

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONİK KABUĞUN TİTREŞİM ANALİZİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Veli ÖZKARACA**

**Anabilim Dalı : UÇAK ve UZAY MÜHENDİSLİĞİ
Programı : UÇAK ve UZAY MÜHENDİSLİĞİ**

HAZİRAN 2008

KONİK KABUĞUN TİTREŞİM ANALİZİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Veli ÖZKARACA
(511041028)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2008**

**Tez Danışmanı : Yard. Doç. Dr. Vedat Z. Doğan
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Metin Orhan Kaya
Prof. Dr. Ata Mugan**

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda beni yönlendiren ve engin bilgisiyle bana yardımcı olan değerli hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Vedat Ziya DOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında benden yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Suat KAY'a, Dilek APAYDIN'a, ağabeyim Ali ÖZKARACA'ya ve diğer bütün arkadaşlarıma; ayrıca sevgili aileme sonsuz teşekkür ve minnettarlığımı sunmayı bir borç bilirim.

Mayıs 2008

Veli ÖZKARACA

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
KISALTMALAR	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1 GİRİŞ	1
1.1 Amaç	2
2 KONİK KABUK	3
2.1 İnce kabuk hareket denklemleri	3
2.1.1 Yüzey Geometrisi ve Kabuk Koordinatları	5
2.1.2 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları(Bünye Denklemleri)	6
2.1.3 Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları	7
2.1.4 Membran kuvvetleri ve eğilme momentleri	8
2.1.5 Genel ince kabuk hareket denklemleri	10
2.2 Dairesel konik kabuk hareket denklemleri	12
2.3 Sığ Kabuk (Donnell-Musthtari-Vlasov Denklemleri)	14
3 SAYISAL ÖRNEK	18
3.1 Serbest titreşim çözümlemesi	19
3.1.1 Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk denklemleri	20
3.1.2 Rayleigh yöntemi	22
3.1.3 Paket program	25
3.1.4 Karşılaştırmalar ve yorumlar	26
3.2 Dinamik titreşim çözümlemesi	34
3.2.1 Sinüzoidal periyodik yükleme - sönümsüz	35
3.2.2 Ani yükleme(patlama) - sönümsüz	36
4 SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	40

KISALTMALAR

GDQ	Genelleştirilmiş diferansiyel dörtlü (generalized differential quadrature)
Mpa	Mega paskal
Hz	Hertz

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1: Konik kabuk geometrileri.....	3
Şekil 2.2: Kabuk orta yüzeyi(kartezyen koordinatlarda ve eğrisel koordinatlarda)	5
Şekil 2.3: İnce kabukta kuvvet ve momentler	9
Şekil 2.4: Dairesel Konik kabuk koordinatları	12
Şekil 2.5: Sığ kabuk koordinatları	15
Şekil 3.1: Dairesel kesik konik kabuk	18
Şekil 3.2: Sığ Kabuk yaklaşımı frekans parametreleri($\alpha=45^0$, $\nu = 0.3$, $h/R_2=0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$).....	22
Şekil 3.3: Rayleigh yöntemi frekans parametreleri($\alpha= 45^0$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	25
Şekil 3.4: Paket program frekans parametreleri($\alpha= 45^0$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)	26
Şekil 3.5: Frekans parametreleri karşılaştırması ($\alpha= 45^0$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	27
Şekil 3.6: Değişik α açıları için paket program frekans parametreleri ($\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)	28
Şekil 3.7: Değişik h/R_2 oranları için paket program frekans parametreleri ($\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	28
Şekil 3.8: Değişik $L\sin\alpha/R_2$ oranları için paket program frekans parametreleri($\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	29
Şekil 3.9: Değişik α açıları için sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	30
Şekil 3.10: Değişik h/R_2 oranları için sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	30
Şekil 3.11: Değişik $L\sin\alpha/R_2$ oranları için sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$).....	31
Şekil 3.12: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\alpha=15$, $\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)	32
Şekil 3.13: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\alpha=75$, $\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)	32

Şekil 3.14: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\alpha=45$, $\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.001$ ve $L\sin\alpha / R_2 = 0.5$)	33
Şekil 3.15: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\alpha=45$, $\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.75$ ve $L\sin\alpha / R_2 = 0.5$)	33
Şekil 3.16: Paket program çözümlemesi geometrisi.....	34
Şekil 3.17: Sinüzoidal yükleme altında $L/2$ istasyonundaki bir noktanın yer değiştirme grafiği	35
Şekil 3.18: Ani yükleme(patlama) basıncı altında $L/2$ istasyonundaki bir noktanın yer değiştirme grafiği	36

SEMBOL LİSTESİ

ε_{ij}	Şekil değiştirme ifadesi
σ	Gerilme ifadesi
E	Elastisite modülü
G	Kayma elastisite modülü
μ, ν	Poisson oranı
N_{ij}	Kuvvet bileşenleri
M_{ij}	Moment bileşenleri
D	Eğilme katılığı
K	Membran katılığı
δ	Varyasyonel operatörü
ϕ	Airy gerilme fonksiyonu
f_{mn}	Frekans parametresi
ω_{mn}	Açısal frekans
e	Üstel fonksiyon
U_{maks}	En yüksek potansiyel enerji
K_{maks}	En yüksek kinetik enerji
ρ	Yoğunluk

KONİK KABUĞUN TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Yapısal titreşimler hava ve uzay araçlarının yorulma dayanımı ve araç içindeki mekanik ve elektronik aksamın sağlıklı olarak çalışması bakımından oldukça önemlidir. Yapının dinamik davranışının belirlenmesi için serbest titreşimlerin incelenmesi gerekmektedir. Bu çalışmada dairesel kesitli kesik konik kabuğun serbest titreşim çözümleri yapılarak doğal frekansları bulunmuş ve değişik mod şekillerinin frekans değerleri incelenmiştir. Kabuk yapı için birinci mertebe Love yaklaşımına dayalı ince kabuk teorisi kullanılmıştır. Serbest titreşim çözümleri sırasında Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk kabulleri ve denklemleri ele alınıp çözümlenmiştir, çözümler sırasında kullanılan hareket denklemi, soedel[2] in çalışmasında da yer alan serbest titreşim çözümlerine has sığ kabuk denkleminde yapılan sadeleştirme ile elde edilmiştir. Ayrıca aynı sığ kabuk yaklaşımında kullanılan kabullere göre Rayleigh yöntemi ile de çözümler yapılmıştır. Bunlara ek olarak bir paket program kullanılarak dairesel kesik konik kabuğun değişik geometri özellikleri için doğal frekansları elde edilmiştir. Paket program çözümlerinde sığ kabuk yaklaşımında kullanılan kabuller yapılmamıştır. Yapılan üç serbest titreşim çözümlerinde elde edilen frekans parametresi değerleri birbirleri ile ve geçmişte yapılan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar Liew[7]'in 2005 yılında ve Shu[8]'nin 1996 yılında yayınladıkları çalışmalarda yer alan değerler ile yapılmıştır.

Serbest titreşim çözümlerine ek olarak dairesel kesik konik kabuğun zorlanmış sönümsüz titreşim çözümleri yapılarak zamana bağlı dinamik tepkileri incelenmiştir. Zorlanmış titreşim çözümleri iki ayrı yük tipi için, sinüzoidal yük ve ani yükleme(patlama) için paket program kullanılarak yapılmıştır.

VIBRATION ANALYSIS OF CONICAL SHELL

SUMMARY

Structural vibrations are very important for the aircraft and space craft in point of fatigue life and healthy working of the mechanic, electronic components inside. To define the dynamic behavior of structure, free vibration analysis should be performed and investigated. In this study, free vibration analysis of cylindrical incomplete conical shell was performed, natural frequencies were found and frequency values of different mode shapes were investigated. For shell structure, thin shell theories based on first degree Love shell theory, were used. In free vibration analysis, Donnel-Musthtari-Vlasov's shallow shell assumptions and equations were considered. The equations of motion were derived from shallow shell simplification specific for free vibration analysis. This simplification stated also in Soedel[2]'s study. Also another free vibration analysis was performed using Rayleigh method with the same assumptions of shallow shell theory. In addition to these, natural frequencies were derived with using a computer aided engineering analysis program for different geometries of cylindrical incomplete conical shell. In computer aided analysis, shallow shell assumptions were not considered. Frequency parameters which were derived from these three types of analysis, were compared between each other and with the frequency parameters derived in the past studies. Comparison were performed with frequency values obtained in the studies of Liew[7] issued in 2005 and Shu[8] issued in 1996.

In addition to free vibration analysis, by performing undamped forced vibration analysis of cylindrical incomplete conical shell, time dependent dynamic responses were investigated. Forced vibration analysis was performed using computer aided analysis program with two different load conditions; sinusoidal periodic load and instantaneous load (blast).

1 GİRİŞ

Kolay uygulanabilirliklerinden dolayı kabuk yapılar havacılık, inşaat, makine, denizcilik ve otomotiv gibi birçok mühendislik alanında kullanılmaktadır. Bu mühendislik dallarında yapılan çalışmaların başında yapısal titreşimler gelmektedir. Özellikle uçak ve uzay mühendisliği alanında yapısal titreşimler büyük önem taşımaktadır. Yapı titreşimleri, bir uçak veya roketin içindeki elektronik ve mekanik cihazların sağlıklı olarak çalışması ve yapı elamanlarının mukavemeti bakımından oldukça önemlidir. Titreşim yıpranma veya metal yorulması nedeniyle yapı ömrünün kısılmasına yol açtığı gibi, cihazların etkin bir şekilde çalışmasını da önler. Titreşim analizlerinde, verdiği başarılı ve gerçeğe yakın sonuçlar nedeniyle kabuk yapılar sıkça kullanılmaktadır. Geçmişte kabuk titreşimleri hakkında birçok çalışma yapılmıştır.

Leissa[1], 1973 yılında o güne kadar yazılmış 1000 fazla kaynağı gözden geçirerek hazırladığı monografisinde değişik geometrideki kabuk yapıların titreşim analizi çalışmalarını ortaya koymuştur. Wernel Soedel[2] de çalışmasında kabukların titreşim analizlerine yer vermiştir, Ercüment-Mustafa Köksal[3] çalışmalarında değişik geometrideki kabuk ve plakların statik ve dinamik analizlerine yer vermiştir. Genel kabuklar hakkında yapılmış bu çalışmaların dışında özellikle konik geometrili kabukların dinamik ve titreşim analizleri üzerine hazırlanmış birçok çalışma vardır. Rayleigh-Ritz yöntemi en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Saunders[4], Garnet ve Kemper[5], Siu ve Bert[6] konik kabuğun titreşim analizleri için Ritz yöntemini kullanmışlardır. Liew[7] de bağımsız eleman (element-free) kp-Ritz yöntemini kullanmıştır. C.Shu[8] genelleştirilmiş diferansiyel dördü (generalized differential quadrature-GDQ) metodu ile konik kabuğun serbest titreşim analizi üzerine çalışmış, Irie[9] değişken kalınlıklı konik kabuğun serbest titreşim analizlerini, transfer matris metodunu kullanarak yapmıştır. Goldberg[10] ve Kalnins[11] konik kabuğun serbest titreşim analizi için sayısal integrasyon yöntemini kullanmıştır. Serbest titreşim analizi dışında, çeşitli yükler altında da kabukların dinamik analizleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Leissa ve So[14], Leissa ve Kang[15] kesik, delikli konik

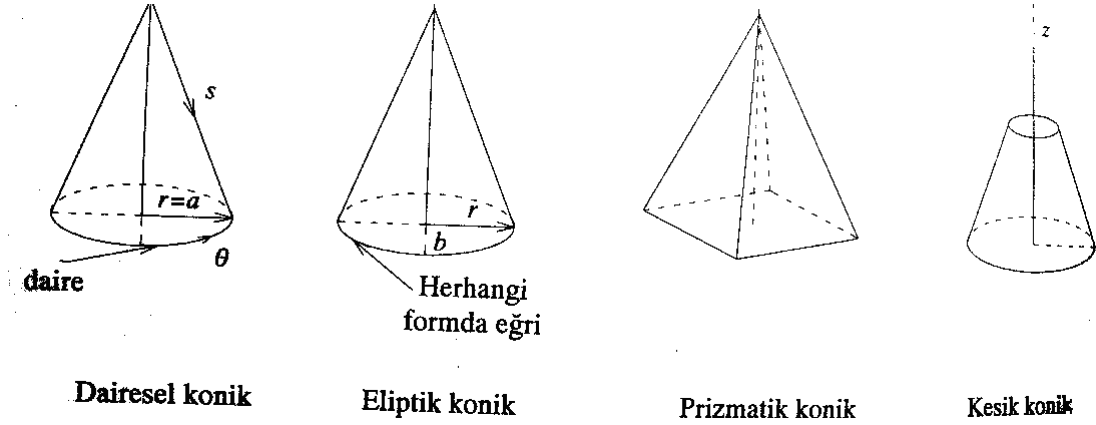
kabuğun 3-boyutlu titreşim analizleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Kumar ve Ganesan[16], Selman ve Lakis[17] içinde sıvı akışı olan konik kabukların dinamik analizleri üzerine çalışmalar yayınlamışlardır. İzotrop malzeme özelliklerine sahip kabuklar üzerine yapılmış bu çalışmalar dışında izotrop olmayan kabukların titreşim ve dinamik analizleri üzerine de çalışmalar yapılmıştır. Tripathi[18], S. Liang[19], Pinto Correia[20] ve J.J Lee[21] kompozit konik kabukların titreşim ve dinamik analizleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Mecitoğlu[22] ısıya bağlı malzeme özelliklerine sahip konik kabuğun serbest titreşim analizlerini yapmıştır. Tong[12-13] ortotropik ve kompozit konik kabuğun serbest titreşim analizi için kuvvet serileri açılımı yöntemini kullanmıştır Kabuk yapıların analizlerinde sıkça kullanılan yöntemlerden biri de sığ kabuk yaklaşımıdır. Doğan ve Vaicaitis[23] sığ kabuk teoremi ile çift katmanlı silindirik kabuğun gelişigüzel yükler altında lineer olmayan cevabını incelemiştir. Lim ve Liew[24] kompozit sığ konik kabuğun titreşim analizlerini yapmıştır. L.A. Godoy[25], Ribeiro[26], Kurpa[27], A.N Nayak[28] çalışmalarında sığ kabukların titreşimini incelemiştir.

1.1 Amaç

Bu çalışmanın amacı mühendislikte birçok çalışma alanı bulunan konik kabuğun serbest ve zorlanmış titreşimlerinin çözümlenerek diğer örneklerle karşılaştırılmasının yapılması ve değişik geometrik koşullar ve yükler altında yapının titreşim cevabını anlaşılmasıdır. Çözümlemeler sırasında yapılan kabullere göre farklı yöntemler ile çözümleme yapılarak, bu yöntemlerin hata oranlarının karşılaştırılması da amaçlanmıştır.

