

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ANKASTRE MESNETLİ DİKDÖRTGEN KESİTLİ PLAKLARIN SAYISAL
YÖNTEMLERLE ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mehmet Ferhan TUĞYAN**

Anabilim Dalı : Makine Mühendisliği

Programı : Konstrüksiyon

HAZİRAN 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ANKASTRE MESNETLİ DİKDÖRTGEN KESİTLİ PLAKLARIN SAYISAL
YÖNTEMLERLE ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mehmet Ferhan TUĞYAN
(503061207)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Mayıs 2009
Tezin Savunulduğu Tarih : 04 Haziran 2009**

**Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. İsmail GERDEMELİ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Cevat Erdem İMRAK (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Cüneyt FETVACI (İÜ)**

HAZİRAN 2009

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca desteğini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. İsmail GERDEMELİ' ye, Transport Tekniği Ana Bilim Dalından Prof. Dr. C. Erdem İMRAK' a, Makine Fakültesi'nin değerli mensupları hocalarıma, ayrıca eğitim ve öğretim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran 2009

Mehmet Ferhan TUĞYAN
Makine Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	v
KISALTMALAR.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
ÖZET	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ	1
2. TEORİ.....	3
2.1 Plaka Tanımı	3
2.2 Plaka Genel Teorisi	4
2.2.1 Deformasyon Sehim İlişkisi.....	4
2.2.2 Gerilme Birim Şekil Değiştirme İlişkisi	8
2.2.3 Moment Gerilme İlişkisi.....	9
2.2.4 Plakanın Diferansiyel Denklemleri	11
2.2.5 Sınır Koşulları	14
2.2.6 Fourier Serisi Açılımı	16
3. DÖRT KENARINDAN BASİT MESNETLENMİŞ DİKDÖRTGEN KESİTLİ PLAKANIN DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİ ALTINDA ÇÖZÜMÜ	25
3.1 Çift Fourier Serisi Açılımı İle Problemin Çözümü	25
3.2 Tek Fourier Serisi Açılımıyla Problemin Çözümü	27
4. DİKDÖRTGEN KESİTLİ DÖRT KENARINDAN ANKASTRE MESNETLİ İZOTROPİK İNCE PLAKANIN DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİ ALTINDA SEHİMİNİN HESAPLANMASI.....	31
4.1 Çözüm Yöntemi 1	31
4.1.1 Problemin Tanımı.....	32
4.1.2 Sınır Koşulları	32
4.1.3 Çözüm.....	33
4.1.4 Kare Plaka İçin Problemin Çözümü	34
4.2 Çözüm Yöntemi 2	35
4.2.1 Çözüm.....	37
4.3 Çeşitli Numunelerin Sehimin Hesaplanması	42
4.3.1 Kalınlık Değişimine Göre Davranışın İncelenmesi	42
4.3.2 Kenar Oranlarının Değişimine Göre Davranışın İncelenmesi.....	49
5. SONLU ELEMANLAR METODU.....	53
5.1 Sonlu Elemanlar Metodunun Kısa Tarihi	53
5.2 Uygulama Alanları	54
5.3 Problemlere Uygulanması	54
5.4 Sonlu Elemanlar Yönteminin Eleman Tipleri.....	55

5.5 Plaka Ve Kabuk Yapılarında Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması.....	56
5.5.1 Tek Boyutlu Eleman	60
5.5.2 Lineer Üçgen Eleman.....	63
5.5.3 Asimetrik Üçgen Eleman	66
5.6 Ansys Paket Programı	68
5.6.1 Ansys Ara Yüzü.....	72
5.6.2 Ansys Dosyaları.....	73
5.6.3 Ansys Menüleri.....	73
5.6.3.1 Araç Menüsü	73
5.6.3.2 Ansys Ana Menü	78
5.6.3.3 Elemanlara Bölme	80
5.6.3.4 Ansys Paket Programıyla Bir Kabuk Elemanının Analizi	81
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	95
KAYNAKLAR.....	97
EKLER	99

KISALTMALAR

SEM : Sonlu Elemanlar Metodu

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Kare plaka için bulunmuş nümerik sehim faktörleri [3].	34
Çizelge 4.2 : Dikdörtgen plaka için farklı kenar oranlarında bulunmuş sehim faktörler [3].	35
Çizelge 4.3 : Dikdörtgen plaka için farklı kenar oranlarında bulunmuş sehim, kenar, merkez moment ve enerji nümerik faktörleri [4].	40
Çizelge 4.4 : Farklı kenar oranları için çift kosinüs serisi ve Hencky yönteminin karşılaştırması [4].	41
Çizelge 4.5 : Kare plaka için değişik kenar oranlarında sehim değerleri.	45
Çizelge 4.6 : 2 kenar oranı için farklı kalınlıklarda sehim değerleri.	48
Çizelge 4.7 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için sehim değerleri.	52
Çizelge 5.1 : Kare plaka için farklı kalınlıklarda SEM yöntemiyle elde edilen sehim değerleri.	92
Çizelge 5.2 : Kenar oranı 2 olan plaka için farklı kalınlıklarda SEM yöntemiyle elde edilen sehim değerleri.	93
Çizelge 5.3 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için SEM yöntemiyle elde edilen sehim değerleri.	93
Çizelge 6.1 : Kare plaka için farklı kalınlıklarda nümerik ve SEM yöntemiyle elde edilen değerlerin karşılaştırması.	95
Çizelge 6.2 : Kenar oranı 2 olan plaka için farklı kalınlıklarda nümerik ve SEM yöntemiyle elde edilen değerlerin karşılaştırması.	95
Çizelge 6.3 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için nümerik ve SEM yöntemiyle elde edilen sehim değerlerinin karşılaştırması.	96

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Sonsuz küçük plaka elemanı [2].	4
Şekil 2.2 : Sonsuz küçük elemanın deformasyonu [2].	4
Şekil 2.3 : Sonsuz küçük elemanda açısıl deformasyon [2].	6
Şekil 2.4 : Sonsuz küçük elemanda kayma deformasyonu [2].	6
Şekil 2.5 : Sonsuz küçük hacimde oluşan gerilmeler [2].	8
Şekil 2.6 : Tarafsız eksen etrafında oluşan momentler [2].	10
Şekil 2.7 : P Yüğü Etkisi Altında Sonsuz Küçük Elemanın Gösterimi [2].	11
Şekil 2.8 : Sonsuz küçük eleman üstünde oluşan kuvvetler ve momentler [2].	12
Şekil 2.9 : Plaka üzerinde sınır şartlarının gösterimi [2].	14
Şekil 2.10 : Kiriş plaka kombinasyonunda meydana gelen kuvvetler [2].	16
Şekil 2.11 : Periyodik dikdörtgen fonksiyonun grafiğı [2].	18
Şekil 2.12 : Periyodik simetrik olmayan sinüsoidal fonksiyonun grafiğı [2].	20
Şekil 2.13 : Soldan sağa, tek, çift ve tek periyodik simetrik fonksiyonlar.	21
Şekil 2.14 : $y = x - x^2$ fonksiyonunun grafiğı.	21
Şekil 2.15 : Sürekli fonksiyon [2].	22
Şekil 2.16 : Çift fonksiyonun grafiğı [2].	22
Şekil 2.17 : Tek fonksiyonun grafiğı [2].	23
Şekil 2.18 : Dikdörtgen plaka.	24
Şekil 3.1 : Basit mesnetli dikdörtgen plaka [2].	29
Şekil 4.1 : Dikdörtgen plaka için faktör değişimi [4].	41
Şekil 4.2 : Kare plaka için sehimin plaka kalınlığına bağılı değişimi.	45
Şekil 4.3 : Kenar oranı 2 olan plaka için sehimin plaka kalınlığına bağılı değişimi.	49
Şekil 4.4 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için sehim karakteristiğı.	52
Şekil 5.1 : Bir boyutlu sonlu eleman [5].	55
Şekil 5.2 : Üçgen tipi sonlu eleman [5].	55
Şekil 5.3 : Üç boyutlu değişik tiplerde dikdörtgen sonlu elemanlar [5].	56
Şekil 5.4 : Tek boyutlu sonlu eleman örneğı [2].	56
Şekil 5.5 : İki boyutlu sonlu eleman örneğı [2].	57
Şekil 5.6 : Sonsuz küçük hacim [2].	58
Şekil 5.7 : Asimetrik üçgen elemanın gösterimi [2].	67
Şekil 5.8 : Ansys ana ekranı.	72
Şekil 5.9 : File menüsü.	74
Şekil 5.10 : Select menüsü.	74
Şekil 5.11 : List menüsü.	75
Şekil 5.12 : Plot menüsü.	75
Şekil 5.13 : Plot control menüsü.	76
Şekil 5.14 : Pan, zoom, otate paneli.	76
Şekil 5.15 : Work plane menüsü.	77
Şekil 5.16 : Help menüsü.	77
Şekil 5.17 : Help menüsü.	78

Şekil 5.18 : Preferences menüsü.....	78
Şekil 5.19 : Preprocessor menüsü.....	79
Şekil 5.20 : Solution menüsü.....	79
Şekil 5.21 : General postprocessing menüsü.....	80
Şekil 5.22 : Mesh menüsü.....	80
Şekil 5.23 : Program çalıştırma menüsü.....	81
Şekil 5.24 : Eleman tipi seçim menüsü.....	81
Şekil 5.25 : Eleman tipi seçim penceresi.....	82
Şekil 5.26 : Shell 63 elemanı ve koordinat eksenleri.....	83
Şekil 5.27 : Kalınlık tanımlama menüsü.....	83
Şekil 5.28 : Kalınlık tanımlama penceresi.....	84
Şekil 5.29 : Malzeme özellikleri tanımlama menüsü.....	84
Şekil 5.30 : Eleman özellikleri tanımlama penceresi.....	85
Şekil 5.31 : Geometri oluşturma menüsü.....	85
Şekil 5.32 : Geometri oluşturma penceresi.....	86
Şekil 5.33 : Alt eleman boyutu tanımlama menüsü.....	87
Şekil 5.34 : Alt elemanlara bölme menüsü.....	87
Şekil 5.35 : Mesnet tanımlama menüsü.....	88
Şekil 5.36 : Mesnet tanımlama penceresi.....	88
Şekil 5.37 : Mesnet tanımlama penceresi.....	89
Şekil 5.38 : Yük tanımlama penceresi.....	89
Şekil 5.39 : Çözüm menüsü.....	90
Şekil 5.40 : Sonuç izlem menüsü (deformasyon).....	90
Şekil 5.41 : Şekil değişimi sonuç çıktısı.....	91
Şekil 5.42 : Gerilme sonuçları için kriter seçim menüsü.....	91
Şekil 5.43 : Gerilme sonuç çıktısı (von misses teoremine göre).....	92
Şekil A.1 : Levha 1 için sehim analizi.....	100
Şekil A.2 : Levha 1 için gerilme analizi.....	100
Şekil A.3 : Levha 2 için sehim analizi.....	101
Şekil A.4 : Levha 2 için gerilme analizi.....	101
Şekil A.5 : Levha 3 için sehim analizi.....	102
Şekil A.6 : Levha 3 için gerilme analizi.....	102
Şekil A.7 : Levha 4 için sehim analizi.....	103
Şekil A.8 : Levha 4 için gerilme analizi.....	103
Şekil A.9 : Levha 5 için sehim analizi.....	104
Şekil A.10 : Levha 5 için gerilme analizi.....	104
Şekil A.11 : Levha 6 için sehim analizi.....	105
Şekil A.12 : Levha 6 için gerilme analizi.....	105
Şekil A.13 : Levha 7 için sehim analizi.....	106
Şekil A.14 : Levha 7 için sehim analizi.....	106
Şekil A.15 : Levha 8 için sehim analizi.....	107
Şekil A.16 : Levha 8 için gerilme analizi.....	107
Şekil A.17 : Levha 9 için sehim analizi.....	108
Şekil A.18 : Levha 9 için gerilme analizi.....	108
Şekil A.19 : Levha 10 için sehim analizi.....	109
Şekil A.20 : Levha 10 için gerilme analizi.....	109
Şekil A.21 : Levha 11 için sehim analizi.....	110
Şekil A.22 : Levha 11 için gerilme analizi.....	110
Şekil A.23 : Levha 12 için sehim analizi.....	111
Şekil A.24 : Levha 12 için gerilme analizi.....	111

Şekil A.25 : Levha 13 için sehim analizi.....	112
Şekil A.26 : Levha 13 için gerilme analizi.	112

ANKASTRE MENSETLİ DİKDÖRTGEN KESİTLİ PLAKLARIN SAYISAL YÖNTEMLERLE ANALİZİ

ÖZET

Günümüzde pek çok alanda plaklar yaygın olarak kullanılmaktadır. Makine, inşaat, silah teknolojileri, deniz teknolojileri, havacılık, uzay teknolojileri ve reklamcılık gibi alanlar bunlardan bazılarıdır. Birçok makinenin tasarımında kullanılan plakalar, genellikle gövde elemanı olarak kullanılmaktadır. Bu sebepten dolayı dış kuvvetlerin etkisine maruz kalmaktadırlar. Örneğin hava taşıtlarında ve deniz taşıtlarında kullanılan plaka elemanları yayılı yük etkisine maruz kalmaktadırlar. Burada ele alınacak problem ankastre mesnetli plakaların düzgün yayılı yük etkisi altında küçük sehimlerinin incelenmesidir. Bahsi geçen plaka sabit bir kalınlığa ve homojen bir yapıya sahiptir. Dört kenarından ankastre mesnetli olan plaka düzgün yayılı yük etkisi altında incelenmiştir. Yukleme plaka normali doğrultusunda meydana gelmektedir. Sadece statik yukleme hali göz önüne alınmıştır. Isıl gerilemeler ve dinamik yükler göz önüne alınmamıştır. Plaka malzemesi olarak çelik seçilmiştir. İlk olarak konunun genel teorisi incelenecek, ardından ilgili nümerik hesaplama yöntemleri tanıtılacak ve bazı numuneler için hem bu nümerik yöntemlerle, hemde sonlu elemanlar yöntemiyle analiz edilecektir. Kullanılacak sonlu eleman programı Ansys 11 paket programıdır. Bu numunelerin düzgün yayılı yük etkisi altında mekanik davranışlarını veren grafikler oluşturulmuştur. Bu numuneler farklı kenar oranlarında ve farklı kalınlıklarda seçilmiştir. Ayrıca plakanın kullanım alanlarında bu çalışmada yer almaktadır. Sonuç bölümünde ise her iki yöntemle elde edilmiş sonuçlar karşılaştırılacak ve sonlu elemanlar yönteminin ankastre mesnetli dikdörtgen kesitli plaklardaki güvenilirliği araştırılacaktır.

ANALYSIS OF CLAMPED RECTANGULAR PLATE WITH NUMERICAL METHODS

SUMMARY

Plate components use in many areas. For instance, plates use in machine industry, building industry, weapon technologies, marine techonologies, aircharft industry and advertising industry. Plate structure have been used in many manchine design so far. In generaly , this structure are used as a body component. In this case, the machine part are exposed to external forces. For instance, plate strucures are exposed to extarnel or internal pressure in aircrafts and ships. This study concern with clamped rectangular subjected to uniformly loaded for small displacement. The plate has uniform thickness and homogeneous structure. Four edges of plate are fixed and subejected to uniform loading. In this case the structure is examined in displacement. Loads are through to normal of plate. The calculation is only done for static loading. Thermal stress and dynamic force are neglected for the problem. Steel is selected as a plate material in this problem. When the plates are subjected to uniform loading, The graphs are created to observe mechanical behaviors. These samples are identify in different thickness and ratios of edge. In the study firstly, general plate theory are given and calculation method for this situation. Also usage areas of plate takes place in the study. Secondly, some sample plate are solved by numerical method and finite element method. In order to solve this plates, Ansys11/ CAE software is used. At the end of the study it has been comparing results of analitical calculation with the results that were obtained by finite element method.

1. GİRİŞ

Geçmişten günümüze yapılan birçok mekanik tasarımda levha paneller gerek gövde gerekse taşıyıcı eleman gibi çeşitli amaçlar doğrultusunda kullanılmış ve kullanımına devam edilmektedir. Yapılan bu çalışmada plaka yada kabuk olarak tanımlanmış konstrüksiyon elemanın özel bir hali olan dikdörtgen kesitli plakanın tüm kenarlarının ankastre mesnetli durumda, düzgün yayılı yük altında mekanik davranışı incelenecektir. Plaka tanımı yapılacak ve buradan hareketle genel plaka teorisi tanıtılacaktır. Dikdörtgen kesitli plakanın hangi sınır koşullarında nasıl davrandığı verilecek ve basit mesnetli ve ankastre mesnetli durumlar için plakanın diferansiyel denklemi çözülecektir. Düzgün yayılı yük altındaki ankastre mesnetli dikdörtgen plakanın sehim bu bahsedilen sınır koşullarında belli numuneler için çift seri Fourier açılımı, tek seri Fourier açılımından türetilen iki değişik yaklaşık çözüm methodu kullanılarak hesaplanacaktır. Bu çözümlere ek olarak bahsedilen numuneler sonlu elemanlar prensibiyle çalışan bir analiz programı (Ansys) sayesinde sehim hesaplanacaktır. Son olarak elde edilen veriler yapılan deney sonuçlarıyla karşılaştırılacaktır.

Plaka iki sınır yüzey eğrisi ve bunların arasındaki uzaklık ile ifade edilen bir konstrüksiyon elemanıdır. Bahsedilen uzaklık plakanın kalınlığını oluşturmaktadır. Bu kalınlık plakanın diğer geometrik ölçülerine nazaran oldukça küçük boyutta olmalıdır. İki sınır yüzey eğrisine eş uzaklıktaki yüzeye orta yüzey denilmektedir. Birçok yapının tasarımında örneğin; basınçlı kaplar uçaklar gemi güverte ve bölmeleri, denizaltı gövde ve bölmeleri çatılar roketler ve köprü uygulamaları gibi değişik alanlarda bahsi geçen plakalardan yararlanılmaktadır. Bu konstrüksiyon bileşeni kimi tasarımlarda sadece bir gövde elemanı kimi tasarımlarda ise taşıyıcı eleman olarak kullanılmaktadır. Bunların dışında reklamcılık sektöründe dahi plakalardan faydalanılmaktadır. Bahsi geçen sektörde yapının her hangi bir mekanik işlevi olmamasına karşın diğer bileşenler nedeniyle ve doğal etkenler sebebiyle örneğin rüzgar yükleri gibi zorlayıcı etkenlere maruz kalmaktadır. Bir diğer

uygulama alanı olan inşaat sektöründe taşıyıcı eleman olmaktan daha ziyade yardımcı eleman olarak çeşitli yüklerin etkisi altında kalmaktadır.

Havacılık sanayi gibi kritik uygulama alanlarında konstrüksiyonun parçalarından beklenen ağırlık dayanım oranının yüksekliği sebebiyle plaka ve kabuk elemanların önemi büyüktür. Özetle iç ve dış ortamı bir birinden ayıran plakaların oluşturduğu gövde tasarımları basınç farkından doğan zorlama etkisi altında gerek havacılık, gerek denizcilik gerekse uzay endüstrisinde yayılı yük etkisi altında hayati görevleri yerine getirmektedirler.

Bu sebeplerden dolayıdır ki bahsi geçen problemin çözümünün yeterli kesinlikte ve doğrulukta olması hayati önem taşır.

2. TEORİ

2.1 Plaka Tanımı

Bir yapının plaka yada kabuk olarak tanımlanması için aşağıdaki kabullere uyması gerekir [1];

- 1) Plakanın kalınlığı olan h değerinin en azından orta yüzeyin eğrilik yarıçapı olan R değerinden az olması gerekir.
- 2) Sehimin değeri yapının diğer geometrik ölçülerinin yanında ihmal edilebilecek düzeyde küçük olması gerekir.
- 3) Orta yüzeye dik etkiyen gerilme bileşenin diğer gerilme bileşenlerine nazaran küçük ve gerilme-genleme ilişkisinde ihmal edilebilir düzeyde olması gerekir.
- 4) Orta yüzeyin normali plakanın deforme olmuş hali için bile yüzeye dik kalmalıdır. Bu enine oluşan kayma gerilmelerinin ihmal edildiğini göstermektedir.

Novozhilov' a göre bir yapının ince plaka olarak adlandırılabilmesi için ; en fazla kalınlık eğrilik yarıçapının yirmide biri olması gerekir. Aksi takdirde yapı kalın plakadır.

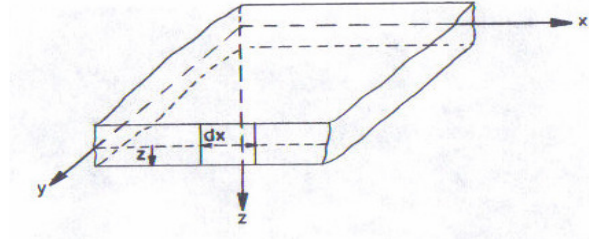
Naghdi tarafından türetilen enine kayma gerilmelerini içeren izotropik ince kabuk teorisinde ise orta yüzeyin normalinin deformasyondan sonra yüzeye dik kalması gerekmiyordu.

Vlasov' a göre ise eğer orta yüzey tüm noktaların iz düşümünü üstünde barındıracak kadar düz ise yapı yüzeysel bir kabuktur ve bunun şartı kısa kenarın plaka kalınlığına oranı ile ifade edilir [1].

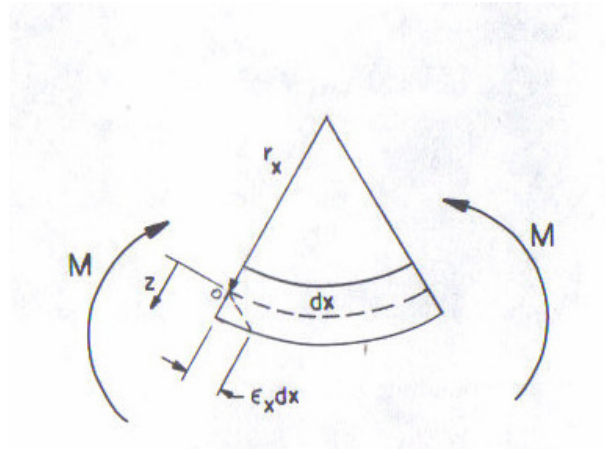
2.2 Plaka Genel Teorisi

2.2.1 Deformasyon Sehim İlişkisi

Bu ilişkiyi geometrik yapıya bakarak kurabiliriz. Aşağı doğru olan çökme hali pozitif alınacaktır. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 bu ilişkiyi göstermektedir [2].



Şekil 2.1 : Sonsuz küçük plaka elemanı [2].



Şekil 2.2 : Sonsuz küçük elemanın deformasyonu [2].

Orta yüzeyden z kadar uzaktaki bir noktanın yer değişimi aşağıdaki şekilde bulunur [2];

$$\frac{dx}{r_x} = \frac{dx + \epsilon_x}{r_x + z} \quad (2.1)$$

dx : X eksenindeki sonsu küçük uzunluk

ϵ_x : X eksenindeki yer değişimi

r_x : Orta yüzeyin X eksenine göre eğrilik yarı çapı

z : Noktanın orta yüzeye olan uzaklığı

Denklem (2.1) sadeleştirildiği takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad (2.2)$$

X eksenindeki eğrilik yarı çapını $x_x = \frac{1}{r_x}$ şeklinde gösterirsek denklem (2.2) aşağıdaki formda olur.

$$\epsilon_x = x_x \cdot z \quad (2.3)$$

Benzer şekilde y eksenindeki yer değişimi;

$$\epsilon_y = \frac{z}{r_y} \quad (2.4)$$

$$\epsilon_y = x_y \cdot z \quad (2.5)$$

x_x eğrilik yarı çapı değeri sehim w ve eğim $\frac{dw}{dx}$ ile alakalıdır.

$$x_x = -\frac{d^2w}{dx^2} \cdot \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

Buradaki terimin başındaki negatiflik orijinden uzaklaştıkça eğimin azaldığını göstermektedir.

Küçük deplasmanlar için eğimin karesi ihmal edilebilir ve eşitlik aşağıdaki şeklini alır.

$$x_x = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.6)$$

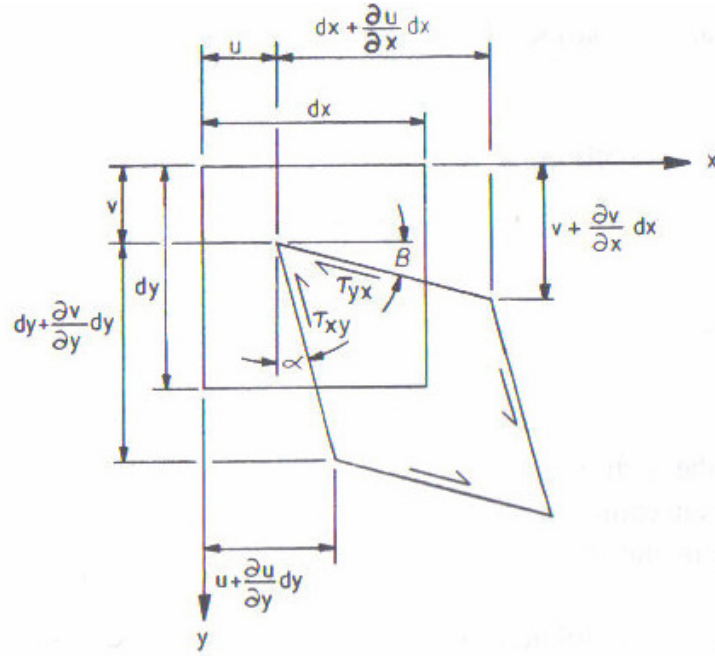
$$x_y = -\frac{d^2w}{dy^2} \quad (2.7)$$

Denklem (2.6) ve (2.7) sırasıyla, denklem (2.3) ve (2.5)' te yerlerine koyulursa;

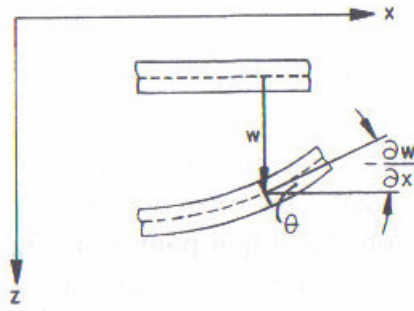
$$x_x = -z \cdot \frac{d^2w}{dx^2} \quad (2.8)$$

$$x_y = -z \cdot \frac{d^2w}{dy^2} \quad (2.9)$$

Kayma şekil değiştirmesi ve deformasyon arasındaki ilişki aşağıdaki Şekil 2.3 vasıtasıyla görülebilir [2].



Şekil 2.3 : Sonsuz küçük elemanda açısal deformasyon [2].



Şekil 2.4 : Sonsuz küçük elemanda kayma deformasyonu [2].

Sonsuz küçük dx ve sonsuz küçük bir dy enine sahip elemanda kayma deformasyonu şekil 2.4'te görülebilir.

Çarpılma açıları olan α ve β aşağıdaki eşitliklerden hesaplanabilir;

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot dy} \quad \text{çok küçük kayma açıları için } \alpha = \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ dir.}$$

Benzer şekilde β açısı;

$$\sin \beta \approx \beta \approx \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot dx} \quad \text{çok küçük kayma açıları için } \beta = \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ dir.}$$

Böylece kayma şekil değiştirmesi;

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

u: x eksenindeki yer değişimi

v: y eksenindeki yer değişimi

γ_{xy} : kayma şekil değiştirmesi

$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$: eğilmeden kaynaklanan kayma şekil değiştirmesi

Orta yüzeyin dönme miktarı: $\frac{\partial w}{\partial x}$

Bu dönmeden dolayı herhangi bir noktanın orta yüzeye uzaklığı;

$$u = z \cdot \tan \theta \approx z \cdot \theta \quad u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{ve} \quad v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Denklem (2.11) vasıtasıyla;

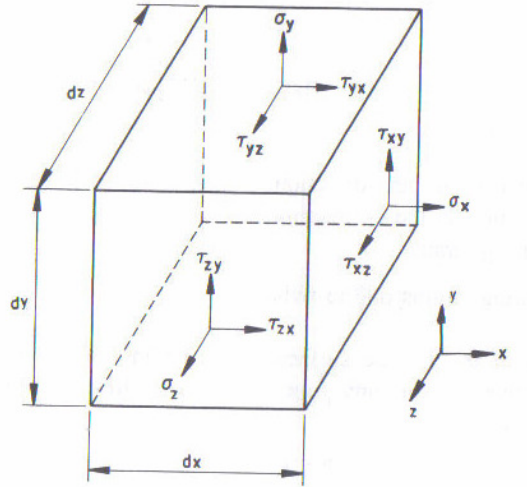
$$\gamma_{xy} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.11)$$

Denklem (2.8), (2.9) ve (2.11) matris şeklinde yazılırsa;

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = -z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

2.2.2 Gerilme Birim Şekil Değiştirme İlişkisi

Gerilme ile birim şekil değiştirme arasındaki bağıntı termal yükleme olmaksızın üç boyutlu homojen uzayda izotropik eleman için Şekil 2.5 yardımıyla yazılabilir [2].



Şekil 2.5 : Sonsuz küçük hacimde oluşan gerilmeler [2].

