

75064

TABAKALAR ARASI ÇİFTLENME VE KUANTUM FAZ
DALGALANMALARININ JOSEPHSON-BAĞLI TABAKALI
SÜPERİLETKENLERİN FİZİKSEL ÖZELLİKLERİNE ETKİSİ

DOKTORA TEZİ

Y.Müh. Metin HÜNER

75064

Tezin Enstitüye verildiği tarih : 5 Haziran 1998
Tezin savunulduğu tarih : 2 Ekim 1998

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Enver Nakhmedov

Diğer jüri üyeleri : Prof.Dr. Nihat Berker

: Prof.Dr. Ayşe Erzan

: Prof.Dr. Hamit Yurtseven

: Doç.Dr. Zafer Gedik

EKİM 1998

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

ÖNSÖZ

Doktora tez çalışması boyunca yardım ve katkılarını esirgemeyen Prof. Dr. Enver Nakhmedov'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

05-06-1998

Metin Hüner



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. Yüksek Sıcaklık Süperiletkenlerin Özellikleri	1
1.2. Dalgalanmalar	6
1.3. Topolojik Kusurlar	9
BÖLÜM 2. TABAKALI SÜPERİLETKENLERDE GİNZBURG LANDAU SERBEST ENERJİ FONKSİYONELİNİN MİKROSKOBİK İNCELENMESİ: TABAKA İÇİ VE TABAKALAR ARASI COOPER ÇİFTLENMESİ	11
2.1. Kritik Sıcaklık	27
2.2. Üst Kritik Manyetik Alan	28
BÖLÜM 3. KUANTUM FAZ DALGALANMALARININ KRİTİK SICAKLIĞA ETKİSİ	34
3.1. Kritik Sıcaklık	48
3.2. Zayıf Yüklenme Bölgesi	50
3.3. Orta Yüklenme Bölgesi	52
3.3. Kuvvetli Yüklenme Bölgesi	53
3.3. Enine Sıklık	55
SONUÇLAR	57
KAYNAKLAR	60
EK A	67
EK B	75
EK C	84
EK D	87
ÖZGEÇMİŞ	92

SEMBOL LİSTESİ

α	: yüklenme parametresi
d	: iki komşu tabaka arasındaki uzaklık
δ_{kl}	: klasik yaklaşımda anizotropi ölçüsü
Δ_{00}	: tabaka içi efektif düzen parametresi
Δ_{01}	: tabaka arası efektif düzen parametresi
ε_F	: Fermi enerjisi
$E_{\perp}^0$	: tabaka içi çiftlerin Josephson bağlanma enerjisi
$E_{\perp}^1$	: tabaka arası çiftlerin Josephson bağlanma enerjisi
E_{01}	: Lifschitz değişmezi katsayısı
$F_{ij}(x, x')$	: anormal Green fonksiyonu
$G_{ij}(x, x')$	: Green fonksiyonu
$H_{c_2}^{\perp}$	: tabakalara dik üst kritik manyetik alan
$H_{c_2}^{\parallel}$	: tabakalara paralel üst kritik manyetik alan
k_B	: Boltzman sabiti
ξ_p	: Fermi enerjisi civarında lineerleştirilmiş enerji bağıntısı
ξ	: koherans uzunluğu
$\lambda_{\parallel}$	: manyetik alanın tabakalara paralel sızma uzunluğu
l_s^2	: Cooperon manyetik uzunluğu
$m_{\parallel}$	: tabaka içi efektif kütle
$\mu_{\parallel}$	: elektron bandının yarı doluluktan sapma miktarı
$N_s^2(T)$	: süperiletken elektronların yüzey yoğunluğu
ν_0^{2d}	: iki boyutlu elektron gazının durum yoğunluğu
p_F	: Fermi momentumu
$\psi_j(x)$	: j. tabakanın x noktasında elektron yok etme operatörü
ρ_s	: enine sıklık
$t_{\perp}$	: komşu iki tabaka arasındaki tünelleme integrali
T_{c_0}	: tabaka içi çiftlenim için yerel kritik sıcaklık
T_{c_1}	: tabaka arası çiftlenim için yerel kritik sıcaklık
$T_c^{(0)}$	: iki boyutta ortalama alan teorisiyle hesaplanan kritik sıcaklık
v_F	: Fermi hızı
ω_D	: Debye sıcaklığı

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ kristali	1
Şekil 1.2 : $\text{Tl}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ kristali	1
Şekil 1.3 : Fermi yüzeyinin $t_{\perp}/\varepsilon_F$ oranına göre aldığı biçimler	4
Şekil 1.4 : Girdaplılığın a) $+1$ ve b) -1 olduğu iki durum	9
Şekil 2.1 : $H_{c_2}^{\perp} - T$ grafiği	30
Şekil 2.2 : $H_{c_2}^{\parallel} - T$ grafiği	33
Şekil 3.1 : $T_c - \alpha_0$ grafiği	54

Tabakalar Arası Çiftlenme ve Kuantum Faz Dalgalanmalarının Josephson-bağlı Tabakalı Süperiletkenlerin Fiziksel Özelliklerine Etkisi

Özet

Yüksek sıcaklık süperiletkenlerinin yüksek yapısal anizotropiye sahip olmaları yanında, üst kritik manyetik alanın değeri, koherans uzunluğu, manyetik alanın sızma uzunluğu gibi fiziksel büyüklükleri de kristal yönlenime göre büyük farklılıklar göstermektedir. Ayrıca kritik sıcaklıkları geleneksel süperiletkenlere göre oldukça yüksektir. Bu malzemelerin ortak özelliklerinden bir tanesi de, birim hücrelerinde bir veya daha çok bakır oksit tabakaya sahip olmalarıdır. Elektronlar bu tabakalar boyunca rahatça hareket edebilirken, tabakalara dik yönde ancak zayıf bir tünelleme yapabilirler. Bu yüzden bu malzemeler, birbiriyle Josephson bağlı süperiletken tabakaların art arda dizilmesiyle oluşmuş bir yapı şeklinde modellenebilirler. Tabakalar arası Josephson bağlı olan bir sistemin Hamiltonyeninde, tabaka içi çiftlenme yanında, tabakalar arasında olabilecek çeşitli çiftlenme mekanizmaları göz önüne alınmıştır. Daha sonra Gorkov-Nambu mikroskobik yaklaşımıyla sistemin düzen parametrelerinin sağladığı denklemler bulunduktan sonra, serbest enerji fonksiyoneli elde edilmiştir. Tabakalar arası çiftlenim sonucu kritik sıcaklıkla, tabaka içi ve arası çiftlerin Josephson bağlanma enerjileri artmış ve Lifschitz değişmezinin katsayısının band doluluğuna olan bağlılığı azalmıştır. Tabakalara dik ve paralel yöndeki üst kritik manyetik alan hesaplanmış ve bunların, kritik alanın kritik sıcaklık civarında gözlenen yukarı doğru kavis ile uyumlu olduğu görülmüştür. Ortalama alan türü bu hesaplardan sonra sistemdeki kuantum faz dalgalanmalarının kritik sıcaklığa nasıl bir etkisi olacağı incelenmiştir. Kritik sıcaklığın ifadesinde bulunan faz-faz korelatörü kendi kendisiyle tutarlı harmonik yaklaşımla hesaplanmıştır. Tabakaların yüklenme miktarı arttıkça kritik sıcaklık düşmektedir. Ayrıca sıfır sıcaklıkta, enine sıklığın yüklenmeye olan bağlılığının incelenmesi sonucu, tabakalar arası Josephson bağlı sistemlerde süperiletken-normal metal tekrar geçişinin olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

The Effect of Interlayer Pairing and Quantum Phase Fluctuations on the Physical Properties of Josephson-coupled Layered Superconductors

Summary

After the discovery of superconductivity in mercury at 4 K by Kammerling Onnes in 1911, the search for new superconducting materials led to a slow increase in the highest known transition temperature T_c over the decades, reaching a saturation at 23 K with the discovery of the superconductivity of Nb_3Ge by Gavaler. After 13 more years, the path to radically higher transition temperatures was opened by the discovery in 1986 of superconductivity at $\sim 35\text{K}$ in “LBCO” (a mixed oxide of lanthanum, barium and copper) by Bednorz and Müller, for which they were awarded the Nobel prize in 1987.

The discovery was surprising and exciting, not simply because of the large increase in T_c , but also because it revealed that the oxides formed an unexpected new class of superconducting materials. Another big jump to $T_c \sim 90\text{K}$ followed quickly, with the discovery of the “123” class of materials exemplified by $\text{Y}_1\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ (“YBCO”). In this structure the yttrium atom can be replaced by many other rare earth elements, e.g., La, Nd, Sm, Eu, Gd, Ho, Er and Lu, with similarly high T_c . Shortly after, still higher T_c values were found in the “BSCCO” system (mixed oxides of bismuth, strontium, calcium and copper) and the “TBCCO” system (mixed oxides of thallium, barium, calcium and copper).

In all of these systems, copper oxide planes form a common structural element, which is thought to dominate the superconducting properties. Depending on the choice of stoichiometry, the crystallographic unit cell contains varying numbers of CuO_2 planes. In addition, the 123 compounds contain CuO chains, which are thought to serve largely as reservoirs to control the electron density in the planes. The exact T_c depends on these particulars and the highest T_c achieved in the “YBCO”, “BSCCO” and “TBCCO” systems are 93, 110 and 130 K, respectively.

It is generally argued that the same microscopic mechanism is operating in all the new oxide superconductors. However there is no general consensus yet on what this mechanism is. Most ideas emphasize the importance of quasi-two-dimensional CuO_2 layers and doping. The main controversy arises with regard to the origin of the attraction of pairs. In this thesis we will assume that the potentials are attractive.

The description of superconductivity in an anisotropic material can be given by a simple generalization of the Ginzburg-Landau equations with an anisotropic effective mass: a large one along the c-axis and a small one in the ab-plane. However, this model is appropriate only in compounds with small anisotropy and it becomes invalid in the limit of very large anisotropy. Indeed, in layered compounds, the electron density and the superconducting order parameter are varying in the direction perpendicular to the layers. If coherence length ξ is small the order parameter becomes inhomogeneous. It is large within the CuO_2 layers but small between them. This situation is equivalent to that of a weak link. Thus, in this approximation, the layered superconductors can be considered as an array of superconducting layers coupled by Josephson interaction. Such a model is referred to as the Lawrence-Doniach model .

As it has been observed by many experiments the structural anisotropy has a strong influence on the macroscopic properties of a system. Measurements of the energy gap, Δ , of high- T_c superconductors show significant anisotropy in the magnitude of Δ , i.e. the value of Δ is found to depend on the crystal orientation, . Such measurements raise a question on the symmetry of the superconducting energy gap. Earlier theories of the layered superconductors have proposed the spherically symmetric wave function of the Cooper pairs inside each layer, as it is in the conventional BCS theory, and there is no component of the order parameter along the c-axis which is directed perpendicularly to the superconducting layers. Even weak interlayer tunneling of the electron pairs prevents phase fluctuations from destroying the long-range order. In particular, an additional attractive interlayer interaction of particles could give rise to the energy gap anisotropy .

The strong structural anisotropy of high- T_c superconductors permits us to characterize the electron motion mainly bandlike inside of each layers. Whereas the electron motion in the perpendicular to layers direction is described in tight-binding approximation. The single electron band anisotropy is characterized by the small parameter $\frac{t_{\perp}}{\epsilon_F} \ll 1$.

We will start from a general effective Hamiltonian for a layered superconductor. Then we will use Gorkov Nambu microscopic theory to obtain the expression for the free energy functional.

The dominant pairing interaction in the layered systems is expected to be the intralayer interaction. However, the possible interlayer pairing interactions should strongly affect on the physical properties of superconductors. The most important interlayer interaction term (with coupling constant of V_1) is that when two particles located on the nearest-neighboring layers remain on these layers after scattering. Such an interlayer pairing in addition to an intralayer attractive interaction has been proposed by many authors to study particularly T_c enhancement in layered superconductors. There may be also exchange type (with coupling constant of $\tilde{V}_1$) interlayer interaction in the system. Although the origin of interlayer coupling is not specified, the possible mechanism of pairing may be the polarization of the dielectric spaced between

the layers. Notice that V_1 and $\tilde{V}_1$ type interlayer interactions may in principle exist even though the single electron tunneling integral $t_\perp$ to the neighboring layer vanishes. The another type of interlayer interaction which represents the scattering of two particles from one layer to the nearest-neighboring one by pair (with coupling constant of $\tilde{V}_0$), has been included in Hamiltonian by Tešanović. Although this term should be proportional to $t_\perp^2$, as an origin of this interaction a strong interband scattering mechanism has been suggested that sets up the off-diagonal long range order (ODLRO) in the system if $t_\perp \rightarrow 0$. Apart from the interlayer interactions considered above, Bulaevskii and Zyskin took into account another type interlayer interaction (with coupling constant of $\tilde{V}_{01}$) which was shown to give a considerable contribution to the gap anisotropy. This term characterizes the interaction of two incident particles on the same layer with scattering one of the particle to the nearest-neighboring layer, also the interaction of two particles located on the nearest-neighboring layers with scattering of both particles into one layer.

In this thesis we include into the Hamiltonian an intralayer attractive interaction as well as interlayer interactions. Our aim is to obtain the expression for the free energy functional, taking into account an intralayer and all possible interlayer pairing potentials, and to study the critical temperature and the magnetic properties of a layered system. The Lawrence-Doniach type free energy functional with two order parameters has been obtained in a previous paper when the Hamiltonian of a system includes V_0 interlayer pairing interaction and only V_1 term of the interlayer interaction. The problem is complicated by taking into account the additional interlayer pairing interactions $\tilde{V}_0$, $\tilde{V}_1$ and V_{01} , introducing of which multiplies the number of order parameters. We obtain the Lawrence-Doniach type free energy functional for Josephson coupled layered superconductors by using Gorkov-Nambu microscopic theory. The number of order parameters is reduced by introducing two order parameters Δ_{00} and Δ_{01} . Although Δ_{00} is defined by V_0 , $\tilde{V}_0$ and V_{01} type interaction terms and Δ_{01} is defined by V_1 , $\tilde{V}_1$ and V_{01} type terms, we call Δ_{00} and Δ_{01} intra- and interlayer order parameters, respectively.

Introducing two critical temperatures T_{c_0} and T_{c_1} which correspond to intra- and interlayer local pairings we show that additional interlayer interactions enhance the values of T_{c_0} and T_{c_1} , so that they are determined by the pairing constants V_0 , $\tilde{V}_0$ and V_1 , $\tilde{V}_1$, correspondingly.

The existence of two order parameters in a system gives rise to the appearance of new terms such as the Lifschitz invariant in the free energy functional. The Lifschitz invariant characterizes the mixing of two order parameters in the system. The coefficient under the Lifschitz invariant was found to depend strongly on the filling factor of the two-dimensional (2d) electron band and it vanishes for half-filling case. However, the additional interlayer term V_{01} changes the coefficient of the mixing term so that it does not depend on the 2d band filling factor (at least its dependence on the filling factor is negligibly weak) and the value of this coefficient considerably increases, i.e. mixing of two local pairing occurs always if $V_{01} \neq 0$ irrespective of 2d electron band filledness.

The Josephson coupling between the superconducting layers is realized under the condition of $t_{\perp} < k_B T_c^{(0)} < \varepsilon_F$, where $T_c^{(0)}$ is the critical temperature evaluated by the mean field theory and ε_F is the Fermi energy of the electrons inside the layers. In this case the essential term in the free energy functional is the Josephson coupling term which characterizes the Cooper pairs tunneling from one plane to the nearest neighboring one. The coupling energies $E_{\perp}^0$ and $E_{\perp}^1$ which correspond to the intra- and interlayer pairs tunnelings, respectively, were found to differ by 2, i.e. $E_{\perp}^0 = 2E_{\perp}^1 = \frac{t_{\perp}^2}{32\varepsilon_F}$.

The additional interlayer pair interactions $\tilde{V}_0$ and V_{01} in the Hamiltonian change the values of the Josephson energies $E_{\perp}^0$ and $E_{\perp}^1$ so that $E_{\perp}^0$ increases considerably due to $\tilde{V}_0$ term, while relatively small increase shows $E_{\perp}^1$ energy due to V_{01} term. Also, the correction to $E_{\perp}^1$ depends on the filling factor and this correction vanishes in the middle of the 2d electron band.

The transition temperature to the superconducting state, T_c , is calculated for Josephson coupled layered superconductors. T_c is expressed by the local pairing temperatures T_{c_0} and T_{c_1} , as well as by mixing of two order parameters. Since T_{c_0} and T_{c_1} and the coefficient of the Lifschitz invariant increase due to the additional interlayer interactions $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_0$ and V_{01} , T_c is also enhanced. We also discuss the influence of the interlayer interactions on the upper critical magnetic field of the layered superconductors. Our results are consistent with the experimental data which yields a positive curvature of the upper critical field near T_c .

The results obtained from the free energy functional are of mean field type. It is expected that fluctuations would change physical properties of layered superconductors. There is no superconducting phase transition in a two-dimensional system. The existence of strong fluctuations of order parameter's phase destroys the long range order in a single superconducting layer. The destruction effects of the long wavelength fluctuations become weaker in the Josephson coupled quasi-2d SC's due to the tunneling of the Cooper pairs from one layer to another. Therefore, the long range order in the system sets in at a non-zero temperature.

In this thesis we study also the charging effects on the critical temperature T_c in the Josephson-coupled layered superconductors. The self-consistent mean field method is applied to obtain the equation of T_c . This equation expresses T_c by the phase-phase correlator $\langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle$ for the phase $\varphi(\mathbf{r})$ of the order parameter $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})| \exp[i\varphi(\mathbf{r})]$. The phase-phase correlator is calculated by using the self-consistent harmonic approximation (SCHA) which permits to study the dependence of T_c on the charging effect for large values of the layer charging.

The knowledge of the phase-phase correlator for phases on the different layers permits us to investigate the transverse stiffness of the layered superconductors. Study of the dependence of the transverse stiffness on the charging energy at

$T = 0$ shows that long range phase coherence is destroyed only for sufficiently strong values of the layer charging. The criterion for superconducting-normal metal phase transition and reentrant transition to occur is $t_{\perp} \geq k_B T_c^{(2)}$, where $t_{\perp}$ is the one-electron tunneling integral for nearest-neighboring layers and $T_c^{(2)}$ is the superconducting transition temperature for a single layer estimated by mean field theory. However, the condition of $t_{\perp} \geq k_B T_c^{(2)}$ contradicts the existence of Josephson coupling between the layers.

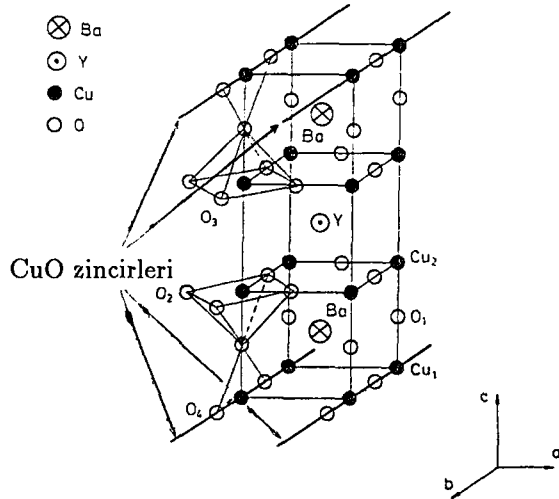


Bölüm 1

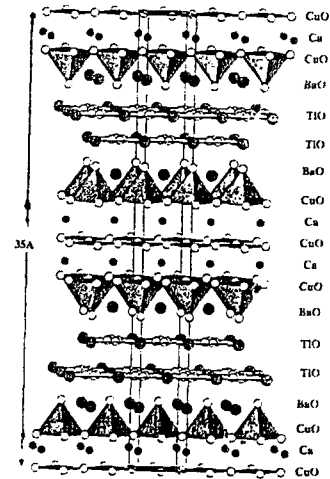
Giriş

1.1 Yüksek Sıcaklık Süperiletkenlerin Özellikleri

Süperiletkenlere ilgi 1986'da Bednorz ve Müller [1] tarafından $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$ bakır oksitlerinde süperiletkenliğin bulunmasıyla artmıştır. Bunun ardından 1987'de $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ perovskit bakır oksit seramiğinde süperiletkenlik bulunmuştur [2]. 1980'li yıllara kadar, normal metal süperiletken geçişinin meydana geldiği en yüksek kritik sıcaklık 23 K [3] civarında olmasına rağmen, bu yeni buluşlarla kritik sıcaklık 30-40 K aralığına yükselmiştir. Gene 1987'de bu sefer [4-6] $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ malzemesinde kritik sıcaklık 90 K'e çıkmıştır. Bu malzeme önce polikristal, daha sonra saf kristal olarak üretilmiş ve sistemin saflaştırılmasıyla birlikte kritik sıcaklık artış göstermiştir. Kritik sıcaklığın arttırılması için yeni malzemeler arayışı bizmut ve talyum içeren bileşiklerin



Şekil 1.1 $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ kristali



Şekil 1.2 $\text{Tl}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ kristali

bulunmasına neden olmuştur [7,8]. Bu bileşiklerde kritik sıcaklık 125 K'e kadar yükselmiştir. Yüksek sıcaklık süperiletken malzeme arayışında bulunan bu bileşikler önceleri seramik olmasına rağmen, gelişmiş teknoloji uygulanmasıyla hemen hemen hepsinin kristalleri de üretilmiştir. Bu kristallerin bazı ortak özellikleri bulunmaktadır. Kristaller anizotropik olup birbirine zayıf bağlı tabakalardan oluşmaktadır. Şekil 1.1'de $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ kristalinin, şekil 1.2'de ise $\text{Tl}_2\text{Ca}_2\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10}$ kristalinin birim hücresi görülmektedir. Yttrium kristalinin birim hücre sabitleri yaklaşık $a = 4\text{\AA}$, $b = 4\text{\AA}$, $c = 12\text{\AA}$ [9] iken daha yüksek bir anizotropiye sahip Talyum kristalinde bu değerler yaklaşık $a = 3\text{\AA}$, $b = 3\text{\AA}$, $c = 35\text{\AA}$ [10] olmaktadır. Bu kristallerin diğer bir özelliği bakır oksitten (CuO_2) oluşmuş tabakalara sahip olmalarıdır. Serbest yük taşıyıcıları bu tabakalarda olup, yüksek anizotropi nedeniyle belli bir olasılıkla komşu tabakalara tünelleme veya hoplama yapabilirler. $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ kristalinde oksijenin konsantrasyonunun değiştirilmesiyle kristaldeki serbest yük taşıyıcılarının konsantrasyonu değişmektedir. Bizmut ve talyum içeren kristallerde anizotropinin artmasının yanı sıra, birim hücrede birkaç bakır oksit tabakası olmaktadır. Bütün bu kristallerin yapılarındaki anizotropi düşük sıcaklıkta kinetik özelliklerine de yansımaktadır. Örneğin, kristallerin metal durumlarında dirençlerin tabakalara paralel ($\rho_{\parallel}$) ve dik ($\rho_{\perp}$) bileşenlerinin oranı çok büyük aralıkta değişip, yttrium kristali için $\rho_{\perp}/\rho_{\parallel} \simeq 25$ olup [11], talyum ve bizmut içeren kristallerde bu oran çok daha yüksektir $\rho_{\perp}/\rho_{\parallel} \simeq 10^5$ [12]. Güçlü yapısal anizotropi kristallerin süperiletken fazdaki fiziksel özelliklerine de yansımaktadır. Örnek olarak üst kritik manyetik alanın tabakalara dik $H_{c_2}^{\perp}$ ve paralel $H_{c_2}^{\parallel}$ bileşenlerinin oranı $H_{c_2}^{\perp}/H_{c_2}^{\parallel}$ yttrium bileşikleri için $\simeq 10$ [13], bizmut ve talyum bileşikleri için $\simeq 50$ 'ye kadar çıkmaktadır [11,14]. Benzer anizotropi alt kritik manyetik alan ve kritik akım için de mevcuttur. Yüksek sıcaklık süperiletkenlerde (YSS) manyetik alanın sızma uzunluğu λ ve koherans boyu ξ de anizotropi göstermekte ve hem tabaka içi hem de tabakalara dik yönde $\lambda \gg \xi$ olduğundan dolayı, yeni bulunan bütün süperiletkenlerin 2. tip süperiletken olduğu kanısına varılmıştır. Gerçekten de yttrium kristalinde $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel} \simeq 5$, $\xi_{\parallel}/\xi_{\perp} \simeq 5$ olduğu [11] deneysel olarak saptanmışken, bu oranlar talyum ve bizmut kristallerinde daha yüksektir: $\lambda_{\perp}/\lambda_{\parallel} \simeq \xi_{\parallel}/\xi_{\perp} \simeq 150$ [15,16]

Normal metal-süperiletken faz geçişinin kritik sıcaklığının çok yüksek olması

bilim adamlarını yeni teoriler arayışına sevk etmiştir. Gerçekten de Bardeen, Cooper, Schrieffer [17] (BCS) teorisinin kritik sıcaklık için verdiği

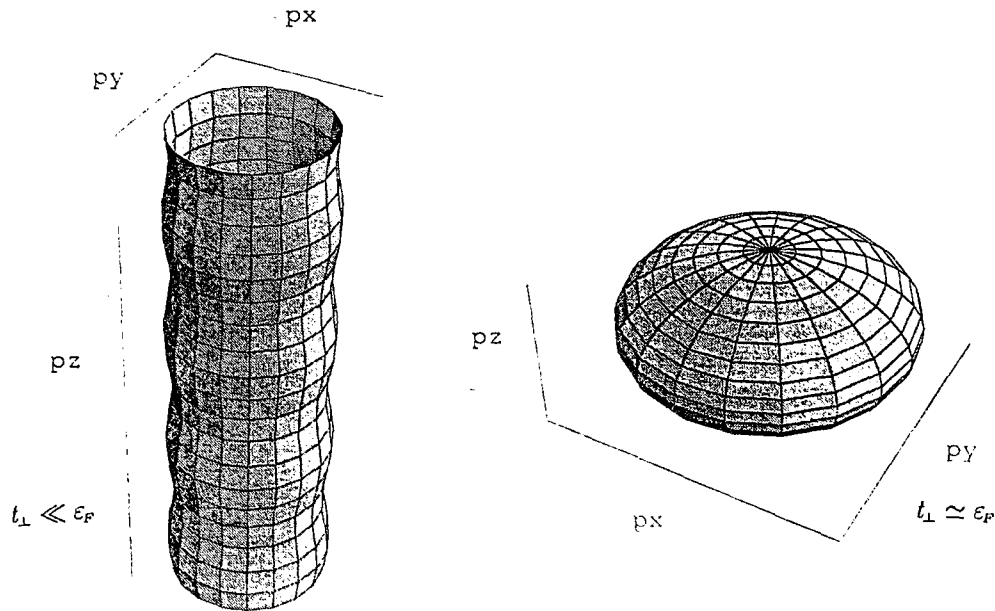
$$T_c = \hbar\omega_D e^{-\frac{1}{\eta}} \quad (1.1)$$

ifadesi, $T_c = 120K$ değerini açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Yukarıdaki bağıntıda ω_D Debye frekansı, η ise BCS teorisinde birimsiz etkileşme sabiti olup, zayıf etkileşmeler için (BCS teorisi de bu varsayımın üzerine kurulmuştur) $\eta < 1$ olmalıdır. Etkileşme sabitinin açık ifadesi ise şöyledir:

$$\eta = N(\epsilon)V \simeq \frac{V}{\epsilon_F} \quad (1.2)$$

Yukarıda $N(\epsilon)$ durum yoğunluğunu, V ise etkileşme potansiyelini belirtmektedir. Geleneksel süperiletkenlerde, Debye enerjisi $\hbar\omega_D$ 'nin değerinin $\hbar\omega_D < 300K$ ve $\lambda < 1$ olduğundan hareketle kritik sıcaklığın en fazla 40-50 K'e kadar yükselebileceği kanaatine varılmaktadır. Bütün bu değerlendirme BCS teorisinin YSS'lerdeki mikroskopik mekanizmayı anlatmakta yetersiz kalacağını göstermekle birlikte, elektron-fonon etkileşme mekanizmasının çiftlenmede önemli olup olmadığı sorusu da kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. YSS'lerin bulunduğu ilk yıllarda bu malzemelerden izotop olayının gözlenmemesi [18,19] çiftlenme mekanizmasının elektron-fonon etkileşmesiyle olmayacağı tahminlerini daha da güçlendiriyordu. Bu değerlendirmeler, resonating valance bond (RVB) [20,21], spin bag modeli [22], bipolaron modeli [23] gibi birçok eksitonik mekanizmanın önerilmesine yol açmıştır. Fakat eksitonik modellerin gerçekçi olmaması bunlara ilgiyi zamanla azaltmıştır. 1980'li yılların sonlarına doğru YSS'lerde büyük izotop etkisinin olduğunun görülmesiyle [24,25] yeniden fonon aracılı çiftlenme modellerine olan ilgi artmaya başlamıştır. Bir kısım fizikçi, çiftlenmenin mikroskopik mekanizmasının nedenlerini incelemeksizin, kristallerin bazı yapısal ve fiziksel özelliklerinden kaynaklanan kritik sıcaklık

artışının nedenini araştırmışlardır. Örnek olarak YSS'lerde tabakalar arasında tünelleme integralinin çok zayıf olduğu durumlarda, tabaka içindeki iki boyutlu elektron gazının durum yoğunluğundaki Van Hove singularitesinden dolayı, kritik sıcaklığın artabileceği gösterilmiştir [26,27]. Bir başka yaklaşım ise güçlü yapısal anizotropinin kritik sıcaklığı arttırabileceğidir. Bu fikir aslında YSS'lerin bulunmasından çok daha öncesine dayanmaktadır. Little 1964'de quasi bir boyutlu sistemlerde kritik sıcaklığın artabileceğini öne sürmüştür [28]. Bu teoriden sonra quasi bir boyutlu organik süperiletkenler [29] ve $\text{TaS}_2(\text{pyridine})$ [30] gibi quasi iki boyutlu süperiletkenlerin deneysel incelenmesi sonucu gerçekten de kritik sıcaklığın arttığı saptanmıştır. YSS'lerin keşfinden sonra quasi iki boyutlu sistemlerde, yapısal anizotropiye bağlı olarak kritik sıcaklığın artışı ve sistemin diğer fiziksel özelliklerinin değişimini inceleyen çalışmaların sayısında büyük artış olmuştur [31-41]. Tabakalı süperiletkenlerde yük taşıyıcıları arasındaki etkileşmenin anizotropisi de çok önemlidir. Böyle sistemlerde etkileşme anizotropisi tabaka içinde ve tabakalar arasında farklı özellikte çiftlerin oluşmasına neden olabilir. Sistemin anizotropisinin yeterince küçük olduğu durumlarda normal metal elektron gazı için Fermi yüzeyinin kapalı elips şeklinde olduğu durumlar söz konusu olmaktadır. Bu durumda üç farklı yönde



Şekil 1.3 Fermi yüzeyinin $t_{\perp}/\epsilon_F$ oranına göre aldığı biçimler

efektif kütle teoriye sokularak problem kolaylıkla çözülebilir. Benzer yaklaşım anizotropik sistemler için Gorkov ve Melik Barkhudarov tarafından incelenmiştir [42]. Anizotropinin artmasıyla Fermi yüzeyi açık hale gelebilir. (Şekil 1.3) Açık Fermi yüzeyinin gerçekleşmesi için tabaka içi elektron gazının Fermi enerjisi ε_F , bandın dik yönündeki genişliği $t_{\perp}$ 'den (veya elektronların tabakalar arasındaki tünelleme integrali $t_{\perp}$ 'den) çok büyük olmalıdır. Tabakalı süperiletkenlerde böyle güçlü anizotropinin gerçekleştiği durumda sistemin fiziksel özellikleri ilk önce Lawrence-Doniach (LD) tarafından incelenmeye başlanmıştır [43]. Bu çalışmada yüksek anizotropi için Ginzburg-Landau (GL) serbest enerji fonksiyoneline benzer bir fonksiyonel yazılarak üst kritik manyetik alanın iki boyuttan üç boyuta geçiş özelliği incelenmiştir.

$$F = \sum_n \int d^2r \left\{ a |\Psi_n(\mathbf{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla \Psi_n(\mathbf{r})|^2 + \frac{E_{\perp}}{2} |\Psi_{n+1}(\mathbf{r}) - \Psi_n(\mathbf{r})|^2 \right\} \quad (1.3)$$

Toplam tabakalar üzerinden, integral ise tabaka yüzeyinde yapılmaktadır. Burada $a \sim T - T_c$, $|\Psi_n(\mathbf{r})|^2 \sim n_s(\mathbf{r})$ tabaka içindeki süperiletken elektron yoğunluğu ile orantılı olup, $E_{\perp}$ Josephson bağlanma enerjisini göstermektedir. Sonraları LD modelinden hareket edilerek, tabakalı süperiletkenlerin fiziksel özelliklerindeki farklılıklar teorik olarak incelenmiştir [44,45].