2 KONİK KABUK

Birbirine çok yakın, bükülmüş iki yüzeyle sınırlandırılmış üç boyutlu yapılara Kabuk denir. Eğer bu yüzeyler birbirine paralel ise sabit kalınlıklı kabuk olur, değilse değişken kalınlıklı kabuk olur. Konik kabuk, konik yüzeyli bir kabuktur. Konik yüzey, verilen sabit bir noktadan geçen ve bir uzay eğrisine değen bir doğrunun oluşturduğu yüzeydir. Uzay eğrisinin şekline göre prizmatik konik, dairesel konik, elipsi konik gibi konik kabuk formları vardır. Bunların arasında dairesel konik kabuk hem daha basit denklem ve çözümler verir, hem de uygulamada daha çok rastlanır.



Şekil 2.1: Konik kabuk geometrileri

Bu çalışmada da dairesel konik kabuk için denklemler çıkarılmış ve çözümler elde edilmiştir.

2.1 İnce kabuk hareket denklemleri

Konik kabuğun hareket denklemlerini elde etmek için önce genel ince bir kabuk için yapılan kabulleri ve ince kabuk denklemlerini incelemeliyiz. İnce elastik bir kabuk için ana hareket denklemleri ilk kez Love tarafından 1888 yılında elde edilmiştir.

Kirchoff'un lineer elastik kabuk modelini geliştiren Love ince kabuk teorisinde şu kabulleri yapmıştır;

- 1- Kabuğun kalınlığı diğer karakteristik boyutlarına kıyasla çok küçüktür.

- 2- Yüzey doğrultusuna paralel yer değiştirmeler çok küçüktür. Böylece bu yer değiştirme bağıntılarındaki ikinci ve daha yüksek mertebeden terimler birinci mertebe terimlere kıyasla ihmal edilebilir. Dolayısıyla denge şartları şekil değiştirmemiş kabuk için yazılabilir.
- 3- Teori fiziksel yönden lineerdir. Şekil değiştirmeler ve gerilmeler orantılıdır, Hooke yasası geçerlidir. Malzeme homojen ve izotropdur.
- 4- Kabuğun normali üzerindeki bir nokta şekil değiştirmiş kabukta yine aynı normal üzerinde bulunur ve kabuk orta yüzeyine olan uzaklığı değişmez.
- 5- Kabuk ortalama yüzeyine dik doğrultuda normal gerilmeler diğer normal gerilme bileşenlerine kıyasla küçüktür ve ihmal edilebilir.

Bu kabuller gereği;

Kabuk uzayında yer değiştirme vektörleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$U_1(a_1, a_2, a_3) = u_1(a_1, a_2) + a_3\beta_1(a_1, a_2) \quad (2.1)$$

$$U_2(a_1, a_2, a_3) = u_2(a_1, a_2) + a_3\beta_2(a_1, a_2) \quad (2.2)$$

$$U_3(a_1, a_2, a_3) = u_3 \quad (2.3)$$

Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eğrisel koordinatları, U_1, U_2, U_3 sırası ile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yönündeki yer değiştirme vektörlerini, u_1, u_2, u_3 büyüklükleri referans yüzeyinde bir noktanın yer değiştirme vektörünün bileşenlerini, β_1 ve β_2 tanjant değerleri ifade eder.

Yine bu kabuller gereği bazı gerilme ve şekil değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi sifıra eşit olur;

$$\varepsilon_{13} = 0 \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{33} = 0 \quad (2.6)$$

Her ne kadar ε_{13} ve ε_{23} şekil değiştirmeleri ihmal edilse de, σ_{13} ve σ_{23} kayma gerilmelerinin etkileri ihmal edilmeyecektir.

2.1.1 Yüzey Geometrisi ve Kabuk Koordinatları

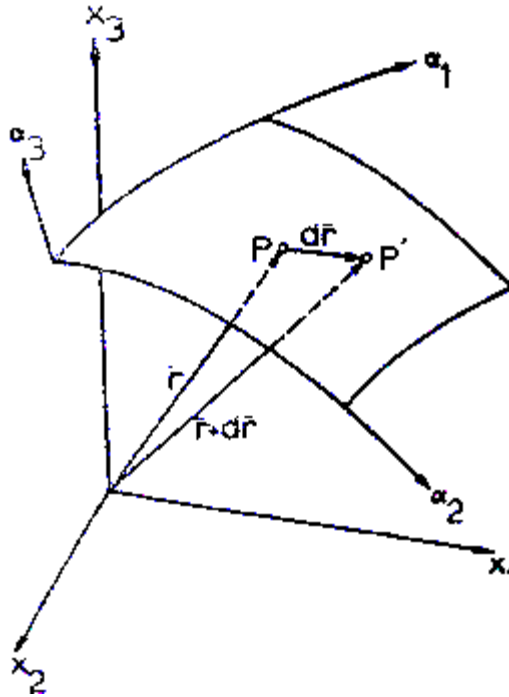
Kabuk ortalama yüzeyi, kabuk kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanır, membran olarak ta adlandırılır.

3 boyutlu kartezyen koordinatları üzerine yerleştirilmiş bir kabuk orta yüzeyi üzerindeki herhangi bir nokta, 2 boyutlu eğrisel yüzey koordinatları α_1 ve α_2 ile de ifade edilebilir(şekil 2.2).

$$x_1 = f(a_1, a_2) \quad x_2 = f(a_1, a_2) \quad x_3 = f(a_1, a_2) \quad (2.7)$$

Kabuk orta yüzeyi üzerindeki herhangi P noktası r vektörü ile gösterelim;

$$r(a_1, a_2) = f_1(a_1, a_2)e_1 + f_2(a_1, a_2)e_2 + f_3(a_1, a_2)e_3 \quad (2.8)$$



Şekil 2.2: Kabuk orta yüzeyi(kartezyen koordinatlarda ve eğrisel koordinatlarda)

Kabuk orta yüzeyi üzerinde P ile P' noktaları arasında sonsuz küçük bir uzaklığı ele alırsak,

$$dr = \frac{\partial r}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial r}{\partial a_2} da_2 \quad (2.9)$$

dr 'nin büyüklüğü ds ;

$$(ds)^2 = dr dr \quad (2.10)$$

Ya da

$$(ds)^2 = \frac{\partial r}{\partial a_1} \frac{\partial r}{\partial a_1} (da_1)^2 + \frac{\partial r}{\partial a_2} \frac{\partial r}{\partial a_2} (da_2)^2 + \frac{\partial r}{\partial a_1} \frac{\partial r}{\partial a_2} da_1 da_2 \quad (2.11)$$

Olarak elde edilir. Ortogonal eğrisel koordinatlarda, 2.11 denkleminde 3. terim sıfır olur. Böylece;

$$\frac{\partial r}{\partial a_1} \frac{\partial r}{\partial a_1} = \left| \frac{\partial r}{\partial a_1} \right|^2 = A_1^2 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial r}{\partial a_2} \frac{\partial r}{\partial a_2} = \left| \frac{\partial r}{\partial a_2} \right|^2 = A_2^2 \quad (2.13)$$

$$(ds)^2 = A_1^2 (da_1)^2 + A_2^2 (da_2)^2 \quad (2.14)$$

Bu denkleme “temel biçim”(fundamental form) ve A_1 , A_2 değerlerine de Lamé parametreleri denir.

2.1.2 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları(Bünye Denklemleri)

Love'nin ince elastik kabuklar teorisi dikkate alınırsa, ince kabuklarda gerilme ve yer değiştirme bağıntıları Hooke yasası uygulanarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \mu \sigma_{22}) \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \mu \sigma_{11}) \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G} \quad (2.17)$$

Burada ε_{11} , ε_{22} normal şekil değiştirmeleri ε_{12} kayma şekil değiştirmesini; σ_{11} , σ_{22} normal gerilmeleri σ_{12} kayma gerilmesini ifade eder. E elastisite modülünü, G kayma elastisite modülünü, μ poisson oranını ifade eder.

2.1.3 Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları

Love'nin ince elastik kabuklar teorisi dikkate alınır, ince kabuklarda normal ve kayma şekil değiştirmesi bileşenleri, yer değiştirme bileşenlerine aşağıdaki ifadeler ile bağlanır.

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} (u_1 + a_3 \beta_1) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} (u_2 + a_3 \beta_2) + \frac{u_3}{R_1} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} (u_1 + a_3 \beta_1) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} (u_2 + a_3 \beta_2) + \frac{u_3}{R_1} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{33} = 0 \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{13} = 0 \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_{23} = 0 \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{u_1 + a_3 \beta_1}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{u_1 + a_3 \beta_1}{A_1} \right) \quad (2.23)$$

Burada u_1, u_2, u_3 sırası ile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yönündeki yer değiştirmeleri, β_1 ve β_2 tanjant değerleri(açılar) ifade eder.

Bu bağıntıları kalınlıktan bağımsız olarak, kabuk orta yüzeyi(membran) için yazarsak;

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^0 + a_3 k_{11} \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^0 + a_3 k_{22} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^0 + a_3 k_{12} \quad (2.26)$$

Burada “0” indisi, üzerine geldiği şekil değiştirme ifadelerinin membran için olduğunu belirtir. k_{11}, k_{22}, k_{12} eğrilik değişimlerini, eğilme şekil değişimlerini ifade eder. Buna göre membran şekil değiştirmeleri:

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{u_3}{R_1} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{u_3}{R_2} \quad (2.28)$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \quad (2.29)$$

Gibi ifade edilir ve eğilme şekil değişimleri de aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$k_{11} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial a_2} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \quad (2.30)$$

$$k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial a_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \quad (2.31)$$

$$k_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right) \quad (2.32)$$

2.1.4 Membran kuvvetleri ve eğilme momentleri

Membran üzerindeki kuvvetler aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$N_{11} = K \left(\varepsilon_{11}^0 + \mu \varepsilon_{22}^0 \right) \quad (2.33)$$

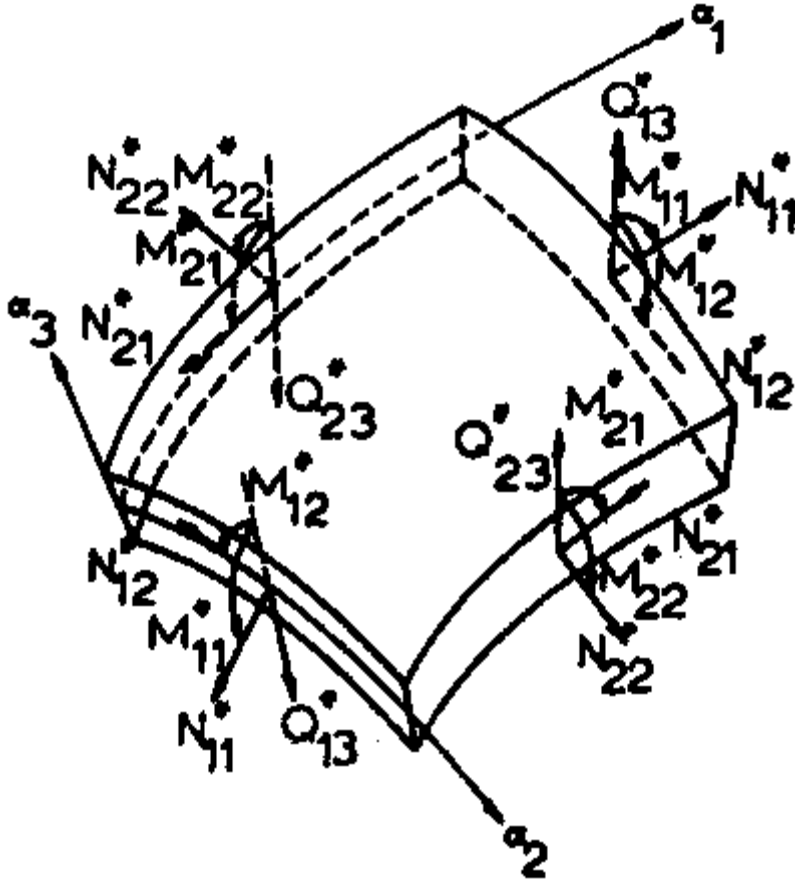
$$N_{22} = K \left(\varepsilon_{22}^0 + \mu \varepsilon_{11}^0 \right) \quad (2.34)$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{K(1-\mu)}{2} \varepsilon_{12}^0 \quad (2.35)$$

Burada K membran katılığı olarak adlandırılır ve

$$K = \frac{Eh}{1-\mu^2} \quad (2.36)$$

Şeklinde gösterilir. h kabuk kalınlığıdır.



Şekil 2.3: İnce kabukta kuvvet ve momentler

Membran eğilme momentleri de aşağıdaki gibidir;

$$M_{11} = D(k_{11} + \mu k_{22}) \quad (2.37)$$

$$M_{22} = D(k_{22} + \mu k_{11}) \quad (2.38)$$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{D(1-\mu)}{2} k_{12} \quad (2.39)$$

Burada D eğilme katılığı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2.40)$$

Enine kesme kuvvetleri;

$$Q_{13} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} da_3 \quad (2.41)$$

$$Q_{23} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} da_3 \quad (2.42)$$

gibi ifade edilir ve sonuç denklemlerinden tanımlanır.