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot (1 + \mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ϵ : eksenel birim şekil değiştirme

σ : eksenel gerilme

τ : kayma gerilmesi

E: elastisite modülü

μ : poisson oranı

$\frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E}$ kayma modülüdür ve G harfi ile gösterilir.

σ_z değeri diğer gerilme bileşenlerine nazaran oldukça küçük olduğu için ihmal edilir.

Bunun yanında τ_{yz} ve τ_{zx} gerilme bileşenlerine iki boyutlu plaka formülüzasyonunda ihtiyaç yoktur.

Bu durumda denklem aşağıdaki halini alır;

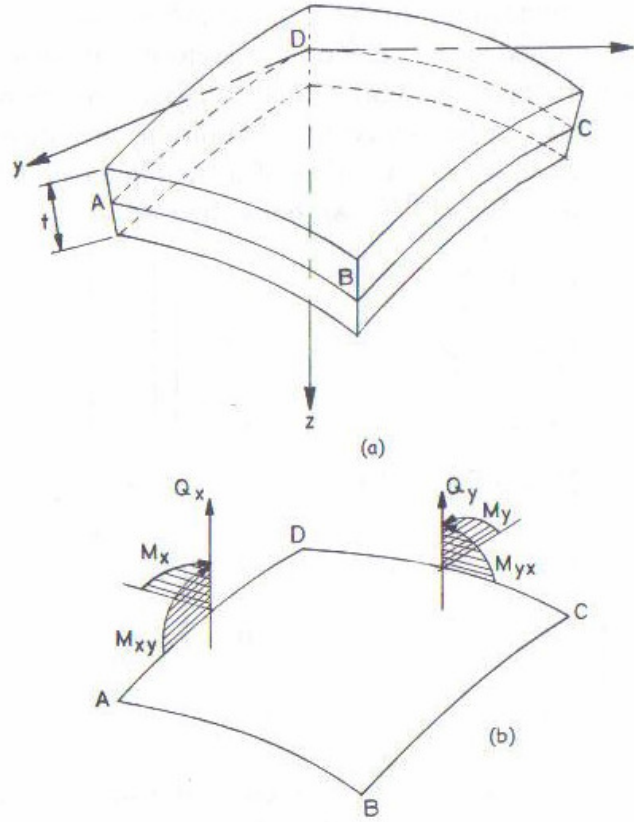
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Denklem (2.13), (2.15) ' te yerine yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.2.3 Moment Gerilme İlişkisi

Moment değerlerinin bulunması istenirse denklem (2.15)' ten yararlanılabilir. Çünkü plakanın diferansiyel denkleminin çözümünde kenarlarda oluşan momentin sınır koşullarıyla belirtilmesi gerekir. Bahsi geçen ilişki aşağıdaki Şekil 2.6 yardımıyla kurulabilir [2].



Şekil 2.6 : Tarafsız eksen etrafında oluşan momentler [2].

Tarafsız eksen etrafında oluşan içsel kuvvetlerin toplamı momentleri meydana getiren dış kuvvetlerin toplamıyla eşittir.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ -M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot z \cdot dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$D = \frac{E t^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \text{ veya } D = E I \quad (2.17)$$

2.2.4 Plakanın Diferansiyel Denklemi

Bir kirişin eğilme fonksiyonu aşağıdaki gibidir[2];

$$\frac{d^2 w}{d^2 x} = -\frac{M(x)}{E.I} \quad (2.18)$$

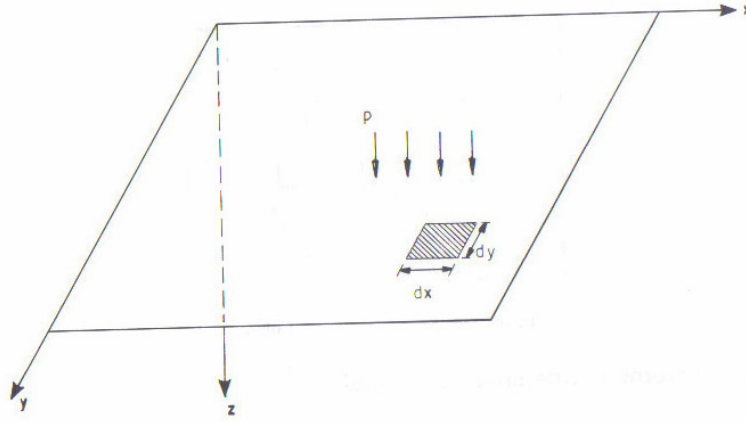
Momente göre verilmiş bu denklemi türetirsek, yapılan yükleme cinsinden eğriliği elde edebiliriz.

$$\frac{d^4 w}{d^4 x} = \frac{p(x)}{E.I} \quad (2.19)$$

Plakanın eğilme denklemide benzer şekilde yazılabilir. Fakat bu denklem kirişinkinden hem x ve hem de y ekseninde eğilme bileşenleri içereceğinden daha karmaşıktır.

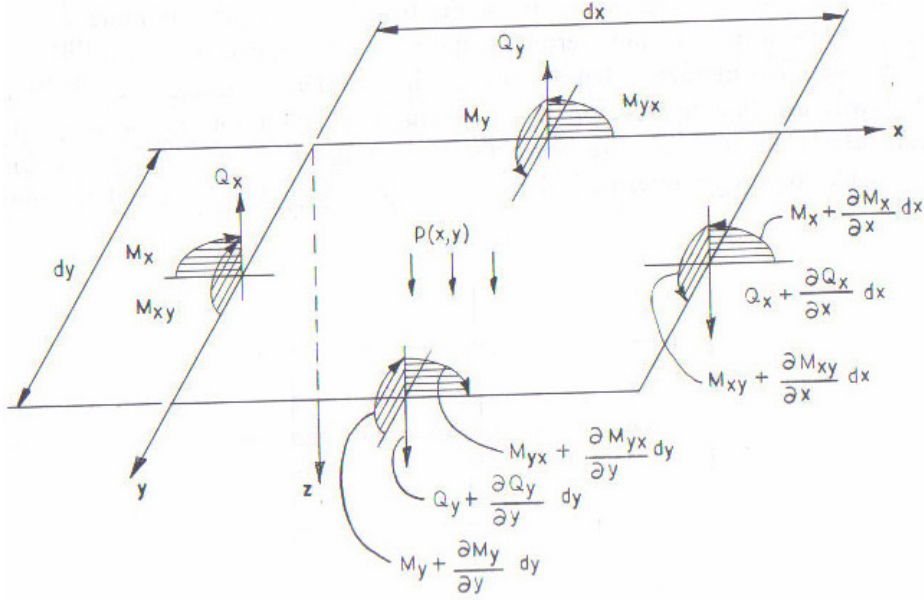
Plakanın eğimi için ilk diferansiyel denklem Lagrange tarafından 1811'de yazılmıştır.

Şekil 2.7 yardımıyla, bir dx dy sonsuz küçük elemanı için p yükü etkisi altında dikdörtgen bir plaka görünmektedir.



Şekil 2.7 : P Yükü Etkisi Altında Sonsuz Küçük Elemanın Gösterimi [2].

Daha önce bahsi geçen ve p yükü etkisi altında şekilde verilmiş plakada oluşan kuvvetler ve bunların gösterimi Şekil 2.8 yardımıyla gösterilmiştir.



Şekil 2.8 : Sonsuz küçük eleman üstünde oluşan kuvvetler ve momentler [2].

Bu şekilden hareketle [2];

1.) z yönündeki kuvvetlerin dengesi;

$$p(x, y) \cdot dx \cdot dy - Q_x \cdot dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy - Q_y \cdot dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx = 0$$

Gerekli sadeleştirmeler sonucu denklem;

$$p(x, y) + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

2.) x ekseninde etrafında oluşan momentlerin dengesi;

$$\begin{aligned} & M_y \cdot dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx - M_{xy} \cdot dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \\ & + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} - Q_x \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} + p \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} = 0 \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmeler sonucunda denklem[2];

$$Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot p \right) \cdot dy = 0$$

Burada parantez içindeki terim sonsuz küçüklükteki bir dy terimi ile çarpıldığı için ihmal edilebilir ve denklemin her iki yanı dy ile bölünürse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.21)$$

Benzer şekilde y eksenini etrafında oluşan moment dengesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad (2.22)$$

Denklem (2.21) ve (2.22), denklem (2.20)'de yerine yazıldığında aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$p(x, y) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = 0 \quad (2.23)$$

Bu plaka kayma gerilmeleri $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ eşit olduğundan, momentler $M_{xy} = M_{yx}$ eşit kabul edilmiştir.

Denklem (2.17), denklem (2.24)'te yerine koyulduğu zaman;

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (2.24)$$

Diğer bir gösterimle;

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^4 w = \frac{p(x, y)}{D} \text{ veya } \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (2.25)$$

Böylece plakanın diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz. Bu denklemin çözümü sehimi verir.

Momentler sehimi denkleminin, denklem (2.17)'de yerine konulmasıyla bulunabilir.

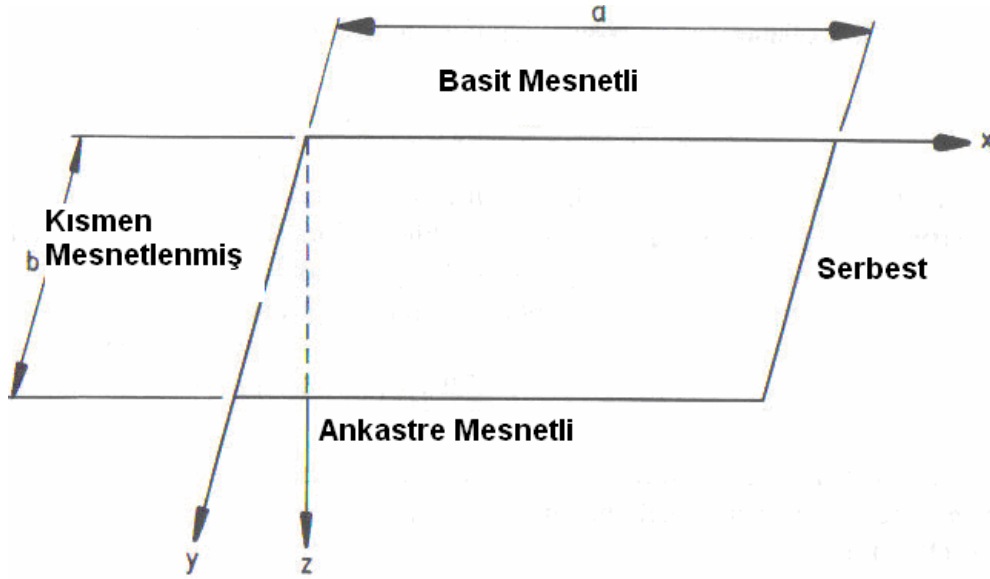
Kayma gerilmeleri ise denklem (2.22) ve (2.23)'ün (2.17)'de yerine yazılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2.26)$$

$$Q_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (2.27)$$

2.2.5 Sınır Koşulları

Genellikle karşılaşılan sınır koşulları kirişlerde karşılaşılan sınır koşullarıyla aynıdır. Bahsi geçen sınır koşulları Şekil 2.9 yardımıyla görülebilmektedir [2].



Şekil 2.9 : Plaka üzerinde sınır şartlarının gösterimi [2].

Ankastre Mesnetli Kenar İçin Sınır Koşulları;

Burada sehim ve eğim değerleri sıfırdır.

$$w|_{y=0} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} \bigg|_{y=b} = 0 \quad (2.29)$$

Basit Mesnetli Kenar İçin Sınır Koşulları;

Burada sehim ve moment değerleri sıfırdır.

$$w|_{y=0} = 0 \quad (2.30)$$

(2.30) ve denklem (2.17)'den moment değeri;

$$M_y \Big|_{y=0} = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0} = 0 \quad (2.31)$$

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ terimi eğimin basit mesnetlenmiş kenar üzerindeki değişim oranını göstermektedir ancak burada eğim sıfır olduğu için bu terimde sıfırdır. Denklem bu bilginin ışığında yeniden düzenlenirse;

$$M_y \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \quad (2.32)$$

Serbest Kenar İçin Sınır Koşulları;

Burada moment ve kayma gerilme değerleri sıfırdır.

$$M_x \Big|_{x=a} = M_{xy} \Big|_{x=a} = Q_x \Big|_{x=a} = 0$$

İlk sınır koşulu ve eşitlik (2.17)'den aşağıdaki denkleme ulaşırız.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.33)$$

Diğer iki sınır koşulunu tek bir ifadede birleştirelim;

$$Q' = - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a}$$

Kayma gerilmesi eşitliğinde Q' , Q_x 'e eklenmesi gerekir. Böylece serbest kenardaki kayma gerilmesi Q' ve eşitlik (2.27) yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

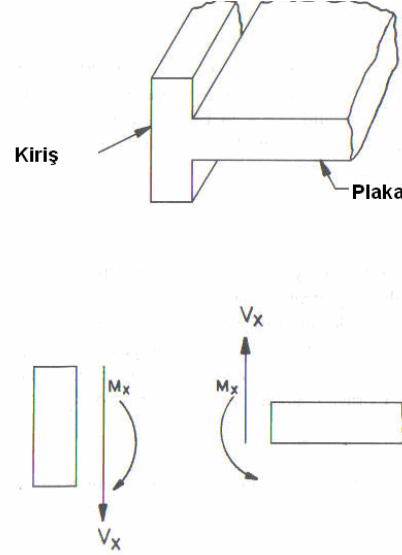
$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad Q_x \text{ ve } M_{xy} \text{ değerleri denklem (2.27)'den bulunur ve}$$

denklem (2-17)'de yerine koyulursa;

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=a} = 0 \quad (2.34)$$

Kısmen Mesnetlenmiş Kenar İçin Sınır Koşulları;

Bu durum plaka ya da plaka kiriş bağlantıları arasında oluşur. Bu bağlantı Şekil 2.10 yardımıyla gösterilmiştir.



Şekil 2.10 : Kiriş plaka kombinasyonunda meydana gelen kuvvetler [2].

$$V|_{Plaka} = V|_{Kiriş}$$

$$D \cdot \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \Bigg|_{x=0} = E \cdot I \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \Bigg|_{x=0} \quad (2.35)$$

2.2.6 Fourier Serisi Açılımı

Periyodik bir fonksiyon olarak Whylie tarafından 1960'da seri olarak ifade edilmiştir. Serinin açılımı aşağıdaki gibidir[2].

$$f(x) = 0,5 \cdot A_0 + A_1 \cdot \cos x + A_2 \cdot \cos 2x + \dots + A_m \cdot \cos mx \\ + B_1 \cdot \sin x + B_2 \cdot \sin 2x + \dots + B_m \cdot \sin mx$$

$$f(x) = 0,5 \cdot A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \sin mx \quad (2.36)$$

Yukarıdaki eşitlik ile verilen seri Fourier serisi olarak adlandırılmaktadır. Buradaki A_m ve B_m sabitleri denklem (2.36)'de 2π periyodunda verilen verilen herhangi bir d noktasından başlar.

A_0 sabitinin değeri denklem (2.36)'in $x = d$ ile $x = d + 2.\pi$ arasında integralinin alınmasıyla bulunur.

$$\int_d^{d+\pi} f(x)dx = 0,5.A_0 \int_d^{d+2.\pi} dx + A_1 \int_d^{d+2.\pi} \cos x dx + \dots + A_m \int_d^{d+2.\pi} \cos m x dx$$

$$+ B_1 \int_d^{d+2.\pi} \sin x dx + \dots + B_m \int_d^{d+2.\pi} \sin m x dx$$

Denklemin sağ tarafındaki birinci terim $A_0.\pi$ olarak elde edilir ve diğer terimler aşağıdaki gibidir.

$$\int_d^{d+2.\pi} \cos m x dx = 0 \quad m \neq 0$$

$$\int_d^{d+2.\pi} \sin m x dx = 0$$

Buradan hareketle A_0 terimi;

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2.\pi} f(x)dx \quad (2.37)$$

(2.37) denklemindeki A_m terimi, bu denklemin her iki yanın $\cos mx$ terimiyle çarpımından ortaya çıkan yeni denklemden elde edilir.

$$\int_d^{d+2.\pi} f(x) \cos m x dx = \frac{1}{2}.A_0 \int_d^{d+2.\pi} \cos m x dx + A_1 \int_d^{d+2.\pi} \cos x . \cos m x dx + \dots$$

$$+ A_m \int_d^{d+2.\pi} \cos m x . \cos m x dx + B_1 \int_d^{d+2.\pi} \sin x . \cos m x dx + \dots + B_m \int_d^{d+2.\pi} \cos m x . \sin m x dx \quad (2.38)$$

Bu denklemin sağ tarafındaki terimler;

$$\int_d^{d+2.\pi} \cos m x . \cos n x dx = 0 \quad m \neq n \text{ koşulu ile,}$$

$$\int_d^{d+2.\pi} \cos 2 m x dx = \pi \quad m \neq n \text{ koşulu ile,}$$

$$\int_d^{d+2.\pi} \cos m x . \sin n x dx = 0$$

Böylece (2.38) denklemi aşağıdaki şeklini alır;

$$\int_d^{d+2.\pi} f(x) \cos mx dx = A_m . \pi \text{ buradan } A_m \text{ sabiti aşağıdaki gibi bulunur;}$$

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2.\pi} f(x) . \cos mx dx \quad (2.39)$$

Benzer şekilde eşitliğin her iki yanı $\sin mx$ terimi ile çarpılarak B_m terimide bulunabilir.

$$\int_d^{d+2.\pi} \sin mx . \sin nx dx = 0 \quad m \neq n \text{ koşulu ile,}$$

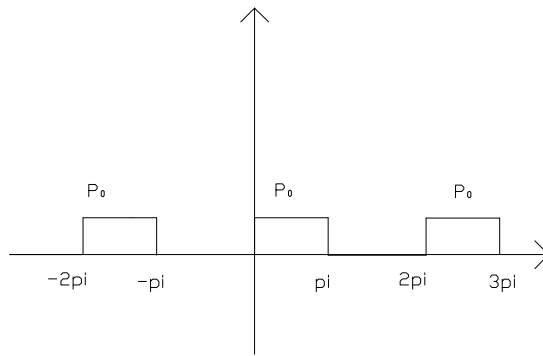
$$\int_d^{d+2.\pi} \sin^2 mx dx = \pi \text{ buradan hareketle } B_m \text{ sabiti;}$$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2.\pi} f(x) \sin mx dx \quad (2.40)$$

Böylece periyodik fonksiyon denklem (2.36) vasıtasıyla Fourier serisine açılabilir.

Buradaki sabitler (2.37), (2.39) ve (2.40) denklemleri vasıtasıyla bulunabilir[2].

Bir örnekleme ile işlemleri daha açık bir şekilde ifade edebiliriz;



Şekil 2.11 : Periyodik dikdörtgen fonksiyonun grafiği [2].

$f(x) = 0 \quad -\pi < x < 0 \quad \text{ve} \quad f(x) = P_0 \quad 0 < x < \pi$ buradaki grafikten (şekil 2.11) görüldüğü üzere $A_0 = P_0$ 'dır.

A_m sabiti bulmak için denklem (2.39)'ten yararlanarak;

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P_0 \cdot \cos mx dx \quad A_m = 0$$

B_m sabitini bulmak için denklem (2.41)'den yararlanarak;

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P_0 \cdot \cos mx dx = \frac{P_0}{m \cdot \pi} (-\cos mx) \Big|_0^{\pi} = -\frac{P_0}{m \cdot \pi} (\cos m\pi - 1)$$

m bir tek sayı değerini aldığında;

$$B_m = \frac{2 \cdot P_0}{m \cdot \pi}$$

m bir çift sayı değerini aldığında;

$$B_m = 0$$

Böylece bu periyodik fonksiyonun fourier açılımı;

$$f(x) = 0,5 \cdot P_0 + \frac{2 \cdot P_0}{\pi} \sum_{m=1,3,..}^{\infty} \frac{1}{m} \sin mx \quad \text{bu şekilde yazılabilir.}$$

Aralık Değişimi[2];

Fourier serisi açılımı plaka yada kabuk problemlerinin çözümüne uygulandığında değişim aralığını 2π yerine $2p$ ile göstermek daha uygun olacaktır.

Buradan hareketler (2.37), (2.39) ve (2.40) denklemleri yeniden yazılırsa;

$$A_0 = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(x) dx \quad (2.41)$$

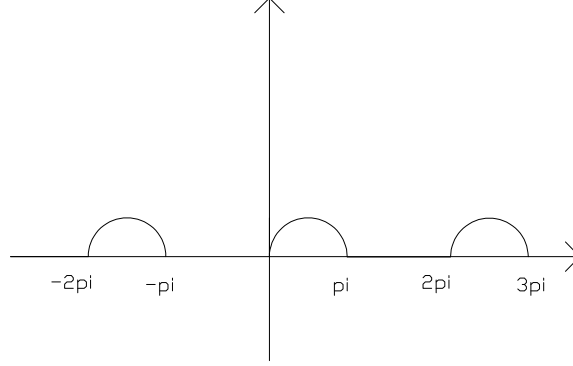
$$A_m = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(x) \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{p} dx \quad (2.42)$$

$$B_m = \frac{1}{p} \int_d^{d+2p} f(x) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{p} dx \quad (2.43)$$

burada $2p$ fonksiyon periyodudur.

Böylece Fourier serisi açılımı;

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{p} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{p} \quad (2.44)$$



Şekil 2.12 : Periyodik simetrik olmayan sinüsoidal fonksiyonun grafiği [2].

Simetrik olmayan bu periyodik fonksiyonun değişim aralığı $2p$, π değerine eşittir.

$$p = \frac{\pi}{2} \text{ ve } d = -\frac{\pi}{2}, \text{ dir.}$$

Buradan hareketler A_0 sabiti;

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{4}{\pi} \text{ şeklinde bulunur.}$$

A_m sabiti;

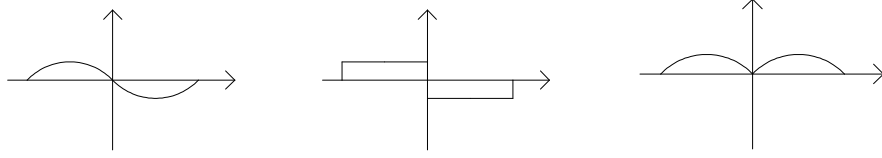
$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot x}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4 \cdot m^2 - 1}$$

$$B_m = 0$$

Yarım Seri Açılımı;

Eğer bir fonksiyon herhangi bir eksene göre simetrik olarak değişiyor ise katsayılar integrali yarım periyot üstünden alınabilir. Bu integral çift veya tek bir fonksiyonun integrali olabilir.(şekil 2.13)

$$A_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) dx \quad A_m = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \cos \frac{m\pi x}{p} dx \quad B_m = 0 \quad (2.45)$$



Şekil 2.13 : Soldan sağa, tek, çift ve tek periyodik simetrik fonksiyonlar.

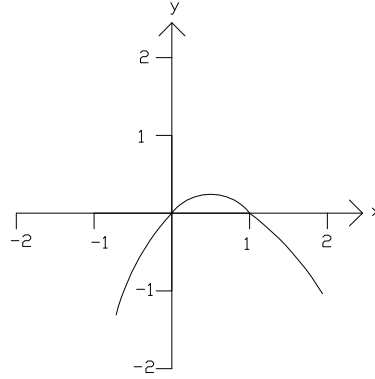
Tek fonksiyon için;

$$A_0 = A_m = 0$$

$$B_m = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cdot \sin \frac{m\pi x}{p} dx \quad (2.46)$$

Fark edilmelidir ki tek ve çift fonksiyonlar denklem (2.45) ve (2.46) ile ifade edilebilirler.

Bu durumu örnekleyerek daha iyi bir şekilde açıklayabiliriz;



Şekil 2.14 : $y = x - x^2$ fonksiyonunun grafiği.

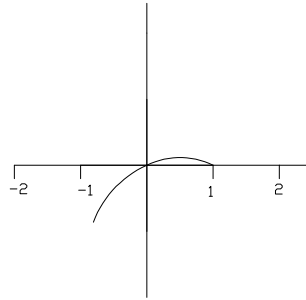
Yukarıdaki grafikte görülen eğri $y = x(1 - x)$ fonksiyonuna aittir. İlk amacımız burada fonksiyonun $-1 < y < 1$ aralığında Fourier sersine açmak ve grafiğini çizmektir.

$$d = -1 \text{ ve } 2p = 2$$

$$A_0 = \int_{-1}^1 (x(1-x)) dx = -\frac{2}{3} \quad A_m = \int_{-1}^1 (x(1-x)) \cdot \cos m\pi x dx = -\frac{4 \cdot \cos m\pi}{m^2 \cdot \pi^2}$$

$$B_m = \int_{-1}^1 (x(1-x)) \cdot \sin m\pi x dx = -\frac{2 \cdot \cos m\pi}{m\pi}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \cdot \cos m\pi}{m \cdot \pi} \cdot \cos m\pi x - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin m\pi}{m \cdot \pi} \cdot \sin m\pi x \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cdot \cos m\pi x - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2} \cdot \sin m\pi x \end{aligned}$$

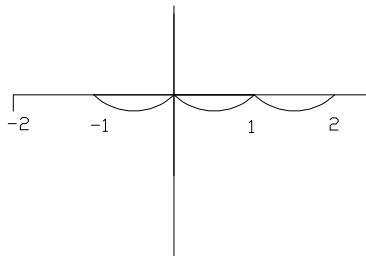


Şekil 2.15 : Sürekli fonksiyon [2].

İkinci olarak bir çift seri olarak fonksiyonu Fourier serisine açıp grafiğini çizilecektir.

$$A_0 = 2 \int_0^1 (x(1-x)) dx = \frac{1}{3} \quad A_m = \int_0^1 (x(1-x)) \cdot \cos m\pi x dx = -\frac{2 \cdot (1 + \cos m\pi)}{m^2 \cdot \pi^2}$$

$$B_m = 0 \quad f(x) = \frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (1 + \cos m\pi)}{m^2 \cdot \pi^2} \cdot \cos m\pi x$$



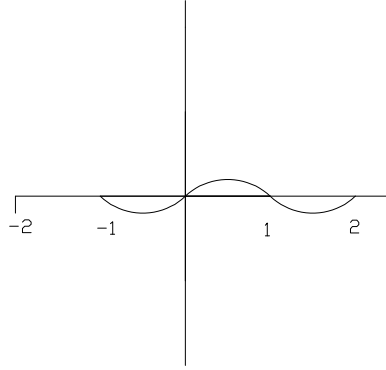
Şekil 2.16 : Çift fonksiyonun grafiği [2].

Son olarak tek fonksiyonun $0 < y < 1$ aralığında Fourier serisi açılımı ve bunun grafiği verilmiştir.

$$A_0 = A_m = 0$$

$$B_m = 2 \int_0^1 (x(1-x)) \cdot \sin m\pi x dx = \frac{4(1 - \cos m\pi)}{m^3 \cdot \pi^3}$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(1 - \cos m\pi)}{m^3 \cdot \pi^3} \cdot \sin m\pi x$$



Şekil 2.17 : Tek fonksiyonun grafiği [2].

Çift Fourier Serisi Açılımı [2];

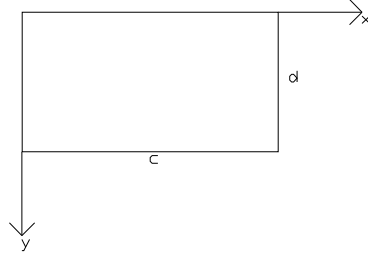
Dikdörtgen kesitli plaka probleminin çözümünün de, bu plakaya uygulanan kuvveti tek veya çift Fourier serisi ile ifade edilebilir. Bahsi geçen plakanın uzun kenarının uzunluğu c, kısa kenarının uzunluğu d olarak kabul edilirse; çift seri açılımı bir tek fonksiyon açılımı olarak yarım periyot değişim aralığı 0 ve c diğer kenar için ise 0 ve d arasında alınabilir.

Bu açıklamalar ışığın seri açılı aşağıdaki gibidir;

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{c} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{d} \quad (2.47)$$

$$B_{mn} = \frac{4}{c \cdot d} \int_0^d \int_0^c f(x, y) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{c} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{d} dx dy \quad (2.48)$$

Kenar uzunlukları c ve d olan dikdörtgen plakanın düzgün yayılı yük etkisi altında basıncın Fourier serisi yardımıyla ifadesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.18 : Dikdörtgen plaka.

Denklem (2.48)'den;

$$B_{mn} = \frac{4 \cdot p_0}{c \cdot d} \int_0^d \int_0^c \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{c} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{d} dx dy = \frac{16 \cdot p_0}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \quad \text{burada ki } m \text{ ve } n \text{ değerleri tek}$$

pozitif tamsayı değerleridir.

Böylece Fourier serisi açılımı;

$$f(x, y) = \frac{16 \cdot p_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m \cdot n} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{c} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{d}$$

3. DÖRT KENARINDAN BASİT MESNETLENMİŞ DİKDÖRTGEN KESİTLİ PLAKANIN DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİ ALTINDA ÇÖZÜMÜ

Esas amacımız olan ankastre mesnetli halin çözümü için bu basit mesnetli durumdaki çözüm yöntemleri burada açıklanacaktır. Esas itibariyle iki adet çözüm yöntemi mevcuttur. Bunlar Çift Foruier Serisi açılımıyla ve Tek Foruier Serisi açılımıyla elde edilir.