Lawrence-Doniach modelinde Cooper çiftleri tabakalar içinde oluşmuş olup, bu çiftler tabakalar arasında Josephson bağları dolayısıyla tünelleme yapmaktadırlar. Daha ileride gösterileceği gibi, güçlü anizotropik tabakalı sistemlerde, tabaka arası Josephson bağlarının oluşması için $t_{\perp} < k_B T_c^{(2)} < \varepsilon_F$ şartının sağlanması gerekmektedir. Burada $T_c^{(2)}$ bir tabaka için normal metal-süperiletken faz dönüşümünün, ortalama alan teorisi ile belirlenmiş olan kritik sıcaklığıdır. Bizmut içeren YSS'lerde tabakalar arasında Josephson bağlarının olduğu deneysel olarak gözlemlenmiştir [46,47].

Son zamanlardaki tabakalı süperiletkenlerin teorik incelemelerde, tabaka içi çiftlenme dışında, tabaka arası çiftlenmenin de olduğu durumda kritik sıcaklığın artacağı kanaatine varılmıştır [32,35,36,40,41]. Bu çalışmaların hemen hemen

hepsinde sistemin c- yönünde güçlü anizotropi gösterdiği, fakat Josephson bağı-
nın oluşmadığı durum incelenmiştir. Klemm ve Liu [48] ise problemi Joseph-
son bağlarının olduğu durumda inceleyerek, düzen parametresinin ve band
aralığının anizotropisi ile ilgilenmişlerdir.

Çalışmamızın birinci kısmında, tabakalı süperiletkenlerde tabakalar arasında
Josephson bağlarının olduğu durumda, ister tabaka içi, isterse de çeşitli ta-
bakalar arası çiftlenmelerin, sistemin kritik sıcaklığına ve üst kritik manyetik
alana etkisi incelenmiştir. Gorkov-Nambu mikroskobik teorisi uygulanarak,
bütün bu çiftlenmelerin olduğu durumda GL tipi fonksiyonel elde edilmiştir.
Bu fonksiyonelden hareket ederek, çeşitli tabakalar arası çiftlenmelerin kritik sı-
caklığa etkileri bulunmuştur. Üst kritik manyetik alanın incelenmesi ise, onun
sıcaklıkla değişimindeki, deneyde bulunmuş olan, yukarı doğru pozitif kavisin
anlaşılmasına yardımcı olmuştur [49-51].

1.2 Dalgalanmalar

Teorik olarak incelediğimiz sistem birbiriyle zayıf bağlı olan süperiletken taba-
kalardan oluştuğu için sistemin temel yapı taşlarını bu tabakalar oluşturmakta-
dır. Bir ve iki boyutlu sistemlerde faz dönüşümü genellikle $T = 0$ sıcaklığında
olabilir [52]. Bir ve iki boyutlu süperiletken sistemlerde faz dönüşümünün
olmaması, güçlü faz dalgalanmalarına bağlıdır. Tabakalı süperiletkenlerde ta-
bakalar arası tünelleme integrali $t_{\perp}$ 'in azalmasıyla dalgalanmalar artacak ve
bu dalgalanmaların sistemin fiziksel özelliklerine etkisi de önem kazanacaktır.
Doğaldır ki $t_{\perp}$ 'in azalmasıyla, onun sonlu bir değerinde süperiletkenliğin bo-
zulduğu bir $t_{\perp}^*$ eşik değerinin olup olmaması ayrı bir problemdir. Fakat bu-
rada $t_{\perp}$ 'in istenildiği kadar küçük değerlerinde de sistemde köşegen dışı uzun
menzilli düzenin (KDUMD veya ODLRO) gerçekleştiği varsayılmaktadır. Sis-
temde KDUMD'in olduğunu belirten Yang kriteri [53] aşağıdaki gibidir:

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \langle \Delta(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r}') \rangle = \begin{cases} \text{sabit} & \text{KDUMD var} \\ 0 & \text{KDUMD yok} \end{cases} \quad (1.4)$$

Eğer bu korelatörün değeri sıfır oluyorsa, bu şart sistemde bir faz dönüşümünün olmadığı anlamına gelmektedir. Düzen parametresi korelatörü süperiletkenler için T.M. Rice [54] tarafından 1,2 ve 3 boyutlu sistemler için hesaplanmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

$$\langle \Delta(\mathbf{r})\Delta^*(\mathbf{r}') \rangle = \begin{cases} \left[\Delta_0^2 + \frac{\exp(-qR)}{4\beta c q} \right] \exp(-R/\alpha), & 1 \text{ boyut} \\ \left[\Delta_0^2 + \frac{\exp(-qR)}{4\beta c (2\pi q R)^{1/2}} \right] \exp(-\ln(2qR)/\pi\alpha), & 2 \text{ boyut} \\ \left[\Delta_0^2 + \frac{\exp(-qR)}{8\beta c \pi q} \right] \exp(-(Q - \pi/2R)/\pi^2\alpha), & 3 \text{ boyut} \end{cases} \quad (1.5)$$

Yukarıda Δ_0^2 düzen parametresinin dalgalanma olmadığı durumdaki değeri olup, q, α, c, Q birer sabittir. Ayrıca $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ve $\beta = k_B T$ 'dir. Köşeli parantez içinde kalan ifadeler düzen parametresinin genlik dalgalanmalarından, diğerleri ise faz dalgalanmalarından dolayı meydana gelen terimlerdir. Bu ifadelerden görüldüğü gibi, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ iken üç boyutlu sistemde korelatör sonlu bir değere gitmektedir. Fakat bir ve iki boyutta bu korelatörün değeri $R \rightarrow \infty$ iken sıfır olmaktadır. Bu da bir ve iki boyutlu sistemlerde sonlu sıcaklıkta faz dönüşümünün olmadığı anlamına gelmektedir. Dikkat etmek gerekir ki bir ve iki boyutlu sistemlerde KDUMD'in bozulma nedeni süperiletkenin düzen parametresi fazının güçlü dalgalanmalarıdır. Tabi ki düzen parametresinin mutlak değerinin dalgalanmalarının önemine de dikkat etmek gerekir. Fakat bu dalgalanmalar, ister kritik sıcaklığın üstünde, isterse altında olsun, kritik sıcaklığın çok yakın civarında önem kazanmaktadır. Faz dalgalanmaları süperiletkenin kinetik ve termodinamik özelliklerini oldukça etkilemekte olup, ortalama alan teorisinin sonuçlarını, Aslamazov-Larkin [55] ve Maki-Thomson [56-58] düzeltmeleri ile iyileştirmek mümkündür. Aynı şekilde düzen parametresinin mutlak değerinin dalgalanmaları 2. tür süperiletkenlerde Shubnikov fazında da önem kazanmaktadır [59].

İlk olarak Josephson jonksiyonlarında faz dalgalanmalarının önemini Anderson ileri sürmüştür [60]. Anderson, Josephson bağlı iki süperiletkenden

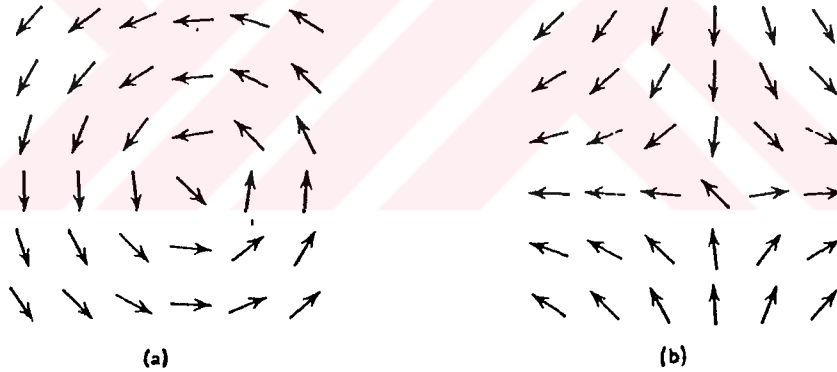
oluşmuş sistemde süperiletkenlerin yüklenmesi dolayısıyla faz dalgalanmalarının olacağını göstermiştir. Böyle faz dalgalanmaları süperiletkenler arasında düzen parametresinin fazının koherentliğini bozarak kritik sıcaklığın düşmesine neden olmaktadır. Daha sonra bu faz dalgalanmalarının, aralarında Josephson bağı olan, küçük granüllerden oluşmuş süperiletkenlerde de çok önemli olabileceği Abeles [61] tarafından ileri sürülmüştür. Faz dalgalanmalarının periyodik olarak dizilmiş granüllerden oluşmuş 2 ve 3 boyutlu süperiletkenlerde kritik sıcaklığa ve diğer fiziksel özelliklere etkisi birçok fizikçi tarafından ortalama alan teorisi metodları kullanılarak incelenmiştir [61-67]. Bu arada bazı ilginç teorik çalışmalar da ortaya konmuştur. Örneğin Simánek [68] ortalama alan teorisini kullanarak granül bir süperiletkende, düzen parametresinin fazının $-\infty < \phi < \infty$ arasında değişmesine izin verildiğinde, sistemde düşük sıcaklıklarda süperiletkenlikten normal metale geri bir faz geçişinin olacağını göstermiştir. Bunun fiziksel nedeni olarak da, uyarılmış durumda, düzen parametresinin fazının serbestçe istediği açı değerini alabileceğini söylemiştir. Bu problemde henüz ortak bir görüşe ulaşılmamış olup, tartışmalar devam etmektedir.

Son zamanlarda bulunmuş olan YSS'lerde tabakalar arasında Josephson bağlarının olma varsayımı [46,47], bu süperiletkenlerde de yüklenme dolayısıyla faz dalgalanmalarının hem KDUMD'e hem de kritik sıcaklığa etki edeceğini göstermektedir. Josephson bağlı tabakalı süperiletkenlerde yüklenmenin (veya faz dalgalanmalarının) etkisinin büyük olması için her bir kapasitenin değeri küçük olmalıdır. Josephson bağlı tabakalı sistemlerde faz dalgalanmalarının kritik sıcaklığa etkisini kendi kendisiyle tutarlı harmonik yaklaşım yöntemini kullanarak hesaplanmıştır [69]. Hesaplamalar süperiletken tabakalar arasında Josephson enerjisinin faz dalgalanmaları dolayısıyla renormalize olacağını göstermektedir. Bir tabakanın süperiletkenlik durumuna geçişini gösteren ve BCS teorisiyle verilen $T_c^{(2)}$ sıcaklığından küçük öyle bir T_c^* sıcaklığı vardır ki, bu sıcaklıkta faz dalgalanmaları dolayısıyla tabakalar arasındaki eş fazlılık bozulmaktadır. Fakat granüler sistemlerden farklı olarak Josephson bağlı tabakalı sistemlerde süperiletken fazının, yüklenmenin hiç bir sonlu değerinde bozulmayacağını göstermek mümkündür [69]. Bu da Josephson bağlı tabakalı süperiletkenlerde süperiletken fazdan normal metal faza dönüşümün (reentrance)

olmayacağını göstermektedir.

1.3 Topolojik Kusurlar

Mermin ve Wagner'in gösterdiği gibi [70], iki boyutta, spinin vektör bileşeninin 2'den büyük olduğu durumda kısa menzilli etkileşimler, herhangi bir sıcaklıkta, uzaysal uzun menzilli düzen (UMD) kuramazlar. Yani dış alanın sıfıra gittiği durumda sistemin toplam manyetik momenti sıfır olacaktır. 1971'de Berezinskii [71], 1972'de Kosterlitz ve Thouless (KT) [72] spinlerin sürekli değer alabildiği iki boyutlu bir sistemde, belli bir kritik sıcakta ($T = T_{KT}$) başka bir tür faz değişimi olabileceğini ortaya koymuşlardır. Quasi düzenli fazın olduğu $T < T_{KT}$ sıcaklığında toplam manyetik moment gene sıfır olmakta, yani spin-spin uzaysal UMD gene varolmamaktadır. Ancak T_{KT} sıcaklığında sistemde



Şekil 1.4 Girdaplılığın a) +1 ve b) -1 olduğu iki konfigürasyon

niteliksel bir değişiklik olmakta ve statik manyetik duygunluk ıraksamaktadır. Böyle bir sistem, örneğin XY modeli, daha dikkatli incelendiğinde, faz geçişi olurken spinlerin girdaplar (topolojik kusurlar) oluşturacağı görülebilir (Bkz. Şekil 1.4). Girdap etrafında bir kapalı çevre üzerinde gidildiğinde, spinlerin açılarının değişimi $2m\pi$ (m : tam sayı) olmaktadır. Bu kapalı yol üzerinde bir spinden komşu bir spine giderken, spin yönleminin küçük bir dönme yapacağı ve atılan tur sonunda başladığımız spine geri döneceğimiz açıktır. Spinlerin

yönlenimi artık rasgele dağılım göstermemekte, girdaplar etrafında belli bir dizilişe sahip olmaktadır. Spinlerin bu düzeni topolojik düzen olarak adlandırılır. Her girdap spinlerin yönlemine göre + veya - girdaplılığa (vorticity) sahip olacaktır. Kritik sıcaklığın altında + ve - girdaplar bağlı çiftler oluştururken, kritik sıcaklığın üstünde girdaplar serbest hale geçmektedirler. İki boyutlu Coulomb gazında da $T < T_{KT}$ için + ve - yükler bağlı duruma geçip dipol oluşturmakta, $T > T_{KT}$ için ise yükler serbest olmaktadır. İki boyutlu süperiletkenlerde de bu tür topolojik kusurların varolacağı öngörülmüştür [73-75].

İki boyutlu süperiletkenlerde $T_{KT} < T < T_c^{(2)}$ aralığında serbest girdapların olmasının, direncin sıcaklıkla eksponansiyal olarak azalmasına ve $T < T_{KT}$ sıcaklığında lineer olmayan akım-gerilim bağıntısına neden olacağı teorik olarak gösterilmiş [74-76] ve deneyde gözlenmiştir [77-79].

Quasi 2 boyutlu süperiletkenlerde tabakalar arasında lineer olmayan Josephson bağının olması yeni topolojik kusurların oluşmasına neden olmaktadır [80-82]. Tabakalı süperiletkenlerde her bir tabakada noktasal KT tipi kusurlarla beraber, tabakalar arasında kapalı çember şekilli yeni kusurlar (fluksonlar) oluşacaktır [81]. Böyle kusurların oluşması genellikle süperiletkenin kritik sıcaklığına ve fiziksel özelliklerine etkisi olacaktır [83]. Şu aşamada topolojik kusurların tabakalı süperiletkenlerin fiziksel özelliklerine etkisi tam olarak aydınlığa kavuşmamıştır. Örneğin süperiletken bir tabaka içinde oluşan KT tipi noktasal kusurların tabakalar arası bağın sonlu bir değerinde mi yoksa istenilen küçük değerinde mi kaybolacağı açıklığa kavuşmamıştır.

Tez dört bölümden oluşmuştur. İlk bölüm genel bilgilerin verildiği girişe ayrılmış, ikinci bölümde ise Josephson bağlı quasi iki boyutlu süperiletkenlerde tabakalar arası çiftlenmelerin kritik sıcaklığa ve üst kritik manyetik alana etkisi incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise tabakalı süperiletkenlerde kuantum faz dalgalanmalarının kritik sıcaklığa etkisi araştırılmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar sıralanmıştır.

Bölüm 2

Tabakalı süperiletkenlerde Ginzburg-Landau serbest enerji fonksiyonelinin mikroskopik incelenmesi: Tabaka içi ve tabakalar arası Cooper çiftlenmesi

Yüksek sıcaklık süperiletkenlerin (YSS) bulunmasıyla süperiletken kristallerin anizotropisinden kaynaklanan fiziksel özelliklerin incelenmesi geniş bir araştırma konusu olmuştur. Deneyler sonucu kristal anizotropinin maddenin makroskopik özelliklerini önemli ölçüde etkilediği ortaya çıkmıştır. YSS'lerin enerji aralığı kristal yönlenime göre büyük farklılıklar göstermektedir [84-89]. Bu tür sonuçlar süperiletken enerji aralığının simetrisinin ne olduğu sorusunu da beraberinde getirmektedir. Tabakalı süperiletkenlerin ilk teorilerinde BCS teorisinde olduğu gibi her tabakada küresel simetrik dalga fonksiyonuna sahip Cooper çiftlerinin olduğu önerilmişti [43-45]. Elektron çiftlerinin tabakalar arası zayıf bir tünellemeye sahip olmaları, faz dalgalanmaları sonucu bozulabilecek uzun erimli düzeninin bozulmasını engellemektedir. Tabakalar arası çekici bir potansiyel anizotropik bir enerji aralığına neden olabilir [31-39]. Son zamanlardaki incelemeler, elektron çiftlerinin d-dalga simetrisine sahip olduğu durumda da enerji aralığının anizotropik ve momentuma bağlı olduğunu göstermiştir [90,91]. Bu tür d-çiftlenmesinin karışık valans elektronları olan ağır metallere özgü olmasına rağmen, YSS'lerde de bu mekanizmanın gerçekleşebileceği düşünülmektedir. YSS'lerin BCS teorisi ile uyum sağlamayan bir başka özelliği de, H_{c2} 'nin lineer olmayan davranışdır. BCS teorisine göre H_{c2} kritik sıcaklık civarında lineer olarak değişmektedir ve bu tür davranış geleneksel süperiletkenlerin çoğunda gözlenmektedir. Fakat YSS'lerde H_{c2} kritik sıcaklık civarında yukarı kavis göstermektedir. YSS'lerde görülen bu farklılıkları açıklayabilmek için yapısal anizotropiyi göz önüne almak şart olmaktadır.

YSS'lerin yapısal anizotropisi yüzünden elektronların tabaka içi hareketi band yapısıyla tasvir edilirken, tabakalara dik yöndeki hareketleri sıkı bağlama yaklaşımıyla ifade edilebilir. Birim hücresinde bir tabaka bulunan bir sistemin band yapısı aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\varepsilon(\mathbf{p}, p_z) = \frac{p^2}{2m_{\parallel}} + t_{\perp}[1 - \cos(p_z d)] \quad (2.1)$$

Burada $t_{\perp}$ tünelleme integrali, $m_{\parallel}$ tabaka boyunca etkin kütleyi, d ise tabakalar arası uzaklığı göstermektedir. Tek elektron bandının anizotropisi $\frac{t_{\perp}}{\varepsilon_F} \ll 1$ parametresiyle karakterize edilmektedir. Elektronların tabaka içi durumunu veren $\hat{H}_0$ ve en yakın komşu tabakalar arası geçişleri gösteren $\hat{H}_{\perp}$ terimlerinin ifadeleri şöyle olacaktır:

$$\hat{H}_0 = \sum_{j,\sigma} \int d^2r \left\{ \Psi_{j,\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, j) \right)^2 - \varepsilon_F \right] \Psi_{j,\sigma}(\mathbf{r}) \right\} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{t_{\perp}} = \frac{t_{\perp}}{2} \sum_{j,\sigma} \int d^2r \left[\Psi_{j,\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{j+1,\sigma}(\mathbf{r}) \exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{jd}^{(j+1)d} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi \right) \right. \\ \left. + h.c. \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vektör potansiyelin tabakalara paralel ve dik bileşenleri sırasıyla $\mathbf{A}$ ve A_z olacaktır. Tabakalı süperiletkenlerde hangi tip çiftlenmelerin olabileceğini görmek için standart ikili etkileşme Hamiltoniyeni göz önüne alınacaktır:

$$\begin{aligned} H_{int} = \sum_{\alpha,\beta} \int dz \int dz' \int d^2r \int d^2r' \Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}, z) \Psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}', z') \\ \times V_{z,z'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{\beta}(\mathbf{r}', z') \Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Yukarıda $\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}, z)$ spini α olan, tabaka içinde $\mathbf{r}$ ve c-yönünde z koordinatıyla tanımlı bir elektron yaratma operatörüdür. Bu Hamiltonyende z koordinatından tabaka dizisini gösteren n ayrık değişkenine, $\Psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}, z)$ operatörünün $w_n(z)$ Wannier fonksiyonları cinsinden bir açılımıyla geçmek mümkündür:

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{r}, z) = \sum_n w_n(z) \Psi_{n,\alpha}(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

Bunu yukarıda yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\substack{n_1,n_2 \\ n_3,n_4}} \int d^2r \int d^2r' \Psi_{n_1,\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{n_2,\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \\ \times V_{n_1,n_2}^{n_3,n_4}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{n_3,\beta}(\mathbf{r}') \Psi_{n_4,\alpha}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

elde edilir. Burada potansiyelin matris elemanları için

$$V_{n_1,n_2}^{n_3,n_4}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dz' w_{n_1}^*(z) w_{n_2}^*(z') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') w_{n_3}(z') w_{n_4}(z) \quad (2.7)$$

eşitliği sağlanmaktadır. İndislerin aldığı çeşitli değerlere göre ortaya çıkan terimler şöyle olacaktır:

a) $n_1 = n_4, n_2 = n_3$ ve $V_{n_1,n_2}^{n_3,n_4} = V_{n_1,n_2} \delta_{n_1,n_4} \delta_{n_2,n_3}$. Eğer $n_1 = n_2 = n$ ise tabaka içi etkileşme potansiyeli $V_{nn} = V_0$ elde edilir. Eğer $n_2 = n_1 \pm 1$ olursa tabaka arası etkileşme potansiyeli $V_{n,n\pm 1} \equiv V_1$ olarak adlandırılacaktır. Tabakalı sistemlerdeki en önemli etkileşmenin tabaka içi etkileşme olduğu beklenmektedir. Ancak tabakalar arası çiftlenim süperiletkenlerin fiziksel özelliklerini önemli ölçüde değiştirebilir. Saçılmadan önce farklı tabakalarda bulunan iki elektronun saçıldıktan sonra gene aynı tabakalarda kaldığı etkileşme en önemli tabakalar arası etkileşim (bağlanma sabiti V_1) olacaktır. Tabaka içi

etkileşme dışında bu tür tabaka arası bir etkileşimin, özellikle T_c 'nin artması üzerine etkileri, bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [31-39]. Bu iki terimi birden kapsayacak bir ifadeyi aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{(1)} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l \\ \sigma,\sigma'}} \int d^2r \int d^2r' \Psi_{j,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{l,\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \\ & \times V_{j,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{l,\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{j,\sigma}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

b) $n_1 = n_3, n_2 = n_4$ ve $V_{n_1,n_2}^{n_3,n_4} = \tilde{V}_{n_1,n_2} \delta_{n_1,n_3} \delta_{n_2,n_4}$. Bu terim değiş tokuş türü bir etkileşmeyi belirtmektedir [35-37].

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{(2)} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l(\neq j) \\ \sigma,\sigma'}} \int d^2r \int d^2r' \Psi_{j,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{l,\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \\ & \times \tilde{V}_{j,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{j,\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{l,\sigma}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

c) $n_1 = n_2, n_3 = n_4$ ve $V_{n_1,n_2}^{n_3,n_4} = \tilde{\tilde{V}}_{n_1,n_2} \delta_{n_1,n_3} \delta_{n_2,n_4}$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{(3)} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,l(\neq j) \\ \sigma,\sigma'}} \int d^2r \int d^2r' \Psi_{j,\sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{j,\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \tilde{\tilde{V}}_{j,l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ & \times \Psi_{l,\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{l,\sigma}(\mathbf{r}) \exp \left(-\frac{i2e}{\hbar c} \int_{jd}^{ld} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bu terim saçılma sonucu bir elektron çiftinin bir tabakadan başka bir tabakaya geçtiği etkileşmeyi göstermektedir. Tünelleme integrali sıfıra giderken köşegen dışı uzun erim düzeni sağlayan band arası saçılma bu tür bir terime neden olabilir [92].

d) $n_1 = n_2 = n_3, n_1 = n_2 = n_4$ ve

$V_{n_1, n_2}^{n_3, n_4} = \bar{V}_{n_1, n_4} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_3, n_1} + \bar{V}_{n_1, n_3} \delta_{n_1, n_2} \delta_{n_4, n_1}$. Böyle bir terim Bulaevskii ve Zyskin [37] tarafından incelenmiş ve bunun enerji aralığının anizotropisine önemli bir katkıda bulunduğu ortaya çıkmıştır. Bu terim aynı tabakada bulunan iki elektrondan birinin saçıldıktan sonra başka bir tabakaya geçmesini veya komşu iki tabakada bulunan elektronların aynı tabakaya geçmelerini belirtmektedir.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int}^{(4)} = & \frac{1}{2} \sum_{\substack{j, l (\neq j) \\ \sigma, \sigma'}} \int d^2 r \int d^2 r' \left\{ \Psi_{j, \sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{j, \sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \right. \\ & \times \bar{V}_{j, l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{j, \sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{l, \sigma}(\mathbf{r}) \exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{jd}^{ld} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi \right) \\ & + \Psi_{j, \sigma}^\dagger(\mathbf{r}) \Psi_{j, \sigma'}^\dagger(\mathbf{r}') \bar{V}_{j, l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Psi_{l, \sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{j, \sigma}(\mathbf{r}) \\ & \left. \times \exp \left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{jd}^{ld} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi \right) + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Yukarıda yazılan bütün terimler göz önüne alındığında tabakalı bir yapı için aşağıdaki gibi genel bir Hamiltoniyen yazılabilir:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\perp + \hat{H}_{int}^{(1)} + \hat{H}_{int}^{(2)} + \hat{H}_{int}^{(3)} + \hat{H}_{int}^{(4)} \quad (2.12)$$

Çekici e-e etkileşmesinin mikroskopik nedeni belirtilmeden çiftlenim potansiyelleri aşağıdaki gibi seçilecektir:

$$V_{j, l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = [V_0 \delta_{j, l} + V_1 (\delta_{j, l+1} + \delta_{j, l-1})] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (2.13)$$

$$\tilde{V}_{j, l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \tilde{V}_1 (\delta_{j, l+1} + \delta_{j, l-1}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (2.14)$$

$$\tilde{\tilde{V}}_{j, l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \tilde{\tilde{V}}_0 (\delta_{j, l+1} + \delta_{j, l-1}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (2.15)$$

$$\bar{V}_{j, l}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = V_{01} (\delta_{j, l+1} + \delta_{j, l-1}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (2.16)$$

Tabaka içi çiftlenim potansiyeli BCS teorisindeki gibi olup, noktasal etkileşmeye sahiptir. Ancak tabakalar arası etkileşimin mikroskopik kaynağı

belirtilmemiştir. Tabakalar arasında olduğu düşünölen dielektriğin kutuplanması sonucu bir çiftlenim meydana gelebilir [40]. Tabakalar arası tek elektron tünelleme integrali $t_{\perp}$ sıfıra gittiği durumda bile V_1 ve $\tilde{V}_1$ türü etkileşmelerin olabilmesi mümkündür.

