İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANLIK BASINÇ YÜKÜ ETKİSİNDEKİ KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN DİNAMİK DAVRANIŞININ SONLU ELEMANLARLA ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ

Cenk AKSOYLAR

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

TEMMUZ 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ANLIK BASINÇ YÜKÜ ETKİSİNDEKİ KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN DİNAMİK DAVRANIŞININ SONLU ELEMANLARLA ÇÖZÜMÜ

DOKTORA TEZİ
Cenk AKSOYLAR
(501032004)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : **04 Şubat 2010**
Tezin Savunulduğu Tarih : **08 Temmuz 2010**

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG (İTÜ)**
Diğer Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Hasan ENGİN (İTÜ)**
Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU (İTÜ)
Prof. Dr. Zekai CELEP (İTÜ)
Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (YTÜ)

TEMMUZ 2010

Anneme ve Babama

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm, değerli vakitlerini ve sonsuz hoşgörülerini benden esirgemeyen, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve sonuçlandırılmasında büyük emekleri geçen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tez izleme komitemdeki hocalarım sayın Prof. Dr. Hasan ENGİN ve sayın Prof. Dr. Zahit MECİTOĞLU'na tez süresi boyunca değerli eleştirileri ve fikirleri ile tezin gelişimine yaptıkları önemli katkılardan dolayı teşekkür ederim. Ayrıca tez sınavı komitesindeki hocalarım sayın Prof. Dr. Zekai CELEP ve sayın Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK'e değerli katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Sevgisini ve yardımlarını hiçbir zaman benden esirgemeyen eşim Dr. Nihan DOĞRAMACI AKSOYLAR'a en derin sevgimi sunuyorum. Tez çalışması boyunca her zaman yanımda olduğu ve beni cesaretlendirerek sorunların üstesinden gelmemi sağladığı için kendisine teşekkür ederim.

Dostlukları ve destekleri ile her zaman yanımda olan Sezgin KURTULDU, Ömer GÜZEL ve Kürşat OĞUZHAN'a çok teşekkür ediyorum.

Tüm yaşamım boyunca bana her zaman güvenen, koşulsuz destekleyen, teşvik eden ve öğrenmeyi öğreten sevgili annem Ayten AKSOYLAR ve babam Uğur AKSOYLAR'a minnettarım.

TÜBİTAK tarafından 106M450 nolu "Anlık Basınç Yükü Etkisindeki Homojen Olmayan Plakların Doğrusal Olmayan Dinamik Davranışının, Sonlu Elemanlarla Çözümü" projesine verilen destek yazar tarafından teşekkürle karşılanmaktadır.

Şubat 2010 Cenk Aksoylar

(İnş. Yük. Müh.)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

BD : Bünye Denklemleri
DD : Denge Denklemleri
FGM : Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
HR : Hellinger-Reissner
İTÜ : İstanbul Teknik Üniversitesi
KD : Kinematik Denklemler
KSK : Kinematik Sınır Koşulları
MSK : Mekanik Sınır Koşulları
SE : Sonlu Eleman
SEM : Sonlu Elemanlar Metodu

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$1, 2$	: Malzeme eksenleri,
a_1, a_2	: Rayleigh sönümü kütle matrisi ve rijitlik matrisi çarpanları,
a, b	: x, y eksenleri boyunca plak boyutları,
c	: Özgül ısı,
h	: Toplam plak kalınlığı,
k	: Isı iletkenlik katsayısı,
n	: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılım parametresi
r	: N-Basınç dalgasında uzunluk faktörü,
t_p	: Anlık basınç yükünün basınç bölgesindeki etki süresi,
u, v, w	: Plak orta düzleminde sırasıyla x, y, z eksenlerinde oluşan yer değiştirmeler,
x, y, z	: Kartezyen eksenler,
E_1, E_2	: Ortotrop malzemenin 1 ve 2 eksenlerinde elastisite modülü,
G_{12}	: Ortotrop malzemenin 1 ve 2 eksenlerinde kayma modülü,
L	: Plaktaki toplam tabaka sayısı,
P_m	: Anlık basınç yükünün maksimum basınç değeri,
P_o	: Anlık basınç yükünün maksimum emme değeri,
S	: Plak sınırlarını tarifleyen eğri,
α	: Friedlander fonksiyonunda dağılım parametresi,
α_1, α_2	: Genleşme katsayıları,
β, γ	: Newmark parametreleri,
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	: x, y, z eksen takımında şekil değiştirme tansörünün normal bileşenleri,
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$	: x, y, z eksen takımında şekil değiştirme tansörünün kayma bileşenleri,
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	: x, y, z eksen takımında mühendislik kayma şekil değiştirmeleri,
θ	: Plak eksenleri ile malzeme eksenleri arasındaki açı,
ρ	: Plak malzemesinin yoğunluğu,
$\upsilon_{12}, \upsilon_{21}$	: Ortotrop malzemenin 1 ve 2 eksenlerinde Poisson oranı,
ω_i	: Sistemin *i*. modunun açısal frekansı,
ξ	: Sönüm oranı,
Ω	: Plak orta yüzeyi,
$\mathbf{b} = \{q_x \ \ q_y \ \ q_z\}^T$	: Plak yüzeyine etkiyen, x, y, z doğrultularındaki yayılı yükler,
$\hat{\mathbf{t}} = \{t_x \ \ t_y \ \ t_z\}^T$	: Plak sınırlarındaki mekanik sınır koşulları,

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$	: Tabakalı plağa ait rijitlik (elastisite) matrisinin alt matrisleri,
$\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{D}', \mathbf{H}'$	: Tabakalı plağa ait komplians matrisinin alt matrisleri,
$\mathbf{C}$	: Sönüm matrisi,
$\overset{+}{\mathbf{F}}$	: Düzeltme vektörü,
$\overset{++}{\mathbf{K}}_L$	: Doğrusal terimleri içeren sistem matrisi,
$\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}$	: Doğrusal olmayan terimleri içeren sistem matrisi,
$\mathbf{M}$	: Kütle matrisi,
$\mathbf{M} = \left\{ M_x \;\; M_y \;\; M_{xy} \right\}^T$	: Plak orta düzleminde oluşan eğilme momentleri,
$\mathbf{N} = \left\{ N_x \;\; N_y \;\; N_{xy} \right\}^T$	: Plak orta düzleminde oluşan membran kuvvetleri,
$\mathbf{U} = \left\{ u \;\; v \;\; w \right\}^T$	: Plak orta noktasının x, y, z yönlerindeki yer değiştirmeleri,
$\dot{\mathbf{U}} = \left\{ \dot{u} \;\; \dot{v} \;\; \dot{w} \right\}^T$	: Plak orta noktasının x, y, z yönlerindeki hızı,
$\ddot{\mathbf{U}} = \left\{ \ddot{u} \;\; \ddot{v} \;\; \ddot{w} \right\}^T$	: Plak orta noktasının x, y, z yönlerindeki ivmesi,
$\mathbf{Q}$	: Yük vektörü, Plak eksenlerinde rijitlik (elastisite) matrisi,
$\tilde{\mathbf{Q}}$	: Malzeme eksenlerinde rijitlik (elastisite) matrisi,
$\mathbf{T}$	: Dönüşüm matrisi,
$\mathbf{X}$	: Karışık sonlu eleman bilinmeyen vektörü
$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{xx} \;\; \varepsilon_{yy} \;\; \gamma_{xy} \right\}^T$	: Plak eksenlerinde şekil değiştirme,
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \varepsilon_{11} \;\; \varepsilon_{22} \;\; \gamma_{12} \right\}^T$	: Malzeme eksenlerinde şekil değiştirme,
$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} = \left\{ \varepsilon_x^0 \;\; \varepsilon_y^0 \;\; \gamma_{xy}^0 \right\}^T$	: Plak eksenlerinde düzlem içi şekil değiştirme,
$\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} = \left\{ \kappa_x^0 \;\; \kappa_y^0 \;\; \kappa_{xy}^0 \right\}^T$	: Plak eksenlerinde eğrilik,
$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_{xx} \;\; \sigma_{yy} \;\; \sigma_{xy} \right\}^T$	: Plak eksenlerinde gerilme,
$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \sigma_{11} \;\; \sigma_{22} \;\; \sigma_{12} \right\}^T$	: Malzeme eksenlerinde gerilme,
$\boldsymbol{\varepsilon}^u$	: Yer değiştirmeler cinsinden düzlem içi şekil değiştirmeler ve eğrilikler,
$\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$	: İç kuvvetler cinsinden düzlem içi şekil değiştirmeler ve eğrilikler,
$\boldsymbol{\sigma}^\sigma$	: Plak orta düzleminde oluşan iç kuvvetler vektörü,
$\delta \prod_{HR}$	: Hellinger – Reissner fonksiyonelinin ilk varyasyonu,
$(\;)_i$	: İterasyon adımını belirten indis,
$(\;)_k$	: Ele alınan tabakanın numarasını belirten alt indis,
$(\;)_p$	: Yük adımını belirten indis,
${}^{p+\Delta p}\overline{\ldots}$	: Değişkenlerin son değeri,
${}^{p}\ldots$	: Değişkenlerin başlangıç değeri,
$\overset{+}{\ldots}$	: Değişkenlerdeki artım,

ANLIK BASINÇ YÜKÜ ETKİSİNDEKİ KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN DİNAMİK DAVRANIŞININ SONLU ELEMANLARLA ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Atmosferik türbülanslar, nükleer patlamalar, sonik patlamalar, şok dalgaları, yakıt patlamaları v.b. olaylar yakınlarındaki yapılar üzerinde anlık basınç kuvvetleri oluştururlar. Bu basınç dalgaları plaklarda büyük deformasyonlar oluşturur. Dolayısıyla bu yapıların dinamik davranışında geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler önemli yer tutar. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı, "*functionally gradient material*" (FGM) adı altında, yüksek sıcaklığa dayanıklı malzeme üretiminde kullanılmak üzere 1980'li yıllarda ortaya atılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin (FGM) mikro yapısı, makro ölçekte, her eksende değişken olarak karakterize edilir. Isı kalkanı yapılarında, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme seramik ve metalin karışımından oluşturulur. Son yıllarda uçaklarda, uzay araçlarında, nükleer enerji sistemlerinde kullanılmak üzere FGM konusunda ciddi araştırmalar yapılmaktadır.

Bu tez kapsamında, anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakların dinamik davranışları, karışık sonlu elemanlar metoduyla geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler, sıcaklık etkileri ve sönüm etkileri de dikkate alınarak incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle bir karışık sonlu elemanlar yazılımı geliştirilmiş ve analizler bu yazılımla gerçekleştirilmiştir. Dinamik analizlerde sistem matrisi üzerinde indirgeme yapılmamış, iç kuvvetlerin ve momentlerin de zamana göre türevleri hesaplara katılmıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik davranışı, yazarın bilgisi dahilinde ilk defa bu çalışmada karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir. Çalışma bu özelliği ile literatürde bir ilk olup, dinamik analizlerde karışık sonlu elemanlar metodunun kullanılması konusunda yapılabilecek birçok araştırmanın önünü açmıştır.

Geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımında doğrusal olmayan etkiler Kirchhoff-Love ve von Kármán plak kuramı kapsamında ele alınmıştır. Doğrusal olmayan karışık sonlu eleman fonksiyoneli Hellinger-Reissner prensibi ile türetilmiş ve devamında bu fonksiyonel artımsal formülasyonla doğrusallaştırılmıştır. Sonlu eleman matrisleri ve vektörleri izoparametrik dörtgen elemanlar kullanılarak C^0 süreklilik şartına sahip şekil fonksiyonları ile elde edilmiştir. Dinamik analizler Newmark yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiş ve ardışık yaklaşım için Newton-Raphson yöntemi kullanılmıştır. Dinamik analizlerdeki sönüm matrisi, yer değiştirme tipi sonlu elemanlarda kullanılan Rayleigh sönümü, karışık sonlu elemanlara uyarlanarak hesaplara dahil edilmiştir. Analizlerde, üç farklı ideal anlık basınç yükü; *i)* Adım yükü, *ii)* N-basınç dalgası, *iii)* Friedlander fonksiyonu ve ideal olmayan anlık basınç yükleri göz önüne alınmıştır. Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeli plakların analizlerinde ise beş farklı dağılım parametresi ele alınmıştır.

Karışık sonlu elemanlar yazılımı öncelikle, tek tabakalı, tabakalı ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plaklar kullanılarak statik, dinamik ve sıcaklık etkileri altında literatürde bulunan problemlerle ve ANSYS ticari yazılımıyla doğrulanmıştır. Elde edilen sonuçlar ışığında geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımıyla yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir. Ardından tabakalı kompozit plaklarda ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plaklarda geometrinin, sınır koşullarının, sönüm parametrelerinin, anlık basınç yükü tiplerinin, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılım parametresinin ve sıcaklık etkilerinin dinamik davranışa etkisi incelenmiştir. Anlık basınç yüklerine maruz kalacak fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların tasarımında, en uygun dağılım parametresinin, doğrusal olmayan etkilerin, sönüm etkilerinin termo-mekanik etkileşimin göz önüne alındığı çözümlerle belirlenebileceği gösterilmiştir.

Geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımıyla, tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların doğrusal olmayan dinamik davranışları, sönüm etkileri ve sıcaklık etkileri de göz önüne alınarak gerçekçi bir biçimde belirlenebilir. Bu nedenle bu tip plakların tasarımında ve en uygun dağılım parametresinin belirlenmesinde kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler: Anlık basınç yükü, Dinamik analiz, Doğrusal olmayan analiz, Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Karışık sonlu elemanlar metodu, von Kármán plak kuramı

NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF COMPOSITE PLATES UNDER BLAST LOAD WITH FINITE ELEMENTS

SUMMARY

Turbulences in atmosphere, nuclear explosions, sonic explosions, shock waves, fuel explosions, etc. produce blast loadings on structures near them. These blast loads can lead large deflections in plates. Consequently, geometrically nonlinear effects play an important role in the dynamic behavior of these structures. Functionally gradient material (FGM) idea was proposed in 1980s in order to be used in preparation of thermal resistant materials. The microstructure of functionally gradient material (FGM) is characterized by a spatially varying manner on the macro scale. In thermal barrier structures, functionally gradient materials are composed from ceramic and metal. In recent years, numerous researches about functionally gradient materials have been conducted for their usage in planes, space ships and nuclear systems.

In this dissertation, dynamic behaviors of laminated composite plates and FGM plates under blast loads are investigated with mixed finite element method by taking geometrically nonlinear effects, thermal effects and damping effects into consideration. For this purpose, a mixed finite element program is developed and the analyses are done with this. In dynamic analyses, no condensation is performed in the system matrix and hence time derivatives of internal forces are also calculated. According to the knowledge of the author, there is no work for nonlinear transient analysis of laminated composite plates by the mixed finite element method.

Geometrically nonlinear effects are taken into consideration in the sense of Kirchhoff-Love and von Kármán plate theory. Nonlinear mixed finite element functional is developed with Hellinger-Reissner principle and linearized with incremental formulation. Finite element matrices and vectors are formulated with isoparametric quadrilateral elements by using C^0 continuous shape functions. Dynamic analyses are performed with Newmark method and iterations are done by using Newton-Raphson algorithm. Damping is incorporated to the analysis by directly adopting the Rayleigh damping which is used mainly in the displacement based finite element methods. Three different ideal blast loads; i) Step load, ii) N-Pulse, iii) Friedlander function and non-ideal blast load are taken into account in analyses. In the analyses of plates with functionally gradient materials, five different material variation parameters are considered.

First of all, developed mixed finite element program is verified with problems in the literature and ANSYS software by analyzing single layer, laminated composite and FGM plates under static, dynamic and thermal loads. As a result of obtained solutions, it is shown that, developed mixed finite element program is able to find sufficiently precise results. Afterwards, the effect of geometry, boundary conditions, damping parameters, blast load types, functionally gradient material variation parameters and thermal loads to the dynamic behavior of laminated composite plates and FGM plates are investigated. Finally, it is shown that, in the design of FGM plates, the most suitable material variation parameter can be selected by analyzing the structure by taking the geometrically nonlinear effects, thermo-mechanical interaction and damping effects into consideration.

Nonlinear dynamic behavior of laminated composite plates and FGM plates can be determined realistically by considering damping and thermal effects with using the developed mixed finite element program. As a result, it can be used while selecting the most suitable material variation parameter in the design of FGM plates.

Keywords: Blast load, Dynamic analysis, Non-linear analysis, Functionally gradient material, Mixed finite element method, von Kármán plate theory

1. GİRİŞ

Anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların doğrusal olmayan dinamik davranışı karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle bir karışık sonlu elemanlar yazılımı geliştirilmiş ve bu yazılımla tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeden üretilmiş plakların ideal ve ideal olmayan anlık basınç yükleri altındaki davranışları sıcaklık etkileri ve sönüm etkileri de gözetilerek sayısal olarak incelenmiştir.

1.1 Problemin Tanımı

Atmosferik türbülanslar, nükleer patlamalar, sonik patlamalar, şok dalgaları, yakıt patlamaları v.b. olaylar yakınlarındaki yapılar üzerinde anlık basınç kuvvetleri oluştururlar. Bu basınç dalgaları plaklarda büyük şekil değiştirmeler oluşturur. Dolayısıyla bu yapıların dinamik davranışında geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler önemli yer tutar.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı, "*functionally gradient material*" (FGM) adı altında, yüksek sıcaklığa dayanıklı malzeme üretiminde kullanılmak üzere 1980'li yıllarda ortaya atılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin (FGM) mikro yapısı, makro ölçekte, her eksende değişken olarak karakterize edilir. Isı kalkanı yapılarında, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme seramik ve metalin karışımından oluşturulur. Plağın sıcaklık etkilerine maruz kalan yüzeyinde seramik bazlı malzeme yoğun olarak bulunurken, diğer yüze doğru seramik yoğunluğu azalır ve metal yoğunluğu artar Bu bileşim yapının enkesiti boyunca sürekli ve düzgün olarak geçiş yapar. Son yıllarda uçaklarda, uzay araçlarında, nükleer enerji sistemlerinde kullanılmak üzere FGM konusunda ciddi araştırmalar yapılmaktadır.

Tabakalı kompozit ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilmiş plak ve kabukların anlık basınç yükü altındaki, doğrusal ve doğrusal olmayan davranışları, önemine binaen, özellikle uzay sanayi, savunma sanayi ve nükleer enerji konularında çalışan araştırmacıların yoğun ilgisini çekmektedir.

1.2 Amaç ve Kapsam

Bu tez kapsamında, özellikle uzay, savunma ve nükleer enerji sanayi için önemli bir problem olan tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların doğrusal olmayan dinamik davranışlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla plak geometrisinin, sınır koşullarının, sönüm parametrelerinin, anlık basınç yükü tiplerinin, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılım parametresinin ve sıcaklık etkilerinin dinamik davranışa etkisi incelenmiştir.

Tabakalı kompozit plakların doğrusal olmayan dinamik analizlerinin yapılabilmesi için bir karışık sonlu elemanlar yazılımı geliştirildi. Doğrusal olmayan etkiler Kirchhoff-Love ve von Kármán plak kuramı kapsamında ele alındı. Doğrusal olmayan karışık sonlu eleman fonksiyoneli Hellinger-Reissner prensibi ile türetildi ve devamında bu fonksiyonel artımsal formülasyonla doğrusallaştırıldı. Sonlu eleman matrisleri ve vektörleri izoparametrik dörtgen elemanlar kullanılarak C^0 süreklilik şartına sahip şekil fonksiyonları ile elde edildi. Tüm analizlerde kullanılan malzemelerin elastik sınırlar içinde kaldığı kabul edildi. Dinamik analizler Newmark yöntemi kullanılarak gerçekleştirildi ve ardışık yaklaşım için Newton-Raphson yöntemi kullanıldı. Dinamik analizlerdeki sönüm matrisi, yer değiştirme tipi sonlu elemanlarda kullanılan Rayleigh sönümü, karışık sonlu elemanlara uyarlanarak hesaplara dahil edildi. Karışık sonlu eleman yöntemiyle dinamik analizde, alışılmışın dışında, sistem matrisi üzerinde indirgeme (kondensasyon) yapılmayarak iç kuvvetlerin ve momentlerin de zamana göre türevleri hesaba katıldı.

Geliştirilen karışık sonlu eleman yazılımı ve kullanılan sayısal algoritmalar, literatürdeki statik ve dinamik problemlerle doğrulandı. Ardından tabakalı kompozit plakların dinamik analizinde farklı ağ sıklığı, zaman adım aralığı ve Rayleigh sönüm katsayıları kullanılarak parametrik incelemeler yapıldı. Ayrıca tabakalı kompozit plakların davranışı üç farklı ideal anlık basınç yükü; *i)* Adım yükü, *ii)* N-basınç dalgası, *iii)* Friedlander fonksiyonu ve ideal olmayan anlık basınç yükü kullanılarak incelendi ve sonuçlar karşılaştırılarak değerlendirildi.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plaklarla yapılan tüm analizlerde, beş farklı malzeme dağılım parametresi kullanıldı ve dağılım parametresinin sonuçlara etkisi incelendi. Öncelikle FGM plakların statik yük ve sıcaklık etkileri altındaki davranışlarına ait çözümler literatürdeki örneklerle doğrulandı. Ardından FGM plakların dinamik analizlerinde zaman adım aralığı ve sönüm etkileri parametrik olarak incelendi. Ayrıca FGM plakların dinamik davranışı üç farklı ideal anlık basınç yükü kullanılarak da incelendi. Son olarak FGM plakların davranışına sıcaklık etkilerinin katkıları araştırıldı. Bu amaçla sıcaklık etkileri statik, başlangıç koşulu ve dinamik olarak ele alındı.

1.3 Tezin Organizasyonu

Bu tezdeki çalışmalar iki ana başlık altında gruplandırılabilir. Bunlar; i) kuramsal çalışmalar ve ii) sayısal analizlerdir. Bu iki grupta yer alan çalışmalar dört bölüm halinde sunulmuş ve bölümlerin içerikleri aşağıda özet halinde sunulmuştur.

Bölüm 1: Problemin tanımı, araştırmanın amacı ve kapsamı hakkında bilgiler verildikten sonra tezin organizasyonu açıklanmış ve araştırmada incelenen konular hakkında şimdiye kadar yapılmış çalışmalar özetlenmiştir.

Bölüm 2: Araştırmanın dayandığı kuramsal taban hakkında bilgi verildi. Öncelikle Kirchhoff varsayımları ile von Kármán plak kuramına ait alan denklemleri sunuldu, karışık sonlu eleman formülasyonunda kullanılacak Hellinger – Reissner prensibi açıklandı ve von Kármán plak kuramının doğrusal olmayan karışık sonlu eleman formülasyonu çıkartıldı. Devamında artımsal formülasyon hakkında bigi verildi, doğrusal olmayan fonksiyonel bu yöntemle doğrusallaştırıldı ve SE matrisleri elde edildi. Ardından tabakalı kompozit plakların doğrusal olmayan statik analizi için geliştirilen tüm bu formülasyon dinamik sistemlere uyarlandı. Sıcaklık etkilerinin ilave edilmesiyle formülasyonda oluşacak değişiklikler de bu bölümde verildi. Bölümün en sonunda ise, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş malzemeler (FGM) hakkında ve ideal anlık basınç yükleri hakkında bilgiler verildi.

Bölüm 3: Beş alt kısımdan oluşan bu bölümde tüm sayısal sonuçlar sunuldu. İlk kısımda, geliştirilen karışık sonlu eleman algoritmalarının doğrulaması yapıldı. İkinci kısımda tabakalı kompozit plakların doğrusal olmayan dinamik davranışlarına ait parametrik çalışmalar sunuldu. Üçüncü kısımda, farklı ideal basınç yükleri altındaki tabakalı kompozit plakların doğrusal olmayan dinamik davranışı incelendi. Dördüncü kısımda, ideal olmayan basınç yükleri altındaki dinamik davranış incelendi ve elde edilen sonuçlar deney sonuçları ve ANSYS sonuçlarıyla karşılaştırıldı. Beşinci kısımda FGM plaklarla yapılan sayısal analiz sonuçları sunuldu. Bu amaçla öncelikle sıcaklık etkilerinin hesaba katıldığı sayısal algoritmaların doğrulaması yapıldı. Analizlerde zaman adım aralığının ve sönümün etkisi irdelendi. Ayrıca FGM plakların farklı anlık basınç yükleri altındaki dinamik davranışları incelendi. Son olarak sıcaklık etkilerinin FGM plakların dinamik davranışına etkisi incelendi.

Bölüm 4: Tüm araştırma boyunca elde edilen sayısal sonuçlar irdelendi, değerlendirildi ve gelecek çalışmalara yönelik önerilerde bulunuldu.

1.4 Önceki Çalışmalar

Anlık basınç yükü altındaki dikdörtgen plakların davranışını inceleyen öncü çalışmalardan biri Gupta ve ark. (1987) tarafından düzenlenmiş Friedlander fonksiyonları ile yapılmıştır. Ayrıca Houlston ve DesRochers (1987) çelik kare plakların anlık basınç yükü altındaki davranışını ADINA yazılımıyla incelemiş ve sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır. Devam eden yıllarda Librescu ve Nosier 1990, simetrik katmanlanmış dikdörtgen kompozit panellerin sonik patlama ve anlık basınç yükü etkisi altındaki dinamik cevaplarını teorik olarak incelemişlerdir. Librescu ve ark. 2004 başka bir çalışmasında ise sandviç kompozit panellerin anlık basınç yükü altındaki lineer ve lineer olmayan dinamik davranışlarını teorik olarak incelemişlerdir. Batra ve Hassan (2007) ve Batra ve Hassan (2008) çalışmalarında ise elyaflarla güçlendirilmiş kompozitlerin anlık basınç yükleri altındaki dinamik davranışlarını teorik olarak incelenmişlerdir. Anlık basınç yükü altında simetrik olmayan açılı katmanlanmış kompozit plakların doğrusal olan ve olmayan dinamik yer değiştirmeleri de Doğan (2008) tarafından araştırılmıştır.

Türkmen ve Mecitoğlu [1999a,b], iki farklı anlık basınç yüküne maruz kalan takviyeli ve takviyesiz katmanlı kompozit bir plağın doğrusal olmayan bölgedeki dinamik davranışlarını hem kuramsal, hem sayısal, hem de deneysel olarak inceleyip elde ettikleri sonuçları birbirleriyle karşılaştırmışlardır. Kazancı ve ark. (2004) çalışmasında düzlem içi rijitliklerin ve ataletlerin, anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların dinamik davranışına etkisini araştırmışlardır. Ayrıca Kazancı ve Mecitoğlu (2008) basit mesnetli katmanlı kompozit plakların anlık basınç yükü altındaki doğrusal olmayan dinamik davranışlarını araştırmışlardır.

Ayrıca birçok araştırmacı katmanlı kompozit plaklarda büyük yer değiştirme etkilerini incelemişlerdir (Chia, 1988; Cheung ve Li, 1989; Barbero ve Reddy, 1990; Turvey ve Osman, 1990; Bencharif ve Ng, 1994; Singh ve ark., 1994; Günay ve Erdem, 1997; Shen, 1999; Shulka ve Nath, 2000; Tan ve ark., 2000; Zhang ve ark., 2003; Tanrıöver ve Şenocak, 2004).

Metal plakların ve metal katman içeren tabakalı plakların dinamik davranışlarını deneysel olarak inceleyen çalışmalar da literatürde mevcuttur. Jacinto ve ark. (2001) ve Stoffel ve ark. (2001) anlık basınç yüklerine maruz metal plakların dinamik davranışını deneysel olarak incelemiştir. Metal katman içeren kompozit plakların ideal ve ideal olmayan anlık basınç yükü altındaki davranışları Langdon ve ark. (2005b), Langdon ve ark. (2007a,b,c,2008), Lemanski ve ark. (2006, 2007) tarafından ve takviyeli çelik panellerin ideal ve ideal olmayan anlık basınç yükü altındaki davranışları Yuen ve Nurick (2005), Langdon ve ark. (2005a) tarafından deneysel olarak incelenmiştir. Bu konuda son yıllarda yapılan diğer çalışmalar arasında Harras ve ark. (2002), Veldman ve ark. (2006), Veldman ve arkadaşları (2008), Gong ve Andreopoulos (2008) gösterilebilir.

Anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların dinamik davranışına sönümün etkisinin araştırıldığı çalışma literatürde nispeten azdır. Nosier ve ark. (1990) tabakalı kompozit düz panellerin sönümlü dinamik davranışını incelemişlerdir. Ayrıca son yıllarda Kazancı ve Mecitoğlu (2005) anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların doğrusal olmayan dinamik davranışını sönüm etkilerini de dikkate alarak incelemişlerdir.

Son yıllarda uçaklarda, uzay araçlarında, nükleer enerji sistemlerinde, uzay araçlarının panellerinde kullanılmak üzere fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme konusunda ciddi araştırmalar yapılmaktadır. Koizumi (1997) çalışmasında bu malzemelerin özellikleri, kullanım alanları ve potansiyel avantajları konusunda detaylı bilgiler mevcuttur. Praveen ve Reddy (1998) ve Reddy (2000) çalışmalarında fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilmiş plakların doğrusal olmayan dinamik davranışlarını sıcaklık etkilerini de göz önüne alarak incelemiştir. Devam eden yıllarda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerle ilgili çalışmalar hızlanarak artmıştır. Woo ve Meguid (2001) çalışmasında FGM plakların ve kabukların dinamik davranışını mekanik ve sıcaklık yükleri altında Fourier serileriyle incelemişlerdir. Shen (2002) çalışmasında, eksenel olarak yüklenmiş FGM silindirik plakların burkulma ötesi davranışlarını sıcaklık etkilerini de dikkate alarak araştırmıştır. Ma ve Wang (2003) çalışmasında FGM dairesel plakların doğrusal olmayan eğilme ve burkulma ötesi davranışlarını mekanik ve sıcaklık yükleri altında incelemiştir. Huang ve Shen (2004) çalışmasında ise FGM plakların sıcaklık etkileri altındaki doğrusal olmayan titreşimlerini ve dinamik davranışlarını incelemiştir. Yang ve ark. (2004) çalışmasında ise FGM plaklar, kayma etkileri de dikkate alınarak mekanik, elektrik ve sıcaklık etkileri altında doğrusal olmayan analizlerle incelenmiştir. Woo ve ark. (2006) çalışmasında FGM plakların doğrusal olmayan serbest titreşimlerini analitik olarak incelemişlerdir. Park ve Kim (2006) FGM plakların titreşimleri ve burkulma ötesi davranışlarını sıcaklık etkileri altında incelemişlerdir.

Bu araştırmada gerçekleştirilen sayısal analizlerde, geliştirilen karışık sonlu eleman yazılımı kullanılmıştır. Karışık sonlu eleman yönteminde, yer değiştirmelerin yanı sıra iç kuvvetlerin de bağımsız değişken olarak ele alınması, bu yönteme analitik ve hesapsal açılardan bazı avantajlar kazandırmaktadır. Bu metodun doğrusal olmayan statik ve dinamik analizlerdeki bazı öncü uygulamaları arasında Miyoshi (1976), Tsay ve Reddy (1977), Akay (1980) sayılabilir. Aköz ve ark. (2001) çalışmalarında von Kármán plaklarının statik davranışı için Gâteaux türevi metoduyla bir fonksiyonel geliştirmişlerdir. Karışık sonlu elemanlar yönteminin zamana bağlı dinamik analizlere dönük tek uygulaması, yazarların bilgisi kapsamında, Akay (1980) tarafından yapılmıştır. Artımsal karışık sonlu eleman formülasyonunda kullanılabilecek varyasyonel prensiplere ait bilgiler Pian (1976)’da detaylı olarak incelenmiştir. Doğrusal olmayan denklemleri doğrusallaştırmada kullanılan artımsal formülasyon için Başar ve Krätzig (1985), Başar ve Omurtag (2000), Doğruoğlu ve Omurtag (2000), Sofiyev ve ark. (2009)’dan yararlanılabilir. Ayrıca Newton-Raphson yöntemi ve Newmark şeması için Bathe (1996)’da geniş açıklama mevcuttur. Tabakalı kompozit plakların anlık basınç yükü altında sıcaklık etkileriyle birlikte dinamik davranışları, yazarların bilgisi dahilinde, ilk defa bu çalışmada karışık SE formülasyonu ile incelenmiştir.

2. KURAMSAL ÇALIŞMALAR

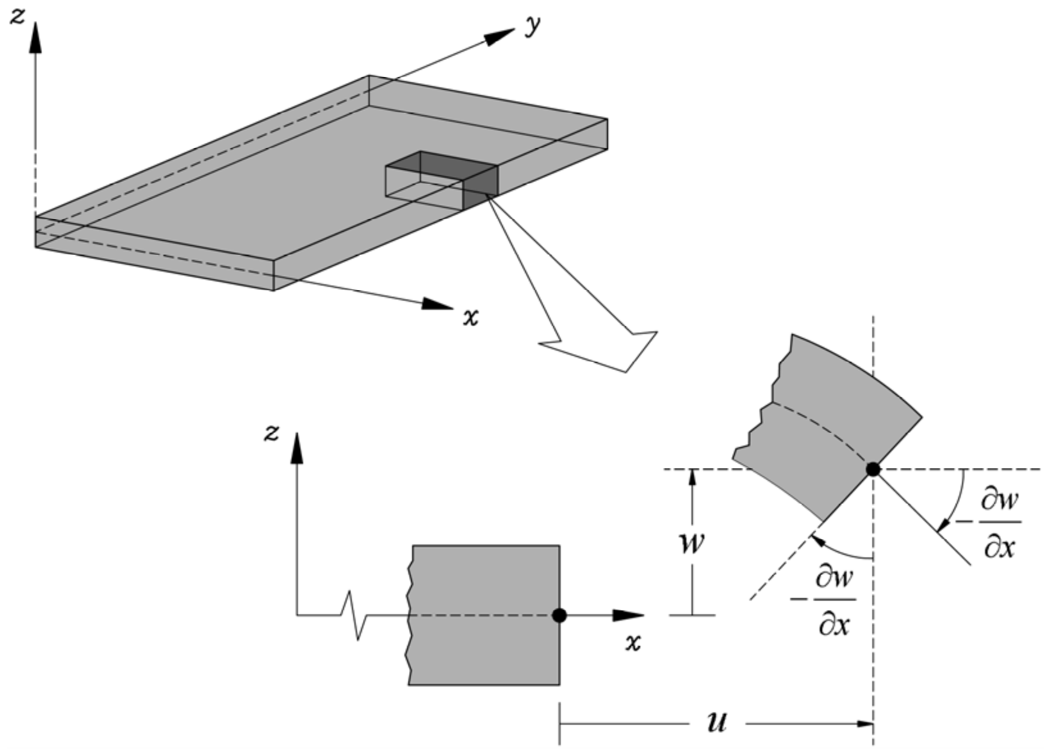
Plakların analizinde, varyasyonel prensiplere dayalı karışık sonlu eleman yöntemi, yer değiştirme tipi sonlu eleman yöntemine alternatif olarak literatürde yoğun olarak kullanılmıştır. Karışık ve melez (hybrid) sonlu eleman yöntemleri genellikle Hu-Washizu fonksiyoneli, Hellinger-Reissner fonksiyoneli veya Gateaux türevi kullanılarak geliştirilir.

Karışık sonlu elemanlar yönteminin doğrusal statik problemlerdeki bazı ilk uygulamaları arasında, Herrmann 1967, Visser 1969, Kikuchi ve Ando 1972, Bron ve Dhatt 1972, Poceski 1975, Reddy ve Tsay 1977 gösterilebilir. Ayrıca doğrusal olmayan statik, serbest titreşim ve doğrusal olmayan dinamik problemlerdeki bazı ilk uygulamaları arasında Rodriguez 1968, Cook 1969, Tsay ve Reddy 1977, Akay 1980 sayılabilir. Karışık sonlu eleman yönteminde, yer değiştirmelerin yanı sıra iç kuvvetlerin de bağımsız değişken olarak ele alınması, bu metoda analitik ve hesapsal açılardan bazı avantajlar kazandırmaktadır. Yer değiştirme tipi elemanlarla karşılaştırıldığında şekil fonksiyonlarının düşük süreklilik şartına sahip olması, daha basit sonlu eleman formülasyonuna yol açmaktadır.

Bu araştırmada, homojen olmayan ince plakların, doğrusal olmayan dinamik analizlerinde kullanılmak için geliştirilen karışık sonlu eleman yönteminde Hellinger-Reissner fonksiyoneli kullanılmıştır. Geometrik olarak doğrusal olmayan davranış von Kármán kuramı kapsamında ele alınmıştır. Doğrusal olmayan terimler içeren fonksiyonel artımsal formülasyon kullanılarak doğrusallaştırılmış ve sonlu eleman formülasyonu içinde Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemi ile çözülmüştür. Dinamik analizde zamana bağlı davranışı inceleyebilmek için Newmark yöntemi kullanılmış ve sönüm etkileri Rayleigh sönümü biçiminde ifade edilmiştir.

2.1 Alan Denklemleri

Ele alınan plak kuramında, geometrik olarak doğrusal olmayan davranışı yansıtmak amacıyla kullanılan von Kármán (Kármán, 1910) kuramında, küçük şekil değiştirmeler ve kısmen büyük yer değiştirmeler ve dönmeler (10^o-15^o) olduğu varsayılmaktadır (Reddy, 2004).



Şekil 2.1 : Kirchhoff varsayımları altında plak davranışı.

2.1.1 Kinematik ilişkilere ait varsayımlar

Ele alınan plak kuramında, yer değiştirme alanları Kirchhoff varsayımlarını sağlayacak şekilde seçilmiştir. Kirchhoff varsayımları (Şekil 2.1),

- Şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan düz çizgiler, şekil değiştirmeden sonra da düz kalır.
- Orta düzleme dik olan düz çizgiler uzama veya kısalma yapmazlar.
- Şekil değiştirmeden önce orta düzleme dik olan düz çizgiler, şekil değiştirmeden sonra da dik kalır, şeklinde özetlenebilir.

2.1.2 Yer değiştirme alanları ve şekil değiştirmeler

Plak bölgesini tariflersek;

Ω_0	: Şekil değiştirmeden önce plak orta düzlemi,
$\Omega_0 \times (-h/2, h/2)$	: Plak ortamı.

Plak sınır bölgeleri aşağıda tariflenen üç yüzeyin toplamından oluşmaktadır.

$S_t\left(z = h/2\right)$	: Plak bölgesinin üst yüzeyi,
$S_b\left(z = -h/2\right)$	: Plak bölgesinin alt yüzeyi,
$\Gamma \times (-h/2, h/2)$	: Plak bölgesinin yan yüzeyi

Burada Γ, plağın orta düzleminin sınırlarını belirleyen, dış normali $\hat{n} = n_x \hat{e}_x + n_y \hat{e}_y$ olan bir eğridir. n_x ve n_y birim normalin doğrultu kosinüsleridir. Bu şekilde tariflenen plakların Kirchhoff varsayımları altında yer değiştirme alanı,

$$\begin{aligned} u^*(x,y,z) &= u(x,y) - zw_{,x} \\ v^*(x,y,z) &= v(x,y) - zw_{,y} \\ w^*(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dır. Burada $u^*(x,y,z)$, $v^*(x,y,z)$, $w^*(x,y,z)$ plak ortamındaki, $u(x,y)$, $v(x,y)$, $w(x,y)$ plak orta düzlemindeki bir noktanın yaptığı yer değiştirmelerdir. Küçük şekil değiştirmeler ve nispeten büyük dönmeler kabulü için von Kármán şekil değiştirmeleri,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u^*_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w^*_{,x}\right)^2 \\ \varepsilon_{yy} &= v^*_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w^*_{,y}\right)^2 \\ \varepsilon_{zz} &= w^*_{,z} \\ \varepsilon_{xy} &= \tfrac{1}{2}\left(u^*_{,y} + v^*_{,x} + w^*_{,x} w^*_{,y}\right) \\ \varepsilon_{xz} &= \tfrac{1}{2}\left(u^*_{,z} + w^*_{,x}\right) \\ \varepsilon_{yz} &= \tfrac{1}{2}\left(v^*_{,z} + w^*_{,y}\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

biçiminde ifade edilir.

