Teoremi gereğince mümkündür. Birim diskte yalınkat olan fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilmektedir. Bu sınıfa ait fonksiyonların Taylor açılımı

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, z \in \mathbb{U} \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Yalınkat fonksiyonlar teorisi $\mathcal{S}$ sınıfı üzerine kurulmuştur. $\mathcal{S}$ sınıfının önemli bir örneği;

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

şeklinde verilen Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon aynı zamanda

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right] \quad (3.5)$$

şeklinde de gösterilmektedir.

Yalıncat fonksiyonlar teorisinde genel olarak fonksiyonların sağladığı bazı eşitsizlikler araştırılır. Koebe fonksiyonu S sınıfına ait pek çok eşitsizlikte eşitliği veren fonksiyon olduğundan teoride önemli bir yere sahiptir.

3.3 Harmonik Fonksiyonlar

$w = f(z)$ fonksiyonu $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ olmak üzere $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde konform bir fonksiyon olsun. Buna göre

$$du = u_x dx + u_y dy \quad \text{ve} \quad dv = v_x dx + v_y dy$$

yazılabilir. Bu eşitlikler aynı zamanda kompleks formda

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) \quad \text{ve} \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) \quad (3.6)$$

olmak üzere

$$dw = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} \quad (3.7)$$

şeklinde de ifade edilebilir. (3.6) eşitliklerinden hareketle

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

elde edilir. Bu ise

$$J_f(z) = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$$

olduğunu gösterir. Eğer Jakobiyeni pozitif ise fonksiyona yön-koruyan, negatif ise yön-değiştiren denir. $f(z)$ fonksiyonu yön-koruyan, yani $|f_z| < |f_{\bar{z}}|$ ise (3.7) ifadesinden

$$(|f_z| - |f_{\bar{z}}|)|dz| \leq |dw| \leq (|f_z| + |f_{\bar{z}}|)|dz| \quad (3.8)$$

yazılabilir.

Tanım 3.12 $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı, sürekli ikinci kısmi türeve sahip reel değerli $u(x, y)$ fonksiyonu

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanan Laplace diferansiyel denklemini gerçeklerse (reel) harmonik olarak adlandırılır. $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı, kompleks değerli $f(z)$ fonksiyonunun reel ve sanal kısmı $\mathcal{D}$ 'de harmonik ise $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ 'de harmoniktir denir. Tanımdan

hemen çıkan bir sonuç, her analitik fonksiyon kompleks değerli bir harmonik fonksiyondur. Bu aşağıdaki şekilde ispatlanabilir:

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu basit bağlantılı bir $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlanmış ve analitik olsun. $f(z)$ fonksiyonundaki reel değişkenli fonksiyonlar harmoniktir. Gerçekten; $f(z)$ fonksiyonu verilen bölgede analitik olduğundan Cauchy Riemann Denklemleri'ni gerçekler. Buna göre;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

eşitlikleri yazılabilir. Schwarz eşitliği

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

(3.10) eşitliklerinde kullanılırsa,

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

elde edilir. Böylece $u = u(x, y), v = v(x, y)$ fonksiyonlarının $\mathcal{D}$ bölgesinde harmonik olduğu söylenebilir. Bununla beraber her kompleks değerli harmonik fonksiyon analitik değildir. Örneğin $w = f(z) = -2xy + i(y^2 - x^2)$ fonksiyonu kompleks düzlemde harmonik olmakla beraber hiçbir yerde analitik değildir.

Laplace denkleminin lineer karakterizasyonundan ötürü iki harmonik fonksiyonun toplamı ve bir sabit ile çarpımı yine harmoniktir. Analitik fonksiyonların aksine, iki harmonik fonksiyonun çarpımı veya bileşkesi harmonik olmak zorunda değildir. Örneğin, $f = xy + i(x + y)$ ve $g = x + y + i(xy)$ harmonik fonksiyonları için $f + g = xy + x + y + i(x + y + xy)$ fonksiyonu da harmoniktir. Çünkü $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0$ Laplace eşitlikleri sağlanır. Aynı f ve g fonksiyonu için, $fg = i(x^2 + y^2 + (x + y)^2)$ fonksiyonu harmonik değildir. Çünkü $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 2(x^2 + y^2 + 2) \neq 0$ olduğundan Laplace eşitlikleri sağlanmaz. f harmonik ise $1/f$ ve f^{-1} fonksiyonları harmonik olmayabilir. Fakat bir harmonik fonksiyonun bir analitik fonksiyonla bileşkesi yine harmoniktir. En basit harmonik fonksiyon $ax + by$ lineer fonksiyonudur.

Cauchy-Riemann denklemlerini gerçekleyen bir (u, v) fonksiyon çifti eşlenik çift olarak adlandırılır ve v 'ye u 'nun harmonik eşleniği denir. Buradan çıkan bir sonuç $-u$ 'nun, v 'nin harmonik eşleniği olduğudur.

$u(x, y)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde harmonik olsun. Bu fonksiyon yardımı ile $g = u_x - iu_y$ fonksiyonu tanımlansın. $U = u_x$ ve $V = -u_y$ denilirse $g = U + iV$ yazılabilir. u harmonik fonksiyonunun verilen bölgede her mertebeden türevi olduğundan, u 'nun türevi olan U fonksiyonu ve benzer şekilde V fonksiyonu ve bu fonksiyonların birinci mertebeden türevleri de süreklidir. Yani, $U_x = u_{xx}$ ve $V_y = -u_{yy}$ fonksiyonları da $\mathcal{D}$ 'de süreklidir. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğundan

$$u_{xx} = U_x = -u_{yy} = V_y \Rightarrow U_x = V_y$$

ve

$$U_y = u_{xy} = u_{yx} = -V_x \Rightarrow U_y = -V_x$$

eşitlikleri sağlanır. g fonksiyonu $\mathcal{D}$ 'de Cauchy-Riemann denklemlerini gerçeklediğinden bu bölgede analitiktir. Dolayısıyla basit bağlantılı $\mathcal{D}$ bölgesinde $f' = g$ olacak şekilde analitik bir f fonksiyonu bulunabilir. Buradan,

$$U + iV = (\operatorname{Re} f)_x + i(\operatorname{Im} f)_x = -i((\operatorname{Re} f)_y + i(\operatorname{Im} f)_y)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(\operatorname{Re} f)_x = U = u_x, (\operatorname{Re} f)_y = -V = u_y \Rightarrow \operatorname{Re} f = u + c$$

sonucuna ulaşılır ki bu ise her harmonik fonksiyonun, analitik bir fonksiyonun reel kısmı olarak yazılabileceğini gösterir. Burada $\operatorname{Im} f$, u 'nun harmonik eşleniğidir.

$f = u + iv$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde harmonik olsun. Yukarıda anlatılanlardan dolayı

$$\operatorname{Re} F = \operatorname{Re} f = u, \quad \operatorname{Re} G = \operatorname{Im} f = v, \quad (3.11)$$

olacak şekilde $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik F ve G fonksiyonları vardır.

$$h = (F + iG)/2 \text{ ve } g = (F - iG)/2 \quad (3.12)$$

olarak tanımlanan h, g fonksiyonları $\mathcal{D}$ bölgesinde analitiktir ve $f = h + \bar{g}$ eşitliğini sağlarlar. Gerçekten (3.11) ifadesinden hareketle $F = u + im$ ve $G = v + in$ olarak

yazılır ve (3.12) eşitlikleri kullanılırsa

$$h = \frac{(u - n) + i(v + m)}{2} \text{ ve } \bar{g} = \frac{(u + n) + i(v - m)}{2} \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu ise $f = h + \bar{g}$ demektir. Tersine, $h = h_1 + ih_2$, $g = g_1 + ig_2$ verilen bölgede analitik ve $f = h + \bar{g}$ olsun. Buradan $\operatorname{Re} f = h_1 + g_1$ ve $\operatorname{Im} f = h_2 - g_2$ yazılabilir. h ve g analitik olduklarından h_1, h_2, g_1 ve g_2 fonksiyonları harmoniktir. Laplacian operatörünün lineerliğinden $h_1 + g_1$ ve $h_2 - g_2$ fonksiyonlarının harmonik olduğu görülür. Bu ise f fonksiyonunun verilen bölgede harmonik olması demektir.

Yukarıda söylenenlerden ötürü aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.6 *Basit bağlantılı $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı kompleks değerli $f = u + iv$ fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart h ve g verilen bölgede analitik olmak üzere $f = h + \bar{g}$ şeklinde yazılabilmesidir [7, 13, 14].*

$f = h + \bar{g}$ gösterilişine f 'nin kanonik gösterilimi adı verilir. Burada h , f 'nin analitik kısmı, g , f 'nin eş-analitik kısmı (co-analytic part) olarak isimlendirilir. Ayrıca $h' = f_z$ ve $g' = \bar{f}_{\bar{z}}$ fonksiyonları f 'nin tanımlı olduğu bölgede analitiktir.

$\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı f harmonik fonksiyonu bire-bir ise harmonik yalınkat fonksiyon adını alır.

Teorem 3.1'den analitik f fonksiyonunun z noktasında yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şartın, bu noktada $f'(z) \neq 0$ ($\equiv J_f(z) \neq 0$) eşitsizliğinin sağlanması olduğu bilinmektedir. Lewy, 1936 yılında bir harmonik fonksiyonun yerel yalınkat olma koşulunu aşağıdaki şekilde vermiştir:

Teorem 3.7 [15] *f harmonik fonksiyonunun bir z_0 noktasının bir komşuluğunda yerel yalınkat olması için gerek ve yeter şart, z_0 noktasında $J_f(z) \neq 0$ eşitsizliğini sağlamasıdır.*

Teorem 3.7'den anlaşılacağı üzere bir harmonik yalınkat fonksiyonun Jakobiyeini yalınkatlık özelliğinin ortaya konması bakımından büyük önem taşır. Bir harmonik yalınkat fonksiyon ya yön-koruyan ya da yön-değiştirendir. Eğer f yön-koruyan harmonik ise $\bar{f}$ yön-değiştiren harmonik olur. Konform fonksiyonlar yön-koruyan fonksiyonlardır.

Bu çalışmada üzerinde durulan harmonik yalınkat fonksiyon sınıfları, Jakobiyeni pozitif olan yani, yön-koruyan harmonik fonksiyonlardır.

$f = u + iv$ harmonik ise, $f = h + \bar{g}$ kanonik gösterilimi kullanılarak f 'nin Jakobiyeni

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |\bar{f}_z|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

eşitliği ile de verilebilir. f yön-koruyan ise $|h'(z)| > |g'(z)|$ dır ve

$$\frac{|f_z|}{|f_{\bar{z}}|} = \frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$$

ifadesi sağlanır.

Teorem 3.7'e göre, $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı $f = h + \bar{g}$ harmonik fonksiyonunun yerel yalınkat ve yön-koruyan olması için gerek ve yeter şart $|g'(z)| < |h'(z)|$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır [7, 11].

Bir harmonik f fonksiyonu için $\omega = g'/h'$ ifadesine f 'nin ikinci dilatasyonu adı verilir. Yön koruyan bir f harmonik fonksiyonu için $|\omega| < 1$ dir.

Tanım 3.13 $\mathbb{U}$ üzerindeki harmonik, kompleks değerli, yön-koruyan, normalize edilmiş yalınkat harmonik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_H$ ile gösterilir. $\mathcal{S}_H$ sınıfına ait bir f fonksiyonu $f = h + \bar{g}$ olarak gösterilebilir. Burada $h(z)$ ve $g(z)$, $\mathbb{U}$ de analitik ve

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad (3.14)$$

şeklindeki seri açılımlarına sahip fonksiyonlardır. Yön-koruyan olduğundan dolayı $|b_1| < 1$ olmak zorundadır.