Serbest enerjinin ifadesi ile sistemin kritik sıcaklığının bulunması ve manyetik özelliklerinin belirlenmesi bu bölümde ana amacımız olacaktır. Serbest enerji fonksiyonelinin ifadesi bulunurken Gorkov Nambu mikroskopik teorisi [93] kullanılacaktır. Normal $G_{j,j'}^{\alpha\beta}(x, x')$ ve anormal $F_{j,j'}^{\alpha\beta}(x, x')$ Green fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} G_{j,j'}^{\alpha\beta}(x, x') &= - \langle T_{\tau}[\psi_{j,\alpha}(x)\psi_{j',\beta}^{\dagger}(x')] \rangle \\ &= - \langle T_{\tau}[\psi_{j,\alpha}(\mathbf{r})\psi_{j',\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}')] \rangle \theta(t - t') \\ &\quad + \langle T_{\tau}[\psi_{j',\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}')\psi_{j,\alpha}(\mathbf{r})] \rangle \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} F_{j,j'}^{\alpha\beta}(x, x') &= \langle T_{\tau}[\psi_{j,\alpha}(x)\psi_{j',\beta}(x')] \rangle \\ &= \langle T_{\tau}[\psi_{j,\alpha}(\mathbf{r})\psi_{j',\beta}(\mathbf{r}')] \rangle \theta(t - t') \\ &\quad - \langle T_{\tau}[\psi_{j',\beta}(\mathbf{r}')\psi_{j,\alpha}(\mathbf{r})] \rangle \theta(t' - t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Düzen parametresi ise aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\Delta_i^*(\mathbf{r}; j, j+i) = |V_i|T \sum_{\omega} F_{j,j+i}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) \quad (2.19)$$

Bu ifadelerde $x = \{\mathbf{r}, \tau\}$ ve $\mathbf{r}$ koordinatı, τ ise sanal “zaman”ı belirtmekte olup, T_{τ} zaman düzenleme operatörüdür. Heisenberg tasvirinde $\Psi_{j,j'}(x)$ operatörü için hareket denklemi yazılarak bu ifade yardımıyla normal ve anormal Green fonksiyonları için denklemler elde etmek mümkündür. Sistemde spine bağı bir etkileşme olmadığı durumda

$$\begin{aligned} G_{ij}^{\alpha,\beta}(x - x') &= \delta_{\alpha,\beta} G_{ij}(x - x') \\ F_{ij}^{\dagger \alpha,\beta}(x - x') &= \delta_{\alpha,-\beta} F_{ij}^{\dagger}(x - x') \end{aligned} \quad (2.20)$$

eşitlikleri geçerli olacağından Green fonksiyonlarının sağladığı denklemlerde spin indisleri α ve β 'ya olan açık bağıllık ortadan kalkacaktır. Bu değerlendirmeler altında spin-singlet çiftlenim durumunda Green fonksiyonları için aşağıdaki denklemler elde edilir $[\phi(j, l) = -\frac{ie}{\hbar c} \int_j^l A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi]$:

$$\begin{aligned}
 & \left[-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, j) \right)^2 + \varepsilon_F \right] G_{j,j'}(x, x') \\
 & - \frac{t_\perp}{2} \left[e^{\phi(j,j+1)} G_{j+1,j'}(x, x') + e^{\phi(j,j-1)} G_{j-1,j'}(x, x') \right] \\
 & + V_0 F_{j,j}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') + V_1 \left[F_{j,j+1}(0^+) F_{j+1,j'}^\dagger(x, x') + F_{j,j-1}(0^+) F_{j-1,j'}^\dagger(x, x') \right] \\
 & + \tilde{V}_1 \left[F_{j+1,j}(0^+) F_{j+1,j'}^\dagger(x, x') + F_{j-1,j}(0^+) F_{j-1,j'}^\dagger(x, x') \right] \\
 & + \tilde{V}_0 \left[e^{2\phi(j,j-1)} F_{j-1,j-1}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') + e^{2\phi(j,j+1)} F_{j+1,j+1}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') \right] \\
 & + V_{01} \left[e^{\phi(j,j+1)} F_{j,j+1}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') + e^{\phi(j,j-1)} F_{j,j-1}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') + \right. \\
 & \quad e^{\phi(j,j+1)} F_{j+1,j}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') + e^{\phi(j,j-1)} F_{j-1,j}(0^+) F_{j,j'}^\dagger(x, x') + \\
 & \quad e^{\phi(j+1,j)} F_{j,j}(0^+) F_{j+1,j'}^\dagger(x, x') + e^{\phi(j-1,j)} F_{j,j}(0^+) F_{j-1,j'}^\dagger(x, x') + \\
 & \quad \left. e^{\phi(j,j-1)} F_{j-1,j-1}(0^+) F_{j-1,j'}^\dagger(x, x') + e^{\phi(j,j+1)} F_{j+1,j+1}(0^+) F_{j+1,j'}^\dagger(x, x') \right] \\
 & = \delta_{j,j'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, j) \right)^2 - \varepsilon_F \right] F_{j,j'}^\dagger(x, x') \\
 & + \frac{t_\perp}{2} \left[e^{-\phi(j,j+1)} F_{j+1,j'}^\dagger(x, x') + e^{-\phi(j,j-1)} F_{j-1,j'}^\dagger(x, x') \right] \\
 & + V_0 F_{j,j}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') + V_1 \left[F_{j,j+1}^\dagger(0^+) G_{j+1,j'}(x, x') + F_{j,j-1}^\dagger(0^+) G_{j-1,j'}(x, x') \right] \\
 & + \tilde{V}_1 \left[F_{j+1,j}^\dagger(0^+) G_{j+1,j'}(x, x') + F_{j-1,j}^\dagger(0^+) G_{j-1,j'}(x, x') \right] \\
 & + \tilde{V}_0 \left[e^{-2\phi(j,j-1)} F_{j-1,j-1}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') + e^{-2\phi(j,j+1)} F_{j+1,j+1}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') \right] \\
 & + V_{01} \left[e^{-\phi(j,j+1)} F_{j,j+1}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') + e^{-\phi(j,j-1)} F_{j,j-1}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') + \right. \\
 & \quad e^{-\phi(j,j+1)} F_{j+1,j}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') + e^{-\phi(j,j-1)} F_{j-1,j}^\dagger(0^+) G_{j,j'}(x, x') + \\
 & \quad e^{-\phi(j+1,j)} F_{j,j}^\dagger(0^+) G_{j+1,j'}(x, x') + e^{-\phi(j-1,j)} F_{j,j}^\dagger(0^+) G_{j-1,j'}(x, x') + \\
 & \quad \left. e^{-\phi(j,j-1)} F_{j-1,j-1}^\dagger(0^+) G_{j-1,j'}(x, x') + e^{-\phi(j,j+1)} F_{j+1,j+1}^\dagger(0^+) G_{j+1,j'}(x, x') \right] \\
 & = \delta_{j,j'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Birbirine bağılı bu iki denklemin analitik çözümünü elde etmenin zorluğu göz önüne alındığında, bazı yaklaşımların yapılması kaçınılmaz olmaktadır. Etkileşmelerin olmadığı durumda yazılan Green fonksiyonu denkleminin çözülmesiyle elde edilecek olan “yalın” Green fonksiyonunun yardımıyla yukarıdaki denklemler daha baş edilebilir hale getirilebilir. Yalın Green fonksiyonunun sağladığı denklem şöyle olacaktır:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, j) \right)^2 + \varepsilon_F \right] G_{j,j'}^0(x, x') - \frac{t_\perp}{2} \left[e^{\phi(j,j+1)} G_{j+1,j'}^0(x, x') + e^{\phi(j,j-1)} G_{j-1,j'}^0(x, x') \right] = \delta_{j,j'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.23)$$

Dış manyetik alanın olmadığı durumda ($\mathbf{A}, A_z = 0$) (2.23) denkleminin aşağıdaki gibi tanımlı Fourier dönüşümü alınır

$$G_{jj'}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int_{-\frac{\pi}{d}}^{\frac{\pi}{d}} \frac{dp_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-ip_z(j-j')d} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} G^0(\mathbf{p}, p_z) \quad (2.24)$$

yalın Green fonksiyonunun momentum uzayındaki ifadesi elde edilir.

$$G^0(\mathbf{p}, p_z | \omega_\nu) = \frac{1}{i\omega_\nu - \xi_p - t_\perp \cos(p_z d)} \quad (2.25)$$

Bu ifadede $\omega_\nu = \pi T(2\nu + 1)$ Matsubara frekansını, T sıcaklığı göstermekte olup $\nu = 0, \pm 1, \dots$ tam sayı değerleri almaktadır. Fermi hızı ve Fermi momentumu sırasıyla v_F ve p_F ile gösterilmekte olup lineerleştirilmiş enerji değişkeni $\xi_p = v_F(|p| - p_F)$ olacaktır. Tabaka-momentum uzayına geçmek için ise aşağıdaki gibi bir dönüşümü kullanmak gerekecektir:

$$G_{jj'}^0(\mathbf{p}, \omega_\nu) = \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \frac{dp_z}{2\pi} G^0(\mathbf{p}, p_z | \omega_\nu) e^{ip_z(j-j')d} \quad (2.26)$$

Tabakalı süperiletkenlerde tabakalar arasında Josephson bağlarının oluşması için $t_{\perp} < k_B T_c^{(0)} < \varepsilon_F$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu durumda yalın Green fonksiyonu $G_{j-j'}^0(\mathbf{p}|\omega_{\nu})$ tabaka-momentum uzayında, tabakalar arası mesafeyle azalacaktır. Kritik sıcaklık civarında bu Green fonksiyonunu $t_{\perp}/kT$ parametresine göre seriye açmak mümkün olacaktır.

$$G_{j-j'}^0(\mathbf{p}|\omega_{\nu}) = \left[\frac{1}{2} t_{\perp} g^0(\mathbf{p}|\omega_{\nu}) \right]^{|j-j'|} g^0(\mathbf{p}|\omega_{\nu}) + O \left(\left(\frac{1}{2} t_{\perp} g^0 \right)^{|j-j'|+2} \right) \quad (2.27)$$

Bu ifadede $g^0(\mathbf{p}|\omega_{\nu})$ iki boyutlu elektron için yalın Green fonksiyonu olup ifadesi (2.25) denkleminde $t_{\perp} = 0$ durumuna karşılık düşmektedir:

$$g^0(\mathbf{p}|\omega_{\nu}) = \frac{1}{i\omega_{\nu} - \xi_p} \quad (2.28)$$

İleride $G_{j-j'}^0(\mathbf{p}, \omega_{\nu})$ yerine bu açılım kullanılacaktır.

Daha önce yazılan düzen parametresi denklemi (2.19) göz önüne alındığında, her bir etkileşme potansiyeli için bir düzen parametresi var olduğundan, elimizde beş adet denklem olacaktır. Her ne kadar bu beş denklemi çözmek mümkünse de hesaplamaları çok daha basitleştirecek olan iki tane etkin düzen parametresi tanımlamak, böylece yalnızca iki düzen parameteresi denklemi çözmek mümkündür:

$$\begin{aligned} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) &= T \sum_{\omega_{\nu}} \left\{ |V_0| F_{j,j}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) \right. \\ &+ e^{2\phi(j+1,j)} |\tilde{V}_0| F_{j+1,j+1}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) + e^{2\phi(j-1,j)} |\tilde{V}_0| F_{j-1,j-1}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) \\ &\left. + 2e^{\phi(j+1,j)} |V_{01}| F_{j,j+1}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) + 2e^{\phi(j-1,j)} |\tilde{V}_0| F_{j-1,j}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) \right\} \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) &= T \sum_{\omega_{\nu}} \left\{ |V_1| F_{j,j+1}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) + |\tilde{V}_1| F_{j,j+1}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) \right. \\ &\left. + e^{\phi(j,j+1)} |V_{01}| F_{j,j}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) + e^{\phi(j+1,j)} |V_{01}| F_{j+1,j+1}^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}|\omega_{\nu}) \right\} \quad (2.30) \end{aligned}$$

Denklem (2.29)'da görüldüğü gibi $\Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j)$ hem tabaka içi etkileşme potansiyeli V_0 'ı hem de tabakalar arası potansiyelleri olan $|\tilde{V}_0|$ ve $|\tilde{V}_{01}|$ 'i içermektedir. Diğer düzen parametresi $\Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j+1)$ ise $|V_1|$, $|\tilde{V}_1|$ ve V_{01} potansiyelli terimlere sahiptir. Yukarıdaki tanımlar yardımıyla denklem (2.21) ve (2.22) aşağıdaki gibi integro-diferensiyal denklemlere dönüştürülebilirler:

$$\begin{aligned} G_{j,j'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\omega_\nu) &= G_{j,j'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\omega_\nu) - \sum_i \int d^2r_1 G_{j,i}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1|\omega_\nu) \\ &\times \left\{ \Delta_{00}(\mathbf{r}_1; i, i) F_{ij}^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'|\omega_\nu) + \Delta_{01}(\mathbf{r}_1; i, i+1) F_{i+1,j'}^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'|\omega_\nu) \right. \\ &\left. + \Delta_{01}(\mathbf{r}_1; i-1, i) F_{i-1,j'}^\dagger(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'|\omega_\nu) \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} F_{jj'}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\omega_\nu) &= \sum_i \int d^2r_1 G_{j,i}^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}|\omega_\nu) \{ \Delta_{00}^*(\mathbf{r}_1; i, i) G_{ij'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'|\omega_\nu) \\ &+ \Delta_{01}^*(\mathbf{r}_1; i, i+1) G_{i+1,j'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'|\omega_\nu) \\ &+ \Delta_{01}^*(\mathbf{r}_1; i-1, i) G_{i-1,j'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'|\omega_\nu) \} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Düzen parametrelerinin sağladığı denklemleri elde etmek için denklem (2.31)'i denklem (2.32)'nin içine yerleştirmek ve (2.29) ve (2.30)'de kullanılan tanımları kullanmak gerekir. Yalın Green fonksiyonu tabakalar arası mesafe $|j - j'|$ arttıkça azalacağı için $t_\perp$ 'e göre ikinci mertebeye kadar olan terimlerin hesaba katılması yeterli olacaktır. Bunların sonucunda lineer yaklaşımda düzen parametreleri için şu denklemler elde edilecektir:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j)}{|\tilde{V}_0| + 2|\tilde{V}_{01}|} &= \left(K_{00}^0 + 2K_{11}^0 + \frac{8K_{01}^0|\tilde{V}_{01}|}{|\tilde{V}_0| + 2|\tilde{V}_{01}|} \right) \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) \\ &- \frac{K_{00}^0|\tilde{V}_0| + K_{11}^0|\tilde{V}_0| + 2K_{01}^0|\tilde{V}_{01}|}{|\tilde{V}_0| + 2|\tilde{V}_{01}|} \left[2\Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) \right. \\ &\left. - e^{2\phi(j,j+1)} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j+1, j+1) - e^{2\phi(j-1,j)} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j-1, j-1) \right] \\ &+ \left(K_{01}^0 + \frac{K_{00}^0|\tilde{V}_{01}|}{|\tilde{V}_0| + 2|\tilde{V}_{01}|} \right) \left[e^{\phi(j+1,j)} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) + e^{\phi(j-1,j)} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j-1, j) \right] \\ &+ K_{00}^1 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, z) \right)^2 \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1)}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} &= \left(K_{00}^0 - 3K_{11}^0 - 2K_{02}^0 - \frac{8K_{01}^0 |V_{01}|}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} \right) \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \\
&- \left(K_{11}^0 + K_{02}^0 + 2K_{01}^0 \frac{|V_{01}|}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} \right) \left[2\Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \right. \\
&- \left. e^{2\phi(j+2, j+1)} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j+1, j+2) - e^{2\phi(j-1, j)} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j-1, j) \right] \\
&+ \left(K_{01}^0 + \frac{(K_{00}^0 + K_{11}^0) |V_{01}|}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} \right) \left[e^{\phi(j+1, j)} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j+1, j+1) + e^{\phi(j+1, j)} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) \right] \\
&+ K_{00}^1 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, z) \right)^2 \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) + \dots
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Yukarıdaki denklemler Gorkov denklemleri olarak adlandırılır. Denklem (2.33) ve (2.34)'i elde ederken, Green fonksiyonunun manyetik alana olan bağılılığı quazi klasik yaklaşımla ele alınmıştır [94]:

$$G_{j,j'}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{j-j'}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{j',d}^{j,d} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi} e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, \chi) d^2 r} \tag{2.35}$$

Manyetik alanın Green fonksiyonuna etkisi eksponansiyelli terimlere taşındığından yalın Green fonksiyonunun alt indisleri tabaka sayıları j ve j' ne ayrı ayrı değil, sadece aralarındaki farka bağlı olacaktır. Bu yüzden bundan sonra alt indis tek bir ayrık değişkenle ($i = |j - j'|$) belirtilecektir. Ayrıca spin-singlet çiftlenim için aşağıdaki gibi bir simetrinin olacağı öngörülmüştür:

$$\Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) = \Delta_{0,-1}^*(\mathbf{r}; j+1, j) \tag{2.36}$$

Denklem (2.33) ve (2.34)'de geçen K_{ij}^a katsayıları ise şöyle tanımlanmıştır:

$$K_{ij}^a = T \sum_{\omega_\nu} \int d^2 r_1 G_i^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_\nu) G_j^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_\nu) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})^{2a}; a = 0, 1 \tag{2.37}$$

$$K_{00}^0 = \nu_0^{2d} \left\{ \ln \left(\frac{2\gamma \omega_D}{\pi T} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{t_\perp}{4k_B T} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{2T}{\omega_D} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\gamma = 1.78 \quad (2.37a)$$

$$K_{11}^0 = \frac{\nu_0^{2d}}{16} \left(\frac{t_\perp}{2k_B T} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{2T}{\omega_D} \right)^2 \right]; \quad (2.37b)$$

$$K_{02}^0 = -\frac{\nu_0^{2d}}{32} \left(\frac{t_\perp}{2k_B T} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{2T}{\omega_D} \right)^2 \right]; \quad (2.37c)$$

$$K_{00}^1 = \frac{\varepsilon_F}{32\pi(k_B T)^2}; \quad (2.37d)$$

$$K_{11}^1 = -\left(\frac{t_\perp}{4k_B T} \right)^2 \frac{\varepsilon_F}{64\pi(k_B T)^2}; \quad (2.37e)$$

$$K_{01}^0 = \frac{\nu_0^{2d}}{8} \left(\frac{t_\perp}{\varepsilon_F} \right) \left[\frac{1}{1 - \mu_\parallel} \tanh \left(\frac{\varepsilon_F}{2k_B T} (1 - \mu_\parallel) \right) - \tanh \left(\frac{\varepsilon_F}{2k_B T} \right) \right] \quad (2.37f)$$

K_{ij}^a katsayılarının hesaplanması Ek A'da verilmiştir. Yukarıda $\nu_0^{2d} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$ iki boyutlu elektron gazının durum yoğunluğudur. Debye sıcaklığı ω_D ile gösterilmekte olup, $\mu_\parallel$ elektron bandının yarı doluluktan sapma miktarıdır, $0 \leq \mu_\parallel \leq 1$. Yarı dolu iki boyutlu elektron gazı $\mu_\parallel = 0$ değerine karşılık gelmektedir. Bu durumda K_{01}^0 sıfır olmaktadır. Bundan sonraki amaç iki düzen parametrelili serbest enerji fonksiyoneli hesaplamaktır. Eğer elimizde serbest enerji fonksiyoneli olsa ve bunun düzen parametrelerine göre varyasyonu alınsaydı Gorkov denklemleri elde edilecekti. O halde öyle bir serbest enerji fonksiyoneli yazılmalı ki bunun varyasyonları bize Gorkov denklemlerini versin. Aşağıdaki gibi bir değişiklikten ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{K_{01}^0 + K_{00}^0 \frac{|V_{01}|}{|V_1| + |V_1|}}{K_{01}^0 + K_{00}^0 \frac{|V_{01}|}{|V_0| + 2|V_0|}} \right]^{1/2} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \quad (2.38)$$

iki düzen parametrelili serbest enerji fonksiyonelinin ifadesi elde edilir:

$$\begin{aligned}
F\{\Delta_{00}, \Delta_{01}\} = & \sum_j \int d^2r \left\{ \alpha_0(T) |\Delta_{00}(\mathbf{r}; j, j)|^2 + \alpha_1(T) |\Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+1)|^2 \right. \\
& + E_\perp^0 \sum_{g \pm 1} \left| \Delta_{00}(\mathbf{r}; j, j) - \exp\left(-\frac{i2e}{\hbar c} \int_{jd}^{(j+g)d} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{00}(\mathbf{r}; j+g, j+g) \right|^2 \\
& + E_\perp^1 \sum_{g \pm 1} \left| \Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+1) - \exp\left(-\frac{i2e}{\hbar c} \int_{jd}^{(j+g)d} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+g) \right|^2 \\
& + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_{00}(\mathbf{r}; j, j) \right|^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+1) \right|^2 \\
& - E_{01} \left[\Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+1) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{jd}^{(j+1)d} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \times \right. \\
& \quad \left[\exp\left(-\frac{i2e}{\hbar c} \int_{(j+1)d}^{jd} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j+1, j+1) - \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) \right] \\
& - \Delta_{00}(\mathbf{r}; j, j) \left[\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{(j+1)d}^{jd} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+1) - \right. \\
& \quad \left. \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{(j-1)d}^{jd} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{01}(\mathbf{r}; j-1, j) \right] + h.c. \left. \right] \\
& - 4E_{01} \left[\exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{jd}^{(j+1)d} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{01}(\mathbf{r}; j, j+1) \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) + \right. \\
& \quad \left. \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c} \int_{(j+1)d}^{jd} A_z(\mathbf{r}, \chi) d\chi\right) \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \Delta_{00}(\mathbf{r}; j, j) \right] \left. \right\} \\
& + \Delta F_4 + \int d^2r \int dz \frac{H^2}{8\pi}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Yukarıdaki serbest enerji fonksiyoneli Ginzburg-Landau fonksiyonelinin Fermi yüzeyi açık olan tabakalı ve iki düzen parametrelili süperiletkenler için genelleştirilmiş şeklidir. Dördüncü mertebeden terimler ΔF_4 ile gösterilmiştir. Kritik sıcaklık civarındaki fiziksel olaylarla ilgilendiğimizden serbest enerji

fonksiyoneline ikinci mertebeden daha yüksek terimlerin katkıları ihmal edilebilir. Düzen parametrelerinin kritik sıcaklık civarındaki davranışlarını veren α katsayıları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\alpha_a &= 4 \frac{(k_B T_{c_a})^2}{\varepsilon_F} \left[\ln \frac{T}{T_{c_a}} + \left(\frac{t_\perp}{4k_B T} \right)^2 \frac{T - T_{c_a}}{T_{c_a}} \right] \\ &\simeq 4 \frac{(k_B T_{c_a})^2}{\varepsilon_F} \left[1 + \left(\frac{t_\perp}{4k_B T_{c_a}} \right)^2 \right] \frac{T - T_{c_a}}{T_{c_a}}; \quad a=0,1\end{aligned}\quad (2.40)$$

Ginzburg-Landau teorisi T_c kritik sıcaklık civarında geçerli olduğu için K_{ij}^a katsayılarının (2.37) ifadelerinde $T = T_c$ yazılabilir. K_{01}^0 ve K_{11}^0 katsayıları $t_\perp/(k_B T_c) \ll 1$ parametresi ile orantılı olduklarından $K_{00}^0 \gg K_{01}^0$ ve $K_{00}^0 \gg K_{11}^0$ şartları sağlanacaktır. Bu halde tabaka içi yerel kritik sıcaklığı

$$\frac{1}{|V_0| + 2|\tilde{V}_0|} = K_{00}^0(T_{c_0}) = \nu_0^{2d} \ln \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\omega_D}{T_{c_0}} \quad (2.41)$$

ifadesi ile, tabaka arası yerel kritik sıcaklığı ise,

$$\frac{1}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} = K_{00}^0(T_{c_1}) = \nu_0^{2d} \ln \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\omega_D}{T_{c_1}} \quad (2.42)$$

eşitlikleri ile belirleneceklerdir ($\gamma = 1.78$). Bu ifadeler doğrultusunda tabaka içi ve arası çiftlenimler için yerel kritik sıcaklıklar aşağıdaki bağıntıları sağlayacaklardır:

$$T_{c_0} = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D \exp \left(- \frac{1}{\nu_0^{2d} (|V_0| + 2|\tilde{V}_0|)} \right) \quad (2.43)$$

$$T_{c_1} = \frac{2\gamma}{\pi} \omega_D \exp \left(-\frac{1}{\nu_0^{2d} (|V_1| + |\tilde{V}_1|)} \right) \quad (2.44)$$

Yukarıda görüldüğü gibi tabakalar arası etkileşim sonucu yerel çiftlenim sıcaklıkları T_{c_0} ve T_{c_1} artmıştır.

Üçüncü ve dördüncü terimlerin katsayıları $E_{\perp}^0$ ve $E_{\perp}^1$ tabaka içi ve arası çiftlerin en yakın komşu tabakalar arasındaki Josephson tünellemesinin şiddetini vermektedir.

$$\begin{aligned} E_{\perp}^0 &= \frac{\hbar^2}{8mK_{00}^1} \left[K_{11}^0 + \frac{K_{00}^0 |\tilde{V}_0| + 2K_{01}^0 |V_{01}|}{|V_0| + 2|\tilde{V}_0|} \right] \\ &= E_{\perp} \left\{ 1 + 64 \nu_0^{2d} |\tilde{V}_0| \left(\frac{k_B T}{t_{\perp}} \right)^2 \ln \left(\frac{\omega_D}{T} \right) \ln \left(\frac{\omega_D}{T_{c_0}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 16 \mu_{\parallel} \nu_0^{2d} |V_{01}| \frac{(k_B T)^2}{t_{\perp} \varepsilon_F} \right\} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} E_{\perp}^1 &= \frac{\hbar^2}{8mK_{00}^1} \left[K_{11}^0 + K_{02}^0 + 2K_{01}^0 \frac{|V_{01}|}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} \right] \\ &= \frac{E_{\perp}}{2} \left\{ 1 + 32 \mu_{\parallel} \nu_0^{2d} |V_{01}| \frac{(k_B T)^2}{t_{\perp} \varepsilon_F} \ln \left(\frac{\omega_D}{T_{c_1}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki $E_{\perp}$ Josephson enerjisi olup, tabakalı süperiletkenlerde sadece tabaka içi çiftlenme olduğu zaman çiftlerin tünelleme enerjilerini vermektedir.

$$E_{\perp} = \frac{t_{\perp}^2}{32\varepsilon_F} \quad (2.47)$$

(2.45) ve (2.46)'den görüldüğü gibi $\tilde{V}_0, V_{01} \rightarrow 0$ olduğu zaman Josephson enerjileri $E_{\perp}^0 \rightarrow E_{\perp}$ ve $E_{\perp}^1 \rightarrow E_{\perp}/2$ değerine gitmekte, bu da tabaka içi (V_0 potansiyeli ile) ve tabakalar arası (V_1 potansiyeli ile) çiftlerin tünelleme enerjilerine karşılık

gelmektedir. Hamiltonyendeki yeni terimler (2.10),(2.11) $E_{\perp}^0$ ve $E_{\perp}^1$ 'in değerini büyölmüştür. Tabaka içi Josephson tünellemenin şiddeti $\tilde{V}_0$ potansiyeli ile önemli oranda artmaktadır. Buna karşılık $E_{\perp}^1$ 'e V_{01} potansiyeli sonucu gelen katkı, 2 boyutlu elektron gazı bandının ortasında ($\mu_{\parallel} \rightarrow 0$) yok olmaktadır.

Serbest enerji fonksiyonelindeki sekizinci terim Lifschitz değişmezidir. Bu terimin katsayısı E_{01} düzen parametrelerinin karışma miktarını vermektedir. İfadesi ise şöyledir:

$$E_{01} = \frac{\hbar^2}{4\sqrt{2}mK_{00}^1} \times \left[\left(K_{01}^0 + K_{00}^0 \frac{|V_{01}|}{|V_0| + 2|\tilde{V}_0|} \right) \left(K_{01}^0 + K_{00}^0 \frac{|V_{01}|}{|V_1| + |\tilde{V}_1|} \right) \right]^{1/2} \quad (2.48)$$

Eğer $V_{01} = 0$ olursa,

$$E_{01} = \frac{\hbar^2 K_{01}^0}{4\sqrt{2}mK_{00}^1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F} \right)^2 t_{\perp} \times \left[\frac{1}{1 - \mu_{\parallel}} \tanh \left(\frac{\varepsilon_F}{2k_B T} (1 - \mu_{\parallel}) \right) - \tanh \left(\frac{\varepsilon_F}{2k_B T} \right) \right] \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Göröldüęü gibi bu durumda bandın ortasında bu katsayı sıfır olmaktadır. Eğer V_{01} sıfırdan farklı olursa E_{01} ifadesi, yarı dolu band durumunda, aşığıdaki hali alacaktır:

$$E_{01} = \frac{\hbar^2 K_{00}^0}{4\sqrt{2}mK_{00}^1} \frac{|V_{01}|}{\sqrt{(|V_0| + 2|\tilde{V}_0|) (|V_1| + |\tilde{V}_1|)}} \\ = 2\sqrt{2} \nu_0^{2d} |V_{01}| \frac{(k_B T)^2}{\varepsilon_F} \left[\ln \frac{\omega_D}{T_{c0}} \ln \frac{\omega_D}{T_{c1}} \right]^{1/2} \quad (2.50)$$

Göröldüęü üzere sistemde V_{01} potansiyeli olursa, E_{01} bandın ortasında bile

sıfırdan farklı bir değer almaktadır. Bu değerlendirmelerden anlaşıldığı gibi V_{01} potansiyelinin varlığı sonucu (2.48) ifadesinde, artık E_{01} 'in band doluluğuna karşı hassasiyeti azalmakta, E_{01} 'in değeri büyümekte, dolayısıyla düzen parametrelerinin etkileşimleri artmaktadır.