2.1.3 Kinematik bağıntılar

Kirchhoff plak kuramına ait yer değiştirme alanları, **(2.2)** denklemlerinde yerlerine konulursa, şekil değiştirme – yer değiştirme ilişkileri,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 - zw_{,xx} \\
\varepsilon_{yy} &= v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 - zw_{,yy} \\
\varepsilon_{xy} &= \tfrac{1}{2}\left(u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy}\right) \\
\varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir. Bu bağıntılara von Kármán şekil değiştirmeleri ve ilgili plak kuramına von Kármán Plak Kuramı denir.

2.1.4 Bünye bağıntıları

Malzeme eksenleri plak koordinat eksenleri ile çakışan ortotrop bir malzeme için indirgenmiş bünye bağıntıları,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 + z\kappa_1^0 \\ \varepsilon_2^0 + z\kappa_2^0 \\ \gamma_{12}^0 + z\kappa_{12}^0 \end{Bmatrix} \tag{2.4}$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\ Q_{22} = \frac{E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\ Q_{12} = \frac{\upsilon_{12}E_2}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}} = \frac{\upsilon_{21}E_1}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}},\ Q_{66} = G_{12}$$

şeklinde olur. Malzeme eksenlerinde tariflenen gerilme ve şekil değiştirme büyüklükleri, dönüşüm ilkeleri ile herhangi bir koordinat sisteminde,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \left[T\right]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left[T\right]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \tfrac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\left[T\right] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir.

Şekil değiştirme tansörü bileşenleri ile mühendislik şekil değiştirmesi bileşenleri arasındaki ilişkiler,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

biçiminde kurulur. Plak eksenleri ile malzeme eksenleri arasında θ açısı olan ortotrop bir malzemenin bünye bağıntıları, **(2.4)** ~ **(2.8)** denklemleri ile,

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix} \\ &= [T]^{-1}[Q][R][T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{2.9}$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca **(2.9)** ifadesinde $[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T}$ olduğu gösterilebilir. Plak eksenleri ile malzeme eksenleri arasında θ açısı olan ortotrop bir malzemenin bünye bağıntıları,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][T]^{-T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

şeklinde olur. Tabakalı ortotrop malzemelerde her bir tabakanın bünye bağıntıları ise,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \tag{2.11}$$

olarak tarif edilir ve şekil değiştirmeler yerine **(2.3)** ifadesi konulursa,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}]_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \right\} \tag{2.12}$$

tabakalı ortotrop malzemelerin, her bir tabakası için bünye denklemi elde edilir.

2.1.5 İç kuvvetler

von Kármán plak kuramında, membran kuvvetleri ve eğilme momentleri sırasıyla,

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz\,, \qquad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} zdz \tag{2.13}$$

şeklindedir. **(2.12)** ifadesinin **(2.13)**'de yerine konulmasıyla iç kuvvetler elde edilir.

Membran kuvvetleri:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\bar{Q}\right]_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \right\} dz \tag{2.14}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}\right]_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} zdz \right\} \tag{2.15}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left[A\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[B\right] \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k - z_{k-1}\right), \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \tag{2.17}$$

Eğilme momentleri:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k zdz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\bar{Q}\right]_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \right\} zdz \tag{2.18}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}\right]_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} zdz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} z^2 dz \right\} \tag{2.19}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[B\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[D\right] \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right) \tag{2.21}$$

2.1.6 Yer değiştirme – iç kuvvet bağıntıları

Karışık sonlu eleman formülasyonunun Hellinger – Reissner fonksiyoneli ile elde edilmesinde yer değiştirmelerin iç kuvvetler cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. Bunun için **(2.16)** ve **(2.20)**'deki denklem takımlarının tersi alınır.

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} \tag{2.23}$$

(2.22) $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}}$ için çözülür ve **(2.23)**'de yerine konulursa,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}}\right) + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + \left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} \tag{2.25}$$

elde edilir. **(2.25)** $\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}}$ için çözülür ve **(2.24)**'de yerine konulursa

$$\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} = -\left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + \left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{M} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left[-\left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{N} + \left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{M}\right] \\ &= \left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\right)\mathbf{N} + \left(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\right)\mathbf{M}\end{aligned} \tag{2.27}$$

Bulunan sonuç düzenlenirse,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{0}} = \mathbf{A}'\mathbf{N} + \mathbf{B}'\mathbf{M} \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\mathbf{0}} = \mathbf{H}'\mathbf{N} + \mathbf{D}'\mathbf{M} \tag{2.29}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{B}' &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1} \\ \mathbf{H}' &= -(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{D}' &= \left(\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1} \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{H}'\end{aligned} \tag{2.30}$$

olarak tariflenir.

Yer değiştirme-İç kuvvet bağıntıları açık formada,

$$
\begin{aligned}
u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 &= A'_{11}N_{xx} + A'_{12}N_{yy} + A'_{13}N_{xy} + B'_{11}M_{xx} + B'_{12}M_{yy} + B'_{13}M_{xy} \\
v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 &= A'_{21}N_{xx} + A'_{22}N_{yy} + A'_{23}N_{xy} + B'_{21}M_{xx} + B'_{22}M_{yy} + B'_{23}M_{xy} \\
u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} &= A'_{31}N_{xx} + A'_{32}N_{yy} + A'_{33}N_{xy} + B'_{31}M_{xx} + B'_{32}M_{yy} + B'_{33}M_{xy} \\
-w_{,xx} &= H'_{11}N_{xx} + H'_{12}N_{yy} + H'_{13}N_{xy} + D'_{11}M_{xx} + D'_{12}M_{yy} + D'_{13}M_{xy} \\
-w_{,yy} &= H'_{21}N_{xx} + H'_{22}N_{yy} + H'_{23}N_{xy} + D'_{21}M_{xx} + D'_{22}M_{yy} + D'_{23}M_{xy} \\
-2w_{,xy} &= H'_{31}N_{xx} + H'_{32}N_{yy} + H'_{33}N_{xy} + D'_{31}M_{xx} + D'_{32}M_{yy} + D'_{33}M_{xy}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.31)}
$$

şeklinde ifade edilir.

2.1.7 Denge denklemleri

von Kármán plak kuramına ait virtüel iş prensibi ile elde edilen denge denklemleri,

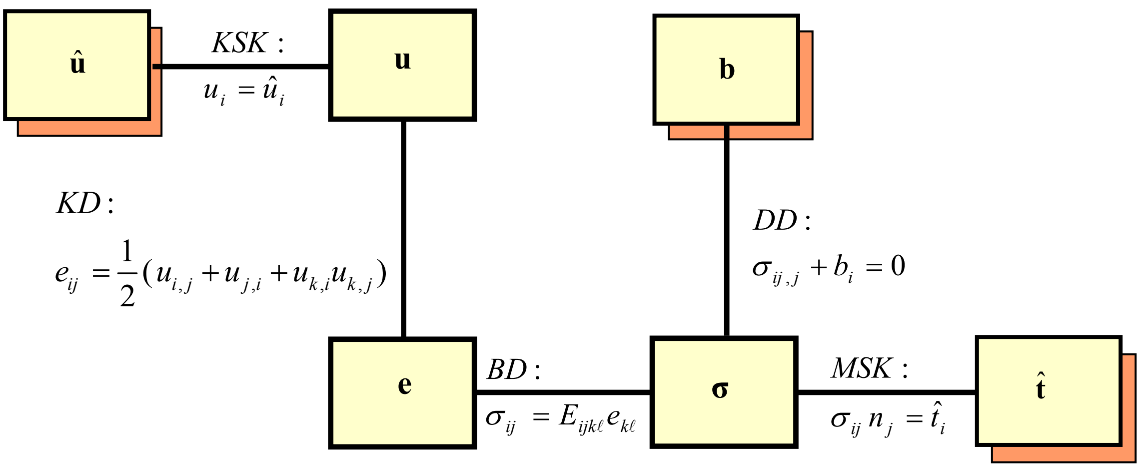
$$
\begin{aligned}
q_x + N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\
q_y + N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\
q_z + M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} + \left(N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y}\right)_{,x} + \left(N_{xy}w_{0,x} + N_{yy}w_{0,y}\right)_{,y} &= 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.32)}
$$

şeklinde ifade edilir.

2.2 Hellinger-Reissner Fonksiyoneli

2.2.1 Elastisitenin temel denklemleri

Elastisitenin temel denklemleri ve değişkenlerin birbirleriyle ilişkisi Şekil 2.2’de özetlenmiştir.



Şekil 2.2 : Elastisitenin temel denklemleri.

Hellinger – Reissner (HR) fonksiyonelinde yer değiştirmeler ve gerilmeler ayrık bağımsız değişkenler olarak ele alınır. Bu durumda iki ayrı şekil değiştirme alanı ortaya çıkar. Bunlardan biri yer değiştirmelerden diğeri de gerilmelerden gelir.

$$e_{ij}^{u} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}\right) \qquad \textbf{(2.33)}$$

$$e_{ij}^{\sigma} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad \textbf{(2.34)}$$

Ele alınan diferansiyel denklemler kapalı olarak çözülebilirse, bu iki şekil değiştirme alanı her noktada birbirine eşit olur. Ancak sonlu elemanlar gibi sayısal hesap yöntemleri kullanıldığında, bu iki değer birbirine yaklaşık olarak eşitlenir.

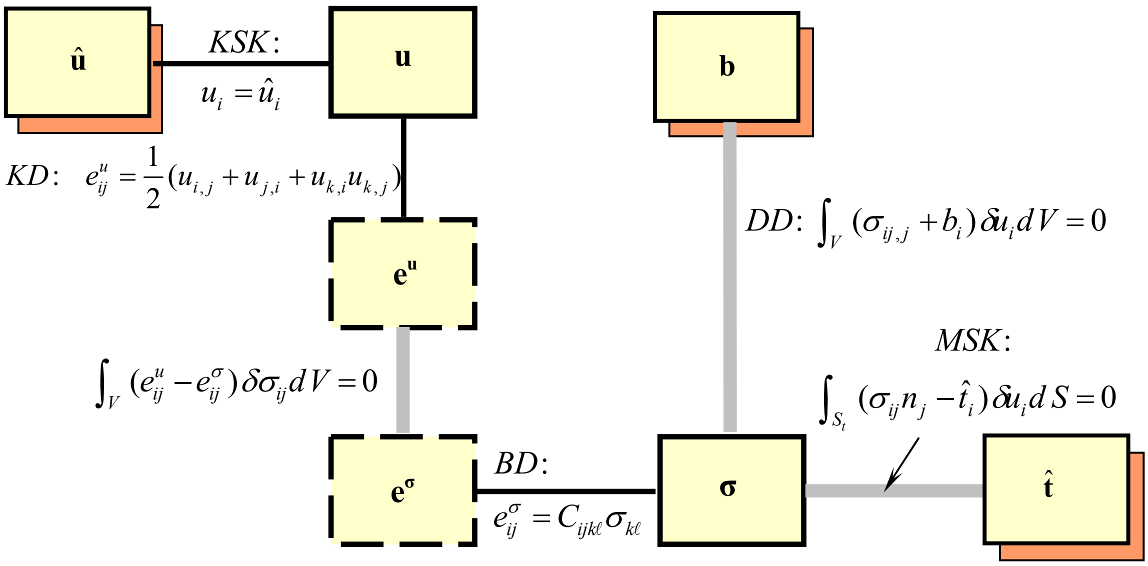
Hellinger-Reissner ilkesi elastisitenin temel denklemlerinde üç adet zayıf bağlantı oluşturur. Bunlar denge denklemlerinde, iç kuvvetlere ait sınır koşullarında ve iki şekil değiştirme alanının eşitliğinde oluşturulur. Ortaya çıkan zayıf bağlantılar,

$$\int_V \left(e_{ij}^{u} - e_{ij}^{\sigma}\right)\delta\sigma_{ij}\,dV = 0 \qquad \textbf{(2.35)}$$

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i\,dV = 0 \qquad \textbf{(2.36)}$$

$$\int_{S_t} \left(\sigma_{ij}n_j - \hat{t}_i\right)\delta u_i\,dS = 0 \qquad \textbf{(2.37)}$$

olup bunlar Şekil 2.3'de görüldüğü gibidir.



Şekil 2.3 : Hellinger–Reissner fonksiyonelindeki zayıf bağlantılar.

2.2.2 Zayıf formülasyon

Hellinger–Reissner fonksiyoneline ait zayıf formülasyonun elde edilmesi için Lagrange çarpanları yöntemi kullanılacaktır. Elastisite denklemlerinin zayıflatılan bağlantılarında oluşan artıklar Lagrange çarpanlarıyla çarpılıp kendilerine ait bölgelerde veya sınırlarda entegre edilecektir.

$$\int_V \left(e_{ij}^u - e_{ij}^\sigma\right)\lambda_{ij} dV + \int_V \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\lambda_i^* dV + \int_S \left(\sigma_{ij} n_j - \hat{t}_i\right)\lambda_i^{**} dS = 0 \qquad \textbf{(2.38)}$$

İş yapabilen çiftler düşünüldüğünde, Penaltı yöntemi gereği Lagrange çarpanlarının yer değiştirme veya gerilme varyasyonları olması gerektiği görülebilir. Denge denklemlerinin ve iç kuvvetlere ait sınır şartları denklemlerinin artıkları kuvvet olduğundan Lagrange çarpanları yer değiştirme varyasyonu olmalıdır. Benzer şekilde şekil değiştirme alanlarının farklarına ait denklemin artıkları şekil değiştirme olduğundan, Lagrange çarpanı gerilme varyasyonu olmalıdır. Bu değerler **(2.38)**'e yerleştirildiğinde,

$$\int_V \left(e_{ij}^u - e_{ij}^\sigma\right)\delta\sigma_{ij} dV - \int_V \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i dV + \int_S \left(\sigma_{ij} n_j - \hat{t}_i\right)\delta u_i dS = 0 \qquad \textbf{(2.39)}$$

elde edilir. **(2.39)**'da gerilmelerde bulunan türev operatörünün yer değiştirmelerin varyasyonuna Green-Gauss teoremiyle kaydırılması için aşağıdaki işlemler yapılır.

$$\delta e_{ij}^u = \frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right), \qquad \delta u_i\big|_{S_u} = 0 \;\Rightarrow\; \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = 0 \qquad \textbf{(2.40)}$$

$$\begin{aligned} -\int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i dV &= \int_V \sigma_{ij}\delta e_{ij}^u dV - \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \\ &= \int_V \sigma_{ij}\delta e_{ij}^u dV - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \\ &= \int_V \sigma_{ij}\delta e_{ij}^u dV - \int_{S_t} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS \end{aligned} \qquad \textbf{(2.41)}$$

(2.39)'da **(2.41)**'e dayalı gerekli düzenlemeler yapılıp yeniden yazılırsa, Hellinger–Reissner fonksiyonelinin varyasyonu,

$$\delta \Pi_{HR} = \int_V \left[\left(e_{ij}^u - e_{ij}^\sigma\right)\delta\sigma_{ij} + \sigma_{ij}\delta e_{ij}^u - b_i \delta u_i\right] dV - \int_S \hat{t}_i \delta u_i dS \qquad \textbf{(2.42)}$$

biçiminde elde edilir.

2.2.3 Hellinger-Reissner fonksiyoneli

(2.42)'deki varyasyona ait fonksiyonel,

$$\Pi_{HR}\left(u_i,\sigma_{ij}\right)=\int_V\left[\sigma_{ij}e_{ij}^{u}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}-b_iu_i\right]dV-\int_S\hat{t}_iu_idS \qquad \textbf{(2.43)}$$

olur. Buna Hellinger–Reissner fonksiyoneli adı verilir (Hellinger 1914, Reissner 1950). **(2.43)**'ün varyasyonu alındığında **(2.42)**'ye ulaşılır. Göstermek gerekirse:

$$\delta\left(\sigma_{ij}e_{ij}^{u}\right)=e_{ij}^{u}\delta\sigma_{ij}+\sigma_{ij}\delta e_{ij}^{u} \qquad \textbf{(2.44)}$$

$$\delta\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}\right)=\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\delta\sigma_{kl}=C_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij}=e_{ij}^{\sigma}\delta\sigma_{ij} \qquad \textbf{(2.45)}$$

Hellinger–Reissner fonksiyoneli literatürde aşağıdaki şekillerde de ifade edilmektedir.

$$\Pi_{HR}\left(u_i,\sigma_{ij}\right)=\int_V\left[-U^{*}\left(\sigma_{ij}\right)+\sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)-b_iu_i\right]dV-\int_S\hat{t}_iu_idS \qquad \textbf{(2.46)}$$

Burada U^{*} tamamlayıcı şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu olarak isimlendirilir ve

$$U^{*}\left(\sigma_{ij}\right)=\frac{1}{2}\sigma_{ij}C_{ijkl}\sigma_{kl}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}^{\sigma} \qquad \textbf{(2.47)}$$

şeklinde tariflenir. Hellinger–Reissner prensibine göre, varyasyonun durağanlığı;

$$\delta\Pi_{HR}=0 \qquad \textbf{(2.48)}$$

kinematik bağıntıların ve bünye denklemlerinin Euler-Lagrange denklemleri olarak sağlanması ile iç kuvvetlere ait sınır şartlarının doğal sınır koşulları olarak sağlanmasını gerektirir.

2.3 Von Kármán Kuramının Karışık SE Formülasyonu

2.3.1 Hellinger-Reissner fonksiyoneli

von Kármán plak kuramına ait Hellinger–Reissner fonksiyonelinin elde edilmesinde kullanılan değişkenler ve operatörler aşağıda özetlenmiştir.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T \tag{2.49}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 & \varepsilon_y^0 & \gamma_{xy}^0 & \kappa_x^0 & \kappa_y^0 & \kappa_{xy}^0 \end{bmatrix}^T \tag{2.50}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} N_{xx} & N_{yy} & N_{xy} & M_{xx} & M_{yy} & M_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{2.51}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} q_x & q_y & q_z \end{bmatrix}^T \tag{2.52}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \\ -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -w_{,xy} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}^{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} & B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} & B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \\ H'_{11} & H'_{12} & H'_{13} & D'_{11} & D'_{12} & D'_{13} \\ H'_{21} & H'_{22} & H'_{23} & D'_{21} & D'_{22} & D'_{23} \\ H'_{31} & H'_{32} & H'_{33} & D'_{31} & D'_{32} & D'_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.53}$$

von Kármán plak kuramına ait denge denklemleri $(\sigma_{ij,j} + b_i = 0)$,

$$\begin{aligned} q_x + N_{xx,x} + N_{xy,y} &= 0 \\ q_y + N_{xy,x} + N_{yy,y} &= 0 \\ q_z + M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} + \left(N_{xx}w_{0,x} + N_{xy}w_{0,y}\right)_{,x} + \left(N_{xy}w_{0,x} + N_{yy}w_{0,y}\right)_{,y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.54}$$

von Kármán plak kuramına ait yer değiştirme iç kuvvet bağıntıları $\left(e_{ij}^u = e_{ij}^\sigma\right)$,

$$\begin{aligned} u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 &= A'_{11}N_{xx} + A'_{12}N_{yy} + A'_{13}N_{xy} + B'_{11}M_{xx} + B'_{12}M_{yy} + B'_{13}M_{xy} \\ v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 &= A'_{21}N_{xx} + A'_{22}N_{yy} + A'_{23}N_{xy} + B'_{21}M_{xx} + B'_{22}M_{yy} + B'_{23}M_{xy} \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} &= A'_{31}N_{xx} + A'_{32}N_{yy} + A'_{33}N_{xy} + B'_{31}M_{xx} + B'_{32}M_{yy} + B'_{33}M_{xy} \\ -w_{,xx} &= H'_{11}N_{xx} + H'_{12}N_{yy} + H'_{13}N_{xy} + D'_{11}M_{xx} + D'_{12}M_{yy} + D'_{13}M_{xy} \\ -w_{,yy} &= H'_{21}N_{xx} + H'_{22}N_{yy} + H'_{23}N_{xy} + D'_{21}M_{xx} + D'_{22}M_{yy} + D'_{23}M_{xy} \\ -2w_{,xy} &= H'_{31}N_{xx} + H'_{32}N_{yy} + H'_{33}N_{xy} + D'_{31}M_{xx} + D'_{32}M_{yy} + D'_{33}M_{xy} \end{aligned} \tag{2.55}$$

2.3.2 Zayıf formülasyon

von Kármán plak kuramının Hellinger – Reissner fonksiyoneline ait zayıf formülasyonu elde etmek için,

$$\int_V \left(e_{ij}^u - e_{ij}^\sigma\right)\delta\sigma_{ij} dV - \int_V \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right)\delta u_i dV + \int_S \left(\sigma_{ij} n_j - \hat{t}_i\right)\delta u_i dS = 0 \tag{2.56}$$

ifadesinde, **(2.54)** ve **(2.55)** yerlerine konulur. Burada $\delta u_i^T = \{\delta u \;\; \delta v \;\; \delta w\}$ ve $\delta\sigma_{ij}^T = \{\delta N_{xx} \;\; \delta N_{yy} \;\; \delta N_{xy} \;\; \delta M_{xx} \;\; \delta M_{yy} \;\; \delta M_{xy}\}$ olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 - A'_{11}N_{xx} - A'_{12}N_{yy} - A'_{13}N_{xy} - B'_{11}M_{xx} - B'_{12}M_{yy} - B'_{13}M_{xy}\right]\delta N_{xx} dA \\
&+\int_\Omega \left[v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 - A'_{21}N_{xx} - A'_{22}N_{yy} - A'_{23}N_{xy} - B'_{21}M_{xx} - B'_{22}M_{yy} - B'_{23}M_{xy}\right]\delta N_{yy} dA \\
&+\int_\Omega \left[u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - A'_{31}N_{xx} - A'_{32}N_{yy} - A'_{33}N_{xy} - B'_{31}M_{xx} - B'_{32}M_{yy} - B'_{33}M_{xy}\right]\delta N_{xy} dA \\
&+\int_\Omega \left[-w_{,xx} - H'_{11}N_{xx} - H'_{12}N_{yy} - H'_{13}N_{xy} - D'_{11}M_{xx} - D'_{12}M_{yy} - D'_{13}M_{xy}\right]\delta M_{xx} dA \\
&+\int_\Omega \left[-w_{,yy} - H'_{21}N_{xx} - H'_{22}N_{yy} - H'_{23}N_{xy} - D'_{21}M_{xx} - D'_{22}M_{yy} - D'_{23}M_{xy}\right]\delta M_{yy} dA \\
&+\int_\Omega \left[-2w_{,xy} - H'_{31}N_{xx} - H'_{32}N_{yy} - H'_{33}N_{xy} - D'_{31}M_{xx} - D'_{32}M_{yy} - D'_{33}M_{xy}\right]\delta M_{xy} dA \\
&-\int_\Omega q_x \delta u dA - \int_\Omega \left[N_{xx,x} + N_{xy,y}\right]\delta u dA - \int_\Omega q_y \delta v dA - \int_\Omega \left[N_{xy,x} + N_{yy,y}\right]\delta v dA \\
&-\int_\Omega q_z \delta w dA - \int_\Omega \left[M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy}\right]\delta w dA \\
&-\int_\Omega \left[\left(N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y}\right)_{,x} + \left(N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y}\right)_{,y}\right]\delta w dA + \int_S \left(\sigma_{ij}n_j - \hat{t}_i\right)\delta u_i dS = 0
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Fonksiyonelinin tam varyasyonuna ulaşmak için, **(2.57)** ifadesinde iç kuvvetlerin üstündeki türevler kaydırılırsa,

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{HR} = &\int_\Omega \left[u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 - A'_{11}N_{xx} - A'_{12}N_{yy} - A'_{13}N_{xy} - B'_{11}M_{xx} - B'_{12}M_{yy} - B'_{13}M_{xy}\right]\delta N_{xx} dA \\
&+\int_\Omega \left[v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 - A'_{21}N_{xx} - A'_{22}N_{yy} - A'_{23}N_{xy} - B'_{21}M_{xx} - B'_{22}M_{yy} - B'_{23}M_{xy}\right]\delta N_{yy} dA \\
&+\int_\Omega \left[u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - A'_{31}N_{xx} - A'_{32}N_{yy} - A'_{33}N_{xy} - B'_{31}M_{xx} - B'_{32}M_{yy} - B'_{33}M_{xy}\right]\delta N_{xy} dA \\
&+\int_\Omega \left[-w_{,xx} - H'_{11}N_{xx} - H'_{12}N_{yy} - H'_{13}N_{xy} - D'_{11}M_{xx} - D'_{12}M_{yy} - D'_{13}M_{xy}\right]\delta M_{xx} dA \\
&+\int_\Omega \left[-w_{,yy} - H'_{21}N_{xx} - H'_{22}N_{yy} - H'_{23}N_{xy} - D'_{21}M_{xx} - D'_{22}M_{yy} - D'_{23}M_{xy}\right]\delta M_{yy} dA \\
&+\int_\Omega \left[-2w_{,xy} - H'_{31}N_{xx} - H'_{32}N_{yy} - H'_{33}N_{xy} - D'_{31}M_{xx} - D'_{32}M_{yy} - D'_{33}M_{xy}\right]\delta M_{xy} dA \\
&-\int_\Omega q_x \delta u dA + \int_\Omega \left[N_{xx}\delta u_{,x} + N_{xy}\delta u_{,y}\right] dA - \int_\Omega q_y \delta v dA + \int_\Omega \left[N_{xy}\delta v_{,x} + N_{yy}\delta v_{,y}\right] dA \\
&-\int_\Omega q_z \delta w dA - \int_\Omega \left[M_{xx}\delta w_{,xx} + M_{yy}\delta w_{,yy} + 2M_{xy}\delta w_{,xy}\right] dA \\
&+\int_\Omega \left[\left(N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y}\right)\delta w_{,x} + \left(N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y}\right)\delta w_{,y}\right] dA + \int_S \hat{t}_i \delta u_i dS
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Hellinger – Reissner fonksiyonelinin tam varyasyonu elde edilir.

2.3.3 Doğrusal olmayan formülasyon

Ana değişkenleri ifade etmekte kullanılacak şekil fonksiyonlarının sağlaması gereken süreklilik şartları, bu terimlerin zayıf formülasyonda sahip oldukları türev derecelerine göre belirlenir. Buna göre düzlem içi yer değiştirmeler (u,v) C^0, çökmeler (w) C^1 ve iç kuvvetler ise ($N_{xx},N_{yy},N_{xy},M_{xx},M_{yy},M_{xy}$) C^{-1} sürekliliğine sahip olmalıdır. Çökmelerin süreklilik derecesini bir mertebe düşürmek için, çökmelerin ikinci türevlerini içeren terimlere kısmi entegrasyon uygulanır. Kısmi entegrasyonun uygulanmasından sonra, von Kármán plak kuramının karışık sonlu eleman formülasyonuna ait doğrusal olmayan denklem takımları elde edilmiş olur.

$$\delta N_{xx} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \delta N_{xx} u_{,x} dA + \int_\Omega \delta N_{xx} \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 dA$$
$$-\int_\Omega \delta N_{xx}\left(A'_{11}N_{xx} + A'_{12}N_{yy} + A'_{13}N_{xy} + B'_{11}M_{xx} + B'_{12}M_{yy} + B'_{13}M_{xy}\right)dA = 0 \qquad \textbf{(2.59)}$$

$$\delta N_{yy} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \delta N_{yy} v_{,y} dA + \int_\Omega \delta N_{yy} \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 dA$$
$$-\int_\Omega \delta N_{yy}\left(A'_{21}N_{xx} + A'_{22}N_{yy} + A'_{23}N_{xy} + B'_{21}M_{xx} + B'_{22}M_{yy} + B'_{23}M_{xy}\right)dA = 0 \qquad \textbf{(2.60)}$$

$$\delta N_{xy} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \delta N_{xy} u_{,y} dA + \int_\Omega \delta N_{xy} v_{,x} dA + \int_\Omega \delta N_{xy} w_{,x} w_{,y} dA$$
$$-\int_\Omega \delta N_{xy}\left(A'_{31}N_{xx} + A'_{32}N_{yy} + A'_{33}N_{xy} + B'_{31}M_{xx} + B'_{32}M_{yy} + B'_{33}M_{xy}\right)dA = 0 \qquad \textbf{(2.61)}$$

$$\delta M_{xx} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_\Omega \delta M_{xx,x} w_{,x} dA$$
$$-\int_\Omega \delta M_{xx}\left(H'_{11}N_{xx} + H'_{12}N_{yy} + H'_{13}N_{xy} + D'_{11}M_{xx} + D'_{12}M_{yy} + D'_{13}M_{xy}\right)dA = 0 \qquad \textbf{(2.62)}$$

$$\delta M_{yy} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad : \int_\Omega \delta M_{yy,y} w_{,y} dA$$
$$-\int_\Omega \delta M_{yy}\left(H'_{21}N_{xx} + H'_{22}N_{yy} + H'_{23}N_{xy} + D'_{21}M_{xx} + D'_{22}M_{yy} + D'_{23}M_{xy}\right)dA = 0 \qquad \textbf{(2.63)}$$

$$\delta M_{xy} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad : \int_\Omega \delta M_{xy,x} w_{,y} dA + \int_\Omega \delta M_{xy,y} w_{,x} dA$$
$$-\int_\Omega \delta M_{xy}\left(H'_{31}N_{xx} + H'_{32}N_{yy} + H'_{33}N_{xy} + D'_{31}M_{xx} + D'_{32}M_{yy} + D'_{33}M_{xy}\right)dA = 0 \qquad \textbf{(2.64)}$$

$$\delta u \neq 0 \quad \Rightarrow \quad : \int_\Omega \delta u_{,x} N_{xx} dA + \int_\Omega \delta u_{,y} N_{xy} dA - \int_\Omega \delta u q_x dA = 0 \qquad \textbf{(2.65)}$$

$$\delta v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad : \int_\Omega \delta v_{,x} N_{xy} dA + \int_\Omega \delta v_{,y} N_{yy} dA - \int_\Omega \delta v q_y dA = 0 \qquad \textbf{(2.66)}$$

$$\delta w \neq 0 \quad \Rightarrow \quad : \int_\Omega \delta w_{,x} M_{xx,x} dA + \int_\Omega \delta w_{,y} M_{yy,y} dA + \int_\Omega \delta w_{,x} M_{xy,y} dA + \int_\Omega \delta w_{,y} M_{xy,x} dA$$
$$+\int_\Omega \delta w_{,x}\left(w_{,x}N_{xx} + w_{,y}N_{xy}\right)dA + \int_\Omega \delta w_{,y}\left(w_{,x}N_{xy} + w_{,y}N_{yy}\right)dA - \int_\Omega \delta w q_z dA = 0 \qquad \textbf{(2.67)}$$

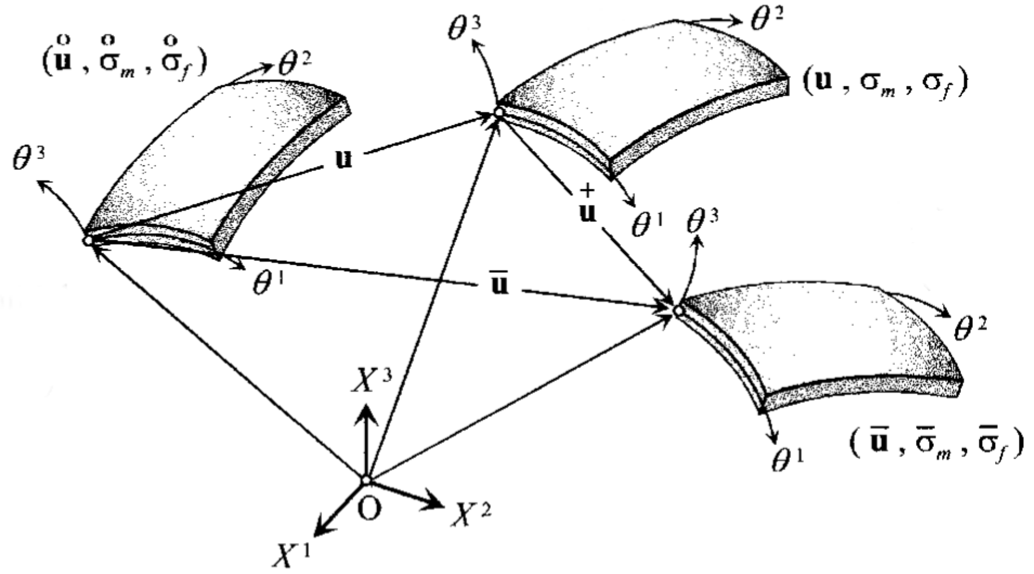
2.4 Sonlu Eleman Formülasyonunun Doğrusallaştırılması

2.4.1 Artımsal formülasyon

Elde edilen bu doğrusal olmayan denklemler, **(2.59)~(2.67)**, artımsal formülasyon kullanılarak doğrusallaştırılmıştır. Değişkenlerin sahip olduğu son değer, ${}^{p+\Delta p}\overline{N}_x$, ${}^{p+\Delta p}\overline{N}_y$, ${}^{p+\Delta p}\overline{N}_{xy}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{M}_x$, ${}^{p+\Delta p}\overline{M}_y$, ${}^{p+\Delta p}\overline{M}_{xy}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{u}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{v}$, ${}^{p+\Delta p}\overline{w}$, başlangıç değeri ile bir artımın toplamı olarak (Başar ve Krätzig, 1985);

$$ {}^{p+\Delta p}\overline{N}_x = {}^{p}N_x + \overset{+}{N}_x , \quad {}^{p+\Delta p}\overline{M}_x = {}^{p}M_x + \overset{+}{M}_x , \quad {}^{p+\Delta p}\overline{w} = {}^{p}w + \overset{+}{w} \qquad \textbf{(2.68)} $$

ifade edilebilir. Burada, ${}^{p+\Delta p}\overline{\ldots}$ değişkenlerin sahip olduğu son değeri, ${}^{p}\ldots$ değişkenlerin başlangıç değerini ve $\overset{+}{\ldots}$ değişkendeki artımı ifade eder. **(2.68)**’deki artımsal ifadeler, **(2.59)~(2.67)** denklemlerinde yerine yerleştirilir ve üçüncü ve daha yüksek mertebeli terimler ihmal edilirse, karışık sonlu eleman formülasyonunun doğrusallaştırılmış denklemleri elde edilir.



Şekil 2.4 : Artımsal formülasyon (Doğruoğlu ve Omurtag, 2000).

2.4.2 δN_{xx} Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.59)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)\left(u_{,x}+\overset{+}{u}_{,x}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)\frac{1}{2}\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)^2 dA \\
&\quad -\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)\left(A'_{11}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)+A'_{12}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)+A'_{13}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)+B'_{11}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)+B'_{12}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)+B'_{13}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\right)dA=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,u_{,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,\overset{+}{u}_{,x}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\frac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,w_{,x}\,\overset{+}{w}_{,x}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\frac{1}{2}\left(\overset{+}{w}_{,x}\right)^2 dA \\
&\quad -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\left(A'_{11}N_{xx}+A'_{12}N_{yy}+A'_{13}N_{xy}+B'_{11}M_{xx}+B'_{12}M_{yy}+B'_{13}M_{xy}\right)dA \\
&\quad -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\left(A'_{11}\overset{+}{N}_{xx}+A'_{12}\overset{+}{N}_{yy}+A'_{13}\overset{+}{N}_{xy}+B'_{11}\overset{+}{M}_{xx}+B'_{12}\overset{+}{M}_{yy}+B'_{13}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA=0
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$
=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,u_{,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\frac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\left(A'_{11}N_{xx}+A'_{12}N_{yy}+A'_{13}N_{xy}+B'_{11}M_{xx}+B'_{12}M_{yy}+B'_{13}M_{xy}\right)dA
\tag{2.70}
$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$
=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,\overset{+}{u}_{,x}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\,w_{,x}\,\overset{+}{w}_{,x}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\left(A'_{11}\overset{+}{N}_{xx}+A'_{12}\overset{+}{N}_{yy}+A'_{13}\overset{+}{N}_{xy}+B'_{11}\overset{+}{M}_{xx}+B'_{12}\overset{+}{M}_{yy}+B'_{13}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA
\tag{2.71}
$$

2.4.3 δN_{yy} Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.60)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)\left(v_{,y}+\overset{+}{v}_{,y}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)\frac{1}{2}\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)^2 dA\\
&\quad-\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)\left(A'_{21}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)+A'_{22}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)+A'_{23}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)+B'_{21}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)+B'_{22}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)+B'_{23}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\right)dA=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,v_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,\overset{+}{v}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,\frac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,w_{,y}\,\overset{+}{w}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,\frac{1}{2}\left(\overset{+}{w}_{,y}\right)^2 dA\\
&\quad-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\left(A'_{21}N_{xx}+A'_{22}N_{yy}+A'_{23}N_{xy}+B'_{21}M_{xx}+B'_{22}M_{yy}+B'_{23}M_{xy}\right)dA\\
&\quad-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\left(A'_{21}\,\overset{+}{N}_{xx}+A'_{22}\,\overset{+}{N}_{yy}+A'_{23}\,\overset{+}{N}_{xy}+B'_{21}\,\overset{+}{M}_{xx}+B'_{22}\,\overset{+}{M}_{yy}+B'_{23}\,\overset{+}{M}_{xy}\right)dA=0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.72)}
$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$
=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,v_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,\frac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\left(A'_{21}N_{xx}+A'_{22}N_{yy}+A'_{23}N_{xy}+B'_{21}M_{xx}+B'_{22}M_{yy}+B'_{23}M_{xy}\right)dA \qquad \textbf{(2.73)}
$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$
=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,\overset{+}{v}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\,w_{,y}\,\overset{+}{w}_{,y}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\left(A'_{21}\,\overset{+}{N}_{xx}+A'_{22}\,\overset{+}{N}_{yy}+A'_{23}\,\overset{+}{N}_{xy}+B'_{21}\,\overset{+}{M}_{xx}+B'_{22}\,\overset{+}{M}_{yy}+B'_{23}\,\overset{+}{M}_{xy}\right)dA \qquad \textbf{(2.74)}
$$

2.4.4 δN_{xy} Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.61)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)\left(u_{,y}+\overset{+}{u}_{,y}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)\left(v_{,x}+\overset{+}{v}_{,x}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)dA\\
&\quad-\int_\Omega \bar{\delta}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)\left(A'_{31}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)+A'_{32}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)+A'_{33}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)+B'_{31}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)+B'_{32}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)+B'_{33}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\right)dA=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,u_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,\overset{+}{u}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,v_{,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,\overset{+}{v}_{,x}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,w_{,x}w_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,w_{,x}\,\overset{+}{w}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{w}_{,y}\,dA\\
&-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(A'_{31}N_{xx}+A'_{32}N_{yy}+A'_{33}N_{xy}+B'_{31}M_{xx}+B'_{32}M_{yy}+B'_{33}M_{xy}\right)dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(A'_{31}\overset{+}{N}_{xx}+A'_{32}\overset{+}{N}_{yy}+A'_{33}\overset{+}{N}_{xy}+B'_{31}\overset{+}{M}_{xx}+B'_{32}\overset{+}{M}_{yy}+B'_{33}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA=0
\end{aligned}
$$

(2.75)

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$
=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,u_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,v_{,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\,w_{,x}w_{,y}dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(A'_{31}N_{xx}+A'_{32}N_{yy}+A'_{33}N_{xy}+B'_{31}M_{xx}+B'_{32}M_{yy}+B'_{33}M_{xy}\right)dA \quad \textbf{(2.76)}
$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$
=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(\overset{+}{u}_{,y}+\overset{+}{v}_{,x}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(w_{,x}\,\overset{+}{w}_{,y}+\overset{+}{w}_{,x}\,w_{,y}\right)dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(A'_{31}\overset{+}{N}_{xx}+A'_{32}\overset{+}{N}_{yy}+A'_{33}\overset{+}{N}_{xy}+B'_{31}\overset{+}{M}_{xx}+B'_{32}\overset{+}{M}_{yy}+B'_{33}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA \quad \textbf{(2.77)}
$$

biçiminde elde edilir.