Yön-koruyan bir harmonik $f \in \mathcal{S}_H$ tasviri, $f(\mathbb{U})$ değer bölgesi orijine göre yıldızıl ise $\mathcal{S}_H^*$ sınıfına aittir. $\mathcal{S}_H^*$ sınıfına ait bir f fonksiyonu $\mathbb{U}$ içinde harmonik yıldızıl fonksiyon olarak adlandırılır. Bu tanım analitik olarak

$$f \in \mathcal{S}_H^* \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \theta}(\arg f(re^{i\theta})) > 0 \quad z \in \mathbb{D} \quad (3.15)$$

şeklinde ifade edilir.

3.4 Log-Harmonik Fonksiyonlar

Harmonik fonksiyonlar teorisi üzerine çalışmalar devam ederken, 1984 yılında Zayid Abdulhadi ve Walter Hengartner tarafından log-harmonik fonksiyonlar incelenmeye

başlanmıştır. Bu tür fonksiyonlarla ilgili çalışmalardaki temel konular, harmonik ve analitik fonksiyonlarla ilgili özelliklerin log-harmonik fonksiyonlarda ne şekilde gerçekleşeceğinin araştırılması, bilinen yalınkat analitik ve yalınkat harmonik fonksiyon sınıfları ile log-harmonik yalınkat fonksiyon sınıfları arasında bağlantılar kurulması, yeni fonksiyon sınıfları belirlenmesi ve bu sınıfların özelliklerinin incelenmesidir. 1988 yılında yayınlanan ilk çalışmada log-harmonik fonksiyonların çıkış noktası ortaya konulmuştur [2].

Tanım 3.14 [2] $D, \mathbb{C}$ nin bir bölgesi olmak üzere $H(D)$, normal yakınsama topolojisiyle D de tanımlı tüm analitik fonksiyonların cümlesi olsun. $H.\overline{H}(D)$, D bölgesinde tanımlı,

$$f = H.\overline{G} \quad (3.16)$$

şeklinde gösterilen, açık ve yön-koruyan tüm kompleks değerli fonksiyonların cümlesini göstermektedir. Bu fonksiyonlar

$$w \in H(D), \quad w(D) \subset \mathbb{D} = \{\xi \mid |\xi| < 1\} \quad (3.17)$$

olmak üzere lineer olmayan eliptik

$$\overline{f_z} = [w\overline{f}/f]f_z \quad (3.18)$$

diferansiyel denklemini gerçeklemektedir. Bu sınıf içindeki sıfırlanmayan fonksiyonlar H_1 ve G_1 , $H(D)$ de olmak üzere, herhangi bir yön-koruyan, harmonik $u = H_1 + \overline{G_1}$ fonksiyonu için e^u şeklindedirler. Bunun yanısıra $H.\overline{H}(D)$ nin sıfırlanan fonksiyonlarıyla da çalışılmaktadır.

$F(w, D)$, w daima (3.17) yı gerçeklemek üzere, D de (3.18) nin sabitten farklı tüm çözümlerinin cümlesidir. $f \in F(w, D)$ olmak üzere f , açık ve yön-koruyan bir fonksiyondur.

Bu tanımlar gözönünde bulundurularak $F(w, D)$ ve $H.\overline{H}(D)$ sınıfları arasındaki ilişkiler aşağıdaki akışta sıralanmıştır.

- $Z(f) = \{z \in D \mid f(z) = 0\}$, f fonksiyonunun sıfırlarının cümlesini gösterecektir.

Lemma 3.3 [2] $D, \mathbb{C}$ nin basit bağlantılı bir bölgesi olsun. Sıfırlanmayan bir f fonksiyonunun $H.\overline{H}(D)$ de olması için gerek ve yeter şart, w , (3.17) yı gerçeklemek üzere, $F(w, D)$ cümlesinde olmasıdır.

Lemma 3.4 [2] f fonksiyonu $F(w, D)$ cümlesinde olsun. $f(z_0) = 0$ ve $B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\} \subset D \setminus Z(f)$ olsun. Bu halde f fonksiyonu

$$f(z) = (z - z_0)^n |z - z_0|^{2\beta n} h(z) \overline{g(z)}; \quad z \in B(z_0, \rho) \quad (3.19)$$

şeklinde gösterilir. Burada, $n \in \mathbb{N}$, $\beta = \overline{nw(z_0)}(1 + w(z_0))/(1 - |w(z_0)|^2)$ dır, böylece $\operatorname{Re} \beta > -n/2$ dir. $h, g \in H(B(z_0, \rho))$ dır ve $h(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 1$ dir.

Teorem 3.8 [2] $D, \mathbb{C}$ nin bir bölgesi olsun. f fonksiyonu $H.\overline{H}(D)$ içindeyse, w (3.17) da tanımlandığı şekilde, $[0, 1)$ içinde bir rasyonel sayı ve $z \in Z(f)$ olmak üzere $F(w, D)$ dedir. Tersine, $f \in F(w, D)$ ise ve her $z_0 \in Z(f)$ için $p(z_0) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q(z_0) \in \mathbb{N}$ ve $q(z_0) - p(z_0)$, $p(z_0)$ ın bir böleni olmak üzere $w(z_0) = p(z_0)/q(z_0) \in [0, 1)$ elde edilir ve böylece $f \in H.\overline{H}(D)$ olur.

3.5 Log-Harmonik Yalınkat Fonksiyonlar

$D, \mathbb{C}$ nin bir bölgesi ve $z_0 \in D$ olsun. Aşağıdaki karakterizasyon, Teorem (3.8) den elde edilir.

Teorem 3.9 [2] f, D üzerinde $f(z_0) = 0$ olacak şekilde yalınkat bir fonksiyon olsun. Bu halde $f \in H.\overline{H}(D)$ olması için gerek ve yeter şart, w fonksiyonu, $w(z_0) = \frac{m}{m+1}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olacak şekilde (3.17) yı tanımlamak üzere, $f \in F(w, D)$ olmasıdır.

Lemma 3.5 [2] $D, \mathbb{C}$ içinde bir bölge ve $f \in F(w, D)$ yalınkat bir fonksiyon olsun. Bu halde

(a) $f(z) \neq 0$ olduğunda $f_z(z) \neq 0$ dır,

(b) $f(z_0) = 0$ ise

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f_z(z) / f(z)$$

vardır ve $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dadır.

Böylece $(z - z_0) f_z / f$, $H(D)$ de sıfırlanmayan bir fonksiyondur.

Tanım 3.15 [2] S_{lh} ; birim diskte tanımlı, kompleks değerli, normalize edilmiş yalınkat log-harmonik fonksiyonların sınıfıdır. Yani,

$$\begin{aligned} S_{lh} &= \bigcup_{w \in H(\mathbb{D})} \{f \in F(w, \mathbb{D}) \text{ yalınkat} \mid f(0) = 0, f_z(0) = 1\} \\ &= \{f = zh(z) \overline{g(z)} \in H.\overline{H}(\mathbb{D}) \mid f \text{ yalınkat ve } h(0) = g(0) = 1\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

olur.

Örnek 3.1 $\mathbb{D}$ açık birim diskinde tanımlı $f(z) = e^{z\overline{(z+1)}}$ fonksiyonu

$f(0) = 1$, $h(0) = g(0) = 1$ normalizasyon koşulları altında bir log-harmonik yalınkat fonksiyondur. Bu normalizasyon koşullarını sağlayan f log-harmonik yalınkat fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}_{lh*}$ ile göstereceğiz. Yani,

$$\mathcal{S}_{lh*} = \{f \in \mathcal{S}_{lh} \mid f(0) = 1, \quad h(0) = g(0) = 1 \quad \text{ve} \quad h'(0) = 1\}$$

Bu ilk çalışmanın ardından log-harmonik fonksiyon tanımı $H.\overline{H}(D)$ ve $F(w, D)$ cümlelerinden bağımsız olarak aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Tanım 3.16 [16] $H(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ açık birim diskinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların lineer uzayı ve B , her $z \in \mathbb{D}$ için $|w(z)| < 1$ koşuluna uyan $w(z) \in H(\mathbb{D})$ fonksiyonlarının cümlesi olsun. Bir log-harmonik f fonksiyonu, ikinci dilatasyon fonksiyonu $\omega \in B$ olmak üzere, lineer olmayan

$$\frac{\overline{f_z}}{\overline{f}} = \omega(z) \frac{f_z}{f} \quad (3.21)$$

eliptik kısmi diferansiyel dekleminin bir çözümüdür. f , $\mathbb{D}$ de sıfırlanmayan bir log-harmonik fonksiyon ise, $h, g \in H(\mathbb{D})$ olmak üzere

$$f = h\overline{g}$$

formundadır. Diğer yandan f fonksiyonu sadece bir z_0 noktasında sıfırlanıyorsa,

- m negatif olmayan bir tamsayı,
- $\beta = \overline{w(0)}(1 + w(0))/(1 - |w(0)|^2)$ ve böylece $\text{Re}\beta > -1/2$,
- h ve g , $\mathbb{D}$ de analitik fonksiyonlar, $h(0) \neq 0$, $g(0) = 1$

olmak üzere

$$f = (z - z_0)^m |z - z_0|^{2m\beta} h\overline{g}$$

şeklinde bir gösterilime sahiptir. $z_0 = 0$ seçildiğinde bu gösterilim

$$f = z^m |z|^{2m\beta} h\overline{g}$$

şekline dönüşür.

f fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat log-harmonik bir fonksiyon ise; $0 \notin f(\mathbb{D})$ iken $\log f$, $\mathbb{D}$ üzerinde harmonik yalınkat bir fonksiyondur, $f(0) = 0$ durumunda ise

(yani f fonksiyonu sıfır noktasında sıfırlanıyorsa) $F(\zeta) = \log f(e^\zeta)$, $\{\zeta \mid \operatorname{Re} \zeta < 0\}$ yarı-düzlemi üzerinde harmonik yalınkat fonksiyon olup $f = z|z|^{2\beta} h\bar{g}$, $\operatorname{Re} \beta > -1/2$, $0 \notin h.g(\mathbb{D})$ biçimindedir.

Log-harmonik fonksiyonlar için yapılan bu tanımın ardından harmonik fonksiyonlar teorisindeki ikinci dilatasyon ve Jakobiye fonksiyon kavramlarını log-harmonik yalınkat fonksiyonlar için verebiliriz. Bu fonksiyonları, seçilen f fonksiyonu ve türevinin, ikinci dilatasyon fonksiyonu için

$$\omega(z) = \frac{\overline{f_z}}{f} / \frac{f_z}{f}$$

ifadesinde ve Jakobiye fonksiyonu için de

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |\overline{f_z}|^2$$

ifadesinde yerine yazılmasıyla elde edebiliriz. Bu tanımlar aşağıdaki şekillerde verilebilir.

Tanım 3.17 $f(z) = h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde bir fonksiyon ise, ikinci dilatasyon fonksiyonu,

$$\omega(z) = \frac{g'(z)/g(z)}{h'(z)/h(z)}$$

biçimindedir. f fonksiyonu $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|^{2\beta} h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde ise bu fonksiyona dair ikinci dilatasyon fonksiyonu ise,

$$\omega(z) = \frac{\overline{\beta} + (z - z_0) \frac{g'(z)}{g(z)}}{1 + \beta + (z - z_0) \frac{h'(z)}{h(z)}}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Yıldızıl fonksiyonlar için $z_0 = 0$ noktası alındığı için bu kez ikinci dilatasyon fonksiyonu,

$$\omega(z) = \frac{\overline{\beta} + z \frac{g'(z)}{g(z)}}{1 + \beta + z \frac{h'(z)}{h(z)}}$$

şeklinde olur.

$f(z) = zh(z)\overline{g(z)}$ fonksiyonu için, $\beta = 0$ yani; $\omega(0) = 0$ durumunda ise ikinci dilatasyon fonksiyonu,

$$\omega(z) = \frac{zg'(z)/g(z)}{1 + zh'(z)/h(z)}$$

biçimine dönüşür.