2.1 Kritik Sıcaklık

Dış manyetik alan olmadığı durumda kritik sıcaklık, Gorkov denklemlerinin Δ_{00}^* ve Δ_{01}^* için lineer yaklaşımda çözülmesiyle elde edilir:

$$\begin{aligned} & \alpha_0(T) \Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j, j) \\ & + 2E_{\perp} [2\Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j, j) - \Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j+1, j+1) - \Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j-1, j-1)] \\ & - 2E_{01} [\Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j, j+1) + \Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j-1, j)] = 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1(T) \Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j, j+1) \\ & + 2E_{\perp} [2\Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j, j+1) - \Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j+1, j+2) - \Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j-1, j)] \\ & - 2E_{01} [\Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j, j) + \Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j+1, j+1)] = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Düzen parametrelerinin türevleri ihmal edilerek bu denklemler basitleştirilirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\alpha_0(T) \Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j, j) - 4E_{01} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j, j+1) = 0 \quad (2.53)$$

$$4E_{01} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}, j, j) - \alpha_1(T) \Delta_{01}^*(\mathbf{r}, j, j+1) = 0 \quad (2.54)$$

Bu denklem sisteminin çözümü kritik sıcaklığın ifadesi için aşağıdaki bağıntıyı ortaya çıkarır:

$$T_c = \frac{T_{c_0} + T_{c_1}}{2} + \sqrt{\frac{(T_{c_0} - T_{c_1})^2}{4} + \frac{(\varepsilon_F E_{01})^2}{(k_B T_{c_0})(k_B T_{c_1})}} \quad (2.55)$$

Bu denklemden de görüldüğü gibi $T_c > \max\{T_{c_0}, T_{c_1}\}$ olmaktadır. Tabakalı süperiletkenin kritik sıcaklığı farklı fazların karışması dolayısıyla artmaktadır.

Çiftlenim potansiyellerinin V_0 ve V_1 olduğu durumda iki düzen parametresinin karışması bir çok yazar tarafından incelenmiştir [31-36]. Yarı dolu bir bandda ($\mu_{\parallel}=0$) ve tabakalar arası elektron tünellemesinin olmadığı sistemlerde kritik sıcaklık $T_c = \max\{T_{c_0}, T_{c_1}\}$ şeklinde verilmekte olup, T_{c_0} ve T_{c_1} denklem (2.43) ve (2.44)'da $\tilde{V}_0 = 0$ ve $\tilde{V}_1 = 0$ durumlarına karşılık düşmektedir.

2.2 Üst Kritik Manyetik Alan

Denklem (2.39)'da verilen Ginzburg-Landau serbest enerji fonksiyoneli tabakalı süperiletkenlerde kritik sıcaklık civarında üst kritik manyetik alanın H_{c_2} bulunmasına olanak sağlamaktadır. Manyetik alanın hem tabakalara paralel, hem de dik uygulandığı durumlarda üst kritik manyetik alanın $H_{c_2}^{\parallel}$ ve $H_{c_2}^{\perp}$ bileşenleri hesaplanacaktır.

Dik manyetik alan $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$ söz konusu olduğunda vektör potansiyel $\mathbf{A} = \{0, xH, 0\}$ olarak seçilmiştir. Serbest enerji fonksiyoneline Δ_{00}^* ve Δ_{01}^* 'a göre varyasyon alındığında düzen parametrelerinin sağladığı denklemler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) + \alpha_0(T) \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) \\ & - 4E_{01} \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - i \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) + \alpha_1(T) \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \\ & - 4E_{01} \Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Bu bağıntılar birbirine bağlı harmonik osilatör denklemleridir. Vektör potansiyel yalnız x 'e bağlı olduğundan

$$\Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j) \rightarrow e^{ik_y y} \Delta_{00}(x) \quad , \quad \Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1) \rightarrow e^{ik_y y} \Delta_{01}(x) \quad (2.58)$$

dönüşümleri sonucunda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\left\{ -\left(\frac{\hbar^2}{4m}\right) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{x}{l_s}\right)^2 \right] + \alpha_0(T) \right\} \Delta_0^*(x) - 4E_{01} \Delta_1^*(x) = 0 \quad (2.59)$$

$$\left\{ -\left(\frac{\hbar^2}{4m}\right) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{x}{l_s}\right)^2 \right] + \alpha_1(T) \right\} \Delta_1^*(x) - 4E_{01} \Delta_0^*(x) = 0 \quad (2.60)$$

Yukarıda $l_s^2 = \frac{\hbar c}{2eH}$ cooperon manyetik uzunluğunu göstermektedir. Yukarıdaki denklemlerde her iki değişkeni tek başına bırakacak şekilde düzenleme yapıldığında Δ_0^* ve Δ_1^* 'in aynı diferansiyel denklemi sağladığı görülür. Bundan dolayı $\Delta_0^* = C \Delta_1^*$ yazıp denklem takımını çözmek mümkün olur. Burada C bir sabittir. Bu sabit, yukarıdaki salıncı denklemlerinin aynı anda çözümüyle bulunabilir:

$$l_s^2(4m/\hbar^2)[- \alpha_0(T) + C4E_{01}] = 2n + 1 \quad (2.61)$$

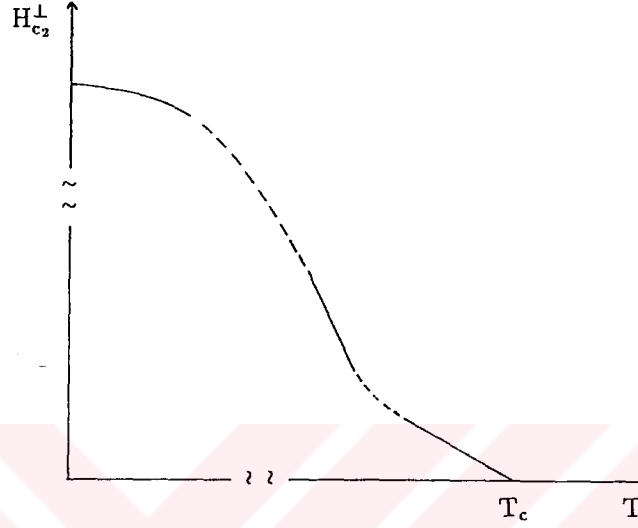
$$l_s^2(4m/\hbar^2)[- \alpha_1(T) + (1/C)4E_{01}] = 2n + 1 \quad (2.62)$$

Üst kritik manyetik alanın dik bileşeni, yukarıdaki denklemlerin en küçük özdeğere karşılık gelen $n = 0$ durumu için çözülmesiyle elde edilecektir:

$$H_{c_2}^\perp = \frac{cm}{e\hbar} \left\{ -[\alpha_0(T) + \alpha_1(T)] + [(\alpha_0(T) - \alpha_1(T))^2 + (8E_{01})^2]^{1/2} \right\} \quad (2.63)$$

Bu denklemin sağ tarafı denklem (2.55)'de verilen T_c kritik sıcaklığında sıfır

olmaktadır. Çiftlenim potansiyelleri $\tilde{V}_0, \tilde{V}_1$ ve V_{01} nedeniyle kritik sıcaklık arttığından üst kritik manyetik alanın değeri de artacaktır. Tabakalara dik üst kritik manyetik alanın kritik sıcaklık civarındaki değişimi grafikte görülmektedir.



Şekil 2.1 $H_{c2}^{\perp}$ -T grafiği

Paralel manyetik alan $\mathbf{H} = \{0, H, 0\}$ için ise vektör potansiyel $\mathbf{A} = \{0, 0, -xH\}$ gibi seçilmiştir. Bir önceki hesaplamada kullanılan yöntemlerle Gorkov denklemleri aşağıdaki hali alacaktır:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4E_{\perp}^0 \cos\left(\frac{xd}{l_s^2}\right) + \alpha_0(T) + 4E_{\perp}^0 \right\} \Delta_{00}^*(x) - 4E_{01} \cos\left(\frac{xd}{2l_s^2}\right) \Delta_{01}^*(x) = 0 \quad (2.64)$$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4E_{\perp}^1 \cos\left(\frac{xd}{l_s^2}\right) + \alpha_1(T) + 4E_{\perp}^1 \right\} \Delta_{01}^*(x) - 4E_{01} \cos\left(\frac{xd}{2l_s^2}\right) \Delta_{00}^*(x) = 0 \quad (2.65)$$

Bu denklemler Hill türü birbirine bağlı diferansiyel denklemlerdir [95]. Bu denklemlerin analitik çözümünü bulma güçlüğünden dolayı, pertürbatif yaklaşım, bazı asimptotik çözümlerini bulmak mümkündür. Hesaplamaların

ayrıntıları Ek B'de gösterilmiştir. Zayıf bir manyetik alanda

$H^2 < \left\{ \frac{16mc^2}{e^2d^2} E_{\perp}^0, \frac{16mc^2}{e^2d^2} E_{01} \right\}$ şartı sağlandığında paralel üst kritik manyetik alanın sağladığı denklem şöyle olacaktır:

$$H^2 + H \frac{\sqrt{mc}}{2deab(a+b)} [8E_{01}^2 + \alpha_0(T)(4E_{\perp}^1 + 2ab) + \alpha_1(T)(4E_{\perp}^0 + 2ab)] - \frac{mc^2}{d^2e^2ab} [16E_{01}^2 - \alpha_0(T)\alpha_1(T)] = 0 \quad (2.66)$$

Denklemdeki a ve b katsayıları şunlardır:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{4E_{\perp}^0 + 4E_{\perp}^1 + \sqrt{(4E_{\perp}^0 - 4E_{\perp}^1)^2 + 4E_{01}^2}} \quad (2.67)$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{4E_{\perp}^0 + 4E_{\perp}^1 \pm \sqrt{(4E_{\perp}^0 - 4E_{\perp}^1)^2 + 4E_{01}^2}} \quad (2.68)$$

İkinci denklemdeki artı ve eksi sırasıyla $E_{\perp}^0 < E_{01}$ ve $E_{\perp}^0 > E_{01}$ durumlarına karşılık düşmektedir. Kritik sıcaklıkta denklem (2.66) sıfır olmaktadır $H_{c_2}^{\parallel}(T = T_c) = 0$.

Kritik sıcaklık yakınında kritik manyetik alan genel olarak sıcaklığa lineer olmayan bir şekilde bağlıdır. $E_{\perp}^0 < E_{01}$ şartı altında ve a ile b birbirine eşitken ($a = b \simeq \sqrt{E_{01}/2}$) aşağıdaki ifade geçerli olacaktır:

$$H_{c_2}^{\parallel} = \frac{c}{2de} \sqrt{\frac{m}{2E_{01}}} \left\{ -[8E_{01} + \alpha_0(T) + \alpha_1(T)] + \sqrt{[8E_{01} + \alpha_0(T) + \alpha_1(T)]^2 + 16[16E_{01}^2 - \alpha_0(T)\alpha_1(T)]} \right\} \quad (2.69)$$

Eğer manyetik alan $\frac{16mc^2}{e^2d^2} E_{01} < H^2 < \frac{16mc^2}{e^2d^2} E_{\perp}^0$ şartını sağlıyorsa elimizde iki tane bağıntı olacaktır:

$$\left(H_{c_2}^{\parallel}\right)_1 = \frac{cm}{e\hbar} \left[\frac{\hbar^2}{2md^2 E_{\perp}^0} \right]^{1/2} [-\alpha_0(T) + 4E_{01}]; \quad (2.70)$$

$$\left(H_{c_2}^{\parallel}\right)_2 = \frac{cm}{e\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2md^2 E_{\perp}^1} \right)^{1/2} [-\alpha_1(T) + 4E_{01}]; \quad (2.71)$$

Yukarıdaki ifadelerden büyük olanı gerçekte gözlenen değer olacaktır.

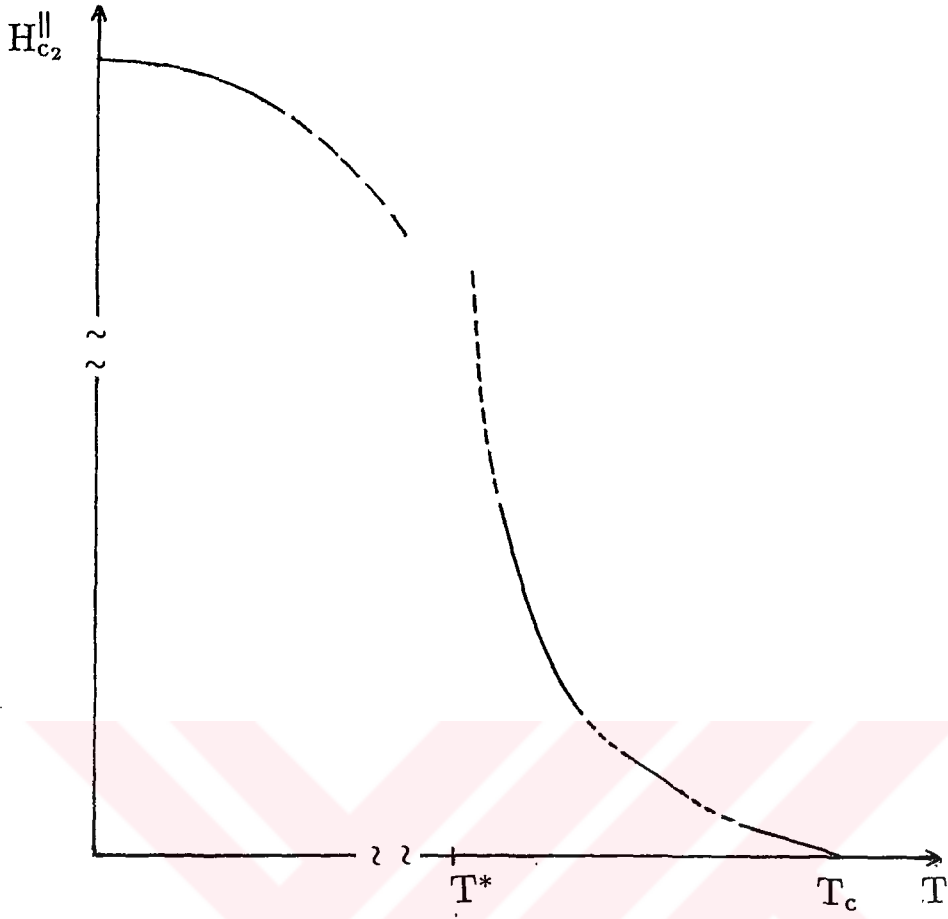
Daha yüksek değerdeki alanlar için ise $H^2 > \frac{16mc^2}{e^2 d^2} \max\{E_{01}, E_{\perp}\}$, $H_{c_2}^{\parallel}$ aşağıdaki ifadelerle eşit olacaktır:

$$\left(H_{c_2}^{\parallel}\right)^2 = \frac{8mc^2}{e^2 d^2} \frac{(E_{\perp}^0)^2 + 4E_{01}^2}{\alpha_0(T) + 4E_{\perp}^0}; \quad (2.72)$$

$$\left(H_{c_2}^{\parallel}\right)^2 = \frac{8mc^2}{e^2 d^2} \frac{(E_{\perp}^1)^2 + 4E_{01}^2}{\alpha_1(T) + 4E_{\perp}^1} \quad (2.73)$$

Yukarıda da görüldüğü gibi, öyle bir $T = T^*$ sıcaklığı olabilir ki, $-\alpha_0(T^*) = 4E_{\perp}^0$ veya $-\alpha_1(T^*) = 4E_{\perp}^1$ şartlarının sağlanması sonucu, tabakalara paralel üst kritik manyetik alan ıraksıyabilir. Chandrasekhar ve Clogston'un [96,97] belirttiği paramanyetik etkiler veya spin orbit saçılması [45] göz önüne alındığında $H_{c_2}^{\parallel}$ 'in ıraksaması ortadan kalkacaktır. Paralel üst kritik manyetik alanın ıraksaması, elektron çiftlenmesinin yalnızca tabaka içinde olduğu ve tabakalar arasında yalnızca Josephson bağlanmasının bulunduğu sistemlerde de görülmektedir [44,45,98].

Paralel üst kritik manyetik alanın değişimi de kritik sıcaklık civarında lineer değildir. (Bkz. Şekil 2.2)



Şekil 2.2 $H_{c2}^{\parallel}$ - T grafiği

Bölüm 3

Kuantum Faz Dalgalanmalarının Kritik Sıcaklığa Etkisi

Bir önceki bölümde serbest enerji fonksiyonelinin varyasyonu alınarak yapılan hesaplar, esas itibarıyla, BCS teorisinde olduğu gibi ortalama alan sonuçlarıdır. Sistemde dalgalanma meydana geldiğinde ne gibi fiziksel sonuçlara yol açacağı önemli bir problemidir. Bu bölümde amacımız kuantum etkilerini de göz önüne alarak, dalgalanmaların kritik sıcaklığa etkisini ve sistemde sıfır sıcaklıkta süperiletken-normal metal geçişinin olup olmayacağını incelemektir.

Quantum faz dalgalanmaları hem iki [64,99,100], hem de üç boyutlu [62,101-103] Josephson dizilerinde uzunca bir süre incelenmiştir. Teorik çalışmalar sonucunda kapasitif yüklenme etkisiyle süperiletken-metal geçişlerinde faz dalgalanmalarının arttığı saptanmıştır. Ayrıca yitim [67,104,105] ve düzensizlik [106-108] faktörlerinin Josephson bağlı süperiletken granüllerinin faz geçişlerine etkisi de incelenmiştir. Özellikle granüler süperiletkenlerin azalan sıcaklıkla birlikte tekrar normal hale döndüğü iddiası ilgi çekmiştir [68,101,106], ancak bu konuda kesin bir sonuca henüz ulaşamamıştır [62,66,109,110].

Bu bölümde Josephson bağlı süperiletkenlerde yüklenmenin kritik sıcaklığa etkisi incelenecektir. Faz dalgalanmaları kendisiyle tutarlı harmonik yaklaşım metoduyla [62,106,111] hesaplanacaktır. Faz-faz korelatörü hesaplanırken, [112] nolu referansın yolundan yararlanılacaktır. Bu inceleme yapılırken denklem (2.39)'da verilmiş bulunan serbest enerji ifadesi esas alınacaktır. Yalnız burada dış manyetik alanın olmadığı ve tabakalar arası düzen parametresinin bulunmadığı durum göz önüne alınacaktır.

$$F\{\Delta_0\} = \sum_j \int d^2r \left\{ \alpha_0(T) |\Delta_0(\mathbf{r}, j)|^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \frac{\partial \Delta_0(\mathbf{r}, j)}{\partial \mathbf{r}} \right|^2 + \sum_{g=\pm 1} E_\perp(g) |\Delta_0(\mathbf{r}, j) - \Delta_0(\mathbf{r}, j+g)|^2 \right\} \quad (3.1)$$

Kompleks bir büyüklük olan enerji aralığı genlik ve faz terimlerine ayrılabilir:

$$\Delta_0(\mathbf{r}, j) = |\Delta_0(\mathbf{r}, j)| e^{i\varphi(\mathbf{r}, j)} \quad (3.2)$$

Kritik sıcaklığın çok yakın civarı dışında genlik dalgalanmaları ihmal edilebilir (Bkz. EkC). Genlik dalgalanmalarının göz önüne alınmadığı durumda serbest enerji ifadesinde yalnızca faza bağlı terimler kalacaktır:

$$F\{\varphi\} = N_s^{(2)} \sum_j \int d^2\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{8m_\parallel} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right)^2 + \sum_{g=\pm 1} E_\perp(g) [1 - \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r}))] \right\} \quad (3.3)$$

Burada $\mathbf{r} = \{x, y\}$ tabaka içi koordinatı, j tabakanın sırasını, $E_\perp$ Josephson bağlanma enerjisini, $m_\parallel$ ise tabaka içi elektronik kütleyi belirtmektedir. Süperiletken elektronların yüzey yoğunluğu $N_s^{(2)}(T)$ ile gösterilmektedir. Bu ifadede $T < T_c^{(2)}$ şartıyla $N_s^{(2)}(T) = N^{(2)}(0)\tau$ bağıntısı geçerlidir. Tek bir tabaka için ortalama alan metoduyla hesaplanan kritik sıcaklık $T_c^{(2)}$ olup, τ yandaki eşitliği $\tau = (1 - T/T_c^{(2)})$ sağlar. Normal metalik elektronların yüzey yoğunlukları $N^{(2)}(0) = \frac{1}{2\pi}(P_F/\hbar)^2$ ifadesi ile verilmektedir.

Düzen parametresinin fazının dinamiğini incelemek için tabakalardaki elektrostatik yüklenmenin de hesaba katılması gerekir:

$$E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int d^2\mathbf{r} \int d^2\mathbf{r}' C_{i,j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') [V_{i+1}(\mathbf{r}) - V_i(\mathbf{r})] [V_{j+1}(\mathbf{r}') - V_j(\mathbf{r}')] \quad (3.4)$$

Yukarıda C_{ij} kapasite matrisini göstermektedir. Potansiyel farkları $[V_{i+1}(\mathbf{r}) - V_i(\mathbf{r})]$ faz farkları cinsinden yazılabilir (Josephson bağıntısı [113]):

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{2e}{\hbar} [V_{i+1}(\mathbf{r}) - V_i(\mathbf{r})] \quad (3.5)$$

Vektör potansiyelin olduğu bir durumda $i+1$ ve i tabakaları arasındaki ayardan bağımsız faz farkı aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\phi_i(\mathbf{r}, t) = \varphi_{i+1}(\mathbf{r}, t) - \varphi_i(\mathbf{r}, t) + \frac{2e}{\hbar c} \int_{id}^{(i+1)d} A_z dz \quad (3.6)$$

Yukarıda d iki tabaka arasındaki uzaklığı göstermektedir. Böylece denklem (3.4) şu hale dönüşür:

$$E_{el} = \frac{\hbar^2}{8} \sum_{i,j} \int d^2 \mathbf{r} \int d^2 \mathbf{r}' \kappa_{i,j}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial \phi_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \frac{\partial \phi_j(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \quad (3.7)$$

Yukarıdaki bağıntıda $\kappa_{i,j}$ katsayısı kapasite matrisinin mikroskopik analogudur. Bu katsayının Fourier dönüşümü olan $\kappa(\mathbf{q}, q_\perp)$ 'nın dispersiyon bağıntısı, perdenilmiş Coulomb etkileşmesini vermektedir. Bu çalışmada $\kappa(\mathbf{q}, q_\perp) = K =$ sabit yani $\kappa_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = K \delta_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ alınacaktır.

Aşağıdaki Lagranjyenden hareketle,

$$\begin{aligned} L &= \frac{K \xi_{\parallel}^2(0)}{8} \sum_j \int d^2 r \left[\hbar (\dot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}) - \dot{\varphi}_j(\mathbf{r})) \right]^2 - F\{\varphi\} \\ &= \frac{K \xi_{\parallel}^2(0)}{8} \sum_j \int d^2 r \left[\hbar (\dot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}) - \dot{\varphi}_j(\mathbf{r})) \right]^2 \\ &\quad - N_s^{(2)} \sum_j \int d^2 \mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{8m_{\parallel}} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right)^2 + \sum_{g=\pm 1} E_{\perp}(g) [1 - \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r}))] \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

manyetik alanın olduğu bir durumda Hamiltonyeni yazmak mümkün olur. Bunun için ilk önce φ_j “koordinat”ının kanonik eşleniği olan birimsiz momentumun hesaplanması gerekmektedir.

$$\Pi_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_j} = \frac{K \xi_{\parallel}^2(0) \hbar}{4} (2\dot{\varphi}_j(\mathbf{r}) - \dot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}) - \dot{\varphi}_{j-1}(\mathbf{r})) \quad (3.9)$$

Aşağıdaki gibi tanımlı Fourier dönüşümleri sayesinde

$$\begin{aligned} \Pi_j(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} e^{i\mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{r}} e^{iq_{\perp} j} \Pi_{\mathbf{q}} \\ \varphi_j(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} e^{i\mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{r}} e^{iq_{\perp} j} \varphi_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.9) denklemi şu hale gelir:

$$\Pi_j(q_{\perp}) = \frac{K \xi_{\parallel}^2(0) \hbar}{2} (1 - \cos q_{\perp}) \dot{\varphi}(q_{\perp}, \mathbf{r}) \quad (3.11)$$

Şimdi $H = \sum_j \int d^2r \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} \dot{\varphi}(\mathbf{r}) - F$ bağıntısı yardımıyla Hamiltonyene geçmek mümkün olur.

$$\begin{aligned} H &= \sum_j \int d^2r \left\{ \sum_{j', q_{\perp}} \frac{e^{iq_{\perp}(j-j')}}{\left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2}\right)} \frac{\Pi_j(\mathbf{r}) \Pi_{j'}(\mathbf{r})}{K \xi_{\parallel}^2(0)} \right. \\ &\quad + N_s^{(2)} \xi_{\parallel}^2(0) \left[\frac{\hbar^2}{8 m_{\parallel} \xi_{\parallel}^2(0)} \left(\nabla_{\mathbf{r}} \varphi_j - \frac{2e \xi_{\parallel}(0)}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 \right. \\ &\quad + \sum_{g=\pm 1} E_{\perp}(g) \left[1 - \cos \left(\varphi_j - \varphi_{j+g} + \frac{2e}{\hbar c} \int_{j_d}^{(j+g)d} A_z dz \right) \right] \left. \right] \\ &\quad + \xi_{\parallel}^2(0) d \frac{(\mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_{ext})^2}{8\pi} \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Yukarıda $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_{\parallel}(\mathbf{r}, j), A_{\perp}\}$ vektör potansiyelini göstermektedir. Bağıntıda ayrıca birimsiz koordinatlar kullanılmıştır.

$$\mathbf{r} = \left\{ x \rightarrow \frac{x}{\xi_{\parallel}(0)}, y \rightarrow \frac{y}{\xi_{\parallel}(0)} \right\} \quad (3.13)$$

Paydadaki ifade süperiletken tabakaya ait koherens uzunluğudur:

$$\xi_{\parallel}(0) = \hbar v_F / \pi \Delta_0 \quad (3.14)$$

Yukarıdaki ifadelerde Meissner ekranlanmasına yol açan tabaka içi akımların etkisini veren $d^2 / \lambda_{\parallel}^2 \ll 1$ parametresi eklenmiştir [114-116]. Burada $\lambda_{\parallel}$ manyetik alanın tabaka içi sızma uzunluğudur.