2.1.5 Genel ince kabuk hareket denklemleri

Hamilton prensibini ince konik kabuk için yazarsak;

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta E_b - \delta E_1 - \delta K) dt = 0 \quad (2.43)$$

Denklemini elde ederiz. Burada U kabuğun şekil değiştirme enerjisini, K kinetik enerjiyi, E_b sınır şartlarından gelen enerjiyi ve E_1 de kabuğa etki eden herhangi bir yükten gelen enerjiyi ifade eder. δ Sembolü matematiksel bir ifade olup varyasyonel operatörüdür. Bu denklemdaki enerji ifadelerini ince kabuk için yazarsak ve yukarıdaki denklemden yerine koyarsak genel kabuk için enerji denklemlerinden oluşan aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int \int \left\{ \left[\frac{\partial (N_{11} A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (N_{21} A_1)}{\partial a_2} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + Q_{13} \frac{A_1 A_2}{R_1} \right. \right. \\ \left. \left. + (q_1 - \rho h \ddot{u}_1) A_1 A_2 \right] \delta u_1 + \left[\frac{\partial (N_{12} A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (N_{22} A_1)}{\partial a_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \right. \right. \\ \left. \left. + Q_{23} \frac{A_1 A_2}{R_2} + (q_2 - \rho h \ddot{u}_2) A_1 A_2 \right] \delta u_2 + \left[\frac{\partial (Q_{13} A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (Q_{23} A_1)}{\partial a_2} - \left(\frac{N_{11}}{R_1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{N_{22}}{R_2} \right) A_1 A_2 + (q_3 - \rho h \ddot{u}_3) A_1 A_2 \right] \delta u_3 + \left(\frac{\partial (M_{11} A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (M_{21} A_1)}{\partial a_2} \right. \\ \left. \left. + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + Q_{13} A_1 A_2 \right) \delta \beta_1 + \left(\frac{\partial (M_{12} A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (M_{22} A_1)}{\partial a_2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + Q_{23} A_1 A_2 \Big) \delta \beta_2 \Bigg\} da_1 da_2 dt \\
& + \int_{t_0}^1 \int_{a_1}^1 \left[\left(N_{22}^* - N_{22} \right) \delta u_2 + \left(N_{21}^* - N_{21} \right) \delta u_1 + \left(Q_{23}^* - Q_{23} \right) \delta u_3 \right. \\
& + \left. \left(M_{22}^* - M_{22} \right) \delta \beta_2 + \left(M_{21}^* - M_{21} \right) \delta \beta_1 \right] A_1 da_1 dt \\
& + \int_{t_0}^1 \int_{a_2}^1 \left[\left(N_{11}^* - N_{11} \right) \delta u_1 + \left(N_{12}^* - N_{12} \right) \delta u_2 + \left(Q_{13}^* - Q_{13} \right) \delta u_3 \right. \\
& + \left. \left(M_{11}^* - M_{11} \right) \delta \beta_1 + \left(M_{12}^* - M_{12} \right) \delta \beta_2 \right] A_2 da_2 dt = 0 \quad (2.44)
\end{aligned}$$

Burada * operatörü, ilgili ifadenin sınır şartlarından dolayı olduğunu, yani kabuğun sınırlarındaki normal ve kesme gerilmelerini, momentleri ifade eder. q_1 , q_2 , q_3 sırasıyla α_1 , α_2 , α_3 yönündeki dış kuvvetleri ifade etmektedir. Denklemin çözümü için her üç integralin ayrı ayrı sıfıra eşit olması gerekir. Bu integraller ayrı ayrı çözümlenirse;

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial (N_{11} A_2)}{\partial a_1} - \frac{\partial (N_{21} A_1)}{\partial a_2} - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + N_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - A_1 A_2 \frac{Q_{13}}{R_1} \\
& + A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_1 = A_1 A_2 q_1 \quad (2.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial (N_{12} A_2)}{\partial a_1} - \frac{\partial (N_{22} A_1)}{\partial a_2} - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + N_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - A_1 A_2 \frac{Q_{23}}{R_2} \\
& + A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_2 = A_1 A_2 q_2 \quad (2.46)
\end{aligned}$$

$$- \frac{\partial (Q_{13} A_2)}{\partial a_1} - \frac{\partial (Q_{23} A_1)}{\partial a_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_{11}}{R_1} \frac{N_{22}}{R_2} \right) A_1 A_2 \rho h \ddot{u}_3 = A_1 A_2 q_3 \quad (2.47)$$

Buradaki Q_{13} ve Q_{23} enine kesme kuvvetleri aşağıdaki denklemlerden elde edilir.

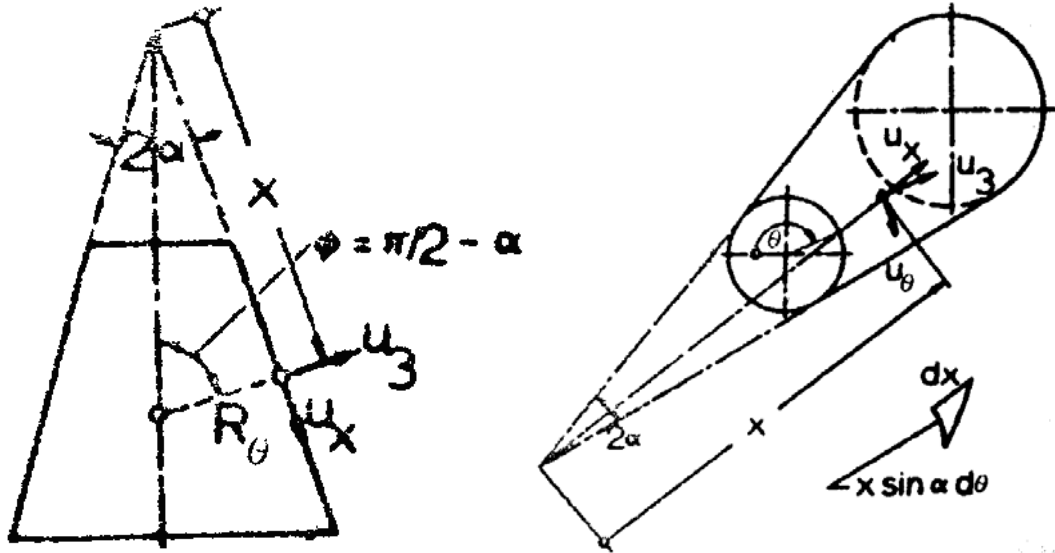
$$\frac{\partial (M_{11}A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (M_{21}A_1)}{\partial a_2} + M_{12} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - M_{22} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - Q_{13}A_1A_2 = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial (M_{12}A_2)}{\partial a_1} + \frac{\partial (M_{22}A_1)}{\partial a_2} + M_{21} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} - M_{11} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} - Q_{23}A_1A_2 = 0 \quad (2.49)$$

Bu beş denklem Love denklemleri olarak adlandırılır ve ince kabuk teorisinde genel bir kabuk için hareket denklemlerini ifade eder.

2.2 Dairesel konik kabuk hareket denklemleri

Dairesel konik kabuk koordinatları şekil 2.4 te verilmiştir.



Şekil 2.4: Dairesel Konik kabuk koordinatları

Dairesel konik kabuk koordinatlarındaki ifadelerin, genel kabuk koordinatlarındaki karşılıkları aşağıdaki gibidir.

$$a_1 = \phi \quad (2.50)$$

$$a_2 = \theta \quad (2.51)$$

$$R_1 = R_\phi \quad (2.52)$$

$$R_2 = R_\theta \quad (2.53)$$

Şekil 2.4'te görüleceği gibi;

$$\frac{1}{R_\phi} = 0 \quad (2.54)$$

$$R_\theta = x \tan \alpha \quad (2.55)$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (2.56)$$

buradan $\sin\phi = \cos\alpha$ $\cos\phi = \sin\alpha$ elde edilir ve temel form denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$(ds)^2 = (dx)^2 + x^2 \sin^2\alpha (d\theta)^2 \quad (2.57)$$

Temel denklemden;

$$R_\phi d\phi = dx \quad (2.58)$$

$$R_\theta \sin\phi = x \sin\alpha \quad (2.59)$$

İfadeleri elde edilir.

Konik kabuk koordinatlarından gelen yukarıdaki denklemleri ince kabuk hareket denklemlerinde yerine koyarsak, konik yüzeyli kabuk için hareket denklemlerini elde ederiz.

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{x \sin\alpha} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{1}{x} (N_{xx} - N_{\theta\theta}) + q_x = \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{2}{x} N_{\theta x} + \frac{1}{x \sin\alpha} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{x \tan\alpha} Q_{\theta 3} + q_\theta = \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial Q_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{x} Q_{x3} + \frac{1}{x \sin\alpha} \frac{\partial N_{\theta 3}}{\partial \theta} + \frac{1}{x \tan\alpha} N_{\theta\theta} + q_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.62)$$

ve

$$Q_{x3} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{M_{xx}}{x} + \frac{1}{x \sin\alpha} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{x} \quad (2.63)$$

$$Q_{x3} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{M_{xx}}{x} + \frac{1}{x \sin\alpha} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - \frac{M_{\theta\theta}}{x} \quad (2.64)$$

Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları;

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{x} u_x + \frac{1}{x \tan \alpha} u_3 \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} - \frac{1}{x} u_\theta + \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_{x0}}{\partial \theta} \quad (2.67)$$

$$k_{xx} = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (2.68)$$

$$k_{\theta\theta} = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{x} \beta_x \quad (2.69)$$

$$k_{\theta\theta} = \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{x} \beta_x \quad (2.70)$$

Tanjant değerleri aşağıdaki gibi olur.

$$\beta_x = - \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (2.71)$$

$$\beta_\theta = \frac{1}{x \tan \alpha} u_\theta - \frac{1}{x \sin \alpha} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \quad (2.72)$$

2.3 Sıg Kabuk (Donnell-Musthtari-Vlasov Denklemleri)

Donnell-Musthtari-Vlasov denklemleri en çok kabuk titreşimi problemlerinde kullanılmıştır. Bu yaklaşıma göre ne bükülme ne de membran etkileri ihmal ediliyordu. Bu denklemler ilk olarak, birbirlerinden bağımsız şekilde Donnell(1933,1938) ve Musthtari(1938) tarafından geliştirildi. Denklemler başta Donnell tarafından dairesel silindirik kabuk için türetildi, daha sonra Vlasov(1951) tarafından herhangi bir geometriye uygulanabilecek şekilde genelleştirildi. Vlasov bu denklemlerin sıg kabuklarda iyi sonuçlar verdiğini ortaya çıkarmıştır. Bu yüzden sıg kabuk denklemleri olarak ta adlandırılır.

Sıg kabuk teorisinde, ince kabuk teorisine ek olarak aşağıdaki kabuller yapılır;

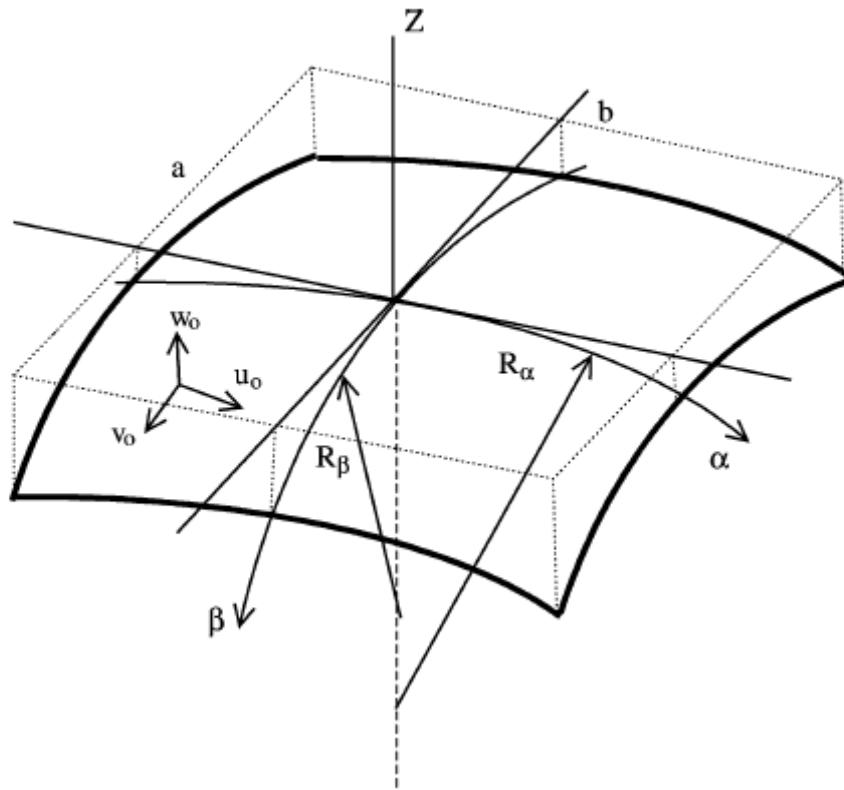
1- Eğrilik yarıçapı, düzlem içi yer değiştirmelere oranla çok büyüktür. Kabuk yüzeyine teğet yer değiştirmelerinden(u,v) kaynaklanan eğrilik değişimi, yüzeye normal yöndeki yer değiştirmeden(w) kaynaklanan eğrilik değişimine oranla çok

küçüktür, ihmal edilebilir(Ambartsumian 1964). Ayrıca enine kesme kuvvetleri,

$R_i (\partial N_i / \partial i)$ ifadesine göre çok küçüktür;

$$\frac{u_i}{R_i} \ll 1 \quad Q_i \ll R_i \frac{\partial N_i}{\partial i}$$

Burada u_i düzlem içi yer değiştirmeleri(u,v), Q_i kesme kuvvetleri Q_α ve Q_β , N_i düzlem kuvvetleri N_α , N_β veya $N_{\alpha\beta}$, R_i eğrilik yarıçapları R_α , R_β veya $R_{\alpha\beta}$ 'yı ifade eder. ∂i terimi α ve β ya göre türevi ifade eder.