Tanım 3.18 $f = h(z)\overline{g(z)}$ şeklindeki log-harmonik fonksiyona dair Jakobiye fonksiyonu,

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

şeklinde dir. $f = (z - z_0)|z - z_0|^{2\beta} h(z)\overline{g(z)}$ şeklindeki fonksiyon için de,

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{1+\beta}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{\beta}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

biçiminde olmaktadır. Yıldızl fonksiyonlar için $z_0 = 0$ noktası alınarak fonksiyona ait Jakobiye

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{1+\beta}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{\beta}{z} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$f(z) = zh(z)\overline{g(z)}$ fonksiyonu için, $\beta = 0$ yani; $w(0) = 0$ durumunda ise Jakobiye fonksiyonu

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 = |f(z)|^2 \left(\left| \frac{1}{z} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right|^2 - \left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right|^2 \right)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Sabitten farklı bir f log-harmonik fonksiyonu daima yön-koruyan bir fonksiyondur [17]. Dolayısıyla bu tür fonksiyonlar için kullanacağımız $J_f(z)$ daima pozitif olmaktadır.

Bir z_0 noktasında sıfırlanan yalınkat log-harmonik f fonksiyonunun $h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde gösterilebilmesi için gerek ve yeter şart, $w(z_0) = \frac{m}{m+1}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olması idi [2]. Bu tanım yıldızl fonksiyonlar için $w(0) = \frac{m}{m+1}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmasına denk düşmektedir. O halde $f(z) = zh(z)\overline{g(z)}$ fonksiyonu ile çalışıldığında $\beta = 0$, yani $w(0) = 0$ olmaktadır. Bu durumda fonksiyon $f(z) = zh(z)\overline{g(z)} = s(z)\overline{g(z)}$ şeklinde yazılabilmektedir. Burada $s(z) = zh(z)$ şeklinde olup, $h(0) = 1 = g(0)$, $s(0) = 0$ normalizasyonları mevcuttur.

Harmonik ve analitik fonksiyonlarda olduğu gibi log-harmonik fonksiyonlar için de birtakım önemli alt sınıflar tanımlanmıştır. Bunlardan ilki $\mathcal{S}_{lh}^*$ dir.

Tanım 3.19 [17] $\mathcal{S}_{lh}^*$; birim disk $\mathbb{D}$ üzerinde $f(0) = 0$ olacak şekilde tanımlı, $h(0) = g(0) = 1$ eşitliğini gerçeklemek üzere, $f(\mathbb{D})$ nin yıldızl bir bölge olduğu tüm yalınkat log-harmonik fonksiyonların cümlesidir.

$\mathcal{S}^* = \{f \in \mathcal{S}_{lh}^* \text{ ve } f \in H(\mathbb{D})\}$ olmak üzere $\mathcal{S}_{lh}^*$ ve $\mathcal{S}^*$ sınıfları arasındaki bağlantı aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 3.10 $H(\mathbb{D})$; $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$ birim diskinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların uzayı ve $B = \{w \in H(\mathbb{D}) \mid |w(z)| < 1, z \in \mathbb{D}\}$ olmak üzere

(a) $f = z|z|^{2\beta} h\bar{g} \in \mathcal{S}_{lh}^* \Rightarrow v(z) = zh/g \in \mathcal{S}^*$ dir.

(b) Verilen herhangi $v(z) \in \mathcal{S}^*$ ve $w \in B$ için, $H(\mathbb{D})$ içinde aşağıdaki şekilde tanımlanan tek türlü belirli h ve g fonksiyonları vardır:

(i) $0 \notin hg(\mathbb{D}), h(0) = g(0) = 1,$

(ii) $v(z) = zh/g,$

(iii) $\beta = \overline{w(0)}(1 + w(0))/(1 - |w(0)|^2)$ olmak üzere $f = z|z|^{2\beta} h\bar{g}$, $\mathcal{S}_{lh}^*$ sınıfı içinde eliptik diferansiyel denklemin bir çözümüdür.

Aşağıda verilen sonuç ise $\beta = 0$, yani $w(0) = 0$ için $\mathcal{S}_{lh}^*$ sınıfına dair bir distorsiyondur.

Teorem 3.11 [17] $f = zh\bar{g} \in \mathcal{S}_{lh}^*$ olsun. $w(0) = 0$ olmak üzere her $z \in \mathbb{D}$ için

$$(i) |z| \exp\left(\frac{-4|z|}{1+|z|}\right) \leq |f(z)| \leq |z| \exp\left(\frac{4|z|}{1+|z|}\right)$$

$$(ii) \frac{1-|z|}{(1+|z|)^2} \exp\left(\frac{-4|z|}{1+|z|}\right) \leq |f_z(z)| \leq \frac{1-|z|}{(1+|z|)^2} \exp\left(\frac{4|z|}{1+|z|}\right)$$

$$(iii) |f_{\bar{z}}(z)| \leq \frac{|z|(1-|z|)}{(1+|z|)^2} \exp\left(\frac{4|z|}{1+|z|}\right)$$

distorsiyonları vardır.

$$f_0(z) = \frac{z(1-\bar{z})}{(1-z)} \exp\left[Re \frac{4z}{1-z}\right]$$

olmak üzere $f(z) = \bar{\xi} f_0(\xi z), |\xi| = 1$ şeklinde olması durumunda eşitlikler gerçekleşir.

Log-harmonik fonksiyonlar teorisinde diğer önemli bir fonksiyon sınıfı $\mathcal{P}_{lh}$ dır.

Tanım 3.20 [17] $\mathcal{P}_{lh}$, tüm $z \in \mathbb{D}$ ler için $Re f(z) > 0$ olacak şekilde $h, g \in H(\mathbb{D})$, $h(0) = g(0) = 1$ koşullarını sağlayan $f(z) = h(z)\overline{g(z)}$ şeklinde ifade edilen, birim disk $\mathbb{D}$ de tanımlı tüm log-harmonik fonksiyonların sınıfıdır.

$Rep(z) > 0$, $p(0) = 1$ olan $p(z)$ analitik fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{lh}$ sınıfının alt cümlesidir.

Teorem 3.12 [17] $f(z) = h(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{P}_{lh}$ ise $p = h/g \in \mathcal{P}$ dir. Tersine, verilen $p \in \mathcal{P}$ ve $w \in B$ ye karşılık $H(\mathbb{D})$ de, h ve g gibi sıfırlanmayan fonksiyonlar vardır öyle ki,

$p = h/g$, $f = h\bar{g} \in \mathcal{P}_{lh}$ ve f fonksiyonu verilen w ya göre (3.21) nin bir çözümüdür.

$\mathcal{P}_{lh}$ sınıfı için elde edilmiş olan distorsiyonlar da aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 3.13 [17] $f(z) = h(z)\overline{g(z)} \in \mathcal{P}_{lh}$, $w(0) = 0$ olması durumunda

$$(i) \quad \exp(-2|z|/(1-|z|)) \leq |f(z)| \leq \exp(2|z|/(1-|z|)),$$

$$(ii) \quad |f_z(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|)(1-|z|^2)} \exp(2|z|/(1-|z|)),$$

$$(iii) \quad |\bar{f}_z(z)| \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)(1-|z|^2)} \exp(2|z|/(1-|z|))$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$f_0(z) = \frac{1+z}{1-z} \left| \frac{1-z}{1+z} \right| e^{\operatorname{Re} \frac{z}{1-z}}$$

olmak üzere, $f(z)$ nin

$$f_0(\xi z), |\xi| = 1$$

şeklinde fonksiyon olması durumunda eşitsizliklerin sağ yanları için eşitlik,

$$1/f_0(\xi z), |\xi| = 1$$

şeklinde bir fonksiyon ise de eşitsizliklerin sol yanları için eşitlik oluşur.

2006 yılında ise Z. Abdulhadi ve A. Muhanna'nın beraber yayınladıkları çalışmada α -yıncı dereceden yıldızlı log-harmonik fonksiyon sınıfı ortaya atılmıştır.

Tanım 3.21 [18] $f(z) = z|z|^{2\beta} h(z)\overline{g(z)}$ yalınkat log-harmonik bir fonksiyon olsun.

$$\frac{\partial \arg f(re^{i\theta})}{\partial \theta} = \operatorname{Re} \frac{zf_z - \bar{z}\bar{f}_z}{f} > \alpha, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi halinde f fonksiyonuna α -yıncı mertebeden yıldızlı log-harmonik fonksiyon denir. $S_{lh}^*(\alpha)$, tüm α -yıncı mertebeden yıldızlı log-harmonik fonksiyonların sınıfıdır.

$\alpha = 0$ için yıldızlı log-harmonik fonksiyonların sınıfı elde edilmektedir.

4. MİNİMAL YÜZEYLER

4.1 İzotermal Parametrelerle Verilen Minimal Yüzeyler

$\mathcal{S}$, ($n \geq 2$) n -inci sınıftan bir yüzey ve $\mathbf{X} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ koordinat yaması verilsin. λ , (u, v) parametrelerinin bir fonksiyonu ve $\lambda = \lambda(u, v) \neq 0$ olmak üzere $E = G = \lambda^2$, $F = 0$ koşulları gerçekleşiyorsa, (u, v) parametrelerine izotermal ya da konformal parametreler denir. Bu durumda $\mathbf{X}$ vektörel fonksiyonuna izotermal ya da konformal dönüşüm adı verilir.

Bir konformal dönüşüm iki düzgün eğri arasındaki açıyı ve eğrilerin yönünü korur. Bu aşağıdaki şekilde ispatlanabilir :

f fonksiyonu z_0 da analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. z_0 noktasından geçen ve türevi olan düzgün C eğrisinin $w = f(z)$ dönüşümü altında yönünün değişimi incelensin. C eğrisinin parametrik gösterilimi, $a \leq t \leq b$ olmak üzere $z(t) = x(t) + iy(t)$ ise görüntüsü olan C' eğrisinin t parametresine bağlı gösterimi $w(t) = f(z(t))$ dir. z düzgün olduğundan

$$w(t) = f(z(t)) \Rightarrow w' = f'z', \quad f'(z(t)) = \frac{w'(t)}{z'(t)}$$

yazılabilir. $z_0 = z(t_0)$ da $z'(t_0) \neq 0 \Rightarrow f'(z_0) \neq 0$ ve $w'(t_0) \neq 0$ dir. Kompleks analizden bilindiği üzere,

$$\arg(w'(t_0)) - \arg(z'(t_0)) = \arg(f'(z(t_0)))$$

dır.

$$\phi_0 = \arg(w'(t_0)), \quad \theta_0 = \arg(z'(t_0)), \quad \sigma_0 = \arg(f'(z(t_0)))$$

olmak üzere,

$$\sigma_0 = \phi_0 - \theta_0 \tag{4.1}$$

elde edilir. Bunun anlamı σ_0 'ın yalnız z_0 ve C eğrisine bağlı olmadığıdır. Yine z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ 'ı sağlayan f fonksiyonu göz önüne alınsın. C_1 ve C_2 düzgün eğrilerinin z_0 'dan geçtiğini varsayalım. θ_1 ve θ_2 sırasıyla C_1 ve C_2 eğrilerinin z_0 'daki teğetlerinin eğim açıları olsun. (4.1)'den

$$\phi_1 = \sigma_0 + \theta_1 \quad \text{ve} \quad \phi_2 = \sigma_0 + \theta_2$$

sırasıyla C'_1 ve C'_2 eğrilerine $w_o = f(z_0)$ da çizilen teğetlerin eğim açıları olur. Buradan

$$\theta_1 - \theta_2 = \phi_1 - \phi_2$$

elde edilir. Yani, $w = f(z)$ dönüşümü z_0 'dan geçen iki düzgün eğrinin yönünü ve aralarındaki açığı korur.