Hareket denklemlerini bulmak için Lagranjyenin varyasyonları alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_k(\mathbf{r}')} &= \frac{K \xi_{\parallel}^2}{8} \sum_j \int d^2 r \, 2 \hbar^2 [\dot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}) - \dot{\varphi}_{j-1}(\mathbf{r})] (\delta_{j+1,k} - \delta_{j,k}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{K \xi_{\parallel}^2 \hbar^2}{4} (2 \dot{\varphi}_k(\mathbf{r}') - \dot{\varphi}_{k+1}(\mathbf{r}') - \dot{\varphi}_{k-1}(\mathbf{r}')) \\ \frac{\delta L}{\delta \varphi_k(\mathbf{r}')} &= -N_s^{(2)} \sum_j \int d^2 r \, \frac{\hbar^2}{8m_{\parallel}} \delta_{j,k} \, 2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{r}} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\quad - N_s^{(2)} \sum_j \int d^2 r \, \sum_{g=\pm 1} E_{\perp} \sin(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r})) (\delta_{j,k} - \delta_{j+g,k}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= N_s^{(2)} \frac{\hbar^2}{4m_{\parallel}} \frac{\partial^2 \varphi_k(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'^2} - N_s^{(2)} \sum_{g=\pm 1} 2E_{\perp}(g) \sin(\varphi_k(\mathbf{r}') - \varphi_{k+g}(\mathbf{r}')) \end{aligned} \quad (3.15)$$

denklemleri elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_k(\mathbf{r}')} - \frac{\delta L}{\delta \varphi_k(\mathbf{r}')} = 0 \quad (3.16)$$

(3.16) şartından hareketle

$$2\ddot{\varphi}_j(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j-1}(\mathbf{r}, t) = \frac{N_s^{(2)}}{m_{\parallel} K \xi_{\parallel}^2(0)} \left[\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right] - 8 \frac{N_s^{(2)}}{\hbar^2 K} E_{\perp} [\sin(\varphi_j - \varphi_{j+1}) + \sin(\varphi_j - \varphi_{j-1})] \quad (3.17)$$

denklemlerine ulaşılır. Vektör potansiyelin olmadığı durumda fazlar için klasik hareket denklemleri yazıldığında ortaya birbirine bağlı, lineer olmayan Sine-Gordon tipi denklemler çıkmaktadır. Bu denklemler sonsuz sayıda Josephson bağlı tabakanın düzen parametresinin faz osilasyonunu vermektedir. Buradaki dalgalanmaların karakteristik dalga boyları Josephson uzunluğundan daha büyüktür. Sistemin karakteristik frekansı $\bar{\omega}$ ile gösterilirken, anizotropinin ölçüsü olan, birimsiz, büyüklüğü birden küçük olan δ_{kl} ise aşağıdaki gibidir:

$$\bar{\omega} = \left(\frac{N_s^{(2)}}{m_{\parallel} K \xi_{\parallel}^2(0)} \right)^{1/2} \quad \delta_{kl}^2 = \frac{8E_{\perp}}{(\hbar^2/m_{\parallel} \xi_{\parallel}^2(0))} \quad (3.18)$$

Frekans ayrıca $\bar{\omega} = 2\pi\alpha \frac{k_B T_c^{(2)}}{\hbar}$ şeklinde de yazılabilir. Buradaki yeni değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$\alpha = \alpha_0 \tau^{1/2} \quad ; \quad \alpha_0 = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\pi}{2 \frac{\hbar^2}{m_{\parallel}} K} \right)^{1/2} \quad ; \quad \tau = 1 - \frac{T}{T_c^{(2)}} \quad (3.19)$$

Burada α dinamik bir parametredir ve yüklenme miktarını verir. Bu tanımlamalar altında denklem (3.17) şu şekilde yazılabilir:

$$2\ddot{\varphi}_j(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j-1}(\mathbf{r}, t) = \bar{\omega}^2 \left[\Delta \varphi_j - \delta_{kl}^2 (\sin(\varphi_j - \varphi_{j+1}) + \sin(\varphi_j - \varphi_{j-1})) \right] \quad (3.20)$$

Bu Sine-Gordon tipi birbirine bağılı denklemler sistemini çözmek çok zor olduğu için harmonik yaklaşım metodu uygulanacaktır. Bu denklemler sistemine fazların küçük değerleri için, $\sin x \simeq x$ açılımını yapmak mümkündür. Bu harmonik yaklaşım sonucu denklemler aşağıdaki eşitlikleri sağlarlar:

$$\begin{aligned}
 2\ddot{\varphi}_j(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j-1}(\mathbf{r}, t) &= \frac{N_s^{(2)}}{m_{\parallel} K \xi_{\parallel}^2(0)} \left[\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r^2} \right] \\
 - 8 \frac{N_s^{(2)}}{\hbar^2 K} E_{\perp} (\varphi_j - \varphi_{j+1} + \varphi_j - \varphi_{j-1}) & \quad (3.21) \\
 2\ddot{\varphi}_j(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j+1}(\mathbf{r}, t) - \ddot{\varphi}_{j-1}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\omega}^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r^2} - \delta_{kl}^2 (2\varphi_j - \varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) \right]
 \end{aligned}$$

Bundan sonra da aşağıdaki gibi bir Fourier dönüşümü yapılırsa,

$$\varphi_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} \varphi_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{r} + i q_{\perp} j} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} \{ 2\ddot{\varphi}_{\mathbf{q}} - \ddot{\varphi}_{\mathbf{q}} e^{i q_{\perp}} - \ddot{\varphi}_{\mathbf{q}} e^{-i q_{\perp}} \\
 + \bar{\omega}^2 \mathbf{q}_{\parallel}^2 \varphi_{\mathbf{q}} + \bar{\omega}^2 (2 - e^{i q_{\perp}} - e^{-i q_{\perp}}) \varphi_{\mathbf{q}} \} e^{i\mathbf{q}_{\parallel} \mathbf{r} + i q_{\perp} j} = 0 \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

denklemler $\mathbf{q}$ uzayında köşegen hale gelirler:

$$\ddot{\varphi}(q_{\perp}, \mathbf{q}_{\parallel}) = -\omega^2(q_{\perp}, \mathbf{q}_{\parallel}) \varphi(q_{\perp}, \mathbf{q}_{\parallel}) \quad (3.24)$$

Harmonik yaklaşımda salınımların frekansı

$$\begin{aligned}
 \omega(q_{\perp}, \mathbf{q}_{\parallel}) &= \bar{\omega} \Omega_{\mathbf{q}} \\
 \Omega_{\mathbf{q}} &= \left[\delta_{kl}^2 + \frac{q_{\parallel}^2}{2 \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

olacaktır. Sistemdeki kuantum dalgalanmalarını inceleyebilmek için fazların kuantum özellikleri göz önüne alınmalıdır. Bunun için ilk önce, vektör potansiyelin olmadığı durumda, Hamiltonyendeki $\cos(\varphi_j - \varphi_{j+g})$ terimi ikinci mertebeye kadar açılıp

$$\sum_j \int d^2 r \left\{ \sum_{j', q_\perp} \frac{e^{iq_\perp(j-j')}}{\left(1 - \cos q_\perp + \frac{d^2}{\lambda_\parallel^2}\right)} \frac{\Pi_j(\mathbf{r})\Pi_{j'}(\mathbf{r})}{K\xi_\parallel^2(0)} + N_s^{(2)} \frac{\hbar^2}{m_\parallel} (\nabla \varphi_j(\mathbf{r}))^2 + N_s^{(2)} \xi_\parallel^2(0) \sum_{g=\pm 1} E_\perp(g) \frac{(\varphi_j - \varphi_{j+g})^2}{2} \right\} \quad (3.26)$$

φ_j ve Π_j 'nin (3.10)'da tanımlı olduğu gibi Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\begin{aligned} H = & \sum_j \int d^2 r \left\{ \sum_{j', q_\perp} \frac{1}{K\xi_\parallel^2(0)N} \sum_{q_{\parallel 1}, q_{\perp 1}} \sum_{q_{\parallel 2}, q_{\perp 2}} e^{iq_{\parallel 1}r} e^{iq_{\perp 1}j} \Pi_{\mathbf{q}_1} e^{iq_{\parallel 2}r} e^{iq_{\perp 2}j'} \Pi_{\mathbf{q}_2} \right\} \\ & + \sum_j \int d^2 r \frac{N_s^{(2)}}{N} \left\{ \frac{\hbar^2}{m_\parallel} \sum_{q_{\parallel 1}, q_{\perp 1}} \sum_{q_{\parallel 2}, q_{\perp 2}} (iq_{\perp 1})(iq_{\perp 2}) e^{iq_{\parallel 1}r} e^{iq_{\perp 1}j} \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \right. \\ & \left. + \xi_\parallel^2(0) E_\perp \sum_{q_{\parallel 1}, q_{\perp 1}} \sum_{q_{\parallel 2}, q_{\perp 2}} (2 - e^{iq_\perp} - e^{-iq_\perp}) e^{iq_{\parallel 1}r} e^{iq_{\perp 1}j} e^{iq_{\parallel 2}r} e^{iq_{\perp 2}j} \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \right\} \quad (3.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H = & \sum_{q_\perp} \frac{1}{K\xi_\parallel^2(0)} \frac{1}{1 - \cos q_\perp} \sum_{q_{\parallel 1}, q_{\perp 1}} \sum_{q_{\parallel 2}, q_{\perp 2}} \delta_{-q_{\parallel 1}, q_{\parallel 2}} \delta_{-q_\perp, q_{\perp 1}} \delta_{q_\perp, q_{\perp 2}} \Pi_{\mathbf{q}_1} \Pi_{\mathbf{q}_2} \\ & + \sum_{q_{\parallel 1}, q_{\perp 1}} \sum_{q_{\parallel 2}, q_{\perp 2}} \left\{ \frac{N_s^{(2)} \hbar^2}{8m_\parallel} (-q_{\parallel 1} q_{\parallel 2}) \delta_{-q_{\parallel 1}, q_{\parallel 2}} \delta_{-q_\perp, q_{\perp 2}} \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \right. \\ & \left. + N_s^{(2)} \xi_\parallel^2(0) E_\perp (2 - e^{iq_\perp} - e^{-iq_\perp}) \delta_{-q_{\parallel 1}, q_{\parallel 2}} \delta_{-q_\perp, q_{\perp 2}} \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{\mathbf{q}_2} \right\} \quad (3.28) \end{aligned}$$

Kronecker delta toplamaları yapıldığında aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$H = \sum_{\mathbf{q}_1} \frac{1}{K \xi_{\parallel}^2(0)} \frac{1}{1 - \cos q_{\perp}} \Pi_{\mathbf{q}_1} \Pi_{-\mathbf{q}_1} + \frac{N_s^{(2)} \hbar^2}{8m_{\parallel}} \sum_{\mathbf{q}_1} q_{\parallel 1}^2 \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{-\mathbf{q}_1} + N_s^{(2)} \xi_{\parallel}^2(0) E_{\perp} \sum_{\mathbf{q}_1} (2 - e^{iq_{\perp 2}} - e^{-iq_{\perp 2}}) \varphi_{\mathbf{q}_1} \varphi_{-\mathbf{q}_1} \quad (3.29)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldığında harmonik yaklaşımda aşağıdaki hamiltonyen

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \frac{\Pi_{\mathbf{q}} \Pi_{-\mathbf{q}}}{K \xi_{\parallel}^2(0) \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)} + N_s^{(2)} \frac{\hbar^2}{4m_{\parallel}} \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right) \Omega_q^2 \varphi_{\mathbf{q}} \varphi_{-\mathbf{q}} \right\} \quad (3.30)$$

elde edilir. Fazların kuantizasyonu, $\varphi_{\mathbf{q}}$ ve $\Pi_{\mathbf{q}}$ terimlerinin, Bose yaratma $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ ve yok etme $b_{\mathbf{q}}$ operatörlerinin lineer süperpozisyonu şeklinde yazılmasıyla gerçekleştirilir:

$$\varphi_{\mathbf{q}} = [b_{-q} + b_q^{\dagger}] \left(\frac{A}{4 \Omega_{\mathbf{q}} \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)} \right)^{1/2} \quad (3.31a)$$

$$\Pi_{\mathbf{q}} = i [b_{-q} - b_q^{\dagger}] \left(\frac{\Omega_{\mathbf{q}} \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)}{A} \right)^{1/2} \quad (3.31b)$$

Bu ifadeler Hamiltonyende yerine konursa,

$$H = \sum_{\mathbf{q}} \left\{ (b_{-\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{-\mathbf{q}}^{\dagger}) \left[-\frac{\Omega_{\mathbf{q}}}{AK\xi_{\parallel}^2(0)} + N_s^{(2)} \frac{\hbar^2}{4m_{\parallel}} \Omega_{\mathbf{q}} \frac{A}{4} \right] \right. \\ \left. + (b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}} + b_{-\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}^{\dagger}) \left[\frac{\Omega_{\mathbf{q}}}{AK\xi_{\parallel}^2(0)} + N_s^{(2)} \frac{\hbar^2}{4m_{\parallel}} \Omega_{\mathbf{q}} \frac{A}{4} \right] \right\} \quad (3.32)$$

elde edilir. Birimsiz bir büyüklük olan A sabiti Hamiltonyendeki $b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{-\mathbf{q}}^{\dagger}$ ve $b_{-\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}$ gibi terimleri yok etmek amacıyla kullanılmıştır. Bu sabit aşağıdaki gibi seçildiğinde,

$$A = \frac{4}{\sqrt{K \frac{\hbar^2}{m} N_s^{(2)} \xi_{\parallel}^2(0)}} = 8\pi\alpha_0 \left(\frac{k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \right) \tau^{-1/2} \quad (3.33)$$

Hamiltonyen köşegen hale gelir:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \bar{\omega}_{\mathbf{q}} \Omega_{\mathbf{q}} \left(b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.34)$$

Bose operatörlerinin kuantum karakterini incelerken, kosinus teriminin açılımında komütasyon kurallarına dikkat etmek gerekmektedir. Hamiltonyendeki kosinüs terimi fazların Fourier dönüşümleri kullanılarak şu hale gelir:

$$\cos \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} \varphi_{\mathbf{q}} e^{-iq_{\perp}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} \varphi_{\mathbf{q}} e^{-iq_{\perp}} e^{-iq_{\perp} g} \right) \quad (3.35)$$

Denklem (3.31a)'daki ifadeler $\varphi_{\mathbf{q}}$ yerine konduğunda

$$\cos \left(\frac{1}{i} \sum_{\mathbf{q}_{\parallel}, q_{\perp}} (b_{-\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger}) A_{\mathbf{q}}(j, g) \right) = \frac{e^{\sum A_{\mathbf{q}}(b_{-\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger})} + e^{-\sum A_{\mathbf{q}}(b_{-\mathbf{q}} + b_{\mathbf{q}}^{\dagger})}}{2} \quad (3.36)$$

elde edilir. Yukarıda geçen $A_{\mathbf{q}}(j, g)$ ifadesi ise şöyledir:

$$A_{\mathbf{q}}(j, g) = i \left(\frac{A}{4 \Omega_{\mathbf{q}} \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)} \right)^{1/2} e^{iq_{\perp} j + i \mathbf{q}_{\parallel} \cdot \mathbf{r}} (1 - e^{iq_{\perp} g}) \quad (3.37)$$

Denklem (3.12)'deki kosinüslü terim, vektör potansiyelin olmadığı durumda, Baker-Hausdorff eşitliği yardımıyla aşağıdaki

$$\exp(\hat{H}_1 + \hat{H}_2) = \exp(\hat{H}_1) \exp(\hat{H}_2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\hat{H}_1, \hat{H}_2] \right\} \quad (3.38)$$

aşağıdaki bağıntıya dönüşür:

$$\frac{e^{A_{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}} e^{A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}} e^{-\frac{1}{2} [A_{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}, A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}]} + e^{-A_{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}} e^{-A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}} e^{-\frac{1}{2} [A_{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}, A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}]} }{2} \quad (3.39)$$

Ayrıca $A_{\mathbf{q}}$ katsayıları $A_{-\mathbf{q}} = -A_{\mathbf{q}}^*$ şartını sağladığından (3.39) aşağıdaki hali alır:

$$\frac{e^{-A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}} e^{A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}} e^{-\frac{1}{2} [A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}, A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}]} + e^{A_{\mathbf{q}}^* b_{-\mathbf{q}}} e^{-A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}} e^{-\frac{1}{2} [A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}, A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger}]} }{2} \quad (3.40)$$

Ayrıca Bose operatörlerinin komütasyon bağıntısından

$$[A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}, A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger] = |A_{\mathbf{q}}|^2 (b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger - b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}) = |A_{\mathbf{q}}|^2 \quad (3.41)$$

elde edilir. Böylece (3.35) bağıntısı aşağıdaki ifadeye eşit olur.

$$\frac{e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} |A_{\mathbf{q}}|^2}}{2} \left\{ \prod_{\mathbf{q}} e^{A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger} \prod_{\mathbf{q}} e^{-A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}} + \prod_{\mathbf{q}} e^{-A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger} \prod_{\mathbf{q}} e^{A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}} \right\} \quad (3.42)$$

Hamiltonyendeki tabakalar arası Josephson bağlanma enerjisini veren terim

$$\begin{aligned} & - N_s^{(2)} \xi_{\parallel}^2 \sum_{j,g} \int d^2 r E_{\perp}(g) \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r})) = \\ & - N_s^{(2)} \xi_{\parallel}^2 \sum_{j,g} \int d^2 r E_{\perp}(g) e^{-S_{\alpha}^{(0)}(g,0)} \frac{1}{2} \\ & \quad \times \left[\prod_{\mathbf{q}} e^{A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger} \prod_{\mathbf{q}} e^{-A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}} + \prod_{\mathbf{q}} e^{-A_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger} \prod_{\mathbf{q}} e^{A_{\mathbf{q}}^* b_{\mathbf{q}}} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

yukarıdaki gibi bir ifadeye dönüşür. Ayrıca $\frac{1}{2}[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = S_{\alpha}^{(0)}(g, 0)$ komütatörünün ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$S_{\alpha}^{(0)}(g, 0) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} |A_{\mathbf{q}}(j, g)|^2 = A \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1 - \cos(q_{\perp} g)}{2\Omega_{\mathbf{q}} \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)} \frac{1}{2} \quad (3.44)$$

Görüldüğü gibi harmonik yaklaşımda Hamiltonyen (3.12) için (3.34)'teki ifadenin benzeri elde edilmiştir, ancak frekans değişmiştir:

$$\Omega_{\mathbf{q}} = \left[\delta_{kl}^2 e^{-S_{\alpha}^{(0)}(g,0)} + \frac{q_{\parallel}^2}{2 \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (3.45)$$

Yani denklem (3.18)'deki klasik ifade kuantum dalgalanmaları sonucunda aşağıdaki gibi renormalize olmuştur:

$$\delta_{kl}^2 \rightarrow \delta_{ku}^2(0) = \delta_{kl}^2 \exp \left\{ -S_{\alpha}^{(0)}(g, 0) \right\} \quad (3.46)$$

Yukarıda eksponansiyel olarak gelen katkı, $\cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r}))$ teriminin bosonların olmadığı taban durumda alınmış bir ortalamadır. Ek D'de gösterildiği gibi kendi kendisiyle tutarlı fonon yaklaşımında

$$\begin{aligned} e^{-S_{\alpha}^{(0)}(g,0)} &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0}{k_B T}} \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r})) \right\}}{\text{Tr} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0}{k_B T}} \right\}} \\ &\equiv \left\langle \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r})) \right\rangle_0^{(0)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

eşitliği geçerli olacaktır. Taban durumda

$$\delta_{ku}^2 \equiv \delta^2 = \delta_{kl}^2 \left\langle \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r})) \right\rangle_0^{(0)} \quad (3.48)$$

bağıntısı var olacaktır. Sıfırdan farklı sıcaklık için $S(g, 0) \Rightarrow S(g, T)$ değişimi yapılmalıdır. Bu da (3.44) nolu denklemde $1/2$ yerine $(N_{\mathbf{q}} + 1/2)$ yazılmasına eşdeğerdir (Bkz. EkD). Burada $N_{\mathbf{q}} = \left[\exp \left(\frac{\hbar \bar{\omega}}{k_B T} \Omega_{\mathbf{q}}(T) - 1 \right) \right]^{-1}$, $\bar{\omega} \Omega_{\mathbf{q}}$ frekanslı Bose parçacıklarının Planck dağılım fonksiyonudur. Bu sistem için kritik sıcaklık T_c enine sıklığın kaybolduğu $\delta \rightarrow 0$ durumudur. Denklem (3.48)

den görüldüğü gibi kritik sıcaklığı bulabilmek için

$\langle \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r})) \rangle_0^{(0)}$ korelatörünün hesaplanması gerekmektedir. Bu korelatörün ifadesinin ekD'de elde edildiği gibi, aynı metotla $\langle \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r}')) \rangle$ korelatörünün ifadesi de bulunabilir:

$$\left\langle \cos(\varphi_j(\mathbf{r}) - \varphi_{j+g}(\mathbf{r}')) \right\rangle = e^{-S_\alpha(g, \mathbf{r}' - \mathbf{r}; T)} \quad (3.49)$$

Ekspansiyeldeki ifade ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$S_\alpha^{(0)}(g, \mathbf{r}' - \mathbf{r}; T) = \frac{4\pi\alpha_0}{\tau^{1/2}} \frac{k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \frac{1}{N} \times \sum_{\mathbf{q}} \frac{1 - \cos[\mathbf{q}_{\parallel}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) + q_{\perp}g]}{\Omega_{\mathbf{q}} \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2}\right)} \left(N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\right) \quad (3.50)$$

Görüldüğü gibi (3.47) bağıntısında $1/2$ yerine $N_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}$ ifadesi gelmiştir. Bu ifadede toplamdan integrale geçilirse,

$$S_\alpha^{(0)}(g, \mathbf{r}' - \mathbf{r}; T) = \frac{2\pi\alpha_0}{(1 - T/T_c^{(2)})^{1/2}} \frac{k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \int_{-1}^1 \frac{dq_x}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{dq_y}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq_{\perp}}{2\pi} \frac{1 - \cos[q_x(x' - x) + q_y(y' - y) + q_{\perp}g]}{\Omega_{\mathbf{q}}(T) \left(1 - \cos q_{\perp} + \frac{d^2}{\lambda_{\parallel}^2}\right)} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \Omega_{\mathbf{q}}(T)\right) \quad (3.51)$$

yukarıdaki bağıntıya ulaşılır.

3.1 Kritik Sıcaklık

Josephson bağlı tabakalı süperiletkenlerde yüklenmenin kritik sıcaklığa etkisi kendiyle tutarlı ortalama alan yaklaşımıyla hesaplanabilir. Daha önce bu tür hesaplamalar quasi bir boyutlu [111] ve granüler [62,100,101,106] süperiletkenlerde yapılmıştır.

İlk önce düzen parametresinin ortalaması yazılsın:

$$\langle \cos(\varphi_j(\mathbf{r})) \rangle = \frac{\text{Tr} \left\{ \exp \left(-\frac{\hat{H}}{k_B T} \right) \cos(\varphi_j(\mathbf{r})) \right\}}{\text{Tr} \left\{ \exp \left(-\frac{\hat{H}}{k_B T} \right) \right\}} \quad (3.52)$$

Yukarıdaki Hamiltonyen, Josephson teriminin seriye açılmadan, fazların kuantize edildiği şekliyle yazılmıştır. Bu haliyle ortalamanın tam çözümünü bulmak imkansız olduğundan bazı yaklaşımlar yapılacaktır. Hamiltonyen şu şekilde iki terim olarak yazılabilir:

$$\hat{H} = \hat{H}_0^0 + \hat{H}_\perp \quad (3.53)$$

$$\hat{H}_0^0 = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \bar{\omega} \Omega^{(0)}(\mathbf{q}_\parallel, q_\perp) \left(b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.54)$$

$$\hat{H}_\perp = N_s^{(2)}(T) \sum_j \sum_{g=\pm 1} \int d^2 \mathbf{r} E_\perp(g) [1 - \cos(\hat{\varphi}_j(\mathbf{r}) - \hat{\varphi}_{j+g}(\mathbf{r}))] \quad (3.55)$$

Yukarıda $\Omega^{(0)}(\mathbf{q}_\parallel, q_\perp)$ iki boyuttaki uyarılmaların birimsiz frekansıdır. Bu terim (3.25) eşitliğinde $\delta_{kl} = 0$ haline karşılık gelmektedir. Hamiltonyenin Josephson kısmına ortalama alan yaklaşımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp^{MF} &= -N_s^{(2)} E_\perp \langle \cos \hat{\varphi} \rangle \int d^2 \mathbf{r} \cos \hat{\varphi}(\mathbf{r}) \\ E_\perp &= \sum_{g=\pm 1} E_\perp(g) \end{aligned} \quad (3.56)$$

elde edilir.

Kritik sıcaklık civarında düzen parametresinin değeri küçük olacaktır.

Denklem (3.53)-(3.55)'deki ifadeler denklem (3.52)'ye konup, $\exp(-\hat{H}/k_B T)$ eksponansiyeli düzen parametresine göre seriye açıldığında beklenen değer için

$$\langle \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\int D\varphi e^{-\frac{H_0}{k_B T}} \left[\cos \varphi(\mathbf{r}) + \frac{N_s E_\perp}{k_B T_c} \langle \cos \varphi \rangle \int d^2 r \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \right]}{\int e^{-\frac{H_0 + H_1}{k_B T}} D\varphi} \quad (3.57)$$

bağıntısına ulaşılır. Paydada H_1 terimi ihmal edilip ortalamalar alındığında aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$\langle \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0 + \frac{N_s E_\perp}{k_B T_c} \langle \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle \int d^2 r \langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle \quad (3.58)$$

İki boyutlu bir sistemde eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sifıra eşit olacağından ve bunun sonucunda $\langle \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle$ korelatörü denklemin her iki tarafında birbirini götürceğinden, kritik sıcaklık için ortalama alan bağıntısı şöyle elde edilir:

$$1 = \frac{N_s^{(2)}(T_c) E_\perp}{k_B T_c} \int d^2 \mathbf{r} \langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0^0 \quad (3.59)$$

Yukarıdaki $\langle \dots \rangle_0^0$ sembolü $\hat{H}_0^0$ Hamiltonyenine göre, yani tabaka arası etkileşmenin olmadığı ve harmonik yaklaşım yapıldığı durumda, yalnız tabaka içi süreçleri tasvir eden terime göre hesaplanan ortalamayı göstermektedir. Bu denklem kritik sıcaklığı belirleyen denklem olacaktır. Bu hesabın yapılabilmesi için $\langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0^0$ korelatörünün kritik sıcaklıktaki değerinin bilinmesi gerekir. Bu korelatör (3.51) ifadesinde $g = 0$ ve $\delta_{kl} = 0$ konularak hesaplanabilir. Burada α parametresinin aldığı değere göre üç ayrı bölge incelenecektir.

3.2 Zayıf yüklenme bölgesi

Zayıf yüklenme bölgesi $\frac{\hbar\bar{\omega}\lambda_{\parallel}(T)}{2k_B T_c d} < 1$ veya $\pi\alpha_0 \frac{T_c^{(2)}}{T_c} \frac{\lambda_{\parallel}(0)}{d} < 1$ şartına karşılık düşmektedir. Hem $T_c \leq T_c^{(2)}$ hem de $d < \lambda_{\parallel}(0)$ olduğundan $\alpha_0 < 1$ olacaktır. Dolayısıyla sistemde yüklenme etkisi zayıf olacaktır. Korelatör hesaplandığında aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0^0 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp \left(-\frac{k_B T_c}{4\pi\epsilon_F} \frac{1}{\tau} \left[1 + \frac{\pi\lambda_{\parallel}(0)}{3\sqrt{2}d} \left(\frac{T_c^{(2)}}{T_c} \right)^2 \tau \alpha_0^2 \right] \left(\frac{\mathbf{r}}{\xi_{\parallel}} \right)^2 \right); r < \xi_{\parallel} \quad (3.60a) \\ \left(\frac{\mathbf{r}}{\xi_{\parallel}} \right)^{\frac{-2k_B T_c}{\pi\epsilon_F} \frac{1}{\tau}} \exp \left(-\frac{\lambda_{\parallel}(0)}{3\sqrt{2}d} \frac{k_B T_c^{(2)}}{\epsilon_F} \frac{T_c^{(2)}}{T_c} \alpha_0^2 \left(\frac{\xi_{\parallel}}{\mathbf{r}} \right)^2 \right); r > \xi_{\parallel} \quad (3.60b) \end{array} \right.$$

Yukarıda $\tau = 1 - T_c/T_c^{(2)}$ eşitliği kullanılmıştır. Bu bağıntıları denklem (3.59) da yerine konduğunda kritik sıcaklık için şöyle cebirsel bir denklem bulunacaktır:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2\pi N_s(T_c) E_{\perp} \xi_{\parallel}^2}{k_B T_c} \left\{ \frac{2\pi\epsilon_F}{k_B T_c} \left(1 - \frac{T_c}{T_c^{(2)}} \right) \right. \\ &\times \frac{1 - \exp \left[-\frac{k_B T_c}{4\pi\epsilon_F} \frac{1}{1 - T_c/T_c^{(2)}} \left[1 + \frac{\pi\lambda_{\parallel}(0)}{3\sqrt{2}d} \left(\frac{T_c^{(2)}}{T_c} \right)^2 \left(1 - \frac{T_c}{T_c^{(2)}} \right) \alpha_0^2 \right] \right]}{1 + \frac{\pi\lambda_{\parallel}(0)}{3\sqrt{2}d} \left(\frac{T_c^{(2)}}{T_c} \right)^2 \left(1 - \frac{T_c}{T_c^{(2)}} \right) \alpha_0^2} \\ &\left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{k_B T_c}{\pi\epsilon_F} \frac{1}{1 - T_c/T_c^{(2)}} - 1} - \frac{\pi\lambda_{\parallel}(0)}{24\sqrt{2}d} \left(\frac{T_c^{(2)}}{T_c} \right)^2 \left(1 - \frac{T_c}{T_c^{(2)}} \right) \alpha_0^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Yukarıda (3.60b)'de verilen korelatörün uzun dalga boyunda yakınsaması için kritik sıcaklığa şöyle bir şart getirilmelidir:

$$\frac{k_B T_c}{\pi \varepsilon_F} \left(1 - \frac{T_c}{T_c^{(2)}} \right)^{-1} < 1 \quad (3.62)$$

Bu şart kritik sıcaklığın

$$T_c^* < T_c < T_c^{(2)} \quad (3.63)$$

aralığında değişmesini getirir. Bu ifadedeki T_c^* şöyle tanımlıdır:

$$\frac{1}{k_B T_c^*} = \frac{1}{k_B T_c^{(2)}} + \frac{1}{\pi \varepsilon_F} \quad (3.64)$$

Denklem (3.59), tabakalar arası bağlanma enerjisinin $E_\perp$ iki ayrı asimptotik değeri için çözülebilir. Tabakalar arası kuvvetli bağlamada

$N_0 \xi_\parallel^2 E_\perp / \varepsilon_F > 1$ veya $t_\perp > \varepsilon_F \sqrt{2\pi} / k_F \xi_\parallel$ iken kritik sıcaklık şöyle olacaktır:

$$\frac{1}{k_B T_c} = \frac{1}{k_B T_c^{(2)}} + \frac{1}{2\pi \varepsilon_F} \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{N_0 E_\perp \xi_\parallel^2} \left(1 + \frac{\lambda_\parallel(0) T_c^{(2)}}{3\sqrt{2}\pi d \varepsilon_F} \alpha_0^2 \right)} \quad (3.65)$$

Görüldüğü gibi asimptotik kritik sıcaklık ortalama alan kritik sıcaklık değeri civarındadır. Ama faz dalgalanmaları T_c 'nin değerini düşürmüştür.

Tabakalar arası zayıf bağlanmada ise $N_0 \xi_\parallel^2 E_\perp / \varepsilon_F < 1$ veya

$t_\perp < \varepsilon_F (\sqrt{2\pi} / k_F \xi_\parallel)$ kritik sıcaklık şöyle olacaktır:

$$T_c = T_c^* \left\{ 1 + \frac{k_B T_c^* N_0 E_\perp \xi_\parallel^2}{\pi \varepsilon_F^2} - \frac{\lambda_\parallel(0) \xi_\parallel^2 N_0}{3\sqrt{2}\pi^2 d} \frac{E_\perp k_B T_c^{(2)} k_B T_c^*}{\varepsilon_F^3} \alpha_0^2 \right\} \quad (3.66)$$

Bu ifadede görüldüğü gibi yüklenme parametresi α_0 arttıkça kritik sıcaklık azalmakta ve T_c^* 'a yaklaşmaktadır. Kritik sıcaklık ayrıca $E_\perp$ büyüklüğüne de lineer olmayan bir şekilde bağlıdır ve $E_\perp$ arttıkça kritik sıcaklık da artmaktadır. Bağlanma enerjisi sıfır olduğunda yüklenme etkisi olmamakta ve $T_c = T_c^*$ eşitliği sağlanmaktadır. Bu yüzden T_c^* komşu tabakalar arasında faz koheransının kaybolduğu sıcaklıktır. Eğer $\alpha_0 = 0$ alınırsa sistemde kuantum faz dalgalanmaları ihmal edilmiş olur. Bu durumda, klasik faz dalgalanmalarının kritik sıcaklığa olan etkisini (3.65) ve (3.66) ifadelerinde görmek mümkün olur.

