

EKSENEL HAREKETLİ LİNEER SÜREKLİ ORTAM PROBLEMİNE, BORU DİNAMİĞİ ÖZELİNDE FARKLI BİR SONLU FARKLAR AÇILIMI UYGULAMASI

B. Gültekin SINIR*

Öğretim Görevlisi, Dr.

C.B.Ü Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Manisa

E-mail: gultekin.sinir@bayar.edu.tr

Tel (iş): 0.236.2412144-258

Gsm:0.533.2493002

Fax : 0.236.2412143

Sümeyye SINIR

C.B.Ü Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü, Manisa

E-mail: sumeyyesinir@hotmail.com

Gsm: 0.505.8012092

Özet

Bu çalışmada eksenel hareketli lineer sürekli ortam dinamiği problemi analizini yeni bir sonlu farklar metodoloji ile incelendi. Sadece konumda ayrıklaştırma yaparak kısmi diferansiyel denklemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Oluşan denklem sisteminin çözümü klasik metod ile elde edildi. Sistemin doğal frekansı farklı grid sayıları için bulundu.

Abstract

In this study, the dynamics of axially moving continua are investigated using new finite difference methodology. In this methodology, the finite difference discretization is applied to spatial derivatives to simplify the partial-differential equation into a set of ordinary differential equations. The set of ordinary differential equations are solved in conventional method. For different grid number, the natural frequencies of the system are found.

1. Giriş

Bir çok mühendislik probleminin matematik modellemesi kısmi diferansiyel denklem şeklindedir. Özellikle sürekli ortamların dinamiği konum ve zaman bağımlılığı içerdiği kısmi diferansiyel formdadır. Sürekli ortamların dinamik analizinde bir çok analitik, yarı analitik veya tamamen nümerik metodlar vardır. Örnek vermek gerekirse değişkenlerine ayrıma metodu, Laplace veya sonlu Fourier dönüşümleri analitik yaklaşımlardır. Bunun yanında özellikle seri çözümleri gerektiren yaklaşımlar ise yarı analitik olarak adlandırılırlar. Örneğin çeşitli perturbasyon teknikleri ve Galerkin metodu yarı analitik metotlardır. Bütün bunların yanında konumu yada zamanı ayrıklaştırarak sonuca giden yöntemlere de nümerik metodlar denilmiştir. Bu yöntemlerin en meşhur ve yaygın kullanılanları sonlu elemanlar ve sonlu farklardır. Bunlardan başka bir çok metod da vardır.

Sürekli ortam dinamik analizleri için geliştirilen metodlarda temelde iki farklı yaklaşım vardır: Ya zaman bağımlılığını yok ederek konumda ki değişimini detaylı incelemek, ya da konum bağımlılığını bir yaklaşımla yok ederek zaman daki değişimi incelemek. Örneğin Galerkin metodun da konum bağımlılığı, sınır şartlarını sağlayan bir şekil fonksiyonun ortaganali ile çarpılıp sınır şartları arasında integrali alınmasıyla yok olur. Böylece zamana bağlı adi diferansiyel denklem elde edilir. Dinamik problemlerin sonlu farkla analizinde bir kaç tür farklı uygulama vardır. Örneğin boru dinamiği problemin de hem zaman hem de konum ayrıklaştırması yaparak dinamik analiz yapılmıştır [1].

Gökhan ve arkadaşları [2] plağın dinamik analizinde harmonik davranış kabulüyle sadece konumu ayrıklaştırmışlardır. Biz bu çalışmada ise liner boru dinamiği örneğinde, bir boyutlu sistemlerin dinamik analizine sonlu farklarla yeni bir yaklaşım getirdik. Kısmi diferansiyel denklem olan hareket denkleminin konum bağımlılığını, konuma bağlı türevleri sonlu farklarla ayrıklaştırarak yok ettik. Ayrıklaştırılan grid noktası kadar ortaya çıkan adi diferansiyel denklemin çözümünü ise klasik çözüm metodoloji uygulayarak elde ettik. Böylece lineer problemlerin çözümünde yeni bir algoritma ortaya koyduk.