S izotermal parametrelere sahip bir minimal yüzey olsun. $E = G = \lambda^2 > 0$ ve $F = 0$ olduğundan, ortalama eğrilik

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} \right) = \frac{1}{2\lambda^2} (L + N)$$

şeklinde elde edilir. S minimal yüzey olduğundan $H = 0$ ve $L + N = 0$ dır. $F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$ ve $E = G = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$ olduğunu biliyoruz. Kısmi türevlerini alırsak

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle = 0 \quad (4.2)$$

$$\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle = 0 \quad (4.3)$$

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle \quad (4.4)$$

$$\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle \quad (4.5)$$

(4.4)'ü (4.3)'de ve (4.5)'i (4.2)'de yerine koyarsak,

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle + \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_u \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{X}_u \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle = \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{X}_v \rangle = 0$$

elde edilir. Bu ise $\Delta \mathbf{X}$ 'in yüzeyin teğet düzlemine dik olduğunu verir. O halde $\Delta \mathbf{X} = \langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} |\Delta \mathbf{X}| &= \pm \langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{n} \rangle = \pm \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \pm (\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{n} \rangle) \\ &= \pm (L + N) \end{aligned} \quad (4.6)$$

S minimal yüzey ve $L + N = 0$ olduğundan (4.6)'ya göre $\Delta \mathbf{X} = 0$ elde edilir.

$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ vektörel fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{X}_i$ ($i = 1, 2, 3$) koordinat fonksiyonlarının harmonik olmasıdır.

Teorem 4.1 S düzgün bir yüzey ve $X : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ izotermal bir dönüşüm olsun. X 'in harmonik olması için gerek ve yeter koşul S yüzeyinin minimal olmasıdır.

Tanım 4.1 $\mathcal{D}$, (x_i, x_j) -düzleminde bir bölge, i ve j 'de 1'den 3'e kadar değerler alan birbirinden farklı iki sabit değişken olsun.

$$x_k = f_k(x_i, x_j), \quad k = 1, 2, 3, \quad k \neq i, j, \quad (x_i, x_j) \in \mathcal{D}$$

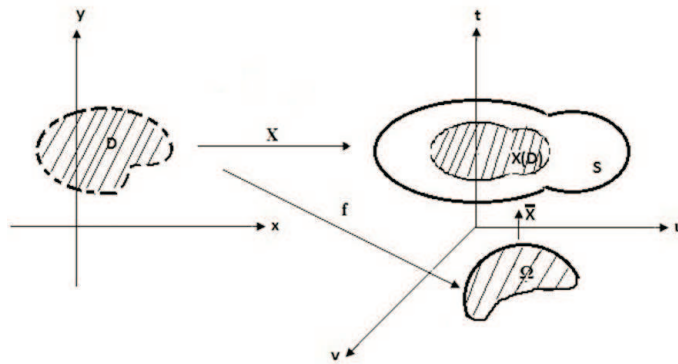
denklemleri $\mathbb{R}^3$ 'de bir S yüzeyi tanımlar. Bu biçimde tanımlanan yüzeye parametrik olmayan yüzey denir.

Önerme 4.1 Eğer parametrik olmayan bir minimal yüzey izotermal parametrelere göre ifade edilirse, bu durumda yüzeyin taban düzlemi üzerine izdüşümü bir harmonik yalınkat dönüşüm tanımlar.

Daha özel olarak, farzedelim ki $t = F(u, v)$ uv -düzleminde bir Ω bölgesi üzerinde bulunan parametrik olmayan bir minimal yüzey olsun. Bu yüzey xy -düzlemindeki $\mathcal{D}$ bölgesine ait (x, y) izotermal parametrelerine sahip olsun. Bu durumda

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad \text{ve} \quad t = t(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$$

koordinat fonksiyonlarının hepsi harmonik olur. $X : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümü bire-bir ve S parametrik olmayan yüzey olduğundan, $z = x + iy$ olmak üzere, $w = u + iv = f(z)$ izdüşümü $\mathcal{D}$ 'dan Ω üzerine bir yalınkat harmonik dönüşüm tanımlar [5].



Şekil 4.1: Yalınkat harmonik fonksiyon

İzotermal parametrelerle verilen bir minimal yüzeyin koordinat fonksiyonlarının harmonik olduğu bilinmektedir. Bunun bir sonucu olarak minimal yüzeyin taban

düzleme izdüşümünün bir yalınkat harmonik dönüşüm tanımladığı aşağıdaki şekilde ifade edilir: $\mathcal{S}$ bir minimal yüzey olsun. O halde $\mathcal{S}$ 'nin

$$\mathbf{X} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y), t(x, y))$$

biçiminde bir izotermal koordinat yaması vardır. Öte yandan $\mathcal{S}$ 'nin $t = f(u, v)$ şeklinde bir Monge yama gösterimi :

$$\bar{\mathbf{X}} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{X}(\mathcal{D}) \subset \mathcal{S}$$

$$(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$$

şeklindedir. $\mathcal{S}$ minimal olduğundan u, v harmoniktirler.

$$(x, y) = x + iy = z, \quad (u, v) = u + iv = w$$

denilirse

$$f : \bar{\mathbf{X}}^{-1} \circ \mathbf{X} : \mathcal{D} \rightarrow \Omega$$

$$z \mapsto f(z) = w$$

dönüşümü harmoniktir. Öte yandan $\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{X}$ koordinat yaması olduklarından bire-birlik koşulunu sağlarlar. Böylece f fonksiyonu da bire-bir olur. O halde

$$f : \mathcal{D} \rightarrow \Omega$$

yalınkat harmonik dönüşümdür [8].

4.2 Minimal Yüzeylerin Weierstrass-Enneper Gösterimi

$\mathbf{X} : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{X} \subset \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ dönüşümünü göz önüne alınsın. Burada

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(u, v), \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{ve} \quad (u, v) \in \mathcal{U}$$

şeklindedir. $w = u + iv$ olsun ve aşağıdaki kompleks değerli Ψ_k fonksiyonları tanımlansın:

$$\Psi_k = 2 \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial w} = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u} - i \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial v}. \quad (k = 1, 2, 3)$$

Yani

$$2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial w} = \left(2 \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial w}, 2 \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial w}, 2 \frac{\partial \mathbf{x}_3}{\partial w} \right) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3).$$

Şimdi sırasıyla aşağıdaki toplamaları hesaplayalım:

$$\sum_{k=1}^3 \Psi_k^2 = \sum_{k=1}^3 \left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial v} \right)^2 - 2i \left(\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial v} \right) \right) = E - G - 2iF$$

$$\sum_{k=1}^3 |\Psi_k^2| = \sum_{k=1}^3 \left(\left(\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial v} \right)^2 \right) = E + G$$

dir. Eğer $\mathcal{S}$ yüzeyi izotermal parametrelili bir minimal yüzey ise, bu durumda $E = G > 0$ ve $F = 0$ olacağından

$$\sum_{k=1}^3 \Psi_k^2 = 0, \text{ ve } \sum_{k=1}^3 |\Psi_k^2| > 0 \quad (4.7)$$

elde edilir.

Eğer $\mathcal{S}$ minimal bir yüzey ise $\mathbf{x}_k$ bileşen fonksiyonları harmonik ve buradan Ψ_k fonksiyonları analitik olur. Sonuç olarak her düzgün minimal yüzeye (4.7)'deki koşulları gerçekleyen üç tane analitik fonksiyon karşılık gelir. Hatta bu ifadenin tersi de doğrudur. Başka bir deyişle (4.7)'deki koşulları gerçekleyen her üç analitik fonksiyon bir düzgün minimal yüzey meydana getirir. Buraya kadar yapılanları aşağıdaki teoremle netleştirelim:

Teorem 4.2 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$, $(u, v) \in \mathcal{U}$ bir düzgün minimal yüzeyin izotermal gösterilişi ve $w = u + iv$ olsun. Bu durumda

$$\Psi_k = 2 \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial w}, \quad k = 1, 2, 3$$

fonksiyonları analitiktir ve (4.7)'deki koşulları sağlarlar. Tersine $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ fonksiyonları bir basit bağlantılı bölgede (4.7)'deki koşulları gerçeklerse, bu durumda

$$\mathbf{x}_k = \operatorname{Re} \left\{ \int \Psi_k(w) dw \right\}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.8)$$

fonksiyonları bir düzgün minimal yüzeyin izotermal gösterilişini verir.

İspat . Teoremin birinci kısmı zaten gösterildi. İkinci kısmını yani tersi gösterilsin. (4.8) ile tanımlanan $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(w)$ fonksiyonları harmoniktir ve $\mathcal{S}$ yüzeyinin parametrik gösterilişini verir.

$$\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial w} = \frac{1}{2} \Psi_k, \quad k = 1, 2, 3$$

olduğundan (4.7)'in gerçekleşmesi durumunda $E = G > 0$, $F = 0$ elde edilir. Böylece $\mathcal{S}$ düzgün bir yüzey ve parametrik gösterilimi izotermal olur.

$\mathbf{x}_k$ koordinat fonksiyonları izotermal parametrelerin harmonik fonksiyonu olduğundan S bir minimal yüzeydir.

Lemma 4.1. $p, \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik fonksiyon ve q , bu bölgede meromorfik fonksiyon olsun. Farz edelim ki p, q 'nın m -inci dereceden kutba sahip olduğu yerde $2m$ -inci dereceden sıfıra sahip olsun. Bu durumda,

$$\Psi_1 = p(1 + q^2), \Psi_2 = -ip(1 - q^2), \Psi_3 = -2ipq \quad (4.9)$$

funksiyonları $\mathcal{D}$ bölgesinde analitiktir ve

$$\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = \sum_{k=1}^3 \Psi_k^2 = 0 \quad (4.10)$$

koşulunu sağlarlar. Tersine (4.10) koşulunu sağlayan $\mathcal{D}$ bölgesindeki her Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 analitik fonksiyonları $\Psi_2 = i\Psi_1$ olmadıkça (4.9)'u sağlarlar ve bu gösteriliş tektir.

Teorem 4.3 Her düzgün minimal yüzey yerel olarak aşağıdaki izotermal gösterilime sahiptir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \int p(1 + q^2)dw \right\} \\ \mathbf{x}_2 &= \operatorname{Im} \left\{ \int p(1 - q^2)dw \right\} \\ \mathbf{x}_3 &= 2\operatorname{Im} \left\{ \int pqdw \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Burada $w \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ve p analitik ve q , $\mathcal{D}$ 'de meromorfik fonksiyon olmak üzere p, q 'nın m -inci dereceden kutup noktalarında $2m$ -inci dereceden sıfıra sahip olacak şekilde verilsin. Tersine, basit bağlantılı $\mathcal{D}$ bölgesinde her p analitik ve q meromorfik fonksiyonları için (4.11) formülleri bir düzgün minimal yüzeyin izotermal parametrik gösterilişini verir [5, 19, 20].

4.2.2 Weierstrass-Enneper gösterimi ile verilen minimal yüzey örnekleri

(i) **Düzlem:** Herhangi $w = u + iv$ kompleks sayısı ve $p(w) = 1$ analitik, $q(w) = 0$

meromorfik fonksiyonları için (4.11) formülleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \int p(1 + q^2)dw \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int 1(1 + 0)dw \right\} = \operatorname{Re} \{w\} = u \\
\mathbf{x}_2 &= \operatorname{Im} \left\{ \int p(1 - q^2)dw \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \int 1(1 - 0)dw \right\} = \operatorname{Im} \{w\} = v \\
\mathbf{x}_3 &= 2\operatorname{Im} \left\{ \int pqdw \right\} = 2\operatorname{Im} \left\{ \int (1 \cdot 0)dw \right\} = 2\operatorname{Im} \{c\} = 0, (c = \text{sabit})
\end{aligned} \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir. Bunlar aynı zamanda düzlem denklemini verir.