3.1 Çift Fourier Serisi Açılımı İle Probemin Çözümü

Düzgün yayılı yük etkisi altında dikdörtgen plakanın sehimini ilk olarak Navier basit mesnetli hal için 1820 yılında hesaplamıştır. Kullandığı hesap yöntemi denklem (2-26)'nın Çift Foruiersi açılımına dayanmaktadır.

Probleme ait diferansiyel denklem[2];

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$

Sınır Koşulları;

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0 \text{ ve } x=a \text{ için}) \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0 \text{ ve } y=b \text{ için})$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (3.1)$$

p_{mn} değeri aşağıdaki denklemden bulunabilir;

$$p_{mn} = \frac{4}{a \cdot b} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} dx dy \quad (3.2)$$

$f(x, y)$ fonksiyonu yüklemenin şeklini göstermektedir.

Benzer şekilde sehim denklemi aşağıdaki gibi verilebilir;

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \quad (3.3)$$

Basit mesnetli plaka için sınır koşullarında denklem yazılarak buradan w_{mn} katsayısı gösterilebilir. Dikdörtgen plakanın çözümü denklem (3.1)' dan elde edilebilir. Bilinmeyen katsayı w_{mn} ise (3.1) ve (3.3)' in denklem (2.26)'da yerine yazılmasıyla elde edilebilir.

Maksimum eğilme momenti[2];

Daha önce bahsettiğimiz yükleme fonksiyonu olan $f(x,y)$, düzgün yayılı yük durumunda tüm plaka yüzeyine homojen olarak etkidiği için bir p_0 sabiti olarak alınabilir.

$$p_{mn} = \frac{4 \cdot p_0}{a \cdot b} \int_0^b \int_0^a \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} dx dy \text{ denklemin integrali alınarak sabit bulunur.}$$

$$p_{mn} = \frac{4 \cdot p_0}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \cdot (\cos m \cdot \pi - 1) \cdot (\cos n \cdot \pi - 1) = \frac{16 \cdot p_0}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \text{ buradaki m ve n değerleri 1,3,5}$$

gibi tek sayı değerlerini alırlar.

Denklem (3.1)'da p_{mn} değeri yerine yazılırsa;

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \cdot p_0}{\pi^2 \cdot m \cdot n} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b} \text{ denklemi elde edilir.}$$

w_{mn} değerini bulman için denklem (3.3)'i denklem (2.25)'da yerine yazarsak;

$$w_{mn} = \frac{16 \cdot p_0}{\pi^6 \cdot m \cdot n \cdot d \cdot \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \text{ buradaki m ve ne değerleri 1,3,5 gibi tek sayı}$$

değerlerini alırlar.

Sonuç olarak sehim denkleminde aşağıdaki formda olur.

$$w = \frac{16 \cdot p_0}{\pi^2 \cdot D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}}{m \cdot n \cdot \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \text{ m ve n değerleri tek sayı değerlerini alırlar.}$$

Denklem (2.17)'den kenarlardaki eğilme momentleri aşağıdaki gibi bulunur.

Yazılan tüm denklemler için m ve n değerleri pozitif tek sayı değerlerini alırlar.

$$M_x = \frac{16.p_0}{\pi^4} \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \sin \frac{m.\pi.x}{a} \cdot \sin \frac{m.\pi.y}{b} \right]$$

$$M_y = \frac{16.p_0}{\pi^4} \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m.\pi.x}{a} \cdot \sin \frac{m.\pi.y}{b} \right]$$

$$M_{xy} = \frac{16.p_0.(1-\mu)}{\pi^4} \cdot \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \cos \frac{m.\pi.x}{a} \cdot \cos \frac{m.\pi.y}{b} \right]$$

$$F_{mn} = \frac{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \mu \cdot \left(\frac{n}{b}\right)^2}{m.n. \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}$$

$$G_{mn} = \frac{\mu \cdot \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}{m.n. \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}$$

$$H_{mn} = \frac{1}{a.b. \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2}$$

Plakanın simetrisinden dolayı maksimum sehim ve momentler $x = \frac{a}{2}$ ve $y = \frac{b}{2}$ değerlerinde oluşacaktır.

3.2 Tek Fourier Serisi Açılımıyla Problemin Çözümü

Levy (Timoshenko 1983) çeşitli yük etkisi altında basit mesnetlenmiş plaka problemi için Tek Fourier Serisini kullanarak 1900 yılında sehimini hesaplamıştır. Bu method Navier' in çözümünden daha pratiktir[2].

Çözüm iki elmandan oluşur birisi homojen diğeri ise özel çözümdür;

$$w = w_h + w_p^* \quad (3.4)$$

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \cdot \sin \frac{m.\pi.x}{a} \quad (3.5)$$

Buradaki f_m sadece y 'nin bir fonksiyonudur.

$x=0$ ve $x=a$ daki sınır koşulları diferansiyel denklemde yerine konulduğu zaman;

$$\left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot f_m(y) - 2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \frac{d^2 f_m(y)}{dy^2} + \frac{d^4 f_m(y)}{dy^4} \right] \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} = 0$$

Parantez içindeki terim sıfır iken çözüm aşağıdaki gibidir;

$$\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot f_m(y) - 2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \frac{d^2 f_m(y)}{dy^2} + \frac{d^4 f_m(y)}{dy^4} = 0 \quad (3.6)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibidir;

$$f_m(y) = f_m \cdot e^{R_{my}} \quad (3.7)$$

Denklem (3.7), (3.6)'te yerine yazıldığında;

$$R_m^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot R_m^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 = 0$$

Denklemin kökleri;

$$R_m = \pm \frac{m\pi}{a}, \pm \frac{m\pi}{a}$$

Denklem (3.6)'ün çözümü;

$$f_m(y) = A_m \sinh \frac{m\pi \cdot y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi \cdot y}{a} + C_m \cdot y \cdot \sinh \frac{m\pi \cdot y}{a} + D_m \cdot y \cdot \sinh \frac{m\pi \cdot y}{a}$$

buradan homojen çözüm;

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi \cdot y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi \cdot y}{a} + C_m \cdot y \cdot \sinh \frac{m\pi \cdot y}{a} + D_m \cdot y \cdot \sinh \frac{m\pi \cdot y}{a} \right) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a}$$

Burada büyük harf ve m indisleriyle belirtilen sabitler sınır koşullarında bulunabilir.

Denklem (3.3)'de yer alan özel çözüm;

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} \quad (3.8)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} \quad (3.9)$$

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} \cdot dx \quad (3.10)$$

Denklem (3.8) ve (3.9) plakanın diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa;

$$\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot k_m = \frac{p_m(y)}{D} \quad (3.11)$$

Denklem (3.10)'dan

$$p_m(y) = \frac{2 \cdot p_0}{a} \int_0^a \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} dx = \frac{2 \cdot p_0}{m\pi} (\cosh m\pi - 1) = \frac{4 \cdot p_0}{m\pi} \quad m=1,3,5...$$

Sonuç olarak denklem (3.11) aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot k_m = \frac{4 \cdot p_0}{m\pi \cdot D}$$

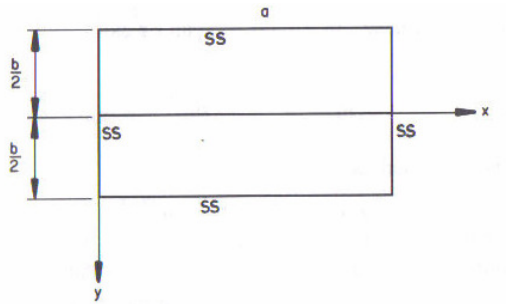
Bu denklemin özel çözümündeki k_m ise denklem (3.1)'den;

$$k_m = \frac{4 \cdot a^4 \cdot p_0}{m^5 \cdot \pi^5 \cdot D} \quad m=1,3,5...$$

Denklemin özel çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$w_p = \frac{4 \cdot a^4 \cdot p_0}{\pi^5 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} \quad m=1,3,5...$$

Aşağıdaki şekilden faydalanarak görülüyor ki; denklem (3.8)'deki A_m ve B_m terimleri y eksenindeki çökmenin x eksenine göre simetrik olmasından dolayı sıfırdır.



Şekil 3.1 : Basit mesnetli dikdörtgen plaka [2].

Homojen çözümü bu bilgiler ışığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$w_h = \sum_{m=1,3,...}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi \cdot x}{a} + C_m \sinh \frac{n\pi \cdot y}{b} \right) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a}$$

Özel ve homojen çözümleri toplayarak çözüme ulaşabiliriz.

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m.\pi.x}{a} + C_m \sinh \frac{n.\pi.y}{b} + \frac{4.a^4.p_0}{m^5.\pi^5.D} \right) \cdot \sin \frac{m.\pi.x}{a}$$

Y eksenini boyunca sınır koşulları;

$$w = 0 \quad y = \pm \frac{b}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad y = \pm \frac{b}{2}$$

İlk sınır koşulundan;

$$B_m \cosh \frac{m.\pi.b}{2.a} + C_m \cdot \frac{b}{2} \sinh \frac{m.\pi.b}{2.a} + \frac{4.a^4.p_0}{m^5.\pi^5.D} = 0$$

İkinci sınır koşulundan;

$$\left[B_m \cdot \left(\frac{m.\pi}{a} \right) + b.c_m \right] \cdot \cosh \frac{m.\pi.b}{2.a} + C_m \cdot \frac{m.\pi.b}{2.a} \sinh \frac{m.\pi.b}{2.a} = 0$$

Bu iki denklemin beraberce çözümünden sabitler;

$$C_m = \frac{2.a^3.p_0}{m^4.\pi^4.D \cdot \cosh \frac{m.\pi.b}{2.a}}, \quad B_m = \frac{4.p_0.a^4 + m.\pi.a^3.b.p_0 \cdot \tanh \frac{m.\pi.b}{2.a}}{m^5.\pi^5.D \cdot \cosh \frac{m.\pi.b}{2.a}}$$

4. DİKDÖRTGEN KESİTLİ DÖRT KENARINDAN ANKASTRE MESNETLİ İZOTROPİK İNCE PLAKANIN DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİ ALTINDA SEHİMİNİN HESAPLANMASI

4.1 Çözüm Yöntemi 1

Dikdörtgen plakanın ankastre mesnetli halde düzgün yayılı yük etkisi altında diferansiyel denkleminin kesin sonuçlarının incelenmesi bir çok sebepten dolayı önemlidir. Bu çözüm yönteminde plakanın diferansiyel denklemi bir sayısal method ile trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon şeklinde verilecektir. Son olarak görsel bir örnek verilecek ve sonuçlar daha önceki çözüm yöntemleriyle elde edilmiş sonuçlar ile karşılaştırılacaktır [3].

Burkulma ve eğilme konusundaki çalışmalar bir yüz yıldan beri devam etmekte olup bu çalışmalar Timoshenko'nun Monograph'ın bulunmaktadır. Fakat dört kenarından ankastre mesnetli hal için ince plakanın sehimini için kesin bir yöntem mümkün gözükmemektedir. Bu hal için yaklaşık çözümler önerilmektedir fakat bu yöntemlerde sonuçtan kayda değer sapmalar gözlenmektedir. Henckey 1913, Wojtaszak 1937, Timoshenko 1938, Evans 1939, Young, Hutchinson 1992, Wangetal 2002 , Taylor ve Govindjee tarafından plakanın sehimini bir çok kez farklı yöntemler ile hesaplamıştır. Bunlar bazıları yaklaşık yöntemlerdir.

Düzgün yayılı yük etkisi altında dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş dikdörtgen plakanın sehimini için önerilen iki temel hesap yöntemi vardır. Bunlar çift kosinüs serisi açılımı ve Henckey'nin çözümünün süper pozisyon yöntemiyle genelleştirilmiş hali olan yöntemdir. İlk sayısal yöntemlerden sonra Henckey tarafından bu alanda ilerleme kaydedilmiştir. Henckey'in geliştirdiği yöntem bilinen en kolay yakınsayan metottur ancak hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonların değerlendirilmesinde yaşanan sorunlardan dolayı bazı sakıncaları vardır. Burada serinin açılımındaki ilk teri kare plaka için tüm seriyi domine eder ama kenar oranı birden uzaklaştıkça seri bu özelliği yitirmeye başlar.

Hutchinson düzgün yayılı yük altında ankastre mesnetli izotropik ince plaka için Timoshenko ve Woinowsky-Krieger tarafından oluşturulmuş tablolardan çözümünde yararlanmıştır. Değişik kenar oranları için dikdörtgen ankastre mesnetli plakanın probleminin çözümünde Timoshenko'nun yönteminden yararlanmıştır. Bu metod prensip olarak karşılıklı kenar çiftlerinin bir moment etkisi altında eğilmesi sonucu oluşan ve dikdörtgen plakanın ankastre mesnetli halinde düzgün yayılı yük etkisi altındaki durumunun çözümünün beraberce kombine edilmesine dayanır.

Araştırmacılar son yaptıkları çalışmalar neticesinde tek kosinüs serisi açılımını önermektedirler. Burada bahsi geçen problem için kapsamlı bir çözüm yöntemi önerilecektir. Dörtkenarından ankastre mesnetli plakanın sehiminin çözüm fonksiyonu üç terime sahiptir. Bu terimlerden ilki şerit durumundaki deplasmanın fonksiyonunu, diğer iki terim ise kenar etkilerini göstermektedir. Bu terimlerdeki bilinmeyen katsayılar denklemlerin sınır koşulları için yazılmasıyla çeşitli kenar oranları için bulunabilir. Plaka merkezindeki deplasmanın fonksiyonunda ilk terim seriyi domine ettiği için seri kolayca yakınsayabilecektir [3].

4.1.1 Problemin Tanımı

Klasik eğilme teorisine göre, küçük sehimler plaka kalınlığına oranla küçük yer değiştirmeler olarak tanımlanmıştır. Genel olarak küçük sehim durumlarındaki, yükleme deplasman arasındaki ilişki aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilmiştir.

$$D\nabla^4 w = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

W burada orta yüzeydeki küçük deplasmanı, D eğilme rijitliğini, q ise birim alana gelen plaka normali doğrultusunda etkiyen yüklemeyi göstermektedir. $\nabla^2 \equiv \nabla^2 (\nabla)^2$ bi harmonik peratörü ve ∇^2 ise Laplace operatörünü göstermektedir. Boyu a, genişliği b, elastisite modülü E ve Poisson oranı ν olan plaka için hesaplamalar yapılacaktır [3].

4.1.2 Sınır Koşulları

Dikdörtgen izotropik ankastre mesnetli plaka için sınır koşulları [3];

$$a \geq b \text{ için } w = 0, \quad x = \pm a \text{ ve } w = 0 \quad y = \pm b \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad x = \pm a \text{ ve } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad y = \pm b$$

4.1.3 Çözüm

Bu problemin çözümü düzgün yayılı yük etkisi altında verilen sınır koşullarına göre Taylor ve Govindjee tarafından bulunmuştur. Çözümde ilk başta basit mesnetlenmiş plakanın düzgün yayılı yük etkisi altında sehim fonksiyonu bulunmuş ve sonra ankastre kenarların etkisini gösterilerek süper pozisyon yöntemi ile çözüme ulaşılmıştır. Burada hesap yapılırken serinin açılımında oldukça fazla terim göz önüne alınmıştır [3].

Serinin formu [3];

$$w(x, y) = \frac{a.b^4}{24.D} \left[\left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{m.\pi.y}{2b}}{\cosh \frac{m.\pi.y}{2b}} \cdot \left(A_m \cosh \frac{m.\pi.x}{2b} + B_m \cdot \frac{x}{a} \sinh \frac{m.\pi.x}{2b} \right) \right. \\ \left. + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} C_m \cdot \frac{\cos \frac{m.\pi.x}{2a}}{b \cdot \cosh \frac{m.\pi.b}{2a}} \cdot \left(y \cdot \sinh \frac{m.\pi.y}{2a} - b \cdot \tanh \frac{m.\pi.b}{2a} \cdot \cosh \frac{m.\pi.y}{2a} \right) \right] \quad (4.1)$$

Buradaki ilk terim $-b \leq y \leq b$ arasındaki şerit durum için sehim fonksiyonunu vermektedir.

A_m, B_m, C_m sabitlerini denklemleri sınır koşulları için düzenleyerek bulabiliriz.

$$A_m + B_m + \tanh \frac{m.\pi.a}{2b} = \frac{2^8 (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\pi^3} \cdot \left[\frac{1}{m^3} - \frac{12}{n^2 . m^5} \right] \quad (4.2)$$

$$A_m \cdot \frac{m.(m-1).\pi}{4b} \cdot \tanh \frac{m.\pi.a}{2b} + B_m \left(\frac{b}{a} \tanh \frac{m.\pi.a}{2b} + \frac{m.\pi}{2} \right) + \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} C_r \frac{(-1)^{\frac{m+r-2}{2}}}{8.r.\pi \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} = 0 \quad (4.3)$$

$$\sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} B_r \cdot \frac{2.a.b(-1)^{\frac{m+r-2}{2}} . r . m}{a^2 . b^2 + b^2 . m} \cdot \tanh \frac{r.\pi.a}{2b} - C_m \cdot \frac{a}{b} \cdot \left(\tanh \frac{m.\pi.b}{2.a} + \frac{\frac{m.\pi.b}{2.a}}{\cosh^2 \frac{m.\pi.b}{2.a}} \right) \\ + \sum_{r=1,3,\dots}^{\infty} A_r \cdot \frac{2.a.b(-1)^{\frac{m+r-2}{2}} . r . m}{a^2 . b^2 + b^2 . m} = 0 \quad (4.4)$$

Denklem (4.2), (4.3) ve (4.4)' ü, denklem (4.1)' de sınır koşullarında yerine yarsak;

$$w|_{x=0} = \frac{qb^4}{24.D} \cdot \left[1 + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left[A_m \cdot \frac{1}{\cosh \frac{m.\pi.a}{2b}} - C_m \frac{\sinh \frac{m.\pi.b}{2a}}{\cosh^2 \frac{m.\pi.a}{2b}} \right] \right] \quad (4.5)$$

Sınır koşullarından $B_m=0$ bulunur. Bu katsayının dikdörtgen plakanın geometri merkezindeki çökme değerine hiçbir etkisi yoktur.

Bu serinin açılmış hızlı bir şekilde yakınsar ve yeterli derece kesinlik sağlar. Buradaki hesaplama serinin ilk terimi göz önüne alınarak yapılmıştır. Plakanın kenar oranları sonsuza yakınsadığı zaman geometri merkezinin sehimi $0,0026017 \cdot \frac{q.b^4}{D}$ değerine yakınsamaktadır.

Ulaşılan sonuçlar Evans ve Taylor-Govindjee çalışmalarındaki sonuçlara yakındır [3].

4.1.4 Kare Plaka İçin Problemin Çözümü

Denklem (2-52), (2-53) ve (2-54)' ü kare plaka için serinin ilk iki terimini göz önüne alarak çözersek aşağıdaki katsayılarla ulaşırsınız [3].

$$A_1 = -2,96987, A_3 = -0,7630$$

$$C_1 = -0,585102, C_3 = 0.2540$$

Aşağıdaki çizelgede düzgün yayılı yük etkisi altında ankastre mesnetli kare plakanın sehimi için nümerik faktörler yer almaktadır.

Çizelge 4.1 : Kare plaka için bulunmuş nümerik sehim faktörleri [3].

Araştırmacı	Tarih	$\alpha = \frac{w(0,0)}{\left(\frac{p.a^4}{D}\right)}$ <i>Nümerik Faktör</i>
İmrak ve Gerdemeli	2007	0,00126401
Timoshenko, Woinowsk, Krieger	1959	0,00126
Evans	1940	0,00126
Wojtaszak	1937	0,0012637

Burada sehim değerleri elde edilirken serinin ikinci teriminin ihmal edildiği ve ilk terime göre hesaplamaların yapıldığı görülmektedir [3].

Çizelge 4.2 : Dikdörtgen plaka için farklı kenar oranlarında bulunmuş sehim faktörler [3].

b/a	İmrak ve Gerdemeli (α)	Evans (α)	Taylor ve Govindjee (α)
1	0,00126725	0,00126	0,00216532
1,2	0,00172833	0,00172	0,00172487
1,4	0,00207217	0,00207	0,00206814
1,6	0,00230399	0,00230	0,00229997
1,8	0,00244989	0,00245	0,00244616
2	0,00253625	0,00254	0,00253297
∞	0,00260417	0,00260	0,002604170

Yukarıdaki tablo farklı kenar oranlarında sehim için nümerik faktörleri içermektedir.

4.2 Çözüm Yöntemi 2

Bu makalede ankastre mesnetli dikdörtgen plaka için etkin ve kesin bir çözüm sunulacaktır. Bahsi geçen çözüm metodu çift kosinüs serisi açılımına dayanmaktadır. Çözüm yönteminde Sherman-Morisson-Woodburry formülüzasyanundan yararlanılacaktır. Bu serinin açılımı x ve y eksen takımları üzerindeki M ve N terimlerini içermektedir. Bu yüzden klasik çözüm metodu (MN)x(MN) denkleminin çözüm takımını içermektedir. Önerilen denklem M<N halinde MxN temrini içerecek şekilde ihmal ve kısıtlamalar yapılmasıdır. Burada çeşitli kenar oranları için nümerik sonuçlar elde edilecek ve Henckey'nin çözümündeki nümerik değerler ile karşılaştırılacaktır. Klasik çözüm yöntemindeki düzeltmeler ve ek basamaklar sonlu elemanlar yaklaşımı için verilecektir [4].

Yeni sonlu eleman modeli geliştirilirken, Reissner-Mindlin terosine dayanan plaka probleminde, ince plakanın limitlerinin kontrol edilmesi plaka davranışının anlaşılabilmesi için gereklidir. Burada tüm sınır koşullarında kesin kısıtlamalar verilmiştir ve buda plakanın ankastre mesnetli halini gerektirmektedir. Fakat ankastre mesnetli plaka için kesin bir çözüm yöntemi mümkün gözükmemektedir. Bu problem için yaklaşık bir yöntem vererek farklı kenar oranları için bir tablo oluşturacağız. Bahsi geçen problemin çözümü için plakanın diferansiyel denkleminin çözümüne ihtiyaç vardır [4].

Plakanın diferansiyel denklemi [4];

$$D\nabla^4 w = q \quad (4.6)$$

Sınır koşulları[4];

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (4.7)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.8)$$

Burada ∇^4 bi harmonik operatörü, q planın normalı doğrultusunda etkiyen yükü göstermektedir. D eğilme rijitliğidir ve (4.8) şeklinde formülüne edilir. Denlemedeki E elastisite sabiti, ν Poisson oranı, h plakanın kalınlığıdır [4].

Yaklaşık çözüm sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilebilir ama yakınsama oranlarını bulmak için çok kesin çözümlerin bilinmesi gerekmektedir. Bu aşamada iki temel çözüm yöntemi önerilir. Bunlar çift kosinüs serisi açılımı ve Henckey'nin çözüm yöntemidir. Henckey'nin çözümü kolayca yakınsar fakat bazı sakıncaları da beraberinde getirir. Çift kosinüs serisi yöntemi ise yavaş yakınsamaktadır. Bu durumda bahsi geçen yavaş yakınsamayı ortadan kaldırarak etkili bir çözüm yöntemi düşünmemiz gerekir. İçinde birçok terimi barındıran serinin açılımı aşağıdaki gibidir [4].

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos 2.m.\pi.\frac{x}{a}\right) \cdot \left(1 - \cos 2.n.\pi.\frac{y}{b}\right) . w_{mn} \quad (4.9)$$

Denklemedeki a ve b sabitleri kenar uzunlukları göstermektedir ve w_{mn} ise bir parametredir. Bahsi geçen bu parametre, Ritz veya alternatif olarak Galerkin metoduyla bir fonksiyon şeklinde verilebilir [4];

$$\Pi(w) = \frac{1}{2} \cdot \int_A D \cdot [\nabla^4 w]^2 dA - \int_A w_q dA = \min \quad (4.10)$$

Çözüm için aşağıdaki dönüşümü yapmak gerekmektedir.

$$\begin{aligned} x &= a.\xi; 0 \leq \xi \leq 1 \\ y &= b.\eta; 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad \text{fonksiyonu yeniden } \hat{\Pi} = \frac{\Pi}{a.b} \text{ şeklinde yazarsak;}$$

$$\hat{\Pi}(w) = \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{a^4} \cdot \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right]^2 dA - \int_0^1 \int_0^1 w.q d\xi = \min \quad (4.11.a)$$

Denklem (4.10)'u, (4.9)'de yerine yazar ve integralini alırsak sembolik olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$K.w = b \quad (4.11.b)$$

Bilinmeyen parametrelerin düzenlenmesi ile aşağıdaki denkleme ulaşırız [4].

$$w = (w_{11}, w_{21}, \dots, w_{m1}, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{mn})^T \quad (4.12)$$

K içinde yer alan ve değeri sıfır olmayan terimler;

$$\begin{aligned} K_{ii}^{(1)} &= \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 . n^2 \right]^2 ; i = M.(n-1) + m \\ K_{ij}^{(2)} &= 2m^4 ; i = M.(n-1) + m, j = M(p-1) + m; p = 1, 2, \dots, N \\ K_{ij}^{(3)} &= 2 \left(\frac{a}{b} . n \right)^4 ; i = M.(n-1) + m, j = M(p-1) + m; p = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (4.13)$$

Toplam K değeri [4];

$$K = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)} \quad (4.14)$$

Böylece denklemin sağ tarafı aşağıdaki terime eşit olmaktadır [4];

$$b = \frac{q.a^4}{a.\pi^4.D} . e^* \quad (4.15)$$

e^* : parça boyunca oluşan vektör.

4.2.1 Çözüm

Yukardaki serinin çözümü çok yavaş yakınsamaktadır ve moment, deplasman, gerekli enerji değerlerini hesaplamak için sonlu elemanların yakınsama durumunu değerlendirmek gerekmektedir. Bunun için ise yaklaşık 1 milyon terimi göz önünde bulundurmak gerekmektedir. Bu durumda dağınık matris yapısından faydalanmak için Sherman-Morrisson-Woodbury formülünün simetrik yapısını kullanacağız [4].

$$K = A + U.D.U^T \quad (4.16)$$

Burada A ve D diyagonal matris, U ise dikdörtgen matristir.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L & 0 & I \\ 0 & 1 & L & 0 & I \\ M & M & O & M & M \\ 0 & 1 & L & 1 & I \end{bmatrix}_{(M.N) \times (M+N)} \quad (4.17)$$

Burada 1 değeri M teriminin uzunluğunun birim sütun vektörüdür, 0 M teriminin uzunluğunun birim sıfır birim vektörüdür ve I ise MxM kare matrisidir[4].

Yukarıdaki yapıyla birlikte , parametreler için çözüm aşağıdaki formda gösterilebilir;

$$(A + U.D.U^T).w = b \quad (4.18)$$

Sherman-Morrisson-Woodbury formülünün simetrik yapısını kullanarak çözüm;

$$w = \left[A^{-1} - A^{-1}.U(D^{-1} + U^T.A^{-1}.U)^{-1}.U^T.A^{-1} \right].b$$

Çözüm adımları [4];

- 1) Kurulum
- 2) Dağılık U matrisin transpozesi ile çarpılması

$$v_0 = U^T.w_0$$

- 3) v_1 için denklemin çözümü;

$$(D^{-1} + U^T.A^{-1}.U).v_1 = v_0$$

- 4) Dağılık U matrisi ile çarpımı;

$$w_1 = U.v_1$$

- 5) Çözümün toplamı

$$w = w_0 - A^{-1}.w_1$$

Yukarıdaki çözüm adımları iki diyagonal matrisin inversiyonunu içerir. Bir vektörün U ile çarpımı ve bunun transpozesi (MN)x(M+N) büyüklüğünü verir. Sistemin büyüklüğü (MN)x(MN) değerini de içerir [4].

Denklem sisteminin basit bir dağınık matrisin doğal yapısından yararlanarak çözümü;

$$U^T . A^{-1} . U = \begin{bmatrix} D_1 & G \\ G^T & D_2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Burada D_1 ve D_2 diyagonal matrisleri N ve M uzunluklarının dizisidir, G is NxM şeklinde bir matristir [4].

Denklem çiftinin çözümünü, birim diyagonal matris ile çarpımıyla buluruz;

$$S . (D^{-1} + U^T . A^{-1}) . S . v_1^* = S . v_0$$

Buradaki S diyagonal matrisi göstermektedir.

$$S = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}^{-\frac{1}{2}}$$

Çözüm vektörü yeniden yazılırsa;

$$v_1 = S . v_1^*$$

Sonuç katsayılar matrisi bir büyütme çarpımıyla birlikte oldukça az terim ihtiva ettiği açıkça görülebilmektedir [4].

Yukarıdaki denklemin çözümü aşağıdaki yapıları kullanarak elde edilebilir.

$$S . v_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \text{ ve } v_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Bu sayede aşağıdaki denklem çifti elde edilebilir;

$$\begin{aligned} x_1 + G . x_2 &= v_1 \\ x_2 + G^{-1} . x_1 &= v_2 \end{aligned}, \text{ ikinci denklem birincide yerine koyulduğunda bir NxN terimi}$$

eldedilir.

$[I - G . G^T] . x_1 = v_1 - G . v_2$, x_1 hesaplandıktan sonra, x_2 ikinci denklemde yerine yazılmasıyla elde edilebilir.