3.3 Orta yüklenme bölgesi

Bu bölge $\hbar\bar{\omega}/4k_B T_c < 1 < (\hbar\bar{\omega}/2\sqrt{2}k_B T_c)(\lambda_\parallel(T)/d)$ veya $1 < (\pi\lambda_\parallel(0)/\sqrt{2}d)\alpha_0 T_c^{(2)}/T_c < \sqrt{2/(1 - T_c/T_c^{(2)})}\lambda_\parallel(0)/d$ eşitsizlikleri ile sınırlanmıştır. Faz korelatörünün ifadesi ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0^0 =$$

$$\begin{cases} \exp \left[-\frac{k_B T_c}{4\pi\varepsilon_F} \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\pi\alpha_0 T_c^{(2)}}{6T_c} \tau^{1/2} \ln \left(\frac{\pi\lambda_\parallel(0)\alpha_0}{\sqrt{2}d} \frac{T_c^{(2)}}{T_c} \right) \right] \left(\frac{r}{\xi_\parallel} \right)^2 \right]; & r < \xi_\parallel \quad (3.67a) \\ \left(\frac{r}{\xi_\parallel} \right)^{-\frac{2k_B T_c}{\pi\varepsilon_F} \frac{1}{r}} \left(\frac{\pi\lambda_\parallel(0)\alpha_0}{\sqrt{2}d} \frac{T_c^{(2)}}{T_c} \right)^{-\frac{2\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\pi\varepsilon_F \tau^{1/2}}}; & r > \xi_\parallel \quad (3.67b) \end{cases}$$

Bir önceki kısımda olduğu gibi kritik sıcaklık hesaplanabilir. Burada gene T_c üzerine bir sınırlama getirilmeli, kritik sıcaklık $T_c^* < T_c < T_c^{(2)}$ aralığında olmalıdır. Tabakalar arası kuvvetli bağlanma durumunda, $N_0 E_\perp \xi_\parallel^2 / \varepsilon_F > 1$ veya $t_\perp > \varepsilon_F (\sqrt{2}\pi / k_F \xi_\parallel)$ şartı geçerlidir ve kritik sıcaklık ortalama alan kritik

sıcaklığına yaklaşacaktır:

$$\frac{1}{k_B T_c} = \frac{1}{k_B T_c^*} + \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_F E_\perp N_0 \xi_\parallel^2}} \times \left[1 + \frac{\alpha_0}{6} \left(\pi^2 \frac{(k_B T_c^{(2)})^2}{4\varepsilon_F E_\perp N_0 \xi_\parallel^2} \right)^{1/4} \ln \left(\frac{\pi \lambda_\parallel(0) \alpha_0}{\sqrt{2}d} \right) \right]^{1/2} \quad (3.68)$$

Zayıf bağlanma $N_0 E_\perp \xi_\parallel^2 / \varepsilon_F < 1$ veya $t_\perp < \varepsilon_F (\sqrt{2\pi} / k_F \xi_\parallel)$ durumunda ise kritik sıcaklık şöyle olacaktır:

$$\frac{1}{k_B T_c} = \frac{1}{k_B T_c^*} - \frac{E_\perp N_0 \xi_\parallel^2}{\pi \varepsilon_F^2} \exp \left\{ -2\alpha_0 \sqrt{\frac{k_B T_c^{(2)}}{\pi \varepsilon_F}} \ln \left(\frac{\pi \lambda_\parallel(0)}{\sqrt{2}d} \alpha_0 \right) \right\} \quad (3.69)$$

Görüldüğü gibi burada yüklenmenin etkisi artmıştır.

3.4 Kuvvetli yüklenme bölgesi

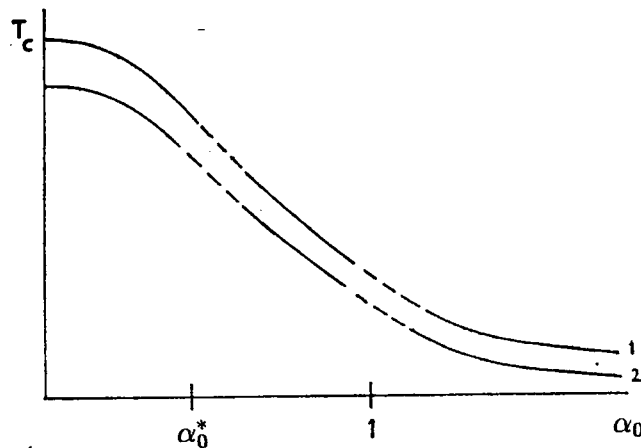
Bu durumda $\hbar\bar{\omega}/4k_B T_c > 1$ veya $(\pi\alpha_0 T_c^{(2)}/T_c)(1 - T_c/T_c^{(2)})^{1/2} > 1$ şartları kuvvetli yüklenme aralığını tanımlıyacaklardır. Burada $T_c \leq T_c^{(2)}$ ve $\sqrt{1 - T_c/T_c^{(2)}} < 1$ olduğundan $\pi T_c/T_c^{(2)} \left(1 - T_c/T_c^{(2)}\right)^{1/2} \leq 1$ şartını sağlayacaktır. Bu yüzden kuvvetli yüklenme bölgesinde $\alpha_0 > 1$ olacaktır. Limit durumunda korelatör ifadesi şöyle olacaktır:

$$\langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0^0 = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{3 \pi \epsilon_F \tau^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 \lambda_{\parallel}^2(0)}{d^2 \tau} \right) \right] \left(\frac{r}{\xi_{\parallel}} \right)^2 \right\}; & r < \xi_{\parallel} \\ \exp \left\{ -\frac{4 \alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\pi \epsilon_F \tau^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 \lambda_{\parallel}^2(0)}{d^2 \tau} \right) \right] \left(1 - \frac{\xi_{\parallel}}{r} \right) \right\}; & \xi_{\parallel} < r < \frac{\hbar \bar{\omega}}{4 k_B T_c} \xi_{\parallel} \\ \left(\frac{2 T_c}{\pi \alpha_0 T_c^{(2)} \tau^{1/2} \xi_{\parallel}} \right)^{-\frac{2 k_B T_c}{\pi \epsilon_F} \frac{1}{\tau}} \times \exp \left\{ -\frac{4 \alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\pi \epsilon_F \tau^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 \lambda_{\parallel}^2(0)}{d^2 \tau} \right) \right] \right\}; & r > \xi_{\parallel} \frac{\hbar \bar{\omega}}{4 k_B T_c} \end{cases} \quad (3.70)$$

Burada korelatör yüklenme parametresiyle eksponansiyel olarak azalmaktadır. Kritik sıcaklık ise şöyle olacaktır:

$$k_B T_c = \frac{3 \pi^3 N_0 E_{\perp} \epsilon_F \xi_{\parallel}^2}{\alpha_0 k_B T_c^{(2)} \left[1 + \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{2} \frac{\lambda_{\parallel}(0)}{d} \right) \right]} \quad (3.71)$$

Yüklenme parametresinin değeri arttıkça kritik sıcaklık sıfıra yaklaşmaktadır. Grafikte kritik sıcaklığın yüklenme ve Josephson bağlanma enerjisine göre değişimi görülmektedir.



Şekil 3.1 $T_c - \alpha_0$ grafiği ($E_{\perp}^1 > E_{\perp}^2$)

3.5 Enine Sıklık (Transvers stiffness)

Josephson bağı tabakalı süperiletkenlerde kuantum faz dalgalanmaları tek parçacık tünelleme integralini $t_{\perp}$ (veya Josephson bağlanma enerjisini) oldukça etkilemekte ve komşu tabakalar arasındaki elektron tünellemesini bastırmaktadır. Küçük değerli δ_{kl} parametresi (3.46) nolu bağıntı uyarınca renormalize olmaktadır.

Lawrence-Doniach modelinde tabakalar arasındaki Josephson bağlanması yalnız komşu tabakalar arasında meydana geldiğinden ve $g = \pm 1$ için $E_{\perp}$ sıfırdan farklı olduğundan δ^2 , $S_{\alpha}^{(0)}(g = 1, 0; T)$ ifadesiyle renormalize edilmektedir. Yeni bir büyüklük olarak $\rho_s = \delta(T)/\delta(0)$ tanımlanabilir. Bu büyüklük “enine sıklık” olarak yorumlanmıştır [117,118]. Kritik sıcaklık bu enine sıklığın kayb olduğu sıcaklıktır. Diğer bir deyişle $T > T_c$ için $\rho_s = 0$, $T < T_c$ için $\rho_s \neq 0$ olacaktır.

Enine sıklığın yüklenme parametresine olan bağılılığı sıfır sıcaklıkta ele alınacaktır. Korelatör denklem (3.50) ve (3.51) uyarınca incelenecektir. Sıfırdan farklı sıcaklık için ifadeler şöyle olacaktır:

$$\langle \cos \varphi(0) \cos \varphi(\mathbf{r}) \rangle_0^0 = \begin{cases} [\delta(T)]^{\frac{2k_B T}{\pi \epsilon_F} \tau^{-1}}; & \frac{\hbar \bar{\omega}}{2\sqrt{2}k_B T} \frac{\lambda_{\parallel}(T)}{d} < 1 \\ [\delta(T)]^{\frac{2k_B T}{\pi \epsilon_F} \tau^{-1}} \exp \left\{ \frac{k_B T}{\pi \epsilon_F} \left(\frac{\hbar \bar{\omega}}{4k_B T} \right)^2 \right\}; & \frac{\hbar \bar{\omega}}{4k_B T} < 1 < \frac{\hbar \bar{\omega}}{2\sqrt{2}k_B T} \frac{\lambda_{\parallel}(T)}{d} \\ \left[\frac{\hbar \bar{\omega} \delta(T)}{2k_B T} \right]^{\frac{2k_B T}{\pi \epsilon_F} \tau^{-1}} \exp \left\{ -\frac{3\hbar \bar{\omega}}{4\pi \epsilon_F} \tau^{-1} \right\}; & \frac{\hbar \bar{\omega} \delta(T)}{2k_B T} < 1 < \frac{\hbar \bar{\omega}}{4k_B T} \\ \exp \left\{ -\frac{\hbar \bar{\omega}}{\pi \epsilon_F} \tau [1 - \delta(T)] \right\}; & 1 < \frac{\hbar \bar{\omega} \delta(T)}{2k_B T} \end{cases} \quad (3.72)$$

Yukarıda $\tau = 1 - \frac{T}{T_c^{(2)}}$ alınmıştır. Sıfır sıcaklıkta anizotropi parametresinin renormalize ifadesi şöyle olacaktır:

$$\delta^2(0) = \delta_{kl}^2 \exp \left\{ -\frac{2\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} [1 - \delta(0)] \right\} \quad (3.73)$$

Birimsiz enine sıklık $\rho_s(\alpha_0) = \delta(0)/\delta_{kl}$ için denklem (3.73) uyarınca şu eşitlik yazılabilir:

$$\rho_s(\alpha_0) = \exp \left(-\frac{\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} [1 - \delta_{kl} \rho_s(\alpha_0)] \right) \quad (3.74)$$

Bu denklem $e^y = y/\theta$ şeklini almaktadır. Buradaki parametreler ise şöyledir:

$$y = \frac{\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \delta_{kl} \rho_s(\alpha_0) \quad \text{ve} \quad \theta(\alpha_0) = \frac{\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \delta_{kl} \exp \left(-\frac{\alpha_0 k_B T_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \right) \quad (3.75)$$

Burada $\theta(\alpha_0)$ parametresi

$$0 < \theta(\alpha_0) < \theta_{max} = \frac{\delta_{kl}}{e} \quad (3.76)$$

aralığında değişmektedir. Yükleme parametresi ise sıfır ile sonsuz arasında bir değer alabilir. Süperiletken-normal metal geçişinin meydana geldiği α_0^{kr} yükleme parametresinin kritik değeri $\theta_c = 1/e$, yani $\delta_{kl} = 1$ eşitliklerinin sağlandığı duruma karşılık gelmektedir. Sistemde tekrar bir faz geçişi olması için $\delta_{kl} > 1$ şartının sağlanması gerekir. Josephson bağlanması $\delta_{kl} \leq 1$ şartına karşılık geldiği için quasi-iki boyutlu sistemlerde, sıfır sıcaklıkta, sonlu bir α_0 değeri için süperiletken-normal metal geçişi olmamaktadır.

Sonuçlar

Bu tezde Josephson bağı tabakalı süperiletkenlerin bazı fiziksel özellikleri teorik olarak incelenmiştir. Tezin ilk kısmında tabakalı süperiletkenler için önerilen genel bir Hamiltonyenden yola çıkılarak serbest enerji fonksiyoneli, kritik sıcaklık ve üst kritik manyetik alan hesaplanmıştır. Hamiltonyende tabaka içi dışında, en yakın komşu tabakalar arasında da çiftlenme potansiyeli bulunmaktadır. Tabakalar arası çiftlenme farklı şekillerde olabilir. İki komşu tabakada bulunan elektron saçıldıktan sonra gene aynı tabakalarda kalabilirler. Bu tür bir süreç direkt etkileşme için V_1 , değiş tokuş etkileşmesi için $\tilde{V}_1$ potansiyeli ile gösterilmiştir. Veya farklı tabakalardaki iki elektrondan biri saçıldıktan sonra diğer tabakaya geçebilir. Bu etkileşme de V_{01} potansiyeli aracılığıyla olacaktır. Hamiltonyendeki son etkileşme ise, iki elektronun bir tabakadan diğerine $\tilde{V}_0$ potansiyeli ile saçılmasına aittir. Tünelleme integralinin sıfıra gittiği durumda V_{01} ve $\tilde{V}_0$ potansiyelleri de sıfıra gidecektir çünkü bunlar sırasıyla $t_{\perp}$ ve $t_{\perp}^2$ ile orantılıdır. Tabaka içi $\Delta_{00}^*(\mathbf{r}; j, j)$ ve tabakalar arası $\Delta_{01}^*(\mathbf{r}; j, j+1)$ iki etkin düzen parametresi tanımlanmış ve Gorkov-Nambu mikroskobik teorisi yardımıyla bunların sağladığı denklemler bulunmuştur. Bu denklemler, tünelleme integralinin $t_{\perp} < k_B T_c^{(0)} < \varepsilon_F$ şartını sağlayan küçük değerlerinde, tabakalar arasında Josephson bağlanmasının olduğu durumları tasvir etmektedir.

Serbest enerji fonksiyoneli (2.39) elde edilmiş ve üst kritik manyetik alan hesaplanmıştır. Hamiltonyene eklenen tabakalar arası çiftlenme potansiyelleri V_{01} , $\tilde{V}_0$ ve $\tilde{V}_1$ 'in tabakalı süperiletkenlerin özelliklerine etkileri şöyle özetlenebilir:

- 1) Tabaka içi ve arası yerel kritik sıcaklıkları T_{c_0} ve T_{c_1} , $\tilde{V}_0$ ve $\tilde{V}_1$ etkileşmeleri sayesinde artmıştır.
- 2) En yakın komşu tabakalar arasında, tabaka içi ve arası çiftlerin Josephson bağlanma enerjilerini veren $E_{\perp}^0$ ve $E_{\perp}^1$ 'in büyüklükleri, $\tilde{V}_0$ ve $\tilde{V}_1$ potansiyelleri sayesinde artmıştır. $E_{\perp}^1$, V_{01} potansiyelinin etkisiyle küçük bir artışa sahip

olmaktadır. Bu artış bandın doluluk miktarına bağlı olmaktadır. Bunun yanında tabakalar arası çiftlerin saçılmasına yol açan $\tilde{V}_0$ potansiyeli $E_{\perp}^0$ 'ın değerini önemli ölçüde arttırmaktadır.

3) Serbest enerjideki önemli terimlerden bir tanesi Lifschitz değişmezidir. Bu terimin katsayısı E_{01} iki düzen parametresinin etkileşme miktarını vermektedir. Yalnızca V_0 ve V_1 etkileşmelerine sahip bir sistemde, E_{01} elektron bandının doluluğuna bağlı olmakta ve bu terim bandın ortasında sıfır olmaktadır (2.49). Ancak sistemde V_{01} potansiyeli E_{01} 'in değerini yükseltmekte ve bu terimin band doluluğuna bağlılığını kaldırmaktadır.

4) Kritik sıcaklık T_c , yerel çiftlenme sıcaklıkları T_{c_0} ve T_{c_1} ile Lifschitz değişmezi E_{01} 'in bir fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Bu büyüklüklerin değerleri, V_1 , $\tilde{V}_0$ ve V_{01} potansiyelleri nedeniyle arttığından kritik sıcaklık da yükselmiştir.

5) Üst kritik manyetik alanın hem tabakalara dik hem de tabakalara paralel bileşeni hesaplanmıştır. Tabakalar arası potansiyeller H_{c_2} değerini arttırmıştır. Üst kritik manyetik alanın her iki bileşeni de sıcaklığa lineer olmayan bir şekilde bağlıdır. Üst kritik manyetik alan için elde edilen sonuçlar, YSS'lerde H_{c_2} 'nin sıcaklığa bağlı olarak değişimindeki yukarı doğru kavisi anlamaya imkan vermektedir.

Tezin ikinci kısmında ise düzen parametresinin fazının kuantum dalgalanmalarının Josephson bağlı tabakalı süperiletkenlerin kritik sıcaklığına etkisi incelenmiştir. Tabakaların yüklenme miktarını veren birimsiz α_0 parametresi geniş bir aralıkta değişmektedir. Kritik sıcaklığı hesaplamak için kendi kendisiyle tutarlı ortalama alan yaklaşımı kullanılmıştır. Kritik sıcaklık için elde edilen bağıntıda faz-faz korelatörü $\langle \cos(\varphi(0) - \varphi(\mathbf{r})) \rangle_0^{(0)}$ bulunmaktadır. Bu faz-faz korelatörü kendi kendisiyle tutarlı harmonik yaklaşımla hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır:

6) Yüklenmenin zayıf olduğu durumda kritik sıcaklık $T_c^* < T_c < T_c^{(2)}$ aralığında değişmektedir. Burada $T_c^{(2)}$ ortalama alan yolu ile bir tabaka için hesaplanan kritik sıcaklıktır. T_c^* ise denklem (3.64)'de verilmiştir. Büyük mesafelerde faz-faz korelatörünün uzaklığa bir kuvvetle bağlı olduğundan kritik sıcaklık için bir alt sınır olmaktadır. Denklem (3.66) ve (3.69)'dan görüldüğü gibi $E_{\perp}$ azaldıkça kritik sıcaklık T_c^* 'a yaklaşmaktadır. Bu yüzden T_c^* , süperiletken tabakalar

arasındaki eş fazlılığın bozulduğu sıcaklık olacaktır.

7) Güçlü yüklenmenin olduğu durumda faz-faz korelatörü α_o 'la üssel olarak azalmaktadır. Bu yüzden bu korelatörün denklem (3.70)'deki katkısı küçük kalacaktır. Denklem (3.71) uyarınca α_o 'ın arttıkça kritik sıcaklık sıfıra doğru gidecektir. Yüklenmenin kritik sıcaklığa etkisi şekil (3.1)'de verilmiştir.

8) Kritik sıcaklık için elde edilen sonuçlara göre, yüklenme parametresi α_0 'ın sonlu herhangi bir değeri için süperiletkenlikten normal metal duruma geçiş olmamaktadır. Enine sıklığın sıfır derece sıcaklıkta yüklenme parametresine olan bağılılığı da bu görüşü desteklemektedir. Sıfır sıcaklıkta enine sıklık artan α_0 'la birlikte monoton olarak azalmaktadır. Süperiletken-normal metal geçişinin olabilmesi için $\delta_{kl} \geq 1$ olmalıdır. Bu şart ise $t_{\perp} > k_B T_c^{(2)}$ anlamına gelmektedir. Bu eşitsizlikler tabakalar arasında Josephson bağlanma olabilmesi şartıyla çeliştiğinden tekrar geçişi olmadığı sonucuna varılır.

KAYNAKLAR

- [1] **J.G.BEDNORZ, K.A.MÜLLER**, Z. Phys. B **64**, 189 (1986)
- [2] **H. TAGAKI, S.UCHIDA, K.KITAZEWA, S.TANAKA**, Jap. J. Appl. Phys. **26**, 123 (1987)
- [3] **J.R.GAVALER**, Appl. Phys. Lett. **23**, 480 (1973)
- [4] **C.N.CHU, P.H.HOR, R.L.MENG, L.GAO, Z.J.HUANG, T.Q.WANG**, Phys. Rev. Lett. **58**, 405 (1998)
- [5] **R.J.CAVA, B.BATTLOG, R.B. VAN DOVER, D.W.MURPHY, S. SUNSHINE, T. SIEGRIST, J.P.REMEIKA, E.A.RIETMAN, S.ZAHURAK, G.P.ESPINOSA**, Phys. Rev. Lett. **58**, 1676 (1987)
- [6] **M.K.WU, J.R.ASHBURN, C.J.TORNG, P.H.HOR, A.L.MENG, C.W.CHU** Phys. Rev. Lett. **58**, 908 (1987)
- [7] **H.MAEDA, Y.TANAKA, M.F.FUKITOMI, T.AZANO**, Jpn. J. Appl. Phys. **27**, L209 (1988)
- [8] **Z.Z.SHENG, A.M.HERMANN**, Nature **232**, 55 (1988)
- [9] **F.BEECH, S.MIRAGLIA, A.SANTARO, R.S.TOTH**, Phys. Rev. B **35**, 8778 (1987)
- [10] **S.A.SUNSHINE, T.SIEGRIST, L.F.SCHNEEMEYER, W.F.PECK** Phys. Rev. B **38**, 839 (1988)
- [11] **O.LABORDE, J.L.THOLENCE, P.MONCEAU, H.NOEL** Physica C **162**, 1619 (1989)
- [12] **D.R.HARSHMAN, L.F.SCHNEEMEYER, J.V.WASZCZAK, G.AEPPLI, R.J.JAVA, B. BATTLOG, L.W.RUPP**, Phys. Rev. B **39**, 851 (1989)
- [13] **A.UMEZAWA, G.W.CRABTREE, J.Z.MORAN, S.K.MALIK, L.H.NUMEZ, W.L.KWOK, C.H.SOWERS**, Phys. Rev. B **38**, 2843 (1988)
- [14] **F.SHI, T.S.RONG, S.Z.ZHOU, X.F.WU, J.DU, Z.H.SHI, G.CUI, Y.JIN, J.L.ZHANG, N.C.SHI**, Phys. Rev. B **41**, 6541 (1990)

- [15] **A.SHILLING, F.HULLIGER, H.R.OTT**, Z.Phys.B **82**, 9 (1991)
- [16] **D.R.HARSHMAN, R.N.KLEIMAN, M.INUI, G.P.ESPINOSA, D.B.MITZI, A.KAPITULNIK, T.PFIZ, D.L.WILLIAMS**, Phys. Rev. Lett. **67**, 3152 (1991)
- [17] **J.BARDEEN, L.N.COOPER, J.R.SCHRIEFFER**, Phys.Rev. **108**, 1175, (1957)
- [18] **B.BATTLOG, R.J.CAVA, A.JAYARAMAN, G.KOUROUKLIS, E.A.RIETMAN, L.W.RUPP, K.T.SHORT, W.WEBER, A.E.WHITE** Phys. Rev. Lett. **59**, 912 (1987)
- [19] **E.BENITEZ, M.K.CRAWFORD, W.E.FARNETH, J.J.LIN, E.M.MC CARRON, S.J.POON**, Phys. Rev. B **38**, 5025 (1988)
- [20] **P.W.ANDERSON**, Science **235**, 1196 (1987)
- [21] **G.KOTLIAR**, Phys. Rev. B **37**, 3664 (1988)
- [22] **J.R.SCHRIEFFER, X.G.WEN, S.C.ZHANG**, Phys. Rev. Lett. **60**, 944, (1988)
- [23] **A.S.ALEXANDROV, J.R.RANNINGER, S.POLASHKEWICZ**, Phys. Rev. B **33**, 4526 (1986)
- [24] **M.K.CRAWFORD, M.KUNCHUR, W.E.FARNETH, E.M.MCCARRON**, Phys. Rev. B **41**, 282 (1990)
- [25] **J.P.FRANCK, J.JUNG, M.A-K.MOHAMED, S.OYGAX, G.I.SPROULE**, Phys. Rev. B **44**, 5318 (1991)
- [26] **R.S.MARKIEWICZ**, Int.J.Mod.Phys.B **5**, 2037 (1991)
- [27] **E.DAGOTTO, A.NAZARENKO, A.MOREO**, Phys. Rev. Lett. **74**, 310, (1995)
- [28] **W.A.LITTLE**, Phys.Rev.A **134**, 1416 (1964)
- [29] **D.JEROME, H.I.SCHULZ**, Adv. Phys. **31**, 299 (1982)
- [30] **F.R.GAMBLE, F.J.DISALVO, R.A.KLEMM, T.H.GEBALLE**, Science **168**, 568 (1970)
- [31] **M.INOUE, R.TAKEMORI, K.OHTAKA, R.YOSHIZAKI, T.SAKUDO**, J. Phys. Soc. Japan, **56**, 3622 (1987)
- [32] **ZS.GULACSI, M.GULACSI, I.POP**, Phys.Rev.B **37**, 2247 (1988)

- [33] **T.SCHNEIDER,H.DE RAEDT, M.FRICK**, Z.Phys.**76**, 3 (1989)
- [34] **E.P.NAKHMEDOV**, Phys.Rev.B **54**, 6624 (1996)
- [35] **Y.SUWA,Y.TANAKA, M.TSUKADA**, Phys.Rev.B **39**, 911 (1989)
- [36] **Y.SUWA, M.TSUKADA**, Phys.Rev.B **41**, 2113 (1990)
- [37] **L.N.BULAEVSKII, M.V.ZYSKIN**, Phys.Rev.B **42**, 10230 (1990)
- [38] **R.A.KLEMM, S.H.LIU**, Phys.Rev.B **44**, 7526 (1990)
- [39] **S.H.LIU, R.A.KLEMM**, Phys.Rev.B **45**, 415 (1992)
- [40] **K.B.EFETOV**, Phys.Rev.B **43**, 5538 (1991)
- [41] **Z.TEŠANOVIĆ**, Phys.Rev.B **36**, 2364 (1987)
- [42] **L.P.GORKOV, T.K.MELIK-BARKHUDAROV**, Zh.Eksp.Teor.Fiz. **45**, 1493 (1963) [Sov.Phys. JETP **18**, 1031 (1964)]
- [43] **W.E.LAWRENCE, S.DONIACH**, Proc. 12-th Int.Conf. on Low Temperature Physics ed. E.Kanda (Academic, Tokyo, Japan,1971, s.361)
- [44] **L.N.BULAEVSKII**, Zh.Eksp.Teor.Fiz.**64**,2241 (1973) [Sov.Phys-JETP **37**, 1133 (1973)]
- [45] **R.A.KLEMM, M.R.BEASLEY, A.LUTHER**, Phys.Rev.B **12**, 877 (1975)
- [46] **R.KLEINER, P.MÜLLER, H.KOHLSTEDT, N.F.PEDERSEN, S.SEKAI**, Phys. Rev. B **50**, 3942 (1994)
- [47] **R.KLEINER, F.STEINMEYER, G.KUNKEL, P.MÜLLER**, Phys. Rev. Lett. **68**, 2394 (1992)
- [48] **S.H.LIU, R.A.KLEMM**, Phys. Rev. B **48**, 4080 (1993)
- [49] **T.WORTHINGTON, W.GALLAGHER, T.DINGER**, Phys. Rev. Lett. **59**, 1160 (1987)
- [50] **M.ODA, Y.HIDAKA, M.SUZUKI**, Phys. Rev. B **38**, 252 (1988)
- [51] **U.WELP, W.KWOK, G.CRABTREE, K.VANDERVOOT, J.LIU**, Phys. Rev. Lett. **62**, 1908 (1989)
- [52] **L.D.LANDAU, E.M.LIFSHITZ**, Statistical Physics, London Pergamon Press 1958 s.344