(ii) **Katenoid** Herhangi $w = re^{i\theta}$ kompleks sayısı için, $p(w) = 1$, $q(w) = \frac{i}{w}$ ve $\mathcal{D} = \mathbb{C}/\{0\}$ alalım. (4.11) formülleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \int p(1 + q^2)dw \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int 1 \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ w + \frac{1}{w} \right\} = \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\
\mathbf{x}_2 &= \operatorname{Im} \left\{ \int p(1 - q^2)dw \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \int 1 \left(1 + \frac{1}{w^2} \right) dw \right\} \\
&= \operatorname{Im} \left\{ w - \frac{1}{w} \right\} = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \\
\mathbf{x}_3 &= 2\operatorname{Im} \left\{ \int pqdw \right\} = 2\operatorname{Im} \left\{ \int \left(\frac{i}{w} \right) dw \right\} = 2\operatorname{Im} \{i \log w\} = 2 \log r
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\log r = \varphi \text{ denilirse, } r = e^\varphi \Rightarrow r + \frac{1}{r} = e^\varphi + e^{-\varphi} = 2 \cosh \varphi$$

(4.13) formüllerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta = 2 \cosh \varphi \cos \theta \\
\mathbf{x}_2 &= \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = 2 \cosh \varphi \sin \theta \\
\mathbf{x}_3 &= 2\varphi
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2} &= 2 \cosh \varphi \\
\varphi &= \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}}{2} \right) \\
\mathbf{x}_3 &= 2\varphi = 2\operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

katennoidin kapalı denklemi elde edilir. Katenoid bilinen tek d6nel minimal y6zeydir.

(iii) **Helisoid:** Herhangi $w = re^{i\theta}$ kompleks sayısı için, $p(w) = 1$, $q(w) = \frac{1}{w}$ ve $\mathcal{D} = \mathbb{C} - \{0\}$ alalım. (4.11) formülleri aşağıdaki şekilde hesaplanır :

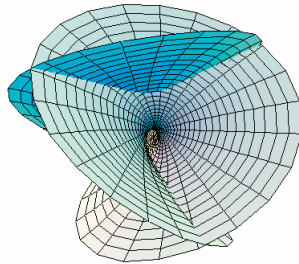
$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \int p(1 + q^2)dw \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int 1 \left(1 + \frac{1}{w^2} \right) dw \right\} \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ w - \frac{1}{w} \right\} = \left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \theta \\
 \mathbf{x}_2 &= \operatorname{Im} \left\{ \int p(1 - q^2)dw \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \int 1 \left(1 - \frac{1}{w^2} \right) dw \right\} \\
 &= \operatorname{Im} \left\{ w + \frac{1}{w} \right\} = \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \\
 \mathbf{x}_3 &= 2\operatorname{Im} \left\{ \int pqdw \right\} = 2\operatorname{Im} \left\{ \int \left(\frac{1}{w} \right) dw \right\} = 2\operatorname{Im} \{ \log w \} = 2\theta
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1} &= \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan \frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1} \\
 \mathbf{x}_3 &= 2\theta \\
 &= 2 \arctan \frac{\mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

helisoidin kapalı denklemi elde edilir.

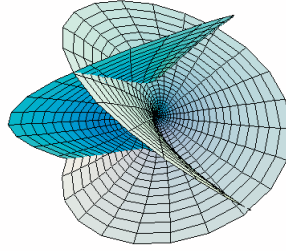
(iv) **Enneper Yüzeyi:** Herhangi bir $w = u + iv$ kompleks sayısı $p(w) = 1$, $q(w) = iw$ ve $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ alalım. (4.11) formülleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:



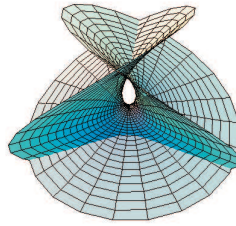
Şekil 4.2: Enneper yüzeyi

$$\begin{aligned}
x_1 &= \operatorname{Re} \left\{ \int p(1 + q^2)dw \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int 1(1 - w^2)dw \right\} = \operatorname{Re} \left\{ w - \frac{w^3}{3} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ (u + iv) - \frac{(u + iv)^3}{3} \right\} = u + uv^2 - \frac{u^3}{3} \\
x_2 &= \operatorname{Im} \left\{ \int p(1 - q^2)dw \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \int 1(1 + w^2)dw \right\} = \operatorname{Im} \left\{ w + \frac{w^3}{3} \right\} \quad (4.18) \\
&= \operatorname{Im} \left\{ (u + iv) + \frac{(u + iv)^3}{3} \right\} = v + u^2v - \frac{v^3}{3} \\
x_3 &= 2\operatorname{Im} \left\{ \int iwdw \right\} = 2\operatorname{Im} \left\{ \frac{iw^2}{2} \right\} = \operatorname{Im} \{ i(u^2 - v^2 + 2iuv) \} \\
&= u^2 - v^2
\end{aligned}$$

(4.18) Enneper yüzeyinin parametrik denklemlerini verir.



Şekil 4.3: Enneper yüzeyinin z-ekseni etrafında 30 derece döndürülmesi



Şekil 4.4: Enneper yüzeyinin z-ekseni etrafında 60 derece döndürülmesi

(v) **Scherk'in birinci yüzeyi:** $\mathbb{U} = \{w \mid |w| < 1\}$ birim disk, $q(w) = \frac{2}{1-w^4}$ ve $q(w) = iw$ olacak şekilde alalım.

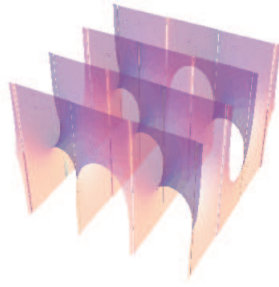
(4.11) formülleri aşağıdaki şekilde hesaplanır :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \int_0^w p(1+q^2)dw = \int_0^w \frac{2}{1-w^4}(1-w^2)dw = \int_0^w \frac{2}{1+w^2}dw \\
&= 2 \arctan w = -i \log \frac{1+iw}{1-iw} \\
\mathbf{x}_2 &= \int_0^w p(1-q^2)dw = \int_0^w \frac{2}{1-w^2}dw = \log \frac{1+w}{1-w} \\
\mathbf{x}_3 &= \int_0^w pqdw = \int_0^w \frac{2iw}{1-w^4}dw = \frac{i}{2} \log \left(\frac{1+w^2}{1-w^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \arg \left\{ \frac{1+iw}{1-iw} \right\}, \quad \mathbf{x}_2 = \arg \left\{ \frac{1+w}{1-w} \right\}, \quad \mathbf{x}_3 = \log \left| \frac{1+w^2}{1-w^2} \right| \\
&\Rightarrow \log \left| \frac{\cos \mathbf{x}_2}{\cos \mathbf{x}_1} \right| = \log \left| \frac{1+w^2}{1-w^2} \right| = \mathbf{x}_3
\end{aligned}$$

Scherk'in birinci yüzeyinin kapalı denklemi elde edilir.



Şekil 4.5: Scherk'in Birinci Yüzeyi

4.3 Minimal Yüzeylerin Gauss Eğriliği

Yüzeyler teorisi bölümünde Gauss Eğriliğinin, $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ şeklinde olduğu gösterilmiştir. Burada $L = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{n} \rangle$, $M = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{n} \rangle$, $N = \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$ ikinci temel form katsayıları ve $E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle$, $G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$ birinci temel form katsayıları ve $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}$ birim normal vektörü idi.

$$\mathbf{X}_{uu} = (\mathbf{x}_{uu}, \mathbf{y}_{uu}, \mathbf{z}_{uu}), \quad \mathbf{X}_{uv} = (\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{y}_{uv}, \mathbf{z}_{uv}), \quad \mathbf{X}_{vv} = (\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{y}_{vv}, \mathbf{z}_{vv})$$

eşitliklerine göre yeniden düzenlenirse :

$$L = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{uu} & \mathbf{y}_{uu} & \mathbf{z}_{uu} \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{y}_u & \mathbf{z}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{y}_v & \mathbf{z}_v \end{vmatrix}$$

$$M = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{y}_{uv} & \mathbf{z}_{uv} \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{y}_u & \mathbf{z}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{y}_v & \mathbf{z}_v \end{vmatrix}$$

$$N = \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{y}_{vv} & \mathbf{z}_{vv} \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{y}_u & \mathbf{z}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{y}_v & \mathbf{z}_v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} LN &= \left(\frac{1}{EG - F^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{uu} & \mathbf{y}_{uu} & \mathbf{z}_{uu} \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{y}_u & \mathbf{z}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{y}_v & \mathbf{z}_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{vv} & \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_v \\ \mathbf{y}_{vv} & \mathbf{y}_u & \mathbf{y}_v \\ \mathbf{z}_{vv} & \mathbf{z}_u & \mathbf{z}_v \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{EG - F^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u\mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_u\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u\mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v\mathbf{X}_{vv} & \mathbf{X}_v\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v\mathbf{X}_v \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \Rightarrow E_u = 2 \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle, \quad G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \Rightarrow G_v = 2 \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle$$

olduğundan,

$$LN = \left(\frac{1}{EG - F^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_{vv} & \frac{E_u}{2} & \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u\mathbf{X}_{vv} & E & F \\ \frac{G_v}{2} & F & G \end{vmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{1}{EG - F^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{y}_{uv} & \mathbf{z}_{uv} \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{y}_u & \mathbf{z}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{y}_v & \mathbf{z}_v \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x}_{uv} & \mathbf{y}_{uv} & \mathbf{z}_{uv} \\ \mathbf{x}_u & \mathbf{y}_u & \mathbf{z}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{y}_v & \mathbf{z}_v \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{EG - F^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u\mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_u\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_u\mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_v\mathbf{X}_{uv} & \mathbf{X}_v\mathbf{X}_u & \mathbf{X}_v\mathbf{X}_v \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dir.

$$E = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle \Rightarrow E_v = 2 \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle, \quad G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \Rightarrow G_u = 2 \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle$$

olduğundan,

$$M^2 = \left(\frac{1}{EG - F^2} \right) \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv} & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & F \\ \frac{G_u}{2} & F & G \end{vmatrix}$$

dir.

İzotermal parametrelerde, $E = G > 0$ ve $F = 0$ ve bu koşullar altında determinantlar birinci satıra göre açılırsa

$$LN = \frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_{vv} & \frac{E_u}{2} & \mathbf{X}_{uu}\mathbf{X}_v \\ \mathbf{X}_u\mathbf{X}_{vv} & E & 0 \\ \frac{G_v}{2} & 0 & G \end{vmatrix} = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{vv} \rangle - \frac{E_u}{2E} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle - \frac{E_v}{2E} \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle$$

$$M^2 = \frac{1}{E^2} \begin{vmatrix} \mathbf{X}_{uv}\mathbf{X}_{uv} & \frac{E_v}{2} & \frac{E_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & E & 0 \\ \frac{E_u}{2} & 0 & E \end{vmatrix} = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{uv} \rangle - \frac{E_v^2}{4E} - \frac{E_u^2}{4E}$$

$F = \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$ olduğundan, u ve v 'ye göre türevleri:

$$F_u = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uv} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle = -\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{uv} \rangle = -\frac{E_v}{2}$$

$$F_v = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_{vv} \rangle = -\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle \quad (4.20)$$

$$= -\frac{E_u}{2} = -\frac{G_u}{2}$$

şeklindedir. Böylece

$$LN = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{vv} \rangle + \frac{E_u^2}{4E} + \frac{E_v^2}{4E}$$

$$M^2 = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{uv} \rangle - \frac{E_u^2}{4E} - \frac{E_v^2}{4E}$$

$$LN - M^2 = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{vv} \rangle - \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{uv} \rangle + \frac{E_u^2}{2E} + \frac{E_v^2}{2E}$$

şeklinde elde edilir. (4.20)'den $F_u = \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle + \frac{E_v}{2} \Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}$ buradan v 'ye göre türev alınır

$$\langle \mathbf{X}_{uuv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{vv} \rangle = F_{uv} - \frac{E_{vv}}{2} \Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{vv} \rangle = -\langle \mathbf{X}_{uuv}, \mathbf{X}_v \rangle - \frac{E_{vv}}{2} \quad (4.21)$$

elde edilir.