Bir kez v_1 hesaplandıktan sonra, herhangi bir noktadaki çökmeyi bulmak için denklem (4.13) deki serinin toplamı alınabilir.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{4 \cdot \pi^2}{a^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 \cdot \cos 2 \cdot m \cdot \pi \cdot \xi (1 - \cos 2 \cdot n \cdot \pi \cdot \eta) \cdot w_{mn},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{4 \cdot \pi^2}{b^2} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N n^2 \cdot (1 - \cos 2 \cdot m \cdot \pi \cdot \xi) \cdot \cos 2 \cdot n \cdot \pi \cdot \eta \cdot w_{mn},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{a \cdot b} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{4 \cdot \pi^2}{a \cdot b} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N m \cdot n \cdot \sin 2 \cdot m \cdot \pi \cdot \xi \cdot \sin 2 \cdot n \cdot \pi \cdot \eta \cdot w_{mn},$$

Bu denklemlerden hareketle momentler aşağıdaki şekilde bulunur [4];

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

Yapılan işi ya da sarf edilen enerji miktarını sehim denkleminin integralini alarak bulabiliriz [4];

$$E = \int_A q \cdot w(x, y) dA = a \cdot b \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}$$

Yukarıdaki çözümü kare plaka için uyguladığımızda, M değeri N değerine eşit olur ve artış gösteren değeri M değeri olarak seçersek plaka merkezindeki çökmeyi ve aynı zamanda kenarlarda oluşan maksimum momenti, ayrıca gerekli olan işi veren bir tablo oluşturabiliriz [4].

Çizelge 4.3 : Dikdörtgen plaka için farklı kenar oranlarında bulunmuş sehim, kenar, merkez moment ve enerji nümerik faktörleri [4].

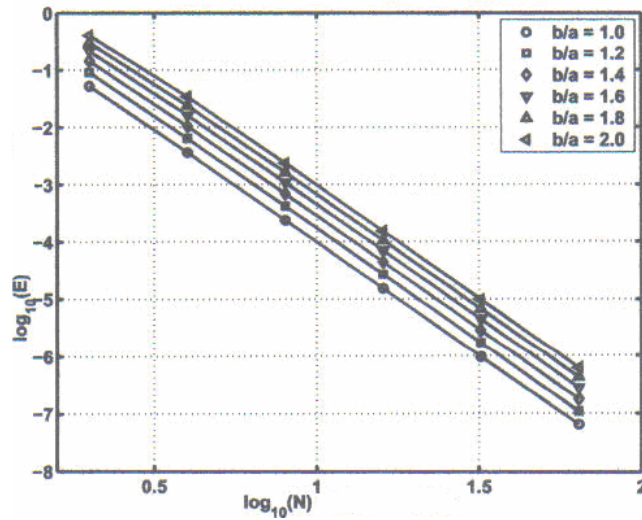
M	Merkez sehim $\frac{D}{(q \cdot a^4)} \cdot 10^3$	(M_x) kenar $\frac{10^2}{(q \cdot a^2)}$	(M_x) merkez $\frac{10^2}{(q \cdot a^2)}$	(E) iş $\frac{D}{(q^2 \cdot a^4)} \cdot 10^4$	No. k
200	1,265319036	-5.111075630	2.290436770	3.891200386	3.9208
400	1,265319081	-5.22212116	2.290490957	3.891200726	4.0035
600	1,265319086	-5.125930478	2.290501018	3.891200761	4.00442
800	1,265319087	-5.27790817	2.290504543	3.891200769	4.0702
1000	1,265319087	-5.128907392	2.290506175	3.891200772	4.0890
1200	1,265319087	-5.129651929	2.290507062	3.891200773	
1400	1,265319087	-5.130183817	2.290507597	3.891200774	
1600	1,265319087	-5.131141375	2.290507944	3.891200774	
1800	1,265319087	-5.130893100	2.290508352	3.891200774	
2000	1,265319087	-5.13337648	2.290509078	3.891200775	

Yukarıdaki tabloda kare plaka için plaka merkezindeki sehim, kenar momentleri ve gerekli iş miktarı verilmiştir [4].

Aşağıdaki tabloda çift kosinüs serisinin açılımı ve Hencky yöntemiyle elde edilen farklı kenar oranlarındaki dikdörtgen ankastre mesnetli plakanın düzgün yayılı yük etkisi altındaki plaka merkezindeki sehim, kenarlarda oluşan momentler ve gerekli olan iş miktarı verilmiştir [4].

Çizelge 4.4 : Farklı kenar oranları için çift kosinüs serisi ve Hencky yönteminin karşılaştırması [4].

b/a	Yöntem	Merkez sehim $\frac{D.10^3}{(q.a^4)}$	(M_x) kenar $\frac{10^2}{(q.a^2)}$	(M_y) kenar $\frac{10^2}{(q.a^2)}$	(M_x) merkez $\frac{10^2}{(q.a^2)}$	(M_y) merkez $\frac{10^2}{(q.a^2)}$	(E) iş $\frac{D.10^4}{(q^2.a^4)}$
1.2	Çift Kosinüs Hencky	1.724870503 1.724870503	-6.38 -6.3897878	-5.5 -5.5407598	2.99715 2.9971587	2.28403 2.2840439	6.41537043 6.41537043
1.4	Çift Kosinüs Hencky	2.068143209 2.068143209	-7.25 -7.2591841	-5.6 -5.6802526	3.49740 3.4974095	2.12663 2.1266331	9.14890620 9.14890620
1.6	Çift Kosinüs Hencky	2.29996697 2.299966977	-7.80 -7.8033766	-5.70 -5.709889	3.81817 3.8181737	1.9250 1.9250601	11.94175880 11.94175880
1.8	Çift Kosinüs Hencky	2.446162656 2.446162656	-8.11 -8.1185893	-5.70 -5.7066637	4.00944 4.0094462	1.753576 1.75357682	14.73958338 14.73958338
2	Çift Kosinüs Hencky	2.532955769 2.532955769	-8.28 -8.2866062	-5.69 -5.698664	4.11549 4.1154990	1.58080 1.5808029	1.753009520 1.753009520
20	Çift Kosinüs Hencky	2.6041666 2.6041666	-8.33 -8.33333	-5.6 -5.68862	4.1666 4.16666667	1.25 1.25000000	267.5393 267.5393518



Şekil 4.1 : Dikdörtgen plaka için faktör değişimi [4].

4.3 Çeşitli Numunelerin Sehimin Hesaplanması

Hesaplanacak plakanın malzemesinin cinsi çelik olup izotropik plakadır. Düzgün yayılı yükleme kum vasıtasıyla bir dikdörtgen kılavuz prizmasının içine yapılacaktır. Plakanın davranışı ilk olarak aynı kenar oranı, aynı yük ve aynı etki alanında farklı kalınlıklardaki sehim göz önüne alınarak incelenecektir. Diğer incelemede tüm karakteristik özellikler sabit tutularak uygulanan yük değişken olarak alınacaktır. Son inceleme ise plakanın diğer tüm karakteristik özellikleri sabit tutularak nümerik kenar oranı faktörü değişken olarak alınacaktır.

4.3.1 Kalınlık Değişimine Göre Davranışın İncelenmesi

b: uzun kenar, a: kısa kenar.

Kenar oranı $\frac{b}{a} = 1$ olan kare plakanın incelenmesi;

Kumun yoğunluğu: $2,707.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, Çeliğin yoğunluğu: $7,85.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$

Levha 1;

Numunenin boyutları;

En (a): 500mm, Boy (b):500mm, Kalınlık(t_1): 1.5 mm

Ağırlık: $m_{Levha1} = \rho_{çelik} . a . b . t_1 = 7,85.10^{-6} . 500 . 500 . 1,5 = 2,94375 \text{ kg}$

Kumun kütlesi;

$m_{kum} = \rho_{kum} . a . b . h_1 = 2,707.10^{-6} . 500 . 500 . 30 = 20,3025 \text{ kg}$

Yükleme;

$P_1 = (m_{Levha1} + m_{kum}) . g = (2,94375 + 20,3025) . 9,807 = 227,9759738 \text{ N}$

Yayılı yük;

$p_{01} = \frac{P_1}{A} = \frac{P_1}{a . b} = \frac{227,9759738}{500^2} = 9,11903895.10^{-4} \text{ N/mm}^2$

$\alpha = 0,00126725$, kare plaka için nümerik faktör, $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poission oranı.

$$D_1 = \frac{E.t_1^3}{12.(1-\mu^2)} = \frac{200000.1,5^3}{12.(1-0,3^2)} = 61813,18681$$

$$w_1(0,0) = \alpha. \frac{p_{01}.b_1^4}{D_1} = 0,00126725. \frac{9,11903895.10^{-4}.500^4}{61813,18681}$$

$$w_1 = 1,168450324 \text{ mm}$$

Levha 2;

Numunenin boyutları;

En (a): 500mm, Boy (b):500mm, Kalınlık(t_2): 2 mm

$$\text{Ağırlık: } m_{\text{Levha2}} = \rho_{\text{çelik}} . a . b . t_2 = 7,85.10^{-6}.500.500.2 = 3,925 \text{ kg}$$

Kumun kütlesi;

$$m_{\text{kum}} = \rho_{\text{kum}} . a . b . h = 2,707.10^{-6}.500.500.30 = 20,3025 \text{ kg}$$

Yükleme;

$$P_2 = (m_{\text{levha2}} + m_{\text{kum}}) . g = (3,925 + 20,3025).9,807 = 237,5990925 \text{ N}$$

Yayıllı yük;

$$p_{02} = \frac{P_2}{A} = \frac{P_2}{a.b} = \frac{237,5990925}{500^2} = 9,5039637.10^{-4} \text{ N/mm}^2$$

$\alpha = 0,00126725$, kare plaka için nümerik faktör, $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poission oranı.

$$D_2 = \frac{E.t_2^3}{12.(1-\mu^2)} = \frac{200000.2^3}{12.(1-0,3^2)} = 146520,1465$$

$$w_2(0,0) = \alpha. \frac{p_{02}.b_2^4}{D_2} = 0,00126725. \frac{9,5039637.10^{-4}.500^4}{146520,1465}$$

$$w_2 = 0,5137475241 \text{ mm}$$

Levha 3;

Numunenin boyutları; En (a): 500mm, Boy (b):500mm, Kalınlık(t_3): 2.5 mm

Ağırlık: $m_{Levha3} = \rho_{\text{çelik}} . a . b . t_3 = 7,85.10^{-6} . 500.500.2.5 = 4.90625kg$

Kumun kütlesi;

$$m_{kum} = \rho_{kum} . a . b . h = 2,707.10^{-6} . 500.500.30 = 20,3025kg$$

Yükleme;

$$P_3 = (m_{levha3} + m_{kum}) . g = (4.90625 + 20,3025) . 9,807 = 247,2222113N$$

Yayıllı yük;

$$p_{03} = \frac{P_3}{A} = \frac{P_3}{a.b} = \frac{247,2222113}{500^2} = 9,88888845.10^{-4} N/mm^2$$

$\alpha = 0,00126725$, kare plaka için nümerik faktör, $E = 200000 N/mm^2$ plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poission oranı.

$$D_3 = \frac{E . t_3^3}{12 . (1 - \mu^2)} = \frac{200000 . 2,5^3}{12 . (1 - 0,3^2)} = 286172,1612$$

$$w_3(0,0) = \alpha . \frac{p_{03} . b_3^4}{D_3} = 0,00126725 . \frac{9,88888845.10^{-4} . 500^4}{286172,1612}$$

$$w_3 = 0,27369211945 mm$$

Levha 4;

Numunenin boyutları;

En (a): 500mm, Boy (b):500mm, Kalınlık(t_4): 3 mm

Ağırlık: $m_{Levha4} = \rho_{\text{çelik}} . a . b . t_4 = 7,85.10^{-6} . 500.500.3 = 5,8875kg$

Kumun kütlesi;

$$m_{kum} = \rho_{kum} . a . b . h = 2,707.10^{-6} . 500.500.30 = 20,3025kg$$

Yükleme;

$$P_4 = (m_{levha4} + m_{kum}) . g = (5,8875 + 20,3025) . 9,807 = 256,84533N$$

Yayıllı yük;

$$p_{04} = \frac{P_4}{A} = \frac{P_4}{a.b} = \frac{256,84533}{500^2} = 1,02738132.10^{-3} \text{ N/mm}^2$$

$\alpha = 0,00126725$, kare plaka için nümerik faktör, $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poission oranı.

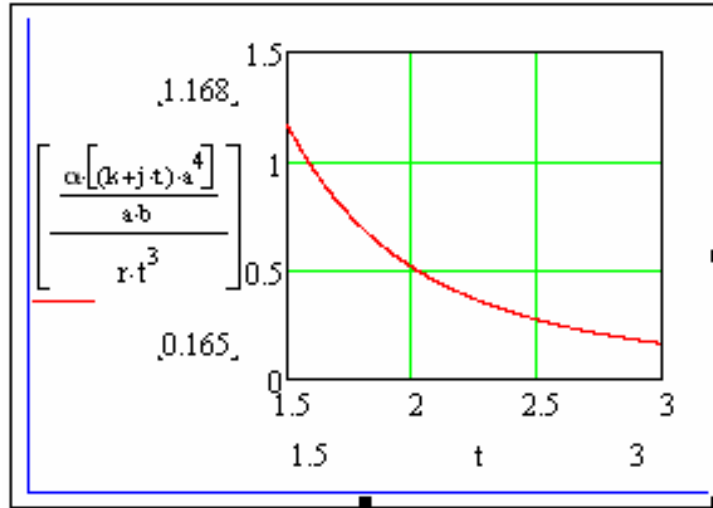
$$D_4 = \frac{E.t_4^3}{12.(1-\mu^2)} = \frac{200000.3^3}{12.(1-0,3^2)} = 494505.4945$$

$$w_4(0,0) = \alpha. \frac{p_{04}.b_4^4}{D_4} = 0,00126725. \frac{1,02738132.10^{-3}.500^4}{494505.4945}$$

$$w_4 = 0,1645518655 \text{ mm}$$

Çizelge 4.5 : Kare plaka için değişik kenar oranlarında sehım değerleri.

Levha Numarası	Kalınlık(t) mm	Yayıllı Yük(p) pa	Sehım mm
1	1,5	$9,11903895.10^{-4}$	1,168450324
2	2	$9,5039637.10^{-4}$	0,5137475241
3	2,5	$9,88888845.10^{-4}$	0,2736921194
4	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,164551865



Şekil 4.2 : Kare plaka için sehımın plaka kalınlığına bağılı değışımı.

Şekil 4.2’de verilen tablo için karakteristikler;

k: uygulanan dış kuvvet, t: plaka kalınlığı, $r = \frac{E}{12.(1-\mu^2)}$, μ : poisson oranı, E:

elastisite modülü, j: bir birim kalınlıktaki plakanın ağırlığından oluşan kuvvet,

a: plakanın kısa kenarı, b: plakanın uzun kenarı

Grafik Mathcad paket programında oluşturulmuştur, y ekseni sehimini gösterirken, x ekseni kalınlığı göstermektedir. Kalınlık değişiminin uygulanan basınca plakanın ağırlığının değişiminden meydana gelmektedir. Bu etkiyi göstermek için r değeri tanımlanmıştır. Grafik kenar oranı bir olan kare plaka içindir.

Kenar oranı $\frac{b}{a} = 2$ olan kare plakanın incelenmesi;

Kumun yoğunluğu: $2,707.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$, Çeliğin yoğunluğu: $7,85.10^{-6} \text{ kg/mm}^3$

Levha 5

Numunenin boyutları;

En (a): 250mm, Boy (b):500mm, Kalınlık (t_2): 2 mm

Ağırlık: $m_{Levha5} = \rho_{çelik} . a . b . t_5 = 7,85.10^{-6} . 250 . 500 . 2 = 1,9625 \text{ kg}$

Kumun kütlesi;

$m_{kum} = \rho_{kum} . a . b . h = 2,707.10^{-6} . 250 . 500 . 30 = 10,15125 \text{ kg}$

Yükleme;

$P_5 = (m_{levha5} + m_{kum}) . g = (1,9625 + 10,15125) . 9,807 = 118,7995463 \text{ N}$

Yayıllı yük;

$p_{05} = \frac{P_5}{A} = \frac{P_5}{a . b} = \frac{237,5990925}{500.250} = 9,5039637.10^{-4} \text{ N/mm}^2$

$\alpha_2 = 0,00253625$, kare plaka için nümerik faktör, $E = 200000 \text{ N/mm}^2$ plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poisson oranı.

$$D_2 = \frac{E.t_2^3}{12.(1-\mu^2)} = \frac{200000.2^3}{12.(1-0,3^2)} = 146520,1465$$

$$w_5(0,0) = \alpha. \frac{p_{05}.b_5^4}{D_5} = 0,00253625. \frac{9,5039637.10^{-4}.250^4}{146520,1465}$$

$$w_5 = 0,0642678151mm$$

Levha 6;

Numunenin boyutları;

En (a): 250mm, Boy (b):500mm, Kalınlık(t_3): 2.5 mm

$$\text{Ağırlık: } m_{Levha6} = \rho_{çelik}.a.b.t_6 = 7,85.10^{-6}.250.500.2,5 = 2,453125kg$$

Kumun kütlesi;

$$m_{kum} = \rho_{kum}.a.b.h = 2,707.10^{-6}.250.500.30 = 10,15125kg$$

Yükleme;

$$P_6 = (m_{levha6} + m_{kum}).g = (2,453125 + 10,15125).9,807 = 123,6111056N$$

Yayıllı yük;

$$p_{06} = \frac{P_6}{A} = \frac{P_6}{a.b} = \frac{123,6111056}{250.500} = 9,88888845.10^{-4} N/mm^2$$

$\alpha_2 = 0,00253625$ dikdörtgen plaka için nümerik faktör, $E = 200000 N/mm^2$

plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poisson oranı.

$$D_3 = \frac{E.t_3^3}{12.(1-\mu^2)} = \frac{200000.2,5^3}{12.(1-0,3^2)} = 286172,1612$$

$$w_6(0,0) = \alpha. \frac{p_{03}.b_6^4}{D_6} = 0,00253625. \frac{9,88888845.10^{-4}.250^4}{286172,1612}$$

$$w_6 = 0,03423514375mm$$

Levha 7;

Numunenin boyutları; En (a): 250mm, Boy (b):500mm, Kalınlık(t_7): 3 mm

Ağırlık: $m_{Levha7} = \rho_{çelik} . a . b . t_7 = 7,85.10^{-6} . 250.500.3 = 2,94375kg$

Kumun kütlesi;

$$m_{kum} = \rho_{kum} . a . b . h = 2,707.10^{-6} . 250.500.30 = 10,15125kg$$

Yükleme;

$$P_7 = (m_{levha7} + m_{kum}) . g = (2,94375 + 10,15125) . 9,807 = 128,422665N$$

Yayıllı yük;

$$p_{07} = \frac{P_7}{A} = \frac{P_7}{a.b} = \frac{128,422665}{250.500} = 1,02738132.10^{-3} N/mm^2$$

$$\alpha_2 = 0,00253625 \text{ dikdörtgen plaka için nümerik faktör, } E = 200000 N/mm^2$$

plakanın elastisite modülü, $\mu = 0,3$ plaka malzemesine ait poission oranı.

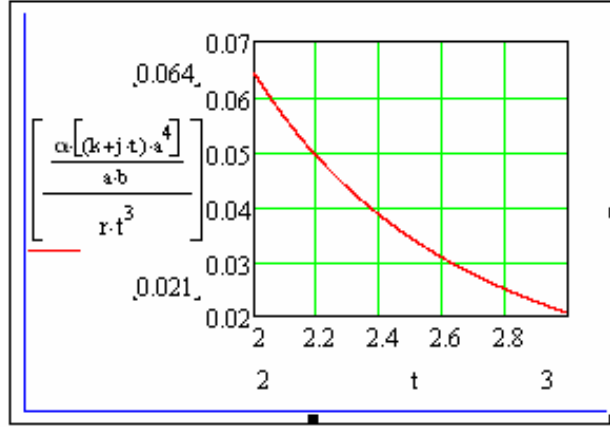
$$D_7 = \frac{E . t_7^3}{12 . (1 - \mu^2)} = \frac{200000 . 3^3}{12 . (1 - 0,3^2)} = 494505.4945$$

$$w_7(0,0) = \alpha_2 . \frac{p_{07} . b_7^4}{D_7} = 0,00253625 . \frac{1,02738132.10^{-3} . 250^4}{494505.4945}$$

$$w_7 = 0,02058318789mm$$

Çizelge 4.6 : 2 kenar oranı için farklı kalınlıklarda sehim değerleri.

Levha numarası	Kalınlık(t) mm	Yayıllı Yük(p) pa	Sehim mm
5	2	$9,5039637.10^{-4}$	0,0642678151
6	2,5	$9,88888845.10^{-4}$	0,03423514375
7	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,02058313789



Şekil 4.3 : Kenar oranı 2 olan plaka için sehimin plaka kalınlığına bağlı değişimi.

Şekil 4.3’de verilen tablo için karakteristikler;

Kenar oranı 2 olan plaka için greafik Mathcad programında oluşturulmuştur.

k: uygulanan dış kuvvet, t: plaka kalınlığı, $r = \frac{E}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$, μ : poission oranı, E:

elastisite modülü, j: bir birim kalınlıktaki plakanın ağırlığından oluşan kuvvet,

a: plakanın kısa kenarı, b: plakanın uzun kenarı

Grafikteki y eksenini sehim gösterirken, x eksenini kalınlığı göstermektedir. Kalınlık değişiminin uygulanan basınca plakanın ağırlığının değişiminden meydana gelmektedir. Bu etkiyi göstermek için r değeri tanımlanmıştır.

4.3.2 Kenar Oranlarının Değişimine Göre Davranışın İncelenmesi

Bu incelemede yüzeye etki eden basınç, plaka kalınlığı ve plakanın uzun kenarı sabit tutularak kenar oranının değişimine göre sehimin nasıl değiştiği incelenicektir.

Sabitler karakteristikler;

Uzun kenar (a): 500 mm, Plaka kalınlığı (t): 3 mm,

Yüzeye etki eden basınç (p_0): $1,02738132 \cdot 10^{-3} \frac{N}{mm^2}$

$$D = \frac{Et^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} = \frac{200000 \cdot 3^3}{12 \cdot (1 - 0,3^2)} = 494505.4945$$

Değişkenler (Plaka kenar oranları $\frac{b}{a}$);

Levha 8

$$\frac{b}{a} = 1 \text{ için nümerik faktör } \alpha_1 = 0,00126725, a = 500mm$$

Levha 9

$$\frac{b}{a} = 1,2 \text{ için nümerik faktör } \alpha_2 = 0,00172833, a = 600mm$$

Levha 10

$$\frac{b}{a} = 1,4 \text{ için nümerik faktör } \alpha_3 = 0,0020717, a = 700mm$$

Levha 11

$$\frac{b}{a} = 1,6 \text{ için nümerik faktör } \alpha_4 = 0,00230399, a = 800mm$$

Levha 12

$$\frac{b}{a} = 1,8 \text{ için nümerik faktör } \alpha_5 = 0,00244989, a = 900mm$$

Levha 13

$$\frac{b}{a} = 2 \text{ için nümerik faktör } \alpha_6 = 0,00253625, a = 1000mm$$

Bu kenar oranları için diğer tüm değişkenleri sabit tutarak, kenar oranına bağlı sehım faktörüyle sehım arasındaki ilişki incelenmiştir.

Levha 8 için;

$$\alpha_1 = 0,00126725$$

$$w_8(0,0) = \alpha_1 \cdot \frac{p_0 \cdot b^4}{D} = 0,00126725 \cdot \frac{1,02738132 \cdot 10^{-3} \cdot 500^4}{494505,4945}$$

$$w_8 = 0,1645518847mm$$

Levha 9 için;

$$\alpha_2 = 0,00172833$$

$$w_9(0,0) = \alpha_2 \cdot \frac{p_0 \cdot b^4}{D} = 0,00172833 \cdot \frac{1,02738132 \cdot 10^{-3} \cdot 500^4}{494505.4945}$$

$$w_9 = 0,2244229307mm$$

Levha 10 için;

$$\alpha_3 = 0,0020717$$

$$w_{10}(0,0) = \alpha_3 \cdot \frac{p_0 \cdot b^4}{D} = 0,0020717 \cdot \frac{1,02738132 \cdot 10^{-3} \cdot 500^4}{494505.4945}$$

$$w_{10} = 0,2690093821mm$$

Levha 11 için;

$$\alpha_4 = 0,00230399$$

$$w_{11}(0,0) = \alpha_4 \cdot \frac{p_0 \cdot b^4}{D} = 0,00230399 \cdot \frac{1,02738132 \cdot 10^{-3} \cdot 500^4}{494505.4945}$$

$$w_{11} = 0,2991721419mm$$

Levha 12 için;

$$\alpha_5 = 0,00244989$$

$$w_{12}(0,0) = \alpha_5 \cdot \frac{p_0 \cdot b^4}{D} = 0,00244989 \cdot \frac{1,02738132 \cdot 10^{-3} \cdot 555.556^4}{494505.4945}$$

$$w_{12} = 0,3181171961mm$$

Levha 13 için;

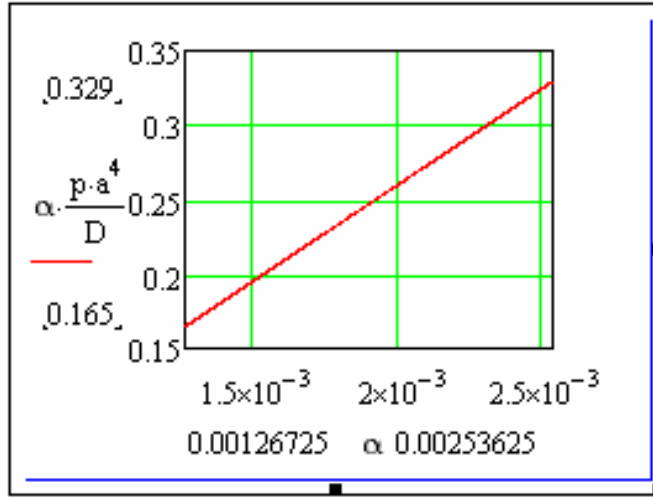
$$\alpha_6 = 0,00253625$$

$$w_{13}(0,0) = \alpha_6 \cdot \frac{p_0 \cdot b^4}{D} = 0,00253625 \cdot \frac{1,02738132 \cdot 10^{-3} \cdot 500^4}{494505.4945}$$

$$w_{13} = 0,3293310062mm$$

Çizelge 4.7 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için sehim değerleri.

Levha numarası	Kenar oranı(b/a)	Kalınlık(t) mm	Yayıllı Yük(p) pa	Sehim mm
8	1	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,1645518847
9	1,2	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,2244229307
10	1,4	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,2690093821
11	1,6	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,2991721419
12	1,8	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,3181171961
13	2	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,3293310062



Şekil 4.4 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için sehim karakteristiği.

Şekil 4.4'teki grafik karakteristikleri;

a: plakanın kısa kenarı, D: eğilme rijitliği, p: plaka yüzeyine etki eden basınç.

5. SONLU ELEMANLAR METODU

Çözülmesi uzun zaman alan karmaşık problemlerin, daha basit ve kısa zamanda çözmek için bu problemlere eşdeğer ancak daha basit hale getirilmiş problemlerin çözüme gidilmesi sonlu elemanlar metodunun temelindeki fikirdir. Genellikle, basitleştirmeye gidilmesi sonucunda doğru sonuç yerine, yaklaşık bir sonuç bulunmaktadır. Günümüzde, sonlu elemanlar metodlarının bilgisayarlarda uygulanması sonucunda hemen her problem istenilen ölçüler arasında yaklaşık sonuçlar elde edilmektedir [5].

Sonlu elemanlar metodunda, çözüm bölgesinin çok sayıda sonlu ve birbirine bağlı elemanlardan oluşmaktadır. Çözüme gidilirken, sonlu elemanların hepsi çeşitli teoriler kullanılarak, sınır koşul ve denge denklemlerin tanımlanmasıyla yaklaşık sonuçlar bulunmaktadır [5].

5.1 Sonlu Elemanlar Metodunun Kısa Tarihi

Günümüzde sonlu elemanlar metodu olarak bilinen çözüm metodlarının arkasında bulunan temel fikirler yüzyıllar öncesine dayanmaktadır. Örneğin, yüzyıllar öncesinde bilim adamları çemberin çevre uzunluğunu bulmak için çemberin etrafından poligonlar çizerek bulmaktaydılar. Köşe sayısı arttırılan poligon, sonuca daha fazla yaklaştırmaktaydı [5].

Yakın tarihimizde, sonlu elemanlar metoduna benzer bir yöntem Courant tarafından 1943' te ilk kez ortaya atılmıştır. Bu yöntemde, üçgensel bölgeler üzerinde parçasal sürekli fonksiyonlar tanımlanmaktadır.

Günümüzde bilinen sonlu elemanlar metodu ise, 1956 yılında Turner, Clough, Martin ve Top tarafından sunulmuştur. Bu çalışmada, perçin bağlantılı profil ve üçgensel iç gerilmeli tabaka şeklindeki sonlu elemanların bir uçağın analizinde kullanımı ele alınmıştır.