Şekil 2.5: Sığ kabuk koordinatları

2- $(1 + z / R_i)$ Terimi 1'e çok yakındır. R_i eğrilik yarıçapları R_α , R_β veya $R_{\alpha\beta}$ yı ifade eder. z ise sığ kabuğun orta yüzey denklemdir;

$$z = -\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{R_a} + 2 \frac{\alpha\beta}{R_{\alpha\beta}} + \frac{\beta^2}{R_\beta} \right) \quad (2.73)$$

Bu kabuller doğrultusunda; eğilme şekil değiştirme ifadelerindeki düzlem içi teğetsel yer değiştirme(u_1, u_2) ifadeleri ihmal edilebilir.

$$k_{11} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \quad (2.74)$$

$$k_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \quad (2.75)$$

$$k_{12} = -\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_2^2} \frac{\partial u_3}{\partial a_2} \right) - \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1^2} \frac{\partial u_3}{\partial a_1} \right) \quad (2.76)$$

Membran şekil değiştirme ifadelerindeki u_1 ve u_2 yer değiştirmeleri de ihmal edilebilir. Diğer bir kabul de, düzlem içi atalet etkileri ihmal ediliyor. Bu teori sadece normal yöndeki yüklerle sınırlıdır. Böylece hareket denklemlerindeki kayma bileşenleri Q_{13} ve Q_{23} ihmal edilir.

$$\frac{\partial (A_2 N_{11})}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 N_{12})}{\partial a_2} + \frac{\partial A_1}{\partial a_2} N_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial a_1} N_{22} = 0 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial (A_2 N_{12})}{\partial a_1} + \frac{\partial (A_1 N_{22})}{\partial a_2} + \frac{\partial A_2}{\partial a_1} N_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial a_2} N_{11} = 0 \quad (2.78)$$

$$D \nabla^4 u_3 + \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} + \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = q_3 \quad (2.79)$$

Bir ϕ fonksiyonu tanımlayalım ve kuvvet denklemlerini aşağıdaki gibi yazalım.

$$N_{11} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) + \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} \quad (2.80)$$

$$N_{22} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \quad (2.81)$$

$$N_{12} = -\frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_1 \partial a_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_2} \frac{\partial \phi}{\partial a_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial a_1} \frac{\partial \phi}{\partial a_2} \right) \quad (2.82)$$

Bu denklemleri yukarıda elde ettiğimiz hareket denklemlerin yerine koyarsak, ilk iki denklem sıfır olur, geriye üçüncü denklem kalır.

$$D \nabla^4 u_3 + \nabla_k^2 \phi + \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = q_3 \quad (2.83)$$

Burada;

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 \quad (2.84)$$

$$\nabla^2(\cdot) = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial}{\partial a_1} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_1} \right] + \frac{\partial}{\partial a_2} \left[\frac{A_1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_2} \right] \right) \quad (2.85)$$

$$\nabla^2_k(\cdot) = \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_1} \left[\frac{1}{R_2} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_1} \right] + \frac{\partial}{\partial a_2} \left[\frac{1}{R_1} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial(\cdot)}{\partial a_2} \right] \right\} \quad (2.86)$$

Bu tip fonksiyonlar(ϕ) ilk kez 1863 yılında Airy tarafından çubuk bükülmesinin iki boyutlu davranışını incelemek için çıkarıldı. Bu fonksiyon *Airy Gerilme fonksiyonu* (Airy's stress function) olarak bilinir. Elimizde hala 2 bilinmeyen vardır; u_3 ve ϕ . Hareket denklemlerinden geriye bir tane kalmıştı, bu yüzden bize ikinci bir denklem lazım. Bunun için membran şekil değiştirme denklemlerini yazarsak.

$$\varepsilon_{11}^0 = \frac{1}{Eh} (N_{11} - \mu N_{22}) \quad (2.87)$$

$$\varepsilon_{22}^0 = \frac{1}{Eh} (N_{22} - \mu N_{11}) \quad (2.88)$$

$$\varepsilon_{12}^0 = \frac{2(1 + \mu)}{Eh} N_{12} \quad (2.89)$$

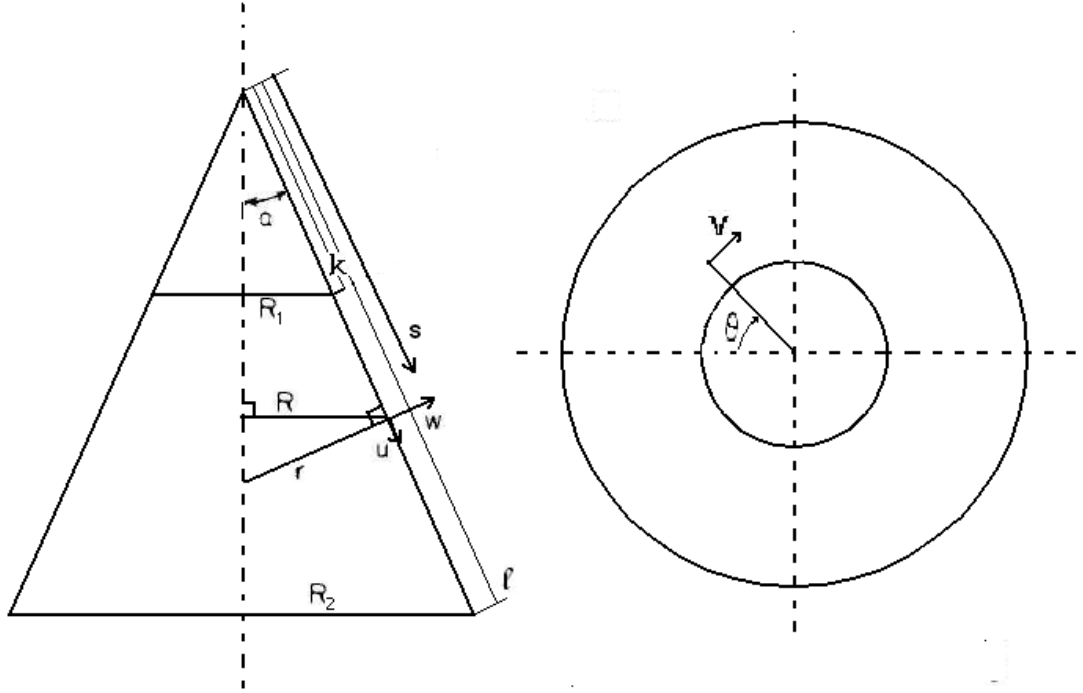
Burada kuvvet denklemlerini airy fonksiyonu ile yazarsak;

$$Eh \nabla_k^2 u_3 - \nabla^4 \phi = 0 \quad (2.90)$$

İkinci hareket denklemini elde ederiz.

3 SAYISAL ÖRNEK

Yapacağımız hesaplamalarda ve analizlerde kullanacağımız dairesel konik kabuk için koordinat bileşenleri ve geometri bileşenleri şekil 3.1’de gösterilmiştir



Şekil 3.1: Dairesel kesik konik kabuk

Şekil 3.1’e göre “k” kesik konik kabuğumuzun dar olan kenarını, “l” geniş olan kenarını belirtmektedir. u, v, w sırasıyla s doğrultusunda, θ doğrultusunda ve kabuk yüzeyine normal doğrultudaki yer değiştirmeleri göstermektedir. Ayrıca kabuk kalınlığı da h ile gösterilmektedir.

Yapacağımız hesaplama ve analizlerde, dairesel kesik konik kabuk için sınır şartları, her iki kenarından da ankastre olarak tutturulmuş gibi kabul edilmiştir. Buna göre sınır şartları;

$$s = k \quad \text{ve} \quad s = l \quad \text{de}; \quad u = v = w = \frac{\partial}{\partial s} w = 0$$

gibidir.

Bu sınır şartlarını sağlayacak şekilde, yer değiştirme vektörleri de aşağıdaki gibi tayin edilmiştir.

$$u(s, \theta, t) = U(t) \cdot (s - k)^2 \cdot (s - l)^2 \cdot \cos(n \cdot \theta) \quad (3.1)$$

$$v(s, \theta, t) = V(t) \cdot (s - k)^2 \cdot (s - l)^2 \cdot \sin(n \cdot \theta) \quad (3.2)$$

$$w(s, \theta, t) = W(t) \cdot (s - k)^2 \cdot (s - l)^2 \cdot \cos(n \cdot \theta) \quad (3.3)$$

3.1 Serbest titreşim çözümlemesi

Her malzeme kendini oluşturan atomik yapısı nedeniyle sürekli bir titreşim içerisindedir. Bu titreşime malzemenin doğal frekansı denir. Doğal frekans yapı tasarımı açısından çok büyük önem taşımaktadır. Eğer bir yapıya doğal frekansı ölçütlerinde bir kuvvet uygulanır ise yapı rezonansa girebilir ve parçalanır.

Bu bölümde konik kabuk yapının doğal frekanslarının analitik olarak elde etmek için Donnell-Musthtari-Vlasov kabulleri ve denklemleri, Rayleigh metodu kullanılmıştır. Elde edilen değerler geçmişte yapılan çalışmalar sonucu elde edilen verilerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca bir paket programda serbest titreşim analizi yapılarak elde edilen verilerle karşılaştırılmış, geometrideki değişmelerin doğal frekans üzerindeki etkileri gözlemlenmiştir.

Yapılan hesaplama ve çözümlemeler sonucunda çıkan frekans değerleri, malzeme özelliklerinden bağımsızlaştırılarak birbirleri ile karşılaştırılması kolaylaştırılmıştır. Bunun için aşağıdaki frekans parametresi kullanılmıştır.

$$f_{mn} = \sqrt{\omega_{mn}^2 R_2^2 \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad (3.4)$$

Bu çalışmada $m = 1$ olacaktır.

$$f_n = \sqrt{\omega_n^2 R_2^2 \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}} \quad (3.5)$$

3.1.1 Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk denklemleri

Donnell-Musthtari-vlasov denklemlerini kullanarak doğal frekansları elde etmek için bazı sadeleştirmeler yapabiliriz. Sığ kabuk hareket denklemlerimiz;

$$D \nabla^4 u_3 + \nabla_k^2 \phi + \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = q_3 \quad (3.6)$$

$$E h \nabla_k^2 u_3 - \nabla^4 \phi = 0 \quad (3.7)$$

Serbest titreşim analizi için;

$$q_3 = 0 \quad (3.8)$$

$$u_3(a_1, a_2, t) = U_3(a_1, a_2) e^{j\omega t} \quad (3.9)$$

$$\phi(a_1, a_2, t) = \phi(a_1, a_2) e^{j\omega t} \quad (3.10)$$

Alırsak, hareket denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$D \nabla^4 U_3 + \nabla_k^2 \phi + \rho h \omega^2 U_3 = 0 \quad (3.11)$$

$$E h \nabla_k^2 U_3 - \nabla^4 \phi = 0 \quad (3.12)$$

Burada 3.11 denklemini ∇_k^2 ile çözümlersek;

$$E h \nabla_k^2 U_3 = \nabla_k^2 \nabla^4 \phi \quad (3.13)$$

Elde ederiz. 3.11 denklemini ∇^4 ile çözümleyip yukarıda elde ettiğimiz sonuca göre derlersek serbest titreşim analizi için kullanabileceğimiz ve sadece zamandan bağımsız kabuğa normal yöndeki yer değiştirme bileşenine bağlı hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D \nabla^8 U_3 + E h \nabla_k^4 U_3 + \rho h \omega^2 \nabla^4 U_3 = 0 \quad (3.14)$$

Dairesel konik kabuk koordinat bileşenlerine göre;

$$u_3 = w, \quad a_1 = s, \quad a_2 = \theta \quad \text{ve} \quad U_3 = W(s, \theta)$$

Buradan hareket denklemini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$D \nabla^8 W(s, \theta) + E h \nabla_k^4 W(s, \theta) + \rho h \omega^2 \nabla^4 W(s, \theta) = 0 \quad (3.15)$$

Sınır şartlarımızı sağlayan kabuk yüzeyine normal yöndeki yer değiştirme ifadesi aşağıdaki gibiydi;

$$w(s, \theta, t) = (s - k)^2 (s - l)^2 \cos(n \theta) e^{\omega t} \quad (3.16)$$

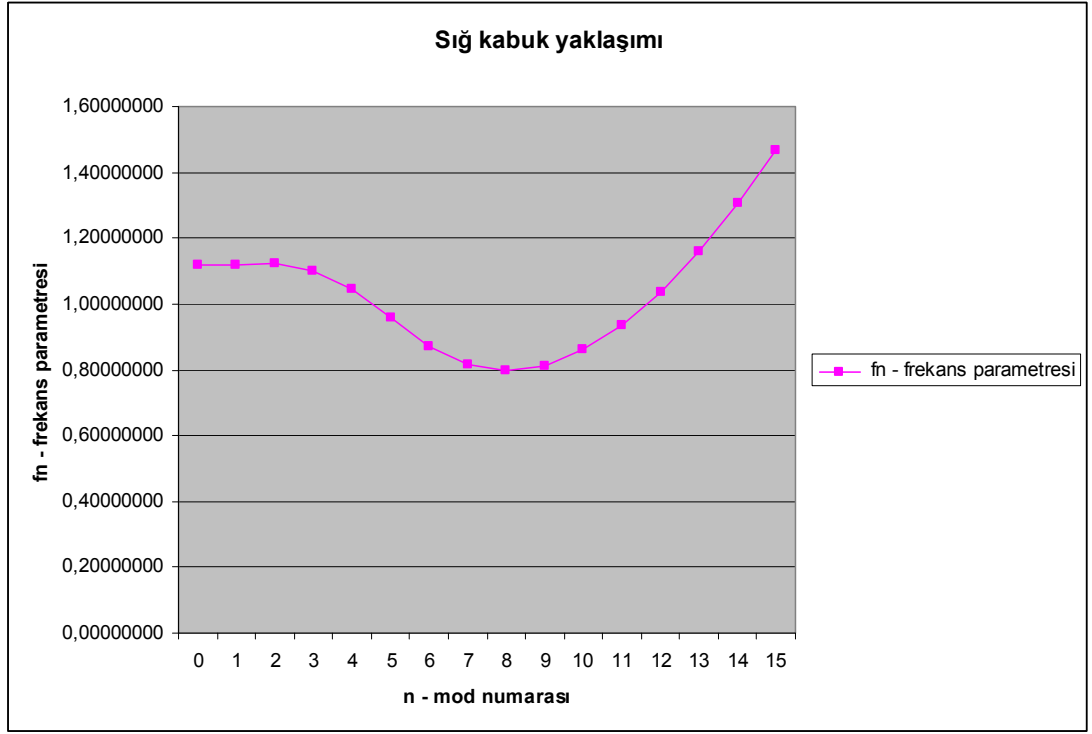
Buna göre zamandan bağımsız yer değiştirme ifadesi;

$$W(s, \theta) = (s - k)^2 (s - l)^2 \cos(n \theta) \quad (3.17)$$

gibi olur. 3.17 ifadesini yukarıdaki 3.15 denkleminde yerine koyup, 3.15 denklemini dairesel kesik konik kabuğun sınırları boyunca s'ye ve θ 'ya göre integre ederek, açısal frekans ifadesi ω ya ulaştık.

Bu ulaştığımız açısal frekans değerini normal frekans değerine çevirirsek dairesel kesik konik kabuk için o mod şeklinde doğal frekansı devir/sn(Hz) cinsinden elde etmiş oluruz. Biz elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmak için frekans parametresi ifadesine çevirdik.

$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için sığ kabuk yaklaşımı ile elde edilen frekans parametreleri şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2: Sığ Kabuk yaklaşımı frekans parametreleri($\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$)

3.1.2 Rayleigh yöntemi

Rayleigh'e göre doğal frekansında titreşen, sönümsüz lineer bir yapının titreşim enerjisi, en yüksek genliğe sahip saf potansiyel enerjiden, en düşük genliğe sahip saf kinetik enerjiye karşılıklı geçiş içindedir. Yani kısaca doğal frekansında titreyen sönümsüz lineer bir yapının en yüksek potansiyel enerjisi, en yüksek kinetik enerjisine eşittir.

$$u_i = U_i e^{j\omega t} \quad (3.18)$$

Buna göre en yüksek potansiyel enerji;

$$U_{maks} = \int_{a_1} \int_{a_2} \int_{a_3} \left(\left(\frac{E}{2(1-\nu^2)} \cdot (\varepsilon_{11}^{*2} + \varepsilon_{22}^{*2} + 2\nu \varepsilon_{11}^{*2} \varepsilon_{22}^{*2}) + G \cdot \varepsilon_{12}^{*2} \right) \cdot A1 \cdot A2 \right) da_1 da_2 da_3 \quad (3.19)$$

Burada şekil değıştirme ifadeleri;

$$\varepsilon^*_{11} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} (U_1 + a_3 \beta^*_{1}) + \left(\frac{(U_2 + a_3 \beta^*_{2})}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} A_1 \right) + \frac{U_3}{R_1} \quad (3.20)$$

$$\varepsilon^*_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} (U_2 + a_3 \beta^*_{2}) + \left(\frac{(U_1 + a_3 \beta^*_{1})}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} A_2 \right) + \frac{U_3}{R_2} \quad (3.21)$$

$$\varepsilon^*_{22} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{U_2 + a_3 \beta^*_{2}}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{U_1 + a_2 \beta^*_{1}}{A_1} \right) \quad (3.22)$$

Açı ifadeleri;

$$\beta^*_{1} = \frac{U_1}{R_1} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial a_1} U_3 \quad (3.23)$$

$$\beta^*_{2} = \frac{U_2}{R_2} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial a_2} U_3 \quad (3.24)$$

gibidir. En yüksek kinetik enerji formülü de aşağıdaki gibidir.

$$K_{maks} = \frac{\omega^2 \rho}{2} h \int_{a_1} \int_{a_2} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) A_1 A_2 da_1 da_2 \quad (3.25)$$

3.19 denklemini 3.25 denklemine eşitlersek açısal frekansın karesine ulaşılır.