$G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \Rightarrow \frac{G_u}{2} = \frac{E_u}{2} = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle$ dir. Buradan u 'ya göre türev alınır,

$$\frac{E_{uu}}{2} = \langle \mathbf{X}_{uuv}, \mathbf{X}_v \rangle + \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{uv} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{uv} \rangle = \frac{E_{uu}}{2} - \langle \mathbf{X}_{uuv}, \mathbf{X}_v \rangle \quad (4.22)$$

(4.21)'den (4.22) çıkarılırsa $\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_{vv} \rangle - \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_{uv} \rangle = -\frac{E_{uu}}{2} - \frac{E_{vv}}{2}$

bulunur. Sonuçta,

$$LN - M^2 = -\frac{1}{2} (E_{uu} + E_{vv}) + \frac{E_u^2}{2E} + \frac{E_v^2}{2E}$$

elde edilir.

$E = \lambda^2$ denilir ve eşitlikler yeniden düzenlenirse,

$$E_u = (\lambda^2)_u = 2\lambda\lambda_u \Rightarrow E_{uu} = (E_u)_u = 2\lambda_u^2 + 2\lambda\lambda_{uu}$$

$$E_v = (\lambda^2)_v = 2\lambda\lambda_v \Rightarrow E_{vv} = (E_v)_v = 2\lambda_v^2 + 2\lambda\lambda_{vv}$$

olduğundan,

$$LN - M^2 = \lambda_u^2 - \lambda\lambda_{uu} + \lambda_v^2 - \lambda\lambda_{vv}$$

şeklindedir. Δ Laplasyen operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned}\Delta(\log \lambda) &= (\log \lambda)_{uu} + (\log \lambda)_{vv} = \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u + \left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v \\ &= \frac{\lambda_{uu}\lambda - \lambda_u^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_{vv}\lambda - \lambda_v^2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} (\lambda\lambda_{uu} - \lambda_u^2 + \lambda\lambda_{vv} - \lambda_v^2)\end{aligned}$$

olduğundan

$LN - M^2 = -\lambda^2 \Delta(\log \lambda)$ şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned}K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{E^2} = \frac{-\lambda^2 \Delta(\log \lambda)}{\lambda^4} = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\log \lambda) \\ &= -\frac{1}{E} \Delta(\log \sqrt{E}) \Rightarrow K = -\frac{1}{E} \Delta(\log \sqrt{E})\end{aligned}$$

elde edilir [21].

4.4 Minimal Grafikler ve Harmonik Dönüşümler

Başlangıç noktasını içeren basit bağlantılı $\Omega \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerindeki

$$S = \{u, v, F(u, v) : u + iv \in \Omega\}$$

minimal grafiği göz önüne alınsın. Burada $f : \mathbb{U} \rightarrow \Omega$, $z \in \mathbb{U}$ ve $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, birim disk olmak üzere F yalınkat harmonik fonksiyondur. p analitik ve q meromorfik fonksiyon olmak üzere, p fonksiyonu q fonksiyonunun m' inci dereceden kutba sahip olduğu noktalarda $2m'$ inci dereceden sıfır noktasına sahip ise

$$\begin{aligned}u &= \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z p(1 + q^2) d\xi \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} \\ v &= \operatorname{Im} \left\{ \int_0^z p(1 - q^2) d\xi \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \\ F(u, v) &= 2\operatorname{Im} \left\{ \int_0^z pq d\xi \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_3 d\xi \right\}\end{aligned} \tag{4.23}$$

biçimindedir.

$$f(z) = u + iv = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} + i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \tag{4.24}$$

olsun. h, g fonksiyonları $\mathbb{U}$ 'de analitik $h(0) = g(0) = 0$ ve $f = h + \bar{g}$, f fonksiyonunun kanonik gösterimi olmak üzere

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial z}, \text{ ve } \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\bar{g}}}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right)} = \overline{\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)} = 0$$

olduğundan $f' = h'$ elde edilir. (4.24) eşitliğinin z 'ye göre türevi alınır

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} + i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \right\}$$

elde edilir.

$\Phi(z)$ türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{\partial}{\partial z} \{ \operatorname{Re} \Phi(z) \} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} (\Phi + \bar{\Phi}) \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z}$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} + i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\},$$

buradan

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} (\Psi_1 + i\Psi_2)$$

yani

$$f' = h' = \frac{1}{2} (\Psi_1 + i\Psi_2) \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) eşitliğinin eşleniği alınır,

$$\overline{f(z)} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} - i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) eşitliğinin z 'ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} - i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} - i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} = \frac{1}{2} (\Psi_1 - i\Psi_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda, $\bar{f} = \bar{h} + g$ olduğundan

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}$$

şeklindedir. Buradan

$$\bar{f}' = g' = \frac{1}{2} (\Psi_1 - i\Psi_2) \quad (4.27)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{2}\Psi_1 + \frac{1}{2}i\Psi_2 \\ g' &= \frac{1}{2}\Psi_1 - \frac{1}{2}i\Psi_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$h' + g' = \Psi_1, \text{ ve } h' - g' = i\Psi_2 \Rightarrow \Psi_2 = -i(h' - g')$$

şeklinde bulunur. $\Psi_1 = p(1 + q^2)$, $\Psi_2 = -ip(1 - q^2)$ şeklinde idi. O halde

$$\begin{aligned} \Psi_3^2 &= -\Psi_1^2 - \Psi_2^2 = -[p(1 + q^2)]^2 - [-ip(1 - q^2)]^2 = -p^2(1 + q^2)^2 + p^2(1 - q^2)^2 \\ &= p^2[-1 - 2q^2 - q^4 + 1 - 2q^2 + q^4] = -4p^2q^2 \end{aligned}$$

olduğundan $\Psi_3 = 2ipq$ elde edilir. Böylece

$$h' + g' = p(1 + q^2)$$

$$-i(h' - g') = -ip(1 - q^2) \Rightarrow h' = p \quad \text{ve} \quad g' = pq^2$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= p(1 + q^2) \\ \Psi_2 &= -i(h' - g') \\ \Psi_3^2 &= -4p^2q^2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

fonksiyonlarını S minimal yüzeyinin Weierstrass-Enneper fonksiyonları ve $\{p, q\}$ fonksiyonlarını da S minimal yüzeyinin Weierstrass-Enneper parametreleri olarak adlandıracğız.

$\omega = \frac{\bar{f}'}{f'} = \frac{g'}{h'} = q^2$ fonksiyonu f 'nin "ikinci dilatasyonu" olarak adlandırılır. f fonksiyonu $|\omega| < 1$ ise yön koruyan, $|\omega| > 1$ ise yön-değıştiren

Teorem 4.4 Eğer $S = \{u, v, F(u, v) : u + iv \in \Omega\}$ minimal grafiğı, yön-koruyan izotermal $z = x + iy \in \mathbb{U}$ parametreleriyle parametrelenmiş ise, taban düzleme izdüşümü, dilatasyonu bir analitik fonksiyonun karesi olan bir $w = u + iv = f(z)$ harmonik dönüşüm tanımlar. Tersine, $f = h + \bar{g}$, $f : \mathbb{U} \rightarrow \Omega$ yön-koruyan ve dilatasyonu bir q analitik fonksiyonun karesi olan yalınkat harmonik dönüşüm ise, bu durumda

$$u = \text{Re} \{f(z)\}, \quad v = \text{Im} \{f(z)\}, \quad t = 2\text{Im} \left\{ \int_0^z q(\xi)h'(\xi)d\xi \right\}$$

formülleri taban düzleme izdüşümü f olan izotermal parametrelili bir minimal yüzey tanımlar. Üçüncü koordinat fonksiyonu olan t 'nin integral sabiti ve işareti önemsenmezse bu yüzey tek türlü belirlidir.

İspat . Teoremin gerekli koşulu olan, $\omega = q^2$ kanıtlandı. Tersinin kanıtlanabilmesi için $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial t}{\partial z}$ türevlerinin analitik ve $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = 0$ gösterilmesi gereklidir.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \{\operatorname{Re} \{f(z)\}\} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f + \bar{f}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (h' + g') \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \{\operatorname{Im} \{f(z)\}\} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f - \bar{f}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2i} (h' - g') \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2\operatorname{Im} \left[\int_0^z qh' d\xi \right] \right\} = \frac{2}{2i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^z qh' d\xi - \overline{\int_0^z qh' d\xi} \right) = \frac{qh'}{i} = -iqh' \quad (4.32)$$

türevleri şeklindedir. h ve g fonksiyonları analitik olduğundan $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial t}{\partial z}$ fonksiyonları da analitiktir. (4.30), (4.31), ve (4.32) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 &= \frac{1}{4}(h' + g')^2 - \frac{1}{4}(h' - g')^2 - (qh')^2 \\ &= \frac{1}{4}[(h' + g')^2 - (h' - g')^2] - q^2(h')^2 \\ &= h'g' - \frac{g'}{h'}(h')^2 = h'g' - h'g' = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir.

Hipotez gereği f yalıncat olduğundan, f 'nin grafiği bir yüzey belirler. Bu yüzeyin tek türlü belirli olduğu da gösterilirse teorem kanıtlanır. $u = \operatorname{Re} \{f(z)\}$, $v = \operatorname{Im} \{f(z)\}$, $t = k(z)$ diğer bir izotermal parametrelili minimal yüzey olsun. Bu durumda $\frac{\partial k}{\partial z}$ analitik olduğundan k harmoniktir. (4.33)'den

$$\left(\frac{\partial k}{\partial z}\right)^2 = -\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = -h'g' = -q^2(h')^2 \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial z} = \pm iqh'$$

elde edilir. k reel değerli harmonik fonksiyon olduğundan tek türlü kanonik gösterime sahiptir. Yani, analitik bir Υ fonksiyonu için $k = \Upsilon + \bar{\Upsilon} = 2\operatorname{Re} \{\Upsilon\}$ 'dir.

$$\frac{\partial k}{\partial z} = k' = (\Upsilon)' = \pm iqh' \Rightarrow \Upsilon = \pm i \int_0^z qh' d\xi + c$$

Böylece işaret ve integral sabiti önemszenmezse, teklik kanıtlanmış olur.

$\mathcal{S}$ minimal yüzeyinin Gauss eğriliğini $f = h + \bar{g}$ kanonik gösterime bağlı olarak ifade edilsin. $\mathcal{S}$ minimal yüzeyinin izotermal parametrelere sahip olduğu varsayılırsa, bu durumda

$$E = G = \lambda^2 > 0, \quad F = 0$$

dir. Yüzeyin birinci temel formu

$$\begin{aligned} ds^2 &= E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 = \lambda^2 (dx^2 + dy^2) \\ &= \lambda^2 (dx + idy)(dx - idy) = \lambda^2 dz d\bar{z} \\ &= \lambda^2 |dz|^2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\Psi_k|^2 = \frac{1}{2} (|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + |\Psi_3|^2) = \frac{1}{2} (E + G) = \lambda^2 \text{ ve}$$

$$\Psi_1 = p(1 + q^2), \quad \Psi_2 = -ip(1 - q^2), \quad \Psi_3 = -2ipq$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{1}{2} \left[|p|^2 (1 + |q|^2)^2 + |p|^2 (1 - |q|^2)^2 + 4 |p|^2 |q|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} |p|^2 \left[2 (1 + |q|^2)^2 \right] \\ \Rightarrow \lambda &= |p| (1 + |q|^2) = |h'| + |g'| \end{aligned} \tag{4.34}$$

elde edilir. Gauss eğriliği $K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\log \lambda)$ ve laplasyen operatörünün özelliği $\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ olduğundan (4.34)'den

$$K = -\frac{4 |q'|^2}{|p|^2 (1 + |q|^2)^4} = -\frac{|w'|^2}{|h'g'| (1 + |w|)^4} \tag{4.35}$$

elde edilir [5].

4.5 Minimal Yüzeyler ve Log-Harmonik Fonksiyonlar

Tanım 4.2 f , yalınkat log-harmonik fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ izotermal parametrelere sahip bir S (düzgün) minimal yüzeye karşılık geliyorsa bu durumda f yalınkat log-harmonik fonksiyonu S minimal yüzeyine karşılık gelir ya da lift eder denir.