Çağımızın en büyük teknolojik gelişme olarak bilinen bilgisayar teknolojisinin gelişmesi, bu yönetime çok büyük katkı sağlamıştır. Günümüzün bilgisayarları, çözülmesi aylar bulunan problemleri, en kısa zamanda çözmekte ve gerçek sonuçlara çok yakın yaklaşık sonuçlar verebilmekteler [5].

5.2 Uygulama Alanları

Sonlu elemanlar metodunun uygulama alanları özdeğer, denge ve yayılma problemleridir. Kısaca yukarıda bahsi geçen alanların kısaca tarifleri aşağıda açıklanmıştır [5].

Denge problemlerinin bir uzantısı olan özdeğer grubuna giren problemler arasında yapıların stabilitesi ve titreşimleri, lineer viskoelastik sönümleme, burkulma, katı ve esnek kaplarda akışkanların çalkalanması gibi problemler en çok bilinenleridir.

Kararlı hal problemleri olarak bilinen denge problemlere makine ve inşaat yapılarının gerilme analizleri, katılarda ve sıvılarda kararlı sıcaklık dağılımları, sürekli akış problemleri gibi problemler örnek verilebilir.

Yayılma problemleri ise zamana bağlı olan problem grubuna giren problemler arasında yapılarda gerilme dalgaları, yapıların darbelere karşı davranışı, viskoelastik problemler, zeminlerden suyun geçişi, katılarda ve sıvılarda ısı geçişi, kararlı olmayan akış problemleri örnek verilebilir.

Mühendislik açısından sonlu elemanlar metodunun en geniş uygulama alanı gerilme analizi problemidir. Gerilme analizi problemlerinde yer değişim, kuvvet ve karma yöntem gibi üç yaklaşım dikkate alınmaktadır.

Yer değişim yönteminde yer değişimler, dönmeler ve deformasyonlar; kuvvet yöntemi yaklaşımında kuvvetler ve gerilmeler; karma yönteminde ise bilinmeyen veya serbest değişkenler işlenmektedir [5].

5.3 Problemlere Uygulanması

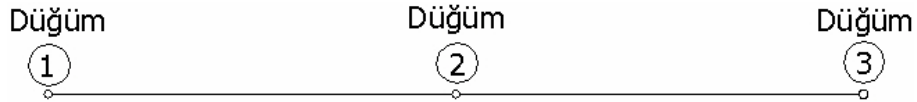
Elastik ve sürekli ortamlara SEM' in uygulanmasında yapının parçalara ayrılması, uygun bir interpolasyon seçimi, rijitlik matrislerinin ve yük vektörlerin, eleman denklemlerinin birleştirilmesiyle toplam denge denklemlerin elde edilmesi,

bilinmeyen düğümsel (nodal) yer değişimleri için çözüm yöntemlerinin kullanılması ve sonuçların bulunması adımları uygulanır [5].

5.4 Sonlu Elemanlar Yönteminin Eleman Tipleri

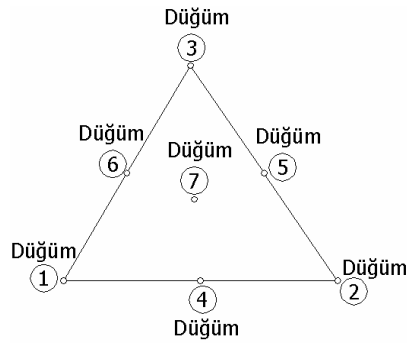
Analizi yapılacak bir parçada doğru sonuçlar alınabilmesi için en uygun bir şekilde sonlu elemanlara bölünmelidir. Sonlu elemanlara bölme işleminde sürekli ortamın boyutuna ve parçanın geometrisine en uygun elemanın şekli seçilmelidir. Seçilen sonlu elemanlar bir, iki veya üç boyutlu olabilirler. Genelde, sonlu elemanın sınırları düzgün olarak seçilebilir ya da, bazı durumlarda eğri sınırlı elemanlarında kullanılması gerekebilir [5].

Ortam geometrisi, malzeme özellikleri, yükleri ve yer değişimleri bir bağımsız uzay koordinatı cinsinden ifade edilebiliyorsa, Şekil 4.1’ de örneği verilen bir boyutlu sonlu elemanlar tercih edilir [5].



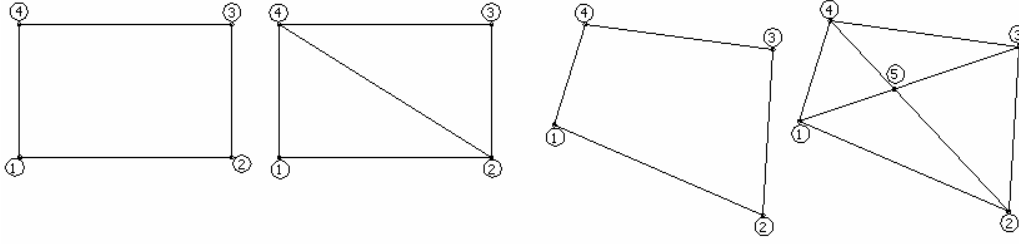
Şekil 5.1 : Bir boyutlu sonlu eleman [5].

Birçok problem, yaklaşık olarak, iki boyutlu sonlu elemanlarla çözülebilir. İki boyutlu eleman tipleri arasında en basiti Şekil 5.2’ de görülen üçgen tipi sonlu elemanıdır.



Şekil 5.2 : Üçgen tipi sonlu eleman [5].

Birçok problemlerde iki boyutlu dikdörtgen, iki üçgenli dikdörtgen, dörtgen elemanı ve dört üçgenli dörtgen elemanı tipi sonlu elemanlar da kullanılmaktadır. Şekil 4.3’te yukarıda bahsi geçen değişik iki boyutlu dörtgen sonlu eleman tiplerine örnekler soldan sağa doğru verilmiştir [5].



Şekil 5.3 : Üç boyutlu değişik tiplerde dikdörtgen sonlu elemanlar [5].

5.5 Plaka Ve Kabuk Yapılarında Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması

Sonlu elemanlar yöntemi karmaşık plaka ve kabuk yapılarının analizinde kullanışlı bir hesaplama yöntemidir. Bu yöntem verilen geometrinin daha küçük elemanlara bölünmesiyle uygulanır. Matematiksel formülizasyonu her bir küçük elemanın sınır koşullarında çözümünün kombinasyonundan yararlanarak oluşturulur. Yaklaşımın kesinliği ve doğru sonuç vermesi yapının kaç alt elemana bölündüğü, bu elemanların şekli ve sınır koşullarına göre değişir [2].



Şekil 5.4 : Tek boyutlu sonlu eleman örneği [2].

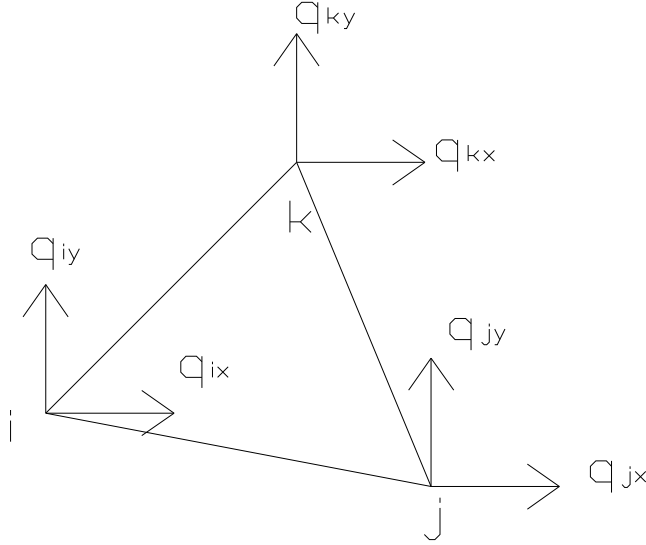
Şekildeki bir boyutlu eleman iki nod ile tanımlanmıştır.

δ harfi ile ifade edilen matris şekil içindeki yer değişimini gösterir. Bu matrisin yapısı düşünülen elemanın karmaşıklık derecesine bağlıdır [2].

$$q = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{jx} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{jx} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Buradaki q matrisi F matrisi ile verilen yük etkisi altında meydana gelen yer değişimini göstermektedir.

Benzer şekilde iki boyutlu eleman için kuvvet ve sehim matrisleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.5 : İki boyutlu sonlu eleman örneği [2].

Şekilden de görüldüğü üzere iki boyutlu eleman üç nod ile tanımlanır[2].

$$q = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{kx} \\ q_{ky} \end{bmatrix} \quad (5.2.a)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix} \quad (5.2.b)$$

Şekil matrisi olarak tanımlanan N matrisi üzerindeki fonksiyon ile eleman içerisindeki aynı fonksiyonun ilişkisini göstermektedir[2].

$$\delta = [N_i N_j] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = [N][q]$$

İki boyutlu elemanda noktasal yer değişimi ve genel yer değişimi arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır [2].

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{kx} \\ q_{ky} \end{Bmatrix}$$

$$[\delta] = [N][q] \quad (5.3)$$

Birim şekil değişimi ve deplasman arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$[\epsilon] = [d][\delta] \quad (5.4)$$

Bu ilişkiyi nodal deplasman açısından ifade etmek için denklem (5.3)'ü, denklem (5.4)'te yerine yazarak elde ederiz.

$$[\epsilon] = [d][N][q] \quad (5.5)$$

Aynı zamanda bu ilişki aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$[\epsilon] = [B][q] \quad (5.6)$$

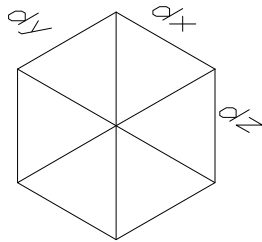
$$[B] = [d][N] \quad (5.7)$$

Birim şekil değişimi ve gerilme arasındaki ilişki ise;

$$[\sigma] = [D][\epsilon] - [D][\epsilon_0] = [D][B][\epsilon] - [D][\epsilon_0] \quad (5.8)$$

Buradaki ϵ_0 değeri başlangıç değeri iken ϵ değeri son değerdir.

Bu bilgiler ışığında sonlu elemanlar denklemi [2];



Şekil 5.6 : Sonsuz küçük hacim [2].

Yukarıdaki sonuz küçük hacim;

$$dv = dx.dy.dz$$

Sonsuz küçük hacim için enerji denklemi[2];

$$du = \frac{1}{2} \cdot [\epsilon]^T \cdot [\sigma] - \frac{1}{2} \cdot [\epsilon_0]^T \cdot [\sigma] \quad (5.9)$$

Toplam enerji;

$$u = \int_v \frac{1}{2} \left([\epsilon]^T \cdot [\sigma] - [\epsilon_0]^T \cdot [\sigma] \right) dv \quad (5.10)$$

Denklem (5.8), denklem (5.10)'da yerine yazılırsa;

$$u = \frac{1}{2} \cdot \left([q]^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot [q] - 2 \cdot [q]^T \cdot [B]^T \cdot [D] \cdot [\epsilon_0] + [\epsilon_0]^T \cdot [D] \cdot [\epsilon_0] \right) dv \quad (5.11)$$

Dış kuvvetlerden dolayı meydana genel iş;

1.Nodal kuvvetten meydana gelen

$$W_F = [F]^T \cdot [q] \quad (5.12)$$

2.Yüzey basıncından meydana gelen

$$W_p = ([u] \cdot [p]) ds \quad \text{yada} \quad W_p = \int_s ([q]^T \cdot [N]^T \cdot [p]) ds \quad (5.13)$$

Elemanların sahip olduğu potansiyel enerji;

$$\Pi = U - (w_f + w_p)$$

Tüm sistemin sahip olduğu potansiyel enerji;

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \left[U^e - (w_f + w_p) \right] \quad (5.14)$$

Buradaki e harfi eleman numarasını ifade etmektedir.

Minimum potansiyel enerji;

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \sum_{e=1}^E \left[\int_v [B_e]^T \cdot [D_e] \cdot [B_e] dV \cdot [q] - \int_v [B_e]^T \cdot [D_e] \cdot [\epsilon_0] dV - \int_s [N_e]^T \cdot [p_e] ds \right] - F_e = 0 \quad (5.15)$$

$[B_e]^T \cdot [D_e] \cdot [B_e] dV$ terimi elemanın rijitlik matrisi olarak adlandırılır,

$$[K_e] = \int_v [B_e]^T \cdot [D_e] \cdot [B_e] dV \quad (5-16)$$

Bu denklemler ışığında sonlu elemanlar eşitliği;

$$\sum_{e=1}^E [K_e] \cdot [q] = \sum_{e=1}^E \left[\int_v [B_e]^T \cdot [D_e] \cdot [\epsilon_0] dV + \int_s [N_e]^T \cdot [p_e] ds \right] + F_e \quad (5-17)$$

Denklem (5.17) sadeleştirilirse;

$$[K_e][q] = [F] \quad (5-18)$$

Burada bahse geçen F uygulanan kuvveti göstermektedir.

Denklem (5.17) temel sonlu elemanlar denklemidir [2].

5.5.1 Tek Boyutlu Eleman

Sonlu eleman denklemi yazılırken, eleman şekli ile birlikte uygulanan kuvvet, sehim, birim şekil değiştirme ve gerilme değerleri bir polinom ile yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu polinomun terim sayısı noda, istenilen kesinlik miktarındaki serbestlik derecesine bağlıdır. Tek boyutlu eleman için sehim denklemi aşağıdaki gibidir [2].

C_1 ve C_2 birer sabittir.

x: x eksenini boyunca değişen uzunluktur.

$$\delta = C_1 + C_2 \cdot x \quad (5.19)$$

Denklem (5.19) ile verilen polinom iki matrisin bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

$$\delta = [g][C] \text{ yada } \delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \quad (5.20)$$

Bu denklemi nodal bir x_i ve x_j noktası için yeniden yazarsak;

$$\begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$h = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = [h][C]$$

Katsayılar matrisinin çözümü;

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = [h]^{-1} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \text{ buradan } \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Denklem (5.20)'den her hangi bir nokta için;

$$\delta = [g][h]^{-1} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \text{ yada } \delta = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} (x_j - x) \cdot (-x_i + x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Yukarıdaki denklemde bulunan $[g][h]^{-1}$ teriminin büyüklüğü o noktadaki elemanın sehim i ile ilişkilidir. Şekil fonksiyonunu N olarak gösterirsek[2];

$$[N] = [g][h]^{-1} \quad (5.24)$$

Denklem (5.23)'ü yeniden düzenlersek;

$$\delta = [N] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

buradan N;

$$[N] = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} (x_j - x) \cdot (-x_i + x) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Şekil fonksiyonu lineer bir eleman için düzenlendiğinde, denklem (5.18)'de verilen rijitlik matrisi yazılabilir. Böylece tek boyutlu eleman için genel sehim denklemi eşitlik (5.19), şekil fonksiyonu (5-26) ile ifade edilebilir. Hook kanunundan hareketle, eksen üzerindeki birim şekil değiştirme aşağıdaki gibi yazılabilir[2].

$\epsilon = \frac{d}{dx} u$ denklem (5-5) ve (5-6)'dan hareketle;

$$[\epsilon] = \frac{d}{dx} [N][q] \text{ yada } [\epsilon] = [B] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$[B] = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}}{x_j - x_i} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ön gerilmesiz tek eksenli gerilme hali için;

$$[\sigma] = [E][\epsilon] \text{ böylece; } [D] = [E]$$

Denklem (5.17)'den hareketle rijitlik matrisi K [2];

$$[K] = \frac{A.E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Denklem (5.17)'deki sağ tarafta bulunan ilk terim termal etkiyi gösterir [2];

$$\alpha.E.A.(\Delta T) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Denklem (5-17)'deki sağ tarafta bulunan ikinci terim yüzeysel yükleme içindir. Bu durumda yüzeysel yükleme sadece i ve j noktalarına uygulanmış kabul edilebilir. Böylece p_x i noduna uygulandığında [2];

$$\int_s [N]^T [p_x] ds = p_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \int ds = p_x \cdot A_i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

p_x j noduna uygulandığında;

$$\int_s [N]^T [p_x] ds = p_x \cdot A_j \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Tek boyutlu eleman için sonlu elemanlar denkleminin tümü, eşitlik (5.28) ve (5.31)'in kombinasyonundan yazılabilir [2].

$$\frac{A.E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = \alpha.E.A(\Delta T) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + A_i \cdot p_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A_j \cdot p_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + F$$

$$[K][q] = [F] \quad (5.32)$$

Gerilme değeri ise denklem (5.8)'den;

$$\sigma = [E][B][q] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} - E.\alpha.(\Delta T) \quad (5.33)$$

5.5.2 Lineer Üçgen Eleman

Şelik 5.5’de görüldüğü üzere eleman üç nod ile belirtilmiştir. Bahse geçen nodlar iki serbestlik dercesine sahiptir. Bu sayede eleman üzerindeki deplasmanlar aşağıdaki denklemler ile verilebilir [2].

$$u = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot y \text{ ve } v = C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot y \quad (5.34)$$

Burada verilen u ve v deplasmanları, x ve y eksenlerinde meydana gelen yer değişimlerini göstermektedir. Bu denklemleri matris formunda yazarsak [2];

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [g][c] \quad [g] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Şekil matrisi N denklem (5.24)’ten yararlanarak;

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Buradaki verilen N_i , N_j , N_k değerleri [2];

$$N_i = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y),$$

$$N_j = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j \cdot x + c_j \cdot y),$$

$$N_k = \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k \cdot x + c_k \cdot y)$$

$$a_i = x_i \cdot y_k - x_k \cdot y_i, \quad b_i = y_i - y_k, \quad c_i = x_k - x_j$$

$$a_j = x_k \cdot y_i - x_i \cdot y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad c_j = x_i - x_k$$

$$a_k = x_i \cdot y_j - x_j \cdot y_i, \quad b_k = y_i - y_j, \quad c_k = x_j - x_i$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

2Δ değeri $x_i y_i, x_j y_j, x_k y_k$ koordinatları ile verilmiş üçgenin alanını göstermektedir.

u ve v ise;

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{kx} \\ q_{ky} \end{bmatrix}$$

Birim şekil değişimi deplasman arasındaki ilişki denklem (5.24) yardımıyla;

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5-37)$$

Birim şekil değişimi $[2]; [\epsilon] = [d] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [d][N][q]$ yada $[\epsilon] = [B][q]$ ve

$$[B] = [d][N] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Aşağıda verilen denklem vasıtası ile düzlemsel gerilme formülündeki rijitlik matrisi türetilir [2].

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Rijitlik matrisi $[D]$;

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu^2}{2} \end{bmatrix}$$

Düzlemsel birim şekil değişimi denklem aşağıdaki denklem vasıtasıyla;

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+\mu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_x = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

$$[D] = \frac{E.(1-\mu)}{(1+\mu).(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2.(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Denklem (5.16) yardımıyla rijitlik matrisi [2];

$$K = \frac{Et}{4\Delta} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

$$k_{11} = k_1 (y_2 - y_3)^2 + k_3 (x_3 - x_2)^2, \quad k_{12} = k_2 (x_3 - x_2)(y_2 - y_3) + k_3 (x_3 - x_2)(y_2 - y_3),$$

$$k_{13} = k_1 (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + k_3 (x_3 - x_2)(x_1 - x_3),$$

$$k_{14} = k_2 (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) + k_3 (x_3 - x_2)(y_3 - y_1),$$

$$k_{15} = k_1 (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) + k_3 (x_2 - x_3)(x_3 - x_2),$$

$$k_{16} = k_2 (x_2 - x_1)(y_2 - y_3) + k_3 (x_3 - x_2)(y_1 - y_2),$$

$$k_{22} = k_1 (x_3 - x_2)^2 + k_3 (y_2 - y_3)^2, \quad k_{23} = k_2 (x_3 - x_2)(y_3 - y_1) + k_3 (x_1 - x_3)(y_2 - y_3),$$

$$k_{24} = k_1 (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + k_3 (y_2 - y_3)(y_3 - y_1),$$

$$k_{25} = k_2 (x_3 - x_2)(y_1 - y_2) + k_3 (x_2 - x_1)(y_2 - y_3),$$

$$k_{26} = k_1 (x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + k_3 (y_1 - y_2)(y_2 - y_3),$$

$$k_{33} = k_1 (y_3 - y_1)^2 + k_3 (x_1 - x_3)^2, \quad k_{34} = k_1 (x_1 - x_3)(y_3 - y_1) + k_3 (x_1 - x_3)(y_3 - y_1),$$

$$k_{35} = k_1 (y_1 - y_2)(y_3 - y_1) + k_3 (x_1 - x_3)(x_2 - x_1),$$

$$k_{36} = k_2 (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) + k_3 (x_1 - x_3)(y_1 - y_2),$$

$$k_{44} = k_1 (x_1 - x_3)^2 + k_3 (y_3 - y_1)^2, \quad k_{45} = k_2 (x_1 - x_3)(y_1 - y_2) + k_3 (x_2 - x_1)(y_3 - y_1),$$

$$k_{46} = k_1 (x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + k_3 (y_1 - y_2)(y_3 - y_1),$$

$$k_{55} = k_1 (y_1 - y_2)^2 + k_3 (x_2 - x_1)^2, \quad k_{56} = k_2 (x_2 - x_1)(y_1 - y_2) + k_3 (x_2 - x_1)(y_1 - y_2),$$

$$k_{66} = k_1 (x_2 - x_1)^2 + k_3 (y_1 - y_2)^2$$

Düzlemsel Gerilme İçin;

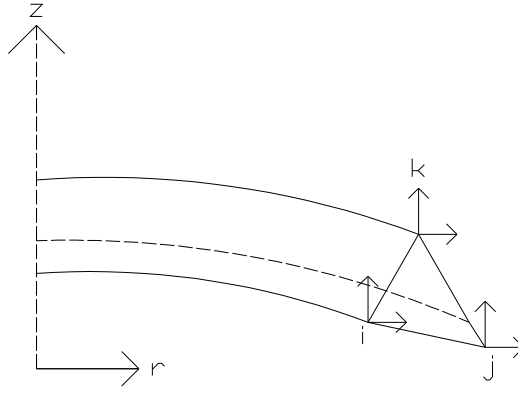
$$k_1 = \frac{1}{1-\mu^2}, \quad k_2 = \frac{\mu}{1-\mu^2}, \quad k_3 = \frac{1}{2.(1+\mu)}$$

Düzlemsel Birim Şekil Değişimi;

$$k_1 = \frac{1-\mu}{(1+\mu).(1-2\mu)}, \quad k_2 = \frac{\mu}{(1+\mu).(1-2\mu)}, \quad k_3 = \frac{1}{2.(1+\mu)}$$

5.5.3 Asimetrik Üçgen Eleman

Bir çok plaka yada kabuk konstrüksiyonunda sonlu elemanlar ile modelleme asimetrik üçgen eleman ile yapılmaktadır. Aşağıdaki şekilde gösterilen asimetrik elemanın şekil matrisi N denklem (5.41)'de verilen ile aynıdır. Gerilme birim şekil değiştirme arasındaki bağıntı denklem (5.42)'nin asimetrik elemana uyarlanmasıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir [2].



Şekil 5.7 : Asimetrik üçgen elemanın gösterimi [2].

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{2\Delta N_i}{r} & 0 & \frac{2\Delta N_j}{r} & 0 & \frac{2\Delta N_k}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} q_{ir} \\ q_{iz} \\ q_{jr} \\ q_{jz} \\ q_{kr} \\ q_{kz} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Buradan hareketle gerilme birim şekil değiştirme arasındaki ilişki [2];

$$[D] = \frac{E.(1-\mu)}{(1+\mu).(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2.(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Rijitlik matrisi denklem (5.16) yardımıyla;

$$[K_e] = \int_v [B_e]^T [D_e] [B_e] dV$$

$(B^T DB) dV$ integral alırken işlemi kolaylaştırmak için dV terimi $(2.\pi.\bar{r}.A)$ olarak

yazabiliriz. Burada $\bar{r}$ sentroidin merkezindeki yarı çaptır. A ise bahsi geçen elemanın alanını göstermektedir. Böylece rijitlik matrisi [2];

$$[K] = [B]^T [D] [B].2.\bar{r}.A \quad (5.45)$$

5.6 Ansys Paket Programı

ANSYS yazılımı mühendislerin mukavemet, titreşim, akışkanlar mekaniği ve ısı transferi ile elektromanyetik alanlarında fiziğin tüm disiplinlerinin birbiri ile olan etkileşimini simüle etmekte kullanılabilen genel amaçlı bir sonlu elemanlar yazılımıdır. Bu sayede gerçekleştirilen testlerin ya da çalışma şartlarının simüle edilmesine olanak sağlayan ANSYS, ürünlerin henüz prototipleri üretilmeden sanal ortamda test edilmelerine olanak sağlar. Ayrıca sanal ortamdaki 3 boyutlu simülasyonlar neticesinde yapıların zayıf noktalarının tespiti ve iyileştirilmesi ile ömür hesaplarının gerçekleştirilmesi ve muhtemel problemlerin öngörülmesi mümkün olmaktadır. ANSYS yazılımı hem dışarıdan CAD datalarını alabilmekte hem de içindeki “preprocessing” imkanları ile geometri oluşturulmasına izin vermektedir. Gene aynı preprocessr içinde hesaplama için gerekli olan sonlu elemanlar modeli yani mesh de oluşturulmaktadır. Yüklerin tanımlanmasından sonra ve gerçekleştirilen analiz neticesinde sonuçlar sayısal ve grafiksel olarak elde

edilebilir. Genel olarak, ANSYS kullanılarak sonlu elemanlar analizleri üç kademede gerçekleştirilir [6];

Preprocessing(Problemin tanımlanması): Preprocessing ana kademeleri aşağıda verildiği gibidir:

- Anahtar nokta/çizgi/alan/hacimlerin tanımlanması
- Eleman tipi ve malzeme/geometri özelliklerinin tanımlanması
- Çizgi/alan/hacimlerin sonlu elemanlara bölünmesi.

Solution(Yüklerin ve sınır şartlarının atanması ve çözümün gerçekleştirilmesi):

Bu kademede yükler (noktasal veya basınç) belirlenir, sınır şartları tanımlanır ve sonuçta çözüme gidilir. Yük ve sınır şartları preprocessing kademesinde de tanımlanabilir.

Postprocessing(Sonuçların değerlendirilmesi): Bu kademede şunlar yapılabilir

- a. Düğüm noktası yer değiştirmelerinin listelenmesi
- b. Eleman kuvvet ve momentlerinin izlenmesi
- c. Yer değiştirme çizimleri, gerilme diyagramları

Her hangi bir işleme başlamadan önce analizin planlanması çok önemlidir ve simulasyonun başarısına direk etkisi vardır. Bir sonlu elemanlar analizinin amacı bilinen yükler altında sistem davranışının modellenmesidir. Analizin doğruluk derecesi planlama kademesine oldukça bağlıdır. Her bir işlemcide yapılacakları daha detaylı olarak sonraki bölümlerde inceleyeceğiz. Ancak yine de özetleyecek olursak;

Preprocessing kademesi aşağıdakileri içerir [6]:

• **Başlıgın belirlenmesi:** Problemin sonraki dönemde rahat erişilebilir olması amacıyla yaptığımız işe bir isim isim verilmesi diye düşünülebilir. Bu seçenek özellikle aynı temel model üzerinde farklı yükleme seçenekli çözümler gerçekleştirilmesi durumunda çok faydalıdır.

• **Modelin oluşturulması:** Model genellikle 2D veya 3D uzayında uygun birimler (m, mm, inç, vb.) kullanılarak çizilir. Model ANSYS ön işlemcisi kullanılarak oluşturulabileceği gibi başka bir CAD paketinde hazırlanmış bir dosyanın (IGES, STEP gibi) ANSYS ön işlemcisi tarafından okunması ile de sağlanabilir. Modelin

oluşturulması esnasında dikkat edilmesi gereken konulardan biri çizimde kullanılan birim ile malzeme özellikleri ve uygulanan yük birimlerinin uyumlu olmasıdır.

Örneğin; model mm olarak çizildi ise, malzeme özellikleri SI birimi ile tanımlandığı şekilde olmalıdır[6].

- **Eleman tipinin belirlenmesi:** Eleman seçimi modelin geometrisine bağlı olarak 1D, 2D veya 3D olabileceği gibi yapılması düşünülen analizin tipine de bağlıdır (örneğin termal analiz gerçekleştirebilmek için termal eleman kullanımı) [6].

- **Malzeme özelliklerinin girilmesi:** Malzeme özellikleri (elastisite modülü, poisson oranı, yoğunluk ve gerekli olduğunda termal genleşme katsayısı, termal iletkenlik, özgül ısı vb) tanımlamalarının gerçekleştirilmesi [6].

- **Modelin elemanlara bölünmesi:** Modelin elemanlara bölünmesi işlemi, model sürekliliğinin belirli sayıdaki ayrı parçalara veya diğer bir ifade ile sonlu elemanlara bölünmesidir. Daha çok sayıda eleman genel olarak daha iyi sonuçlar fakat daha uzun analiz zamanı demektir. Modelin elemanlara bölünmesi kullanıcı tarafından tek tek tanımlanarak yapılabileceği gibi ANSYS tarafından uygun seçenekler kullanılarak otomatik olarak da yapılabilir. Kullanıcı tarafından tek tek tanımlayarak elemanlara bölme işlemi uzun ve zor bir işlemken otomatik olarak elemanlara bölme işleminde gerekli tek şey model kenarları boyunca eleman yoğunluğunun veya eleman büyüklüğünün belirlenmesidir. Ayrıca kullanılan elemanın tipine bağlı olarak eleman özelliklerinin de (gerçek sabitler) tanımlanması gerekir [6].