2. Matematik Model ve Çözüm Algoritması

Burada eksenel hareket eden sistemlerin dinamik analizi ile ilgili genel bir model kullanılmıştır. Bu çalışmada $(\cdot)'$ konuma göre türevi $(\cdot)$ zamana göre türevi gösterir:

$$f_1(x)\ddot{w} + f_2\dot{w}' + L(w) = 0 \quad (1)$$

Yukardaki denklemin boyutsuzlaştırmadan sonra elde edilen bir denklem olduğu kabul edilmektedir. Burada w , enin etreşimi; L ise lineer diferansiyel operatörü göstermektedir. Katsayılardan f_1 konuma bağlı, f_2 ise sabittir. Bu seçim problemin doğası gereğidir. Yöntemin bir kısıtı değildir. Lineer operatör ise

$$L(w) = f_3(x)w'''' + f_4(x)w''' + f_5(x)w'' \quad (2)$$

Yukardaki denklemdaki her katsayı konuma bağlıdır. f_3 ve f_2 katsayılarının konuma bağlılığı homojen olmayan materyel ve değişken kesit olmasından, f_3 'ün ise değişken zemin parametresi olmasından kaynaklanır.

Bu çalışmada sonlu farklar ayrıklaştırmasını sadece konum için kullanacağız. Konum ayrıklaştırmasında merkezi fark kullanmak daha doğru sonuç vermektedir. Aşağıda bu çalışmada kullanılan sonlu fark merkezi ayrıklaştırmalar verilmiştir.

$$w' \cong \frac{w^{n+1} - w^{n-1}}{2\Delta x} \quad (3.a)$$

$$w'' \cong \frac{w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1}}{\Delta x^2} \quad (3.b)$$

$$w^{iv} \cong \frac{w^{n+2} - 4w^{n+1} + 6w^n - 4w^{n-1} + w^{n-2}}{\Delta x^4} \quad (3.c)$$

Burada n , hesaplanan gird noktasını gösterir ve $n=0, 1, 2, \dots, N$. Burada ki N toplam grid sayısını göstermektedir. Sonlu fark ayrıklaştırması sonucu elde edilen w^n artık sadece zamana bağlıdır, $w^n = w^n(t)$. Yukardaki ayrıklaştırmaları hareket denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} & f_1^n D^2 w^n + \frac{f_2^n}{2\Delta x} Dw^{n+1} - \frac{f_2^n}{2\Delta x} Dw^{n-1} + \frac{f_3^n}{\Delta x^4} w^{n+2} + \left(\frac{f_4^n}{\Delta x^2} - \frac{4f_3^n}{\Delta x^4} \right) w^{n+1} \\ & + \left(f_5^n - \frac{2f_4^n}{\Delta x^2} + \frac{6f_3^n}{\Delta x^4} \right) w^n + \left(\frac{f_4^n}{\Delta x^2} - \frac{4f_3^n}{\Delta x^4} \right) w^{n-1} + \frac{f_3^n}{\Delta x^4} w^{n-2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Burada D diferansiyel operatörü göstermektedir. Sonuç olarak $N-1$ tane denklemden oluşan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü ise

$$w^n = A^n e^{i\tilde{\lambda}t} \quad (5)$$

Denklemden ki $\tilde{\lambda}$ özdeğeri A^n ise öz vektörleri gösterir. Ayrıca $i = \sqrt{-1}$ 'dir. $N-1$ tane denklem olduğu için $N-1$ tane özdeğer olması beklenir. Bu özdeğerler, bir dinamik probleminde doğal açısal frekanslara karşılık gelir. Yani bu çalışmada sürekli bir ortamın $N-1$ tane doğal frekansı bulunabilir. Buna sonlu mod analizi diyebiliriz. Teorik olarak $N-1$ tane bulunması gereken frekans değerleri yöntemlerin kendi içinde getirdiği sıkıntılar sonucu daha az bir sayıda bulunabilmektedir.