2.4.5 δM_{xx} Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.62)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{xx,x}+\overset{+}{M}_{xx,x}\right)\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)dA\\&-\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)\left(H'_{11}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)+H'_{12}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)+H'_{13}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)+D'_{11}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)+D'_{12}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)+D'_{13}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\right)dA=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,w_{,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,\overset{+}{w}_{,x}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\left(H'_{11}N_{xx}+H'_{12}N_{yy}+H'_{13}N_{xy}+D'_{11}M_{xx}+D'_{12}M_{yy}+D'_{13}M_{xy}\right)dA\\&-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\left(H'_{11}\overset{+}{N}_{xx}+H'_{12}\overset{+}{N}_{yy}+H'_{13}\overset{+}{N}_{xy}+D'_{11}\overset{+}{M}_{xx}+D'_{12}\overset{+}{M}_{yy}+D'_{13}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA=0\end{aligned} \quad \textbf{(2.78)}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,w_{,x}dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\left(H'_{11}N_{xx}+H'_{12}N_{yy}+H'_{13}N_{xy}+D'_{11}M_{xx}+D'_{12}M_{yy}+D'_{13}M_{xy}\right)dA \quad \textbf{(2.79)}$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,\overset{+}{w}_{,x}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\left(H'_{11}\overset{+}{N}_{xx}+H'_{12}\overset{+}{N}_{yy}+H'_{13}\overset{+}{N}_{xy}+D'_{11}\overset{+}{M}_{xx}+D'_{12}\overset{+}{M}_{yy}+D'_{13}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA \quad \textbf{(2.80)}$$

biçiminde elde edilir.

2.4.6 δM_{yy} Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.63)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{yy,y}+\overset{+}{M}_{yy,y}\right)\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)dA$$
$$-\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)\left(H'_{21}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)+H'_{22}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)+H'_{23}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)+D'_{21}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)+D'_{22}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)+D'_{23}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\right)dA=0$$

$$\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy,y}\, w_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy,y}\overset{+}{w}_{,y}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\left(H'_{21}N_{xx}+H'_{22}N_{yy}+H'_{23}N_{xy}+D'_{21}M_{xx}+D'_{22}M_{yy}+D'_{23}M_{xy}\right)dA$$
$$-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\left(H'_{21}\overset{+}{N}_{xx}+H'_{22}\overset{+}{N}_{yy}+H'_{23}\overset{+}{N}_{xy}+D'_{21}\overset{+}{M}_{xx}+D'_{22}\overset{+}{M}_{yy}+D'_{23}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA=0 \qquad \textbf{(2.81)}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$=\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy,y}\, w_{,y}dA-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\left(H'_{21}N_{xx}+H'_{22}N_{yy}+H'_{23}N_{xy}+D'_{21}M_{xx}+D'_{22}M_{yy}+D'_{23}M_{xy}\right)dA \qquad \textbf{(2.82)}$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$=\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy,y}\overset{+}{w}_{,y}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy}\left(H'_{21}\overset{+}{N}_{xx}+H'_{22}\overset{+}{N}_{yy}+H'_{23}\overset{+}{N}_{xy}+D'_{21}\overset{+}{M}_{xx}+D'_{22}\overset{+}{M}_{yy}+D'_{23}\overset{+}{M}_{xy}\right)dA \qquad \textbf{(2.83)}$$

biçiminde elde edilir.

2.4.7 δM_{xy} Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.64)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{xy,x}+\overset{+}{M}_{xy,x}\right)\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{xy,y}+\overset{+}{M}_{xy,y}\right)\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)dA$$

$$-\int_\Omega \bar{\delta}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\left(H'_{31}\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)+H'_{32}\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)+H'_{33}\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)+D'_{31}\left(M_{xx}+\overset{+}{M}_{xx}\right)+D'_{32}\left(M_{yy}+\overset{+}{M}_{yy}\right)+D'_{33}\left(M_{xy}+\overset{+}{M}_{xy}\right)\right)dA=0$$

$$\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,w_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,\overset{+}{w}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,w_{,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,\overset{+}{w}_{,x}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\left(H'_{31}N_{xx}+H'_{32}N_{yy}+H'_{33}N_{xy}+D'_{31}M_{xx}+D'_{32}M_{yy}+D'_{33}M_{xy}\right)dA$$

$$-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\left(H'_{31}\,\overset{+}{N}_{xx}+H'_{32}\,\overset{+}{N}_{yy}+H'_{33}\,\overset{+}{N}_{xy}+D'_{31}\,\overset{+}{M}_{xx}+D'_{32}\,\overset{+}{M}_{yy}+D'_{33}\,\overset{+}{M}_{xy}\right)dA=0 \tag{2.84}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,w_{,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,w_{,x}dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\left(H'_{31}N_{xx}+H'_{32}N_{yy}+H'_{33}N_{xy}+D'_{31}M_{xx}+D'_{32}M_{yy}+D'_{33}M_{xy}\right)dA \tag{2.85}$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$=\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,\overset{+}{w}_{,y}\,dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,\overset{+}{w}_{,x}\,dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\left(H'_{31}\,\overset{+}{N}_{xx}+H'_{32}\,\overset{+}{N}_{yy}+H'_{33}\,\overset{+}{N}_{xy}+D'_{31}\,\overset{+}{M}_{xx}+D'_{32}\,\overset{+}{M}_{yy}+D'_{33}\,\overset{+}{M}_{xy}\right)dA \tag{2.86}$$

biçiminde elde edilir.

2.4.8 δu Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.65)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$\int_{\Omega} \overline{\delta}\left(u_{,x}+\overset{+}{u}_{,x}\right)\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)dA+\int_{\Omega} \overline{\delta}\left(u_{,y}+\overset{+}{u}_{,y}\right)\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)dA-\int_{\Omega} \overline{\delta}\left(u+\overset{+}{u}\right)q_x dA=0$$

$$\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,x} N_{xx} dA+\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,x} \overset{+}{N}_{xx} dA+\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,y} N_{xy} dA+\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,y} \overset{+}{N}_{xy} dA-\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}\, q_x dA=0 \qquad \textbf{(2.87)}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$=\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,x} N_{xx} dA+\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,y} N_{xy} dA-\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}\, q_x dA \qquad \textbf{(2.88)}$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$=\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,x} \overset{+}{N}_{xx} dA+\int_{\Omega} \overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,y} \overset{+}{N}_{xy} dA \qquad \textbf{(2.89)}$$

biçiminde elde edilir.

2.4.9 δv Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.66)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$\int_{\Omega}\overline{\delta}\left(v_{,x}+\overset{+}{v}_{,x}\right)\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\left(v_{,y}+\overset{+}{v}_{,y}\right)\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\left(v+\overset{+}{v}\right)q_{y}dA=0$$

$$\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,x}\,N_{xy}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,x}\,\overset{+}{N}_{xy}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,y}\,N_{yy}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,y}\,\overset{+}{N}_{yy}\,dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}\,q_{y}dA=0 \quad \textbf{(2.90)}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$=\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,x}\,N_{xy}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,y}\,N_{yy}dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}\,q_{y}dA \quad \textbf{(2.91)}$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,x}\,\overset{+}{N}_{xy}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,y}\,\overset{+}{N}_{yy}\,dA \quad \textbf{(2.92)}$$

biçiminde elde edilir.

2.4.10 δw Terimlerinin doğrusallaştırılması

Doğrusal olmayan **(2.67)** denkleminde, artımsal ifadeler yerlerine yerleştirilirse;

$$\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(M_{xx,x}+\overset{+}{M}_{xx,x}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)\left(M_{yy,y}+\overset{+}{M}_{yy,y}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(M_{xy,y}+\overset{+}{M}_{xy,y}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)\left(M_{xy,x}+\overset{+}{M}_{xy,x}\right)dA$$

$$+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(N_{xx}+\overset{+}{N}_{xx}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)dA+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)\left(w_{,x}+\overset{+}{w}_{,x}\right)\left(N_{xy}+\overset{+}{N}_{xy}\right)dA$$

$$+\int_\Omega \bar{\delta}\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)\left(w_{,y}+\overset{+}{w}_{,y}\right)\left(N_{yy}+\overset{+}{N}_{yy}\right)dA-\int_\Omega \bar{\delta}\left(w+\overset{+}{w}\right)q_z dA=0$$

$$\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x} M_{xx,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{M}_{xx,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y} M_{yy,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{M}_{yy,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x} M_{xy,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{M}_{xy,y}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y} M_{xy,x}dA$$

$$+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{M}_{xy,x}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x} w_{,x}N_{xx}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x} w_{,x}\overset{+}{N}_{xx}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{w}_{,x}N_{xx}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{N}_{xx}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x} w_{,y}N_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x} w_{,y}\overset{+}{N}_{xy}dA$$

$$+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{w}_{,y}N_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{N}_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y} w_{,x}N_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y} w_{,x}\overset{+}{N}_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{w}_{,x}N_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{N}_{xy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y} w_{,y}N_{yy}dA$$

$$+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y} w_{,y}\overset{+}{N}_{yy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{w}_{,y}N_{yy}dA+\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{N}_{yy}dA-\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{w}q_z dA=0 \qquad \textbf{(2.93)}$$

elde edilir.

Yüksek mertebeden terimlerin ihmal edilmesi ile **Düzeltme Terimleri**,

$$=\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,M_{xx,x}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,M_{yy,y}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,M_{xy,y}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,M_{xy,x}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w_{,x}N_{xx}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w_{,y}N_{xy}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,w_{,x}N_{xy}dA$$

$$+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,w_{,y}N_{yy}dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}q_{z}dA \tag{2.94}$$

Teğet Rijitlik Matrisi,

$$=\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,\overset{+}{M}_{yy,y}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w_{,x}\,\overset{+}{N}_{xx}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{w}_{,x}\,N_{xx}dA\quad+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,w_{,y}\,\overset{+}{N}_{xy}\,dA$$

$$+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\,\overset{+}{w}_{,y}\,N_{xy}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,w_{,x}\,\overset{+}{N}_{xy}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,\overset{+}{w}_{,x}\,N_{xy}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,w_{,y}\,\overset{+}{N}_{yy}\,dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\,\overset{+}{w}_{,y}\,N_{yy}dA \tag{2.95}$$

biçiminde elde edilir.

2.5 Sonlu Eleman Matrisleri

Doğrusallaştırılan zayıf formülasyon sonucunda elde edilen denklem takımları,

$$\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i \, \overset{+}{\mathbf{X}} = \overset{+}{\mathbf{F}}{}^i \tag{2.96}$$

$$\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i + \overset{+}{\mathbf{X}} \tag{2.97}$$

yapısında olur. Burada $\mathbf{X}^i$ sistemin ana değişkenlerini içeren vektördür.

$$\mathbf{X}^i = \left[N_{xx}^i \;\; N_{yy}^i \;\; N_{xy}^i \;\; M_{xx}^i \;\; M_{yy}^i \;\; M_{xy}^i \;\; u^i \;\; v^i \;\; w^i \right]^T \tag{2.98}$$

Sistem matrisi, $\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i = \begin{bmatrix} \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{NN} & \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{NM} & \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{NU} \\ \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{MN} & \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{MM} & \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{MU} \\ \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{UN} & \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{UM} & \left(\overset{++}{\mathbf{K}}{}_T^i\right)_{UU} \end{bmatrix}$ ve düzeltme vektörü, $\overset{+}{\mathbf{F}}{}^i = \begin{Bmatrix} \left(\overset{+}{\mathbf{F}}{}_N^i\right) \\ \left(\overset{+}{\mathbf{F}}{}_M^i\right) \\ \left(\overset{+}{\mathbf{F}}{}_U^i\right) \end{Bmatrix}$

olarak tariflenirse terimleri,

$$\left(\overset{++}{K}{}_T^i\right)_{NN} = \begin{bmatrix} -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} A'_{11} \overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} A'_{12} \overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} A'_{13} \overset{+}{N}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} A'_{21} \overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} A'_{22} \overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} A'_{23} \overset{+}{N}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} A'_{31} \overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} A'_{32} \overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} A'_{33} \overset{+}{N}_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_T^i\right)_{NM} = \begin{bmatrix} -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} B'_{11} \overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} B'_{12} \overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} B'_{13} \overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} B'_{21} \overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} B'_{22} \overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} B'_{23} \overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} B'_{31} \overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} B'_{32} \overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} B'_{33} \overset{+}{M}_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_T^i\right)_{NU} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} \overset{+}{u}_{,x} & 0 & \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx} w^i_{,x} \overset{+}{w}_{,x} \\ 0 & \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} \overset{+}{v}_{,y} & \bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy} w^i_{,y} \overset{+}{w}_{,y} \\ \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} \overset{+}{u}_{,y} & \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} \overset{+}{v}_{,x} & \left(\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} w^i_{,x} \overset{+}{w}_{,y} + \bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy} w^i_{,y} \overset{+}{w}_{,x} \right) \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_T^i\right)_{MN} = \begin{bmatrix} -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx} H'_{11} \overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx} H'_{12} \overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx} H'_{13} \overset{+}{N}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy} H'_{21} \overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy} H'_{22} \overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy} H'_{23} \overset{+}{N}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy} H'_{31} \overset{+}{N}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy} H'_{32} \overset{+}{N}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy} H'_{33} \overset{+}{N}_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.102}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_{T}^{i}\right)_{MM}=\begin{bmatrix} -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx} D'_{11}\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx} D'_{12}\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx} D'_{13}\overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy} D'_{21}\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy} D'_{22}\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy} D'_{23}\overset{+}{M}_{xy} \\ -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy} D'_{31}\overset{+}{M}_{xx} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy} D'_{32}\overset{+}{M}_{yy} & -\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy} D'_{33}\overset{+}{M}_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.103}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_{T}^{i}\right)_{MU}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\delta}\overset{+}{M}_{xx,x}\overset{+}{w}_{,x} \\ 0 & 0 & \bar{\delta}\overset{+}{M}_{yy,y}\overset{+}{w}_{,y} \\ 0 & 0 & \left(\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy,x}\overset{+}{w}_{,y}+\bar{\delta}\overset{+}{M}_{xy,y}\overset{+}{w}_{,x}\right) \end{bmatrix} \tag{2.104}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_{T}^{i}\right)_{UN}=\begin{bmatrix} \bar{\delta}\overset{+}{u}_{,x}\overset{+}{N}_{xx} & 0 & \bar{\delta}\overset{+}{u}_{,y}\overset{+}{N}_{xy} \\ 0 & \bar{\delta}\overset{+}{v}_{,y}\overset{+}{N}_{yy} & \bar{\delta}\overset{+}{v}_{,x}\overset{+}{N}_{xy} \\ \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x} w^{i}_{,x}\overset{+}{N}_{xx} & \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y} w^{i}_{,y}\overset{+}{N}_{yy} & \left(\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x} w^{i}_{,y}\overset{+}{N}_{xy}+\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y} w^{i}_{,x}\overset{+}{N}_{xy}\right) \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_{T}^{i}\right)_{UM}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{M}_{xx,x} & \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{M}_{yy,y} & \left(\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x}\overset{+}{M}_{xy,y}+\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y}\overset{+}{M}_{xy,x}\right) \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

$$\left(\overset{++}{K}{}_{T}^{i}\right)_{UU}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} \bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x} N^{i}_{xx}\overset{+}{w}_{,x}+\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,x} N^{i}_{xy}\overset{+}{w}_{,y} \\ +\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y} N^{i}_{xy}\overset{+}{w}_{,x}+\bar{\delta}\overset{+}{w}_{,y} N^{i}_{yy}\overset{+}{w}_{,y} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

$$\overset{+}{\mathbf{F}}{}_{N}^{i}=\left\{\begin{matrix} \left(\int_{\Omega}\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xx}\begin{pmatrix} u^{i}_{,x}+\frac{1}{2}\left(w^{i}_{,x}\right)^{2}-A'_{11}N^{i}_{xx}-A'_{12}N^{i}_{yy}-A'_{13}N^{i}_{xy} \\ -B'_{11}M^{i}_{xx}-B'_{12}M^{i}_{yy}-B'_{13}M^{i}_{xy} \end{pmatrix} dA\right) \\ \left(\int_{\Omega}\bar{\delta}\overset{+}{N}_{yy}\begin{pmatrix} v^{i}_{,y}+\frac{1}{2}\left(w^{i}_{,y}\right)^{2}-A'_{21}N^{i}_{xx}-A'_{22}N^{i}_{yy}-A'_{23}N^{i}_{xy} \\ -B'_{21}M^{i}_{xx}-B'_{22}M^{i}_{yy}-B'_{23}M^{i}_{xy} \end{pmatrix} dA\right) \\ \left(\int_{\Omega}\bar{\delta}\overset{+}{N}_{xy}\begin{pmatrix} u^{i}_{,y}+v^{i}_{,x}+w^{i}_{,x}w^{i}_{,y}-A'_{31}N^{i}_{xx}-A'_{32}N^{i}_{yy} \\ -A'_{33}N^{i}_{xy}-B'_{31}M^{i}_{xx}-B'_{32}M^{i}_{yy}-B'_{33}M^{i}_{xy} \end{pmatrix} dA\right) \end{matrix}\right\} \tag{2.108}$$

$$
\overset{+}{\mathbf{F}}{}_{M}^{i}=\left\{\begin{array}{c}
\left(\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx,x}\,w_{,x}^{i}dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\begin{pmatrix}H'_{11}N_{xx}^{i}+H'_{12}N_{yy}^{i}+H'_{13}N_{xy}^{i}\\+D'_{11}M_{xx}^{i}+D'_{12}M_{yy}^{i}+D'_{13}M_{xy}^{i}\end{pmatrix}dA\right)\\
\left(\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy,y}\,w_{,y}^{i}dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\begin{pmatrix}H'_{21}N_{xx}^{i}+H'_{22}N_{yy}^{i}+H'_{23}N_{xy}^{i}\\+D'_{21}M_{xx}^{i}+D'_{22}M_{yy}^{i}+D'_{23}M_{xy}^{i}\end{pmatrix}dA\right)\\
\left(\begin{array}{l}\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,x}\,w_{,y}^{i}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy,y}\,w_{,x}^{i}dA\\-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\begin{pmatrix}H'_{31}N_{xx}^{i}+H'_{32}N_{yy}^{i}+H'_{33}N_{xy}^{i}\\+D'_{31}M_{xx}^{i}+D'_{32}M_{yy}^{i}+D'_{33}M_{xy}^{i}\end{pmatrix}dA\end{array}\right)
\end{array}\right\}\qquad \mathbf{(2.109)}
$$

$$
\overset{+}{\mathbf{F}}{}_{U}^{i}=\left\{\begin{array}{c}
\left(\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,x}\,N_{xx}^{i}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{u}_{,y}\,N_{xy}^{i}dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{u}\,q_{x}dA\right)\\
\left(\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,x}\,N_{xy}^{i}dA+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}_{,y}\,N_{yy}^{i}dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{v}\,q_{y}dA\right)\\
\left(\begin{array}{l}\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,x}\left(M_{xx,x}^{i}+M_{xy,y}^{i}+w_{,x}^{i}N_{xx}^{i}+w_{,y}^{i}N_{xy}^{i}\right)dA\\+\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}_{,y}\left(M_{yy,y}^{i}+M_{xy,x}^{i}+w_{,x}^{i}N_{xy}^{i}+w_{,y}^{i}N_{yy}^{i}\right)dA-\int_{\Omega}\overline{\delta}\,\overset{+}{w}\,q_{z}dA\end{array}\right)
\end{array}\right\}\qquad \mathbf{(2.110)}
$$

şeklinde ifade edilir.

2.5.1 Ardışık yaklaşım yöntemi

Artımsal formülasyonda sonuçların yakınsaklığını arttırmak ve ard arda yapılan adımlar sonucunda hataların artmasını engellemek için, elde edilen sonuçlar Newton-Raphson ardışık yaklaşım prosedürü kullanılarak düzeltilmiştir. Newton-Raphson yöntemi hızlı yakınsaması ve basitliği nedeniyle seçilmiştir. Çözüm yöntemine, Newton-Raphson yönteminin eklenmesiyle, **(2.96)**'da verilen yapı,

$$
\begin{aligned}
&\overset{++}{\mathbf{K}}_{L}\,\overset{+}{\mathbf{X}}{}^{(i)}+{}^{p+\Delta p}\overset{++}{\mathbf{K}}{}_{NL}^{(i-1)}\,\overset{+}{\mathbf{X}}{}^{(i)}={}^{p+\Delta p}\mathbf{Q}+{}^{p+\Delta p}\overset{+}{\mathbf{F}}{}^{(i-1)}\\
&{}^{p+\Delta p}\overline{\mathbf{X}}{}^{(i)}={}^{p+\Delta p}\mathbf{X}^{(i-1)}+\overset{+}{\mathbf{X}}{}^{(i)}
\end{aligned}\qquad \mathbf{(2.111)}
$$

haline gelir. Burada (i) indisi iterasyon adımını belirtir. İterasyonun yürütülmesinde kullanılan başlangıç koşulları, ${}^{p+\Delta p}\mathbf{X}^{(0)}={}^{p}\mathbf{X}$, ${}^{p+\Delta p}\overset{+}{\mathbf{F}}{}^{(0)}={}^{p}\overset{+}{\mathbf{F}}$, ${}^{p+\Delta p}\overset{++}{\mathbf{K}}{}_{NL}^{(0)}={}^{p}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}$ olarak tariflenir. Elde edilen düzeltme vektörü, ${}^{p+\Delta p}\overset{+}{\mathbf{F}}{}^{(i)}$ daha önceden belirlenen bir değerin altına düşene kadar ardışık yaklaşıma devam edilir.

2.6 Dinamik Analizler

Doğrusal olmayan sistemlerin, sayısal olarak çözülecek hareket denklemi,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s\left(u\right) = p\left(t\right) \quad \textbf{(2.112)}$$

yapısında olup, u_0, $\dot{u}_0$ başlangıç koşullarına maruzdur. **(2.112)**'de verilen hareket denkleminde doğrusal viskoz sönüm ele alınmıştır. Hareket denkleminin çözüm yollarından biri, diferansiyel denklemi zaman aralıklarına bölmek ve her bir zaman anında, t_i, hareket denklemindeki eşitliği sağlamaktır. Buna göre t_i zamanında,

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + f_s\left(u_i\right) = p_i \quad \textbf{(2.113)}$$

eşitliği sağlanarak $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ ana değişkenler çözülür. Hareket denklemini, zaman tanım alanında, sayısal olarak çözmek için sıklıkla kullanılan metotların başında Newmark yöntemi gelir. Newmark yönteminde, hareket denklemi t_{i+1} anında yazılır ve t_i anındaki $u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i$ bilinen büyüklükler kullanılarak, t_{i+1} anındaki $u_{i+1}, \dot{u}_{i+1}, \ddot{u}_{i+1}$ bilinmeyenleri çözülür. Newmark yönteminde yer değiştirme ve hızın değişimi için,

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left[\left(1-\gamma\right)\Delta t\right]\ddot{u}_i + \left(\gamma\Delta t\right)\ddot{u}_{i+1} \quad \textbf{(2.114)}$$

$$u_{i+1} = u_i + \left(\Delta t\right)\dot{u}_i + \left[\left(0.5-\beta\right)\left(\Delta t\right)^2\right]\ddot{u}_i + \left[\beta\left(\Delta t\right)^2\right]\ddot{u}_{i+1} \quad \textbf{(2.115)}$$

varsayımları yapılır.

2.6.1 Doğrusal sistemlerde Newmark Yöntemi

(2.113)'de verilen t_i anına ait denklem, t_{i+1} anına ait denklemden çıkartılırsa,

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + \left(\Delta f_s\right)_i = \Delta p_i \quad \textbf{(2.116)}$$

artımsal hareket denklemi elde edilir. Burada kullanılan artımsal büyüklükler,

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i \quad \textbf{(2.117)}$$

$$\Delta\dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i \quad \textbf{(2.118)}$$

$$\Delta\ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \quad \textbf{(2.119)}$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \quad \textbf{(2.120)}$$

(2.114)'deki hızın değişimine ait kabul yeniden düzenlenirse ve **(2.118)**, **(2.119)** ifadeleri yerlerine yerleştirilirse,

$$\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i = \left[(1-\gamma)\Delta t\right]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)(\ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i) \qquad \textbf{(2.121)}$$

$$\Delta\dot{u}_i = (\Delta t)\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)(\Delta\ddot{u}_i) \qquad \textbf{(2.122)}$$

elde edilir. **(2.115)**'deki yer değiştirmenin değişimine ait kabul yeniden düzenlenirse ve **(2.117)**, **(2.119)** ifadeleri yerlerine yerleştirilirse,

$$u_{i+1} - u_i = (\Delta t)\dot{u}_i + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right](\ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i) \qquad \textbf{(2.123)}$$

$$\Delta u_i = (\Delta t)\dot{u}_i + \left[0.5(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i + \left[\beta(\Delta t)^2\right]\Delta\ddot{u}_i \qquad \textbf{(2.124)}$$

elde edilir. **(2.124)** ifadesi $\Delta\ddot{u}_i$ için çözülürse,

$$\Delta\ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \frac{1}{\beta(\Delta t)}\dot{u}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_i \qquad \textbf{(2.125)}$$

elde edilir. **(2.125)** ifadesi **(2.122)**'de yerine konulursa,

$$\Delta\dot{u}_i = (\Delta t)\ddot{u}_i + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i - \frac{\gamma(\Delta t)}{2\beta}\ddot{u}_i \qquad \textbf{(2.126)}$$

$$\Delta\dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left[1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right]\ddot{u}_i \qquad \textbf{(2.127)}$$

elde edilir. **(2.116)** ifadesinde bulunan $(\Delta f_s)_i$ terimi doğrusal sistemlerde,

$$(\Delta f_s)_i = k\Delta u_i \qquad \textbf{(2.128)}$$

şeklinde ifade edilir. Doğrusal olmayan sistemlerde ise,

$$(\Delta f_s)_i = (k_i)_{\sec}\Delta u_i \cong (k_i)_{\tan}\Delta u_i \qquad \textbf{(2.129)}$$

olarak ifade edilebilir. **(2.125)** ve **(2.127)** ifadeleri **(2.116)** denkleminde yerine konulursa,

$$\hat{k}\Delta u_i = \Delta\hat{p}_i \qquad \textbf{(2.130)}$$

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \qquad \textbf{(2.131)}$$

$$\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right]\dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta}m + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)(\Delta t)c\right]\ddot{u}_i \qquad \textbf{(2.132)}$$

elde edilir. t_i anındaki değerlerin bilinmesiyle $\hat{k}$ ve $\Delta\hat{p}_i$ büyüklükleri hesaplanır. Bu değerler ve **(2.130)** ifadesiyle Δu_i bilinmeyeni çözülür. **(2.125)** ve **(2.127)** ifadeleri ile $\Delta\dot{u}_i$ ve $\Delta\ddot{u}_i$ bilinmeyenleri elde edilir. Son olarak **(2.117)**, **(2.118)** ve **(2.119)** ifadeleri ile t_{i+1} anına ait büyüklükler elde edilmiş olur. $\ddot{u}_{i+1}$ değeri **(2.125)** ve **(2.119)** ifadeleri yerine,

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}}{m} \qquad \textbf{(2.133)}$$

eşitliğinden de hesaplanabilir. Başlangıç koşuluna ait ivme değeri, $\ddot{u}_0$, **(2.133)** ile elde edilir. Newmark yöntemi,

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \qquad \textbf{(2.134)}$$

eşitsizliğinin sağlanması halinde kararlı bir yöntemdir.

2.6.2 Doğrusal olmayan sistemlerde Newmark Yöntemi

Doğrusal olmayan sistemlerde, artımsal hareket denklemi,

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\Delta\dot{u}_i + (k_i)_{\tan}\Delta u_i = \Delta p_i \qquad \textbf{(2.135)}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemin çözümünde, doğrusal sistemler için verilen ifadeler aynen kullanılır. Ancak **(2.131)** ifadesindeki k terimi $(k_i)_{\tan}$ olarak düzenlenir. Buna göre **(2.135)**'in çözümünde,

$$\hat{k}\Delta u_i = \Delta\hat{p}_i \qquad \textbf{(2.136)}$$

$$\hat{k} = (k_i)_{\tan} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m \qquad \textbf{(2.137)}$$

$$\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)}m + \frac{\gamma}{\beta}c\right]\dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta}m + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)(\Delta t)c\right]\ddot{u}_i \qquad \textbf{(2.138)}$$

eşitlikleri kullanılır. **(2.136)**'da verilen doğrusal olmayan denklemin çözümü için Newton-Raphson yöntemi kullanılabilir. Newton-Raphson ardışık yaklaşım şemasını içeren Newmark yöntemine ait akış şeması Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1 : Doğrusal olmayan sistemlerde Newmark yöntemi.

ADIM	**HESAPLAMALAR**
1.	**Başlangıç Hesapları**
1.1	$\ddot{u}_0 = \dfrac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$
1.2	$A = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)} m + \dfrac{\gamma}{\beta} c, \quad B = \dfrac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\dfrac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$
2.	**Her Zaman Adımına Ait Hesaplar, *i*=0,1,2,...**
2.1	$\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + A\dot{u}_i + B\ddot{u}_i$
2.2 2.2.1 2.2.2	Newton-Raphson Şeması Başlangıç Hesapları $u_{i+1}^{(0)} = u_i, \quad \Delta R_i^{(1)} = \Delta\hat{p}_i, \quad (f_s)_i^{(0)} = P_{nl}(u_i)$ Her İterasyon Adımına Ait Hesaplar, *j*=1,2,3,... $(k_i)_{\tan}^{(j)} = f\left(u_{i+1}^{(j-1)}\right)$ $(\hat{k}_i)_{\tan}^{(j)} = (k_i)_{\tan}^{(j)} + \dfrac{\gamma}{\beta(\Delta t)} c + \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2} m$ $(\hat{k}_i)_{\tan}^{(j)} \Delta u_i^{(j)} = \Delta R_i^{(j)}$ eşitliğinden $\Delta u_i^{(j)}$ çözülür $u_{i+1}^{(j)} = u_{i+1}^{(j-1)} + \Delta u_i^{(j)}$ $(f_s)_i^{(j-1)} = P_{nl}\left(u_{i+1}^{(j-1)}\right), \quad (f_s)_i^{(j)} = P_{nl}\left(u_{i+1}^{(j)}\right)$ $\Delta f_i^{(j)} = (f_s)_i^{(j)} - (f_s)_i^{(j-1)} + \left[\dfrac{\gamma}{\beta(\Delta t)} c + \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2} m \right] \Delta u_i^{(j)}$ $\Delta R_i^{(j+1)} = \Delta R_i^{(j)} - \Delta f_i^{(j)}$ ve Yakınsaklık Kontrolü
2.3	$\Delta u_i = \sum_{l=1}^{j} \Delta u_i^{(l)}$
2.4	$\Delta\dot{u}_i = \dfrac{\gamma}{\beta(\Delta t)} \Delta u_i - \dfrac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left[1 - \dfrac{\gamma}{2\beta} \right] \ddot{u}_i$
2.5	$\Delta\ddot{u}_i = \dfrac{1}{\beta(\Delta t)^2} \Delta u_i - \dfrac{1}{\beta(\Delta t)} \dot{u}_i - \dfrac{1}{2\beta} \ddot{u}_i$
2.6	$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i, \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$

2.6.3 Von Kármán plak kuramı hareket denklemi

von Kármán plak kuramına ait hareket denklemleri, dönme ataletleri ihmal edilerek,

$$
\begin{aligned}
q_x + N_{x,x} + N_{xy,y} - \rho h\ddot{u} &= 0 \\
q_y + N_{xy,x} + N_{y,y} - \rho h\ddot{v} &= 0 \\
q_z + M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} + \left(N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y}\right)_{,x} + \left(N_{xy} w_{,x} + N_y w_{,y}\right)_{,y} - \rho h\ddot{w} &= 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.139)}
$$

ifade edilir. Burada ρ malzeme yoğunluğunu, $\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}$ ise plak orta düzlemindeki noktaların ivmelerini göstermektedir. Artımsal hareket denklemi matris gösteriminde,

$$
\mathbf{M}\overset{+}{\ddot{\mathbf{X}}} + \mathbf{C}\overset{+}{\dot{\mathbf{X}}} + \left(\overset{++}{\mathbf{K}}_L + {}^t\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL}\right)\overset{+}{\mathbf{X}} = \Delta\mathbf{Q} \qquad \textbf{(2.140)}
$$

olarak ifade edilir. Burada **C** Rayleigh sönüm matrisini, **M** kütle matrisini ve $\Delta\mathbf{Q} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{Q} - {}^t\mathbf{Q}$ ise artımsal dış yükü gösterir. Artımsal hareket denklemindeki t ve $t+\Delta t$ indisleri, **(2.111)** denkleminde kullanılan p ve $p+\Delta p$ adım indislerinin yerine kullanılmıştır.

2.6.4 Kütle matrisi

Kütle matrisinin terimleri dönme atalet terimleri ihmal edilerek,

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \mathbf{M}_{UU} \end{bmatrix}, \quad
\mathbf{M}_{UU} = \begin{bmatrix} \overline{\delta}\overset{+}{u}\rho h\overset{+}{\ddot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\delta}\overset{+}{v}\rho h\overset{+}{\ddot{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\delta}\overset{+}{w}\rho h\overset{+}{\ddot{w}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.141)}
$$

şeklinde tanımlanır.

2.6.5 Sönüm matrisi

Sönüm matrisinin karışık SEM uygulamaları çok sınırlıdır. Genellikle yer değiştirme tipi SEM kullanılan Rayleigh sönümü, karışık SE uyarlanarak bu çalışmada,

$$
\mathbf{C} = a_1\mathbf{M} + a_2\mathbf{K}_L \qquad \textbf{(2.142)}
$$

şeklinde kullanılmıştır. Burada a_1 ve a_2 sırasıyla kütle ve rijitlik matrisi çarpanlarıdır ve $a_1 = 2\zeta\omega_i\omega_j / \left(\omega_i + \omega_j\right)$, $a_2 = 2\zeta / \left(\omega_i + \omega_j\right)$ denklemleri ile hesaplanır. Burada ω_i ve ω_j, sistemin ξ sönüm oranına sahip iki açısal frekansıdır.

Sönüm matrisinin hesaplanmasında sistem matrisinin doğrusal olmayan parçasının katkısı bilerek alınmamıştır. von Kármán plak kuramına göre yapılan analizlerde, çökmeler arttıkça sistem rijitleşmektedir. Bu rijitleşme, sönüm matrisinin hesaplanmasında sistem matrisinin doğrusal olmayan terimleri göz önüne alınırsa, istenilmeyen oranda yüksek sönümlere neden olmaktadır.

2.6.6 Newmark yöntemi

(2.140)'de verilen artımsal hareket denkleminin çözümünde Newmark yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem, yer değiştirme ve hızın,

$$
\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{X}} &= {}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \left[(1-\gamma)\Delta t\right] {}^{t}\ddot{\mathbf{X}} + (\gamma\,\Delta t)\,{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{X}} \\
{}^{t+\Delta t}\mathbf{X} &= {}^{t}\mathbf{X} + (\Delta t)\,{}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \left[(0.5-\beta)(\Delta t)^2\right] {}^{t}\ddot{\mathbf{X}} + \left[\beta(\Delta t)^2\right] {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{X}}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.143)}
$$

şeklinde idealize edilmesine dayanır. Burada β ve γ Newmark parametreleridir. Bu çalışmada yapılan analizlerde, $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ olarak alınmıştır. **(2.140)**'de verilen artımsal hareket denkleminde kullanılmak üzere **(2.143)** ifadesi,

$$
\begin{aligned}
\overset{+}{\ddot{\mathbf{X}}} &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\overset{+}{\mathbf{X}} - \frac{1}{\beta(\Delta t)}\,{}^{t}\dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{2\beta}\,{}^{t}\ddot{\mathbf{X}} \\
\overset{+}{\dot{\mathbf{X}}} &= \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\overset{+}{\mathbf{X}} - \frac{\gamma}{\beta}\,{}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \Delta t\left[1-\frac{\gamma}{2\beta}\right] {}^{t}\ddot{\mathbf{X}}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.144)}
$$

şeklinde düzenlenir ve **(2.140)** ifadesine yerleştirilirse, artımsal hareket denklemi,

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{K}}\,\overset{+}{\mathbf{X}} = \Delta\hat{\mathbf{Q}} \\
&\hat{\mathbf{K}} = \overset{++}{\mathbf{K}}_L + {}^{t}\overset{++}{\mathbf{K}}_{NL} + \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\mathbf{C} + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{M} \\
&\Delta\hat{\mathbf{Q}} = \Delta\mathbf{Q} + \left[\frac{1}{\beta(\Delta t)}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta}\mathbf{C}\right] {}^{t}\dot{\mathbf{X}} + \left[\frac{1}{2\beta}\mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)(\Delta t)\mathbf{C}\right] {}^{t}\ddot{\mathbf{X}}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.145)}
$$

olarak elde edilir. Artımsal hareket denklemi ile elde edilen sonuçlar, **(2.111)** ifadesinde verilen Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemiyle iyileştirilmiştir.

2.7 Sıcaklık Etkileri

Sıcaklık değişiminin tabakalı kompozit plak davranışına etkisini incelemek için, malzeme eksenleri plak koordinat eksenleri ile çakışan ortotrop bir malzeme için **(2.4)**'de verilen bünye bağıntılarının (Jones, 1999),

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_{22} - \alpha_2 \Delta T \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 + z\kappa_1^0 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2^0 + z\kappa_2^0 - \alpha_2 \Delta T \\ \gamma_{12}^0 + z\kappa_{12}^0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(2.146)}$$

şeklinde tariflenmesi gerekir. Burada α_1, α_2 sıcaklık genleşme katsayıları ve ΔT ise maruz kalınan sıcaklık değişimidir.

2.7.1 Bünye bağıntıları

Plak eksenleri ile malzeme eksenleri arasında θ açısı olan ortotrop bir malzemenin sıcaklık etkilerini de içeren bünye bağıntıları, **(2.4)** ~ **(2.8)** denklemleri ile elde edilir. Sonuç olarak tabakalı ortotrop malzemelerde her bir tabakanın bünye bağıntıları **(2.12)** yerine,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \left[\bar{Q}\right]_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \Delta T_k \right\} \qquad \textbf{(2.147)}$$

olarak ifade edilir. Burada $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ sıcaklık genleşme katsayıları (Jones, 1999),

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha_1 \cos^2\theta + \alpha_2 \sin^2\theta \\ \alpha_y &= \alpha_1 \sin^2\theta + \alpha_2 \cos^2\theta \\ \alpha_{xy} &= 2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\cos\theta \sin\theta \end{aligned} \qquad \textbf{(2.148)}$$

şeklinde tariflenir.

2.7.2 İç kuvvetler

Membran kuvvetleri ve eğilme momentleri için **(2.13)**'de verilen ifadelere **(2.147)**'de verilen bünye bağıntılarının yerleştirilmesiyle iç kuvvetler elde edilir. Membran kuvvetleri **(2.16)** yerine

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \left[A\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[B\right] \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T{}_{xx} \\ N^T{}_{yy} \\ N^T{}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.149}$$

$$\begin{Bmatrix} N^T{}_{xx} \\ N^T{}_{yy} \\ N^T{}_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}\right]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \Delta T_k dz \tag{2.150}$$

şeklinde ifade edilir. Benzer şekilde **(2.20)**’de verilen eğilme momentleri,

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[B\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \left[D\right] \begin{Bmatrix} \kappa_x^0 \\ \kappa_y^0 \\ \kappa_{xy}^0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M^T{}_{xx} \\ M^T{}_{yy} \\ M^T{}_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.151}$$

$$\begin{Bmatrix} M^T{}_{xx} \\ M^T{}_{yy} \\ M^T{}_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\bar{Q}\right]_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \Delta T_k z dz \tag{2.152}$$

olarak elde edilir.