Solution kademesi aşağıdakileri içerir [6]:

- **Analiz tipinin belirlenmesi:** Çözümde kullanılmak üzere statik, modal, transient gibi analiz tipleri belirlenir [6].

- **Sınır şartlarının tanımlanması:** Eğer modele bir yük uygulanırsa, model bilgisayarın sanal dünyasında sonsuza kadar ivmelenir. Bu ivmelenme bir sınırlılık veya bir sınır şartı uygulanana kadar devam eder. Yapısal sınır şartları genellikle sıfır yer değiştirme, termal sınır şartları belirlenmiş bir sıcaklık, akışkan sınır şartları için bir basınç olarak tanımlanır. Bir sınır şartı bütün yönlerde (x,y,z) uygulanabileceği gibi yalnızca belirli bir yönde de tanımlanabilir. Sınır şartları anahtar noktalarda, düğüm noktalarında, çizgi veya alanlarda tanımlanabilir. Sınır şartı, simetri veya antisimetri tipinde de olabilir.

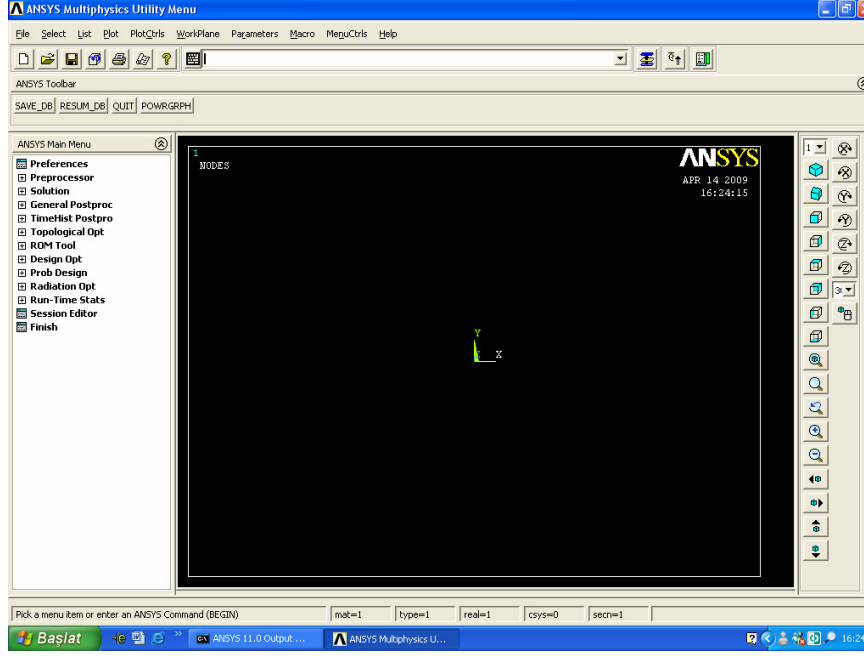
- **Yüklerin uygulanması:** Yüklemeler gerilme analizlerinde noktasal bir basınç veya yer değiştirme, termal analizlerde sıcaklık, akışkan analizlerinde hız formunda olabilir. Yükler bir noktaya, bir kenara, bir yüzeye ve hatta toplam cisme uygulanabilir. Yükler model geometrisi ve malzeme özelliklerinde kullanılan birim cinsinden tanımlanmalıdır.

- **Çözüm:** Bu kısım tamamen otomatiktir. Genel olarak bir sonlu elemanlar çözücüsü üçe ayrılır. Bunlar ön-çözücü, matematik motoru ve son-çözücüdür. Ön-çözücü modeli okur ve modeli matematiksel şekilde formülize eder. Preprocessing kademesinde tanımlanan bütün parametreler ön-çözücü tarafından kontrol edilir ve herhangi bir şeyin eksik bırakıldığını bulursa matematik motorunun devreye girmesini engeller. Model doğruysa, çözücü devreye girerek eleman direngenlik matrisini oluşturur ve yer değiştirme, basınç gibi sonuçları üreten matematik motorunu çalıştırır. Matematik motoru tarafından üretilen sonuçlar son-çözücü kullanılarak düğüm noktaları için deformasyon miktarı, gerilme, hız gibi değerler üretilir [6].

Postprocessing kademesi aşağıdakileri içerir:

- Bu bölüm; sonuçların okunduğu ve yorumlandığı bölümdür. Sonuçlar; tablo şeklinde, kontur çizimler şeklinde veya deforme olmuş cisim biçiminde sunulabilir. Ayrıca animasyon yardımı ile modelin yük altındaki davranışı gözler önüne sunulabilir. Yapısal tipteki problemlerin sunulmasında kontur grafikler genellikle en etkin yöntem olarak kullanılır. Postprocessor, x, y, z koordinatlarında hatta koordinat ekseninde belli bir açıdaki gerilme ve birim şekil değiştirmelerin hesaplanmasında kullanılabilir. Etkin gerilme ve birim şekil değiştirme sonuçları ile akma gerilmesi ve şekil değiştirme sonuçlarını da görmek mümkündür. Bunun dışında birim şekil değiştirme enerjisi, plastik şekil değiştirme miktarı da kolaylıkla görsel olarak elde edilebilir. Sonuçlar görsel olarak çok etkileyici bir biçimde kontur grafikler olarak rahatlıkla elde edilebilse de sonuçların kalitesi modelin fiziksel problemi gerçekte ne kadar yansıttığına ve dolayısıyla analizi yapılan modelin kalitesine bağlıdır. Başarılı bir analiz için dikkatli bir planlamanın yapılması zorunluluğu göz ardı edilmemelidir.

5.6.1 Ansys Ara Yüzü



Şekil 5.8 : Ansys ana ekranı.

Araç Menüsü: ANSYS oturumu süresince kullanılabilir olan dosya kontrolü, seçimler, grafik kontrolleri ve parametreler gibi fonksiyonlar içerir.

Ana Menü: Preprocessor, solution, postprocessor ve dizayn optimizere tarafından organize edilen temel ANSYS fonksiyonlarını içerir. Bu menüde en önemli modelleme komutları bulunur [7].

Komut Satırı: Bu pencereden komutların direk olarak girilebilmesine imkan tanınır

ANSYS Toolbar: Bu bölüm çok sık olarak kullanılan ANSYS komut ve fonksiyon düğmelerini içerir ve özelleştirilebilir.

Grafik Alan: Grafiklerin gösterildiği ve grafiksel işaretleme yapıldığı yerdir. Bu pencerede modelin oluşturulması esnasında yapının farklı kademelerdeki durumları izlenebilir. Aynı zamanda, analiz sonuçlarının grafiksel olarak verildiği yerdir.

Çıktı Penceresi: Verilerin listelenmesi gibi programdan çıkan text formatındaki bilgilerin gösterildiği yerdir. Genellikle açılısta grafiksel kullanıcı arayüzünün arkasında ortaya çıkar ancak istenirse ön tarafa çekilebilir.

Standard Araç Menüsü: Sık olarak kullanılan ANSYS komutları düğmelerini içerir.

Analiz Durum Bilgisi: Grafiksel kullanıcı arayüzünün alt tarafına yerleşmiştir ve

analizin durumu hakkında bilgiler içerir [6].

5.6.2 Ansys Dosyaları

Genel olarak dosya adları şu şekilde oluşturulur: (Dosya Adı).(Dosya Tip Eki)

Dosya Adı Tip Açıklama

file.db Binary Veri tabanı dosyası

file.dbb Binary Veri tabanı dosyası yedeği

file.log ASCII ANSYS oturumu süresince kullanılmış komutların listesi

file.err ASCII Hata ve uyarı mesajlarının listesi

file.out ASCII ANSYS işlemlerinin çıkış listesi

file.rst Binary Yapısal veya ikili analiz sonuç dosyası

file.rth Binary Termal analiz sonuç dosyası

file.rmg Binary Manyetik analiz sonuç dosyası

file.emat Binary Eleman matrisleri dosyası

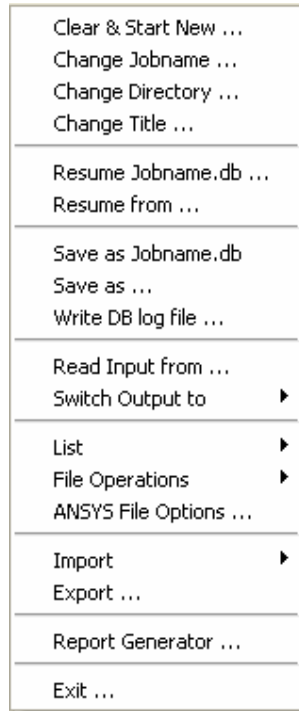
5.6.3 Ansys Menüleri

5.6.3.1 Araç Menüsü

Bu menü, aşağıda açıklanan şekilde alt menülerden oluşmuştur [6].

- File:

Bu kısımda yeni bir çalışmaya başlama, daha önceden kaydedilmiş dosyaları çağırma, yapılan yeni çalışmayı kaydetme ve farklı bir yere kaydetme, çalışmanın adını değiştirme, diğer CAD programlarında tasarlanmış dosyaların açılabilmesi gibi işlemler yapılmaktadır.



Şekil 5.9 : File menüsü.

- Select:

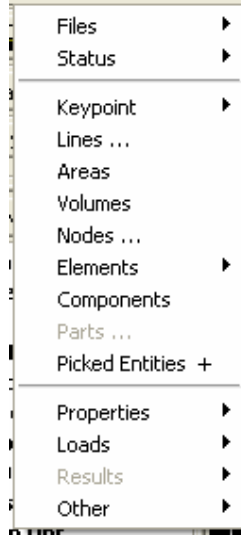
Model üzerinde çalışırken bazen bazı kısımların (alanlar, hacimler v.b.) genel görünümünden ayrı olarak incelenmesi gerekir. Ayrı görüntülenmesini istediğimiz kısımları buradan seçebiliriz.



Şekil 5.10 : Select menüsü.

- List:

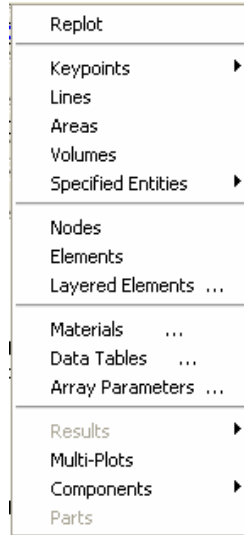
Bu menü sayesinde hazırlanan model üzerindeki nokta, çizgi, alan, hacim, eleman, kuvvet, basınç, malzeme özellikleri ve ana serbestlik dereceleri yani sonuçların okunması ve dökümü buradan elde edilir.



Şekil 5.11 : List menüsü.

- Plot:

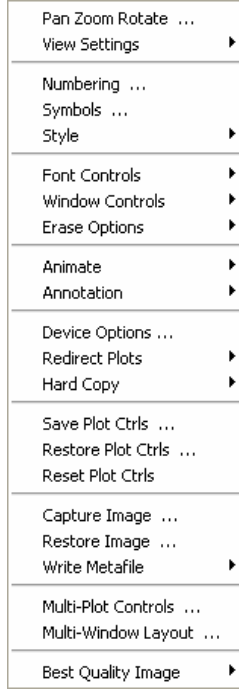
Modelin nokta, çizgi, alan gibi elemanlarının gösterilmesi sağlanır.



Şekil 5.12 : Plot menüsü.

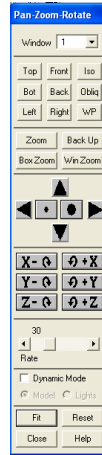
- Plot Controls:

Modelin grafik ekrandaki görünüm açısının değişimi, perspektif görüntü veya istenilen şekillerde animasyon ve görüntüleri alınması sağlar. Ayrıca ANSYS' in çeşitli renk ve görüntü ayarları buradan yapılır.



Şekil 5.13 : Plot control menüsü.

Pan / Zoom/ Rotate: Grafik penceresinde mevcut olan modeli ya da geometriyi küçültüp büyütebilmemizi sağa sola hareket ettirebilmemizi ve döndürebilmemizi sağlar. Bu özellik, istediğimiz özelliklerin daha detaylı görülebilmemesini sağlar.



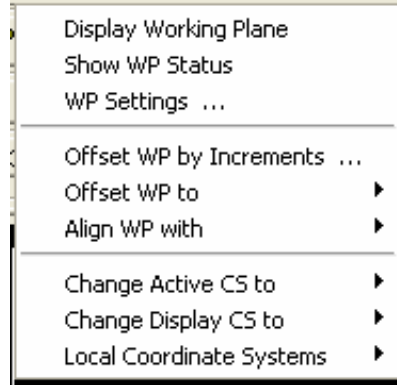
Şekil 5.14 : Pan, zoom, rotate paneli.

Numbering: Buradan açılan pencerede keypoint' lere, line'lara, area'lara, volume' lere, node'lara numara verilerek istenilen keypoint, line, area, volume, node' un seçilerek detaylı görüntülenmesi sağlanabilir.

Style: Bu menünün altındaki komutlarla ekranın arka rengini, modelin rengini, pencere rengini, modelin yüzey rengini, grafik rengini, yük ve kuvvet renklerini buradan değiştirebiliriz.

- Work Plane:

Başlangıçta kullanılan kartezyen koordinat sistemi bu menü yardımıyla kutupsal veya kullanıcı eksen takımlarına dönüştürülebilir.



Şekil 5.15 : Work plane menüsü.

- Menu Controls:

Ekranda kullanılan pencerelerin ayarlanmasına, kullanılmayanların gizlenmesine olanak sağlar.



Şekil 5.16 : Help menüsü.

- Help:

Programın her bölümü için bilgi içeren yardım menüsüdür.

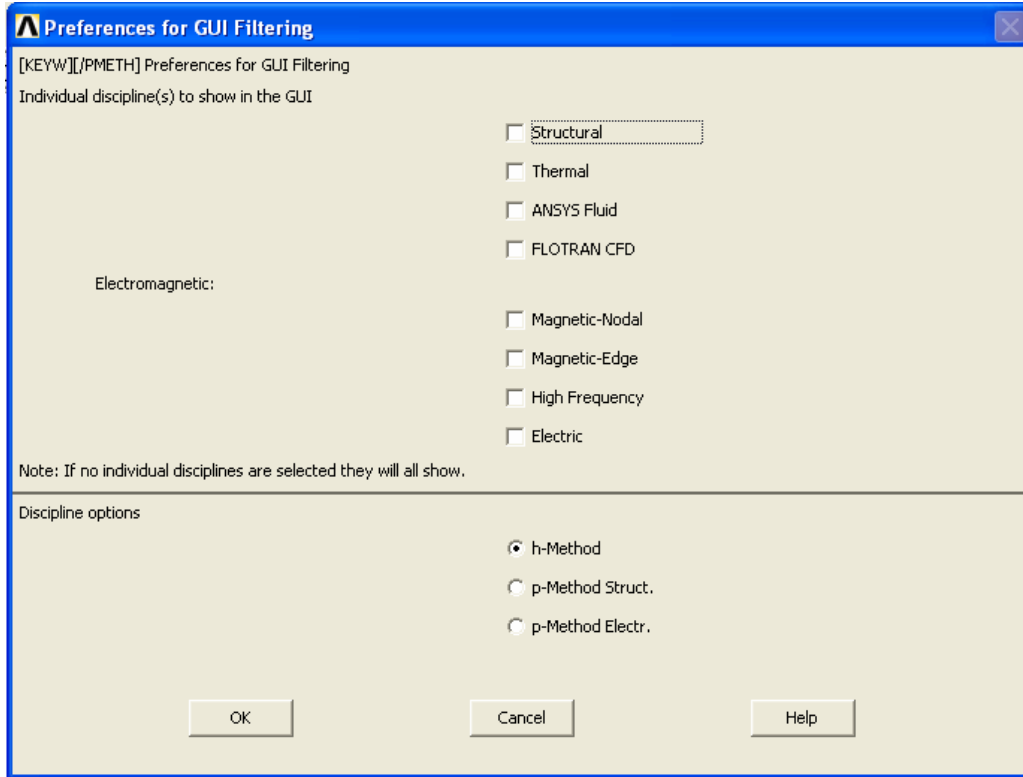


Şekil 5.17 : Help menüsü.

5.6.3.2 Ansys Ana Menü

- Preferences

Analiz tipi belirlenir. Böylece bundan sonra karşımıza bu analiz ile bilgiler gelecektir. Belirlenmezse tüm bilgiler gelir [6].



Şekil 5.18 : Preferences menüsü.

- **Preprocessor**

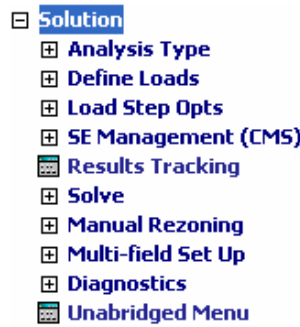
Geometrik modelin oluşturulması, eleman tiplerinin malzeme özelliklerinin ve birim sisteminin belirlenmesinde, sınır şartlarının oluşturulması ve elemanlara ayırma gibi işlemler yapılır.



Şekil 5.19 : Preprocessor menüsü.

- **Solution**

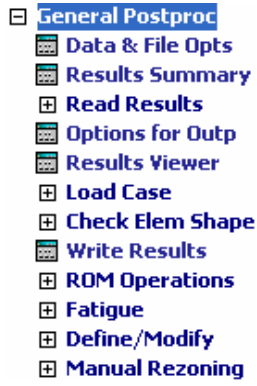
Oluşturulan modeli mesnetleme, modele basınç, kuvvet, moment, sıcaklık, ısı akısı gibi sınır şartları verilir ve çözümlenmesi yapılır.



Şekil 5.20 : Solution menüsü.

- **General Postprocessing**

Elde edilen sonuçlar değerlendirilir. Gerilme, sıcaklık gibi dağılımlar hem model üzerinde hem de grafiksel olarak görülebileceği menüdür.



Şekil 5.21 : General postprocessing menüsü.

5.6.3.3 Elemanlara Bölme

Sonlu elemanlar çözümünün gerçekleştirilebilmesi için eleman ve düğüm noktalına noktalara ihtiyaç duyarız. Elemanlara bölme işlemi de katı modelin eleman ve düğüm noktaları ile doldurulması işlemidir.

Burada geometri için uygun sayıda alt elemana bölme işlemi gerçekleştirilir. Önemli olan nokta analizi yapılan yapının ne kadar homojen olduğudur. Yapıyı mümkün olduğunca daha fazla parçaya bölmek sonucun doğruluk derecesinde iyileşme sağlar fakat işlem hızını düşürür ve daha yüksek donanımına ihtiyaç duyulmasını gerektirir. Bu sebepten dolayı öncelikler göz önüne alınarak uygun sayıda parçaya bölünmelidir.

Diğer bir husus ise alt elemanların geometrisinin tüm parçayı düzgün bir şekilde kapsaması gerekmektedir.

İlgili menü;



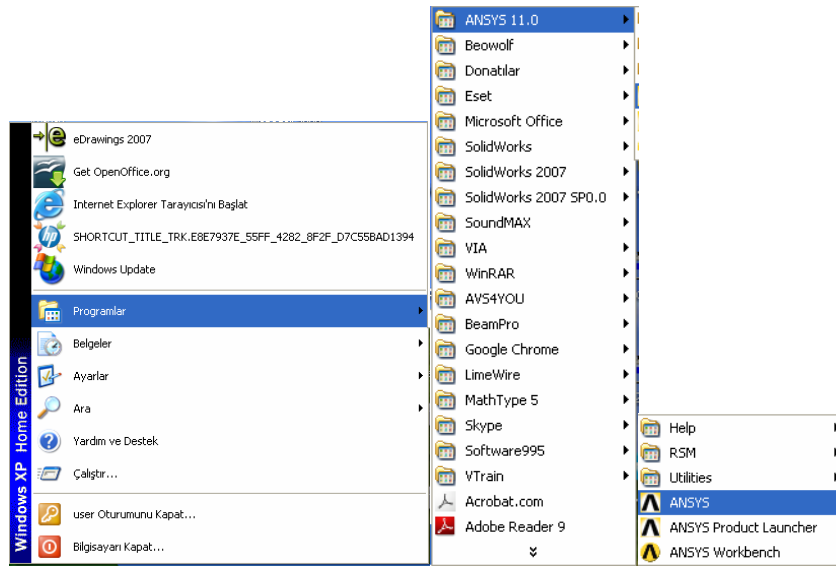
Şekil 5.22 : Mesh menüsü.

5.6.3.4 Ansys Paket Programıyla Bir Kabuk Elemanının Analizi

Bu bölümde ankastre mesnetli ince, izotropik plakanın, düzgün yayılı yük etkisi altında sehim ve gerilme analizleri yapılacaktır. Numune ve özellerikleri bölüm 4.3'te verilmiştir. Analiz çıktıları ek A'da yer almaktadır. Burada analizin adımlarının gösterilmesinin ardından sadece sonuçlar tabloda verilecektir.

1) Programın Çalıştırılması;

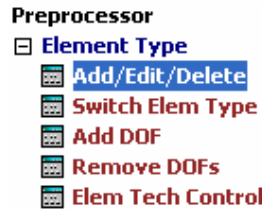
programı başlatmak için başlat menüsünden Ansys 11.0 sekmesine gelinir ve burdan Ansys sekmesi seçilir.



Şekil 5.23 : Program çalıştırma menüsü.

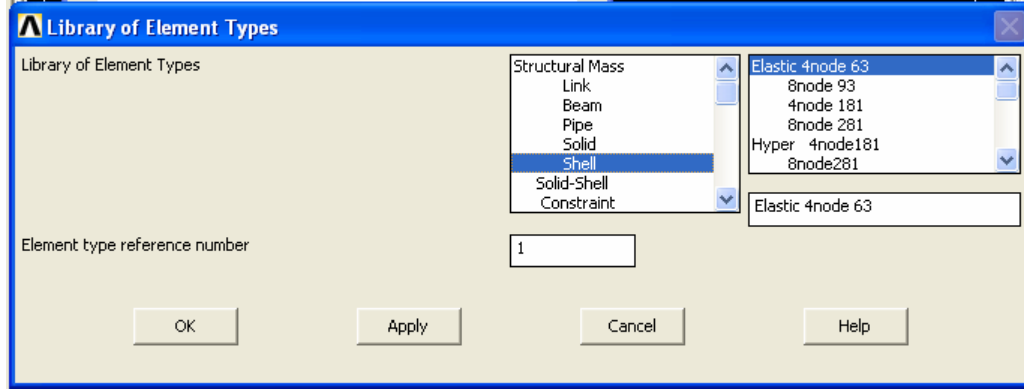
2) Eleman tipinin belirlenmesi;

Ekranın sol tarafında bulunan menüden preprocessor seçilerek, özellik atama penceresinin açılması için add/edit/delete seçeneği tıklanır. Burada sonlu eleman atamanın yanı sıra atanmış eleman üstünde değişiklik ve silme işlemleri menüde görüleceği üzere yapılabilmektedir.



Şekil 5.24 : Eleman tipi seçim menüsü.

Paket programın eleman arşivinde bulunan elemanlardan analiz edeceğimiz yapı ince bir plaka olduğu için shell elemanı seçilerek burdan alt seçeneklere ulaşılır. Burada problem için en uygun eleman elastic 4node 63 yapısıdır.



Şekil 5.25 : Eleman tipi seçim penceresi.

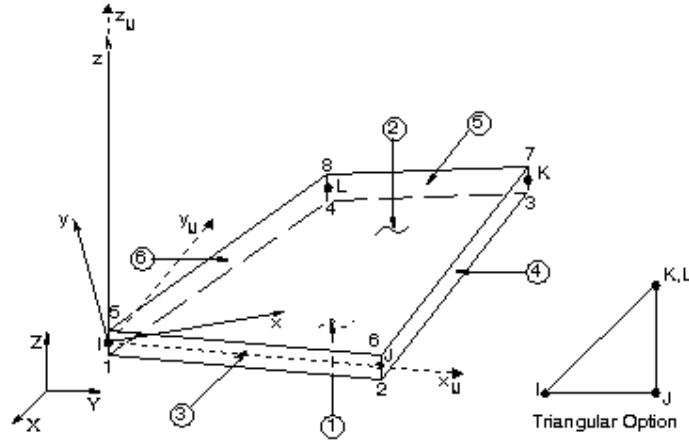
Shell 63;

Bu eleman hem eğilme hemde membran özelliklerine sahiptir. Eleman plaka normali doğrultusundaki yüklemelere uygundur. Her bir nodun x,y ve z eksenlerinde öteleme, ayrıca bu eksenlerde dönme rijitliğine sahip için altı serbestlik derecesini bünyesinde barındırmaktadır. Aynı zamanda yüksek sehim değerlerinin hesabında da kullanılabilme imkanı vardır.

Aşağıdaki şekilde elemanın geometrisi ve koordinat eksenleri gösterilmiştir. Eleman dört nod, dört kalın, rijitliği ve orthotropik özellikleriyle tanımlanır. Ortotropik özellikler elemanın sahip olduğu koordinat eksenleri doğrultusunda değişen özelliklerdir.

Kalın ifade edilirken eğer parçanın koordinat eksenleri doğrultusunda kalınlık değeri değişmiyorsa sadece TK(I) değerine kalınlığı girmek yeterlidir. Ancak parça değişken bir kalınlığa sahip ise dört kalınlık değerinde girmek zorunludur.

Yükleme nod veya elemanlar üstünde olabilmektedir. Eğer yükleme durumu kenarlar üzerinde gerçekleşiyorsa birim kenar uzunluk başına düşen kuvvet girilmelidir. Yüklem plakanın yüzen alanına etkiyorsa buarada oluşan basınç değerini girmek gerekir.



Şekil 5.26 : Shell 63 elemanı ve koordinat eksenleri.

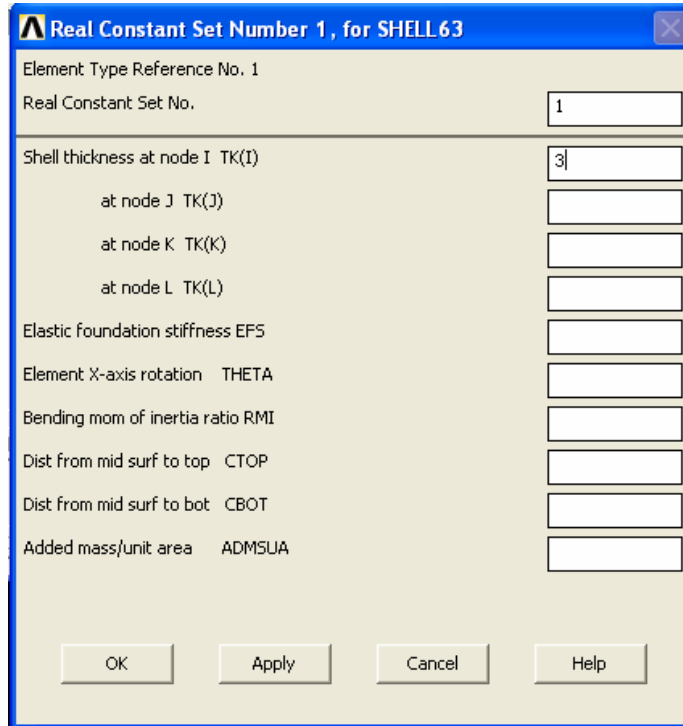
3) Kabuk elemanın kalınlığının tanımlanması;

Sonlu eleman tipi seçildikten sonra bu elemana ait karakteristik özelliklerin girdisi için şekil 5.29’da görüldüğü üzere menüden ilgili seçenek tıklanır ve özellik tanımlama penceresine ulaşılır.



Şekil 5.27 : Kalınlık tanımlama menüsü.

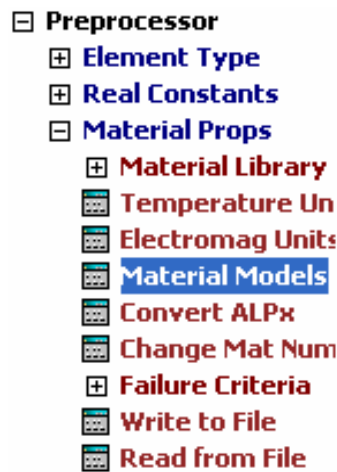
Shell 63 elemanın özelliklerinde belirtildiği üzere, analizi yapılacak parçanın kalınlığı sabit olduğu için sadece TK(I)’ya kalınlık değerini atamak yeterlidir. Şekil 5.30’da ilgili pencere ve atama değeri verilmektedir.