Yukardaki çözümü denklemden yerine yazarsak

$$B_2^n A^{(n+2)} + B_1^n A^{(n+1)} + B_0^n A^n + \bar{B}_1^n A^{(n-1)} + B_2^n A^{(n-2)} = 0 \quad (6)$$

Denklemden B_i^n ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$B_0^n = f_5^n - \frac{2f_4^n}{\Delta x^2} + \frac{6f_3^n}{\Delta x^4} - f_1^n \tilde{\lambda}^2 \quad (7.a)$$

$$B_1^n = \frac{f_4^n}{\Delta x^2} - \frac{4f_3^n}{\Delta x^4} + \frac{f_2^n}{2\Delta x} i\tilde{\lambda} \quad (7.b)$$

$$\bar{B}_1^n = \frac{f_4^n}{\Delta x^2} - \frac{4f_3^n}{\Delta x^4} - \frac{f_2^n}{2\Delta x} i\tilde{\lambda} \quad (7.c)$$

$$B_2^n = \frac{f_3^n}{\Delta x^4} \quad (7.d)$$

Gerekli sınır şartlarını uygularsak aşağıdaki matris formları elde edilir. Burada örnek olması açısından basit-basit ve ankastre-ankastre sınır şartlarının matris formları verilmiştir. Matris formunda çözüm elde edebilmek için sınır şartları uygulanırsa, basit-basit mesnet şartları için merkezi fark açılımından

$$w^0 = 0 \rightarrow A^0 = 0 \quad (8.a)$$

$$w^{-1} = -w^1 \rightarrow A^{-1} = -A^1 \quad (8.b)$$

$$w^N = 0 \rightarrow A^N = 0 \quad (8.c)$$

$$w^{N+1} = -w^{N-1} \rightarrow A^{N+1} = -A^{N-1} \quad (8.d)$$

elde edilir. Benzeri şekilde ankastre-ankastre mesnet için yazarsak

$$w^0 = 0 \rightarrow A^0 = 0 \quad (9.a)$$

$$w^{-1} = w^1 \rightarrow A^{-1} = A^1 \quad (9.b)$$

$$w^N = 0 \rightarrow A^N = 0 \quad (9.c)$$

$$w^{N+1} = w^{N-1} \rightarrow A^{N+1} = A^{N-1} \quad (9.d)$$

Matris formda basit-basit mesnet için yazarsak

(10)

$$\begin{bmatrix} B_0^1 + B_2^1 & B_1^1 & B_2^1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ \bar{B}_1^2 & B_0^2 & B_1^2 & B_2^2 & 0 & \dots & & & 0 \\ B_2^3 & \bar{B}_1^3 & B_0^3 & B_1^3 & B_2^3 & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & B_2^{N-3} & \bar{B}_1^{N-3} & B_0^{N-3} & B_1^{N-3} & B_2^{N-3} & A^{N-3} \\ 0 & & \dots & 0 & B_2^{N-2} & \bar{B}_1^{N-2} & B_0^{N-2} & B_1^{N-2} & A^{N-2} \\ 0 & & & 0 & 0 & B_2^{N-1} & \bar{B}_1^{N-1} & B_0^{N-1} + B_2^{N-1} & A^{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^{N-3} \\ A^{N-2} \\ A^{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$
$$\tilde{\lambda} = \pm \lambda \quad (12)$$
$$w^n = \sum_{k=1}^{N-1} A^k e^{i\lambda_k t} + \bar{A}^k e^{-i\lambda_k t} \quad (13)$$

λ_k 'nın en küçük değeri birinci mod frekans değerini verir. Sonra sırasıyla ikinci ve üçüncü mod frekans değerleri bulunur. Bu analiz sonlu mod analizidir. Bu analizle en fazla N-1 tane mod hesaplanabilir. N değeri büyüdükçe, daha doğru frekans değeri elde edilir. Önemli nokta N değeri kaç olursa yeterli doğrulukta sonuç bulunacağıdır. N değerini arttırarak, her N değeri için bulunan λ_k değerlerinin grafiği çizilir. Belli bir N değerinden sonra λ_k daki değişim kabul edilebilir sınırlar içinde kalır. Bu N değerinden büyük herhangi bir N değeri seçilebilir.