2.7.3 Yer değiştirme – iç kuvvet bağıntıları

Karışık sonlu eleman formülasyonunun HR fonksiyoneli ile elde edilmesinde yer değiştirmelerin iç kuvvetler cinsinden ifade edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla **(2.31)**’de verilen yer değiştirme – iç kuvvet bağıntıları, sıcaklık etkilerini de içeren,

$$\begin{aligned}
u_{,x} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,x}\right)^2 &= A'_{11}N_{xx} + A'_{12}N_{yy} + A'_{13}N_{xy} + B'_{11}M_{xx} + B'_{12}M_{yy} + B'_{13}M_{xy} \\
&\quad + A'_{11}N_{xx}^T + A'_{12}N_{yy}^T + A'_{13}N_{xy}^T + B'_{11}M_{xx}^T + B'_{12}M_{yy}^T + B'_{13}M_{xy}^T \\
v_{,y} + \tfrac{1}{2}\left(w_{,y}\right)^2 &= A'_{21}N_{xx} + A'_{22}N_{yy} + A'_{23}N_{xy} + B'_{21}M_{xx} + B'_{22}M_{yy} + B'_{23}M_{xy} \\
&\quad + A'_{21}N_{xx}^T + A'_{22}N_{yy}^T + A'_{23}N_{xy}^T + B'_{21}M_{xx}^T + B'_{22}M_{yy}^T + B'_{23}M_{xy}^T \\
u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} &= A'_{31}N_{xx} + A'_{32}N_{yy} + A'_{33}N_{xy} + B'_{31}M_{xx} + B'_{32}M_{yy} + B'_{33}M_{xy} \\
&\quad + A'_{31}N_{xx}^T + A'_{32}N_{yy}^T + A'_{33}N_{xy}^T + B'_{31}M_{xx}^T + B'_{32}M_{yy}^T + B'_{33}M_{xy}^T \\
-w_{,xx} &= H'_{11}N_{xx} + H'_{12}N_{yy} + H'_{13}N_{xy} + D'_{11}M_{xx} + D'_{12}M_{yy} + D'_{13}M_{xy} \\
&\quad + H'_{11}N_{xx}^T + H'_{12}N_{yy}^T + H'_{13}N_{xy}^T + D'_{11}M_{xx}^T + D'_{12}M_{yy}^T + D'_{13}M_{xy}^T \\
-w_{,yy} &= H'_{21}N_{xx} + H'_{22}N_{yy} + H'_{23}N_{xy} + D'_{21}M_{xx} + D'_{22}M_{yy} + D'_{23}M_{xy} \\
&\quad + H'_{21}N_{xx}^T + H'_{22}N_{yy}^T + H'_{23}N_{xy}^T + D'_{21}M_{xx}^T + D'_{22}M_{yy}^T + D'_{23}M_{xy}^T \\
-2w_{,xy} &= H'_{31}N_{xx} + H'_{32}N_{yy} + H'_{33}N_{xy} + D'_{31}M_{xx} + D'_{32}M_{yy} + D'_{33}M_{xy} \\
&\quad + H'_{31}N_{xx}^T + H'_{32}N_{yy}^T + H'_{33}N_{xy}^T + D'_{31}M_{xx}^T + D'_{32}M_{yy}^T + D'_{33}M_{xy}^T
\end{aligned} \tag{2.153}$$

ifadesiyle değiştirilir.

2.7.4 Sonlu eleman formülasyonu

von Kármán plak kuramının sıcaklık etkilerini de içeren karışık sonlu eleman formülasyonunu elde etmek için Hellinger – Reissner fonksiyoneli **(2.55)** yerine **(2.153)** ifadesi kullanılarak yazılır. Ardından Bölüm 2.4'de anlatılan yöntemle doğrusallaştırılır. Bu işlem sonucunda **(2.99)~(2.107)** ifadelerinde verilen sistem matrisinde bir değişiklik olmazken **(2.108)** ve **(2.109)**'deki düzeltme vektörüne ilave terimler,

$$\overset{+}{\mathbf{F}}{}_N^i = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xx}\left(A'_{11}N_{xx}^T + A'_{12}N_{yy}^T + A'_{13}N_{xy}^T + B'_{11}M_{xx}^T + B'_{12}M_{yy}^T + B'_{13}M_{xy}^T\right)dA \\ -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{yy}\left(A'_{21}N_{xx}^T + A'_{22}N_{yy}^T + A'_{23}N_{xy}^T + B'_{21}M_{xx}^T + B'_{22}M_{yy}^T + B'_{23}M_{xy}^T\right)dA \\ -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{N}_{xy}\left(A'_{31}N_{xx}^T + A'_{32}N_{yy}^T + A'_{33}N_{xy}^T + B'_{31}M_{xx}^T + B'_{32}M_{yy}^T + B'_{33}M_{xy}^T\right)dA \end{Bmatrix} \quad \mathbf{(2.154)}$$

$$\overset{+}{\mathbf{F}}{}_M^i = \begin{Bmatrix} -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xx}\left(H'_{11}N_{xx}^T + H'_{12}N_{yy}^T + H'_{13}N_{xy}^T + D'_{11}M_{xx}^T + D'_{12}M_{yy}^T + D'_{13}M_{xy}^T\right)dA \\ -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{yy}\left(H'_{21}N_{xx}^T + H'_{22}N_{yy}^T + H'_{23}N_{xy}^T + D'_{21}M_{xx}^T + D'_{22}M_{yy}^T + D'_{23}M_{xy}^T\right)dA \\ -\int_\Omega \bar{\delta}\,\overset{+}{M}_{xy}\left(H'_{31}N_{xx}^T + H'_{32}N_{yy}^T + H'_{33}N_{xy}^T + D'_{31}M_{xx}^T + D'_{32}M_{yy}^T + D'_{33}M_{xy}^T\right)dA \end{Bmatrix} \quad \mathbf{(2.155)}$$

eklenir.

2.7.5 Sıcaklık dağılımı

Alt ve üst yüzeylerinden belirli bir sıcaklığa maruz kalan plakta, sıcaklığın plak kalınlığı boyunca dağılımı (Patankar, 1980),

$$\rho c \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right] \quad \mathbf{(2.156)}$$

ifadesiyle belirlenmiştir. Burada $T(z,t)$ sıcaklık dağılımının plak kalınlığına ve zamana bağlı fonksiyonu, ρ malzeme yoğunluğu, c özgül ısı, $k(z)$ ise plak kalınlığı boyunca değişen ısı iletkenlik katsayısıdır.

Sıcaklık etkilerine maruz kalan tabakalı kompozit plaklarda, her bir tabakaya etkiyen sıcaklık değişimi **(2.156)** denkleminin çözümüyle bulunmuş ve elde edilen değerler **(2.150)** ve **(2.152)** ifadelerinde yerlerine konularak hesaplara eklenmiştir.

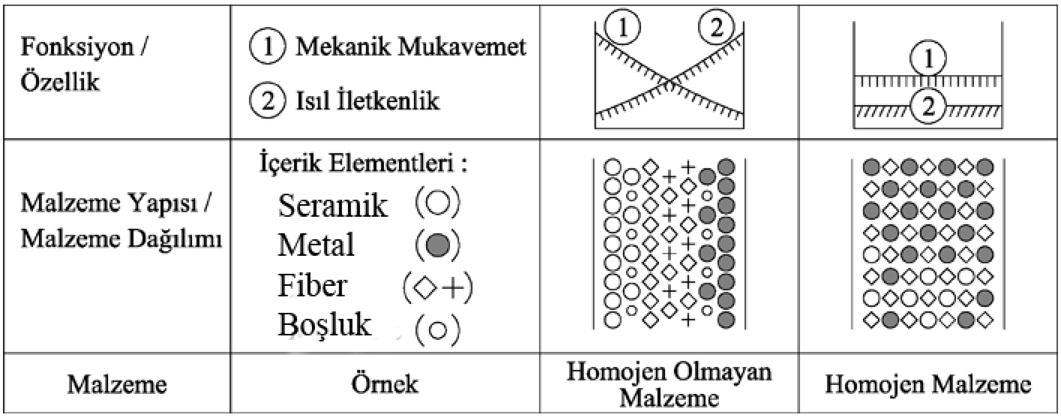
2.8 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kavramı, "*functionally gradient material*" (FGM) adı altında, yüksek sıcaklığa dayanıklı malzeme üretiminde kullanılmak üzere 1980'li yıllarda ortaya atılmıştır. Örneğin; uzay mekiklerinin yüzeyinde oluşan maksimum sıcaklık 2100K (1827^{o}C) olarak kabul edilmektedir. Dolayısıyla, yüzeyde kullanılacak malzemenin 2100K (1827^{o}C) sıcaklığa ve 1600K (1327^{o}C) sıcaklık farklarına dayanması gerekmektedir (Koizumi, 1997).

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin (FGM) mikro yapısı, makro ölçekte, her eksende değişken olarak karakterize edilir. Isı kalkanı yapılarında, homojen olmayan malzeme seramik ve metalin karışımından oluşturulur. Bu bileşim yapının enkesiti boyunca sürekli ve düzgün olarak geçiş yapar. Bu işlem, ana malzemelerin hacim oranlarını yavaşça değiştirerek yapılabilindiği gibi kimyasal bileşimi değiştirerek de yapılabilir. Bu özellikleri, homojen olmayan malzemeleri, tabakalı kompozit malzemelerden ayırır.

Tabakalı kompozit yapılarda, malzeme özelliklerinin uygunsuzluğundan, tabakalar arasında ayrışmalar ve mekanik özellikleri zayıf tabakadan dolayı tabakalar arasında çatlak oluşumları gözlenebilir. Malzemelerin farklı sıcaklık genleşme katsayılarından dolayı oluşan, ısısal artık gerilmeler, tabakalı malzemelerin bir diğer yetersizliğidir (Reddy, 2000). Tabakalı malzemeler için yukarıda sözü edilen sorunlar, homojen olmayan malzemelerde, mikro yapının, tabakalı malzemelerdeki ani geçişin aksine düzgün ve sürekli yapılmasıyla büyük ölçüde giderilmektedir. Homojen olmayan malzemeler, bu güçlü avantajları sayesinde, uçaklarda, uzay araçlarında, nükleer enerji sistemlerinde geniş uygulama alanları bulmuştur.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, son yıllarda özellikle ısı kalkanı yapılarında sıklıkla kullanılan bir homojen olmayan malzemedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilen plaklarda genellikle seramik ve metal bazlı iki malzeme bulunur. Plağın sıcaklık etkilerine maruz kalan yüzeyinde seramik bazlı malzeme yoğun olarak bulunurken, diğer yüze doğru seramik yoğunluğu azalır ve metal yoğunluğu artar (Şekil 2.5).



Şekil 2.5 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme.

Homojen olmayan malzemelerin üretiminde önceden belirlenmiş hacim oranı değişimleri kullanıldığından. Malzeme özelliklerinin değişimini tanımlamakta yoğun olarak üç değişik homojenleştirme metodu (Üstel kanun, eksponansiyel ve sigmoid fonksiyonları) kullanılmaktadır.

Homojen olmayan malzemelerden yapılmış plaklarda, malzeme özelliklerinin plak kalınlığı boyunca değişimi, üstel kanununa göre,

$$P(z) = [P_t - P_b]\left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n + P_b \qquad \textbf{(2.157)}$$

şeklinde tariflenebilir. Burada $P(z)$, plak kalınlığı boyunca değişimi incelenen özelliği (elastisite modülü, kayma modülü, yoğunluk, sıcaklık genleşme katsayısı, ısı iletkenlik katsayısı) ifade eder. P_t, P_b incelenen özelliğin plak üst yüzeyindeki ve alt yüzeyindeki değerleridir. h plak kalınlığı, z ise kalınlık boyunca olan eksendir. n ise malzeme özelliklerinin dağılımını belirleyen bir parametredir.

2.9 Anlık Basınç Yükü

Yapıların yakınlarında oluşan patlamalar, türbülanslar, sonik patlamalar ve şok dalgaları bu yapılar üzerinde anlık basınç kuvvetleri oluştururlar. Eğer bu patlamalar yeteri kadar uzakta ise, yükün etkileri plak üzerinde düzgün yayılı olarak tanımlanır ve yük ideal anlık basınç yükü olarak adlandırılır.

İdeal anlık basınç yükünün zaman içinde değişimini tarif etmek için literatürde sıklıkla kullanılan fonksiyonlar arasında; *i)* Adım yükü, *ii)* N-basınç dalgası ve *iii)* Friedlander fonksiyonu sayılabilir.

Bu fonksiyonlar;

Adım Yükü:

$$P(t)=\begin{cases} P_m & 0\le t\le t_p \\ 0 & t_p<t \end{cases} \quad \textbf{(2.158)}$$

N-Basınç Dalgası:

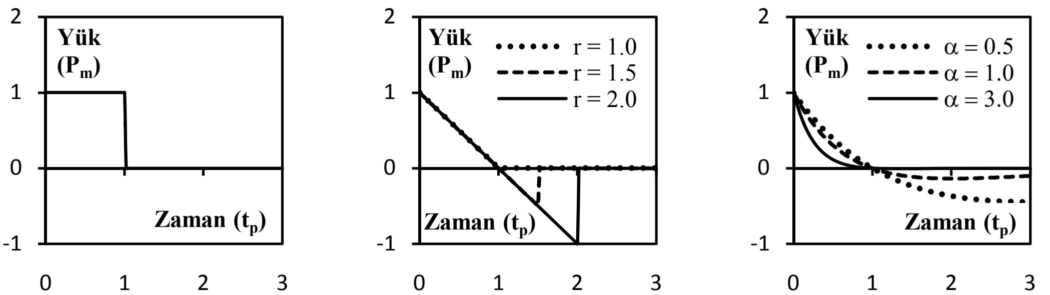
$$P(t)=\begin{cases} P_m\left(1-t/t_p\right) & 0\le t\le rt_p \\ 0 & rt_p<t \end{cases} \quad \textbf{(2.159)}$$

Friedlander Fonksiyonu:

$$P(t)=P_m\left(1-t/t_p\right)e^{-\alpha t/t_p} \quad \textbf{(2.160)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada P_m maksimum basınç değerini, t_p basıncın pozitif kısımdaki etki süresini ifade eder. N-Basınç dalgası ifadesindeki r uzunluk faktörüdür ve $r=1$ üçgen yüklemeyi, $r=2$ simetrik yüklemeyi, $1<r<2$ ise antisimetrik yüklemeyi tanımlar. Friedlander fonksiyonundaki α ise basınç dalgasının formunu belirleyen parametredir.

Adım yükü, N-basınç dalgası ve Friedlander fonksiyonu ile tariflenen anlık basınç yüklerinin zamanla değişimi Şekil 2.6'da verilmiştir.

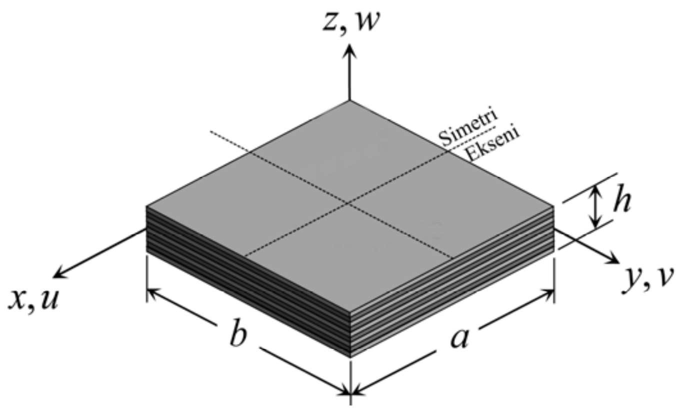


a) Adım yükü b) N-Basınç dalgası c) Friedlander fonksiyonu

Şekil 2.6 : Anlık basınç yüklerinin zamanla değişimi.

3. SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal olarak incelenen örneklerde boyutlar, yükleme ve elde edilen sonuçlar Şekil 3.1'de tariflenen plak geometrisi üzerinden verilmiştir.



Şekil 3.1 : Plak geometrisi.

3.1 Sayısal Algoritmaların Doğrulanması

Geliştirilen karışık sonlu elemanlar yöntemi öncelikle literatürde bulunan statik problemlerle doğrulanmıştır. Ardından anlık basınç yükü etkisinde plakların dinamik davranışları ideal anlık basınç yükleri altında incelenmiş ve sonuçlar ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

3.1.1 Statik problemler

Ankastre Mesnetli Plak: Sayısal analizlerde ilk olarak Levy (1942) tarafından Fourier serileriyle çözülmüş olan dört kenarından ankastre mesnetli (tüm kenarlarda $u = v = w = 0$) kare plak incelenmiştir. Plak boyutları $a = b = 2.0$ m ve kalınlığı $h = 0.02$ m'dir. Tek tabakalı izotrop malzemenin özellikleri ise, $E = 2\times10^8$ kN/m^2 ve $\upsilon = 0.316$'dır. Plak düzgün yayılı yük etkisinde üç ayrı ağ düzeni (4×4, 8×8, 12×12) kullanılarak çözülmüştür. Plak orta noktasına ait elde edilen çökme değerleri ve Levy (1942) çalışması sonuçlarıyla karşılaştırması Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1 : Ankastre mesnetli plak çökmesi, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.

Yayılı Yük $\left(qa^4/Eh^4\right)$	Levy (1942) Çökme $\left(w/h\right)$	Bu Çalışma 4×4 Ağ		Bu Çalışma 8×8 Ağ		Bu Çalışma 12×12 Ağ	
		Çökme $\left(w/h\right)$	Fark (%)	Çökme $\left(w/h\right)$	Fark (%)	Çökme $\left(w/h\right)$	Fark (%)
17.8	0.237	0.285	**20.4**	0.250	**5.4**	0.243	**2.3**
63.4	0.695	0.835	**20.1**	0.730	**5.0**	0.709	**1.9**
134.9	1.121	1.332	**18.8**	1.168	**4.1**	1.134	**1.2**
245.0	1.521	1.784	**17.3**	1.575	**3.5**	1.531	**0.6**
402.0	1.902	2.198	**15.5**	1.955	**2.8**	1.903	**0.0**

12×12'lik ağ kullanıldığında geliştirilen karışık SE sonuçları ile Levy (1942) çalışması arasındaki fark en çok %2.3 olarak bulunmuştur. Ayrıca doğrusal olmayan etkiler arttıkça bu fark azalmakta ve %0.03'e kadar düşmektedir.

Basit Mesnetli Plak: Reddy (2004) çalışmasında yer değiştirme tipi SE kullanılarak dört kenarından basit mesnetli ($x=0, a$ kenarlarında $u=v=w=M_{xx}=M_{xy}=0$; $y=0, b$ kenarlarında $u=v=w=M_{yy}=M_{xy}=0$) kare plak incelenmiştir. Plağın boyutları $a=b=2.0$ m ve kalınlığı $h=0.02$ m 'dir. Tek tabakalı izotrop malzemenin özellikleri ise, $E=2\times10^8$ kN/m^2 ve $\upsilon=0.3$ 'dür. Plak düzgün yayılı yük etkisinde, 8×8'lik ağ sıklığı kullanılarak çözülmüştür. Plak orta noktasına ait elde edilen çökme değerleri ve plak üst yüzeyinin orta noktasında oluşan gerilme değerleri, Reddy (2004) çalışması sonuçlarıyla karşılaştırılarak Çizelge 3.2'de verilmiştir.

Çizelge 3.2 : Basit mesnetli plak çökmesi, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ ve gerilmesi, $\sigma_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{h}{2}\right)$.

Yayılı Yük $\left(qa^4/Eh^4\right)$	Reddy (2004)	Bu Çalışma, 8×8 Ağ		Reddy (2004)	Bu Çalışma, 8×8 Ağ	
	Çökme $\left(w/h\right)$	Çökme $\left(w/h\right)$	Fark (%)	Gerilme $\left(\sigma a^2/Eh^2\right)$	Gerilme $\left(\sigma a^2/Eh^2\right)$	Fark (%)
50.0	0.945	0.975	**3.1**	8.2	8.5	**3.7**
100.0	1.267	1.296	**2.3**	12.0	12.3	**2.5**
150.0	1.483	1.510	**1.8**	14.9	15.1	**1.3**
200.0	1.651	1.677	**1.5**	17.3	17.5	**1.2**
250.0	1.791	1.815	**1.3**	19.4	19.6	**1.0**

Karışık SE yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile Reddy (2004) sonuçları arasındaki fark çökme için %3.1 ile %1.3, gerilme için %3.7 ile %1.0 arasında değişmektedir. Doğrusal olmayan etkiler arttıkça sonuçlar arasındaki farkın azaldığı görülmektedir.

Basit Mesnetli Tabakalı Plak: Tek tabakalı plakların ardından, tabakalı kompozit plaklara ait örnekler de karışık SE ile çözülmüş ve sonuçları literatürde bulunan örneklerle doğrulanmıştır. Bu amaçla Reddy (2003) çalışmasında bulunan çift tabakalı ortotrop malzemeli, basit mesnetli ($x=0,a$ kenarlarında $u=w=N_{xy}=M_{xx}=0$; $y=0,b$ kenarlarında $v=w=N_{xy}=M_{yy}=0$) plak incelenmiştir. Plak boyutları $a=b=1.0\,\text{m}$ ve kalınlığı $h=0.02\,\text{m}$'dir. $0.01\,\text{m}$ kalınlığındaki tabakalar $45°/-45°$ derecelik açılarla yerleştirilmiştir. Her iki tabakada da kullanılan ortotrop malzemenin özellikleri ise, $E_1=250\times10^6\,\text{kN/m}^2$, $E_2=20\times10^6\,\text{kN/m}^2$, $G_{12}=10\times10^6\,\text{kN/m}^2$ ve $\upsilon_{12}=\upsilon_{21}=0.25$'dir. Plak düzgün yayılı yük altında çözülmüş ve plak orta noktası çökmesine ait sonuçlar Çizelge 3.3'de Reddy (2003) sonuçlarıyla karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

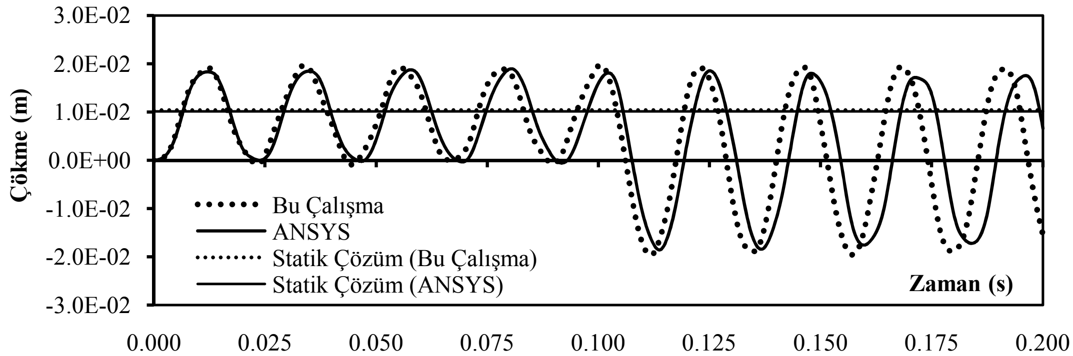
Çizelge 3.3 : Tabakalı plak çökmesi, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.

Yayılı Yük $q\left(\text{kN/m}^2\right)$	Reddy (2003) Çökme, $w(\text{mm})$	Bu çalışma Çökme, $w(\text{mm})$	Fark (%)
0.052	1.90	1.834	**-3.47**
0.090	2.29	2.290	**0.00**
0.123	2.58	2.579	**-0.04**
0.162	2.81	2.856	**1.64**
0.199	3.00	3.077	**2.57**

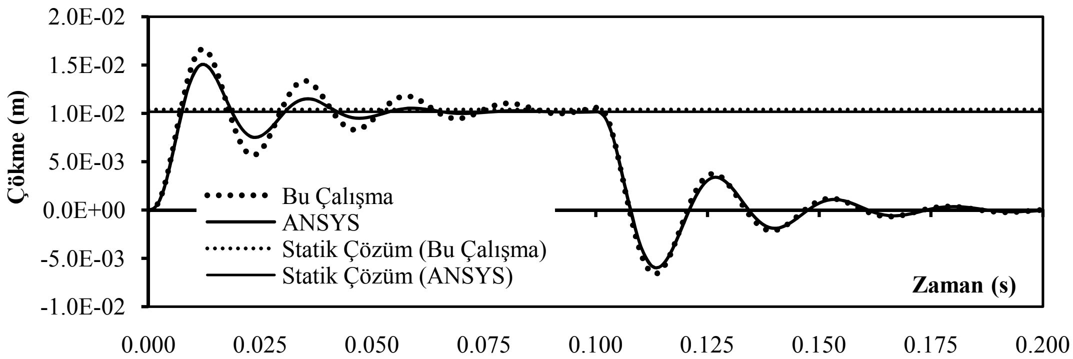
Reddy (2003) sonuçları makaledeki grafikten sayısallaştırılmış değerlerdir. Sonuç olarak geliştirilen karışık SE ile statik çözümü yapılan örneklerde, literatürde bulunan sonuçlar yeterli hassasiyetle bulunmuştur.

3.1.2 Dinamik problemler

İdeal Anlık Basınç Yükü Altında Ankastre Mesnetli Plak: Karışık SE çözümlerinin dinamik problemlerdeki sonuçlarının doğrulamasını yapmak için tek tabakalı, ankastre mesnetli (tüm kenarlarda $u=v=w=0$) bir plak çözülmüş ve sonuçları ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Ele alınan plak $a=b=2.0\,\text{m}$ boyutlarında ve $h = 0.02$ m kalınlığındadır. Tek tabakalı izotrop malzemenin özellikleri ise, $E = 2\times10^{8}$ kN/m^2 ve $\upsilon = 0.3$'dır. Plağa $q_z = 80.4$ kN/m^2'lik düzgün yayılı yük ilk 0.1 s boyunca sabit olarak yüklenmiş, daha sonra aniden kaldırılmıştır. Dinamik analizde başlangıç koşulları durağan ve zaman adımı 0.0001 s olarak kabul edilmiş ve analizler sönümlü ve sönümsüz olarak gerçekleştirilmiştir. Sönümlü analizlerde sönüm matrisinin hesaplanmasında kütle ve rijitlik matrisi çarpanları sırasıyla 0.0015 s^{-1} ve 0.0015 s olarak alınmıştır. Plak orta noktasına ait elde edilen çökmeler ve ANSYS sonuçlarıyla karşılaştırmaları, sönümsüz ve sönümlü analizler için sırasıyla Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'de verilmiştir.



Şekil 3.2 : Sönümsüz analiz sonucu plak çökmesi, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$.



Şekil 3.3 : Sönümlü analiz sonucu plak çökmesi, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$.

Sönümsüz analiz sonuçları karşılaştırıldığında, her ne kadar frekanslarda çok küçük bir farklılık olsa da, geliştirilen karışık SE sonuçlarının ANSYS sonuçlarıyla son derece uyumlu olduğu görülebilmektedir. Ayrıca sönümlü analizlerde de her iki sonuç birbirine çok yakındır. ANSYS sonuçlarının, karışık SE sonuçlarına göre daha fazla sönümleniyor olması, ANSYS programının sönüm matrisinin hesaplanmasında rijitlik matrisin doğrusal olmayan terimlerinin de kullanılıyor olmasıdır.

3.2 Sayısal Parametrelerin İncelenmesi

İstanbul Teknik Üniversitesi Kompozit Yapı Laboratuarında, ideal olmayan anlık basınç yükü etkisindeki kompozit plakların dinamik davranışları deneysel olarak incelenmiştir. Bu deneylerde kullanılan bir plağın geometrik ve malzeme özellikleri bu çalışmanın sayısal analizlerinde kullanılmıştır. İncelenen ankastre mesnetli plak (tüm kenarlarda $u = v = w = 0$) $a = b = 0.3$ m boyutlarında Cam (C), Aramid (A) ve Karbon (K) malzemelerinden oluşan 9 tabaka ile üretilmiştir. Tabakaların yerleşimi z^{+} C/C/C/A/A/A/K/K/K z^{-} şeklindedir ve özellikleri Çizelge 3.4'de verilmiştir.

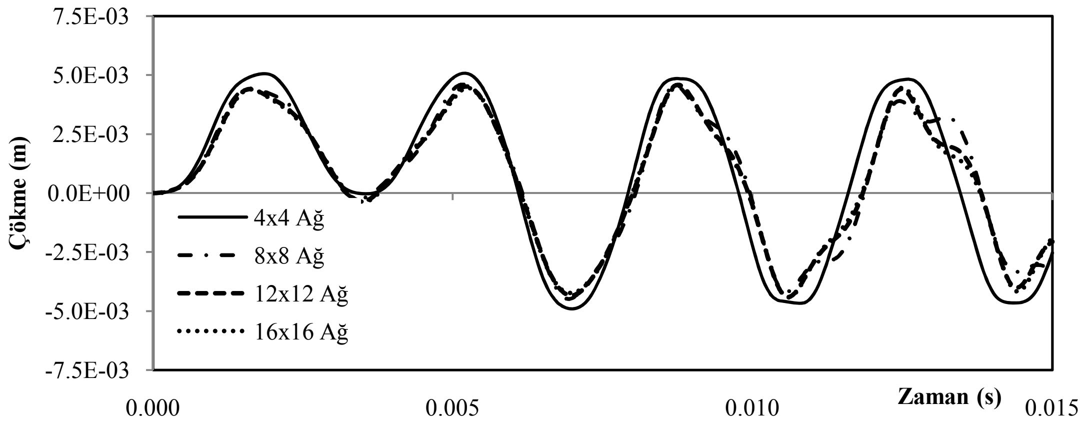
Çizelge 3.4 : Malzeme özellikleri.

	Cam/Epoksi	Aramid/Epoksi	Karbon/Epoksi
Elastisite modülü, E_1 (GPa)	18.5	19.6	46.7
Elastisite modülü, E_2 (GPa)	18.5	19.6	46.7
Kayma modülü, G_{12} (GPa)	2.7	1.2	2.8
Poisson oranı, υ	0.14	0.09	0.20
Yoğunluk, (kg/m^3)	1793	1320	1399
Tabaka kalınlığı, (mm)	0.24	0.21	0.33

Sayısal analizler iki aşamalı olarak gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada, dinamik analizlerde kullanılacak ağ sıklığı ve zaman adımı büyüklüğüne ait parametrik çalışmalar yapılmıştır. Parametrik çalışmalarda anlık basınç yükü plak üzerinde düzgün yayılı olarak ve zaman içindeki değişimi adım yükü şeklinde tanımlanmıştır. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak en uygun ağ sıklığı ve zaman adımı seçilmiştir. İkinci aşamada ise, seçilen ağ sıklığı ve zaman adımı kullanılarak, plak üzerindeki farklı anlık basınç yüklerinin etkileri incelenmiştir. Tüm örneklerde yükleme plağın negatif koordinatlı yüzeyinden etkitilmiş ve dinamik analizin başlangıç koşulları durağan kabul edilmiştir.

3.2.1 Ağ sıklığı

Ele alınan plak 4×4, 8×8, 12×12 ve 16×16 ağ sıklıkları kullanılarak çözülmüştür. Zaman adımı $\Delta t = 0.0001$ s olarak alınmış ve anlık basınç yükü plak üzerinde düzgün yayılı olarak dağıtılmıştır. Yükün zaman içindeki dağılımı, **(2.158)** ifadesinde verilen adım fonksiyonu şeklinde, maksimum basınç değeri $P_m = 12$ kPa ve etkime süresi $t_p = 0.005$ s olarak tanımlanmıştır. Analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi Şekil 3.4'de verilmiştir. Ayrıca plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değerleri Çizelge 3.5'de verilmiş ve karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.4 : Plak çökmesi, $w\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$.

Çizelge 3.5 : Maksimum plak çökmeleri, $w\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$.

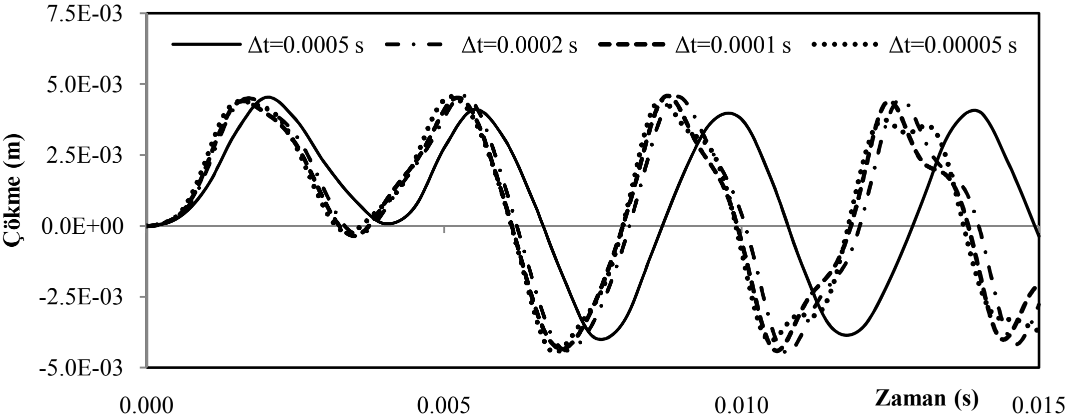
Ağ Sıklığı	Çökme (m)	Fark (%)[1]
4×4 Ağ	0.00508	12.67
8×8 Ağ	0.00459	1.68
12×12 Ağ	0.00456	1.09
16×16 Ağ	0.00451	-

[1]: Farklar 16×16'lık ağ sonuçlarına göre hesaplanmıştır.

Ağ sıklığına ait yapılan parametrik çalışma neticesinde 4×4'lük ağdan sonraki değerlerin birbirine yeteri kadar yakın olduğu görülmüştür. Bu nedenle diğer analizlerde 8×8'lik ağ sıklığı kullanılmıştır.

3.2.2 Zaman adımı

Dinamik analizlerde kullanılacak en uygun zaman adımı aralığını belirlemek için parametrik bir çalışma yapılmıştır. İncelenen plağın ilk üç doğal titreşim periyodu sırasıyla, $T_1 = 0.00572$ s, $T_2 = T_3 = 0.00279$ s'dir. Newmark yöntemi ile gerçekleştirilen dinamik analizlerde, zaman adım aralığı genellikle, $\Delta t = T_1/10$ olarak seçilmektedir. Bu nedenle örnek plak, $\Delta t = 0.0005$ s, $\Delta t = 0.0002$ s, $\Delta t = 0.0001$ s ve $\Delta t = 0.00005$ s zaman adım aralıkları kullanılarak çözülmüştür. Ağ sıklığı 8×8 olarak alınmış ve anlık basınç yükü plak üzerinde düzgün yayılı olarak dağıtılmıştır. Yükün zaman içindeki dağılımı, **(2.158)** ifadesinde verilen adım fonksiyonu şeklinde, maksimum basınç değeri $P_m = 12\,\text{kPa}$ ve etkime süresi $t_p = 0.005\,\text{s}$ olarak tanımlanmıştır. Analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi Şekil 3.5'de verilmiştir. Ayrıca plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değerleri Çizelge 3.6'da verilmiş ve karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.5 : Plak çökmesi, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.

Çizelge 3.6 : Maksimum plak çökmeleri, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.

Zaman Adımı	Çökme (m)	Fark (%)[1]
$\Delta t = 0.0005\,\text{s}$	0.00453	-0.660
$\Delta t = 0.0002\,\text{s}$	0.00454	-0.414
$\Delta t = 0.0001\,\text{s}$	0.00456	-0.011
$\Delta t = 0.00005\,\text{s}$	0.00456	-

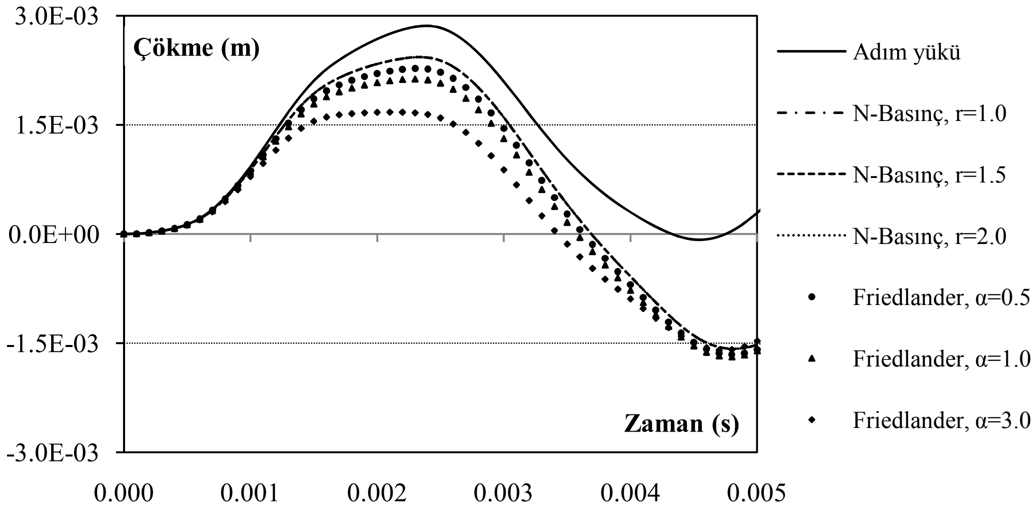
[1]: Farklar 0.00005 s'lik zaman adımı sonuçlarına göre hesaplanmıştır.

Farklı zaman adım aralıkları kullanılarak yapılan analizlerde, sistemde oluşan maksimum çökme değerlerinde büyük farklılıklar oluşmasa da, $\Delta t = 0.0005\,\text{s}$ zaman adımıyla yapılan analizlerde plağın titreşim frekansında değişiklikler olmaktadır. von Karman plak kuramında, çökmelerin artması plağın rijitliğini arttırmakta ve titreşim periyodunun azalmasına neden olmaktadır. von Karman plak kuramının bu özelliği göz önünde bulundurularak, devam eden analizlerde zaman adım aralığının $\Delta t = 0.0001\,\text{s}$ olarak kullanılması uygun görülmüştür.

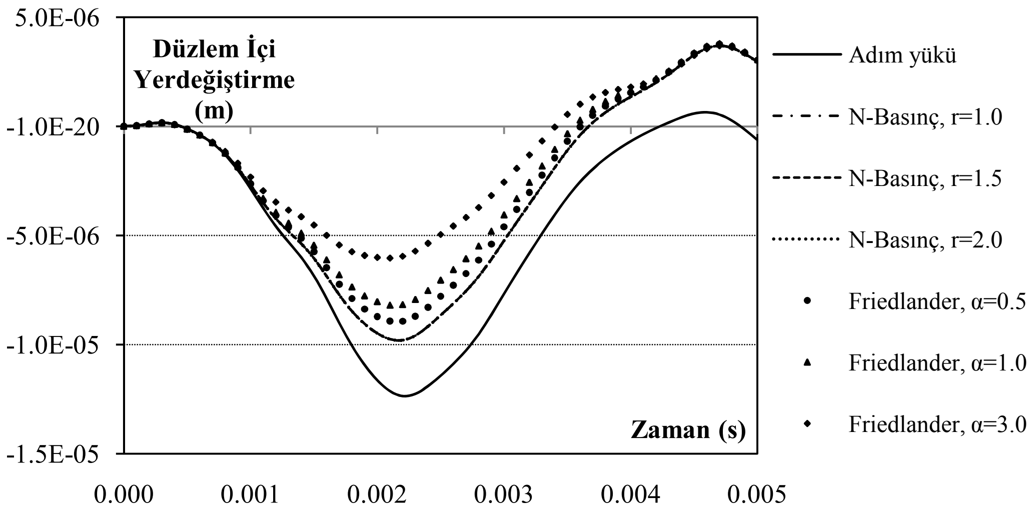
3.3 İdeal Anlık Basınç Yükleri

Örnek plağın farklı anlık basınç yükleri altında davranışlarını incelemek amacıyla, plak Bölüm 2.9'da tanımlanan üç ayrı ideal anlık basınç yükü altında çözülmüştür. Analizler bir adet adım yükü, üç adet N-Basınç dalgası ($r = 1.0, 1.5, 2.0$) ve üç adet Friedlander fonksiyonu ($\alpha = 0.5, 1.0, 3.0$) kullanılarak yapılmıştır (Şekil 2.6). Yükün maksimum değeri için iki farklı değer kullanılmış ($P_m = 5\,\mathrm{kPa}, 10\,\mathrm{kPa}$), ve yükler plağa negatif yüzeyinden etkitilmiştir. Ayrıca basıncın pozitif bölgedeki etki süresi, $t_p = 0.005\,\mathrm{s}$ olarak tanımlanmıştır. Başlangıç koşulları durağan kabul edilmiş, analitik model 8×8'lik ağ ile oluşturulmuş ve zaman adımı aralığı, $\Delta t = 0.0001\,\mathrm{s}$ olarak kullanılmıştır. $P_m = 5\,\mathrm{kPa}$'lık yükün kullanıldığı analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi, plak simetri ekseni dörtte bir noktasının düzlem içi yer değiştirmesi ve plak üst yüzeyi orta noktası şekil değiştirmesi sırasıyla Şekil 3.6, Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de verilmiştir. Aynı değişkenlerin $P_m = 10\,\mathrm{kPa}$ için olan değerleri ise Şekil 3.9, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11'de verilmiştir. Farklı anlık basınç yükleri için elde edilen çökme, düzlem içi yer değiştirme ve şekil değiştirmelerin maksimum değerleri, $P_m = 5\,\mathrm{kPa}$ ve $P_m = 10\,\mathrm{kPa}$ yük durumları için Çizelge 3.7 ve Çizelge 3.8'de karşılaştırılmıştır.