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho \int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) A_1 A_2 da_1 da_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \left(\left(\frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\varepsilon_{11}^{*2} + \varepsilon_{22}^{*2} + 2\nu \varepsilon_{11}^{*2} \varepsilon_{22}^{*2}) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 2G \cdot \varepsilon_{12}^{*2} \right) \cdot A_1 \cdot A_2 \right) da_1 da_2 da_3 \right) \quad (3.26)$$

Eğer doğru mod şekli yerine koyulduysa bu formül kesin sonucu verir. Rayleigh'e göre kesin doğru mod şekli bilinmiyorsa, bilinmeyen bir mod şekli kullanmak yerine doğru mod şekline yakın, bir C katsayısına sahip bir mod şekli kullanılabilir. Bu yaklaşımda en yüksek potansiyel enerji ile en yüksek kinetik enerji arasındaki enerji farkının en düşük değerine yaklaştırılır. Buna göre;

$$\frac{d}{dC} (U_{maks} - K_{maks}) = 0 \quad (3.27)$$

Bu denklem Rayleigh oranı diye de adlandırılır.

Dairesel kesik konik kabuk için sınır şartlarını sağlayan yer değiştirme ifadelerini, sığ kabuk yaklaşımıyla karşılaştırabilmek için sığ kabuk yaklaşımdaki gibi kabuk yüzeyi doğrultusundaki yer değiştirme ifadelerini 0 kabul edip, Rayleigh denkleminde yerine koyarsak;

$$U = 0 \quad (3.28)$$

$$V = 0 \quad (3.29)$$

$$W = C (s-k)^2 (s-l)^2 \cos(n\theta) \quad (3.30)$$

Eğrilik yarıçapları;

$$R1 = \infty \quad (3.31)$$

$$R_2 = s \tan(a) \quad (3.32)$$

Lame katsayıları;

$$A_1 = 1 \quad (3.33)$$

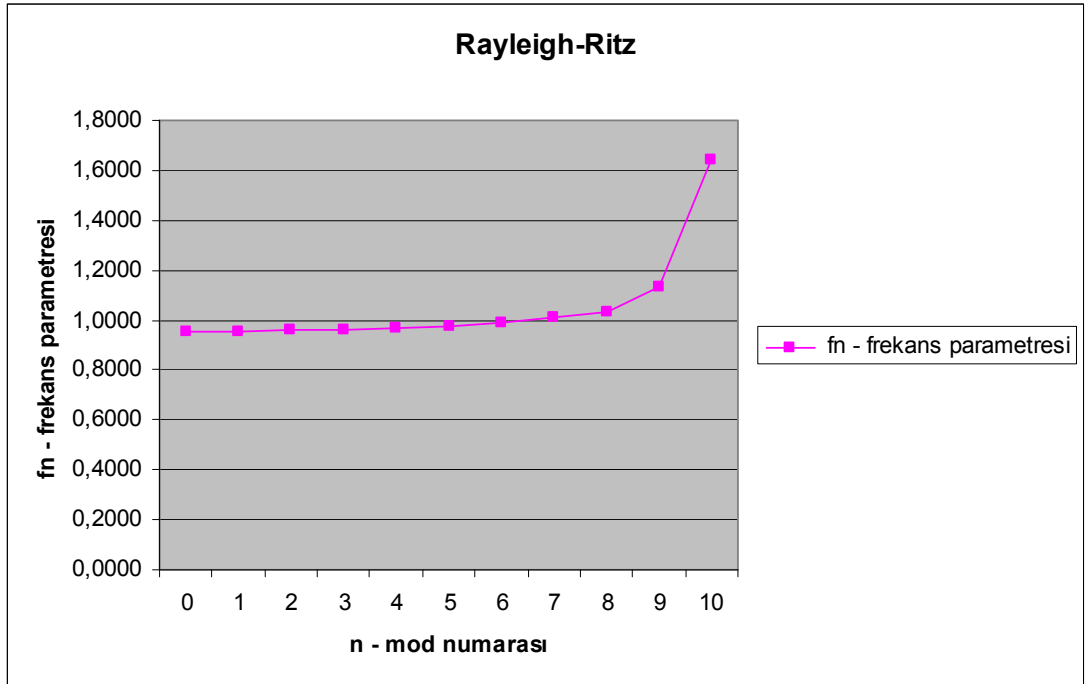
$$A_2 = s \sin(a) \quad (3.34)$$

Koordinatlar;

$$a_1 = s \quad a_2 = \theta \quad a_3 = z$$

z burada kabuk kalınlığı boyuncadır, yani $-h/2$ den $+h/2$ ye kadardır.

$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için Rayleigh yöntemi ile elde edilen frekans parametreleri şekil 3.3'te gösterilmiştir.



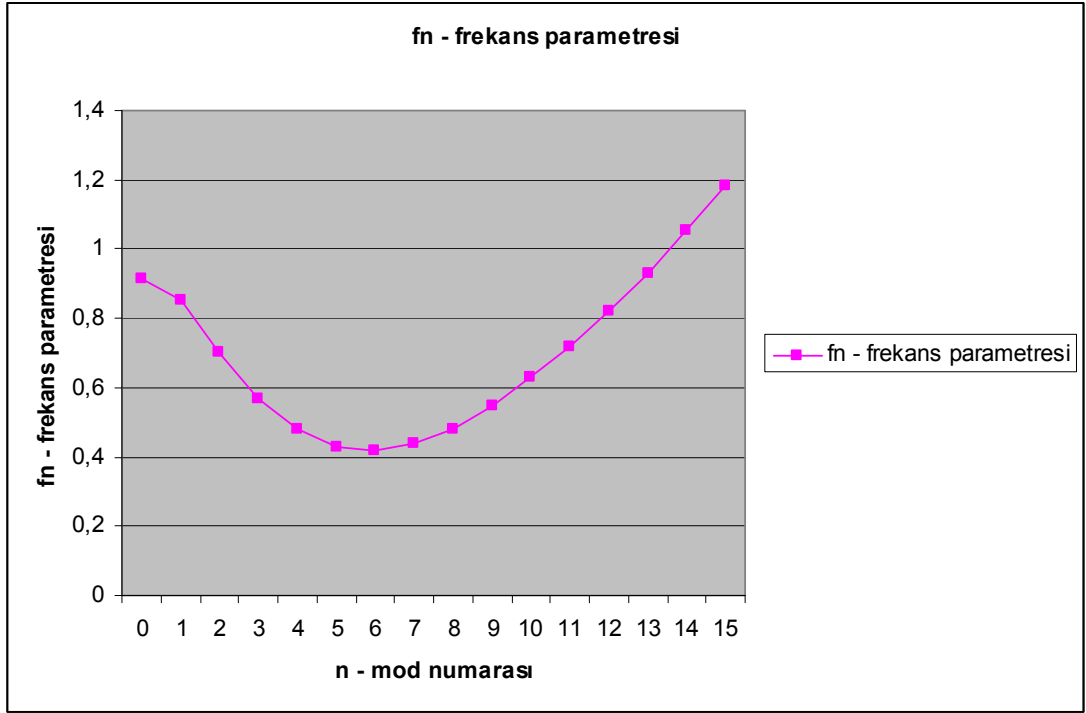
Şekil 3.3: Rayleigh yöntemi frekans parametreleri($\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$)

3.1.3 Paket program

Yaptığımız çalışmaları karşılaştırmak için aynı çözümlemeler bir de paket program kullanarak yapıldı. Paket program olarak Abaqus programı kullanılmıştır. Bu paket programda çözümleme yapabilmek için malzeme özellikleri de çözümleme

öncesinde programda tanımlanmalıdır. Bu yüzden paket program sonucunda elde edilen frekans değerleri, yaptığımız diğer çözümlerden elde edilen frekans parametreleri ile karşılaştırılabilmesi için frekans parametresine dönüştürülmüş malzeme özelliklerinden bağımsız hale getirilmiştir.

$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için paket program kullanılarak elde edilen frekans parametreleri şekil 3.4'te gösterilmiştir.

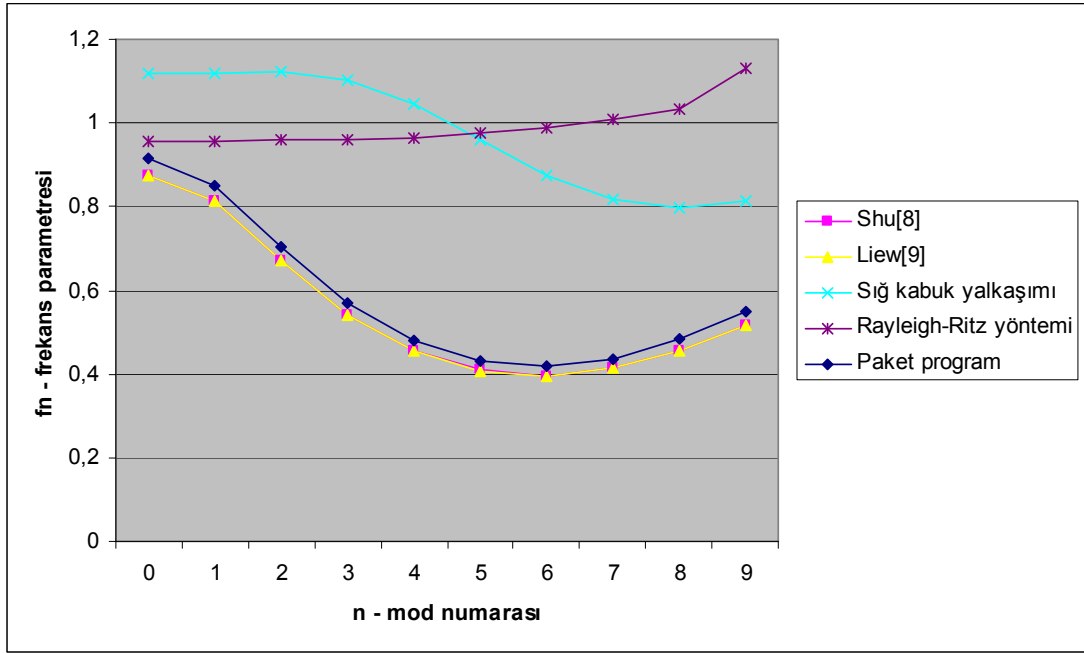


Şekil 3.4: Paket program frekans parametreleri($\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$)

3.1.4 Karşılaştırmalar ve yorumlar

Bu bölümde Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk kabulleri ve denklemleri ile elde edilen frekans parametresi değerleri, Rayleigh yöntemini kullanarak elde edilen frekans parametresi değerleri ve paket program kullanarak elde edilen frekans parametresi değerleri, geçmişte Shu[8] ve Liew[9] tarafından yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen frekans parametreleri ile karşılaştırılmıştır.

$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için farklı yöntemlerle elde edilen frekans parametreleri, şekil 3.5'te gösterilmiştir.



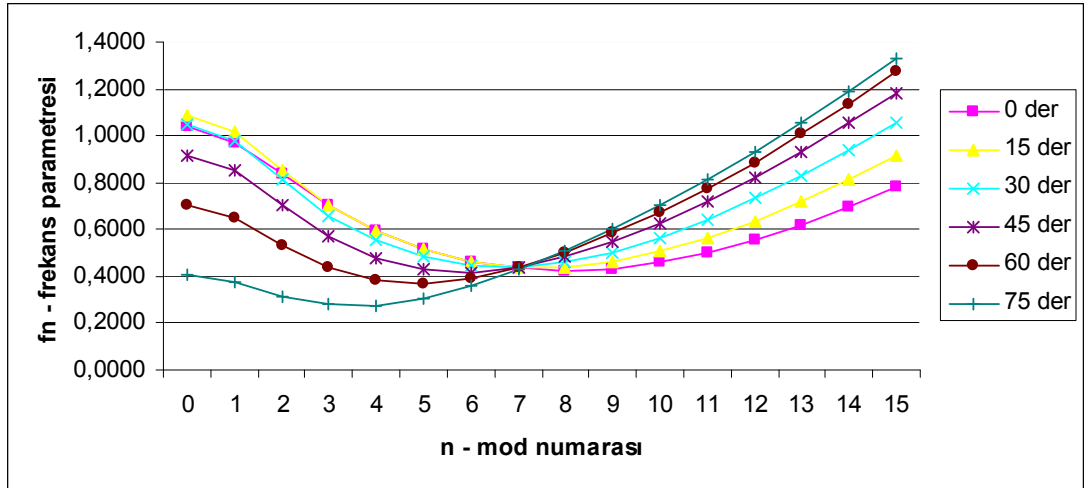
Şekil 3.5: Frekans parametreleri karşılaştırması ($\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L \sin \alpha / R_2 = 0.5$)

Şekil 3.5 incelenirse paket program kullanılarak elde edilen değerler Shu[8] ve Liew[9] 'in çalışmaları sonucunda elde ettikleri değerlere çok yakındır. Her bir modda aralarındaki ufak fark korunmuştur. Shu[8] ve Liew[9] in sonuçları ile paket program arasında ortalama %5 civarında bir fark vardır. Birbirine bu kadar yakın sonuçlar elde edildiği için paket program sonuçları kesin sonuca çok yakındır diyebilir ve bu çalışmadaki karşılaştırmalarda doğru kabul edilebilir.