3. Örnek Problem

Geliştirilen bu yeni metodolojinin uygulaması lineer boru problemi için yapılacaktır. Literatürde çok yaygın olarak bilinen içinden akışkan geçen borunun lineer hareket denklemi boyutsuz formda [3]

$$\ddot{w} + 2v\sqrt{\beta}\dot{w}' + w'' + v^2w'' = 0 \quad (14)$$

Burada $f_1(x)=1$, $f_2=2v\sqrt{\beta}$, $f_3(x)=1$, $f_4(x)=v^2$, $f_5(x)=0$ şeklinde düzenlenmiştir. Genel çözümdeki B_i^n ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$B_0^n = -\frac{2v^2}{\Delta x^2} + \frac{6}{\Delta x^4} - \tilde{\lambda}^2 \quad (15.a)$$

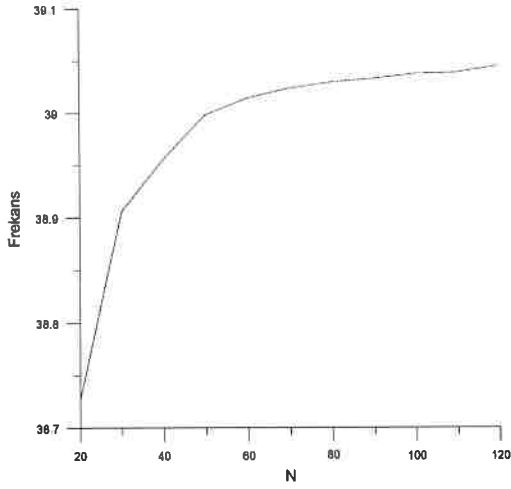
$$B_1^n = \frac{v^2}{\Delta x^2} - \frac{4}{\Delta x^4} + \frac{v\sqrt{\beta}}{\Delta x} i\tilde{\lambda} \quad (15.b)$$

$$\bar{B}_1^n = \frac{v^2}{\Delta x^2} - \frac{4}{\Delta x^4} - \frac{v\sqrt{\beta}}{\Delta x} i\tilde{\lambda} \quad (15.c)$$

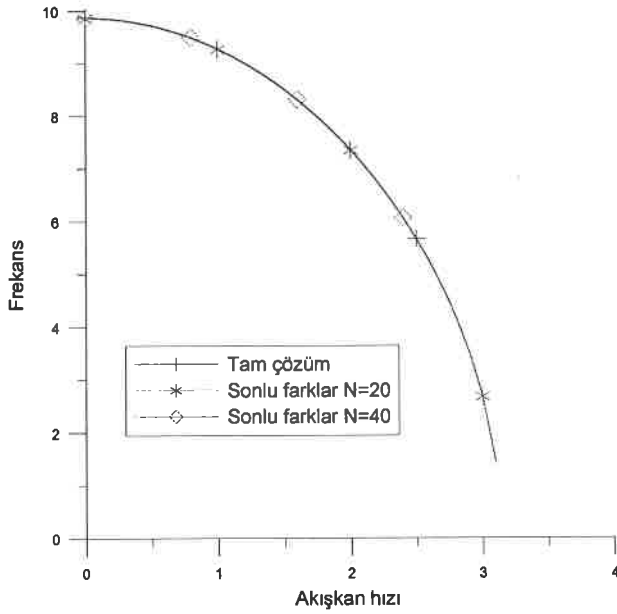
$$B_2^n = \frac{1}{\Delta x^4} \quad (15.d)$$