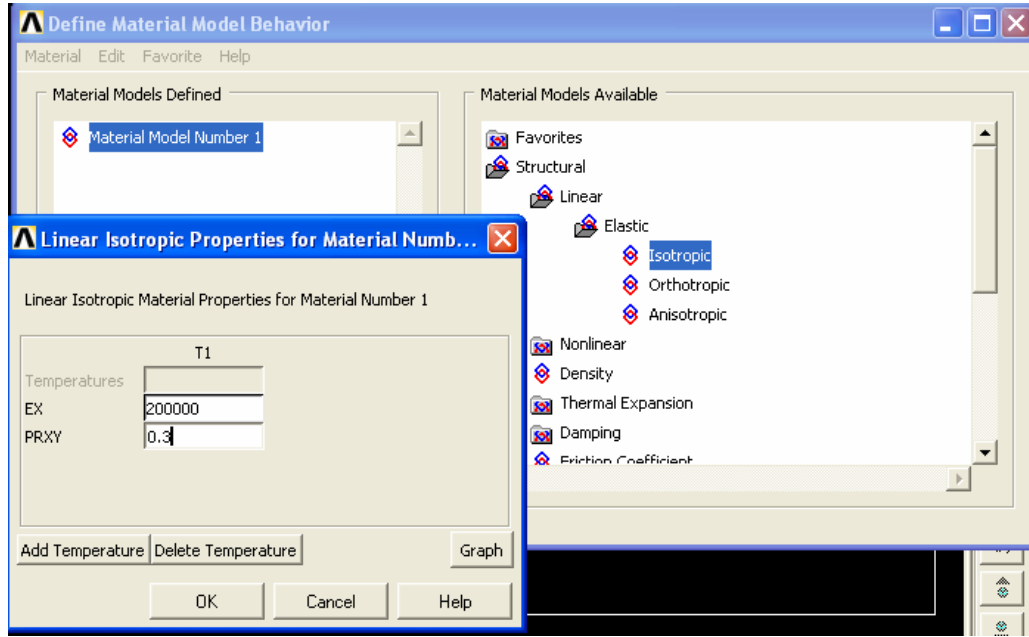
Şekil 5.28 : Kalınlık tanımlama penceresi.

4) Malzeme özelliklerinin tanımlanması;

Malzemenin mekanik yada termal özelliklerini tanımlamak için malzeme özellikleri menüsünden (material properties) malzeme modeli oluşturmak için malzeme modeli (material models) seçeneği seçilerek özellik atama penceresine ulaşılır. Şekil 5.31 malzeme özellikleri menüsünü göstermektedir.



Şekil 5.29 : Malzeme özellikleri tanımlama menüsü.

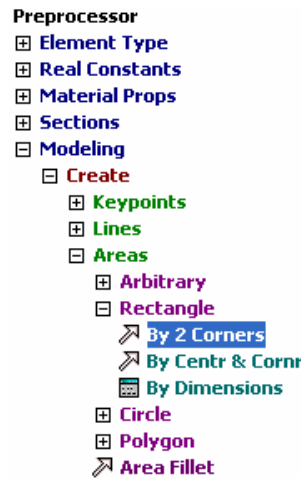


Şekil 5.30 : Eleman özellikleri tanımlama penceresi.

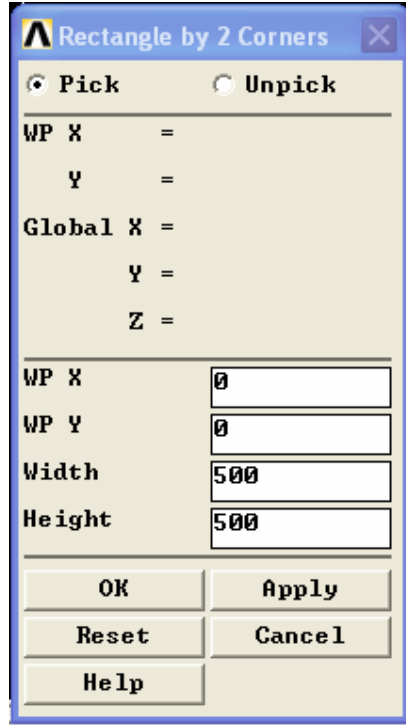
Şekil 5.32’de görüldüğü üzere çelik için elastisite modülü ve poisson oranları SI birim sistemine göre girilir.

5) Geometrinin tanımlanması;

Burada oluşturulacak geometri dikdörtgen bir plakadır. Daha önce üçüncü boyuttaki malzeme kalınlığı elemana atandığı için kabuk elemanın yüzey alanını oluşturmak geometrisinin elde edilmesi için yeterli olacaktır. Şekil 5.33’te görüldüğü üzere ilgili menüden köşegen noktaları oluşturma seçeneği tıklanarak şekil 5.34’teki tanımlama penceresine ulaşılır.



Şekil 5.31 : Geometri oluşturma menüsü.

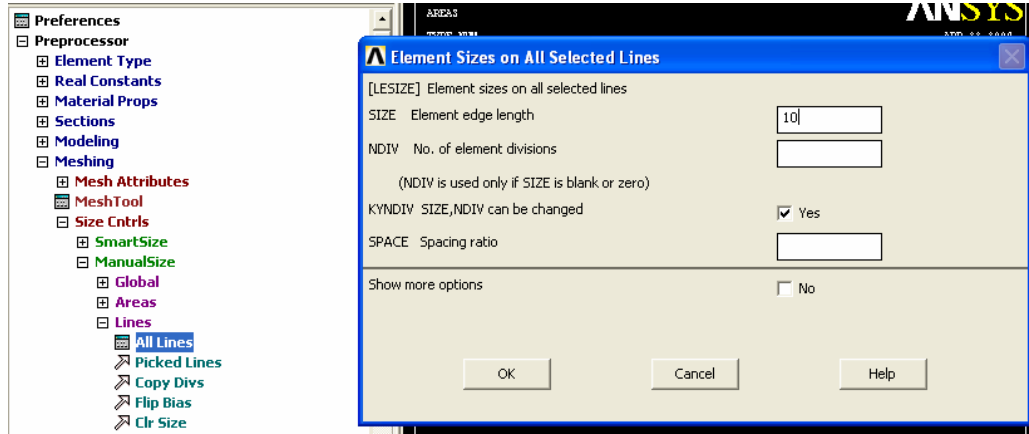


Şekil 5.32 : Geometri oluşturma penceresi.

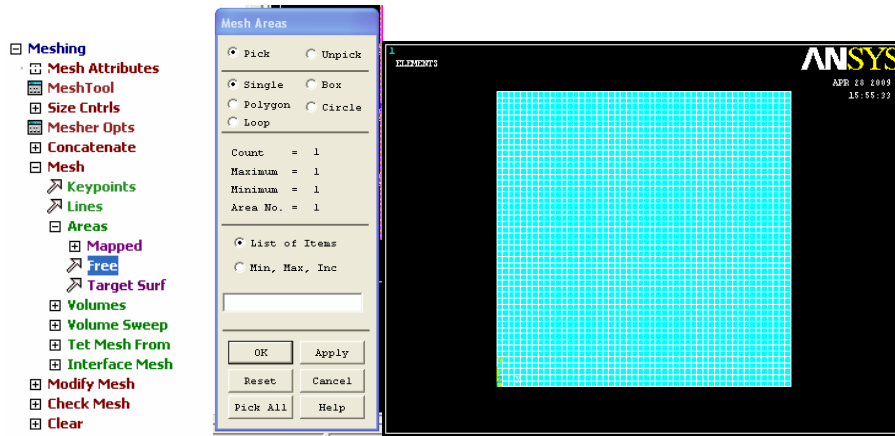
Kenar uzunlukları ve başlangıç referans noktası pencerede ilgili kutulara girilerek istenilen plaka şekli oluşturulur.

6) Geometrinin alt elemanlara bölünmesi;

Sonlu elemanlar prensibi gereği analizi yapılacak yapının daha küçük alt elemanlara bölünmesi gerekmektedir. Bu alt elemanların büyüklüğü ve şekli sonuçları direk olarak etkilemektedir. Şekil 5.35'te alt eleman büyüklüğümü ayarlamak ile ilgili menü verilmektedir. Buradan tüm çizgiler komutu (all line) seçilerek kenar uzunlukları 10 olan daha küçük parçalara bölme işlemi gerçekleştirilmiştir. Dana sonra şekil 5.36'daki menü vasıtasıyla anlt elemanlara bölünecek yapı yüzey alanı olduğu için alan komutu (areas) yardımıyla, 10 birim boyutundaki küçük doğru parçalarına bölünmüş kenarlar bölünme yerlerinden birleştirilerek düğüm noktaları oluşturulmuştur. Böylece alt elemanlara bölünme işlemi yüzeye uygun bir biçimde gerçekleştirilmiştir.



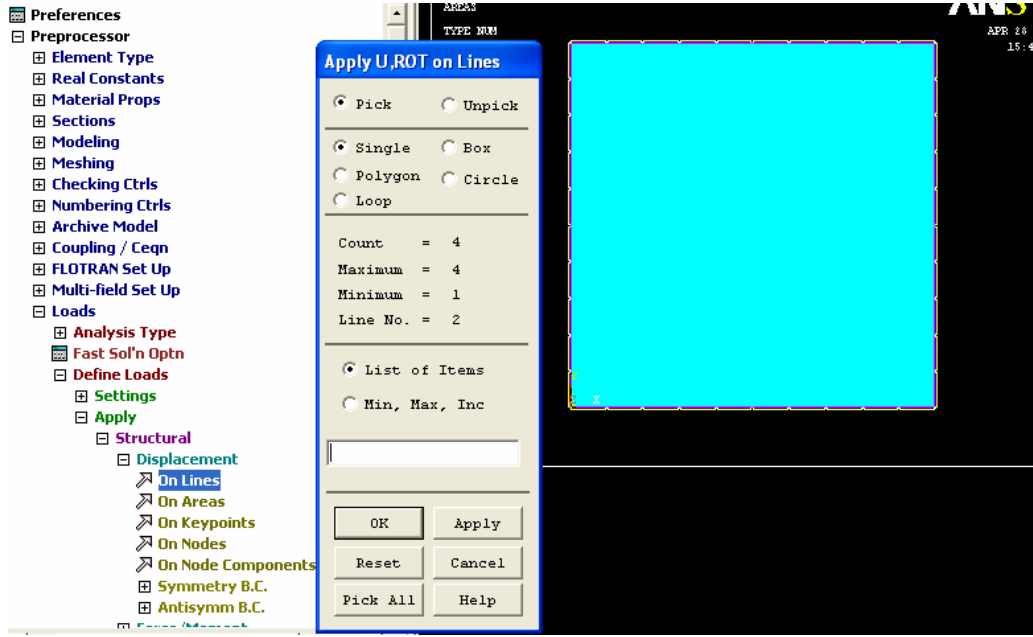
Şekil 5.33 : Alt eleman boyutu tanımlama menüsü.



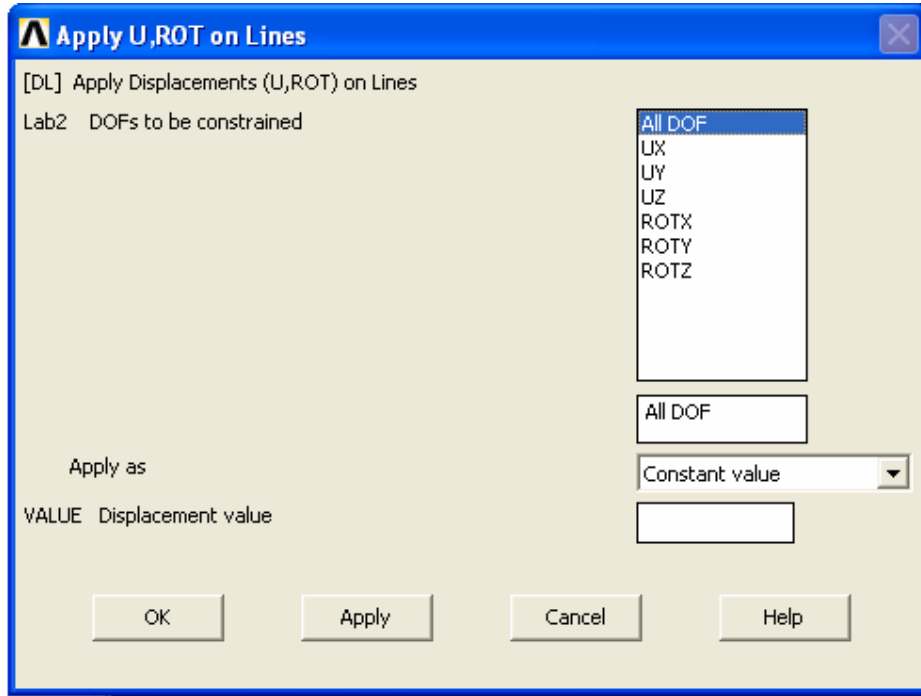
Şekil 5.34 : Alt elemanlara bölme menüsü.

7) Mesnetlerin tanımlanması;

Şekil 5.37'teki ilgili menüden mesnet türü ve yeri atanmaktadır. İlk olarak mesnet yeri kenar boyunca olduğu için kenar boyunca (on lines) komutu seçilerek tanımlama yapılmış ve ardından şekil 5.38'de gösterilen mesnet türü tanımlama penceresinden, tüm kenarlar ankastre mesnetli olduğu için all dof komutu seçilerek mesnetler oluşturulmuştur.



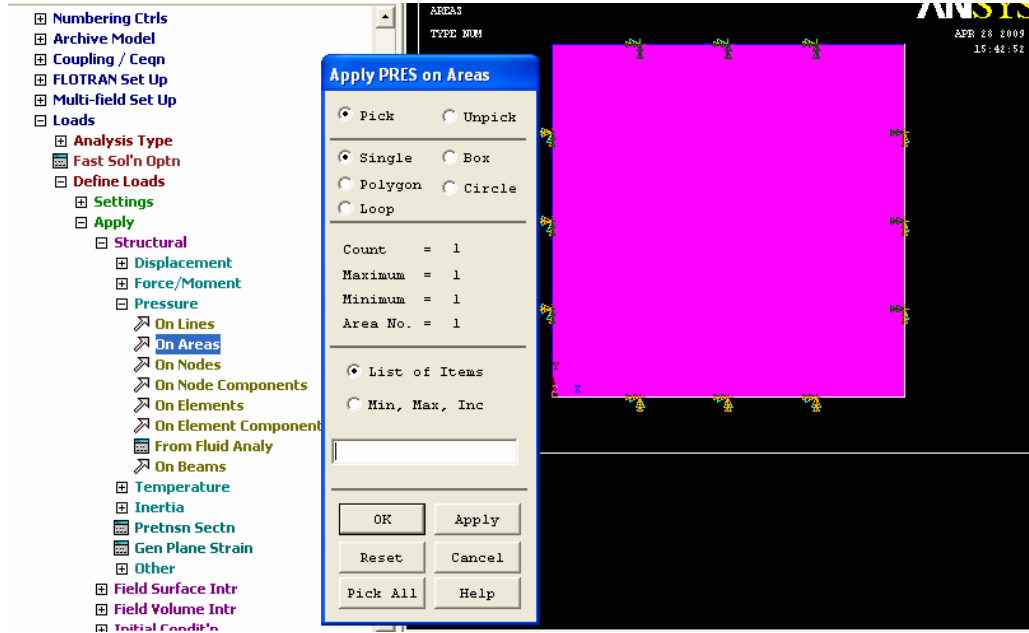
Şekil 5.35 : Mesnet tanımlama menüsü.



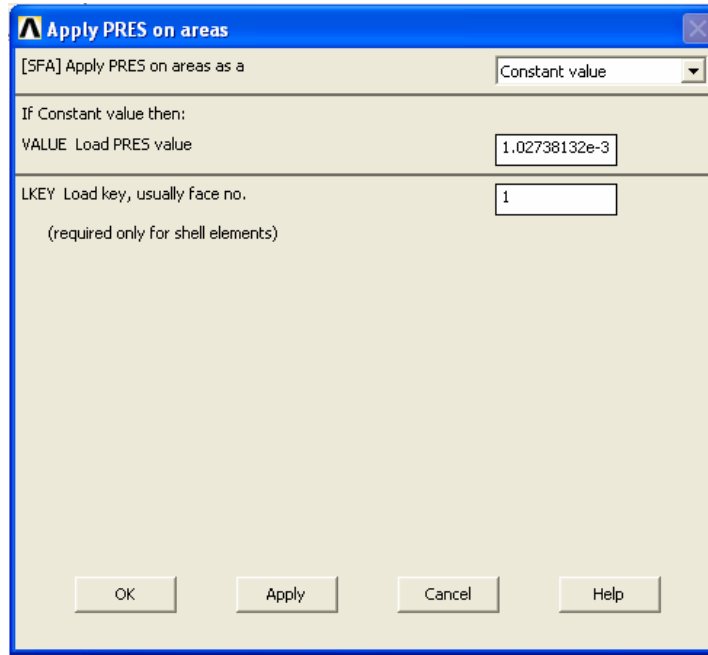
Şekil 5.36 : Mesnet tanımlama penceresi.

8) Yüklerin tanımlanması;

Bu problemdeki yükleme hali plakanın yüzey normali doğrultusunda etkiyen düzgün dağılımlı yayılı yükür. Şekil 5.39'daki ilgili menüden basınç (pressure) seçeneği seçilerek şekil 5.40'taki yük tanımlama penceresine ulaşılır ve yükleme yapılır.



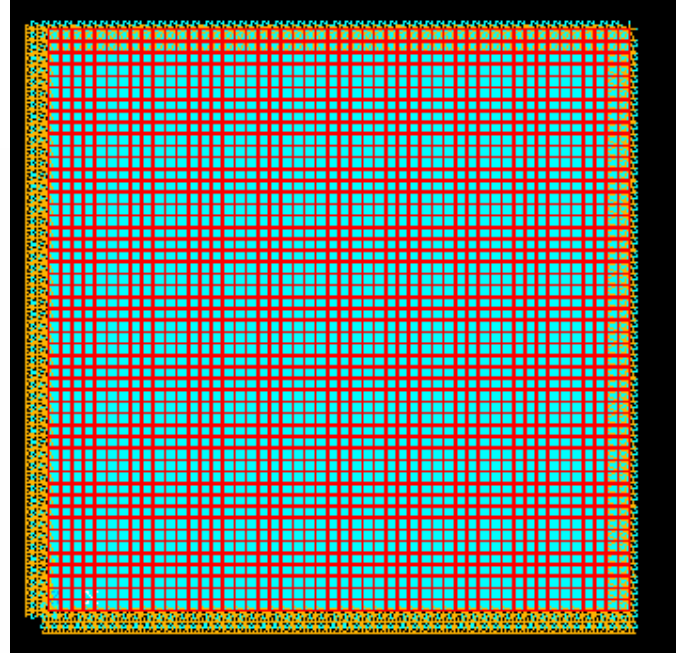
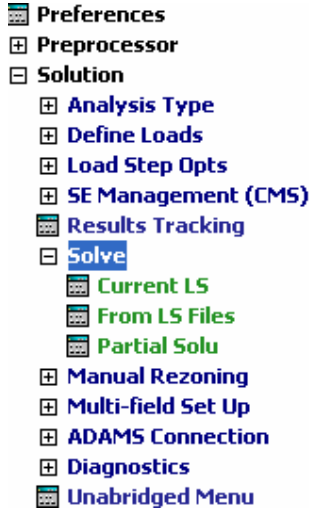
Şekil 5.37 : Mesnet tanımlama penceresi.



Şekil 5.38 : Yük tanımlama penceresi.

9) Yapının çözdürülmesi;

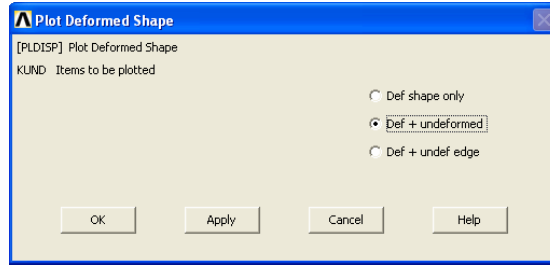
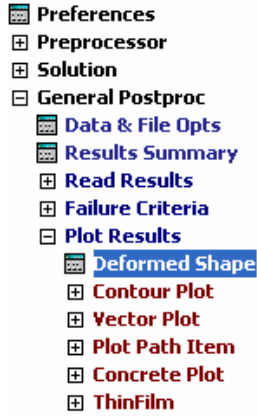
Şekil 5.41 de görülen menüden current ls komutu ile yapı çözdürülür. Çözüm hızı yapının karmaşıklığına, içinde barındırdığı alt eleman sayısına ve bilgisayarın performansına bağlıdır.



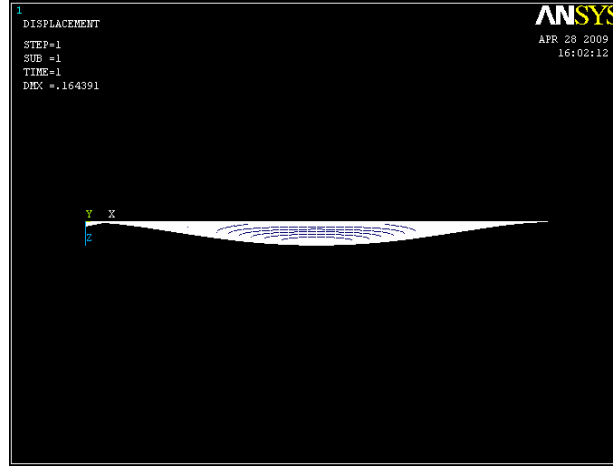
Şekil 5.39 : Çözüm menüsü.

10) Sonuçların Alınması;

Şekil 5.42'deki menü vasıtasıyla sonuçların çıktıları ekrana alınabilir. Burdaki menüde abartılı bir gösterimle yükleme öncesi ve sonrası geometrideki değişim ve sehim değerleri verilmiştir.

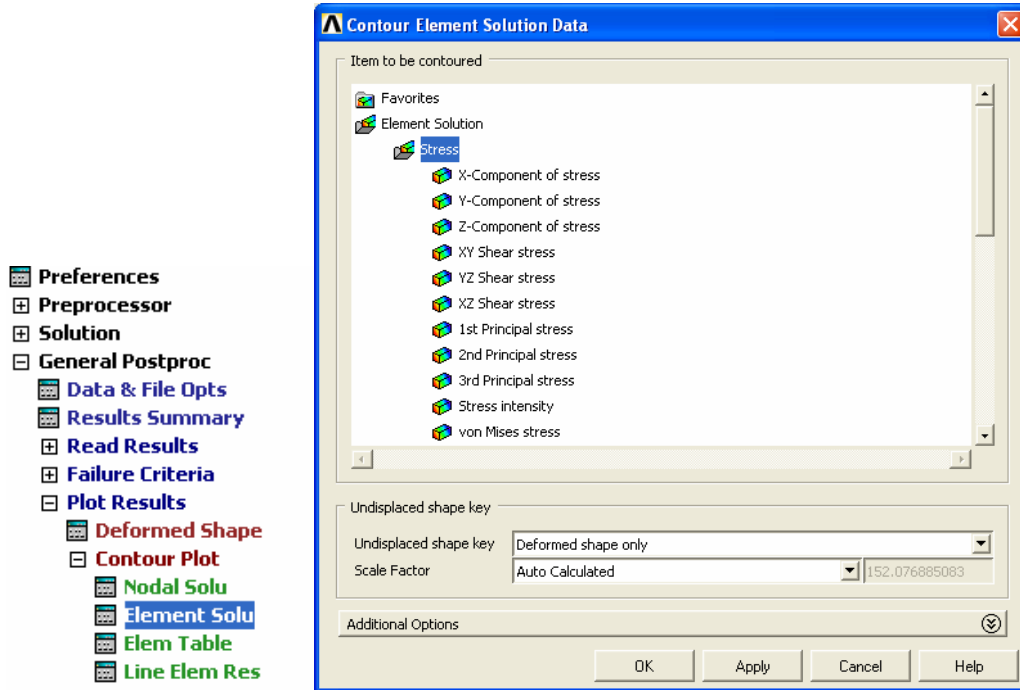


Şekil 5.40 : Sonuç izlem menüsü (deformasyon).



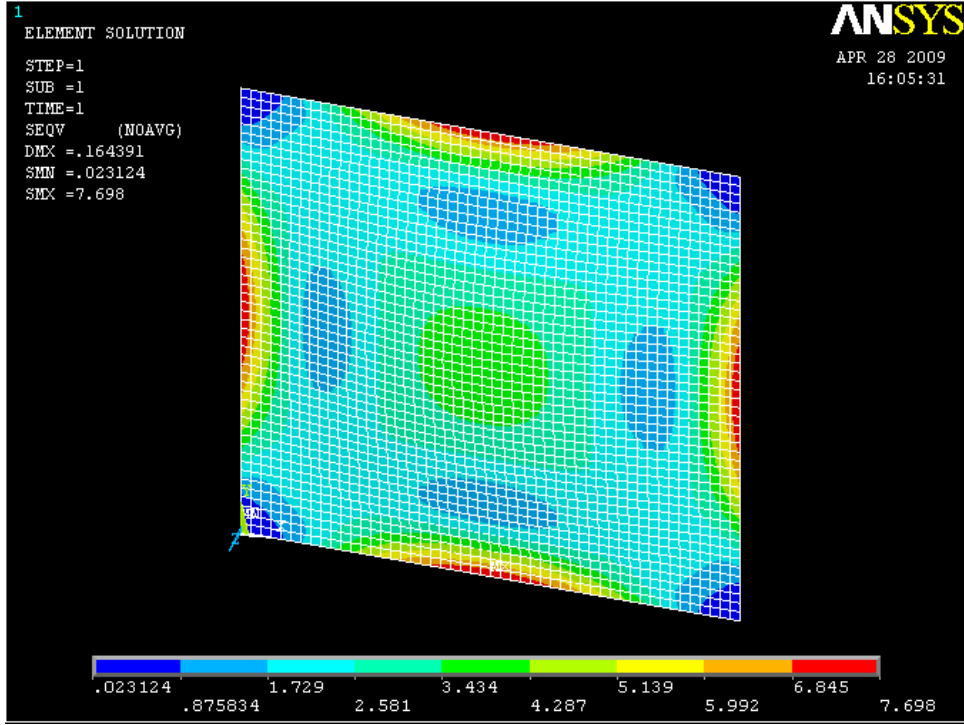
Şekil 5.41 : Şekil değişimi sonuç çıktısı.

Şekil 5.44 ise plaka üzerinde oluşan gerilmeleri görmek için kullanılacak menüyü göstermektedir. Buradan görülmek istenen gerilme bileşenleri seçilir. Burada bileşik gerilme hali için Von Mises teoremini seçilmiştir.



Şekil 5.42 : Gerilme sonuçları için kriter seçim menüsü.

Şekil 5.45 Von Mises teoremine göre gerilme dağılımını farklı renklerle plaka üzerinde göstermektedir. Kırmızıdan yeşile doğru değişen bölge kritikten daha az kritik bölgeye doğru değerleri görsel olarak vermektedir. Kırmızı en kritik bölge, yeşil ise gerilme yönünden en rahat bölgedir.



Şekil 5.43 : Gerilme sonuç çıktısı (von misses teoremine göre).

Yukarıda anlatılan işlem prosedüre göre bölüm 4.3'te verilen plakaların sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilmiş sehim değerleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Çizelge 5.1 : Kare plaka için farklı kalınlıklarda SEM yöntemiyle elde edilen semin değerleri.

Levha Numarası	Kalınlık(t) mm	Yayıllı Yük(p) pa	Sehim mm
1	1,5	$9,11903895 \cdot 10^{-4}$	1,167
2	2	$9,5039637 \cdot 10^{-4}$	0,513244
3	2,5	$9,88888845 \cdot 10^{-4}$	0,273424
4	3	$1,02738132 \cdot 10^{-3}$	0,164391

Çizelge 5.1'de kenar oranı bir olan plakanın diğer tüm değişkenleri sabit tutularak sehim değerinin kalınlığa göre değişimi verilmiştir. Burada yükleme değerindeki

küçük artımlar kalınlığın artımıyla meydana gelen plaka ağırlığının değişmesinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 5.2 : Kenar oranı 2 olan plaka için farklı kalınlarda SEM yöntemiyle elde edilen semih değerleri.

Levha numarası	Kalınlık(t) mm	Yayıllı Yük(p) pa	Sehim mm
5	2	$9,5039637.10^{-4}$	0,064039
6	2,5	$9,88888845.10^{-4}$	0,034114
7	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,02051

Çizelge 5.2’de kenar oranı iki olan plakanın diğer tüm değişkenleri sabit tutularak sehim değerinin kalınlığa göre değişimi verilmiştir. Burada yükleme değerindeki küçük artımlar kalınlığın artımıyla meydana gelen plaka ağırlığının değişmesinden kaynaklanmaktadır.

Çizelge 5.3 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için SEM yöntemiyle elde edilen sehim değerleri.

Levha numarası	Kenar oranı(b/a)	Kalınlık(t) mm	Yayıllı Yük(p) pa	Sehim mm
8	1	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,164391
9	1,2	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,224074
10	1,4	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,268647
11	1,6	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,298743
12	1,8	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,3177717
13	2	3	$1,02738132.10^{-3}$	0,328979

Çizelge 5.3 te farklı kenar oranlarında, diğer tüm özellikler sabit tutularak sehimin kenar oranına göre değişimi incelenmiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çizelge 6.1 ile verilen değerler kalınlık hariç diğer özellikler sabit tutularak nümerik ve sonlu elemanlar yöntemiyle ve nümerik yöntemler ile hesaplanmıştır. Buradan görüldüğü üzere değerler arasındaki fark hesaplanan sehime oranla oldukça küçük kalmaktadır. Tutarlılık mertebesini tanımlamak için nümerik çözüm ile elde edilmiş sonuc ve sonlu elemanlar ile elde edilmiş sonuç arasındaki oranı dikkate aldığımızda değerler 0,999 mertebesinde çıkmaktadır. Buda sonlu elemanlar yönteminin bu halde sonucu nerdeyse birebir temsil ettiğini göstermektedir.