- [53] **C.N.YANG**, Rev.Mod.Phys.,**34**,694 (1962)
- [54] **T.M.RICE**, Phys.Rev.,**A140**,1889 (1965)
- [55] **L.G.ASLAMAZOV**, **A.I.LARKIN**, Phys.Lett.A **26**, 238 (1968)
- [56] **K.MAKI**, Prog.Theor.Phys. **39**, 897 (1968)
- [57] **K.MAKI**, Prog.Theor.Phys. **40**, 193 (1968)
- [58] **R.S.THOMSON**, Phys. Rev. B **1**, 327 (1970)
- [59] **M.RASOLT**, **Z.TEŠANOVIĆ**, Rev.Mod.Phys. **64**, 709 (1992)
- [60] **P.W.ANDERSON**, Lectures on the Many Body Problem (editor: E.R. CAINELLO, Academic Press, New York, 1964, Vol2, s127)
- [61] **B.ABELES**, Phys. Rev. B **15**, 2828 (1977)
- [62] **K.B. EFETOV**, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **78**, 2017 (1980) [Sov-Phys. JETP **51**, 1015 (1980)]
- [63] **W.L.MCLEAN**, **M.J.STEPHEN**, Phys. Rev. B **19**, 5925 (1979)
- [64] **S.DONIACH**, Phys. Rev. B **24**, 5063 (1981)
- [65] **W.ZWERGER**, Solid St. Comm. **62**, 285 (1987)
- [66] **E.GRANATO**, **M.A.CONTINENTINO**, Phys. Rev. B **48**, 15977 (1993)
- [67] **MATTHEW P.A.FISHER**, Phys. Rev. B **36**, 1917 (1987)
- [68] **E.SIMÁNEK**, **R.BROWN**, Phys. Rev. B **34**, 3495 (1988)
- [69] **E.P.NAKHMEDOV**, **O.ÇAKIROĞLU**, **M.HÜNER**, **K.AL-SHIBANI**, Physica C **296**, 302 (1998)
- [70] **N.D.MERMIN**, **H.WAGNER**, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966)
- [71] **V.I.BEREZINSKII**, Sov.Phys. JETP **34**, 610 (1971)
- [72] **J.M.KOSTERLITZ**, **D.J.THOULESS**, J.Phys.C **5**, L124 (1972)
- [73] **S.DONIACH**, **B.A.HUBERMAN**, Phys. Rev. Lett. **42**, 1169 (1979)
- [74] **B.I.HALPERIN**, **D.R.NELSON**, J.Low Temp.Phys. **36**, 599 (1979)

- [75] **P.MINNHAGEN**, Phys. Rev. B **23**, 5745 (1981)
- [76] **P.MINNHAGEN, H.WEBER**, Phys. Rev. B **32**, 3337 (1985)
- [77] **D.J.RESNICK, J.C.GARLAND, J.T.BOYD, S.SHOEMAKER, R.S.NEWROCK**, Phys. Rev. Lett. **47**, 1542 (1981)
- [78] **D.W.ABRAHAM, C.J.LOBB, M.TINKHAM, T.M.KLAPWIJK**, Phys. Rev. B **26**, 5268 (1982)
- [79] **A.T.FIORY, A.F.HEBARD, W.I.GLABERSON**, Phys. Rev. B **28**, 5075 (1983)
- [80] **S.E.KORSHUNOV**, Europhys. Lett. **11**, 757 (1990)
- [81] **B.HOROVITZ**, Phys. Rev. B **47**, 5947 (1993)
- [82] **B.HOROVITZ**, Phys. Rev. B **47**, 5964 (1993)
- [83] **G.BLATTER, M.V.FEIGELMAN, V.B.GESHKENBEIN, A.I.LARKIN, V.M.VINOKUR**, Rev.Mod.Phys. **66**, 1125 (1994)
- [84] **R.T.COLLINS, Z.SCHLESINGER, F.HOLTZBERG, C.FEILD**, Phys. Rev. Lett. **63**, 422 (1989)
- [85] **M.GURVITCH, J.M.VALLS, JR. A. M. CUCOLO, R.C.DYNES, J.P.GARNO, L.F.SCHNEEMEYER, J. V. WASZCZAK**, Phys. Rev. Lett. **63**, 1008 (1989)
- [86] **T.EKINO, J.AKIMUTSU**, Phys.Rev.B **40**, 6902 (1989)
- [87] **G.BRICANO, A.ZETTLE**, Solid State Commun. **70**, 1055 (1989)
- [88] **Z.SCHLESINGER, R.T.COLLINS, F.HOLTZBERG, C.FEILD, S.H.BLANTON, U.WELP, G.W.CRABTREE, Y.FANG, J.Z.LIU**, Phys.Rev.Lett. **65**, 801 (1990)
- [89] **K.MC CARTY, J.Z.LIU, R.N.SHELTON, H.B.RADOUSKY**, Phys.Rev.B **42**, 9973 (1990)
- [90] **N.BULUT, D.J.SCALAPINO**, Phys. Rev. B **54**, 14971 (1996)
- [91] **E.H.HWANG, S.DAS SARMA**, Phys. Rev. B **52**, 7010 (1995)
- [92] **Z.TEŠANOVIĆ**, Phys.Rev.B **38**, 2489 (1988)
- [93] **L.P.GORKOV**, Zh.Eksp.Teor.Fiz., **34**, 735 (1958)

- [94] **A.A.ABRIKOSOV, L.P.GORKOV, I.YE.DZYALOSHINSKII**, Quantum Field Theoretical Methods in Quantum Statistical Physics, 1965 (Oxford:Pergamon s:293)
- [95] **N.W.MC.LACHLAN**, Theory and Application of Mathieu Functions, 1964 (New York:DoVer s:61)
- [96] **B.S.CHANDRASEKHAR**, Appl.Phys.Lett. **1**, 7 (1962)
- [97] **A.M.CLOGSTON**, Phys. Rev. Lett. **9**, 266 (1962)
- [98] **L.N.BULAEVSKII, V.L.GINZBURG, A.A.SOBYANIN**, Physica C **152**, 378 (1988)
- [99] **E. ŠIMÁNEK**, Phys. Rev. Lett. **45**, 1442 (1980)
- [100] **S. MAEKAWA, H. FUKUYAMA, S. KOBAYASHI**, Solid State Commun. **37**, 45 (1980)
- [101] **E. ŠIMÁNEK**, Solid State Commun., **31**, 419 (1979)
- [102] **E. ŠIMÁNEK**, Phys. Rev. **B22**, 459 (1980)
- [103] **S. DONIACH, M. INUI**, Phys. Rev. **B41**, 6668 (1990)
- [104] **S. CHAKRAVARTY, G. INGOLD, S. KIVELSON, A. LUTHER**, Phys. Rev. Lett., **56**, 2303 (1986)
- [105] **A. KAMPF, G. SCHÖN**, Phys. Rev. **B37**, 5954 (1988)
- [106] **E. ŠIMÁNEK**, Phys. Rev. **B32**, 500 (1985)
- [107] **G. DEUTSCHER, Y. IMRY, L. GUNTHER**, Phys. Rev. **B10**, 4598 (1974)
- [108] **W.Y. SHIH, C. EBNER, D. STROUD**, Phys. Rev. **B30**, 134 (1984)
- [109] **Y. IMRY, M. STRONGIN**, Phys. Rev. **B24**, 6353 (1981)
- [110] **P. FAZEKAS**, Z. Phys., **B45**, 215 (1982)
- [111] **K.B. EFETOV, A.I. LARKIN**, Zh. Eksp. Teor. Fiz. , **66**, 2290 (1973) [Sov-Phys. JETP,**39**, 1129, (1974)]
- [112] **E.P. NAKHMEDOV, YU.A. FIRSOV**, Physica C **295** 150 (1998)
- [113] **B.D.JOSEPHSON**, Phys.Lett. **1**, 251 (1962)

- [114] **S.N. ARTEMENKO, A.N. KRUGLOV**, Physica **C173**, 125 (1991)
- [115] **L.N. BULAEVSKII, M. ZAMORA, D. BAERISWYL, H. BECK, J.R.CLEM**, Phys. Rev. **B50**, 12831 (1994)
- [116] **L.N. BULAEVSKII, D. DOMINGUEZ, M.P. MALEY, A.R. BISHOP, B.IVLEV**, Phys. Rev. **B53**, 14601 (1996)
- [117] **V.L. BREZINSKII**, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **61**, 1144 (1971) [Sov–Phys. JETP **34**, 610 (1972)]
- [118] **V.L. POKROVSKII, G.V. UIMIN**, Zh. Eksp. Teor. Fiz., **65**, 1691 (1973) [Sov–Phys. JETP **38**, 847 (1974)]



EK A

Tabakalar arası Green fonksiyonunun açılımı (2.27)'de verilmişti. Bu açılımda $t_{\perp}^2$ mertebesine kadar olan terimler alınırsa G_i^0 fonksiyonlarının ifadeleri şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned} G_0^0(\mathbf{p}, \omega_n) &= g^0(\mathbf{p}, \omega_n) - \frac{t_{\perp}^2}{2} (g^0(\mathbf{p}, \omega_n))^3 \\ G_1^0(\mathbf{p}, \omega_n) &= \frac{t_{\perp}}{2} g^0(\mathbf{p}, \omega_n)^2 + \frac{3t_{\perp}^3}{8} (g^0(\mathbf{p}, \omega_n))^4 \\ G_2^0(\mathbf{p}, \omega_n) &= \left(\frac{t_{\perp}}{2}\right)^2 (g^0(\mathbf{p}, \omega_n))^3 \end{aligned} \quad (A.1)$$

Yukarıdaki ifadede iki boyutlu elektron gazının Green fonksiyonu

$$g^0(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p} \quad (A.2)$$

olacaktır. Matsubara frekansı $\omega_n = \pi T(2n + 1)$ $n = 0, 1 \dots$ ile verilmektedir. Süperiletkenlikle ilgili süreçler Fermi yüzeyi civarında ince bir kabukta ($\Delta \ll \varepsilon_F$) meydana geldiğinden, enerji bağıntısı Fermi enerjisi civarında lineerleştirilmiş şekilde hesaplara dahil edilecektir.

$$\xi_p = v_F(|p| - p_F) \quad (A.3)$$

Bu hatırlatmalardan sonra (2.37)'de verilen bağıntıların hesaplanmaları aşağıdaki gibi olacaktır:

i) İlk hesaplayacağımız katsayı K_{00}^0 olacaktır:

$$K_{00}^0 = T \sum_n \int d^2 r_1 G_0^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_n) G_0^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_n) \quad (A.4)$$

Fourier dönüşümü alındıktan sonra bu ifade

$$K_{00}^0 = T \sum_n \int G_0^0(\mathbf{p}, \omega_n) G_0^0(\mathbf{p}, -\omega_n) \quad (A.5)$$

şekline gelecektir. Bundan sonra (A.1)'deki açılımlar yazılırsa

$$\begin{aligned} K_{00}^0 &= T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} g^0(\mathbf{p}, \omega_n) g^0(\mathbf{p}, -\omega_n) \\ &\times \left[1 - \frac{t_\perp^2}{2} (g^0(\mathbf{p}, \omega_n))^2 - \frac{t_\perp^2}{2} (g^0(\mathbf{p}, -\omega_n))^2 \right] \end{aligned} \quad (A.6)$$

elde edilir. Aşağıdaki gibi değişken dönüşümleri gerçekleştirildikten, açı üzerinden integral alındıktan

$$d\xi_p = v_F dp \quad p dp = p_F \frac{d\xi_p}{v_F} \quad \int \int d^2 p \rightarrow 2\pi \int p_F \frac{d\xi_p}{v_F} \quad (A.7)$$

ve frekans üzerinden yapılan toplam $\sum_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 2 \sum_1^{\infty}$ haline getirildikten ve $x = \frac{\xi_p}{\pi T}$ dönüşümü yapıldıktan sonra (A.6) ifadesi şu hali alır:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{p_F}{v_F \pi} \sum_1^{\infty} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{dx}{2\pi} \frac{2}{(2n-1)^2 + x^2} \\ &\times \left\{ 1 + \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{1}{(2n-1)^2 + x^2} - 2 \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{x^2}{[(2n-1)^2 + x^2]^2} \right\} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Bu ve bundan sonraki integrallerde karşımıza çıkacak olan toplamaları yaparken aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} = y(x) \quad (A.9)$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)^2 + x^2]^2} = -\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} y(x) \quad (A.10)$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)^2 + x^2]^3} = \frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} y(x) \right) \quad (A.11)$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)^2 + x^2]^4} = -\frac{1}{6x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} y(x) \right) \right) \quad (A.12)$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{[(2n-1)^2 + x^2]^4} = \frac{1}{8x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{6x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} y(x) \right) \right) \right) \quad (A.13)$$

Toplamlar yapıldıktan sonra K_{00}^0 şu hali alır:

$$K_{00}^0 = \int_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} dx \left\{ \frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} - \left(\frac{t_{\perp}}{\pi T} \right)^2 \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) - \left(\frac{t_{\perp}}{\pi T} \right)^2 \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right] \right\} \quad (A.14)$$

$\frac{\pi x}{2} = y$ dönüşümü yapıldıktan sonra ve 3. terimin kısmi integrali sonucunda K_{00}^0 için

$$K_{00}^0 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} dy \left\{ \frac{\tanh y}{y} - \left(\frac{t_{\perp}}{4T} \right)^2 \frac{1}{y} \frac{d}{dy} \left(\frac{\tanh y}{y} \right) \right\} - \left(\frac{t_{\perp}}{4T} \right)^2 \frac{d}{dx} \frac{\tanh y}{y} \Big|_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \quad (A.15)$$

eşitliğine ulaşılır. 2. terimin kısmi integrali yapıldıktan sonra K_{00}^0 aşağıdaki gibi olur:

$$K_{00}^0 = \frac{m}{2\pi} \int_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} dy \left\{ \frac{\tanh y}{y} - \left(\frac{t_{\perp}}{4T} \right)^2 \frac{\tanh y}{y^3} \right\} - \left(\frac{t_{\perp}}{4T} \right)^2 \frac{\tanh y}{y^2} \Big|_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} - \left(\frac{t_{\perp}}{4T} \right)^2 \frac{d}{dy} \left(\frac{\tanh y}{y} \right) \Big|_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \quad (A.16)$$

Integral iki bölüme ayrılarak $\int_0^1$ ve $\int_1^{\frac{\omega_D}{\pi T}}$ aralıkları ayrı ayrı hesaplanabilir. $0 < y < 1$ aralığında $\tanh y/y \sim 1$, $1 < y < \omega_D/2T$ aralığında ise $\tanh y/y \sim 1/y$ olarak hesaplara alınabilir:

$$K_{00}^0 \simeq \frac{m}{2\pi} \left\{ \int_0^1 dy \left[1 - \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \frac{1}{y^2} \right] + \int_1^{\frac{\omega_D}{2T}} dy \left[\frac{1}{y} - \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \frac{1}{y^3} \right] - \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \frac{\tanh y}{y^2} \Big|_0^{\frac{\omega_D}{2T}} - \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \left(-\frac{\tanh y}{y^2} + \frac{1}{y \coth y} \right) \Big|_0^{\frac{\omega_D}{2T}} \right\} \quad (A.17)$$

Bu integraller de hesaplandıktan sonra aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$K_{00}^0 = \left[y + \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \frac{1}{y} \right] \Big|_0^{\frac{\omega_D}{2T}} + \left[\ln y + \frac{1}{2} \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \frac{1}{y^2} \right] \Big|_1^{\frac{\omega_D}{2T}} - \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \left[\frac{2T}{\omega_D} \frac{1}{\coth^2 \frac{\omega_D}{2T}} - \frac{1}{\delta} \right] \quad (A.18)$$

Sınırlardaki değerler yerlerine konup gerekli işlemler yapıldıktan sonra K_{00}^0 elde edilmiş olur:

$$K_{00}^0 = \frac{m}{2\pi} \left\{ \ln \frac{e\omega_D}{2T} + \frac{1}{2} \left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{2T}{\omega_D} \right)^2 \right] \right\} \quad (A.19)$$

Diğer K_{ij}^a katsayıları hesaplanırken de benzer değişken dönüşümleri ve yaklaşımlar yapılacaktır.

ii) Burada K_{01}^0 katsayısının hesaplanması verilmektedir.

$$K_{01}^0 = T \sum_n \int d^2 r_1 G_{j+1,j}^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_n) G_{jj}^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_n) \quad (A.20)$$

Fourier dönüşümü alınır.

$$K_{01}^0 = T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G_1^0(\mathbf{p}, -\omega_n) G_0^0(\mathbf{p}, \omega_n) \quad (A.21)$$

$$\begin{aligned}
K_{01}^0 &= T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{t_\perp}{2} (g^0(\mathbf{p}, -\omega_n))^2 + \frac{3t_\perp^3}{8} (g^0(\mathbf{p}, -\omega_n))^4 \right\} \\
&\quad \times \left\{ g^0(\mathbf{p}, \omega_n) - \frac{t_\perp^2}{2} (g^0(\mathbf{p}, -\omega_n))^3 \right\} \\
&= T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{t_\perp}{2} \frac{-i\omega_n - \xi_p}{(\omega_n^2 + \xi_p^2)^2} \\
&= -\frac{t_\perp}{2} \frac{T}{(\pi T)^4} \int \frac{p dp}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi_p}{\left[(2n-1)^2 + \left(\frac{\xi_p}{\pi T} \right)^2 \right]^2} \\
&= -\frac{t_\perp}{2} \frac{T}{(\pi T)^4} \frac{p_F}{v_F} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{\xi_p}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\xi_p}{\left[(2n-1)^2 + \left(\frac{\xi_p}{\pi T} \right)^2 \right]^2} \quad (A.22)
\end{aligned}$$

$\bar{\xi} = \frac{\xi_p}{\pi T}$ dönüşümü yapılır.

$$K_{01}^0 = -\frac{t_\perp}{2\pi} \frac{mT}{(\pi T)^4} \int_{-\frac{\omega_D}{\pi T}}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \pi T \frac{d}{dx} \bar{\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\xi}}{\left[(2n-1)^2 + \left(\frac{\bar{\xi}}{\pi T} \right)^2 \right]^2} \quad (A.23)$$

$$\begin{aligned}
K_{01}^0 &= \frac{t_\perp m \pi k_B T}{4\pi^4 T^2} \int_{-\frac{\varepsilon_F}{\pi k_B T}}^{\frac{-\varepsilon + \varepsilon_F}{\pi k_B T}} d\bar{\xi} \frac{d}{d\bar{\xi}} \left(\frac{\pi}{4\bar{\xi}} \tanh \frac{\pi \bar{\xi}}{2} \right) \\
&= \frac{t_\perp \pi m}{16\pi^3 k_B T} \left\{ \frac{\pi k_B T}{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F} \tanh \frac{\bar{\varepsilon} - \varepsilon_F}{2k_B T} - \frac{\pi k_B T}{\varepsilon_F} \tanh \frac{\varepsilon_F}{2k_B T} \right\} \\
&\Rightarrow \frac{\nu_0^{2d}}{8} \frac{t_\perp}{\varepsilon_F} \left[\frac{\tanh \left(\frac{\varepsilon_F}{2k_B T} (1 - \mu_\parallel) \right)}{1 - \mu_\parallel} - \tanh \left(\frac{\varepsilon_F}{2k_B T} \right) \right] \quad (A.24)
\end{aligned}$$

iii) K_{02}^0 katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
K_{02}^0 &= T \sum_n \int d^2 r_1 G_{jj}^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_n) G_{j-1, j+1}^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_n) \\
&= T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G_0^0(\mathbf{p}, -\omega_n) G_2^0(\mathbf{p}, \omega_n) \quad (A.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{02}^0 &\simeq T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(\frac{t_\perp}{2} \right)^2 (g^0(\mathbf{p}, \omega_n))^3 g^0(\mathbf{p}, -\omega_n) \\
&= \left(\frac{t_\perp}{2} \right)^2 T \int \frac{dp}{2\pi} \sum_n \frac{-\omega_n^2 + \xi_p^2}{(\omega_n^2 + \xi_p^2)^3} \\
&= \left(\frac{t_\perp}{2} \right)^2 T \int \frac{dp}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ -\frac{1}{(\pi T)^4 [(2n-1)^2 + x^2]^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2x^2}{(\pi T)^4 [(2n-1)^2 + x^2]^3} \right\} \quad (A.26)
\end{aligned}$$

$p dp \rightarrow p_F \frac{d\xi}{v_F}$ dönüşümü yapılır:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{\nu_0^{2d}}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_D}{\pi T}}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} dx \left\{ \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right] \right\} \quad (A.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{02}^0 &= \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{\nu_0^{2d}}{16} \left\{ \int dx \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) - \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_{-\frac{\omega_D}{\pi T}}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \right\} \quad (A.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{02}^0 &= \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{\nu_0^{2d}}{32} \left\{ \left[\frac{1}{x^2} \tanh \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2x \cosh^2 \frac{\pi x}{2}} - \frac{1}{x^2} \tanh \frac{\pi x}{2} \right] \Big|_{-\frac{\omega_D}{\pi T}}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\frac{\omega_D}{\pi T}}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \frac{dx}{x^3} \tanh \frac{\pi x}{2} \right\} \\
&= \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{\nu_0^{2d}}{32} \left\{ \pi \left(\frac{\pi T}{\omega_D \cosh^2 \frac{\pi x}{2}} - \frac{1}{\delta} \right) - \frac{\pi}{x} \Big|_0^{2/\pi} - \frac{1}{x^2} \Big|_{2/\pi}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \right\} \\
&= \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{\nu_0^{2d}}{32} \left\{ \frac{\pi^2 T}{\omega_D \cosh^2 \frac{\pi x}{2}} - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2 T^2}{\omega_D^2} + \frac{\pi^2}{4} \right\} \\
&= - \left(\frac{t_\perp}{2T} \right)^2 \frac{\nu_0^{2d}}{32} \left[1 + \left(\frac{2T}{\omega_D} \right)^2 \right] \quad (A.29)
\end{aligned}$$

iv) K_{11}^0 katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 K_{11}^0 &= T \sum_n \int d^2 r_1 G_1^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_n) G_1^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_n) \\
 &= T \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G_1^0(\mathbf{p}, -\omega_n) G_1^0(\mathbf{p}, \omega_n) \\
 &= \left(\frac{t_\perp}{2}\right)^2 T \sum_n \int \frac{p dp}{2\pi} \frac{1}{(\omega_n^2 + \xi_p^2)^2} \\
 &= \left(\frac{t_\perp}{2}\right)^2 \frac{p_F}{2\pi v_F} T \sum_n \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{2(\pi T)^4}{\left[(2n-1)^2 + \left(\frac{\xi}{\pi T}\right)^2\right]^2} \\
 &= \left(\frac{t_\perp}{2\pi T}\right)^2 \frac{2\nu_0^{2d}}{\pi^2 T} \frac{\pi^4 T^3}{8} \int_{-\omega_D}^{\omega_D} dx \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \tanh \frac{x}{2T}\right) \\
 &= \frac{\nu_0^{2d}}{16} \left(\frac{t_\perp}{2k_B T}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2T}{\omega_D}\right)^2\right] \tag{A.30}
 \end{aligned}$$

v) K_{00}^1 katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 K_{00}^1 &= T \sum_n \int d^2 r_1 G_0^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_n) G_0^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_n) (r_1 - r)^2 \\
 &\quad \times \left[\frac{\frac{2}{m}(-i\omega_n - \xi_p) + 2\left(\frac{p}{m}\right)^2}{(-i\omega_n - \xi_p)^3} - \frac{t_\perp^2}{2} \frac{\frac{6}{m}(-i\omega_n - \xi_p) + 12\left(\frac{p}{m}\right)^2}{(-i\omega_n - \xi_p)^5} \right] \\
 &= -\frac{T}{4} \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{2\left(\frac{p}{m}\right)^2(-\omega_n^2 + \xi_p^2)}{(\xi_p^2 + \omega_n^2)^3} - t_\perp^2 \frac{\frac{2}{m}\epsilon_F}{(\xi_p^2 + \omega_n^2)^3} \right. \\
 &\quad \left. - t_\perp^2 \frac{\frac{12}{m}\epsilon_F(\omega_n^4 + \xi_p^4 - 6\omega_n^2 \xi_p^2)}{(\xi_p^2 + \omega_n^2)^5} \right\} \\
 &= -\frac{\epsilon_F T}{(\pi T)^4} \int \frac{dx}{2\pi} \sum_n \left\{ -\frac{2}{[(2n-1)^2 + x^2]^2} + \frac{4x^2}{[(2n-1)^2 + x^2]^3} \right. \\
 &\quad - \frac{7\left(\frac{t_\perp}{\pi T}\right)^2}{[(2n-1)^2 + x^2]^3} + \left(\frac{t_\perp}{\pi T}\right)^2 \frac{48x^2}{[(2n-1)^2 + x^2]^4} \\
 &\quad \left. - \left(\frac{t_\perp}{\pi T}\right)^2 \frac{48x^4}{[(2n-1)^2 + x^2]^5} \right\} \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\varepsilon_F T}{(\pi T)^4} \int_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} \frac{dx}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) + x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right) \right. \\
&\quad - \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{7}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right) \\
&\quad - \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 8x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right) \right) \\
&\quad \left. - \left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 6x^3 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{6x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \frac{\varepsilon_F}{32\pi(k_B T)^2} \tag{A.32}
\end{aligned}$$

vi) K_{11}^1 katsayısı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
K_{11}^1 &= \frac{T}{2} \sum_n \int d^2 r_1 G_1^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | -\omega_n) G_1^0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r} | \omega_n) (r_1 - r)^2 \\
&= -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} G_0^0(\mathbf{p}, -\omega_n) \frac{d^2}{dp^2} G_0^0(\mathbf{p}, \omega_n) \\
&= -\left(\frac{t_\perp}{2} \right)^2 \frac{T}{2} \sum_n \int \frac{p dp}{2\pi} \frac{(-\omega_n^2 + \xi_p^2)^{\frac{6\varepsilon_F}{m}}}{(\xi_p^2 + \omega_n^2)^4} \\
&= -\left(\frac{t_\perp}{2} \right)^2 \frac{6\varepsilon_F T^2}{(\pi T)^6} \int_{-\frac{\omega_D}{\pi T}}^{\frac{\omega_D}{\pi T}} dx \sum_n \left\{ -\frac{1}{[(2n-1)^2 + x^2]^3} + \frac{2x^2}{[(2n-1)^2 + x^2]^4} \right\} \\
&= -\left(\frac{t_\perp}{\pi T} \right)^2 \frac{3\varepsilon_F}{\pi^4 T^2} \int_0^{\frac{\omega_D}{\pi T}} dx \left\{ -\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{x}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4x} \tanh \frac{\pi x}{2} \right) \right) \right) \right\} \\
&= -\left(\frac{t_\perp}{4T} \right)^2 \frac{\varepsilon_F}{64\pi(k_B T)^2} \tag{A.33}
\end{aligned}$$

EK B

Denklem (2.64) ve (2.65)'deki sistem

$$\frac{xd}{2l_s^2} = t \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{d}{2l_s^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (B.1)$$

dönüşümleri ile aşağıdaki hale getirilir:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta_0 \cos(2t) + \lambda_0 \right] f_0(t) + \theta \cos(t) f_1(t) = 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta_1 \cos(2t) + \lambda_1 \right] f_1(t) + \theta \cos(t) f_0(t) = 0 \end{cases} \quad (B.2)$$

Burada geçen parametreler şöyledir:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\frac{16ml_s^4}{\hbar^2 d^2} [\alpha_0(T) + 4E_\perp^0] \\ \lambda_1 &= -\frac{16ml_s^4}{\hbar^2 d^2} [\alpha_1(T) + 4E_\perp^1] \\ \eta_0 &= \frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_\perp^0 \\ \eta_1 &= \frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_\perp^1 \\ \theta &= \frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_{01} \end{aligned} \quad (B.3)$$

i) Eğer $\lambda_0, \lambda_1 \gg \eta_0, \eta_1, \theta$ ve $\eta_0, \eta_1 < 1$, $\theta < 1$ şartları sağlanıyorsa,

f_0, f_1 fonksiyonları ve λ parametreleri aşağıdaki gibi seriye açılabilir:

$$\begin{aligned}
 f_0(t) &= f_0^{000}(t) + \eta_0 f_0^{001}(t) + \eta_1 f_0^{010}(t) + \theta f_0^{100}(t) + \eta_0 \eta_1 f_0^{011}(t) \\
 &\quad + \eta_0 \theta f_0^{101}(t) + \eta_1 \theta f_0^{110}(t) + \eta_0^2 f_0^{002}(t) + \eta_1^2 f_0^{020}(t) + \theta^2 f_0^{200}(t) \\
 f_1(t) &= f_1^{000}(t) + \eta_0 f_1^{001}(t) + \eta_1 f_1^{010}(t) + \theta f_1^{100}(t) + \eta_0 \eta_1 f_1^{011}(t) \\
 &\quad + \eta_0 \theta f_1^{101}(t) + \eta_1 \theta f_1^{110}(t) + \eta_0^2 f_1^{002}(t) + \eta_1^2 f_1^{020}(t) + \theta^2 f_1^{200}(t) \\
 \lambda_0 &= n_0^2 + \eta_0 \lambda_0^{001} + \eta_1 \lambda_0^{010} + \theta \lambda_0^{100} + \eta_0 \eta_1 \lambda_0^{011} \\
 &\quad + \eta_0 \theta \lambda_0^{101} + \eta_1 \theta \lambda_0^{110} + \eta_0^2 \lambda_0^{002} + \eta_1^2 \lambda_0^{020} + \theta^2 \lambda_0^{200} \\
 \lambda_1 &= n_1^2 + \eta_0 \lambda_1^{001} + \eta_1 \lambda_1^{010} + \theta \lambda_1^{100} + \eta_0 \eta_1 \lambda_1^{011} \\
 &\quad + \eta_0 \theta \lambda_1^{101} + \eta_1 \theta \lambda_1^{110} + \eta_0^2 \lambda_1^{002} + \eta_1^2 \lambda_1^{020} + \theta^2 \lambda_1^{200}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Bu ifadeler denklemlerde yerine konur ve aynı katsayılı terimler birbirlerine eşitlenirse açılımındaki fonksiyonlar ve parametrelerin değerleri elde edilir.