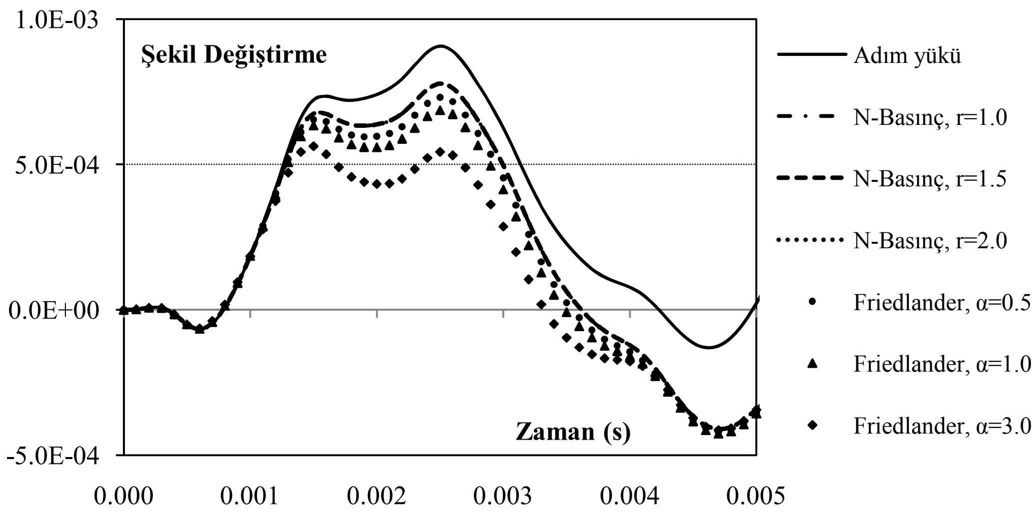
Tüm analizlerde maksimum sonuçlar (plak orta noktası çökmesi, plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirme ve plak üst yüzeyi orta noktasında oluşan şekil değiştirme) adım yükü altında gerçekleşmiştir. Minimum sonuçlar ise $\alpha = 3.0$ katsayılı Friedlander yükü altında oluşmuştur. $P_m = 5\,\mathrm{kPa}$'lık maksimum basınç yükü altında, farklı anlık basınç yükleri altında plak orta noktasında oluşan çökmeler, adım yükü altında oluşan çökmenin %59'una kadar azalırken bu azalma $P_m = 10\,\mathrm{kPa}$'lık maksimum basınç yükü dikkate alındığında %72 olmaktadır. Farklı anlık basınç yükleri altında oluşan tepkiler arasındaki fark, yükün şiddeti arttıkça oransal olarak azalmaktadır. Tüm ideal anlık basınç yükleri altında maksimum çökmeler, yükün basınç bölgesinde oluşurken, $r = 2.0$ katsayılı N-Basınç yükü altında maksimum çökme yükün emme bölgesinde oluşmuştur.



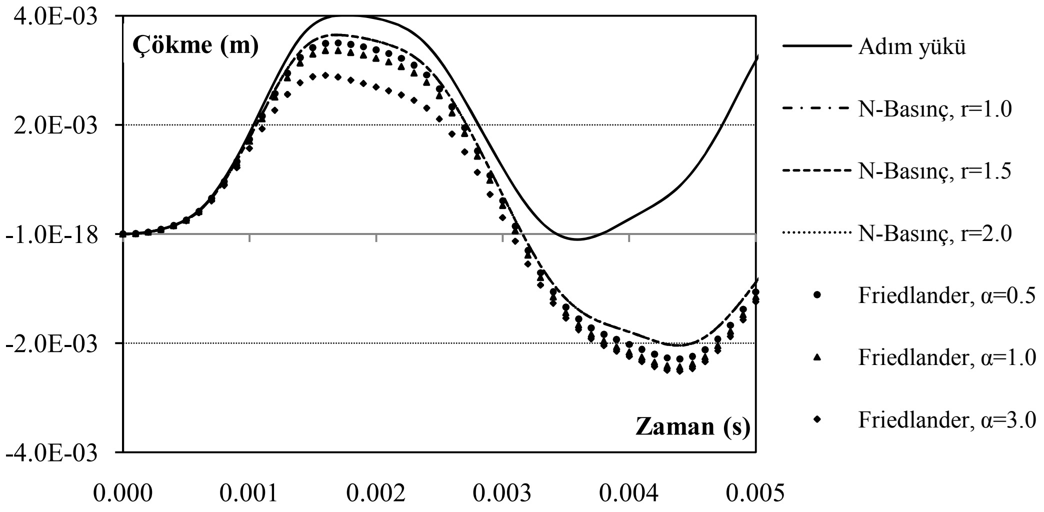
Şekil 3.6 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right),\ P_m = 5\ \text{kPa}$.



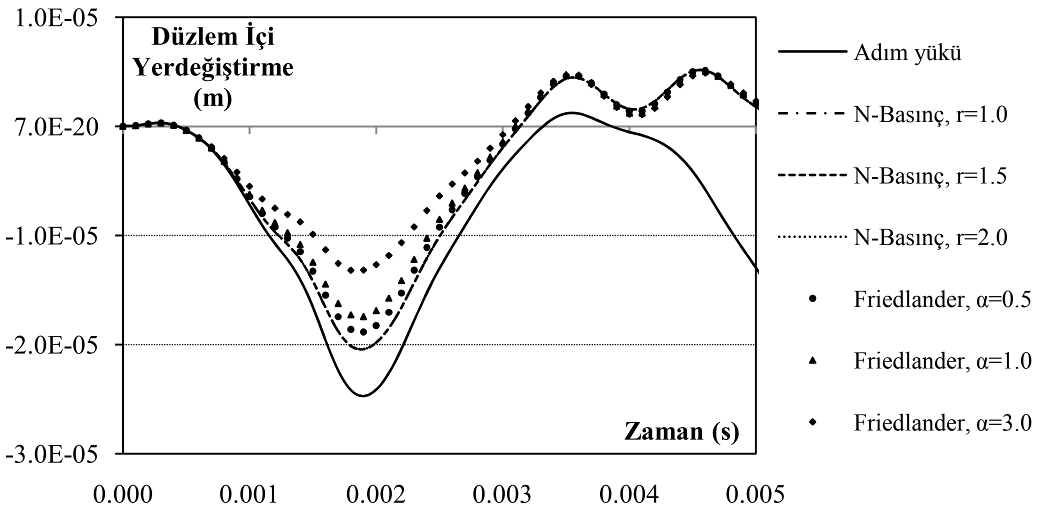
Şekil 3.7 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right),\ P_m = 5\ \text{kPa}$.



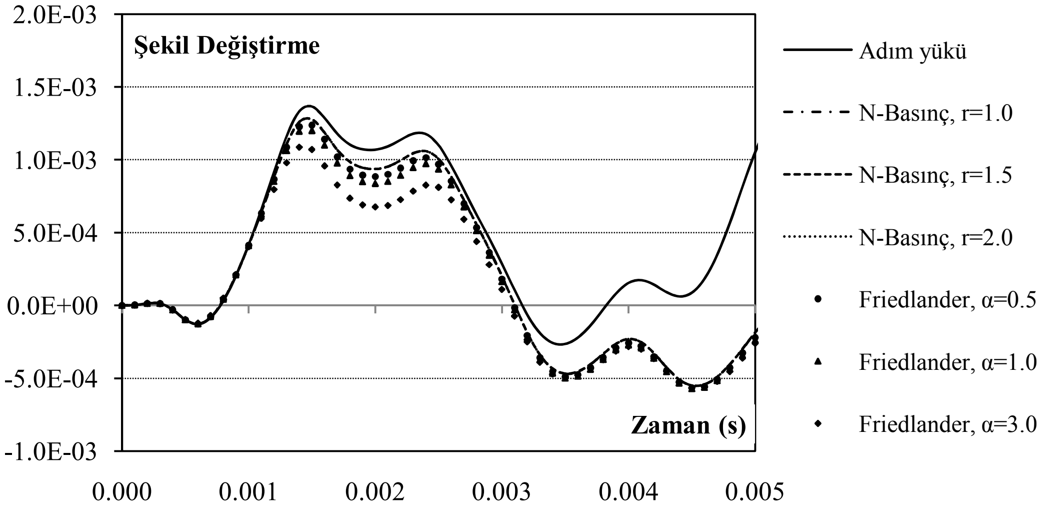
Şekil 3.8 : Şekil değiştirme, $\varepsilon_{xx}\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=\frac{h}{2}\right),\ P_m = 5\ \text{kPa}$.



Şekil 3.9 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$, $P_m = 10$ kPa .



Şekil 3.10 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$, $P_m = 10$ kPa .



Şekil 3.11 : Şekil değiştirme, $\varepsilon_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{h}{2}\right)$, $P_m = 10$ kPa .

Çizelge 3.7 : Plakta oluşan maksimum tepkiler ve karşılaştırması ($P_m = 5$ kPa).

Basınç Yükü	Çökme[1] (10^{-3}m)		Yer Değiştirme[2] (10^{-6}m)		Şekil Değiştirme[3] (10^{-3})	
	Maks.	Oran[4]	Maks.	Oran[4]	Maks.	Oran[4]
Adım Yükü	2.86		-12.4		0.91	
N-Basınç, $r = 1.0$	2.43	**0.85**	-9.8	**0.79**	0.78	**0.86**
N-Basınç, $r = 1.5$	2.43	**0.85**	-9.8	**0.79**	0.78	**0.86**
N-Basınç, $r = 2.0$	-2.71	**-0.95**	-10.9	**0.88**	0.79	**0.88**
Friedlander, $\alpha = 0.5$	2.28	**0.80**	-8.9	**0.72**	0.73	**0.81**
Friedlander, $\alpha = 1.0$	2.13	**0.75**	-8.2	**0.66**	0.69	**0.76**
Friedlander, $\alpha = 3.0$	1.67	**0.59**	-6.0	**0.49**	0.56	**0.62**

Çizelge 3.8 : Plakta oluşan maksimum tepkiler ve karşılaştırması ($P_m = 10$ kPa).

Basınç Yükü	Çökme[1] (10^{-3}m)		Yer Değiştirme[2] (10^{-6}m)		Şekil Değiştirme[3] (10^{-3})	
	Maks.	Oran[4]	Maks.	Oran[4]	Maks.	Oran[4]
Adım Yükü	4.03		-24.7		1.53	
N-Basınç, $r = 1.0$	3.65	**0.91**	-20.4	**0.83**	1.28	**0.83**
N-Basınç, $r = 1.5$	3.65	**0.91**	-20.4	**0.83**	1.28	**0.83**
N-Basınç, $r = 2.0$	-3.72	**-0.92**	-20.4	**0.83**	1.28	**0.83**
Friedlander, $\alpha = 0.5$	3.50	**0.87**	-18.8	**0.76**	1.24	**0.81**
Friedlander, $\alpha = 1.0$	3.36	**0.83**	-17.4	**0.71**	1.20	**0.78**
Friedlander, $\alpha = 3.0$	2.91	**0.72**	-13.2	**0.53**	1.09	**0.71**

[1]: $w\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$ [2]: $u\left(x = \frac{a}{4}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$ [3]: $\varepsilon_{xx}\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = \frac{h}{2}\right)$
[4]: Oranlar adım yükü altında oluşan maksimum tepkilere göre hesaplanmıştır.

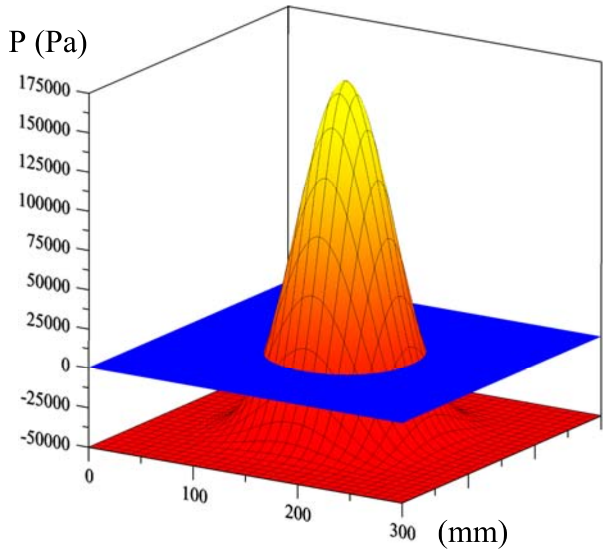
3.4 İdeal Olmayan Anlık Basınç Yükü

İdeal olmayan anlık basınç yükü etkisindeki bir plağın dinamik davranışını incelemek için İTÜ Kompozit Yapı Laboratuarında deneysel olarak incelenen bir plak ve elde edilen anlık basınç yükü kullanılmıştır. Deneysel olarak incelenen plak ANSYS programı ve karışık SE ile çözülmüş ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Tabakalı kompozit plak, $a = b = 0.3$ m boyutlarında, Cam (C), Aramid (A) ve Karbon (K) malzemelerinden oluşan 9 tabaka ile üretilmiştir. Tabakaların yerleşimi z^+ C/C/C/A/A/A/K/K/K z^- şeklindedir. Kullanılan malzemelerin özellikleri Çizelge 3.4'de verilmiştir.

Deneyler sırasında plağın negatif koordinatlı yüzeyinden etkiyen basınç yükü, plak üzerindeki üç adet basınç ölçer yardımıyla elde edilmiş ve kosinüs fonksiyonları ile,

$$P(x,y,t)=\left[1-\cos(\frac{2\pi t}{t_p})\right]^3\left\{\frac{P_0+P_m}{2048}\left[1-\cos(\frac{2\pi x}{a})\right]^4\left[1-\cos(\frac{2\pi y}{b})\right]^4-\frac{P_0}{8}\right\} \qquad \textbf{(3.1)}$$

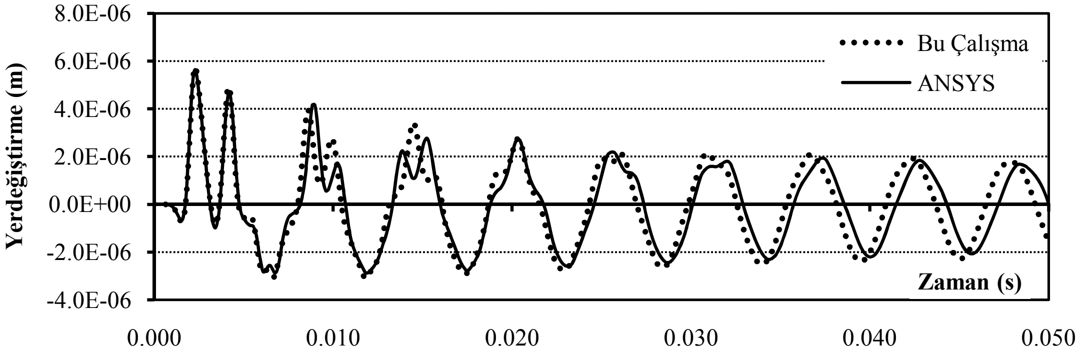
idealize edilmiştir. İdealize edilen yükün etkime süresi, $t_p = 0.005\,\mathrm{s}$, maksimum basınç $P_m = 170\,\mathrm{kPa}$ ve maksimum emme değeri $P_0 = 50\,\mathrm{kPa}$’dır. Yükün plak üzerindeki dağılımı, maksimum etkilerin oluştuğu an için Şekil 3.12’de verilmiştir.



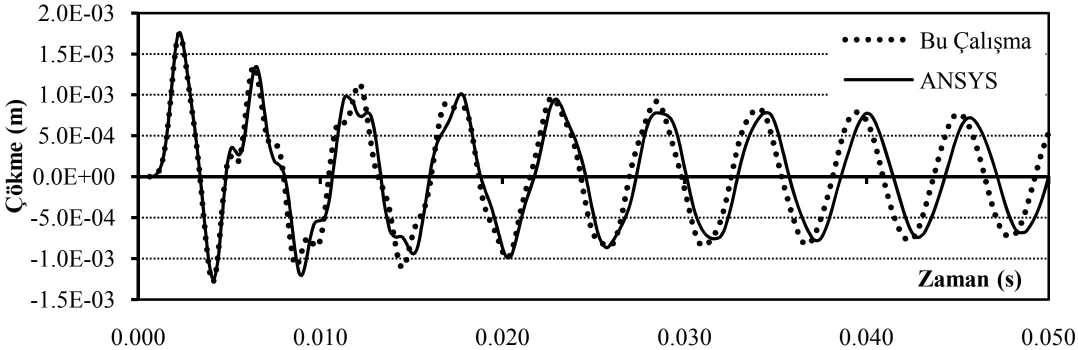
Şekil 3.12 : İdeal olmayan anlık basınç yükünün plak üzerinde dağılımı.

Analizlerde zaman adımı $0.0001\,\mathrm{s}$ alınmış, başlangıç koşulları durağan olarak kabul edilmiş ve Rayleigh sönümü $5\,\mathrm{s}^{-1}\times\mathbf{M}+0.00001\,\mathrm{s}\times\mathbf{K}$ şeklinde tariflenmiştir. Sönüm katsayıları deney sonuçlarının ve deneyde elde edilen birinci mod sönüm oranlarının analitik sonuçlarla eşitlenmesiyle elde edilmiştir. Hem ANSYS ile hem de karışık SE ile yapılan çözümlerde 20×20’lik bir ağ sıklığı kullanılmıştır. ANSYS çözümünde 8 düğüm noktalı 48 serbestlik dereceli Shell91 elemanı, karışık SE çözümünde ise 4 düğüm noktalı 36 serbestlik dereceli eleman kullanılmıştır. ANSYS çözümünde toplam bilinmeyen sayısı 6726 iken karışık SE çözümünde bu sayı 3729’dur.

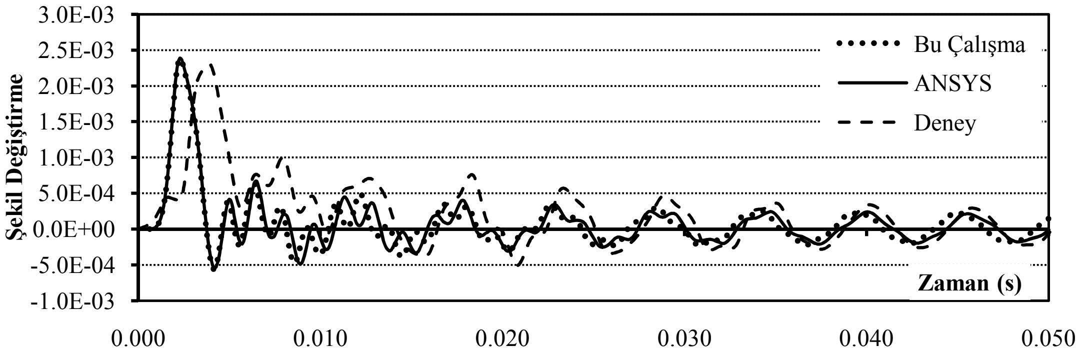
Plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirme, plak orta noktasında oluşan çökme, plak üst yüzeyi orta noktasında oluşan şekil değiştirme ve gerilme değerleri sırasıyla Şekil 3.13, Şekil 3.14, Şekil 3.15 ve Şekil 3.16’de verilmiş ve ANSYS sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Ayrıca plak üst yüzeyi orta noktasında deney sırasında ölçülen şekil değiştirme değerleri de Şekil 3.15’de verilmiştir.



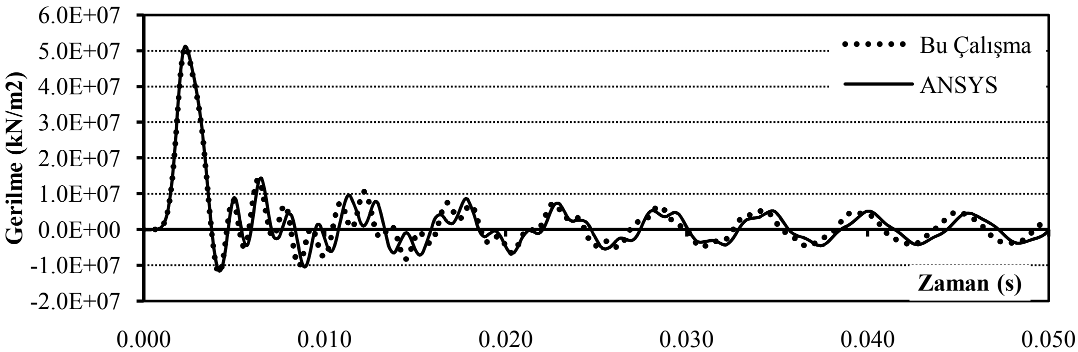
Şekil 3.13 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.



Şekil 3.14 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.



Şekil 3.15 : Şekil değiştirme, $\varepsilon_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{h}{2}\right)$.



Şekil 3.16 : Gerilme, $\sigma_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=\frac{h}{2}\right)$.

Karışık SE yöntemiyle elde edilen sonuçlar ANSYS sonuçlarına son derece yakındır. Hatta zorlanmış titreşim bölgesinde ($t \leq 0.005\,\text{s}$) sonuçlar tamamen üst üste düşmektedir. Karışık SE ile yapılan analizlerde, ANSYS analizlerinde kullanılan bilinmeyen sayısının %55'i kadar bilinmeyen kullanıldığı dikkate alınırsa, sonuçların hem deney hem de ANSYS sonuçları ile son derece uyumlu olduğu görülebilir.

3.5 Homojen Olmayan Malzemelerin Analizi

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan plakların analizi altı bölüm halinde ele alınmıştır. İlk bölümde literatürde bulunan örnekler, geliştirilen karışık SE çözülmüş ve sonuçlar doğrulanmıştır. Daha sonra ele alınan plağın dinamik analizi farklı zaman adımları kullanılarak gerçekleştirilmiş ve yakınsaklık ve çözüm süresi bakımından en uygun zaman adımı seçilmiştir. Ardından sönümün dinamik davranışa etkisi incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin sönümlerine ilişkin yeterli bilgi henüz literatürde mevcut değildir. Bu nedenle farklı sönüm oranları kullanılarak analizler yapılmıştır. Bir diğer incelemede ise anlık basınç yükü tipinin, plağın dinamik davranışına etkisi incelenmiştir. Daha sonra plağa etkiyen yükün şiddeti değiştirilerek analizler tekrarlanmıştır. Son olarak sıcaklık etkilerinin FGM plakların dinamik davranışına etkisi incelenmiştir.

Analizlerin hepsinde literatürde sıklıkla kullanılan, Alüminyum ve Zirconia malzemelerinden oluşan (Çizelge 3.9) bir plak ele alınmıştır. Dört tarafından basit mesnetli ($x = 0, a$ kenarlarında $v = w = N_{xx} = M_{xx} = 0$; $y = 0, b$ kenarlarında $u = w = N_{yy} = M_{yy} = 0$) plağın boyutları $a = b = 0.20\,\text{m}$ ve $h = 0.01\,\text{m}$'dır. Karışık SE kullanılan tüm örneklerde plağın tamamı, 8×8'lik ağ sıklığı kullanılarak ve Newmark parametreleri $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ alınarak çözülmüştür. Tüm dinamik analizlerde başlangıç koşulları durağan olarak alınmıştır.

Çizelge 3.9 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri.

Malzeme Özelliği	Aluminyum	Zircona
Elastisite modülü, E	70 GPa	151 GPa
Poisson oranı, υ	0.3	0.3
Yoğunluk, ρ	2707 kg/m^3	3000 kg/m^3
Isı iletkenliği, k	204 W/mK	2.09 W/mK
Genleşme katsayısı, α	23x10^{-6} ^{o}C^{-1}	10x10^{-6} ^{o}C^{-1}

Analizlerde malzeme özelliklerinin (elastisite modülü, yoğunluk, ısı iletkenliği ve genleşme katsayısı) plak kalınlığı boyunca değişimi **(2.157)** ifadesiyle tanımlanmıştır. Analizlerde beş ayrı dağılım parametresi ($n = 0.0, 0.2, 1.0, 2.0, \infty$) kullanılmıştır. Geliştirilen karışık sonlu elemanlarda, plak kalınlığı boyunca 10 tabakaya bölünmüş ve her bir tabakanın malzeme özellikleri **(2.157)** ifadesiyle elde edilmiştir. Beş ayrı dağılım parametresi ile tanımlanan plakların her bir tabakasının malzeme özellikleri Çizelge 3.10 ~ Çizelge 3.14'de verilmiştir.

Çizelge 3.10 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri, ($n = 0$).

Tabaka	Tabaka Kalınlığı (m)	Elastisite Modülü (GPa)	Yoğunluk (kg/m^3)	Genleşme Katsayısı (^{o}C^{-1})
1 ~ 10	0.001	151	3000	10x10^{-6}

Çizelge 3.11 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri, ($n = \infty$).

Tabaka	Tabaka Kalınlığı (m)	Elastisite Modülü (GPa)	Yoğunluk (kg/m^3)	Genleşme Katsayısı (^{o}C^{-1})
1 ~ 10	0.001	70	2707	23x10^{-6}

Çizelge 3.12 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri, ($n = 0.2$).

Tabaka	Tabaka Kalınlığı (m)	Elastisite Modülü (GPa)	Yoğunluk (kg/m^3)	Genleşme Katsayısı (^{o}C^{-1})
1	0.001	114.492	2867.94	0.000016
2	0.001	125.425	2907.49	0.000014
3	0.001	131.387	2929.05	0.000013
4	0.001	135.660	2944.51	0.000012
5	0.001	139.044	2956.75	0.000012
6	0.001	141.872	2966.98	0.000011
7	0.001	144.313	2975.81	0.000011
8	0.001	146.471	2983.62	0.000011
9	0.001	148.410	2990.63	0.000010
10	0.001	150.173	2997.01	0.000010

Çizelge 3.13 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri, ($n = 1.0$).

Tabaka	Tabaka Kalınlığı (m)	Elastisite Modülü (GPa)	Yoğunluk (kg/m^3)	Genleşme Katsayısı (^{o}C^{-1})
1	0.001	74.050	2721.65	0.000022
2	0.001	82.150	2750.95	0.000021
3	0.001	90.250	2780.25	0.000020
4	0.001	98.350	2809.55	0.000018
5	0.001	106.450	2838.85	0.000017
6	0.001	114.550	2868.15	0.000016
7	0.001	122.650	2897.45	0.000015
8	0.001	130.750	2926.75	0.000013
9	0.001	138.850	2956.05	0.000012
10	0.001	146.950	2985.35	0.000011

Çizelge 3.14 : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme özellikleri, ($n = 2.0$).

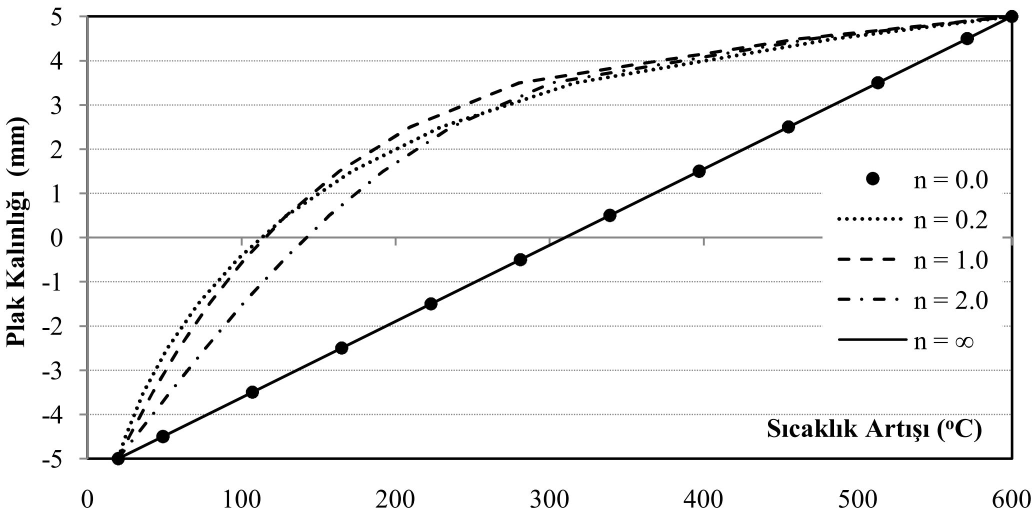
Tabaka	Tabaka Kalınlığı (m)	Elastisite Modülü (GPa)	Yoğunluk (kg/m^3)	Genleşme Katsayısı (^{o}C^{-1})
1	0.001	70.203	2707.73	0.000023
2	0.001	71.823	2713.59	0.000023
3	0.001	75.063	2725.31	0.000022
4	0.001	79.923	2742.89	0.000021
5	0.001	86.403	2766.33	0.000020
6	0.001	94.503	2795.63	0.000019
7	0.001	104.223	2830.79	0.000018
8	0.001	115.563	2871.81	0.000016
9	0.001	128.523	2918.69	0.000014
10	0.001	143.103	2971.43	0.000011

3.5.1 Sayısal algoritmaların doğrulanması

Geliştirilen karışık sonlu elemanların, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan plaklardaki sonuçlarının doğrulanması için öncelikle literatürdeki bazı örnekler çözülmüştür. Bu amaçla Reddy (2003)'de bulunan örnek, basınç yükleri ve sıcaklık etkileri altında doğrusal ve doğrusal olmayan statik analizlerle çözülmüştür.

Örnekte incelenen plağın özellikleri Bölüm 3.5'de verilmiştir. Reddy (2003) çalışmasında, plak yüksek mertebeden kayma gerilmelerini de dikkate alan plak kuramıyla, yer değiştirme tipi sonlu elemanlar kullanılarak çözülmüştür. Ayrıca plağın tamamı yerine dörtte biri 4×4'lük bir ağ sıklığı kullanılarak incelenmiştir.

İncelen plak beş ayrı dağılım parametresi ($n = 0.0, 0.2, 1.0, 2.0, \infty$) ile düzgün yayılı basınç yükü ve sıcaklık etkileri altında çözülmüştür. Düzgün yayılı basınç yükü seramik bazlı yüzeyden $q_z = -13125.0$ kN/m^2 'lik basınç olarak etkitilmiştir. Sıcaklık artışı ise metal bazlı yüzeyde $\Delta T = 20\ ^{\circ}\mathrm{C}$ ve seramik bazlı yüzeyde $\Delta T = 600\ ^{\circ}\mathrm{C}$ olarak etkitilmiştir. Sıcaklık artışının plak kalınlığı boyunca yayılışı **(2.156)** denklemiyle $t = \infty$ anı için çözülmüştür. Farklı dağılım parametrelerine sahip plaklardaki sıcaklık artışı dağılımı Şekil 3.17'de verilmiştir.



Şekil 3.17 : Plak kalınlığı boyunca sıcaklık artışı dağılımı.

Plak orta noktasının boyutsuzlaştırılmış çökme değerleri; basınç yüklerinin doğrusal ve doğrusal olmayan analizi, sıcaklık etkilerinin doğrusal ve doğrusal olmayan analizi için sırasıyla Çizelge 3.15 ve Çizelge 3.16'da verilmiş ve Reddy (2003) çalışmasıyla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3.15 : Basınç yükleri altında boyutsuz çökme, $w/h\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$.

Dağılım Parametresi	Doğrusal Statik Analiz			Doğrusal Olmayan Analiz		
	Bu Çalışma	Reddy, 2003[1]	Fark (%)	Bu Çalışma	Reddy, 2003[1]	Fark (%)
$n = 0.0$	-0.624	-0.62	**0.6**	-0.555	-0.55	**0.9**
$n = 0.2$	-0.702	-0.70	**0.3**	-0.609	-0.59	**3.2**
$n = 1.0$	-0.895	-0.89	**0.6**	-0.731	-0.71	**3.0**
$n = 2.0$	-0.979	-0.98	**-0.1**	-0.785	-0.76	**3.3**
$n = \infty$	-1.345	-1.34	**0.4**	-0.974	-0.94	**3.6**

Çizelge 3.16 : Sıcaklık etkileri altında boyutsuz çökme, $w/h\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$.

Dağılım Parametresi	Doğrusal Statik Analiz			Doğrusal Olmayan Analiz		
	Bu Çalışma	Reddy, 2003[1]	Fark (%)	Bu Çalışma	Reddy, 2003[1]	Fark (%)
$n=0.0$	0.225	0.22	**2.3**	0.276	0.29	**-4.8**
$n=0.2$	0.175	0.18	**-2.8**	0.198	0.21	**-5.7**
$n=1.0$	0.165	0.17	**-2.9**	0.196	0.22	**-10.9**
$n=2.0$	0.180	0.19	**-5.3**	0.225	0.25	**-10.0**
$n=\infty$	0.517	0.51	**1.4**	0.727	0.78	**-6.8**

[1]: değerler grafik üzerinden sayısallaştırılarak elde edilmiştir.

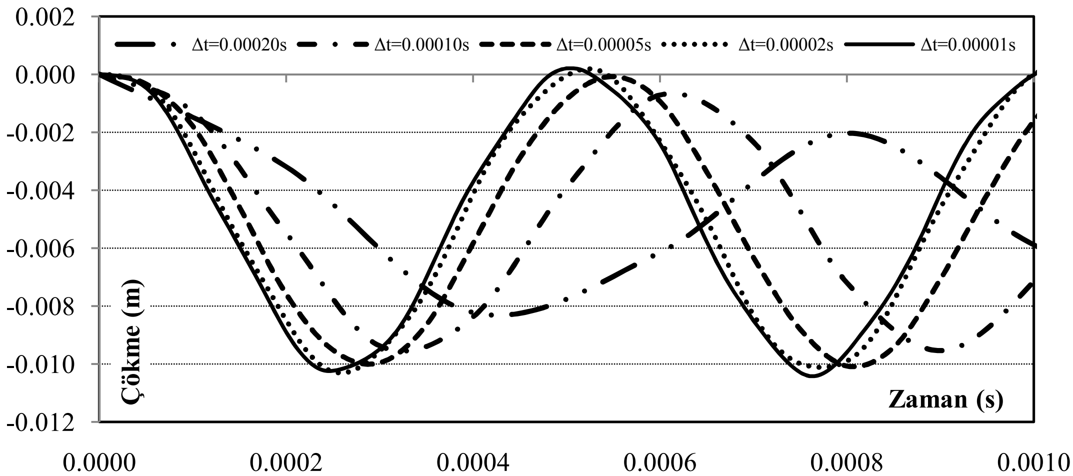
Basınç yükleri altında bu çalışmada elde edilen sonuçlarla Reddy (2003) sonuçları arasında, doğrusal analizlerde %1.0'in altında, doğrusal olmayan analizlerde %3.0 civarında farklılıklar vardır. Sıcaklık etkileri altında ise doğrusal analizlerde maksimum fark %5.0, doğrusal olmayan analizlerde ise %11.0 olarak hesaplanmıştır. Çözümlerin farklı plak kuramları kullanılarak yapıldığı ve Reddy (2003) çalışmasında çeyrek plak çözüldüğü göz önüne alınırsa elde edilen sonuçların tatminkâr olduğu görülmektedir. Reddy (2003)'de yapılan çalışmalara göre doğrusal olmayan etkiler göz önüne alındığında tamamen simetrik plaklarda dahi, tam plak çözümüyle çeyrek plak çözümü arasında farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Ayrıca Reddy (2003) çalışmasında sıcaklık değişimi sürekli olarak hesaplara dahil edilirken, bu çalışmada her bir tabakanın alt ve üst yüzeylerindeki sıcaklık değişimlerinin ortalaması tabakaya düzgün yayılı olarak etkitilmiştir. Tüm bu özellikler dikkate alındığında elde edilen sonuçlar yeterli yakınsaklıktadır.

Sonuçlar incelendiğinde basınç yükleri altında doğrusal olmayan etkilerin çökmeyi azalttığı ancak sıcaklık etkileri altında ise arttırdığı görülmektedir. Ayrıca fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde dağılım parametresi $0.0<n<\infty$ aralığında seçildiğinde, basınç yükleri altında çökmeler $n=0$ (tüm plak seramik bazlı malzeme) ve $n=\infty$ (tüm plak metal bazlı malzeme) parametreli sonuçların arasında yer alırken, sıcaklık etkileri altında sonuçlar bu iki uç durumun da sonuçlarının altında gerçekleşmektedir. Basınç yükleri altında en düşük çökme $n=0$ dağılım parametreli plakta oluşurken, sıcaklık yükleri altında en düşük çökme $n=0.2$ ve $n=1.0$ parametreli plaklarda oluşmuştur.

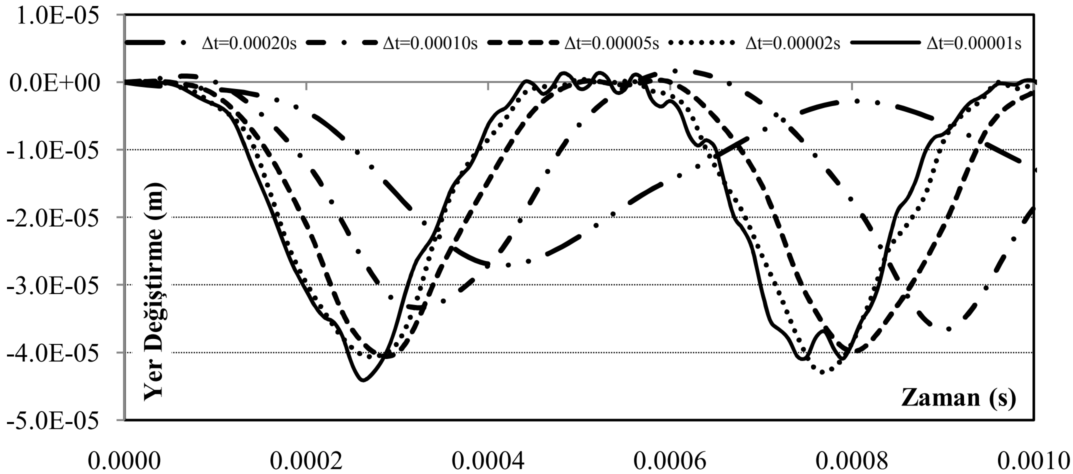
3.5.2 Zaman adımı etkisi

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların dinamik analizine geçmeden önce Bölüm 3.5'de verilen plak, $n=0$ dağılım parametresi kullanılarak beş ayrı zaman adımı ile incelenmiştir.

Dinamik analizler $\Delta t = 1\times10^{-5}, 2\times10^{-5}, 5\times10^{-5}, 10\times10^{-5}, 20\times10^{-5}$ s 'lik zaman adımları kullanılarak sönümsüz olarak gerçekleştirilmiştir. Plak üzerine $q_z = -13125.0$ kN/m^2 'lik düzgün yayılı yük aniden etkitilmiş ve 0.005 s boyunca plak üzerinde sabit olarak tutulmuştur. Elde edilen plak orta nokta çökmesi ve plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirmesi sırasıyla Şekil 3.18 ve Şekil 3.19'da verilmiştir.



Şekil 3.18 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.