Bu terimleri kullanarak basit-basit ve ankastre-ankastre mesnetler için matrisler oluşturulur. Eğer sistem klasik sonlu farklar ayrıklaştırmasıyla yani hem zaman hem konum ayrıklaştırmasıyla analiz edilecek olsaydı çözülebilirlik şartına ihtiyaç duyulacaktı. Ancak bu çözüm metodolojisinde çözünebilirlik şartı durumu ortadan kalkar. Fakat istenilen hassasiyette sonuç alma açısından seçilen N sayısı önemlidir. Şekil 1'deki grafikte basit-basit mesnetlenme şartı altında N sayısı değişimi ile elde edilen birinci mod frekans değerleri görülmektedir. Belli bir N sayısından sonra frekanstaki değişim oldukça azalmaktadır. Şekil 1' bakarak N=60'tan büyük sayıların yakın değerler verildiği görülmektedir. Ancak N=20 veya 40 ile 60 arasındaki farklarında çok küçük olduğu görülecektir. Ayrıca elde bu metodoloji ile elde edilen sonuçların analitik metotla karşılaştırılması Şekil 2'de verilmiştir. Analitik sonuçlar bir tez çalışmasında [4] verilmiştir. Analitik sonuçlar ile yeni metodoloji ile elde edilen sonuçlar

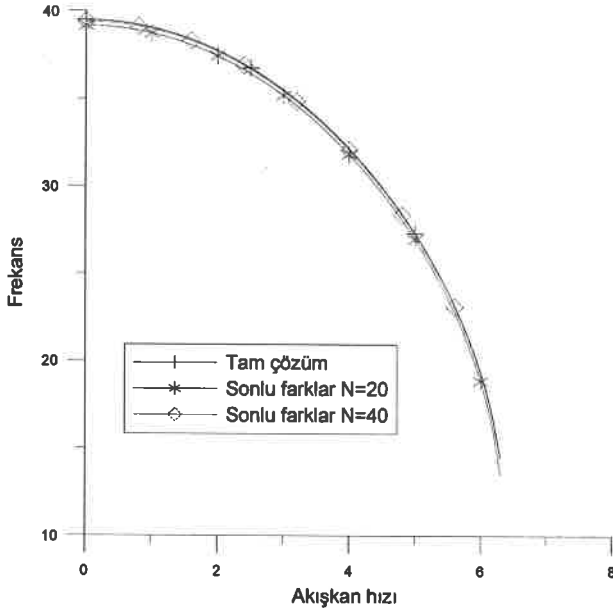
karşılaştırılmıştır. Grafikte de görüleceği üzere $N=20$ ve 40 bile tam sonuca çok yakın değerler vermektedir.



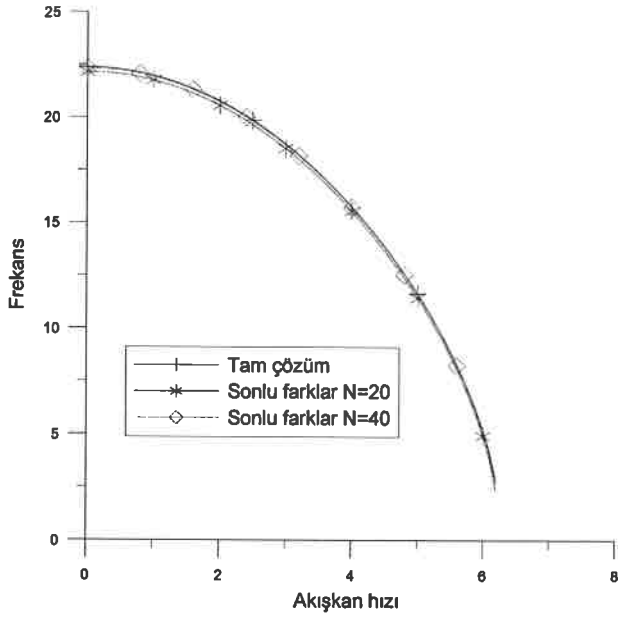
Şekil 1. Grid noktası sayısı için frekans değerleri ($v=1.0$ ve $\beta=0.8$)