Rayleigh yöntemi ile çözümlenip elde edilen değerlere bakarsak mod 0'da Shu[8]'nun, Liew[9]'in ve paket programın sonuçlarına yakın iken diğer modlarda aradaki fark iyice açılmıştır. Şekil 3.5'e göre en düşük hata oranı mod 0'da yaklaşık %10 iken 6. modda bu oran yaklaşık %60'a kadar çıkmaktadır. Dairesel kesik konik kabuk için yüzey doğrultusunda yer değiştirmelerin olmadığı kabulü yapılarak, Rayleigh yöntemi ile yapılan çözümlemeler iyi sonuçlar vermemiştir ve hata oranı yüksektir. Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk kabulleri ve denklemleri kullanılarak elde edilen değerler Rayleigh yöntemi ile elde edilen değerlere nazaran 0-5 modları arasında Shu[8]'nun, Liew[9]'in ve paket programın sonuçlarına daha uzak iken 5. moddan sonra daha yakın sonuçlar elde edilmiştir. En düşük hata oranı 0. modda yaklaşık %20 iken en yüksek hata oranı 5. modda yaklaşık %58'dir.

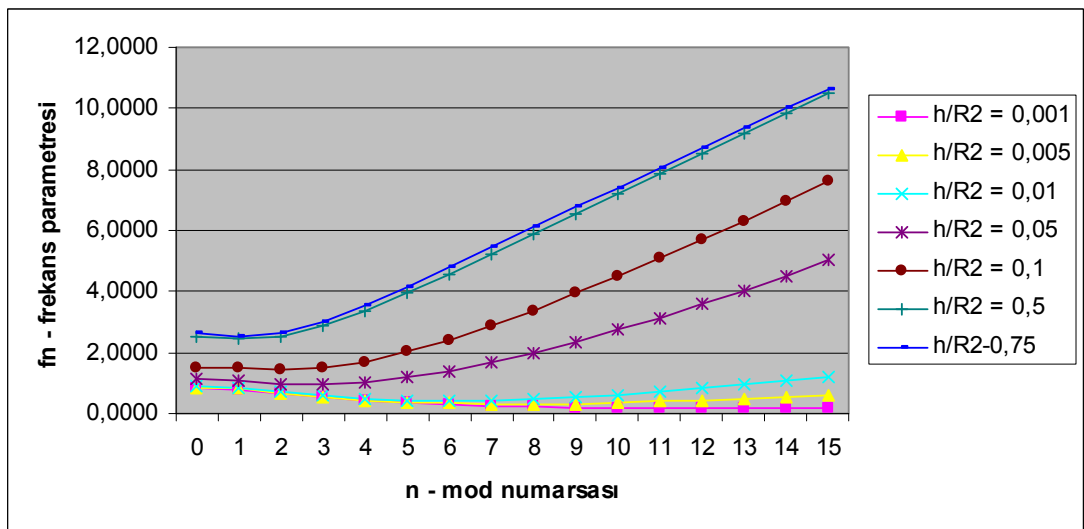
Bu sonuçlar doğrultusunda paket program kullanılarak elde edilen sonuçlar doğru denilebilir. Bu yüzden dairesel kesik koniğin doğal frekanslarının geometriye göre değişimlerini görebilmek için aşağıdaki grafikler hazırlanmıştır.

$\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için paket program kullanılarak, değişik α değerleri için elde edilen frekans parametreleri şekil 3.6'da gösterilmiştir.



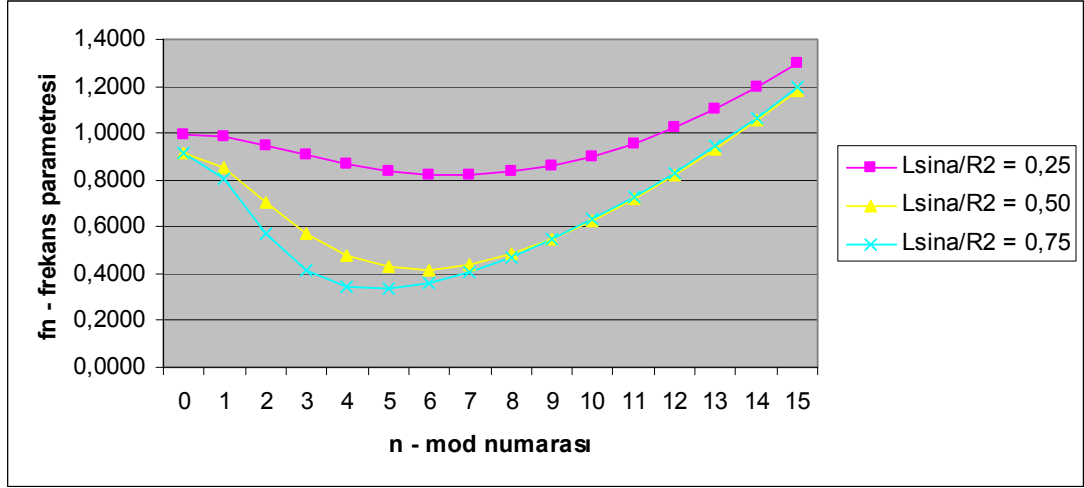
Şekil 3.6: Değişik α açıları için paket program frekans parametreleri ($\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$)

$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için paket program kullanılarak, değişik h/R_2 oranları için elde edilen frekans parametreleri şekil 3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7: Değişik h/R_2 oranları için paket program frekans parametreleri ($\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$)

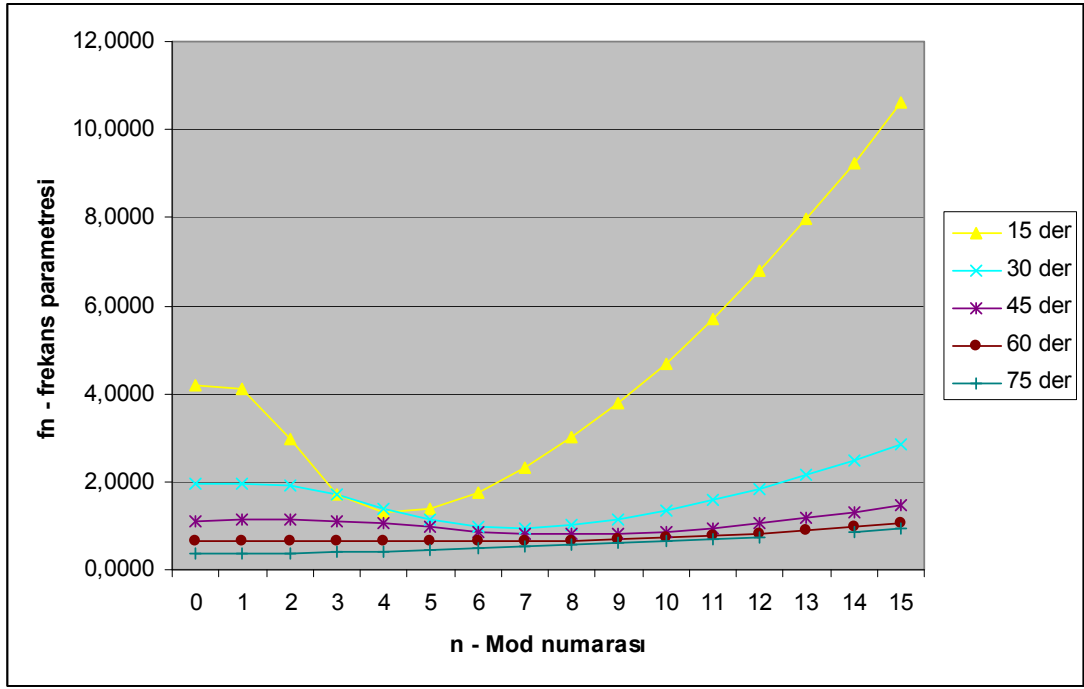
$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$ ve $h/R_2 = 0.01$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için paket program kullanılarak, değişik $L\sin\alpha/R_2$ oranları için elde edilen frekans parametreleri şekil 3.8’de gösterilmiştir.



Şekil 3.8: Değişik $L\sin\alpha/R_2$ oranları için paket program frekans parametreleri($\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$)

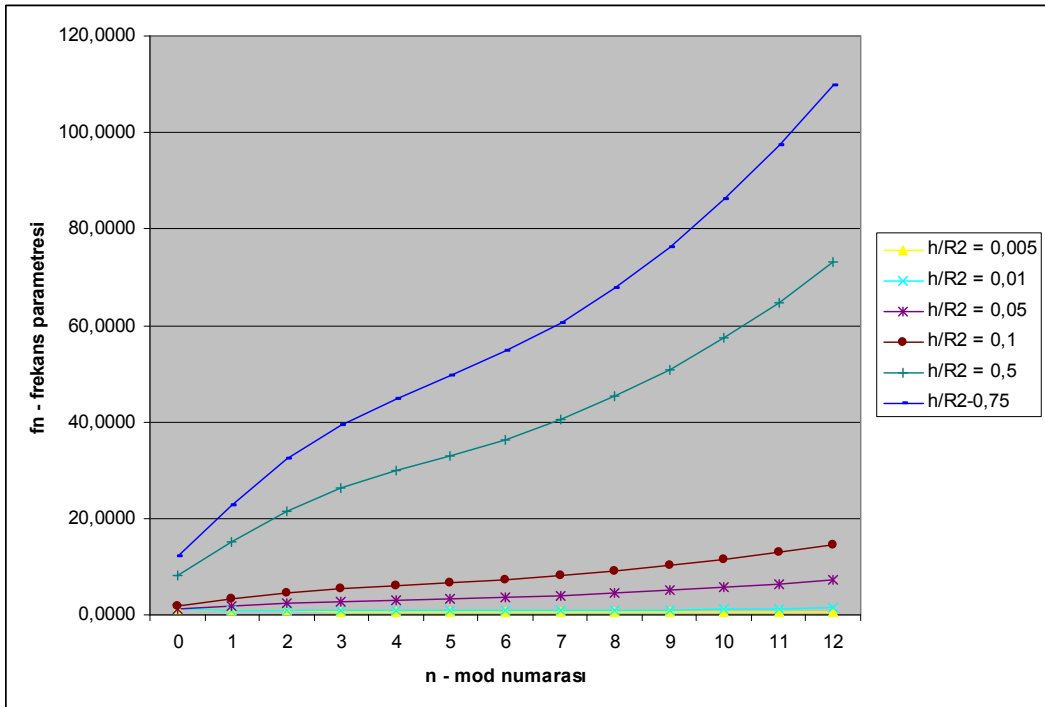
Paket program kullanarak elde ettiğimiz bu grafiklerin benzerlerini aşağıda sığ kabuk yaklaşımı ile elde ettiğimiz değerlerle hazırladık.

$\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için Donnel-Musthtari-Vlasov kabulleri-denklemleri kullanılarak, değişik α değerleri için elde edilen frekans parametreleri şekil 3.9’da gösterilmiştir.



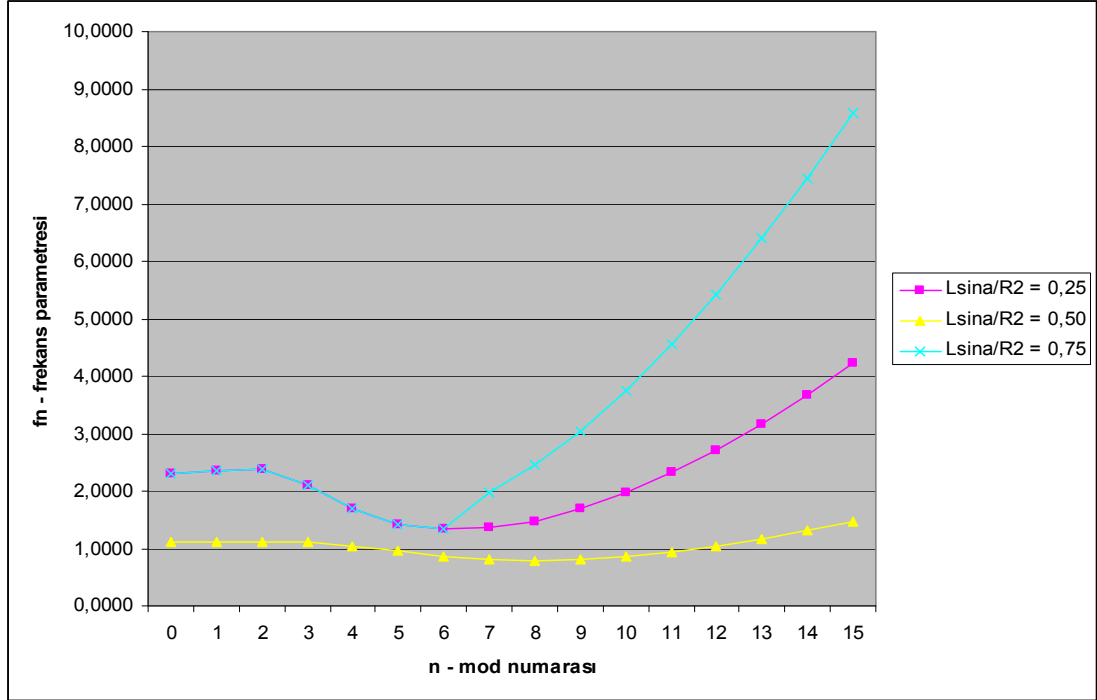
Şekil 3.9: Değişik α açıları için sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$)

$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için Donnel-Musthtari-Vlasov kabulleri-denklemleri kullanılarak, değişik h/R_2 oranları için elde edilen frekans parametreleri şekil 3.10'da gösterilmiştir.



Şekil 3.10: Değişik h/R_2 oranları için sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\nu=0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/R_2 = 0.5$)

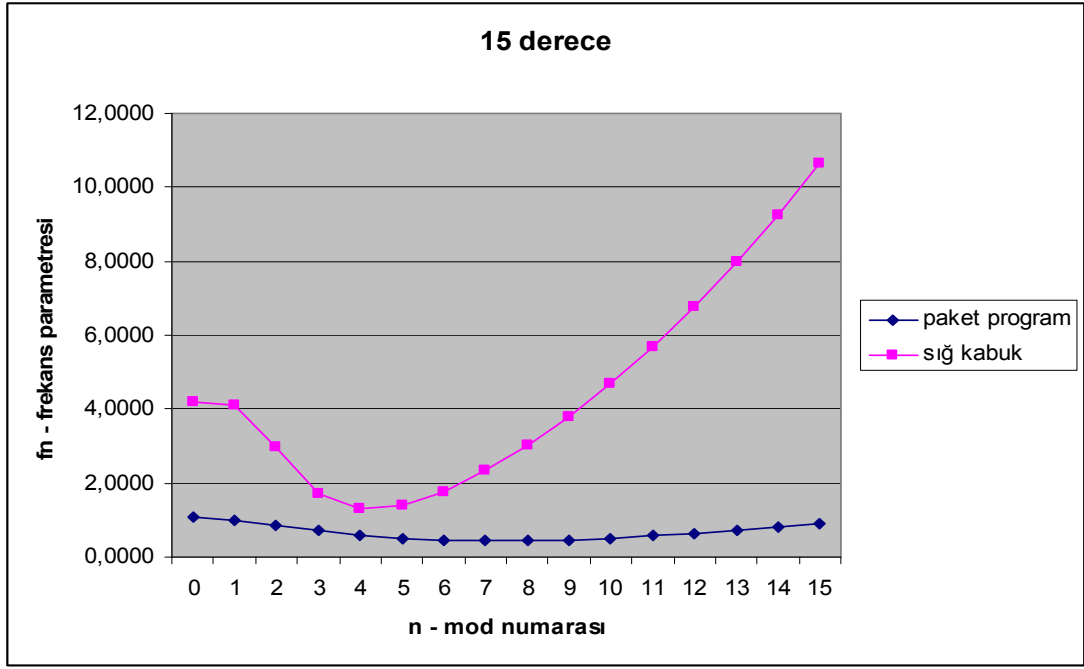
$\alpha = 45^\circ$, $\nu = 0.3$ ve $h/R_2 = 0.01$ koşullarını sağlayan dairesel kesik konik kabuk için Donnel-Musthtari-Vlasov kabulleri-denklemleri kullanılarak, değişik $L\sin\alpha/R_2$ oranları için elde edilen frekans parametreleri şekil 3.11’de gösterilmiştir.