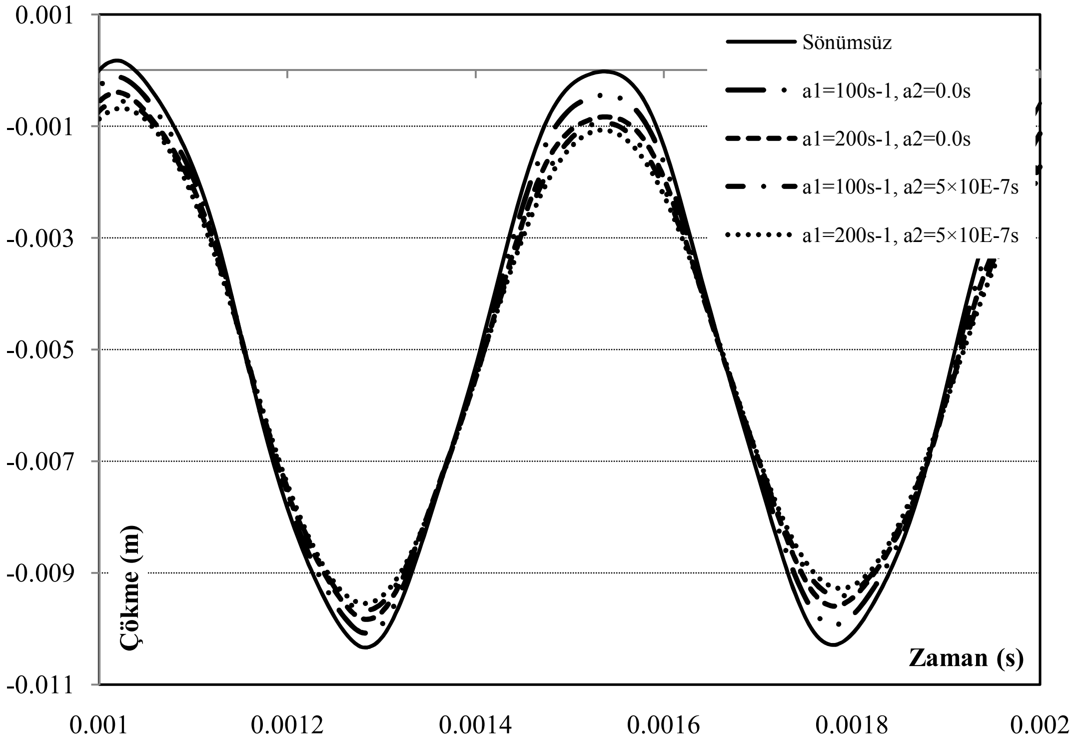
Şekil 3.19 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$.

$\Delta t = 5\times10^{-5}$ s ve daha küçük zaman adımı kullanılarak yapılan analizlerde, plağın dinamik davranışı, maksimum ve minimum tepkileri birbirine yakın şekilde elde edilebilmektedir. Ancak $\Delta t = 5\times10^{-5}$ s ’lik zaman adımı kullanılarak yapılan analizde sistemin frekansında bir miktar kayma mevcuttur. Bunun yanında $\Delta t = 1\times10^{-5}$ s ’lik zaman adımı kullanılan analizde sistemin yüksek frekanslı modlarından gelen katkılar da izlenebilmektedir. Tüm bu özellikler incelendiğinde ve yüksek frekanslı modların katkısının sistemin gösterdiği maksimum tepkileri çok az etkilediği göz önüne alındığında en uygun zaman adımının $\Delta t = 2\times10^{-5}$ s olduğu düşünülmektedir. Bundan sonra yapılan dinamik analizlerin tümü $\Delta t = 2\times10^{-5}$ s ’lik zaman adımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

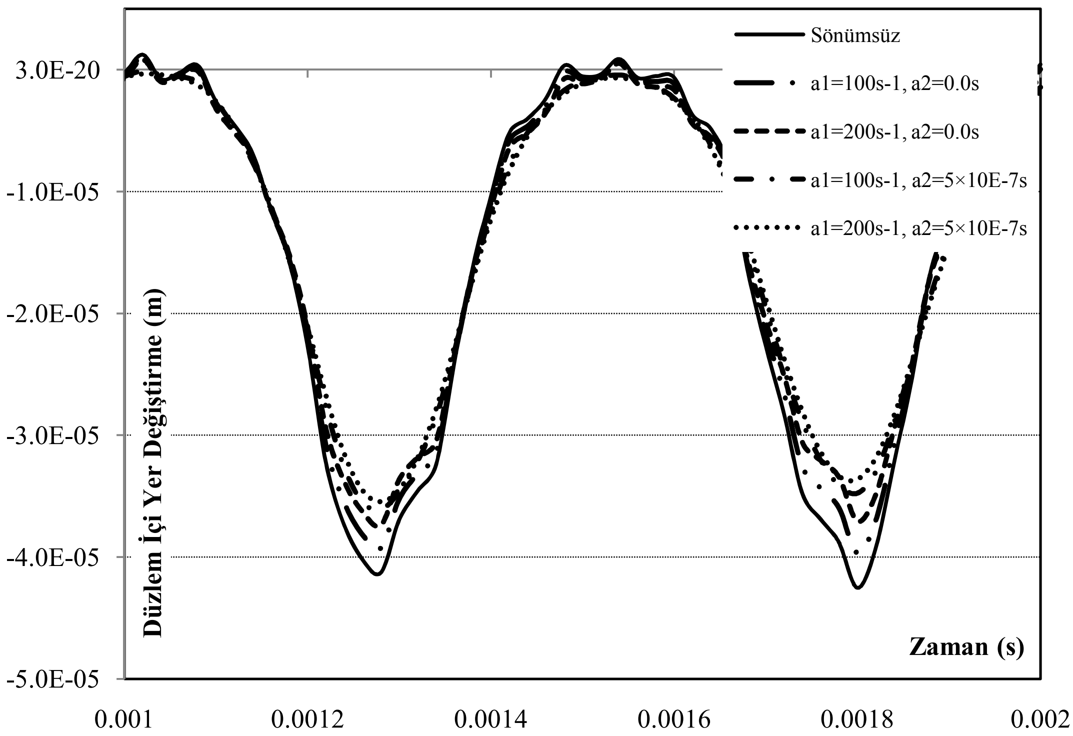
3.5.3 Sönüm etkisi

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilen plakların, sönüm özelliklerine ait herhangi bir bilgi literatürde henüz mevcut değildir. Bu nedenle bu tür malzemelerden üretilen plaklara ait sönüm matrisinin gerçekçi bir şekilde tanımlanması mümkün olmamaktadır. Ancak sönümün, bu tip plakların dinamik davranışına etkisini incelemek için Bölüm 3.5’de tanımlanan plak, iki farklı dağılım parametresi ($n = 0.0, 2.0$) ile ele alınmış ve dört farklı sönüm seviyesi ile çözülmüştür.

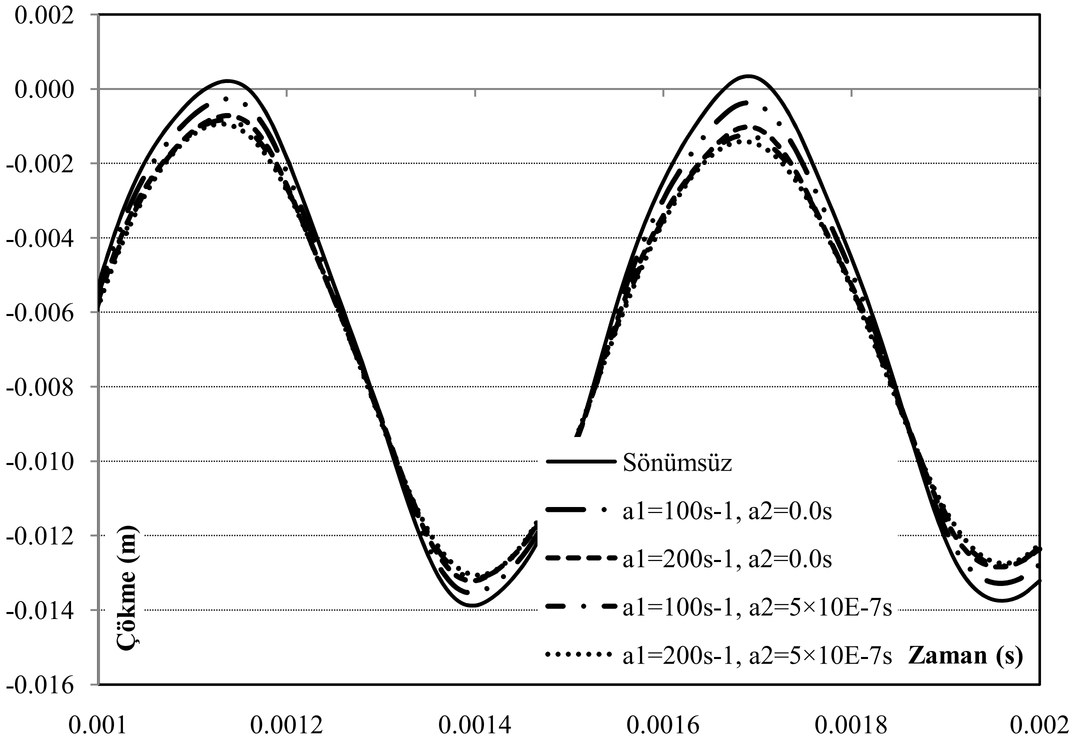
Analizlerde plakların sönüm matrisi Rayleigh sönümü olarak $a_1 = 100\ \text{s}^{-1}, a_2 = 0\ \text{s}$; $a_1 = 200\ \text{s}^{-1}, a_2 = 0\ \text{s}$; $a_1 = 200\ \text{s}^{-1}, a_2 = 5\times10^{-7}\ \text{s}$ ve $a_1 = 200\ \text{s}^{-1}, a_2 = 10\times10^{-7}\ \text{s}$ katsayılarıyla hesaplanmıştır. Plak üzerine $q_z = -13125.0\ \text{kN/m}^2$ ’lik düzgün yayılı yük aniden etkitilmiş ve 0.005s boyunca plak üzerinde sabit olarak tutulmuştur. $n = 0$ dağılım parametreli plağa ait elde edilen plak orta nokta çökmesi ve plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirmesi sırasıyla Şekil 3.20 ve Şekil 3.21’de verilmiştir. Benzer şekilde $n = 2$ parametreli plağın sonuçları Şekil 3.22 ve Şekil 3.23’de verilmiştir.



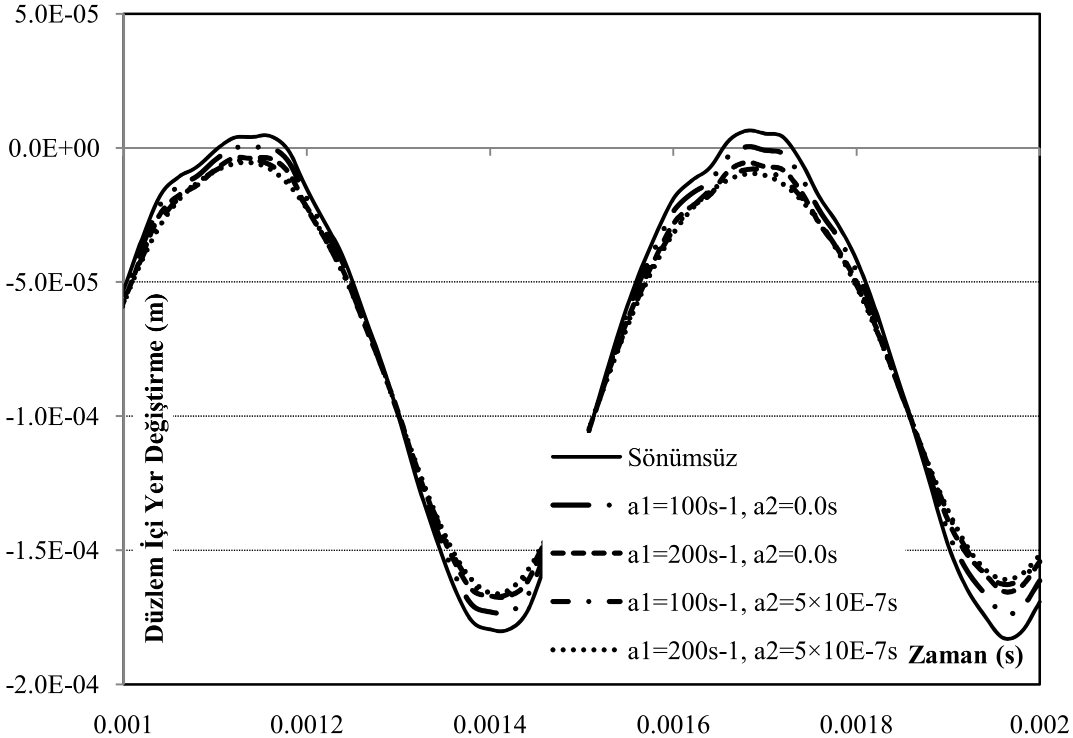
Şekil 3.20 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right),\ n=0$.



Şekil 3.21 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right),\ n=0$.



Şekil 3.22 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$, $n=2$.



Şekil 3.23 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$, $n=2$.

Beklenildiği üzere sönüm arttıkça sistemin verdiği tepkiler azalmaktadır. Ayrıca düzlem içi yer değiştirmelerde görülen yüksek frekanslı modların katkıları da sönümün artmasıyla azalmakta ve yok olmaktadır. Sönümsüz analizlerde, sabit yük altında oluşan tepkilerin maksimum değerlerinde çok küçük oynamalar olmaktadır. Ancak sönüm matrisinin tanımlanması, bu sorunu gidermekte ve Newmark yönteminin kararlılığını iyileştirmektedir. Bundan sonraki dinamik analizler sönümlü olarak gerçekleştirilmiş ve Rayleigh katsayıları $a_1 = 200\ \mathrm{s}^{-1}, a_2 = 5\times10^{-7}\ \mathrm{s}$ olarak seçilmiştir.

3.5.4 İdeal anlık basınç yükleri

Bu bölümde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan plakların farklı ideal anlık basınç yükleri altındaki dinamik davranışları incelenmiştir. Bu amaçla Bölüm 3.5'de tanımlanan plak dört farklı dağılım parametresiyle ($n = 0.0, 0.2, 2.0, \infty$) ele alınmıştır. İncelenen plaklar Bölüm 2.9'da tanımlanan üç ayrı ideal anlık basınç yükü ile çözülmüştür. Analizler bir adet adım yükü, iki adet N-Basınç dalgası ($r = 1, 2$) ve iki adet Friedlander fonksiyonu ($\alpha = 0.5, 3.0$) kullanılarak yapılmıştır. Yükün basınç bölgesindeki maksimum değeri $P_m = -13125.0\ \mathrm{kN/m^2}$ olarak alınmıştır. Ayrıca yükün basınç bölgesindeki etki süresi, $t_p = 0.005\ \mathrm{s}$ olarak tanımlanmıştır.

Analizler; 8×8 ağ, $\Delta t = 0.00002\ \mathrm{s}$'lik zaman adımı ve $a_1 = 200\ \mathrm{s}^{-1}, a_2 = 5\times10^{-7}\ \mathrm{s}$ katsayılı Rayleigh sönümü kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Analizler sonucunda elde edilen plak orta noktası çökmesi, plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirmesi, plak orta noktası membran kuvveti ve eğilme momenti sırasıyla $n = 0.0$ dağılım parametreli plak için Şekil A.1~Şekil A.4'de, $n = 0.2$ parametreli plak için Şekil A.5~Şekil A.8'de, $n = 2.0$ parametreli plak için Şekil A.9~Şekil A.12'de ve $n = \infty$ parametreli plak için Şekil A.13~Şekil A.16'da verilmiştir. Plak orta noktası maksimum çökmesinin ve plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan maksimum düzlem içi yer değiştirmesinin dağılım parametresi ve anlık basınç yüküne göre değişimi ve karşılaştırması, sırasıyla Çizelge 3.17 ve Çizelge 3.18'de verilmiştir.

Çizelge 3.17 : Maksimum çökmenin (m), $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ dağılım parametresi ve anlık basınç yüküne bağlı değişimi.

Dağılım Parametresi		**Adım Yükü**	**N-Basınç** $r=1.0$	**N-Basınç** $r=2.0$	**Friedlander** $\alpha=0.5$	**Friedlander** $\alpha=3.0$
$n=0.0$	Maks.	-0.01020	-0.01000	-0.01000	-0.00992	-0.00951
	Oran[1]	**60.7%**	**59.5%**	**59.5%**	**59.0%**	**56.6%**
$n=0.2$	Maks.	-0.01100	-0.01090	-0.01090	-0.01080	-0.01030
	Oran[1]	**65.5%**	**64.9%**	**64.9%**	**64.3%**	**61.3%**
$n=2.0$	Maks.	-0.01390	-0.01360	-0.01360	-0.01350	-0.01300
	Oran[1]	**82.7%**	**81.0%**	**81.0%**	**80.4%**	**77.4%**
$n=\infty$	Maks.	-0.01680	-0.01650	-0.01650	-0.01640	-0.01570
	Oran[1]	**100.0%**	**98.2%**	**98.2%**	**97.6%**	**93.5%**

Çizelge 3.18 : Maksimum düzlem içi yer değiştirmenin (m), $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ dağılım parametresi ve anlık basınç yüküne bağlı değişimi.

Dağılım Parametresi		**Adım Yükü**	**N-Basınç** $r=1.0$	**N-Basınç** $r=2.0$	**Friedlander** $\alpha=0.5$	**Friedlander** $\alpha=3.0$
$n=0.0$	Maks.	-3.96E-5	-3.800E-5	-3.800E-5	-3.720E-5	-3.360E-5
	Oran[1]	**35.0%**	**33.6%**	**33.6%**	**32.9%**	**29.7%**
$n=0.2$	Maks.	-7.24E-5	-7.010E-5	-7.010E-5	-6.890E-5	-6.400E-5
	Oran[1]	**64.1%**	**62.0%**	**62.0%**	**61.0%**	**56.6%**
$n=2.0$	Maks.	-1.79E-4	-1.740E-4	-1.740E-4	-1.720E-4	-1.620E-4
	Oran[1]	**158.4%**	**154.0%**	**154.0%**	**152.2%**	**143.4%**
$n=\infty$	Maks.	-1.13E-4	-1.090E-4	-1.090E-4	-1.070E-4	-9.770E-5
	Oran[1]	**100.0%**	**96.5%**	**96.5%**	**94.7%**	**86.5%**

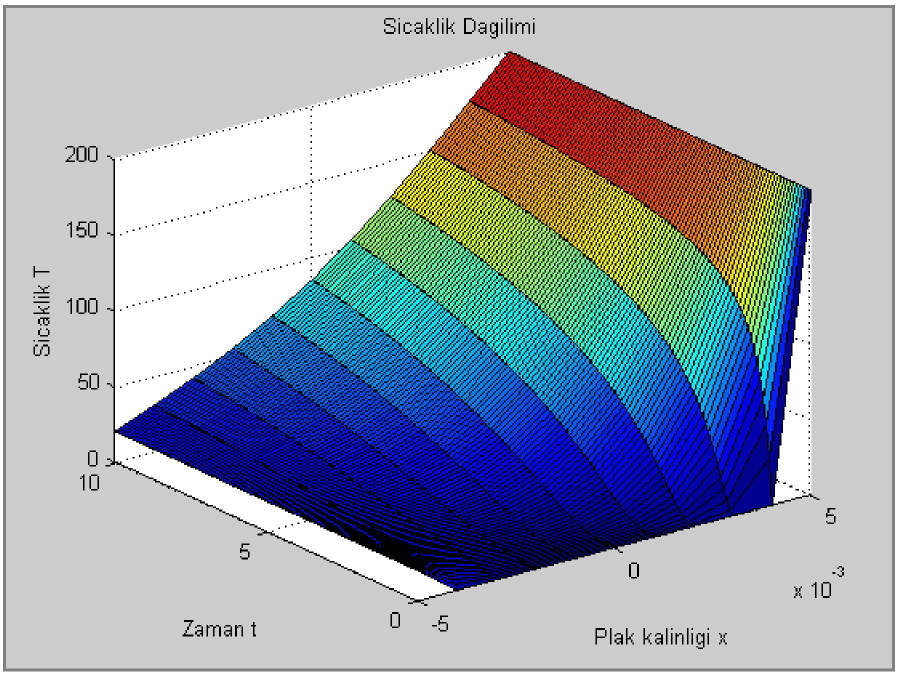
[1]: $n=\infty$ parametreli plağın adım yükü altında verdiği maksimum tepkiye göre hesaplanmıştır.

Tüm plaklar en büyük tepkiyi adım yükü altında, en küçük tepkiyi ise $\alpha=3.0$ katsayılı Friedlander yükü altında göstermiştir. Her bir ideal anlık basınç yükü altında maksimum çökme $n=\infty$ dağılım parametreli plakta oluşurken, plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan en büyük düzlem içi yer değiştirme $n=2.0$ dağılım parametreli plakta oluşmuştur. İncelenen tüm basınç yükleri göz önüne alındığında, plaklarda oluşan maksimum çökmeler adım yükü altında $n=\infty$ parametreli plakta oluşan çökmelerin %57'siyle %98'i arasında değişmektedir. Benzer şekilde düzlem içi yer değiştirmeler ise %30 ile %158 arasında değişmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilen plaklarda, plak davranışı dağılım parametresine bağlı olduğundan, ilgili plağa etkiyecek yükler önceden göz önüne alınarak en uygun dağılım parametresiyle imal edilmelidir.

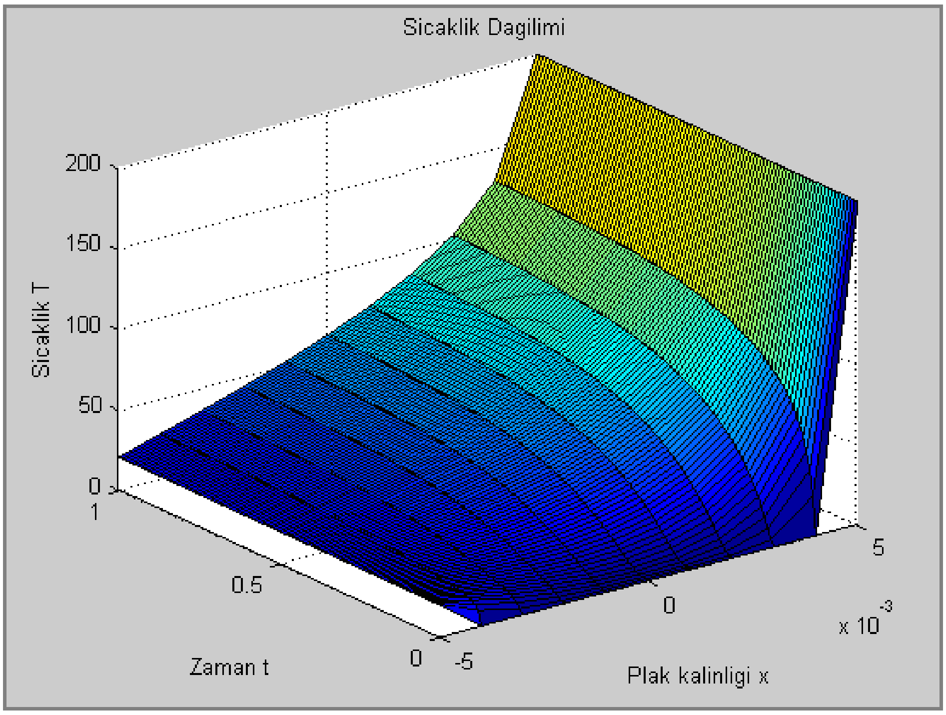
3.5.5 Sıcaklık etkileri

Bu bölümde FGM plakların sıcaklık etkileri altındaki davranışı incelenmiştir. Bu amaçla Bölüm 3.5'de tariflenen plak, üç ayrı dağılım parametresi $n = 0.0, 2.0, \infty$ ile ele alınmıştır. Bu plaklara seramik bazlı yüzeylerinden $\Delta T = 200\ ^{\circ}\mathrm{C}$, metal bazlı yüzeylerinden ise $\Delta T = 20\ ^{\circ}\mathrm{C}$'lik sıcaklık artışı uygulanmış ve bu sıcaklık artışının kalınlık boyunca dağılımı **(2.156)** ifadesiyle çözülmüştür. Alüminyumun özgül ısısı, $c = 910\ \mathrm{J/kgK}$, zirconanın özgül ısısı ise $c = 400\ \mathrm{J/kgK}$ olarak alınmıştır. Sıcaklık artışının, plak kalınlığı boyunca zamana bağlı dağılımı, $n = 0.0, 2.0, \infty$ parametreli plaklar için sırasıyla Şekil 3.24, Şekil 3.25 ve Şekil 3.26'da verilmiştir.

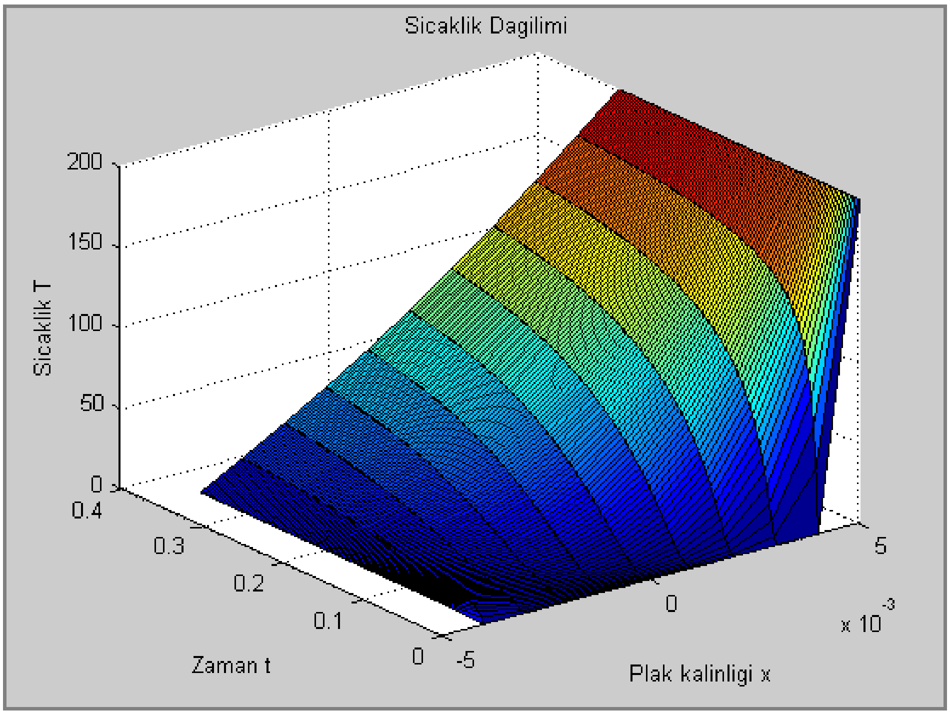
Tamamen seramik bazlı malzemeden oluşan, $n = 0.0$ parametreli plakta sıcaklık değişiminin tüm plak kalınlığı boyunca yayılması yaklaşık 10s kadar sürerken, tamamen metal bazlı malzemeden oluşan, $n = \infty$ parametreli plakta bu süreç yaklaşık 0.3s sürmektedir. Benzer şekilde $n = 2.0$ parametreli plakta sıcaklık dağılımı yaklaşık 1.0s'de tamamlanmaktadır. Sıcaklığın plak kalınlığı boyunca dağılımının bu sürelerde gerçekleşmesi, basınç bölgesindeki etki süresi, 0.005s olan basınç yükleriyle birlikte ele alınması durumunda iki yük tipi arasındaki faz farkını önemli bir parametre haline getirmektedir. Basınç yükleriyle birlikte etkiyen sıcaklık yüklerinin analizinde, bu etkilerin kaynağından plağa ulaşmasına kadar geçen sürelerin de dikkate alınması daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlayacaktır.



Şekil 3.24 : Sıcaklık artışının plak kalınlığı boyunca zamana bağlı dağılımı $n = 0$.



Şekil 3.25 : Sıcaklık artışının plak kalınlığı boyunca zamana bağlı dağılımı $n = 2$.



Şekil 3.26 : Sıcaklık artışının plak kalınlığı boyunca zamana bağlı dağılımı $n = \infty$.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan plaklarda sıcaklık etkilerin dinamik davranışa katkısını araştırmak için Bölüm 3.5'de tanımlanan $n = 2.0$ dağılım parametreli plak altı ayrı yükleme altında analiz edilmiştir.

Basınç Yükleri Altında Statik Analiz:

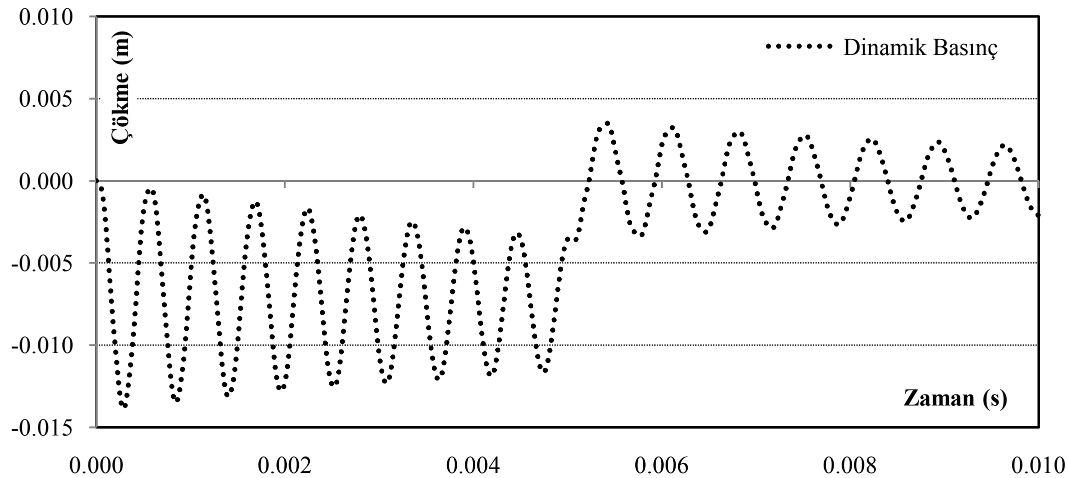
Bu analizde plak $q_z = -13125.0\,\text{kN/m}^2$'lik düzgün yayılı yük altında statik olarak çözülmüştür. Analiz sonucunda plak orta noktası çökmesi $w = -0.00785\,\text{m}$ olarak hesaplanmıştır.

Sıcaklık Etkileri Altında Statik Analiz:

Bu analizde plak seramik bazlı yüzeyinden $\Delta T = 200\ ^{\circ}\text{C}$, metal bazlı yüzeyinden ise $\Delta T = 20\ ^{\circ}\text{C}$'lik sıcaklık artışına maruz bırakılmıştır. Ayrıca sıcaklık değişiminin plak kalınlığı boyunca değişimi Şekil 3.25'de elde edilen dengeye ulaşmış hal olarak tanımlanmıştır. Analiz sonucunda plak orta noktası çökmesi $w = 0.0005667\,\text{m}$ olarak hesaplanmıştır.

Basınç Yükleri Altında Dinamik Analiz:

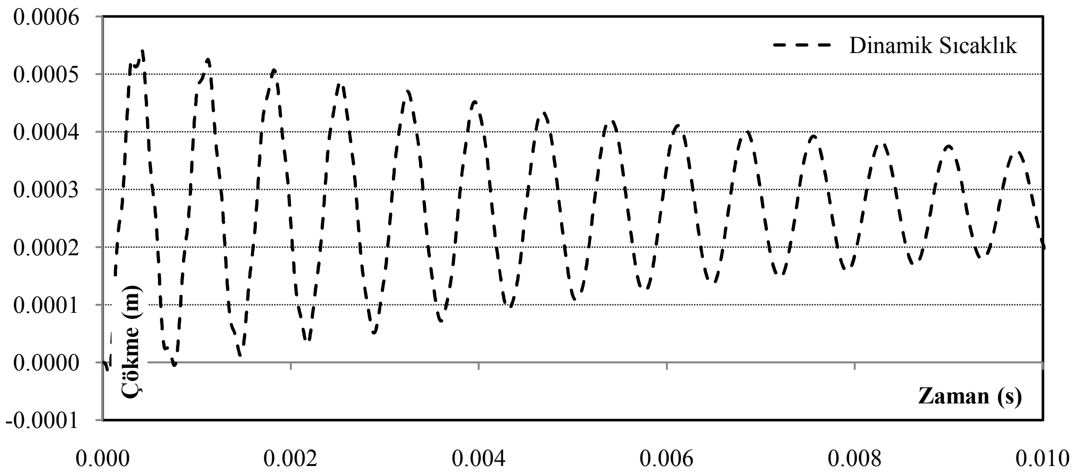
Bu analizde plağa $q_z = -13125.0\,\text{kN/m}^2$'lik düzgün yayılı yük adım fonksiyonu ile etkitilmiştir. Yük plağa aniden etkitilmiş, $t_p = 0.005\,\text{s}$ boyunca plağa etkidikten sonra aniden kaldırılmıştır. Analizler $\Delta t = 0.00002\,\text{s}$'lik zaman adımlarıyla ve $a_1 = 200\,\text{s}^{-1}$, $a_2 = 5\times10^{-7}\,\text{s}$ katsayılı Rayleigh sönümüyle gerçekleştirilmiştir. Analiz sonucunda plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değeri $w = -0.01386\,\text{m}$ olarak hesaplanmıştır. Plak orta noktası çökmesinin zaman bağlı değişimi Şekil 3.27'de verilmiştir.



Şekil 3.27 : Çökme, $w\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$, basınç yükleri altında dinamik analiz.

Sıcaklık Yükleri Altında Dinamik Analiz:

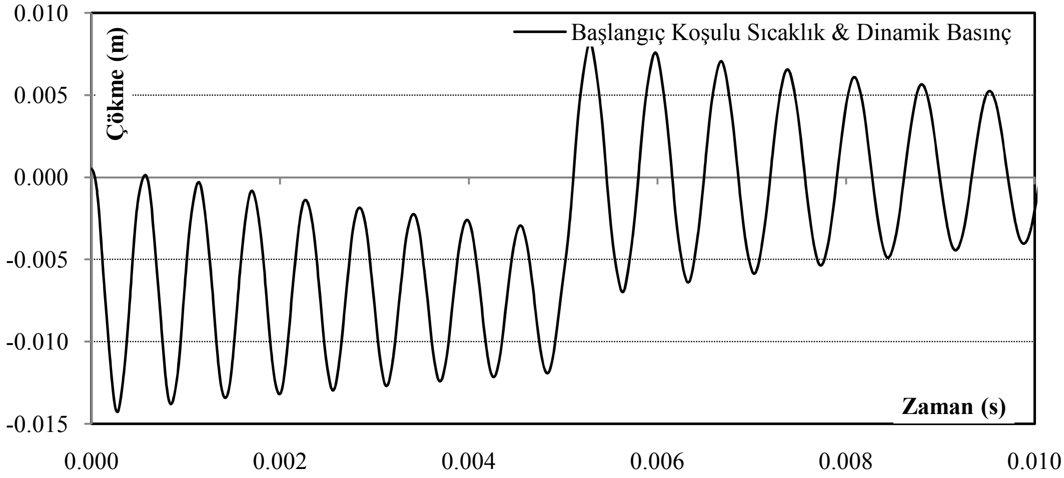
Bu analizde plak seramik bazlı yüzeyinden $\Delta T = 200\ ^{o}\mathrm{C}$, metal bazlı yüzeyinden ise $\Delta T = 20\ ^{o}\mathrm{C}$'lik sıcaklık artışına maruz bırakılmıştır. Sıcaklık değişiminin plak kalınlığı boyunca dağılımı Şekil 3.25'de verilen zamana bağlı sıcaklık değerleri kullanılarak tanımlanmıştır. Analizler $\Delta t = 0.00002\ \mathrm{s}$'lik zaman adımlarıyla ve $a_1 = 200\ \mathrm{s}^{-1}$, $a_2 = 5\times10^{-7}\ \mathrm{s}$ katsayılı Rayleigh sönümüyle gerçekleştirilmiştir. $n = 2.0$ dağılım parametreli plakta sıcaklık değişiminin tüm plak kalınlı boyunca yayılması yaklaşık 1s sürmektedir. Ancak dinamik analizde zaman adımının çok küçük olması nedeniyle bu sürecin sadece ilk 0.08s'lik kısmı incelenmiştir. Analiz sonucunda plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değeri $w = 0.00054\ \mathrm{m}$ olarak hesaplanmıştır. Ayrıca $t = 0.08\ \mathrm{s}$'de plak orta noktasında oluşan çökme $w = 0.00038\ \mathrm{m}$'dir ve sıcaklık dağılımı devam ettikçe artmaktadır. Plak orta noktası çökmesinin zaman bağlı değişimi Şekil 3.28'de verilmiştir.



Şekil 3.28 : Çökme, $w\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$, sıcaklık etkileri altında dinamik analiz.

Sıcaklık Etkileri Başlangıç Koşulu, Basınç Yükleri Altında Dinamik Analiz:

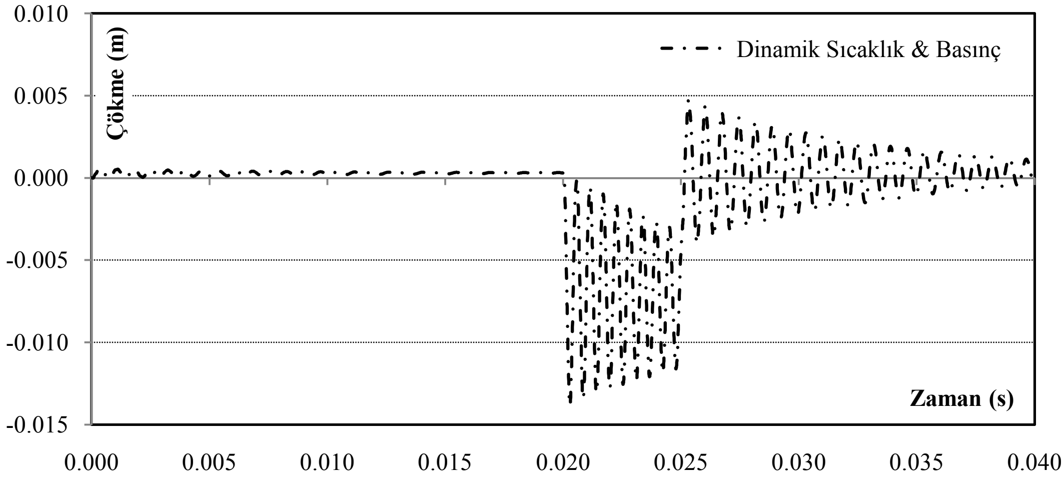
Bu analizde plak basınç yükleri altında dinamik olarak incelenmiştir. Ancak dinamik analizin başlangıç koşulu olarak, sıcaklık etkileri altında statik analiz sonucu elde edilen değerler kullanılmıştır. Ayrıca dinamik analiz boyunca sıcaklık etkileri plak üzerinden kaldırılmamıştır. Analizler $\Delta t = 0.00002\ \mathrm{s}$'lik zaman adımlarıyla ve $a_1 = 200\ \mathrm{s}^{-1}$, $a_2 = 5\times10^{-7}\ \mathrm{s}$ katsayılı Rayleigh sönümüyle gerçekleştirilmiştir. Plak orta noktasında oluşan maksimum çökme $w = -0.01426\ \mathrm{m}$ olarak hesaplanmıştır. Plak orta noktası çökmesinin zamana bağlı değişimi Şekil 3.29'da verilmiştir.



Şekil 3.29 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$, sıcaklık etkileri başlangıç koşulu, basınç yükleri altında dinamik analiz.