Aşağıda bu işlemler gösterilmiştir:

$$\eta^0 \theta^0 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{000}(t) = 0 \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{000}(t) = 0 \tag{B.5}$$

Üst kritik manyetik alan en küçük kuantum sayısı değeri için gerçekleşeceğinden ($n_1 = n_0 = 0$)

$$f_0^{000}(t) = 1 \quad ; \quad f_1^{000}(t) = 1 \tag{B.6}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \eta_0 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{001}(t) + [\lambda_0^{001} + \cos(2t)] f_0^{000}(t) &= 0 \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{001}(t) + \lambda_1^{001} f_1^{000}(t) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 f_0^{010}(t)}{\partial t^2} &= -\cos(2t) - \lambda_0^{001} \\
 \Rightarrow \lambda_0^{001} &= 0 \quad ; \quad f_0^{001}(t) = \frac{1}{4} \cos(2t)
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f_1^{001}(t)}{\partial t^2} &= -\lambda_1^{001} \Rightarrow f_1^{001}(t) = -\lambda_1^{001} \frac{1}{2} t^2 + at + b \\
 \Rightarrow \lambda_1^{001} &= 0 \quad ; \quad a = 0 \quad ; \quad f_1^{001}(t) = 1
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{010}(t) + \lambda_0^{010} f_0^{000}(t) &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{010}(t) + [\lambda_1^{010} + \cos(2t)] f_1^{000}(t) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f_0^{010}(t)}{\partial t^2} = -\lambda_0^{010} \Rightarrow f_0^{010}(t) = -\frac{1}{2} \lambda_0^{010} t^2 + at + b \\
\Rightarrow \lambda_0^{010} = 0 \quad ; \quad a = 0 \quad ; \quad f_1^{010}(t) &= 1 \\
\frac{\partial^2 f_1^{010}(t)}{\partial t^2} = -(\lambda_1^{010} + \cos(2t)) \\
\Rightarrow \lambda_1^{010} = 0 \quad ; \quad f_1^{010}(t) = \frac{1}{4} \cos(2t) &\quad (B.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{100}(t) + \lambda_0^{100} f_0^{000}(t) + f_1^{000}(t) &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{100}(t) + \lambda_1^{100} f_1^{000}(t) + \cos(t) f_0^{000}(t) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f_0^{100}(t)}{\partial t^2} = -\lambda_0^{100} - \cos(t) \Rightarrow \lambda_0^{100} = 0 \quad ; \quad f_0^{100}(t) = \cos(t) \\
\frac{\partial^2 f_1^{100}(t)}{\partial t^2} = -\lambda_1^{100} - \cos(t) \\
\Rightarrow \lambda_1^{100} = 0 \quad ; \quad f_1^{100}(t) = \cos(t) &\quad (B.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta^2 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{200}(t) + \lambda_0^{100} f_0^{100}(t) + \cos(t) f_1^{100}(t) \\
+ \lambda_0^{200} f_0^{000}(t) &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{200}(t) + \lambda_1^{100} f_1^{100}(t) + \cos(t) f_0^{100}(t) \\
+ \lambda_1^{200} f_1^{000}(t) &= 0 \\
\frac{\partial^2 f_0^{200}(t)}{\partial t^2} = -\cos(t)^2 - \lambda_0^{200} = -\lambda_0^{200} - \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \\
\Rightarrow \lambda_0^{200} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad f_0^{200}(t) = \frac{1}{8} \cos(2t) \\
\frac{\partial^2 f_1^{200}(t)}{\partial t^2} = -\cos(t)^2 - \lambda_1^{200} = -\lambda_1^{200} - \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) \\
\Rightarrow \lambda_1^{200} = -\frac{1}{2} \quad ; \quad f_1^{200}(t) = \frac{1}{8} \cos(2t) &\quad (B.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_0^2 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{002}(t) + [\cos(2t) + \lambda_0^{001}] f_0^{001}(t) + \lambda_0^{002} f_0^{000}(t) &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{002}(t) + \lambda_1^{001} f_1^{001}(t) + \lambda_1^{002} f_1^{000}(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_0^{002}(t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{4} \cos(2t)^2 - \lambda_0^{002} \\
&\Rightarrow \lambda_0^{002} = -\frac{1}{8} \quad ; \quad f_0^{002}(t) = \frac{1}{128} \cos(4t) \\
\frac{\partial^2 f_1^{002}(t)}{\partial t^2} &= -\lambda_1^{002} \Rightarrow \lambda_1^{002} = 0 \quad ; \quad f_1^{002}(t) = 1
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1^2 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{020}(t) + \lambda_0^{010} f_0^{010}(t) + \lambda_0^{020} f_0^{000}(t) &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{020}(t) + [\cos(2t) + \lambda_1^{010}] f_1^{010}(t) &+ \lambda_1^{020} f_1^{000}(t) = 0 \\
\frac{\partial^2 f_0^{020}(t)}{\partial t^2} &= -\lambda_0^{020} \Rightarrow \lambda_0^{020} = 0 \quad ; \quad f_0^{020}(t) = 1 \\
\frac{\partial^2 f_1^{020}(t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{4} \cos(2t)^2 - \lambda_1^{020} \\
&\Rightarrow \lambda_1^{020} = -\frac{1}{8} \quad ; \quad f_1^{020}(t) = \frac{1}{128} \cos(4t)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
\theta\eta_0 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{101}(t) + [\cos(2t) + \lambda_0^{001}] f_0^{100}(t) + \lambda_0^{100} f_0^{001}(t) &+ \lambda_0^{101} f_0^{000}(t) + \cos(t) f_1^{001}(t) = 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2 \right) f_1^{101}(t) + \lambda_1^{001} f_1^{100}(t) + \lambda_1^{100} f_1^{001}(t) &+ \lambda_1^{101} f_1^{000}(t) + \cos(t) f_0^{001}(t) = 0 \\
\frac{\partial^2 f_0^{101}(t)}{\partial t^2} &= -\cos(2t) \cos(t) - \lambda_0^{101} - \cos(t) \\
&= -\lambda_0^{101} - \frac{3}{2} \cos(t) - \frac{1}{2} \cos(3t) \\
&\Rightarrow \lambda_0^{101} = 0 \quad ; \quad f_0^{101}(t) = \frac{3}{2} \cos(t) + \frac{1}{8} \cos(3t) \\
\frac{\partial^2 f_1^{101}(t)}{\partial t^2} &= -\lambda_1^{001} \cos(t) - \lambda_1^{101} - \cos(t) \frac{1}{4} \cos(2t) = \\
&= -\lambda_1^{101} - \frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{8} \cos(3t) \\
&\Rightarrow \lambda_1^{101} = 0 \quad ; \quad f_1^{101}(t) = \frac{1}{8} \cos(t) + \frac{1}{72} \cos(3t)
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\theta\eta_1 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2 \right) f_0^{110}(t) + \lambda_0^{010} f_0^{100}(t) + \lambda_0^{100} f_0^{010}(t) + \cos(t) f_1^{010}(t) &+ \lambda_0^{110} f_0^{000}(t) = 0
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2\right) f_1^{110}(t) + [\cos(2t) + \lambda_1^{010}] f_1^{100}(t) + \lambda_1^{100} f_1^{010}(t) + \lambda_1^{110} f_1^{000}(t) + \cos(t) f_0^{010}(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_0^{110}(t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{4} \cos(2t) \cos(t) - \lambda_0^{110} \\ &= -\lambda_0^{110} - \frac{1}{8} \cos(t) - \frac{1}{8} \cos(3t) \\ \Rightarrow \lambda_0^{110} &= 0 \quad ; \quad f_0^{110}(t) = \frac{1}{8} \cos(t) + \frac{1}{72} \cos(3t) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f_1^{110}(t)}{\partial t^2} = -\cos(t) - \lambda_1^{110} \Rightarrow \lambda_1^{110} = 0 \quad ; \quad f_1^{110}(t) = \cos(t) \quad (B.15)$$

$$\eta_0 \eta_1 : \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_0^2\right) f_0^{011}(t) + [\cos(2t) + \lambda_0^{001}] f_0^{010}(t) + \lambda_0^{010} f_0^{001}(t) + \lambda_0^{011} f_0^{000}(t) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + n_1^2\right) f_1^{011}(t) + [\cos(2t) + \lambda_1^{010}] f_1^{001}(t) + \lambda_1^{001} f_1^{010}(t) + \lambda_1^{011} f_1^{000}(t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0^{011}(t)}{\partial t^2} = -\cos(2t) - \lambda_0^{011}$$

$$\Rightarrow \lambda_0^{011} = 0 \quad ; \quad f_0^{011}(t) = \frac{1}{4} \cos(2t)$$

$$\frac{\partial^2 f_1^{011}(t)}{\partial t^2} = -\cos(2t) - \lambda_1^{011}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^{011} = 0 \quad ; \quad f_1^{011}(t) = \frac{1}{4} \cos(2t) \quad (B.16)$$

Yukarıda bulunan terimler serilerde yerlerine konursa:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{8} \eta_0^2 \quad ; \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2} \theta^2 - \frac{1}{8} \eta_1^2 \quad (B.17)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıda θ ve η ifadeleri de konursa,

$$\begin{aligned}\frac{16ml_s^4}{\hbar^2 d^2}[\alpha_0(T) + 4E_{\perp}^0] &= \frac{1}{2} \left(\frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_{01} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_{\perp}^0 \right)^2 \\ \frac{16ml_s^4}{\hbar^2 d^2}[\alpha_1(T) + 4E_{\perp}^1] &= \frac{1}{2} \left(\frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_{01} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{64ml_s^4}{\hbar^2 d^2} E_{\perp}^1 \right)^2\end{aligned}\quad (B.18)$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında denklem (2.72) ve (2.73) e ulaşılır. Seriyeye açılımın şartları da yazılırsa,

$$\begin{aligned}\theta < 1 : \Rightarrow H^2 &> \frac{16mc^2}{d^2 e^2} E_{01} \\ \eta_0 : \Rightarrow H^2 &> \frac{16mc^2}{d^2 e^2} E_{\perp}^0 \\ \eta_1 : \Rightarrow H^2 &> \frac{16mc^2}{d^2 e^2} E_{\perp}^1\end{aligned}\quad (B.19)$$

bağıntıları sağlanır.

ii) $\theta \ll \lambda_0, \lambda_1 \ll \eta_0, \eta_1$ şartları sağlanıyorsa,

$$\begin{aligned}f_0(t) &= f_0^{(0)}(t) + \theta f_0^{(1)}(t) + \theta^2 f_0^{(2)}(t) + \dots \\ f_1(t) &= f_1^{(0)}(t) + \theta f_1^{(1)}(t) + \theta^2 f_1^{(2)}(t) + \dots \\ \lambda_0(t) &= \lambda_0^{(0)}(t) + \theta \lambda_0^{(1)}(t) + \theta^2 \lambda_0^{(2)}(t) + \dots \\ \lambda_1(t) &= \lambda_1^{(0)}(t) + \theta \lambda_1^{(1)}(t) + \theta^2 \lambda_1^{(2)}(t) + \dots\end{aligned}\quad (B.20)$$

Yukarıdaki kısımda gösterilenlere benzer işlemler sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned}f_0^{(0)}(t) &= e^{-\sqrt{\frac{\eta_0}{2}} t^2} \quad ; \quad f_1^{(0)}(t) = e^{-\sqrt{\frac{\eta_1}{2}} t^2} \\ \lambda_0 &= (2\eta_0)^{1/2} - \eta_0 - \theta \\ \lambda_1 &= (2\eta_1)^{1/2} - \eta_1 - \theta\end{aligned}\quad (B.21)$$

Parametreler yerine konup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (2.70) (2.71) denklemleri elde edilir.

iii) $\lambda_0, \lambda_1 \ll \eta_0, \eta_1, \theta$ şartları sağlandığında işlemler aşağıdaki gibi olacaktır. Diferansiyel denklem sistemi bir daha yazılsın.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta_0 \cos(2t) + \lambda_0 \right] f_0(t) + \theta \cos(t) f_1(t) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \eta_1 \cos(2t) + \lambda_1 \right] f_1(t) + \theta \cos(t) f_0(t) &= 0 \end{aligned} \quad (B.22)$$

Yukarıdaki denklemler, kosinusun açılımında ilk iki terim ($\cos(t) \simeq 1 - t^2/2$) tutularak yazılsın:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\eta_0\theta^2 + \eta_0 + \lambda_0 \right] f_0(t) + \theta \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) f_1(t) &= 0 \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\eta_1\theta^2 + \eta_1 + \lambda_0 \right] f_1(t) + \theta \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) f_0(t) &= 0 \end{aligned} \quad (B.23)$$

Bu sistemin çözümü için aşağıdaki gibi bir ifade önerilsin. Burada amaç bilinmeyen katsayıları bulmak olacaktır.

$$\begin{aligned} f_0(t) &= Ae^{-at^2} + Be^{-bt^2} \\ f_1(t) &= Ce^{-at^2} + De^{-bt^2} \end{aligned} \quad (B.24)$$

Bu ifadeler denklemlerde yerine konduğunda aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} &\left[2aA + (\lambda_0 + \eta_0)A + \theta C + t^2 \left(4a^2A - 2\eta_0A - \frac{1}{2}\theta C \right) \right] e^{-at^2} \\ &+ \left[2bB + (\lambda_0 + \eta_0)B + \theta D + t^2 \left(4b^2B - 2\eta_0B - \frac{1}{2}\theta D \right) \right] e^{-bt^2} = 0 \end{aligned} \quad (B.25)$$

$$\begin{aligned} & \left[2aC + (\lambda_1 + \eta_1)A + \theta A + t^2 \left(4a^2C - 2\eta_1C - \frac{1}{2}\theta A \right) \right] e^{-at^2} \\ & + \left[2bD + (\lambda_1 + \eta_1)D + \theta B + t^2 \left(4b^2D - 2\eta_1D - \frac{1}{2}\theta B \right) \right] e^{-bt^2} = 0 \end{aligned} \quad (B.26)$$

Yukarıdaki ifadelerde eksponansiyellerin önüne çarpan olarak gelen sabit ve t^2 ile orantılı terimler ayrı ayrı sıfır olacaklardır. İlk önce t^2 ile orantılı katsayılar incelensin:

$$\begin{aligned} 4a^2A - 2\eta_0A - \frac{1}{2}\theta C &= 0 & 4a^2C - 2\eta_1C - \frac{1}{2}\theta A &= 0 \\ 4b^2B - 2\eta_0B - \frac{1}{2}\theta D &= 0 & 4b^2D - 2\eta_1D - \frac{1}{2}\theta B &= 0 \end{aligned} \quad (B.27)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{4}{\theta}(2a^2 - \eta_0)A \\ A &= \frac{4}{\theta}(2a^2 - \eta_1)C \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{16}{\theta^2}(2a^2 - \eta_0)(2a^2 - \eta_1) \quad (B.28)$$

Bu eşitlik yardımıyla a aşağıdaki gibi bulunur:

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{(\eta_0 + \eta_1) \pm \sqrt{(\eta_0 + \eta_1)^2 + \frac{\theta^2}{2}}} \quad (B.29)$$

Benzer hesaplamalarla b katsayısı da elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{4}{\theta}(2b^2 - \eta_0)B \\ B &= \frac{4}{\theta}(2b^2 - \eta_1)D \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{16}{\theta^2}(2b^2 - \eta_0)(2b^2 - \eta_1) \quad (B.30)$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{(\eta_0 + \eta_1) \pm \sqrt{(\eta_0 + \eta_1)^2 + \frac{\theta^2}{2}}} \quad (B.31)$$

Fonksiyonları çarpan sabitler de aşağıdaki şartı sağlamalıdır:

$$\begin{vmatrix} (\lambda_0 + \eta_0 - 2a)A + \theta C & (\lambda_0 + \eta_0 - 2b)B + \theta D \\ (\lambda_1 + \eta_1 - 2a)C + \theta A & (\lambda_1 + \eta_1 - 2b)D + \theta B \end{vmatrix} = 0 \quad (B.32)$$

Yukarıdaki determinanın çözümü denklem (2.66)'yı verecektir.



Ek C

Genlik dalgalanmalarının iki boyutlu bir sistemde hangi sıcaklık bölgesinde önemli olduğunu bulmak için

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle - \langle \Delta \rangle^2}{\langle \Delta \rangle^2} < 1 \quad (C.1)$$

şartının sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmelidir. Bunun için ilk önce $\langle \Delta^*(\mathbf{r})\Delta(0) \rangle$ korelatörün hesaplanması gerekmektedir. İki boyutlu süperiletken bir sistemin serbest enerjisi şöyle olacaktır:

$$F = \int d^2r [A|\Delta(\mathbf{r})|^2 + C|\nabla\Delta(\mathbf{r})|^2] \quad (C.2)$$

Fonksiyonelde geçen katsayılar $A = N(0)(T - T_c)/T_c$ ve $C \sim N(0)\xi_0^2$ olarak verilmiştir. $N(0)$, T=0 sıcaklıkta süperiletken elektron yoğunluğudur. Düzen parametresinin Fourier dönüşümü alınrsa, serbest enerji,

$$F = L^2 \sum_k |\Delta_k|^2 (A + Ck^2) \quad (C.3)$$

olacaktır. Bu ifadede L^2 sistemin alanını göstermektedir. Düzen parametresinin karesinin ortalaması

$$\langle |\Delta_k|^2 \rangle = \frac{\int e^{-F/k_B T} |\Delta_k|^2 d\Delta_k}{\int e^{-F/k_B T} d\Delta_k} = \frac{1}{2L^2} \frac{k_B T}{A + Ck^2} \quad (C.4)$$

olacaktır. $\langle |\Delta_k|^2 \rangle$ uzaysal korelasyon fonksiyonunu Fourier dönüşümüdür.

$$\begin{aligned}
 \langle |\Delta_k|^2 \rangle &= L^{-4} \int dr \int dr' \langle \Delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}') \rangle e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\
 &= L^{-2} \int dR \langle \Delta(0) \Delta(\mathbf{R}) \rangle e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \quad (\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (C.5)
 \end{aligned}$$

Ters Fourier dönüşümü alınarak

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta(0) \Delta(\mathbf{R}) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2r \frac{k_B T}{2(A + Ck^2)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \\
 \langle \Delta(0)^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi} \frac{k_B T}{C} \int_0^Q \frac{k dk}{k^2 + A/C} \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

elde edilir. İntegralin üst sınırı $Q \sim 1/a$ (a : örgü sabiti) ile sınırlandırılmıştır. İntegral yapıldıktan sonra aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\langle \Delta(0) \Delta(\mathbf{R}) \rangle = \frac{k_B T}{8\pi C} \ln \left(1 + \frac{C}{Aa^2} \right) \quad (C.7)$$

Kritik sıcaklık civarında $C/(Aa^2)$ terimi 1'e göre çok daha büyük olacaktır. Bu durumda

$$\ln \left(1 + \frac{C}{Aa^2} \right) < \frac{C}{Aa^2} \quad (C.8)$$

yazılabilir. Yukarıda logaritma yerine

$$\langle \Delta(0)^2 \rangle = \frac{k_B T}{8\pi C} \frac{C}{Aa^2} \quad (C.9)$$

yazılarak dalgalanmaların etkisi incelenecektir. (C.12) denkleminin sağlayacağı dalgalanma koşulunu (C.9) terimi de sağlayacaktır. Dalgalanma miktarını veren bağıntı tekrar yazılsın:

$$\frac{\langle \Delta^2 \rangle - \Delta_0^2}{\Delta_0^2} < 1 \quad (C.10)$$

Bu ifadede $\Delta_0 = -A/B$ olup ($B = 0.098N(0)/(k_B T_c)^2$), süperiletken düzen parametresinin sabit olduğu bir sistemdeki değeridir. İfadeler (C.11) denkleminde yerine konursa,

$$\frac{0.098}{8\pi a^2 N(0)} \frac{T}{T_c - T} < 2 \quad (C.11)$$

elde edilir. Tipik değerler kullanıldığında ($a \sim 4\text{\AA}$, $N(0) \sim 10^{14}$)

$$\frac{T}{T_c - T} < 800 \quad (C.12)$$

şartına ulaşılır. Genlik dalgalanmalarının önemli olduğu sıcaklık civarı $0.9987 T_c < T < T_c$ gibi çok dar bir aralığı kapsamaktadır. Faz dalgalanmalarının hesaplandığı durumda sıcaklığın bu aralığın dışında olduğu varsayılmıştır.

EK D

(3.13) Hamiltonyenin tünelleme terimini belirten denklemde (3.46) geçen $\exp[-S_\alpha^{(0)}(g, 0)]$ ifadesi, $\cos(\varphi_j - \varphi_{j+g})$ teriminin taban durum üzerinden ortalama alınmış halidir. Taban durumda fonon olmadığı için (3.46)'daki köşeli parantez ihmal edilmektedir. Fononların $\langle \cos(\varphi_j - \varphi_{j-1}) \rangle$ korelatörüne olan katkısını bulmak için köşegen kısmı seçildiğinde karşımıza aşağıdaki bağıntı çıkar:

$$\frac{1}{2} \left\{ \prod_{\vec{q}} e^{A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^\dagger} e^{-A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}} + \prod_{\vec{q}} e^{-A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^\dagger} e^{A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}} \right\} \quad (D.1)$$

İlk birkaç terim yazıldığında

$$\prod_{\vec{q}} \left\{ 1 - |A_{\vec{q}}|^2 b_{\vec{q}}^\dagger b_{\vec{q}} + \frac{|A_{\vec{q}}|^4}{(2!)^2} (b_{\vec{q}}^\dagger)^2 (b_{\vec{q}})^2 - \frac{|A_{\vec{q}}|^6}{(3!)^2} (b_{\vec{q}}^\dagger)^3 (b_{\vec{q}})^3 + \dots \right\} \quad (D.2)$$

elde edilir. Bu kısmın ortalaması, $\exp[-\hbar\omega_{\vec{q}}/\kappa T] = \alpha_{\vec{q}}$ tanımıyla, (Boltzman sabiti κ ile gösterilmektedir) aşağıdaki gibi alınır.

$$Tr \left\{ e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{\kappa T} (b_{\vec{q}}^\dagger b_{\vec{q}} + \frac{1}{2})} \right\} = e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}} (1 + \alpha_{\vec{q}} + \alpha_{\vec{q}}^2 + \dots) = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}}}{1 - \alpha_{\vec{q}}} \equiv Z_0 \quad (D.3)$$

(D2)'de geçen herhangi bir terimin izi şöyle olacaktır:

$$\begin{aligned}
Tr \left\{ e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{\kappa T} (b_{\vec{q}}^\dagger b_{\vec{q}} + \frac{1}{2})} \frac{(b_{\vec{q}}^\dagger)^n}{n!} \frac{(b_{\vec{q}})^n}{n!} (-1)^n \right\} = \\
e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}} \sum_{N=0}^{\infty} \langle N | \frac{(b_{\vec{q}}^\dagger)^n}{n!} \frac{(b_{\vec{q}})^n}{n!} | N \rangle \alpha_{\vec{q}}^N (-1)^n = \\
e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}} \sum_{N=n}^{\infty} (-1)^n \alpha_{\vec{q}}^N \frac{\sqrt{N \cdots (N-n+2)(N-n+1)}}{n!} \frac{\sqrt{N(N-1) \cdots (N-n+1)}}{n!} = \\
e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}} \sum_{N=n}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha_{\vec{q}}^N}{(n!)^2} N(N-1) \cdots (N-n+1) \quad (D.4)
\end{aligned}$$

(D2)'nin bütününün izi aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}}}{Z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{N=n}^{\infty} \alpha_{\vec{q}}^{N-n} \frac{\alpha_{\vec{q}}^n (|A_{\vec{q}}|^2)^n}{(n!)^2} N(N-1) \cdots (N-n+1) = \\
\frac{e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}}}{Z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|A_{\vec{q}}|^{2n}}{(n!)^2} \alpha_{\vec{q}}^n \sum_{N=n}^{\infty} \alpha_{\vec{q}}^{N-n} N(N-1) \cdots (N-n+1) \quad (D.5)
\end{aligned}$$

(D5)'deki son toplam

$$\frac{d^n}{d\alpha_q^n} \sum_{N=0}^{\infty} \alpha_q^N = \frac{n!}{(1-\alpha_q)^{n+1}} \quad (D.6)$$

olacaktır. (D6)'yı (D5)'in içine yerleştirildiğinde

$$\frac{e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}}}{Z_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|A_{\vec{q}}|^{2n}}{n!} \frac{\alpha_{\vec{q}}^n}{(1-\alpha_{\vec{q}})^{n+1}} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}}}{Z_0(1-\alpha_{\vec{q}})} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|A_{\vec{q}}|^{2n}}{n!} \left(\frac{\alpha_{\vec{q}}}{1-\alpha_{\vec{q}}} \right)^n \quad (D.7)$$

elde edilir. (D7)'deki son terimi şöyle yazmak mümkündür:

$$\left(\frac{\alpha_{\vec{q}}}{1 - \alpha_{\vec{q}}} \right)^n = \left(\frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_{\vec{q}}}{\kappa T}} - 1} \right)^n = N_{\vec{q}}^n \quad (D.8)$$

ve

$$\frac{e^{-\frac{\hbar \omega_{\vec{q}}}{2\kappa T}}}{Z_0(1 - \alpha_{\vec{q}})} = 1 \quad (D.9)$$

(D5)'deki birinci terimin Gibbs ortalaması

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|A_{\vec{q}}|^{2n}}{n!} N_{\vec{q}} = e^{-|A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} \quad (D.10)$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$Tr \left\{ \prod_{\vec{q}} e^{A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger}} e^{-A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}^{\dagger}} \right\} = \prod_{\vec{q}} e^{-|A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} = e^{-\sum_{\vec{q}} |A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} \quad (D.11)$$

eşitliği sağlanacaktır. Şimdi de (D1)'deki operatörlerin korelatöre lineer ve karesel katkıları ele alınacaktır. Herhangi bir mod, örneğin $\vec{q}_1$ modu çarpımdan ayrılsın.

$$\begin{aligned} \prod_{\vec{q}} e^{A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger}} e^{-A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}^{\dagger}} &\Rightarrow \prod_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} e^{A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger}} A_{\vec{q}_1} b_{\vec{q}_1}^{\dagger} e^{-A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}^{\dagger}} \\ \prod_{\vec{q}} e^{-A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger}} e^{A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}^{\dagger}} &\Rightarrow - \prod_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} e^{-A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger}} A_{\vec{q}_1} b_{\vec{q}_1}^{\dagger} e^{A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}^{\dagger}} \end{aligned} \quad (D.12)$$

Açıkça görüldüğü gibi $\vec{q}_1$ dışındaki modların izi

$$e^{-\sum_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} |A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} (A_{\vec{q}_1} b_{\vec{q}_1}^\dagger - A_{\vec{q}_1}^\dagger b_{\vec{q}_1}) = 0 \quad (D.13)$$

sıfır vermektedir. Eksponansiyeldeki toplamın her bir terimi $1/N$ (N birim hacimdeki elementar hücre sayısıdır) mertebesinde olduğundan aşağıdaki yaklaşık ifade yazılabilir:

$$e^{-\sum_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} |A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} = e^{-\sum_{\vec{q}} |A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} \quad (D.14)$$

Bu yüzden karesel terimlerin katkısı

$$\begin{aligned} & \frac{(A_{\vec{q}_1})^2 (b_{\vec{q}_1}^\dagger)^2}{(2!)^2} \prod_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} e^{A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^\dagger} e^{-A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}} + \frac{(A_{\vec{q}_1})^2 (b_{\vec{q}_1}^\dagger)^2}{(2!)^2} \prod_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} e^{-A_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^\dagger} e^{A_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}} \\ & \Rightarrow \frac{1}{2} A_{\vec{q}_1}^2 (b_{\vec{q}_1}^\dagger)^2 e^{-\sum_{\vec{q} \neq \vec{q}_1} |A_{\vec{q}}|^2 N_{\vec{q}}} \end{aligned} \quad (D.15)$$

olacaktır. Yukarıda $N_{\vec{q}}$ Planck dağılım fonksiyonudur. (D13)'de ayrıca $\vec{q}_1$ üzerinden toplam yapılmalıdır. Sıfır kuantum salınımından doğan $\exp[-S_\alpha(g, 0)]$ terimi de göz önüne alındığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$e^{-\sum_{\vec{q}} |A_{\vec{q}}|^2 (N_{\vec{q}} + \frac{1}{2})} \quad (D.16)$$

Bu terim ısısal salınımların sonucudur. Köşegen olmayan karesel terimlerin arta kalan

$$\sum_{\vec{q}=\vec{q}_1 \neq \vec{q}_2} A_{\vec{q}_1} A_{\vec{q}_2} b_{\vec{q}_1}^\dagger b_{\vec{q}_2}^\dagger e^{-S_\alpha(g, T)} \quad (D.17)$$

terimleri tedirgeme olarak alınmıştır. Yukarıda elde edilen terim, δ_{kl}^2 yerine neden $\delta_{kl}^2 \exp[-S_\alpha(g, T)]$ ifadesinin ortaya çıktığını açıklamaktadır. $S_\alpha(g, T)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$S_\alpha(g, T) = \frac{4\pi\alpha_0}{\tau^{1/2}} \frac{kT_c^{(2)}}{\varepsilon_F} \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{1 - \cos(q_\perp g)}{\Omega_{\vec{q}} \left(1 - \cos q_\perp + \frac{a_\perp^2}{\lambda_\parallel^2} \right)} \left(N_{\vec{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (D.18)$$

Yukarıda geçen $\Omega_{\vec{q}}$ frekansı (3.48)'de tanımlı olduğu gibidir. Fakat burada $S_\alpha(g, 0) \rightarrow S_\alpha(g, T)$ dönüşümü yapılmalıdır. Bu yüzden (D16) $S_\alpha(g, T)$ için kendi kendisiyle tutarlı bir denklem olmaktadır.

ÖZGEÇMİŞ

Metin Hüner 1967 yılında doğmuş, orta eğitimini Avusturya Erkek Lisesinde tamamlamıştır. İTÜ Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümünde lisans eğitimini 1991’de bitirdikten sonra aynı yıl İTÜ Fizik bölümünde Master eğitimine başlamıştır. Master derecesini 1993’de aldıktan sonra aynı yıl İTÜ Fizik bölümünde doktora programına başlamıştır. Metin Hüner halen İTÜ Fizik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