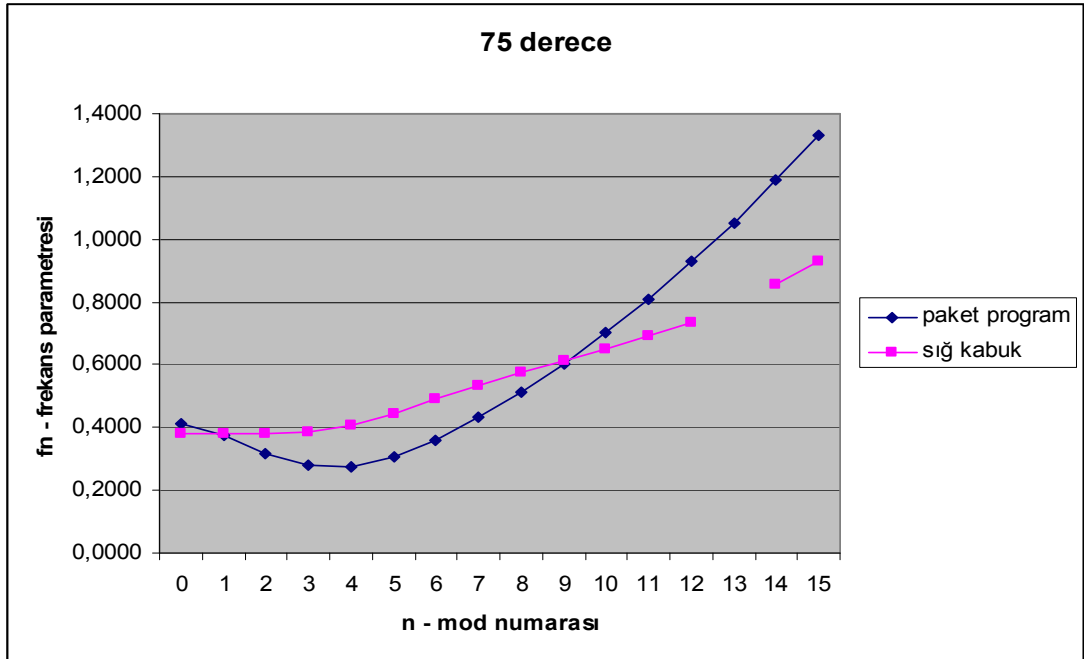
Şekil 3.11: Değişik $L\sin\alpha/R_2$ oranları için sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri ($\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)

Paket program ve Donnel-Musthtari-Vlasov kabulleri-denklemleri kullanılarak elde edilen yukarıdaki grafikler incelenirse, görülür ki sığ kabuk yaklaşımı ile elde edilen frekans parametreleri bazı koşullar altında gerçek sonuçlara yakın kabul ettiğimiz paket program kullanılarak elde edilen frekans parametrelerine çok yakındır.

Paket program ve sığ kabuk yaklaşımı ile değişik α açılara göre hazırlanan grafikler incelenirse görülür ki küçük α açılarında değerler arasındaki fark çok fazla iken yüksek α açılarında sığ kabuk yaklaşımı ile elde edilen değerler, paket program ile elde edilen değerlere daha yakındır. Şekil 3.12 ‘de 15° ve 3.13’te 75° için elde edilen sonuçlar görülebilir.



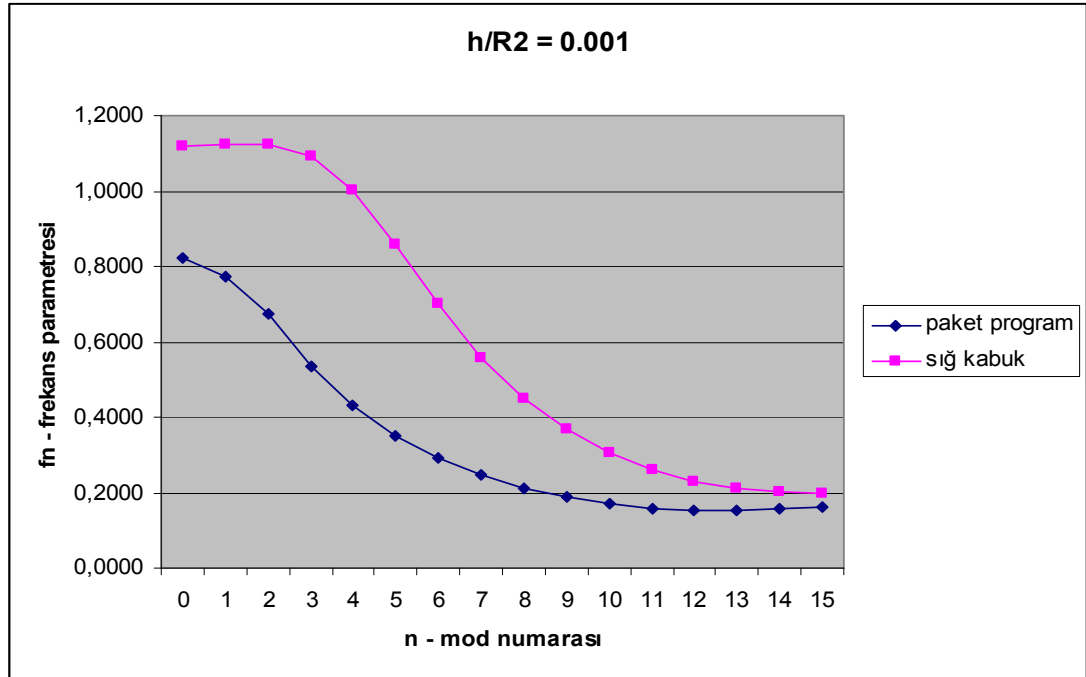
Şekil 3.12: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri($\alpha=15$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)



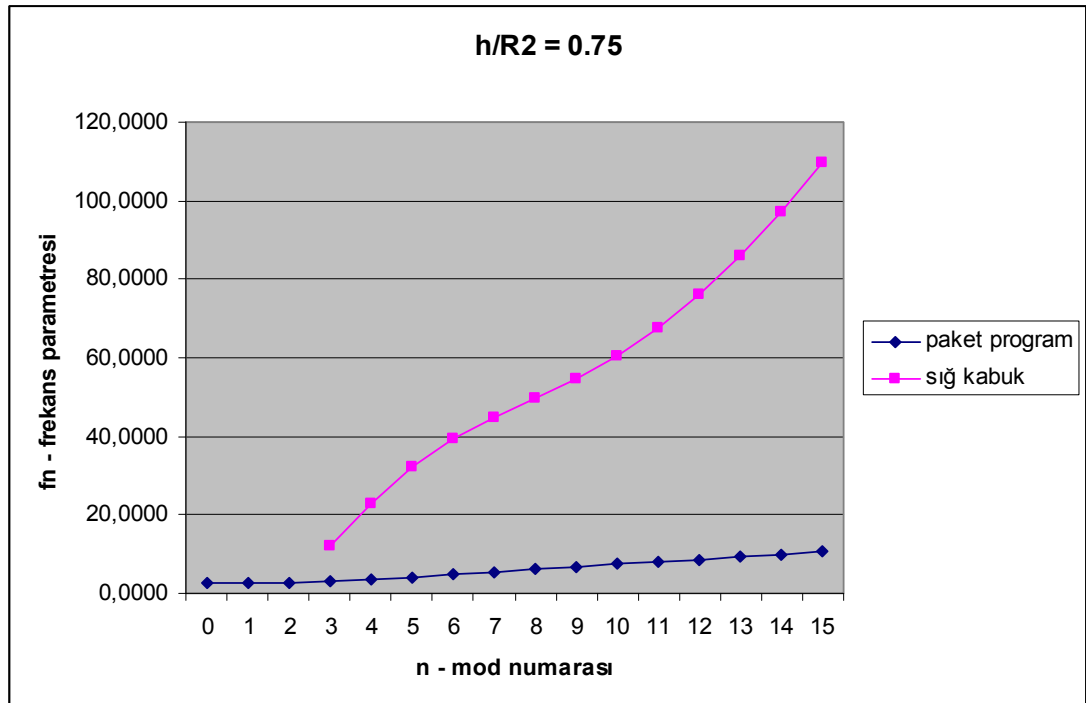
Şekil 3.13: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri($\alpha=75$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.01$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)

Yine her iki çözümleme yöntemi için değişik kalınlık(h/R_2) oranları için hazırlanan grafikler incelendiğinde görülür ki; h/R_2 oranı küçüldükçe sığ kabuk yaklaşımı ile elde edilen frekans parametreleri paket program kullanılarak elde edilen frekans

parametrelerine yaklaşılmaktadır, hata oranı küçülmektedir. Şekil 3.14'te $h/R_2=0.001$ için ve 3.15'te $h/R_2=0.75$ için elde edilen sonuçlar görülebilir.



Şekil 3.14: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri($\alpha=45$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.001$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)

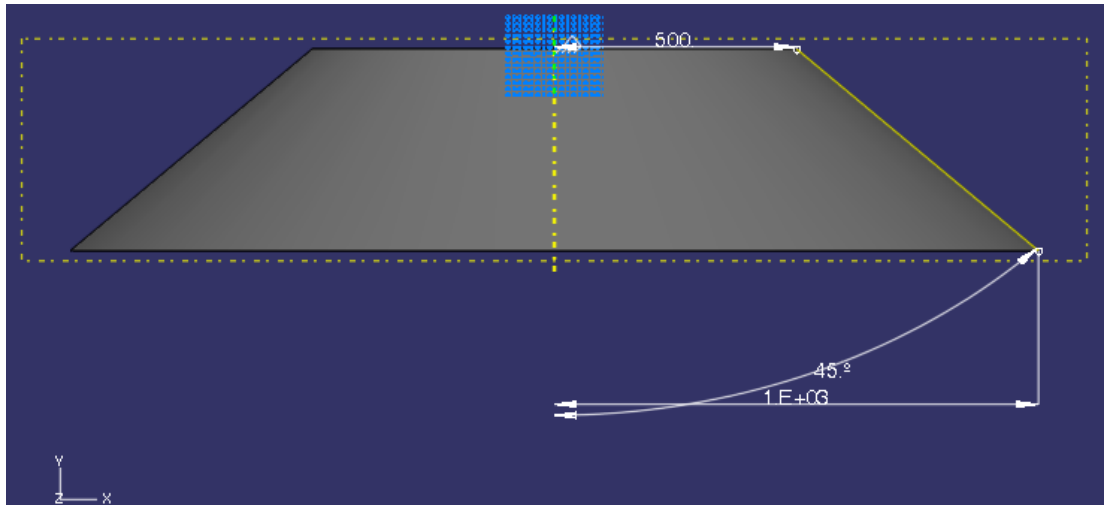


Şekil 3.15: Paket program-sığ kabuk yaklaşımı frekans parametreleri($\alpha=45$, $\nu = 0.3$, $h/R_2 = 0.75$ ve $L\sin\alpha/ R_2 = 0.5$)

Sonuç olarak sığ kabuk yaklaşımları ve denklemleri plak teorilerinden üretilmiş oldukları için plağa yakın koşullara sahip kabuklarda daha iyi sonuçlar vermektedir.

3.2 Dinamik titreşim çözümlemesi

Değişen bir kuvvet veya hareket bir mekanik sisteme veya bir yapıya uygulandığında oluşan titreşim türüne zorlamalı titreşim denir. Zorlamalı titreşimde titreşimin frekansı uygulanan zorlamanın veya hareketin frekansına bağlıdır. Bu bölümde aşağıdaki ölçülere sahip dairesel konik kabuk modeline paket program kullanılarak dinamik titreşim çözümlemesi yapılmıştır.



Şekil 3.16: Paket program çözümlemesi geometrisi

Yukarıdaki ölçüler mm cinsindendir. Kabuk kalınlığı 10 mm'dir. Malzeme olarak çelik atanmıştır ve malzeme özellikleri aşağıdaki gibi alınmıştır.

Elastisite modülü, $E= 210 \times 10^9$ Pa

Yoğunluk, $\rho= 7.85 \times 10^{-3}$ kg/m³

Poisson oranı, $\mu= 0.3$

Sınır koşulu olarak konik kabuk alt ve üst kenarlarından ankastre olarak tutturulmuş gibi tanımlanmıştır.

Yük olarak iki ayrı tip yük durumu için çözümleme yapılmıştır; sinüzoidal periyodik yükleme ve ani basınç yüklemesi(patlama). Her iki çözümlemede de sönümleme yoktur.