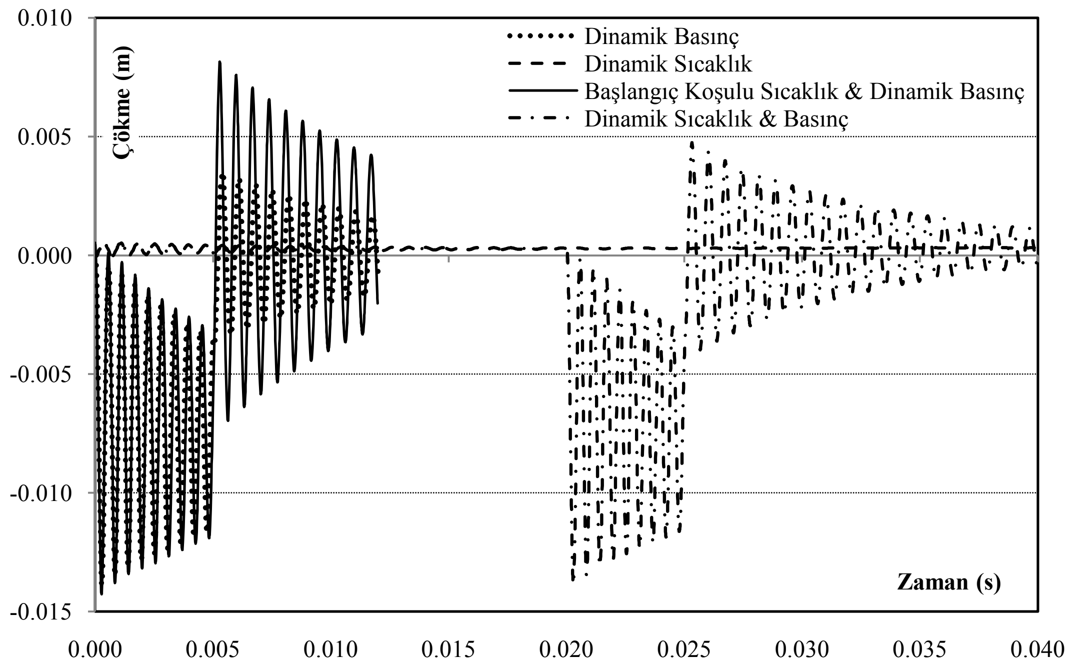
Sıcaklık Etkileri ve Basınç Yükleri Altında Dinamik Analiz:

Bu analizde plak basınç yükleri ve sıcaklık etkileri altında dinamik olarak incelenmiştir. Şekil 3.25‘de verilen sıcaklık dağılımının zamana bağlı değişiminin ilk 0.04s’lik kısmı plağa dinamik olarak etkitilmiştir. Bunun yanında plağa $t = 0.02\ \text{s}$’de $q_z = -13125.0\ \text{kN/m}^2$’lik düzgün yayılı basınç yükü aniden etkitilmiş ve $t_p = 0.005\ \text{s}$ boyunca plak üzerinde tutulmuştur. Analizler $\Delta t = 0.00002\ \text{s}$’lik zaman adımlarıyla ve $a_1 = 200\ \text{s}^{-1}, a_2 = 5\times 10^{-7}\ \text{s}$ katsayılı Rayleigh sönümüyle gerçekleştirilmiştir. Analiz sonucunda plak orta noktasında oluşan maksimum çökme değeri $w = -0.01385\ \text{m}$ olarak hesaplanmıştır. Plak orta noktası çökmesinin zaman bağlı değişimi Şekil 3.30‘da verilmiştir.



Şekil 3.30 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$, sıcaklık etkileri ve basınç yükleri altında dinamik analiz.

Tüm bu analizler sonucunda elde edilen plak orta nokta çökmeleri Şekil 3.31‘de verilmiş ve karşılaştırılmıştır. $n = 2.0$ dağılım parametreli plakta sıcaklık değişiminin plak kalınlığı boyunca dağılımını tamamlaması 1s civarında sürmektedir. Bunun yanında plağın frekansı çok yüksek olduğu için, sıcaklık değişiminin dinamik etkileri nispeten çok kısa sürede sönümlemektedir (Bakınız Şekil 3.31, dinamik sıcaklık etkileri). Bu yüzden sıcaklık etkilerinin basınç yükleri altında yapılacak dinamik analizde başlangıç koşulu olarak kullanılması yeterli yakınsaklıkta sonuçların elde edilmesi sağlamaktadır. Ancak frekansı daha düşük plaklarda, sıcaklık değişiminin etkilerinin yeterli sürede sönümlenemediği durumlarda, sıcaklık etkilerinin ve basınç yüklerinin aralarındaki faz farkı da dikkate alınarak dinamik olarak incelenmesi daha gerçekçi sonuçlar alınmasını sağlayacaktır.



Şekil 3.31 : Çökme, $w\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, z = 0\right)$.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Anlık basınç yükü etkisindeki tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel olarak derecelendirilmiş plakların dinamik davranışları, karışık sonlu elemanlar metoduyla geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler, sıcaklık ve sönüm etkileri de dikkate alınarak incelenmiştir. Bu amaçla öncelikle bir karışık sonlu elemanlar yazılımı geliştirilmiş ve analizler bu yazılımla gerçekleştirilmiştir. Dinamik analizlerde sistem matrisi üzerinde indirgeme (kondensasyon) yapılmamış, iç kuvvetlerin ve momentlerin de zamana göre türevleri hesaplara katılmıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik davranışı, yazarın bilgisi dahilinde ilk defa bu çalışmada karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir.

4.1 Analiz Sonuçları

Bu çalışma kapsamında elde edilen analiz sonuçları incelenen plaklar için yapılan kabuller altında geçerli olup farklı geometri ve malzeme özelliklerine sahip plaklara genelleştirilmesi için ilave analizler yapılması gerekir.

4.1.1 Doğrulama çalışmaları

Statik problemler, ankastre mesnetli plak: 12×12'lik ağ kullanıldığında geliştirilen karışık SE sonuçları ile Levy (1942) çalışması arasındaki fark en çok %2.3 olarak bulunmuştur. Ayrıca doğrusal olmayan etkiler arttıkça bu fark azalmakta ve %0.03'e kadar düşmektedir.

Statik problemler, basit mesnetli plak: Karışık SE yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ile Reddy (2004) çalışması sonuçları arasındaki fark çökme için %3.1 ile %1.3 arasında, gerilme için %3.7 ile %1.0 arasında değişmektedir. Doğrusal olmayan etkiler arttıkça sonuçlar arasındaki farkın azaldığı görülmektedir.

Statik problem, basit mesnetli tabakalı plak: Reddy (2003) sonuçları grafikten sayısallaştırılmış değerlerdir. Geliştirilen karışık SE ile elde edilen sonuçların yeterli hassasiyette olduğu düşünülmektedir.

Dinamik problem: Sönümsüz analiz sonuçları incelendiğinde, her ne kadar plakların frekanslarında çok küçük bir farklılık olsa da, geliştirilen karışık SE sonuçlarının ANSYS sonuçlarıyla son derece uyumlu olduğu görülebilmektedir. Ayrıca sönümlü analizlerde de her iki analizin sonuçları birbirine çok yakındır. ANSYS sonuçlarının, karışık SE sonuçlarına göre daha fazla sönümleniyor olması ANSYS programının sönüm matrisinin hesaplanmasında rijitlik matrisin doğrusal olmayan terimlerini de kullanılıyor olmasındandır.

4.1.2 Parametrik çalışmalar

Tabakalı kompozit plak, ağ sıklığı: Ağ sıklığına ait yapılan parametrik çalışma neticesinde 4x4'lük ağdan sonraki değerlerin birbirine yeteri kadar yakın olduğu görülmüştür. Bu nedenle diğer analizlerde 8×8'lik ağ kullanılmıştır.

Tabakalı kompozit plak, zaman adım aralığı: Farklı zaman adım aralıkları kullanılarak yapılan analizlerde, oluşan maksimum çökme değerlerinde büyük farklılıklar oluşmasa da, $\Delta t = 0.0005\,\mathrm{s}$ zaman adımıyla yapılan analizlerde plağın titreşim frekansında değişiklikler olmaktadır. von Kármán plak kuramında, çökmelerin artması plağın rijitliğini arttırmakta ve titreşim periyodunun azalmasına neden olmaktadır, bu nedenle devam eden analizlerde zaman adım aralığının $\Delta t = 0.0001\,\mathrm{s}$ olarak kullanılması uygun görülmüştür.

4.1.3 Anlık basınç yükü etkisindeki uygulamalar

Tabakalı kompozit plak, ideal anlık basınç yükü: Tüm analizlerde en büyük tepkiler (plak orta noktası çökmesi, plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan düzlem içi yer değiştirme ve plak orta noktası alt yüzeyinde oluşan şekil değiştirme) adım yükü altında gerçekleşmiştir. Benzer şekilde en küçük tepkiler ise $\alpha = 3.0$ katsayılı Friedlander yükü altında oluşmuştur. $P_m = 5\,\mathrm{kPa}$'lık maksimum basınç yükü altında, farklı anlık basınç yükleri altında plak orta noktasında oluşan çökmeler, adım yükü altında oluşan çökmenin %59'una kadar azalırken bu azalma $P_m = 10\,\mathrm{kPa}$'lık maksimum basınç yükü dikkate alındığında %72 olmaktadır. İncelenen plakta, farklı anlık basınç yükleri altında oluşan tepkiler arasındaki fark, yükün şiddeti arttıkça oransal olarak azalmaktadır. İncelenen tüm ideal basınç yükleri altında maksimum çökmeler, yükün basınç bölgesinde oluşurken, $r = 2.0$ katsayılı N-Basınç yükü altında maksimum çökme yükün emme bölgesinde oluşmuştur.

Tabakalı kompozit plak, ideal olmayan anlık basınç yükü: Karışık SE yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar ANSYS sonuçlarına son derece yakındır. Hatta zorlanmış titreşim bölgesinde ($t \leq 0.005$ s) sonuçlar tamamen üst üste düşmektedir. Karışık sonlu elemanlar ile yapılan analizlerde, ANSYS analizlerinde kullanılan bilinmeyen sayısının %55'i kadar bilinmeyen kullanılmasına rağmen, sonuçlar hem deney sonuçları ile hem de ANSYS sonuçları ile beklenenin üzerinde uyumludur.

4.1.4 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli uygulamalar

FGM plak, doğrulama: Basınç yükleri altında bu çalışmada elde edilen sonuçlarla Reddy (2003) sonuçları arasında, doğrusal analizlerde %1.0'in altında, doğrusal olmayan analizlerde %3.0 civarında farklılıklar vardır. Sıcaklık etkileri altında ise doğrusal analizlerde maksimum fark %5.0, doğrusal olmayan analizlerde ise %11.0 olarak hesaplanmıştır. Çözümlerin farklı plak kuramları kullanılarak yapıldığı ve Reddy (2003) çalışmasında çeyrek plak çözüldüğü göz önüne alınırsa elde edilen sonuçların yeterli hassasiyeti sağladığı görülmektedir. Reddy (2003)'de yapılan çalışmalara göre doğrusal olmayan etkiler göz önüne alındığında tamamen simetrik plaklarda dahi, tam plak çözümüyle çeyrek plak çözümü arasında farklılıklar ortaya çıkmaktadır. Ayrıca Reddy (2003) çalışmasında sıcaklık değişimi sürekli olarak hesaplara dahil edilirken, bu çalışmada her bir tabakanın alt ve üst yüzeylerindeki sıcaklık değişimlerinin ortalaması tabakaya düzgün yayılı olarak etkitilmiştir. Tüm bu özellikler dikkate alındığında elde edilen sonuçlar yeterli yakınsaklıktadır.

FGM plak, statik problemler: Doğrusal olmayan etkilerin basınç yükleri altında çökmeyi azalttığı ancak sıcaklık etkileri altında arttırdığı görülmektedir. Ayrıca fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde dağılım parametresi $0.0 < n < \infty$ aralığında seçildiğinde, basınç yükleri altında çökmeler $n = 0$ (tüm plak seramik bazlı malzeme) ve $n = \infty$ (tüm plak metal bazlı malzeme) parametreli sonuçların arasında yer alırken, sıcaklık etkileri altında sonuçlar bu iki uç durumun da sonuçlarının altında gerçekleşmektedir. Basınç yükleri altında en düşük çökme $n = 0$ dağılım parametreli plakta oluşurken, sıcaklık yükleri altında en düşük çökme $n = 0.2$ ve $n = 1.0$ parametreli plaklarda oluşmuştur.

FGM plak, zaman adım aralığı: $\Delta t = 5\times10^{-5}$ s ve daha küçük zaman adımı kullanılarak yapılan analizlerde, plağın dinamik davranışı, maksimum ve minimum tepkileri birbirine yakın şekilde elde edilebilmektedir. Ancak $\Delta t = 5\times10^{-5}$ s 'lik zaman adımı kullanılarak yapılan analizde sistemin frekansında bir miktar kayma mevcuttur. Bunun yanında $\Delta t = 1\times10^{-5}$ s 'lik zaman adımı kullanılan analizde sistemin yüksek frekanslı modlarından gelen katkılar da izlenebilmektedir. Tüm bu özellikler incelendiğinde ve yüksek frekanslı modların katkısının sistemin gösterdiği maksimum tepkileri çok az etkilediği göz önüne alındığında en uygun zaman adımının $\Delta t = 2\times10^{-5}$ s olduğu düşünülmektedir.

FGM plak, sönüm etkisi: Beklenildiği üzere sönüm arttıkça sistemin verdiği tepkiler azalmaktadır. Ayrıca düzlem içi yer değiştirme tepkilerinde görülen yüksek frekanslı modların katkıları da sönümün artmasıyla azalmakta ve yok olmaktadır. Sönümsüz analizlerde sabit yük altında oluşan tepkilerin maksimum değerlerinde çok küçük oynamalar olabilmektedir. Ancak sönüm matrisinin tanımlanması, bu sorunu gidermekte ve Newmark yönteminin kararlılığını iyileştirmektedir.

FGM plak, ideal anlık basınç yükü: Tüm plaklar en büyük tepkiyi adım yükü altında, en küçük tepkiyi ise $\alpha = 3.0$ katsayılı Friedlander yükü altında göstermiştir. Her bir ideal anlık basınç yükü altında maksimum çökme $n = \infty$ dağılım parametreli plakta oluşurken, plak simetri ekseninin dörtte birinde oluşan en büyük düzlem içi yer değiştirme $n = 2.0$ dağılım parametreli plakta oluşmuştur. İncelenen tüm basınç yükleri göz önüne alındığında, plaklarda oluşan maksimum çökmeler adım yükü altında $n = \infty$ parametreli plakta oluşan çökmelerin %57'siyle %98'i arasında değişmektedir. Benzer şekilde düzlem içi yer değiştirmeler ise %30 ile %158 arasında değişmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden üretilen plaklarda, plak davranışı dağılım parametresine bağlı olduğundan, ilgili plağa etkiyecek yükler önceden göz önüne alınarak en uygun dağılım parametresiyle imal edilmelidir.

FGM plak, sıcaklık dağılımı: Tamamen seramik bazlı malzemeden oluşan, $n = 0.0$ dağılım parametreli plakta sıcaklık değişiminin tüm plak kalınlığı boyunca yayılması yaklaşık 10s kadar sürerken, tamamen metal bazlı malzemeden oluşan, $n = \infty$ dağılım parametreli plakta bu süreç yaklaşık 0.3s sürmektedir. Benzer şekilde $n = 2.0$ dağılım parametreli plakta sıcaklık dağılımı yaklaşık 1s'de tamamlanmaktadır. Sıcaklığın plak kalınlığı boyunca dağılımının bu sürelerde gerçekleşmesi, basınç bölgesindeki etki süresi, $t_p = 0.005\,\mathrm{s}$ olan basınç yükleriyle birlikte ele alınması durumunda iki yük tipi arasındaki faz farkını önemli bir parametre haline getirmektedir. Basınç yükleriyle birlikte etkiyen sıcaklık yüklerinin analizinde, bu etkilerin kaynağından plağa ulaşmasına kadar geçen sürelerin de dikkate alınması daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlayacaktır.

FGM plak, sıcaklık etkileri: $n = 2.0$ dağılım parametreli plakta sıcaklık değişiminin plak kalınlığı boyunca dağılımını tamamlaması 1s civarında sürmektedir. Bunun yanında plağın frekansı çok yüksek olduğu için, sıcaklık değişiminin dinamik etkileri nispeten çok kısa sürede sönümlemektedir. Bu yüzden sıcaklık etkilerinin basınç yükleri altında yapılacak dinamik analizde başlangıç koşulu olarak kullanılması yeterli yakınsaklıkta sonuçların elde edilmesi sağlamaktadır. Ancak frekansı daha düşük plaklarda, sıcaklık değişiminin etkilerinin yeterli sürede sönümlenemediği durumlarda, sıcaklık etkilerinin ve basınç yüklerinin aralarındaki faz farkı da dikkate alınarak dinamik olarak incelenmesi daha gerçekçi sonuçlar alınmasını sağlayacaktır.

4.2 Genel Değerlendirmeler

Özellikle uzay, savunma ve nükleer enerji sanayi için önemli bir problem olan tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların doğrusal olmayan dinamik davranışları farklı plak geometrileri, sınır koşulları, sönüm parametreleri, anlık basınç yükü tipleri, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılım parametreleri ve sıcaklık etkileri göz önüne alınarak incelenmiştir.

Bu amaçla geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımında, dinamik analizlerde sistem matrisi üzerinde indirgeme (kondensasyon) yapılmamış, iç kuvvetlerin ve momentlerin de zamana göre türevleri hesaplara katılmıştır. Tabakalı kompozit plakların dinamik davranışı, yazarın bilgisi dahilinde ilk defa bu çalışmada karışık sonlu elemanlar metodu ile incelenmiştir. Çalışma bu özelliği ile literatürde bir ilk olup, dinamik analizlerde karışık sonlu elemanlar metodunun kullanılması konusunda yapılabilecek birçok araştırmanın önünü açmıştır.

Geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımı, tek tabakalı, tabakalı ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plaklar kullanılarak statik, dinamik ve sıcaklık etkileri altında literatürde bulunan problemlerle ve ANSYS ticari yazılımıyla doğrulanmıştır. Elde edilen sonuçlar ışığında geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımıyla yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir. Bunun da ötesinde ANSYS yazılımıyla yapılan karşılaştırmalarda, ANSYS'de kullanılan bilinmeyen sayısının %55'i kadar bilinmeyen kullanılmasına rağmen, elde edilen sonuçlar ANSYS sonuçları ile beklenenin üzerinde uyumlu olmuştur.

Geometrik olarak doğrusal olmayan etkilerin, basınç yükleri altında plak orta noktasında oluşan çökmeyi ciddi miktarda azalttığı ancak sıcaklık etkileri altında arttırdığı görülmüştür. Bu nedenle anlık basınç yükü altındaki problemlerde doğrusal olmayan etkilerin ve termo-mekanik etkileşiminin göz önüne alınması gerekir.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde dağılım parametresi $0.0 < n < \infty$ aralığında seçildiğinde, basınç yükleri altında çökmeler $n = 0$ (tüm plak seramik bazlı malzeme) ve $n = \infty$ (tüm plak metal bazlı malzeme) parametreli sonuçların arasında yer alırken, sıcaklık etkileri altında sonuçlar bu iki uç durumun sonuçlarının altında gerçekleşmektedir. Basınç yükleri altında en düşük çökme $n = 0$ dağılım parametreli plakta oluşurken, sıcaklık yükleri altında en düşük çökme $n = 0.2$ ve $n = 1.0$ parametreli plaklarda oluşmuştur. Bu nedenle anlık basınç yüklerine maruz kalacak fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların tasarımında, en uygun dağılım parametresi, termo-mekanik etkileşimin göz önüne alındığı çözümlerle belirlenebilir.

Anlık basınç yüklerinin etkisindeki fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların termo-mekanik etkileşiminin de göz önüne alındığı analizlerinde, sıcaklık etkilerinin plak kalınlığı boyunca dağılımının ve sıcaklık etkileriyle basınç yükleri arasındaki faz farkının dikkate alınması daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesini sağlayacaktır.

Geliştirilen karışık sonlu elemanlar yazılımıyla, tabakalı kompozit plakların ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli plakların doğrusal olmayan dinamik davranışları, sönüm etkileri ve sıcaklık etkileri de göz önüne alınarak gerçekçi bir biçimde belirlenebilir. Bu nedenle bu tip plakların tasarımında ve en uygun dağılım parametresinin belirlenmesinde kullanılabilir.

4.3 Gelecek Çalışmalara Yönelik Öneriler

Yapılan çalışmalarda plak kuramı Kirchhoff varsayımları altında ele alınmıştır. Kayma etkilerinin daha gerçekçi bir şekilde ele alınması ve kalın plaklara ait problemlerin incelenebilmesi için, karışık sonlu eleman formülasyonunun Mindlin, Reissner veya yüksek mertebeden kayma kuramlarından birine göre yeniden düzenlenmesi gerekir. Geometrik olarak doğrusal olmayan etkiler, von Kármán plak kuramı çerçevesinde ele alınmıştır. Plak yer değiştirmelerinin, kalınlığın iki katından daha büyük olduğu problemlerin çözülebilmesi için, büyük yer değiştirmelerin etkisini göz önüne alan bir formülasyon hasar mekaniği ile de desteklenerek ele alınmalıdır. Anlık basınç yükü altındaki dinamik analizlerde, malzemenin elastik ve Hooke kanuna bağlı olduğu kabul edilmiştir. Yükleme hızının malzeme özelliklerine etkisinin de göz önüne alınmasında fayda vardır. Dinamik analizlerde sönüm matrisi, yer değiştirme tipi sonlu elemanlar metodunda kullanılan Rayleigh tipi sönümün karışık sonlu elemanlara uyarlanması ile hesaplanmıştır. Bu konuda ilave teorik ve sayısal çözüm yapılmasında fayda vardır. Sıcaklık etkilerinin incelendiği problemlerde malzeme özellikleri, sıcaklıktan bağımsız olarak kabul edilmiştir. Termo-mekanik etkileşiminin daha geniş bir alanda incelenebilmesi için malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı değişimi de göz önüne alınmalıdır.

KAYNAKLAR

Akay, H.U., 1980. Dynamic Large Deflection Analysis of Plates using Mixed Finite Elements. *Computers and Structures*. Vol. **11**, pp. 1-11.

Aköz, A.Y., Eratlı, N., Özütok, A., ve Kadıoğlu, F., 2001. Kármán Plaklarının Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu. XII. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya, Türkiye.

ANSYS Release 11.0, *Documentation for ANSYS*. Kısım 3.13

Barbero, E.J., ve Reddy, J.N., 1990. Nonlinear Analysis of Composite Laminates using A Generalized Laminated Plate Theory. *AIAA J.* Vol. **28**, no. 11, pp. 1987-1994.

Başar, Y., ve Kratzig, W.B., 1985. *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg, Braunschweig.

Başar, Y., ve Omurtag, M.H., 2000. Free-Vibration Analysis of Thin/Thick Laminated Structures by Layer-wise Shell Models. *Computers and Structures*. Vol. **74**, pp. 409-427.

Bathe, K.J., 1996. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall. New Jersey.

Batra, R.C., ve Hassan, N.M., 2007. Response of Fiber Reinforced Composites to Underwater Explosive Loads. *Composites Part B: Engineering.* Vol. **38**, no. 4, pp. 448-468.

Batra, R.C., ve Hassan, N.M., 2008. Blast Resistance of Unidirectional Fiber Reinforced Composites. *Composites Part B: Engineering.* Vol. **39**, no. 3, pp. 513-536.

Bencharif, N., ve Ng, S.E., 1994. Linear and Nonlinear Deflection Analysis of Thick Rectangular Plates II, Numerical Applications. *Computers and Structures*. Vol. **50**, no. 6, pp. 763-776.

Bron, J., ve Dhatt, G., 1972. Mixed Quadrilateral Elements for Bending. *AIAA J.*, Vol. **10**, no. 10, pp. 1359-1361.

Cheung, M.S., ve Li, W., 1989. A Modified Finite Strip Method for Geometrically Nonlinear Analysis of Plates. *Computers and Structures.* Vol. **33**, no. 4, pp. 1031-1035.

Chia C.Y., 1988. Geometrically Nonlinear Behaviour of Composite Plates: A Review. *Appl. Mech. Rev.* Vol. **41**, no. 12, pp. 439-454.

Cook, R.D., 1969. Eigenvalue Problems with A Mixed Plate Element. *AIAA Journal.* Vol. **7**, no. 5, pp. 982-983.

Doğan, V.Z., 2008. Dynamic Multimode Response of Composite Plates to Sonic Boom and Blast Loadings. *Journal of Aircraft*, Vol. **45**, no. 2.

Doğruoğlu, A.N., ve Omurtag, M.H., 2000. Stability Analysis of Composite-Plate Foundation Interaction by Mixed FEM. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*. Vol. **126**, no. 9, pp. 928-936.

Gong, M., ve Andreopoulos, Y., 2008. Shock Wave Impact on Monolithic and Composite Material Plates: The Preferential Aeroelastic Response. *Journal of Sound and Vibration.* Vol. **313**, pp. 171-194.

Gupta, A.D., Gregory, F.H., Bitting, R.L., ve Bhattacharya, S., 1987. Dynamic Analysis of an Explosively Loaded Hinged Rectangular Plate. *Computers and Structures.* Vol. **26**, pp. 339-344.

Günay, E., ve Erdem, A.U., 1997. A New Hetersosis Plate Finite Element for Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Laminated Composite Plates. *Computers and Structures.* Vol. **65**, no. 6, pp. 819-828.

Harras, B., Benamar, R., ve White, G.R., 2002. Experimental and Theoetical İnvestigation of the Linear and Non-Linear Dynamic Behaviour of A Glare 3 Hybrid Composite Panel. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. **252**, pp. 281-315.

Hellinger, E., 1914. Die Allgemeine Ansatze der Mechanik der Kontinua, *Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. **4**.

Herrmann, L.R., 1967. Finite Element Bending Analysis for Plates. *J. Engng Mech. Div.*, ASCE. Vol. **93**, pp. 13-26.

Houlston, R., ve Desrochers, C.G., 1987. Nonlinear Structural Response of Ship Panels Subjected to Air Blast Loading. *Computers and Structures*. Vol. **26**, pp. 1-15.

Huang, X.L., ve Shen, H.S., 2004. Nonlinear Vibration and Dynamic Response of Functionally Graded Plates in Thermal Environments. *Int. J. Solids and Structures.* Vol. **41**, pp. 2403-2427.

Jacinto, A.C., Ambrossini, R.D., ve Danesi, R.F., 2001. Experimental and Computational Analysis of Plates under Air Blast Loading. *International Journal of Impact Engineering*. Vol. **25**, pp. 927-947.

Jones, R.M., 1999. *Mechanics of Composite Materials*, Second Edition. Taylor & Francis, Inc.

Kazancı, Z., Mecitoğlu, Z., ve Hacıoğlu, A., 2004. Effect of In Plane Stiffnesses and Inertias on Dynamic Behavior of A Laminated Composite Plate Under Blast Load. *ASCE Earth & Space–2004*. Houston, Texas, USA, 7-10 March, pp. 484-491.

Kazancı, Z., ve Mecitoğlu, Z., 2005. Nonlinear Damped Vibrations of A Laminated Composite Plate Subject Blast Load. *46th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference (SDM-2005)*. AIAA-2005-2339. Austin, Texas, USA. April 18-21.

Kazancı, Z., ve Mecitoğlu, Z., 2008. Nonlinear Dynamic Behavior of Simply Supported Laminated Composite Plates Subjected to Blast Load. *Journal of Sound and Vibration.* Vol. **317**, pp. 883-897.

Kikuchi, F., ve Ando, Y., 1972. Rectangular Finite Element for Plate Bending Analysis Based on Hellinger-Reissner's Variational Principle. *J. Nucl. Sci. Technol.* Vol. **9**, no. 1, pp. 28-35.

Koizumi, M., 1997. FGM Activities in Japan. *Composites Part B*. Vol. **28B**, pp. 1-7.

Langdon, G.S., Yuen, S.C.K., ve Nurick, G.N., 2005a. Experimental and Numerical Studies on the Response of Quadrangular Plates. Part II: Localised Blast Loading. *International Journal of Impact Engineering.* Vol. **31**, pp. 85-111.

Langdon, G.S., Cantwell, W.J., ve Nurick, G.N., 2005b. The Blast Response of Novel Thermoplastic-Based Fibre-Metal Laminates-Some Preliminary Results and Observations. *Composites Science and Technology.* Vol. **65**, pp. 861-872.

Langdon, G.S., Cantwell, W.J., ve Nurick, G.N., 2007a. Localised Blast Loading of Fibre-Metal Laminates with a Polyamide Matrix. *Composites Part B: Engineering*, Vol. **38**, pp. 902-913.

Langdon, G.S., Nurick, G.N., Lemanski, S.L., Simmons, M.C., Cantwell, W.J., ve Schleyer, G.K., 2007b. Behaviour of Fibre-Metal Laminates Subjected to Localised Blast Loading: Part I - Experimental Observations. *International Journal of Impact Engineering*. Vol. **34**, pp. 1202-1222.

Langdon, G.S., Nurick, G.N., Lemanski, S.L., Simmons, M.C., Cantwell, W.J., ve Schleyer, G.K., 2007c. Failure Characterisation of Blast-Loaded Fibre-Metal Panels Based on Aluminium and Glass-Fibre Reinforced Polypropylene. *Composites Science and Technology.* Vol. **67**, pp. 1385-1405.

Langdon, G.S., Nurick, G.N., ve Cantwell, W.J., 2008. The Response of Fibre Metal Laminate Panels Subjected to Uniformly Distributed Blast Loading. *European Journal of Mechanics A/Solids.* Vol **27**, pp. 107-115.

Lemanski, S.L., Nurick, G.N., Langdon, G.S., Simmons, M.C., Cantwell, W.J., ve Schleyer, G.K., 2006. Understanding the Behaviour of Fibre Metal Laminates Subjected to Localised Blast Loading. *Composite Structures.* Vol. **76**, pp. 82-87.

Lemanski, S.L., Nurick, G.N., Langdon, G.S., Simmons, M.C., Cantwell, W.J., ve Schleyer, G.K., 2007. Behaviour of Fibre-Metal Laminates Subjected to Localised Blast Loading: Part II - Quantitative Analysis. *International Journal of Impact Engineering.* Vol. **34**, pp. 1223-1245.

Levy, S., 1942. Square Plate with Clamped Edges under Normal Pressure Producing Large Deformation. *NACA Report No:740.*

Librescu, L., ve Nosier, A., 1990. Response of Laminated Composite Flat Panels to Boom and Explosive Blast Loadings. *AIAA Journal.* Vol. **28**, pp. 345-352.

Librescu, L., Oh, S.Y., ve Hohe, J., 2004. Linear and Non-Linear Dynamic of Sandwich Panels to Blast Loading. *Composites: Part B*. Vol. **35**, pp. 673-683.

Ma, L.S., ve Wang, T.J., 2003. Nonlinear Bending and Post-Buckling of a Functionally Graded Circular Plate under Mechanical and Thermal Loadings. *Int. J. Solids and Structures*. Vol. **40**, pp. 3311-3330.

Miyoshi, T., 1976. A Mixed Finite Element Method for the Solution of the von Karman Equations. *Numer. Math.* Vol. **26**, pp. 255-269.

Nosier, A., Librescu, L., ve Frederick, D., 1990. *The Effects of Time Dependent Excitation on the Oscillatory Motion of Viscously Damped Laminated Composite Flat Panels. Advances in the Theory of Plates and Shells*, 249-268, edited by Voyiadjis, G.Z. and Karamanlidis, D., Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.

Park, J.S., ve Kim, J.H., 2006. Thermal Postbuckling and Vibration Analyses of Functionally Graded Plates. *Journal of Sound and Vibration.* Vol. **289**, pp. 77-93.

Patankar, S.V., 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation.

Pian, T.H.H., 1976. Variational Principles for Incremental Finite Element Methods. *Journal of the Franklin Institude*. Vol. 302, no. 5-6, pp. 473-488.

Poceski, A., 1975. A Mixed Finite Element for Bending of Plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.* Vol. **9**, pp. 3-15.

Praveen, G.N., ve Reddy, J.N., 1998. Nonlinear Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Ceramic-Metal Plates. *Int. J. Solids Structures*. Vol. **35**, no. 33, pp. 4457-4476.

Reddy, J.N., ve Tsay, C.S., 1977. Mixed Rectangular Finite Elements for Plate Bending. *Proc. Oklahoma Acad. Of Sci.*,Vol. **57**, pp. 144-148.

Reddy, J.N., 2000. Analysis of Functionally Graded Plates. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. **47**, pp. 663-684.

Reddy, J.N., 2003. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells; Theory and Analysis*. CRC Press.

Reddy, J.N., 2004. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford University Press.

Reissner, E., 1950. On a Variational Theorem in Elasticity, *J. Math. Phys.* Vol. **29**, pp. 90-95.

Rodriguez, L., 1968. Finite Element Nonlinear Analysis for Plates and Shells. *Ph.D. Thesis*. Department of Civil Engineering. Massachusetts Institute of Technology.

Shen, H.S., 1999. Large Deflection of Composite Laminated Plates under Transverse and In-Plane Loads and Resting on Elastic Foundations. *Composite Structures.* Vol. **45**, pp. 115-123.

Shen, H.S., 2002. Postbuckling Analysis of Axially Loaded Functionally Graded Cylindrical Panels in Thermal Environments. *Int. J. Solids and Structures*. Vol. **39**, pp. 5991-6010.

Shukla, K.K., ve Nath, Y., 2000. Nonlinear Analysis of Moderately Thick Laminated Rectangular Plates. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol. **126**, no.8, pp. 831-838.

Singh, G., Rao, G.V., ve Iyengar, N.G.R., 1994. Geometrically Nonlinear Flexural Response Characteristics of Shear Deformable Unsymmetrically Laminated Plates. *Computers and Structures.* Vol. **53**, no. 1, pp. 69-81.

Sofiyev. A, Omurtag, M.H., ve Schnack E., 2009. The Vibration and Stability of Orthotropic Conical Shells with Non-Homogeneous Material Properties under A Hydrostatic Pressure. *Journal of Sound and Vibration.* Vol. **319**, pp. 963-983.

Stoffel, M., Schmidt, R., ve Weichert, D., 2001. Shock Wave-Loaded Plates, *International Journal of Solids and Structures.* Vol. **38**, no. 42-43, 7659-7680.

Tan, H.F., Tian, Z.H., ve Du, X.W., 2000. A New Geometrically Nonlinear Laminated Theory for Large Deformation Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. **37**, pp. 2577-2589.

Tanrıöver, H., ve Şenocak, E., 2004. Large Deflection Analysis of Unsymmetrically Laminated Composite Plates: Analytical-Numerical Type Approach. *International Jounal of Non-Linear Mechanics*, Vol. **39**, pp. 1385-1392,.

Turvey, G.J., ve Osman, M.Y., 1990. Elastic Large Deflection Analysis of Isotropic Rectangular Plates, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. **32**, no. 4, pp. 315-328.

Türkmen, H.S., ve Mecitoğlu, Z., 1999a. Nonlinear Structural Response of Laminated Composite Plates Subjected to Blast Loading. *AIAA Journal*. Vol **37**, pp. 1639-1647.

Türkmen, H.S., ve Mecitoğlu, Z., 1999b. Dynamic Response of Stiffened Laminated Composite Plate Subjected to Blast Load. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. **231**, pp. 371-389.

Tsay, C.S., ve Reddy, J.N., 1977. Stability and Vibration of Thin Rectangular Plates by Simplified Mixed Finite Elements. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. **55**, pp. 289-302.

Veldman, R.L., Ari-Gur, J., Clum, C., DeYoung, A., ve Folkert, J., 2006. Effects of Pre-Pressurization on Blast Response of Clamped Aluminum Plates. *International Journal of Impact Engineering.* Vol. **32**, no.10, pp. 1678-1695.

Veldman, R.L., Ari-Gur, J., ve Clum, C., 2008. Response of Pre-Pressurized Reinforced Plates under Blast Loading. *International Journal of Impact Engineering*. Vol. **35**, no. 4, pp. 240-250.

Visser, W., 1969. A Refined Mixed Type Plate Bending Element. *AIAA J.*, Vol. **7**, no. 9, pp. 1801-1803.

Von KÁRMÁN T., 1910. Festigheits Probleme im Maschienbau. *In Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. **IV**, pp. 349.

Woo, J., ve Meguid, S.A., 2001. Nonlinear Analysis of Functionally Graded Plates and Shallow Shells. *Int. J. Solids and Structures*. Vol. **38**, pp. 7409-7421.

Woo, J., Meguid, S.A., ve Ong, L.S., 2006. Nonlinear Free Vibration Behavior of Functionally Graded Plates. *Journal of Sound and Vibration.* Vol. **289**, pp. 595-611.

Yang, J., Kitipornchai, S., ve Lew, K.M., 2004. Non-linear Analysis of the Thermo-Electro-Mechanical Behaviour of Shear Deformable FGM Plates with Piezoelectric Actuators. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. **59**, pp. 1605-1632.

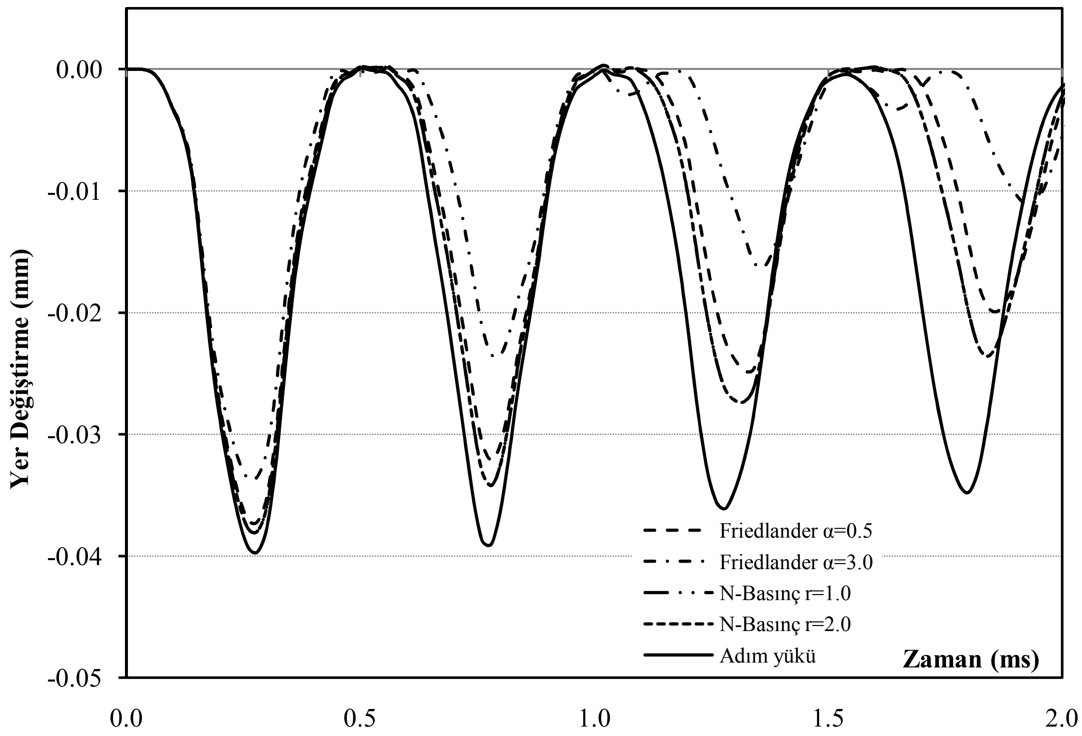
Yuen, S.C.K., ve Nurick, G.N., 2005. Experimental and Numerical Studies on the Response of Quadrangular Plates. Part I: Subjected to Uniform Blast Loads. *International Journal of Impact Engineering*. Vol. **31**, pp.55-83.

Zhang, Y., Wang, S., ve Petersson, B., 2003. Large Deflection Analysis of Composite Laminates, *Journal of Materials Processing Technology*. Vol. **138**, no. 1-3, pp. 34-40.