Teorem 4.5 Birim disk $\mathbb{U}$ üzerinde $f = h.\bar{g}$ formunda tanımlı log-harmonik yalınkat f fonksiyonu verilsin. $h(0) = g(0) = 1$ normalizasyon koşulları altında $\log f = \log h + \log \bar{g}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ üzerinde bir harmonik dönüşüm tanımlar. Bu durumda izotermal parametrelerle verilen S minimal yüzeyin Weierstrass-Enneper gösterimi

$$\Psi_1 = \frac{h'}{h} + \frac{g'}{g}, \quad \Psi_2 = -i \left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \right), \quad \Psi_3 = -4 \left(\frac{h'}{h} \frac{g'}{g} \right) \tag{4.36}$$

ile ifade edilir.

İspat . Harmonik fonksiyonlar için yaptığımız çalışmayı şimdi de log-harmonik fonksiyonlar için uyarlayalım. f log-harmonik yalınkat fonksiyon olmak üzere $\log f = \log h + \log \bar{g}$ bir harmonik fonksiyon tanımlar.

$\log f = u + iv = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} + i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\}$ ve $h(0) = g(0) = 1$ normalizasyon koşulları altında $\log f$ harmonik fonksiyonunun z 'ye göre kısmi türevi alınır,

$$\frac{\partial}{\partial z} (\log f) = \frac{\partial}{\partial z} (\log h) + \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{g})$$

ve $\bar{g}$ analitik olmadığından $\frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{g}) = 0$ ve $\frac{f'}{f} = \frac{h'}{h}$ elde edilir.

$\frac{\partial}{\partial z} (\log f) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} + i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \right\}$ z 'ye bağlı kısmi türevini alalım :

$$\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Re} \{ \theta(z) \} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2} (\theta + \bar{\theta}) \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$$

olduğundan yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial z} (\log f) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} + i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} = \frac{1}{2} \Psi_1 + i \frac{1}{2} \Psi_2$$

ve dolayısıyla $\frac{f'}{f} = \frac{1}{2} (\Psi_1 + i \Psi_2)$ elde edilir.

$\log f$ fonksiyonunun eşleniği olan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\log f}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} - i \operatorname{Re} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_1 d\xi \right\} - i \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_0^z \Psi_2 d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\Psi_1 - i \Psi_2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

yazılır.

$$\frac{\partial}{\partial z} (\overline{\log f}) = \frac{g'}{g} = \frac{1}{2} (\Psi_1 - i \Psi_2)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial z} (\log f) = \frac{h'}{h} = \frac{1}{2} (\Psi_1 + i \Psi_2)$$

olduğu gösterilmişti. Buradan Ψ_1 ve Ψ_2 yi çekilirse

$$\Psi_1 = \frac{h'}{h} + \frac{g'}{g}, \quad \Psi_2 = -i \left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \right)$$

elde edilmiş olur. $\Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 = 0$ olduğundan Ψ_1 ve Ψ_2 yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\Psi_3^2 &= \left(\frac{h'}{h} + \frac{g'}{g}\right)^2 + \left(-i\left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g}\right)\right)^2 \\ &= 4\frac{h'}{h}\frac{g'}{g} \end{aligned} \quad (4.38)$$

f yalınkat log-harmonik fonksiyonu için $\omega = \frac{g'/g}{h'/h}$ ikinci dilatasyon olmak üzere, $\Psi_3^2 = -4\omega\left(\frac{h'}{h}\right)^2$ şeklinde yazılabilir.

Birim disk $\mathbb{U}$ üzerinde p analitik ve q meromorfik fonksiyon olmak üzere, p fonksiyonu q fonksiyonunun m -inci dereceden kutba sahip olduğu noktalarda $2m$ -inci dereceden sıfır noktasına sahip olsun. Bu durumda

$$p = \frac{h'}{h}, \quad pq^2 = \frac{g'}{g}, \quad \omega = q^2$$

eşitlikleri elde edilir. Ψ_1 ve Ψ_2 Weierstrass- Enneper fonksiyonlarının

$$\Psi_1 = p(1 + q^2) = \left(\frac{h'}{h} + \frac{g'}{g}\right) \quad \text{ve} \quad \Psi_2 = -ip(1 - q^2) = -i\left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g}\right)$$

olduğu gösterilmişti. Buradan yapılan kısa bir hesaplamadan sonra

$$p = \frac{h'}{h} \quad \text{ve} \quad pq^2 = \frac{g'}{g}$$

elde edilir. $\omega = \frac{g'/g}{h'/h}$ ikinci dilatasyon fonksiyonu olduğu hatırlanırsa $\omega = \frac{pq^2}{p} = q^2$ elde edilir.

Teorem 4.6 Birim disk $\mathbb{U}$ üzerinde $f = h.\bar{g}$ formunda tanımlı log-harmonik yalınkat f fonksiyonu verilsin. $h(0) = g(0) = 1$ normalizasyon koşulları altında $\log f = \log h + \log \bar{g}$ harmonik fonksiyonu göz önüne alınsın.

Eğer $S = \{u, v, F(u, v) : u + iv \in \Omega\}$ minimal grafiği, yön-koruyan izotermal $z = x + iy \in \mathbb{U}$ parametreleriyle parametrelenmiş ise, taban düzleme izdüşümü, dilatasyonu bir analitik fonksiyonun karesi olan bir $w = u + iv = \log f(z)$ harmonik dönüşüm tanımlar. Tersine, $\log f = \log h + \log \bar{g}$, $f : \mathbb{U} \rightarrow \Omega$ yön-koruyan ve dilatasyonu bir q analitik fonksiyonun karesi olan yalınkat harmonik dönüşüm ise, bu durumda

$$u = \operatorname{Re} \{\log f(z)\}, \quad v = \operatorname{Im} \{\log f(z)\}, \quad t = 2\operatorname{Im} \left\{ \int_0^z q(\xi)(\log h)'(\xi) d\xi \right\}$$

formülleri taban düzleme izdüşümü $\log f(z)$ olan izotermal parametrelili bir minimal yüzey tanımlar. Üçüncü koordinat fonksiyonu olan t 'nin integral sabiti ve işareti

önemszenmezse bu yüzey tek türlü belirlidir.

İspat . Teoremin gerekli koşulu olan, $\omega = q^2$ kanıtlandı. Tersinin gösterilebilmesi için $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial t}{\partial z}$ türevlerinin analitik ve $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2 = 0$ gösterilmesi gereklidir.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \{\operatorname{Re} \{\log f\}\} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\log f + \overline{\log f}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log f}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\log f}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h'}{h} + \frac{g'}{g} \right) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \{\operatorname{Im} \{\log f\}\} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\log f - \overline{\log f}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial \log f}{\partial z} - \frac{\partial \overline{\log f}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \right) \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2\operatorname{Im} \left[\int_0^z q(\log h)' d\xi \right] \right\} = \frac{2}{2i} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^z q(\log h)' d\xi - \overline{\int_0^z q(\log h)' d\xi} \right) \\ &= \frac{q(\log h)'}{i} = -iq \frac{h'}{h} \end{aligned} \quad (4.41)$$

türevleri şeklindedir. $\log h$ ve $\log g$ fonksiyonları analitik olduğundan $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial t}{\partial z}$ fonksiyonları da analiktir. (4.39), (4.40), ve (4.41) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{h'}{h} + \frac{g'}{g} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \right)^2 - \left(q \frac{h'}{h} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{h'}{h} + \frac{g'}{g} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{h'}{h} - \frac{g'}{g} \right)^2 - q^2 \left(\frac{h'}{h} \right)^2 \\ &= \frac{h'}{h} \frac{g'}{g} - \frac{g'}{g} \left(\frac{h'}{h} \right) = \frac{h'}{h} \frac{g'}{g} - \frac{h'}{h} \frac{g'}{g} = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. Hipotez gereği $\log f$ yalınkat olduğundan, $\log f$ 'nin grafiği bir yüzey belirler. Bu yüzeyin tek türlü belirli olduğu da gösterilirse teorem ispatlanır. $u = \operatorname{Re} \{\log f(z)\}$, $v = \operatorname{Im} \{\log f(z)\}$, $t = k(z)$ diğer bir izotermal parametrelili minimal yüzey olsun. Bu durumda $\frac{\partial k}{\partial z}$ analitik olduğundan k harmoniktir. (4.42)'den

$$\left(\frac{\partial k}{\partial z} \right)^2 = - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 = - \frac{h'}{h} \frac{g'}{g} = -q^2 \left(\frac{h'}{h} \right)^2 \Rightarrow \frac{\partial k}{\partial z} = \pm iq \left(\frac{h'}{h} \right)$$

elde edilir. k reel değerli harmonik fonksiyon olduğundan tek türlü kanonik gösterime sahiptir. Yani, analitik bir Υ fonksiyonu için $k = \Upsilon + \overline{\Upsilon} = 2\operatorname{Re} \{\Upsilon\}$ 'dir.

$$\frac{\partial k}{\partial z} = k' = (\Upsilon)' = \pm iq \left(\frac{h'}{h} \right) \Rightarrow \Upsilon = \pm i \int_0^z q \left(\frac{h'}{h} \right) d\xi + c$$

Böylece işaret ve integral sabiti önemszenmezse, teklik kanıtlanmış olur.

$f = h \cdot \bar{g}$ formunda tanımlı yalınkat log-harmonik f fonksiyonu verilsin. $h(0) = g(0) = 1$ normalizasyon koşulları altında $\log f = \log h + \log \bar{g}$ harmonik dönüşümü

S minimal yüzeyini belirlesin. S minimal yüzeyinin izotermal parametrelere sahip olduğu varsayılırsa buna bağlı olarak Gauss eğriliği aşağıdaki şekilde ifade edilir: (4.35) de $p = \frac{h'}{h}$, $q = \omega^2$ ve $q' = 2\omega\omega'$ yazılırsa

$$K = -\frac{4|q'|^2}{|p|^2(1+|q|^2)^4} = -\frac{|\omega'|^2}{\left|\frac{h'}{h}\frac{g'}{g}\right|(1+|\omega|)^4} \quad (4.43)$$

elde edilir.

5. BULGULAR

Lemma 5.1 [23] ω fonksiyonu $\Omega_{\cup}$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$\frac{|a-r|}{1-ar} \leq |\omega(z)| \leq \frac{a+r}{1+ar} \quad (5.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat . $r = |z| = 0$ durumunda, eşitsizliğin $z = 0$ için sağlandığı açıktır. Şimdi de $z \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ olsun ve herhangi bir $\theta \in \mathbb{R}$ için $b_1 = ae^{i\theta}$ tanımlayalım. $z \in \mathbb{U}$ için

$$\phi(z) = \frac{e^{-i\theta}\omega(z) - a}{1 - ae^{-i\theta}\omega(z)}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon Schwarz lemmasının koşullarını sağlar. Buna göre, $|\omega(z)| \leq |z| = r$ olduğunda

$$|\phi(z)| = \left| \frac{e^{-i\theta}\omega(z) - a}{1 - ae^{-i\theta}\omega(z)} \right| \leq r \Rightarrow |e^{-i\theta}\omega(z) - a| \leq r |1 - ae^{-i\theta}\omega(z)| \quad (5.2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik $z \in \mathbb{U}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\left| e^{-i\theta}\omega(z) - \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \leq \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} \quad (5.3)$$

eşitsizliğine denktir. Bu eşitsizlik

$$\omega(z) = e^{i\theta} \frac{e^{i\varphi}z + a}{1 + ae^{i\varphi}z}$$

fonksiyonu için eşitlik haline dönüşür. (5.3) de üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| |e^{-i\theta}\omega(z)| - \left| \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \right| \leq \left| e^{-i\theta}\omega(z) - \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \leq \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} \\ & \Rightarrow \left| |e^{-i\theta}\omega(z)| - \left| \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \right| \leq \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} \\ & \Rightarrow -\frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} \leq |e^{-i\theta}\omega(z)| - \left| \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \leq \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} \\ & \Rightarrow -\frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} + \left| \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \leq |e^{-i\theta}\omega(z)| \leq \frac{r(1-a^2)}{1-a^2r^2} + \left| \frac{a(1-r^2)}{1-a^2r^2} \right| \\ & \Rightarrow \frac{a-r}{1-ar} \leq |\omega(z)| = |e^{-i\theta}\omega(z)| \leq \frac{a+r}{1+ar} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Benzer şekilde (5.2) de a ile r yi yer deđiřtirirsek

$$\frac{r-a}{1-ar} \leq |\omega(z)| \leq \frac{r+a}{1+ar} \quad (5.5)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (5.4) ve (5.5) eşitsizliklerinden (5.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 5.1 Eğer $\omega \in \Omega_{\cup}$ ise

$$\frac{(1-a)(1-r)}{1+ar} \leq (1-|\omega(z)|) \leq \frac{1-ar-|a-r|}{1-ar} \quad (5.6)$$

$$\frac{1-ar+|a-r|}{1-ar} \leq (1+|\omega(z)|) \leq \frac{(1+a)(1+r)}{1+ar} \quad (5.7)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat . Bu eşitsizlikler Lemma 5.1 den kolayca çıkmaktadır.