3.2.1 Sinüzoidal periyodik yükleme - sönümsüz

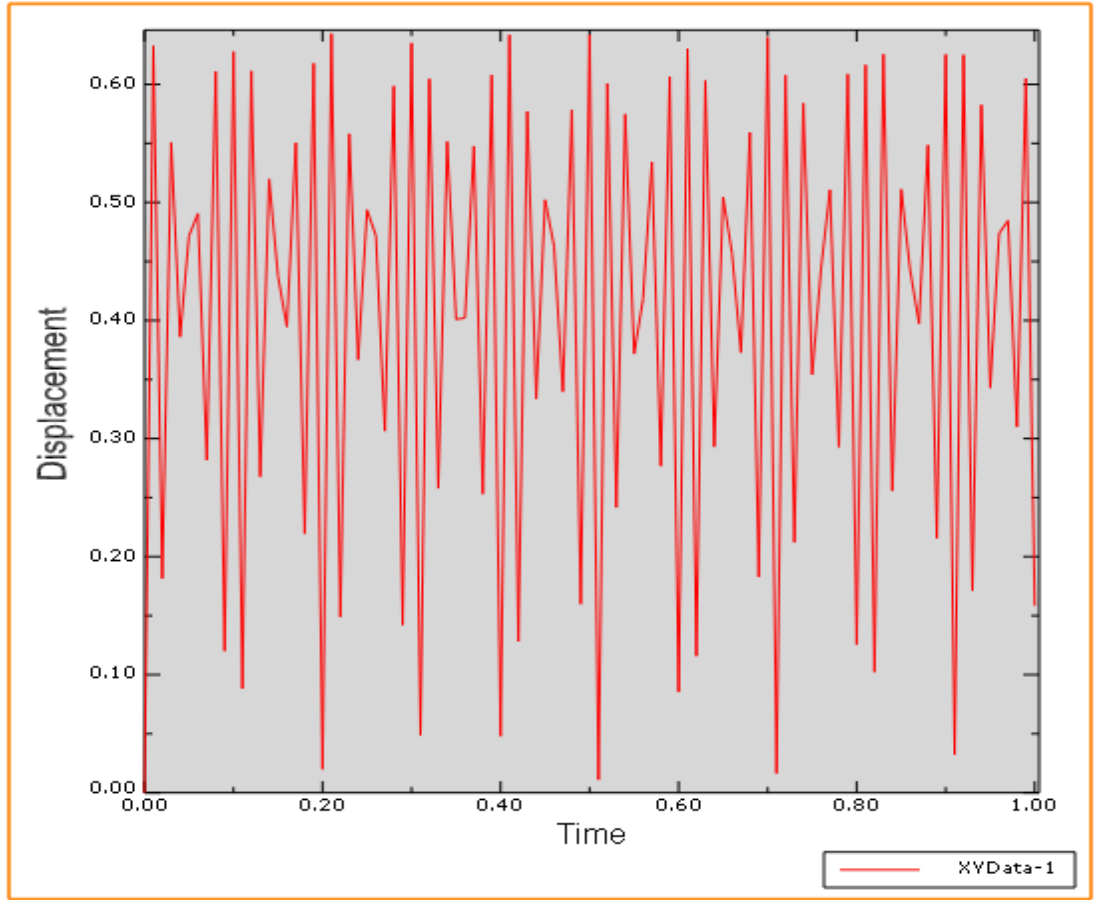
Bu bölümde yukarıdaki geometri, malzeme ve sınır koşulu özelliklerine sahip konik kabuğa kabuk yüzeyine normal doğrultuda, zamana sinüzoidal olarak bağlı homojen yayılı basınç yükü uygulanmıştır.

Konik kabuğa yük olarak 1N/mm^2 basınç homojen olarak kabuk yüzeyine normal yönde dıştan içe doğru, 3000 rad/sn frekansı ile uygulanmıştır.

$$P = 1 \sin(3000 t) \quad [\text{Mpa}] \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.36)$$

Sonuç: Zaman olarak başlangıç zamanı 0 alınmış ve bitiş zamanı 1 olarak alınmıştır, zaman adımı olarak 0.01 alınmıştır. Buna göre 100 adımlık, 100 ayrı zaman da sonuç elde edilmiştir.

Bu çözümleme sonucunda konik kabuk yüzeyinde s doğrultusunda L/2 istasyonunda bir noktanın yer değiştirme grafiği şekil 3.17'deki gibidir.



Şekil 3.17: Sinüzoidal yükleme altında L/2 istasyonundaki bir noktanın yer değiştirme grafiği

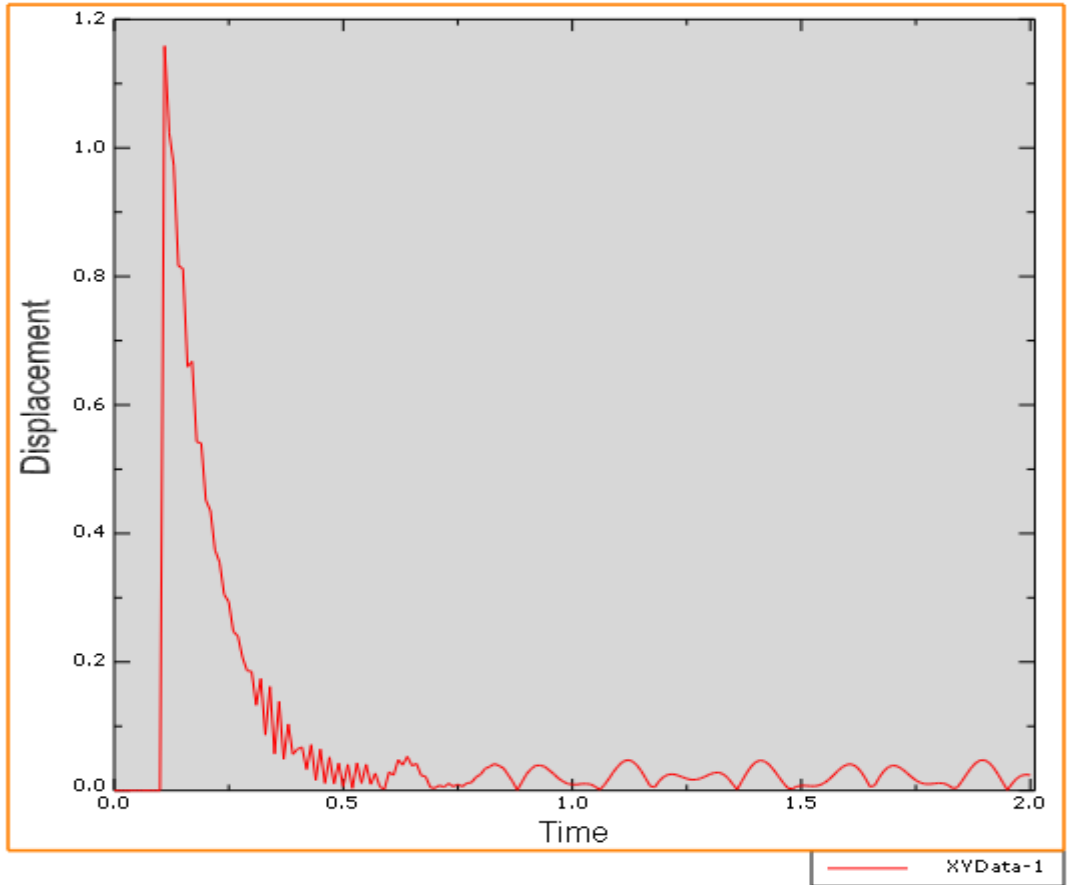
3.2.2 Ani yükleme(patlama) - sönümsüz

Bu bölümde yukarıdaki geometri, malzeme ve sınır koşulu özelliklerine sahip konik kabuğa kabuk yüzeyine normal doğrultuda, zamana aşağıdaki ifade ile bağlı homojen yayılı ani basınç yükü uygulanmıştır.

$$P = 2 e^{-\frac{(t-0.1)}{0.1}} \quad [Mpa] \quad t \geq 0.1 \quad (3.37)$$

$$P = 0 \quad t < 0.1 \quad (3.38)$$

Zaman olarak başlangıç zamanı 0 alınmış ve bitiş zamanı 2 olarak alınmıştır, zaman adımı olarak 0.01 alınmıştır. Buna göre 200 adımlık, 200 ayrı zaman da sonuç elde edilmiştir.



Şekil 3.18: Ani yükleme(patlama) basıncı altında L/2 istasyonundaki bir noktanın yer değiştirme grafiği

4 SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Serbest titreşim çözümlemesinde; dairesel kesik konik kabuk için yüzey doğrultusunda yer değiştirmelerin olmadığı kabulü yapılarak, Rayleigh yöntemi ile yapılan çözümlemelerde hata oranı, Donnell-Musthtari-Vlasov denklemleri ile yapılan çözümlemelerdeki hata oranına nazaran daha büyük olduğu görülmüştür.

Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk kabulleri ve denklemleri kullanılarak elde edilen değerler genelde yüksek hata oranına sahip olmasına karşın, yaklaşım yöntemi ve yapılan kabuller paralelinde bazı geometri koşullarında daha iyi sonuçlar vermiştir. Hata oranının geometriye göre değişimini incelediğimizde elde ettiğimiz sonuçlar;

- 1- Kabuk kalınlığının konik kabuk taban yarıçapına oranı küçüldükçe, elde edilen sonuçların hata oranı da küçülmektedir. Bu sonucu iki şekilde yorumlayabiliriz. Birincisi kabuk kalınlığı inceldikçe elde edilen sonuçlar da iyileşmektedir, bu sonuç Love'nin 1 numaralı ince kabuk kabulünü ile örtüşmektedir, ikincisi kabuk eğriliği azaldıkça daha iyi sonuçlar edilmektedir, bu sonuç ta Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk yaklaşımlarından 2 numaralı yaklaşımla örtüşmektedir.
- 2- Dairesel kesik konik kabuğun sivrilme açısı büyüdükçe yapılan çözümlemeler sonucunda elde edilen değerlerin hata oranı azalmaktadır, bu da Donnell-Musthtari-Vlasov sığ kabuk yaklaşımlarından 2 numaralı yaklaşımla örtüşmektedir.

Sonuç olarak, Donnell-Musthtari-Vlasov denklemlerini kullanarak yapacağımız çözümlemelerde konik kabuğun geometrik özelliklerini yaptığımız kabuller doğrultusunda belirlersek daha iyi sonuçlar elde ederiz.

KAYNAKLAR

- [1] **Arthur W. Leissa**, 1973. *Vibration of shells*, NASA SP-288.
- [2] **Werner Soedel**, 1992. *Vibrations of shells and plates Aircraft*, 3rd Edition, Newtork:Marcel Dekker, c2004.
- [3] **Ercüment Köksal ve Mustafa K. Köksal**, 2003. *Kabuk ve plakların statik stabilite ve dinamik analizi örnek çözümler ve tablolar*, Literatür, İstanbul.
- [4] **H. Saunders, E.J. Wisniewski, P.R. Paslay**, *Vibration of conical shells*, Journal of the Acoustical Society of America 32 (1960) 765–772.
- [5] **H. Garnet, J. Kemper**, *Axisymmetric free vibration of conical shells*, Journal of Applied Mechanics 31 (1964) 458–466.
- [6] **C.C. Siu, C.W. Bert**, *Free vibration analysis of sandwich conical shells with free edges*, Journal of the Acoustical Society of America 47 (1970) 943–945.
- [7] **K.M. Liew, T.Y. Ng, X. Zhao**, *Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method*, Journal of Sound and Vibration 281 (2005) 627-645.
- [8] **C. Shu**, *An efficient approach for free vibration analysis of conical shells*, Int. J. Mech. Sci. Vol. 38 (1996) 935-949.
- [9] **T. Irie, G. Yamada, Y. Kaneko**, *Free vibration of a conical shell with variable thickness*, Journal of Sound and Vibration 82 (1982) 83–94.
- [10] **J.E. Goldberg, J.L. Bogdanoff ve L. Marcus**, *On the calculation of the axisymmetric modes and frequencies of conical shells*, Journal of the Acoustical Society of America 32 (1960) 738.
- [11] **A. Kalnins**, *Free vibration of rotationally symmetric shells*, Journal of the Acoustical Society of America 36 (1964) 1355.
- [12] **L. Tong**, *Free vibration of orthotropic conical shells*, Int. J. Engng. Sci. 31 (1993) 719.
- [13] **L. Tong**, *Free vibration of composite laminated conical shells*, Int. J. Mec. Sci. 35 (1993) 47.
- [14] **Leissa AW and So J.**, *Three-dimensional vibrations of truncated hollow cones*, J. Vib. Control 1(2) (1995), 145–158.

- [15] **Leissa AW and Kang J-H.**, *Three-dimensional vibration analysis of thick shells of revolution*, J. Eng. Mech. 125(12) (1999), 1365–1371.
- [16] **D. Senthil Kumar, N. Ganesan**, *Dynamic analysis of conical shells conveying fluid*, Journal of Sound and Vibration 310 (2008) 38–57.
- [17] **A. Selman, A.A. Lakis**, *Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to flowing fluid*, Journal of Fluids and Structures 11 (1997) 111–134.
- [18] **Vivek Tripathi, B.N. Singh , K.K. Shukla**, *Free vibration of laminated composite conical shells with random material properties*, Composite Structures 81 (2007) 96–104.
- [19] **Sen Liang, H.L. Chen, Tianning Chen, Michael Yu Wang**, *The natural vibration of a symmetric cross-ply laminated composite conical-plate shell*, Composite Structures 80 (2007) 265–278.
- [20] **I.F. Pinto Correia, C.M. Mota Soares, C.A. Mota Soares, J. Herskovits**, *Analysis of laminated conical shell structures using higher order models*, Composite Structures 62 (2003) 383–390.
- [21] **J. J. Lee ve C. H. Yeom**, *Vibration analysis of twisted cantilevered conical composite shells*, Journal of Sound and Vibration 255(5) (2002), 965-982.
- [22] **Zahit Mecitoğlu**, *Free vibrations of a conical shell with temperature-dependent material properties*, Journal of Thermal Stresses,19 (1996) 711-729.
- [23] **Vedat Doğan, Rimas Vaicaitis**, *Nonlinear response of double-wall cylindrical shell vibrations under random excitation*, Journal of Aerospace Engineering, January2006,46-54.
- [24] **C. W. Lim, K. M. Liew ve S. Kitipornchai**, *Vibration of cantilevered laminated composite shallow conical shells*, Int. J. Solid Structures 35(1998) 1695-1707.
- [25] **L.A. Godoy ve V.C.M. De Souza**, *Vibrations of shallow shells due to removal of formwork*, Journal of Sound and Vibration 215(3) (1998) 425-437.
- [26] **P. Ribeiro**, *Non-linear free periodic vibrations of open cylindrical shallow shells*, Journal of Sound and Vibration 313 (2008) 224–245.
- [27] **L.V. Kurpa, K.I. Lyubitska, A.V. Shmatko**, *Solution of vibration problems for shallowshells of arbitrary form by the R-function method*, Journal of Sound and Vibration 279 (2005) 1071–1084.
- [28] **A.N. Nayak ve J.N. Bandyopadhyay**, *On the free vbration of stiffened shallow shells*, Journal of Sound and Vibration 255(2) (2002), 357-382.

ÖZGEÇMİŞ

Veli Özkaraca, 1982 yılında İzmir’de dünyaya gelmiştir. 2000 yılında Şirinyer Lisesi’nden mezun olduktan sonra 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesine girmiştir. 2004 yılında Uçak Mühendisliği bölümünden mezun olduktan sonra yine İstanbul Teknik Üniversitesinde yüksek lisans programına devam etmiştir.