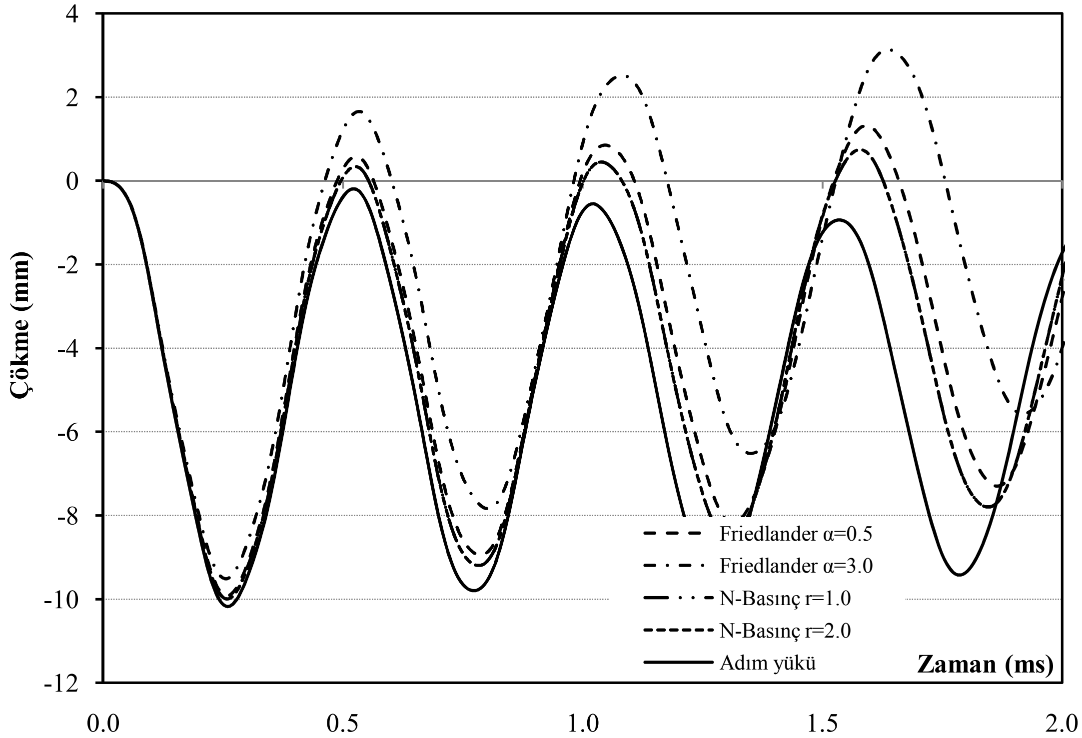
EKLER

EK A.1 : Anlık Basınç Yükleri Altında FGM Plakların Tepkileri

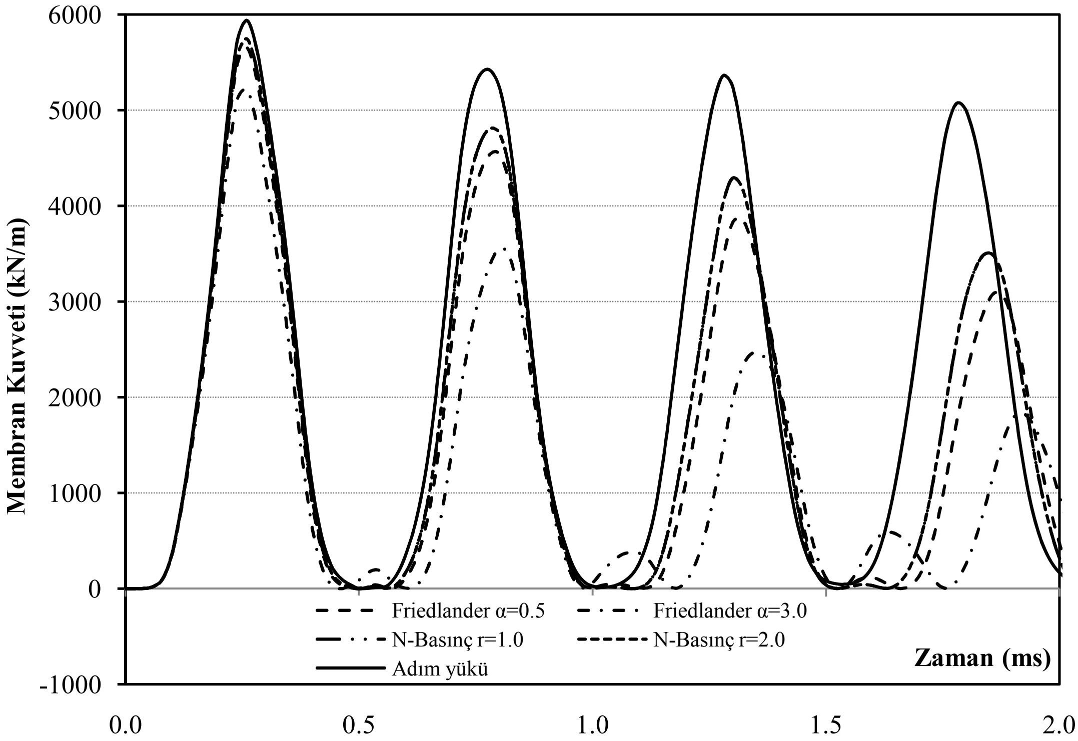
EK A.1



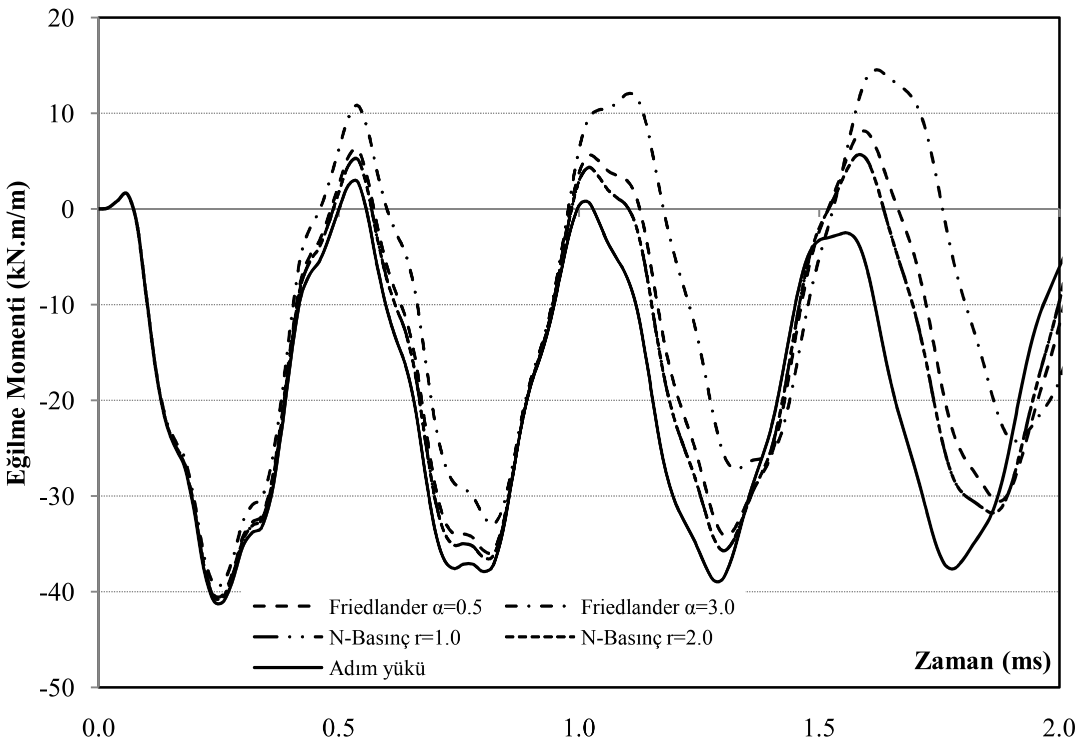
Şekil A.1 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)\ n=0$.



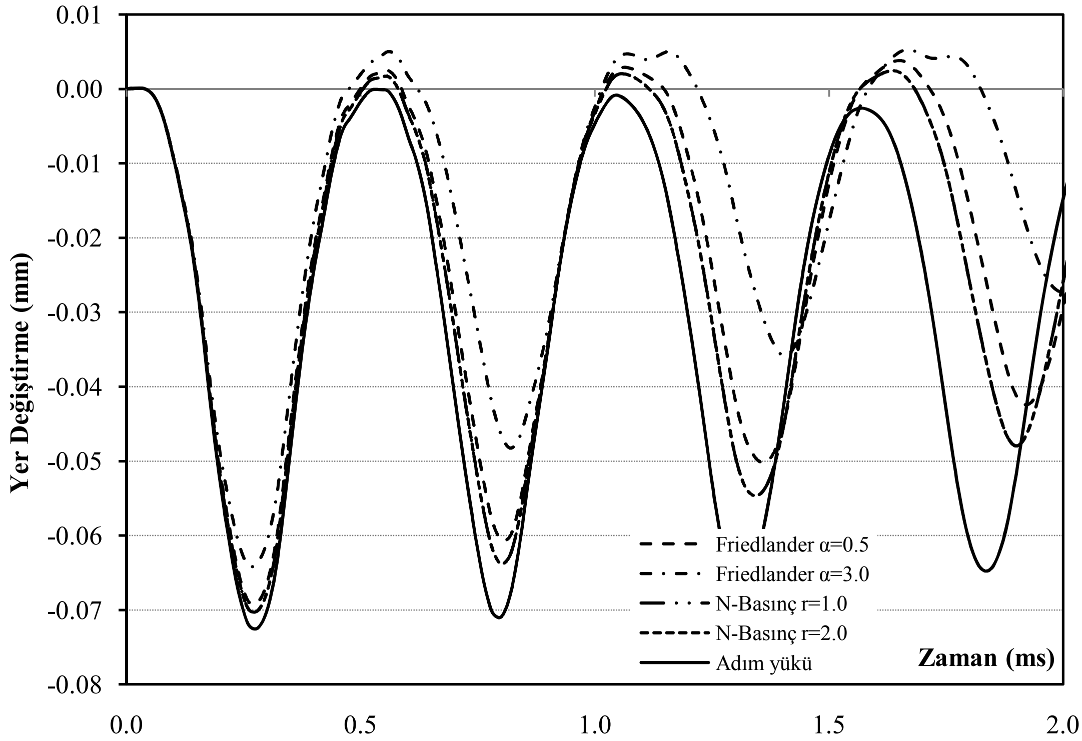
Şekil A.2 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)\ n=0$.



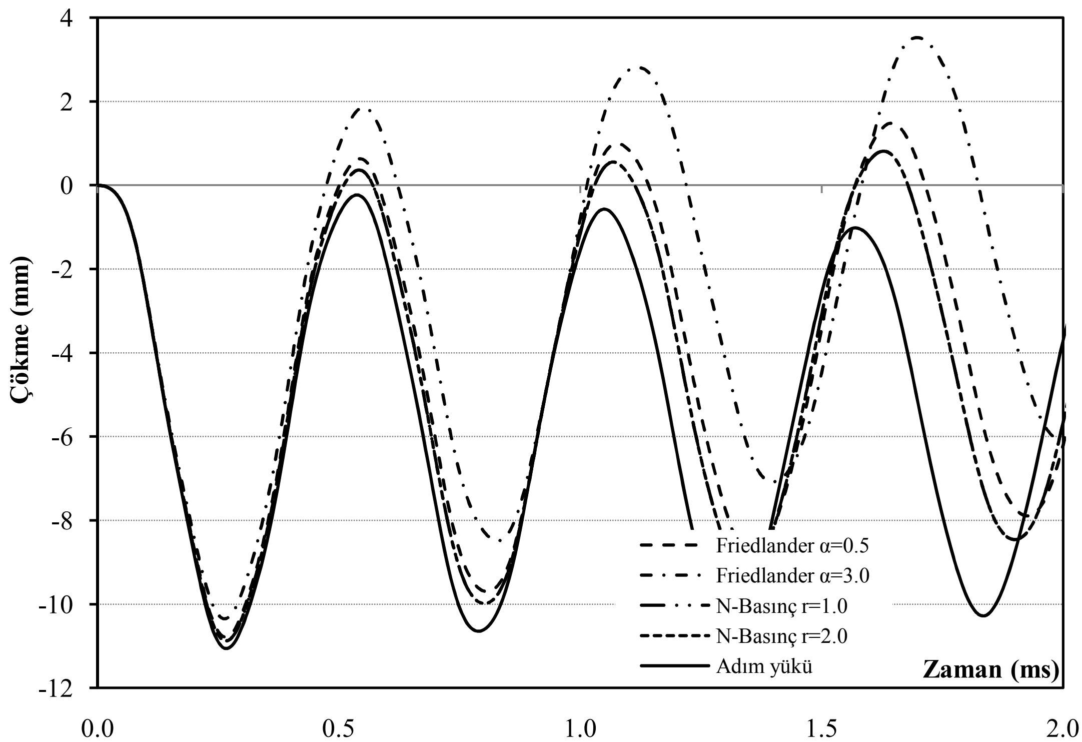
Şekil A.3 : Membran kuvveti, $N_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)\ n=0$.



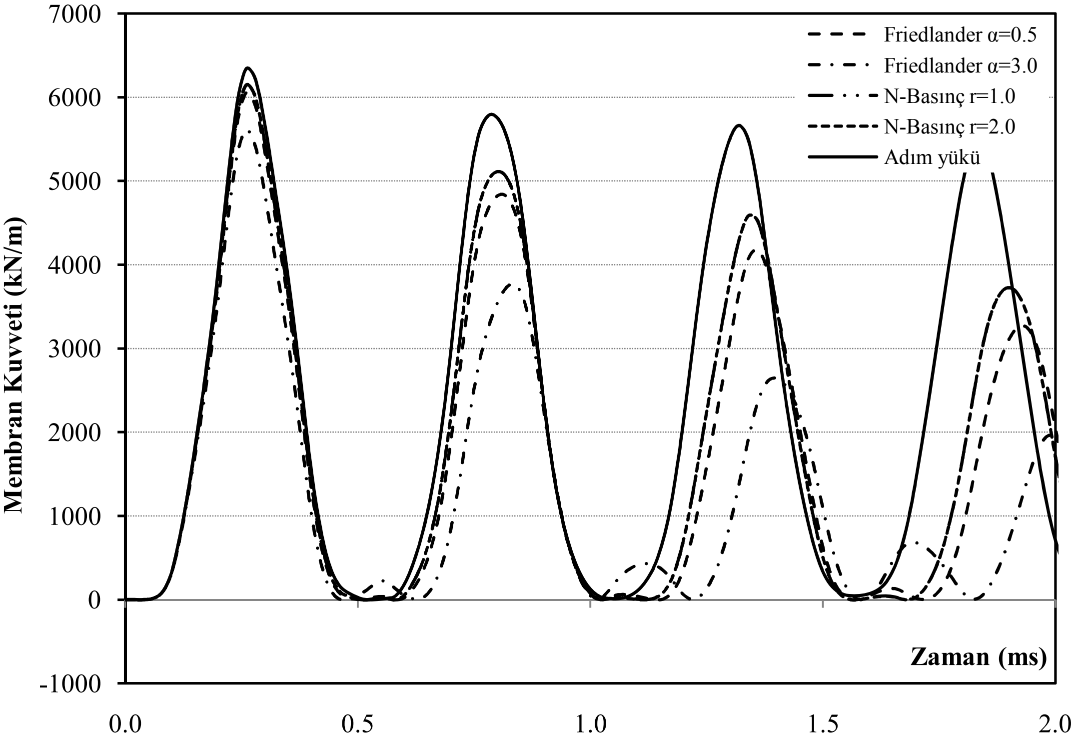
Şekil A.4 : Eğilme momenti, $M_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)\ n=0$.



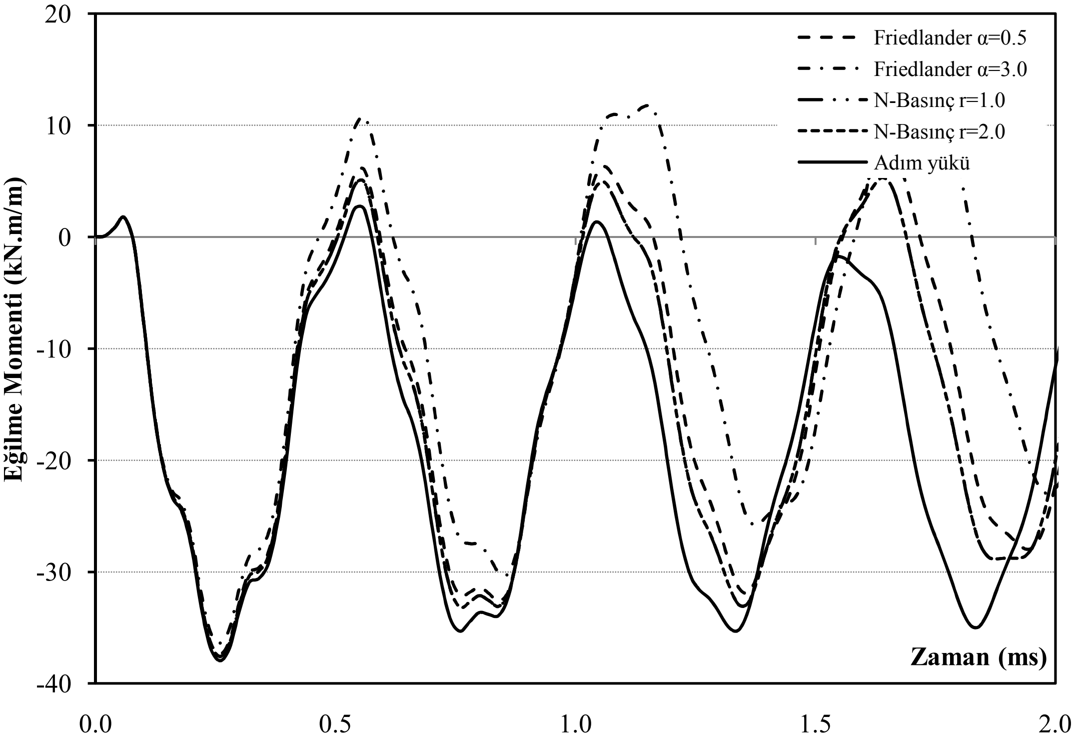
Şekil A.5 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)\;\; n=0.2$.



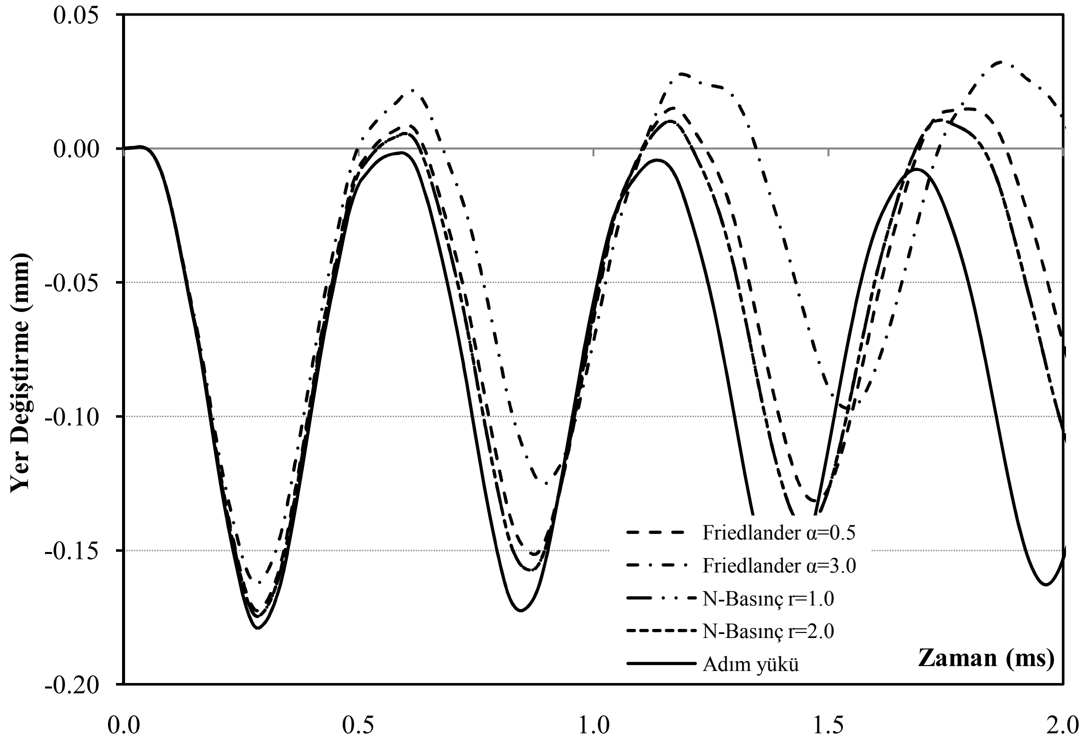
Şekil A.6 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)\;\; n=0.2$.



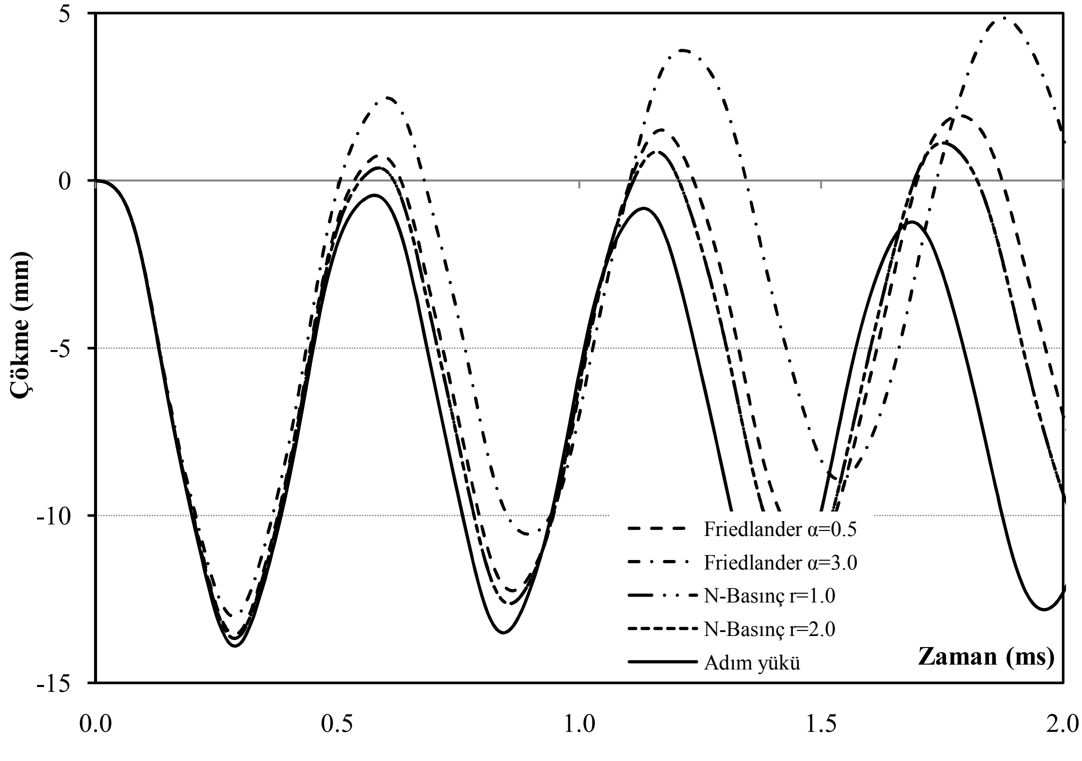
Şekil A.7 : Membran kuvveti, $N_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ $n=0.2$.



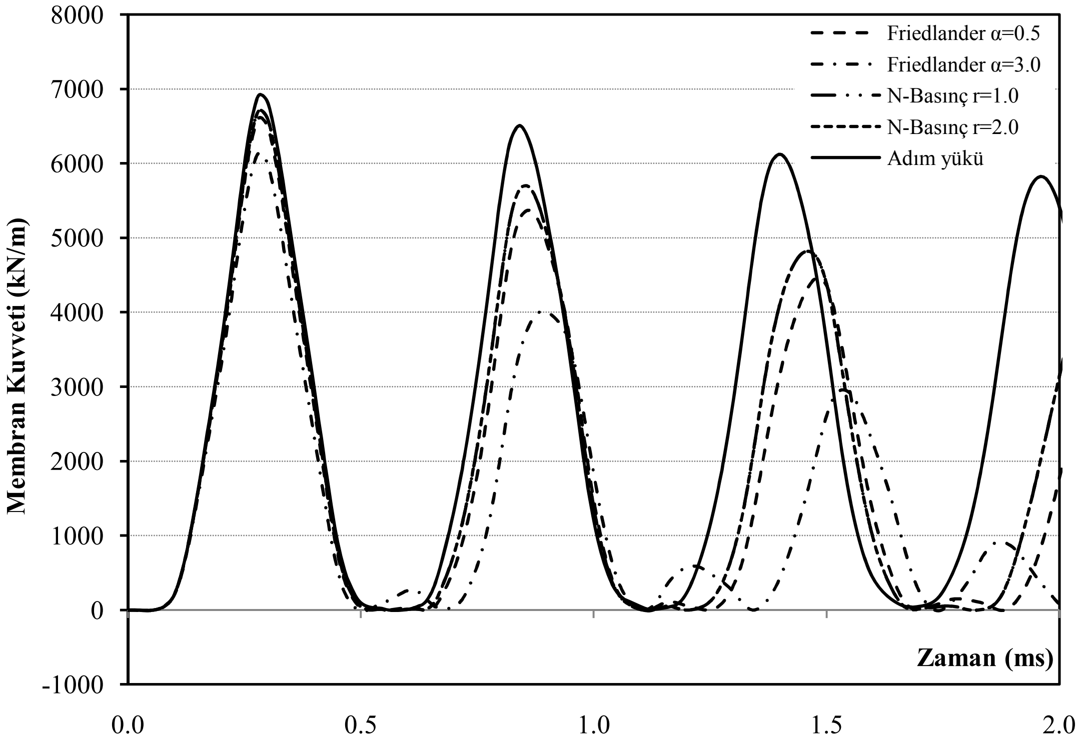
Şekil A.8 : Eğilme momenti, $M_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ $n=0.2$.



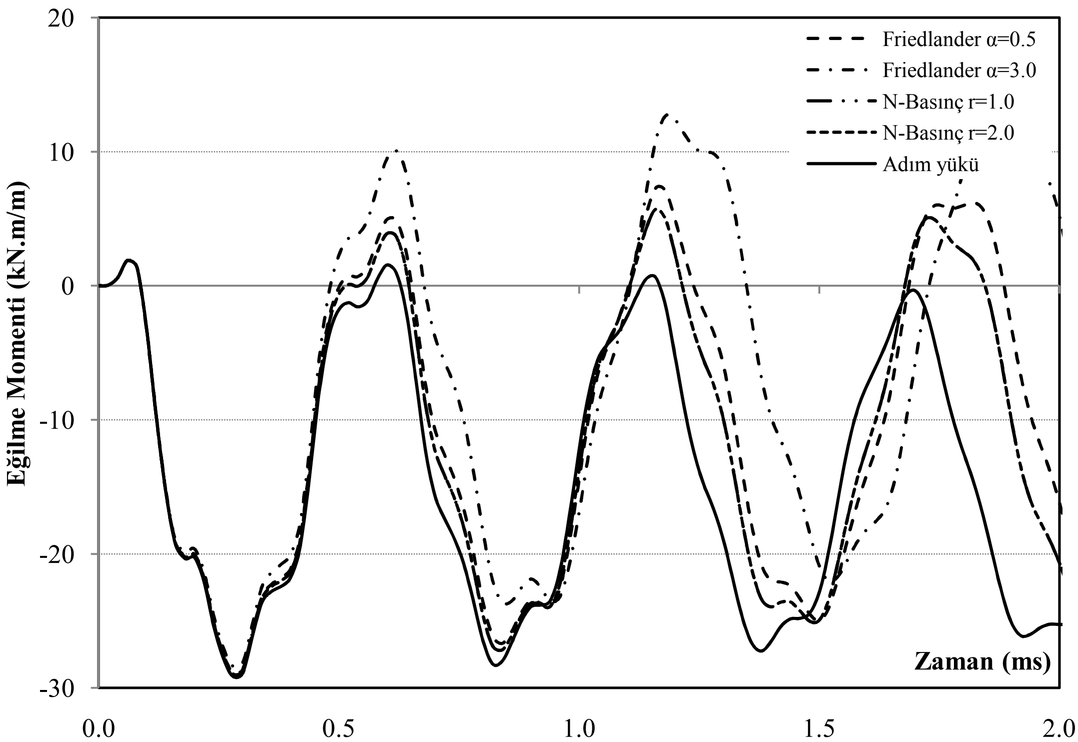
Şekil A.9 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)\;\; n=2.0$.



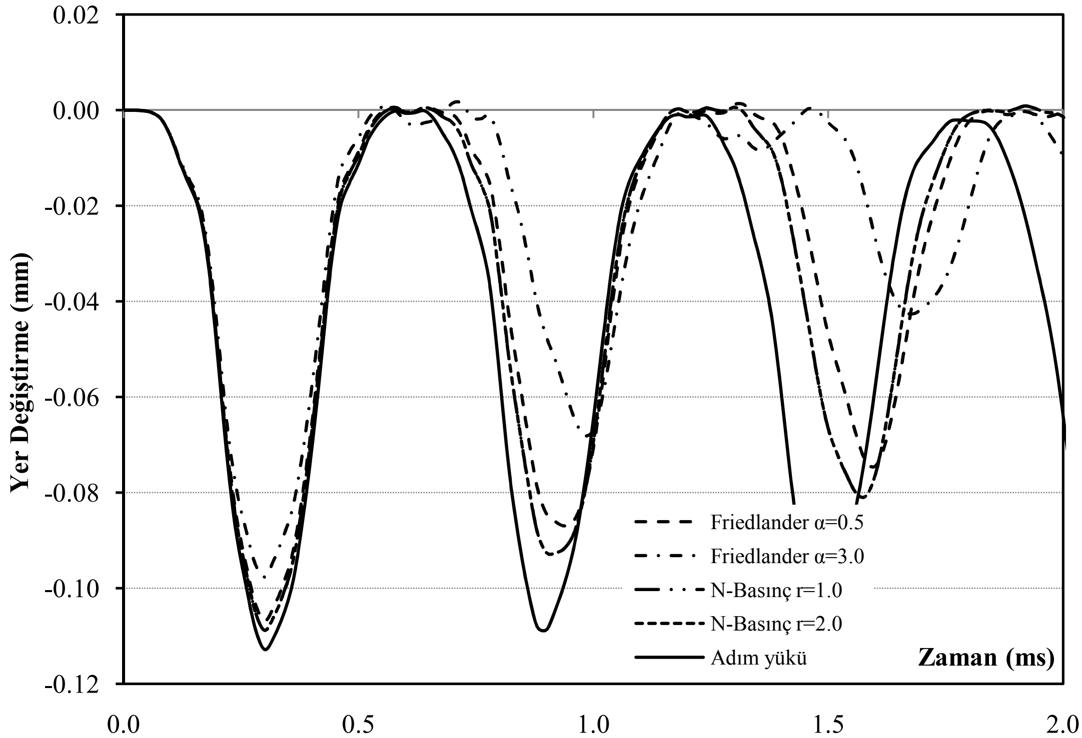
Şekil A.10 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)\;\; n=2.0$.



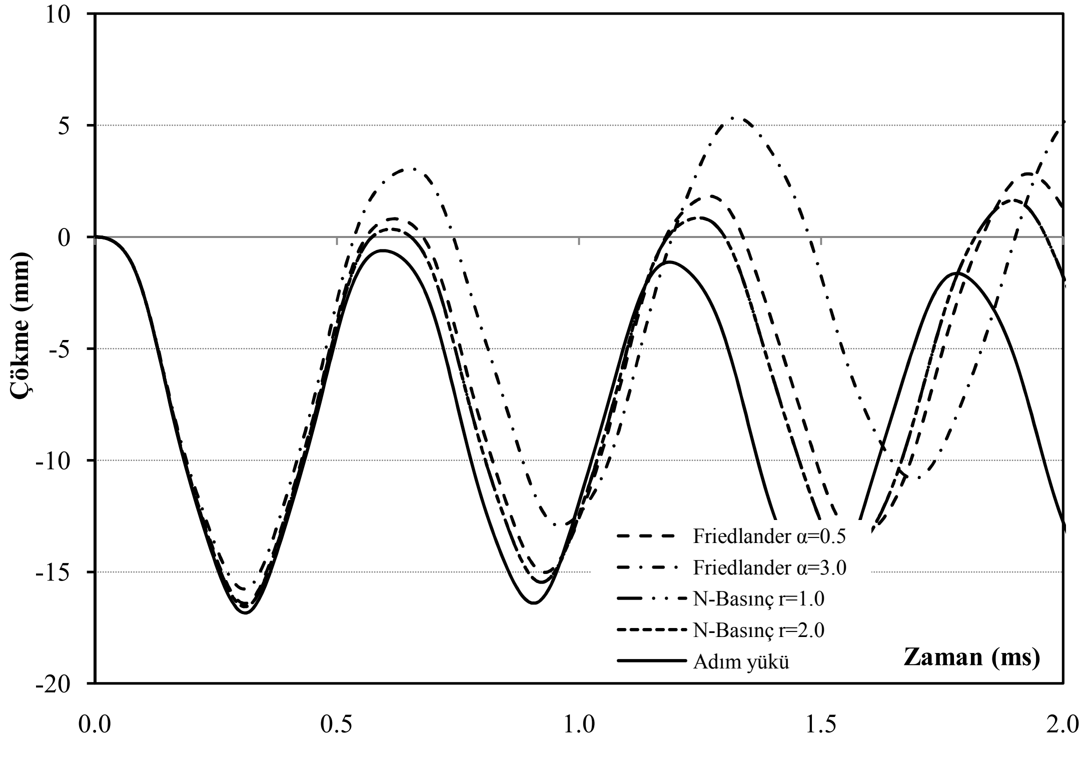
Şekil A.11 : Membran kuvveti, $N_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ $n=2.0$.



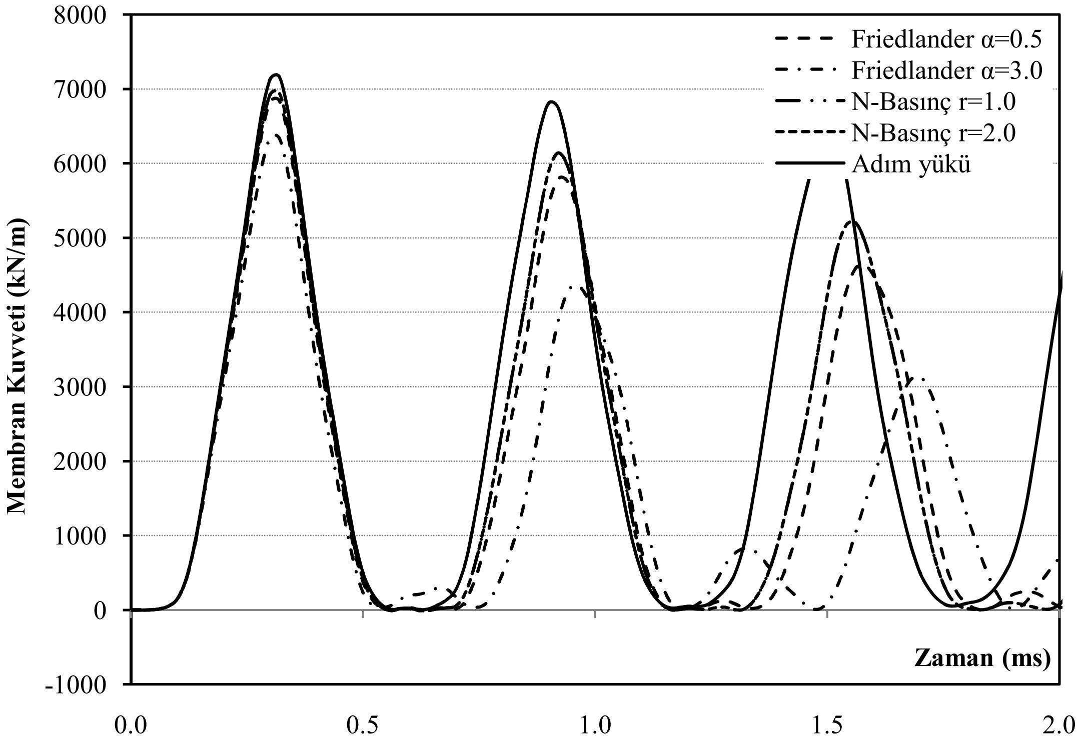
Şekil A.12 : Eğilme momenti, $M_{xx}\left(x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}, z=0\right)$ $n=2.0$.



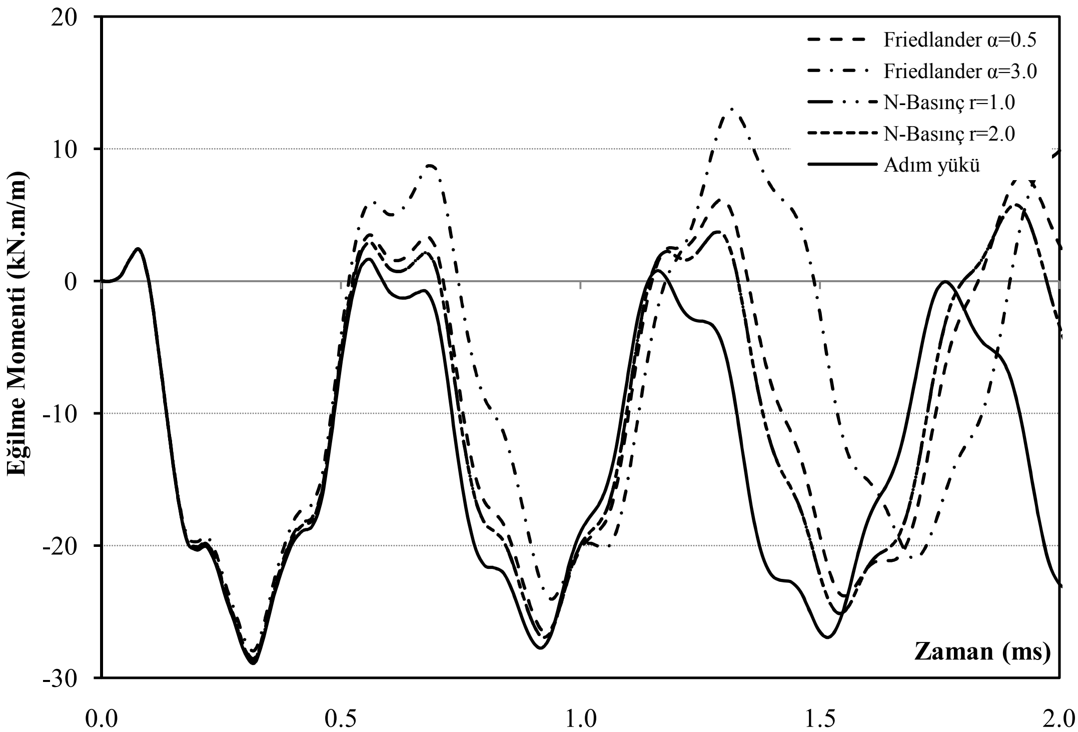
Şekil A.13 : Düzlem içi yer değiştirme, $u\left(x=\frac{a}{4},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)\ n=\infty$.



Şekil A.14 : Çökme, $w\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)\ n=\infty$.



Şekil A.15 : Membran kuvveti, $N_{xx}\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$ $n=\infty$.



Şekil A.16 : Eğilme momenti, $M_{xx}\left(x=\frac{a}{2},\, y=\frac{b}{2},\, z=0\right)$ $n=\infty$.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Cenk Aksoylar
Doğum Yeri ve Tarihi:	Ankara, 12 Şubat 1978
Lisans :	Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnş. Müh. Böl.
Yüksek Lisans :	Yıldız Teknik Üniversitesi, İnş. Müh. Böl., Mekanik Programı
Doktora :	İstanbul Teknik Üniversitesi, İnş. Müh. Böl., Yapı Mühendisliği Programı