Biz ikinci dilatasyonu $\Omega_{\cup}$ sınıfına ait $f = h\bar{g} \in S_{lh*}$ fonksiyonlarla çalışacağız.

Sonuç 5.2 $f = h\bar{g}$, $z \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ olmak üzere S_{lh*} sınıfından bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun analitik kısmı h olduğundan ,

$$\frac{(1-r)}{r(1+r)} \leq \left| \frac{h'}{h} \right| \leq \frac{(1+r)}{r(1-r)} \quad (5.8)$$

dır [8].

Sonuç 5.3 $f = h\bar{g}$, S_{lh*} sınıfından bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\frac{(1-r)|a-r|}{r(1+r)(1-ar)} \leq \left| \frac{g'}{g} \right| \leq \frac{(1+r)(a+r)}{r(1-r)(1+ar)} \quad (5.9)$$

eşitsizliği elde edilir .

İspat . Lemma 5.1 ve f in ikinci dilatasyon tanımından

$$\frac{|a-r|}{1-ar} \leq \left| \frac{g'/g}{h'/h} \right| \leq \frac{a+r}{1+ar} \quad (5.10)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. (5.8), (5.10) eşitsizlikleri birlikte alındığında (5.9) elde edilir.

Teorem 5.1 [24] Ψ_k fonksiyonları, $k = 1, 2, 3$ için bir S düzgün minimal yüzeyinin Weierstrass-Enneper fonksiyonları ve $f = h\bar{g} \in S_{lh*}$, $z \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ fonksiyonu S minimal yüzeyini lift etsin. Bu durumda,

$$\frac{(1-r)^2(1-a)}{r(1+r)(1+ar)} \leq |\Psi_1| \leq \frac{(1+r)^2(1+a)}{r(1-r)(1+ar)} \quad (5.11)$$

$$\frac{(1-r)^2(1-a)}{r(1+r)(1+ar)} \leq |\Psi_2| \leq \frac{(1+r)^2(1+a)}{r(1-r)(1+ar)} \quad (5.12)$$

$$\frac{4(1-r)^2|a-r|}{r^2(1+r)^2(1-ar)} \leq |\Psi_3|^2 \leq \frac{4(1+r)^2(a+r)}{r^2(1-r)^2(1+ar)} \quad (5.13)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

İspat . (4.38) ve sonuç (5.1) birlikte kullanıldığında (5.11), (5.12) ve (5.13) kolayca elde edilir.

$z = 0$ olması durumunda incelenirse:

$$\Psi_1 = \frac{h'}{h} + \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h} (1 + \omega) \quad (5.14)$$

$$\Psi_1(0) = (1 + \omega(0)) = 1 + a$$

$$\Psi_2(0) = -i(1 - a) \quad (5.15)$$

$|\Psi_3|^2 = 4|\omega| \left| \frac{h'}{h} \right|^2$ idi. $z = 0$ alınırsa, $|\Psi_3(0)|^2 = 4|\omega(0)|$ yani

$$\Psi_3(0) = \pm 2i\sqrt{a} \quad (5.16)$$

elde edilir.

Teorem 5.2 K, S düzgün minimal yüzeyinin Gauss eğriliği ve $f = h\bar{g} \in S_{lh*}$, $z \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$ fonksiyonu S minimal yüzeyini lift etsin. O halde,

$$K \leq \frac{(1-ar - |a-r|)^2 r^2 (1-ar)}{(1-ar + |a-r|)^2 (1-r)^4 |a-r|} \quad (5.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat . Sonuç(5.2) ve (5.3) kullanılmasıyla ve basit hesaplar yapıldıktan sonra,

$$\frac{r^2(1-r)^2(1+ar)}{(a+r)(1+r)^2} \leq \frac{1}{\left| \frac{g'}{g} \frac{h'}{h} \right|} \leq \frac{r^2(1+r)^2(1-ar)}{(1-r)^2|a-r|} \quad (5.18)$$

ve

$$|K| \leq \frac{|\omega'|^2}{\left| \frac{g'}{g} \frac{h'}{h} \right| (1+|\omega|)^4} \leq \frac{|\omega'|^2 r^2 (1+r)^2 (1-ar)}{(1+|\omega|)^4 (1-r)^2 |a-r|} \quad (5.19)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Öte yandan, $\phi(z) = \frac{\omega(z) - \omega(0)}{1 - \overline{\omega(0)}\omega(z)}$ fonksiyonu için Schwarz-Pick Lemmasını kullanırsak,

$$|\omega'|^2 \leq \frac{(1 - |\omega(z)|^2)^2}{(1 - r^2)^2} = \frac{(1 - |\omega(z)|)^2 (1 + |\omega(z)|)^2}{(1 - r)^2 (1 + r)^2} \quad (5.20)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (5.6), (5.7), (5.19) ve (5.20) eşitsizlikleri kullanılırsa (5.17) elde edilir.

$z = 0$ olması durumunda incelenirse:

$$|K| \leq \frac{|\omega'|^2}{\left| \frac{g'}{g} \frac{h'}{h} \right| (1 + |\omega|)^4}$$

eşitsizliğinde $z = 0$ yerine yazılırsa

$$|K| \leq \frac{(1 - a^2)^2}{a(1 + a)^4} = \frac{(1 - a)^2}{a(1 + a)^2} \quad (5.21)$$

elde edilir.

Örnek 5.1 $f(z) = e^{z - \frac{1}{2} \frac{z}{2-z}}$ fonksiyonunu ele alalım. $\log f(z) = z - \frac{1}{2} \frac{z}{2-z}$ ve $\Delta \log f(z) = 0$ olduğundan $f(z)$ fonksiyonu bir harmonik fonksiyondur. Bu fonksiyona ait

$h(z) = e^z$, $g(z) = e^{-\frac{1}{2} \frac{z}{2-z}}$, $h(0) = g(0) = 1$ ve $0 < |\omega(0)| = a < 1$ olmak üzere $\{p, q\}$

Weierstrass-Enneper parametreleri:

$p = \frac{h'}{h} = \frac{e^z}{e^z} = 1$, $\frac{g'}{g} = -\frac{1}{(2-z)^2}$, $\omega = \frac{g'}{g} / \frac{h'}{h} = -\frac{1}{(2-z)^2}$, ve $q = \sqrt{\omega} = \sqrt{-\frac{1}{(2-z)^2}} = i \frac{1}{(2-z)}$ elde edilir. $p = 1$, $q = i \frac{1}{(2-z)}$ eşitliklerini (4.11) de kullanırsak Katenoid yüzeyi elde edilir [25].

KAYNAKLAR

- [1] **Clunie, J ve Sheil-Small, T.** (1984). Harmonic Univalent Functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. Math, 9, 3-25.
- [2] **Abdulhadi, Z ve Bshouty, D** (1988). Univalent Functions in $H.\bar{H}(D)$, Trans. Amer. Math. Soc, 305, 841-849.
- [3] **O'Neill, B.** (1966). *Elementary Differential Geometry*, Academic Press. New York.
- [4] **Lipschultz, M.** (1969). *Differential Geometry*, Schaum's Outlines, McGraw-Hill.
- [5] **Duren, P.** (2004). *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge Tracts in Math, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] **Jun, S. H.** (1989). *Harmonic mappings and applications to minimal surfaces* (doktora tezi). Indiana University.
- [7] **Churchill, R. V.** (1989). Türkçeye çeviren Dr. Arif Kaya, *Karmaşık Değişkenler ve Uygulamaları*, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul.
- [8] **Duren, P. L.** (1983). *Univalent Functions*, A series of Compre. Stu. İn Math, Springer- Verlag, New York.
- [9] **Ahlfors, L. V.** (1979). *Complex Analysis, An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Variable*, McGraw-Hill Inc, New York.
- [10] **Türktekin, F.** (2010). *Pertürbe edilmiş harmonic tasvirlerin genel bir incelemesi* (yüksek lisans tezi). İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [11] **Yavuz, D. E.** (2009). *Harmonik yalıncat fonksiyonlar* (doktora tezi). İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [12] **Dettman, J. W.** (1965). *Applied Complex Variables*, Dover Publications, Inc, New York.
- [13] **Bak, J ve Newman, D. J.** (1997). *Complex Analysis* Second Edition, Springer-Verlag, Inc, New York.
- [14] **Sabuncuoğlu, A.** (2001). *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [15] **Lewy, H.** (1936). On the non- vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings, Bull. Amer. Math. Soc, 42, 689-692.
- [16] **Abdulhadi, Z ve Hengartner, W.** (1987). Spirallike Log-Harmonic Mappings, Complex Variables Theory Appl, 9(2-3), 121-130.
- [17] **Abdulhadi, Z.** (1996). Close-to-Starlike Logharmonic Mappings, Internat. J. Math. And Math. Sci. 19(3), 563-574.

- [18] **Abdulhadi, Z ve Abu Muhanna, Y.** (2006) Starlike Logharmonic Mappings of Order α , JIPAM, Vol. 7,4 (123).
- [19] **Dey, R.** (2003). The Weierstrass-Enneper representation using hodographic coordinates on minimal surface, Proc. Indian. Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol.113, No:2, pp. 189-193.
- [20] **Taylor, S.** (2007). On connections between univalent harmonic functions, symmetry groups, and minimal surfaces. Brigham Young University.
- [21] **Osserman, R.** (1960). On the Gauss Curvature of minimal surfaces, Trans. Amer. Math. Soc. 96, 115-128.
- [22] **Özkan, H, E.** (2009). *Log-harmonik yalıncat fonksiyonlar* (doktora tezi). İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [23] **Öktem, M.** (2011). *Minimal yüzeylerin harmonik fonksiyonlarla karakterizasyonu* (yüksek lisans tezi). İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [24] **Taştan, H. M. ve Alağaç, B.** (2011). *On Log-Harmonic Mappings Lifting to Minimal Surfaces*, Riemannian Geometry and Application, University of Bucharest, Romania, May 10-14.
- [25] **Taştan, H. M. ve Polatoğlu, Y.** (2009). *On Harmonic Mappings Lifting to Minimal Surfaces*, Mathematica Cluj, Proceeding of the analysis and theory of functions, Nazım Terzioğlu symposium, İstanbul Kültür Üniversitesi, August 24-26 (baskıda).

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Burcu ALAĞAÇ

Doğum Yeri ve Tarihi: İSTANBUL 26.06.1987

Adres: Mustafa Kemal Paşa Mah. Beyoğlu Cad. Mahir Sok. No :121/10
AVCILAR/ İSTANBUL

E-Posta: burcualagac@hotmail.com

Lisans: İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ 2005-2009

Yüksek Lisans : İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ 2009-2012

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

On Log-Harmonic Mappings Lifting to Minimal Surfaces, Riemannian Geometry and Application, University of Bucharest, May 10-14.