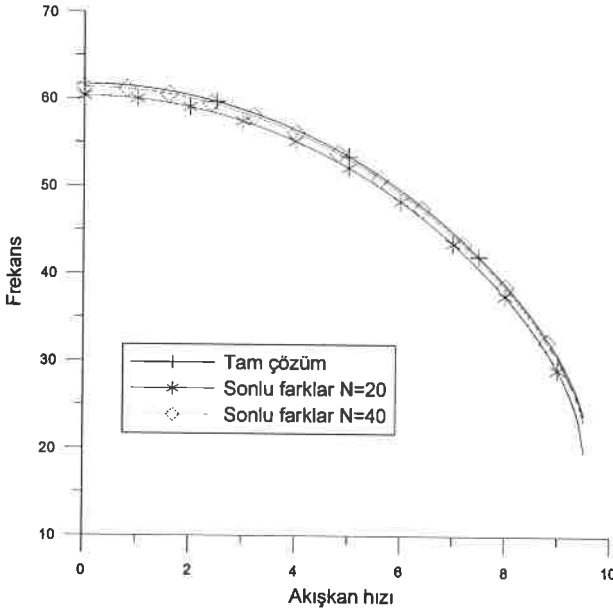
Şekil 2. Basit-basit mesnet şartları ve birinci mod için Hız-Frekans grafiği ($\beta=0.8$)



Şekil 3. Basit-basit mesnet şartları ve ikinci mod için Hız-Frekans grafiği ($\beta=0.8$)



Şekil 4. Ankastre-ankastre mesnet şartları ve birinci mod için Hız-Frekans grafiği ($\beta=0.8$)



Şekil 5. Ankastre-ankastre mesnet şartları ve ikinci mod için Hız-Frekans grafiği ($\beta=0.8$)

4. Sonuç

Bu çalışmada lineer eksenel hareketli sürekli ortam dinamiği problemine yeni bir sonlu farklar yaklaşımı uygulanmıştır. Genel bir matematik model verilmiştir. Bu modele konumda sonlu farklar ayrıklaştırılması uygulanmıştır. N tane grid noktası kullanılmıştır. Ayrıklaştırma sonucu N-1 tane adi diferansiyel denklem edilmiştir. Elde edilen diferansiyel denklem sistemi ders kitaplarında bilinen metodoloji ile çözülmüştür. Çözüm sonucu oluşan matrisin determinantının 0 eşit olması şartıyla sistemin doğal frekansı belirlenmiştir. Bu yöntemin avantajlarını aşağıdaki gibi sayabiliriz.

- ✓ Burda titreşim problemine uygulanan bu metodoloji, hesaplamalı akışkanlar mekaniğine de uygulanabilir.
- ✓ Değişken kesitli, değişken zemin parametrelili, sürekli mesnetli gibi bir çok farklı model için çözüm üretilebilir.

- ✓ Başka metodolojilerle birlikte kullanılabilir.
- ✓ Hem zaman da hemde konum da ayrıklaştırma uygulanan klasik sonlu farklar açılımında çözülebilirlik şartı gelir. Ancak bu metodoloji de çözülebilirlik şartı diye bir durum yoktur.

REFERANSLAR

- [1]. Semercigil S.E., Turan Ö.F. ve Lu S. Employing fluid flow in a cantilever pipe for vibration control. *Journal of Sound Vibration*,205(1),103-111. 1997.
- [2]. Kocaturk, T., Altintas, G., Determination of the steady state response of viscoelastically point-supported rectangular specially orthotropic plates by an energy-based finite difference method. *Journal of Sound and Vibration*, 267 (5), p.1143-1156, Nov 2003
- [3]. Paidoussis M.P. ve Li G.X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem. *Journal of Fluids and Structures*,7,137-204. 1993.
- [4] Sınır B. G. The Mathematical Modelling of Vibrations in Marine Pipeline. Fen Bilimleri Enstitüsü Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, 2004

*Makaleden sorumlu kişidir. İletişim adresi sorumlu kişinin e-mail adresidir.