Çizelge 6.1 : Kare plaka için farklı kalınlıklarda nümerik ve SEM yöntemiyle elde edilen değerlerin karşılaştırması.

<i>Levha numarası</i>	<i>Nümerik Çözüm</i>	<i>SEM</i>	Fark
1	1,168450324	1,167	$1,450324.10^{-3}$
2	0,513745241	0,513244	$5,01241.10^{-4}$
3	0,27369211945	0,273424	$2,6811945.10^{-4}$
4	0,164551865	0,164391	$1,60865.10^{-4}$

Çizelge 6.2’de yapılan karşılaştırmada ise yine değerler birine çok yakındır. Yakınlık oranına bakıldığında 0,996 mertebesinde sonlu elemanlar yöntemi nümerik çözümü temsil etmektedir.

Çizelge 6.2 : Kenar oranı 2 olan plaka için farklı kalınlıklarda nümerik ve SEM yöntemiyle elde edilen değerlerin karşılaştırması.

<i>Levha numarası</i>	<i>Nümerik Çözüm</i>	<i>SEM</i>	<i>Fark</i>
5	0,0642678151	0,064039	$2,288151.10^{-4}$
6	0,03423514375	0,034114	$1,2114375.10^{-4}$
7	0,02058313789	0,02051	$7,31378910^{-5}$

Çizelge 6.3’de yapılan karşılaştırmada yakınlık oranı elde edilen ilk sonuçta 0,999 mertebesinde, son karşılaştırmada ise 0,998 mertbesine düşmüştür. Fakat yinede mükemmel bir şekilde nümerik çözümü temsil etmektedir.

Çizelge 6.3 : 3 mm kalınlığında plakanın farklı kenar oranları için nümerik ve SEM yöntemiyle elde edilen sehim değerlerinin karşılaştırması.

Levha numarası	Nümerik Çözüm	SEM	Sehim mm
8	0,1645518847	0,164391	$1,608847.10^{-4}$
9	0,2244229307	0,224074	$3,489307.10^{-4}$
10	0,2690093821	0,268647	$3,623281.10^{-4}$
11	0,2991721419	0,298743	$4,291419.10^{-4}$
12	0,3181171961	0,3177717	$3,454961.10^{-4}$
13	0,3293310062	0,328979	$3,520062.10^{-4}$

Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2 ile elde edilen veriler, Çizelge 6.3 ile verilen değerlere yakınlık göstermektedir. Bu durumda değişkenin kenar oranları olması halinde de sonlu elemanlar yöntemi güvenilir bir çözüm yöntemidir.

Mühendislik kabulleri çerçevesinde sonlu elemanlar yönteminin bu problem için uygulanmasına herhangi bir sakınca yoktur.

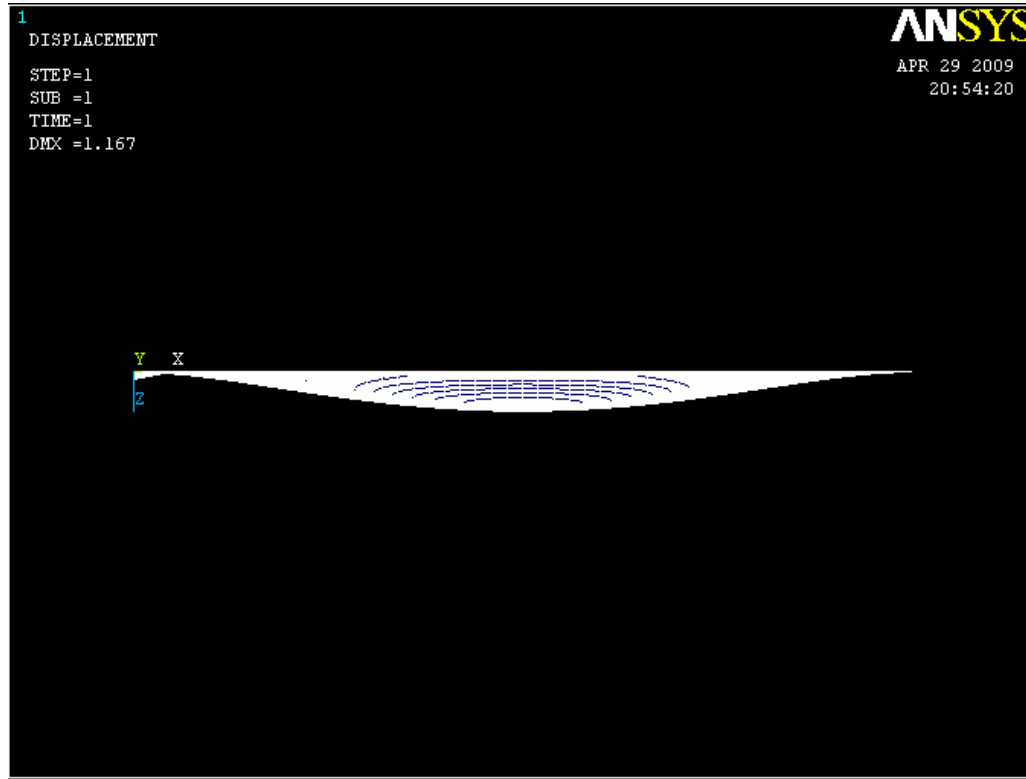
KAYNAKLAR

- [1] **Dirgantara, T.**, 2002. *Boundry Element Analysis of Cracks in Shear Deformable Plates and Shell*, WIT Press, Southtamphon U.K, pp. 1-14.
- [2] **Jawad, Maan H.**, 2004. *Design of Plate and Shell Structure*, Suffolk U.K, pp. 1-31, 409-444.
- [3] **İmrak, C. Erdem., Gerdemeli, İsmail**, The problem of isotropic rectangular plate with four clamped edges, I.T.U İstanbul, *Sadhana Vol. 32, Part 3, June 2007*, pp. 181-186
- [4] **Taylor, Robert., Govindjee, Sanjay.**, *Solution of Clamped Rectangular Plate Problems*, Universty of California, Berkley, U.S.A , *Comminications in Numerical Methods in Engineering*, 2004, pp. 757-765
- [5] **Bedir, S.**, 2007. Çift Yönlü Asansör Fren Bloklarının Modellenmesi ve Sonlu Elemanların Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [6] **Zor, M.**, 2006. *Örneklerle Abaqus'a Giriş*, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, pp. 1-24
- [7] **Pençe, E.**, 2007. *Eğitim Amaçlı Ansys Paket Programının Tanıtılması, Ansys Öğretimi ve Uygulama Örnekleri*, Karaelmas Üniversitesi, Zonguldak, pp 17-21.

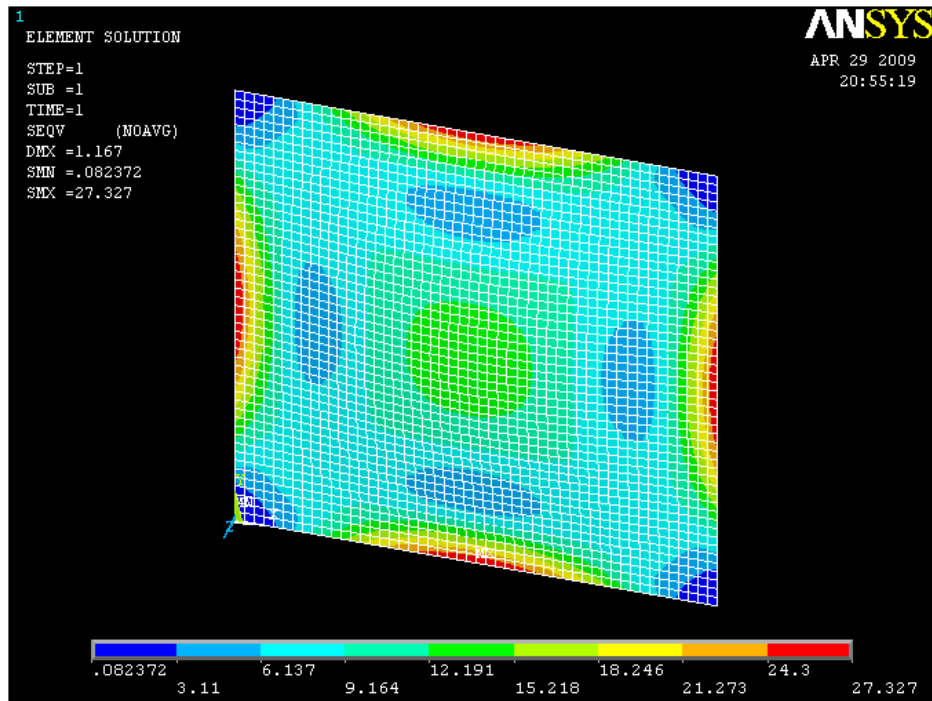
EKLER

EK A.1 : Analiz Sonuçları

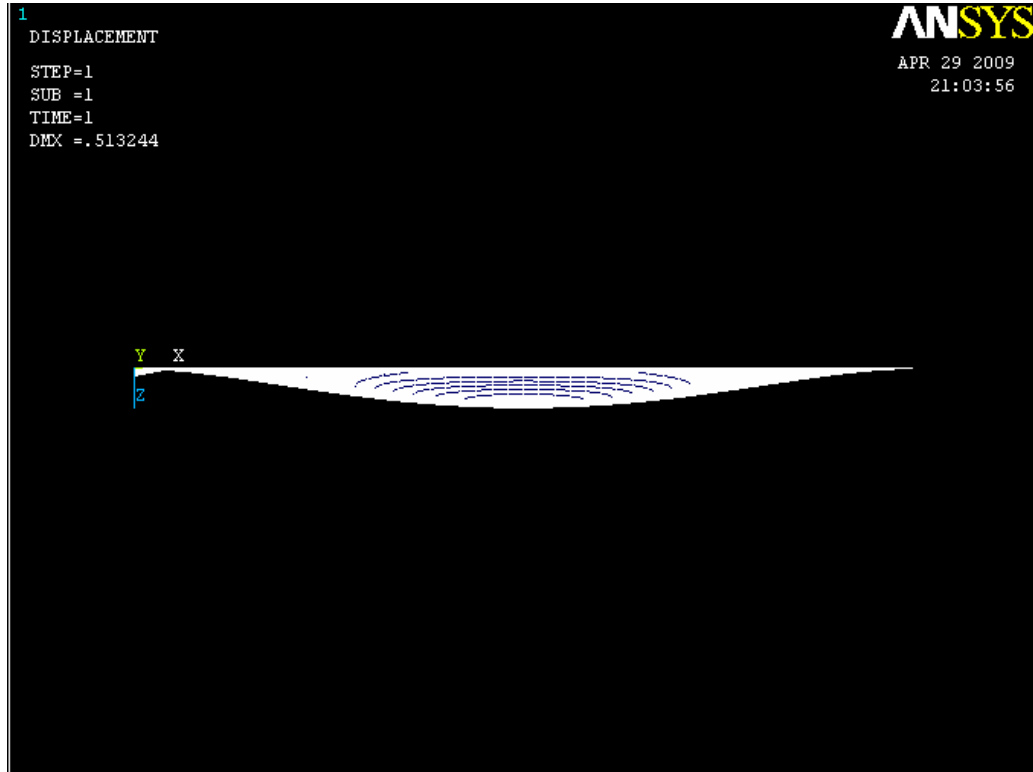
EK A.1



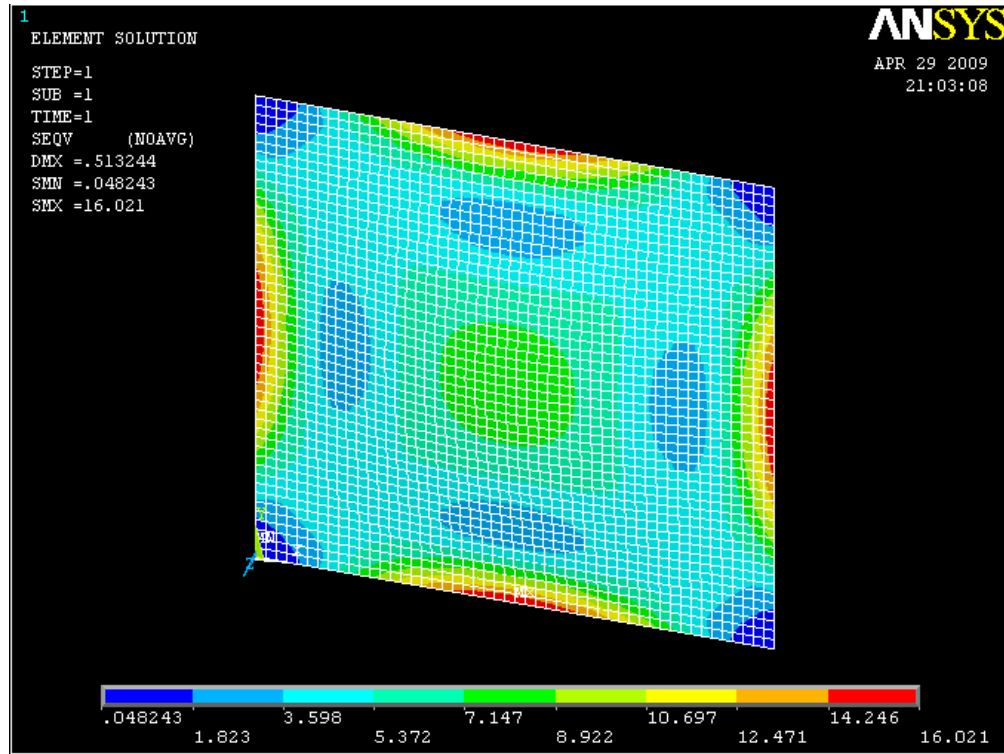
Şekil A.1 : Levha 1 için sehim analizi.



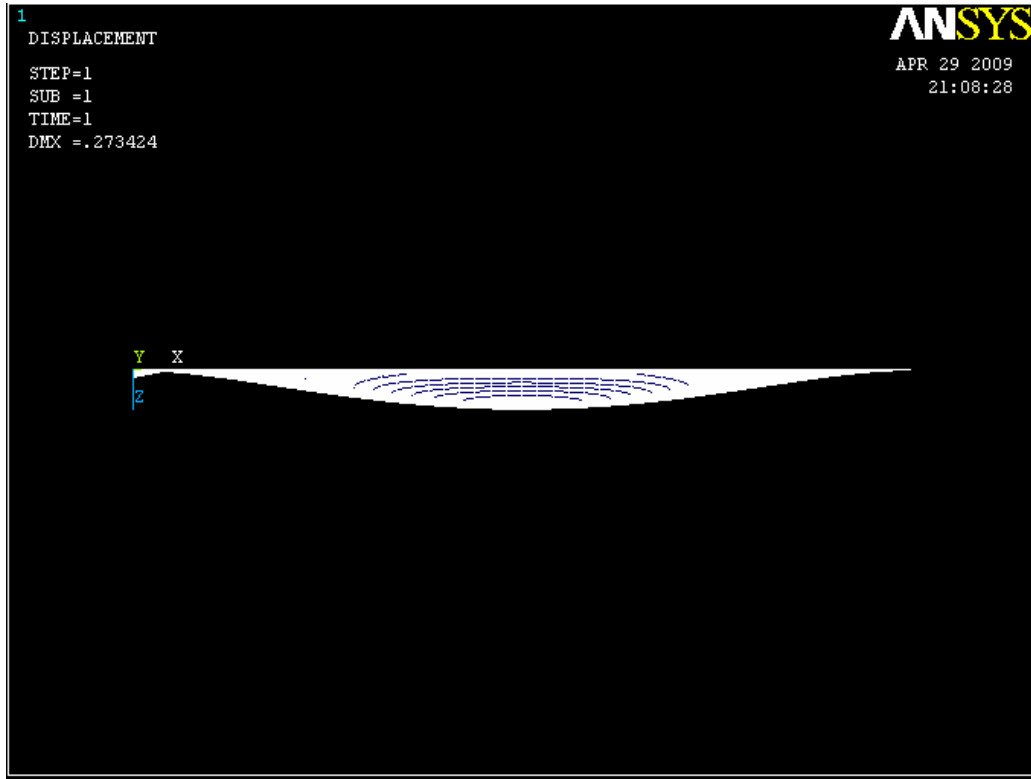
Şekil A.2 : Levha 1 için gerilme analizi.



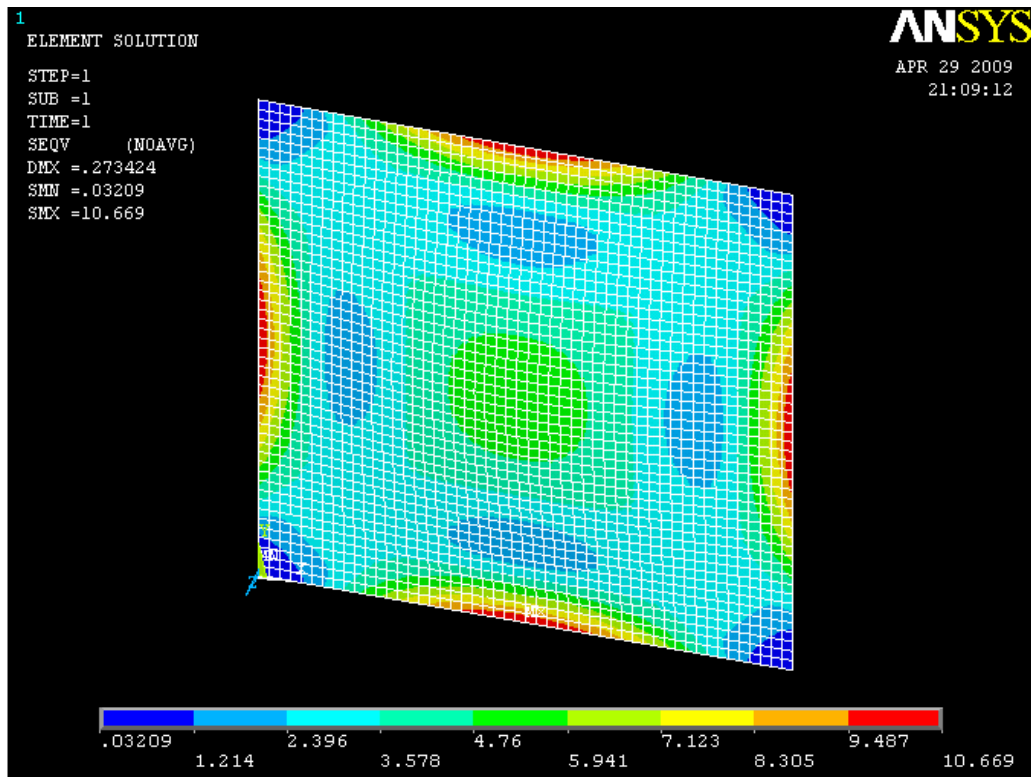
Şekil A.3 : Levha 2 için sehim analizi.



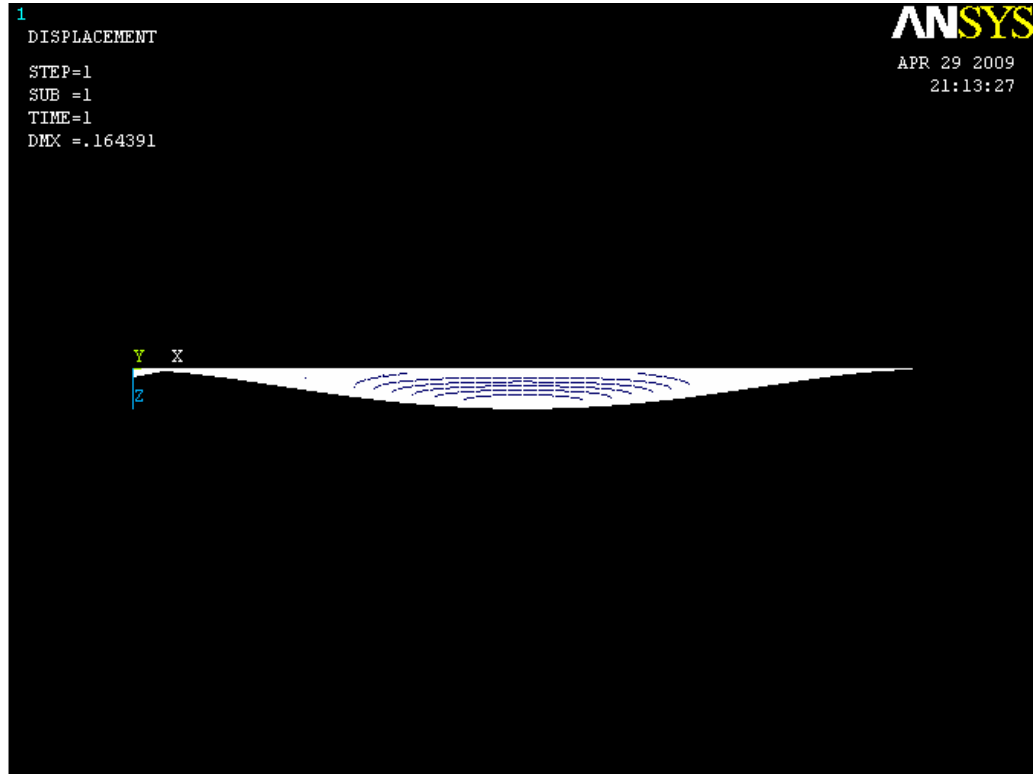
Şekil A.4 : Levha 2 için gerilme analizi.



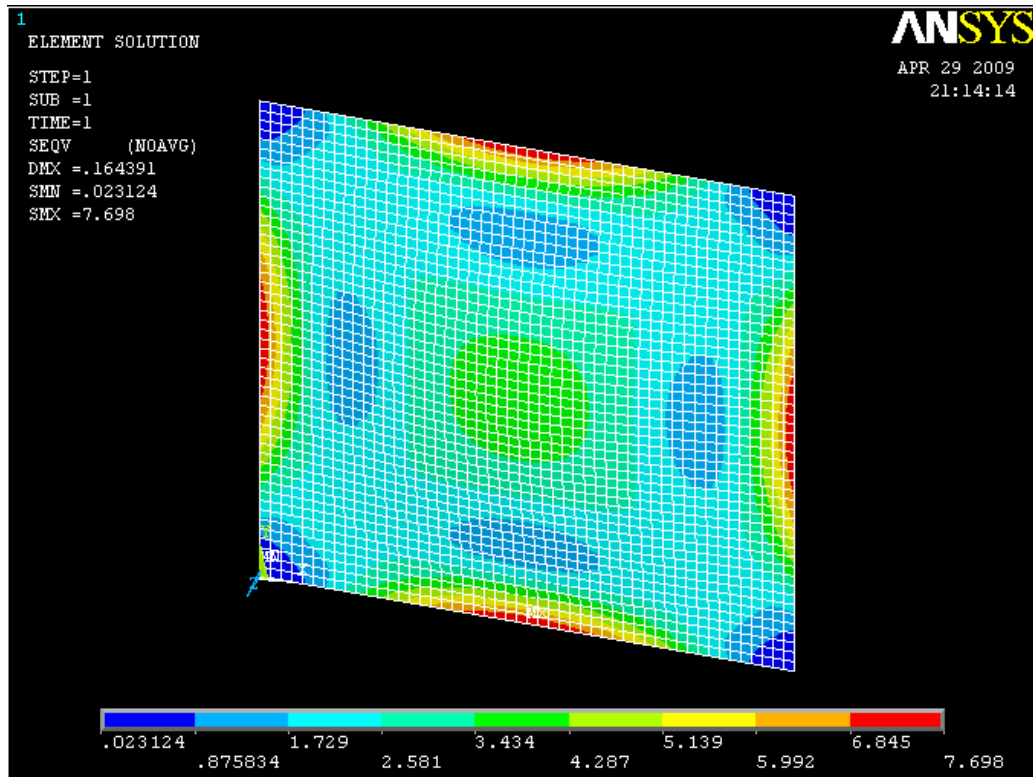
Şekil A.5 : Levha 3 için sehim analizi.



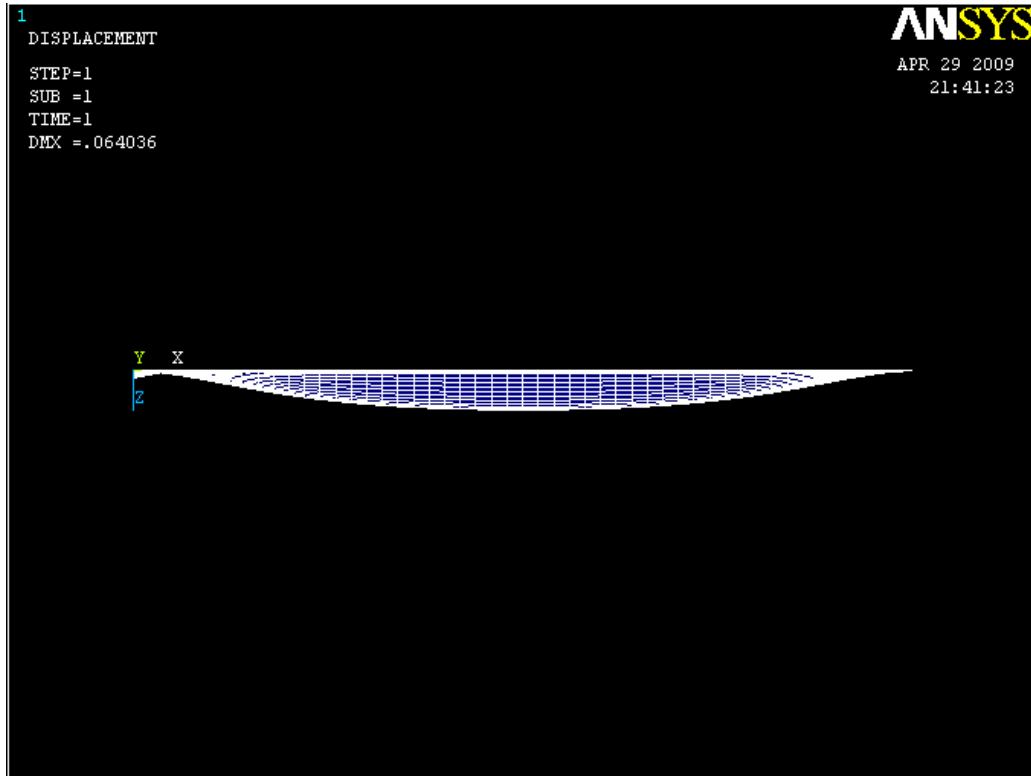
Şekil A.6 : Levha 3 için gerilme analizi.



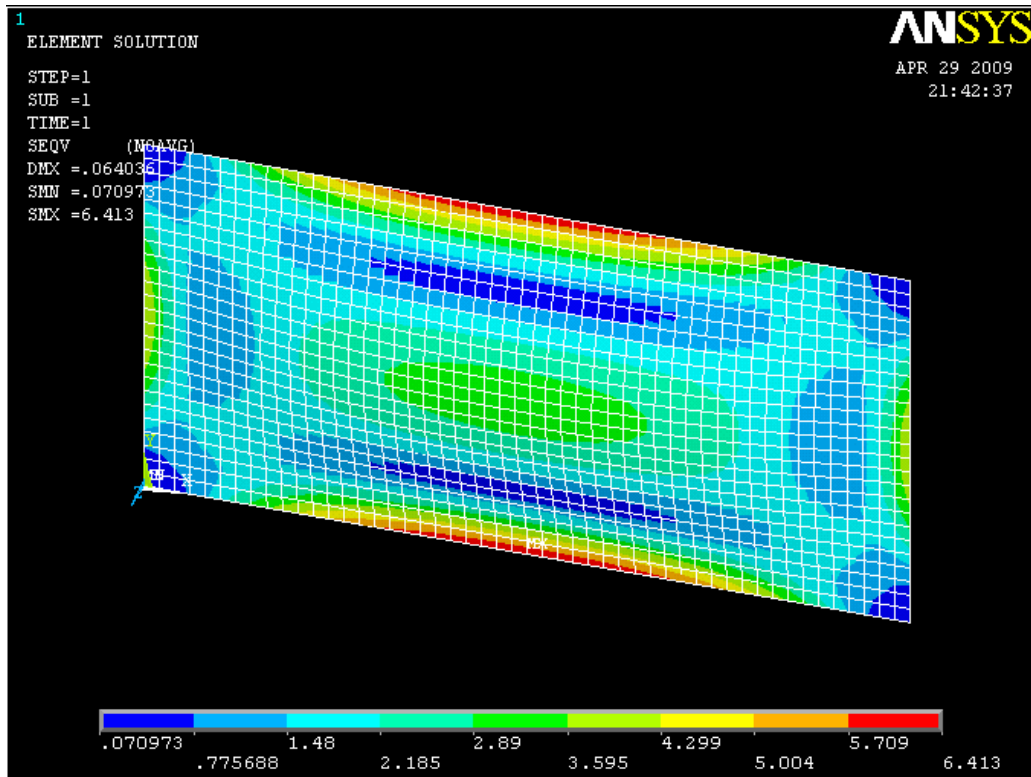
Şekil A.7 : Levha 4 için sehim analizi.



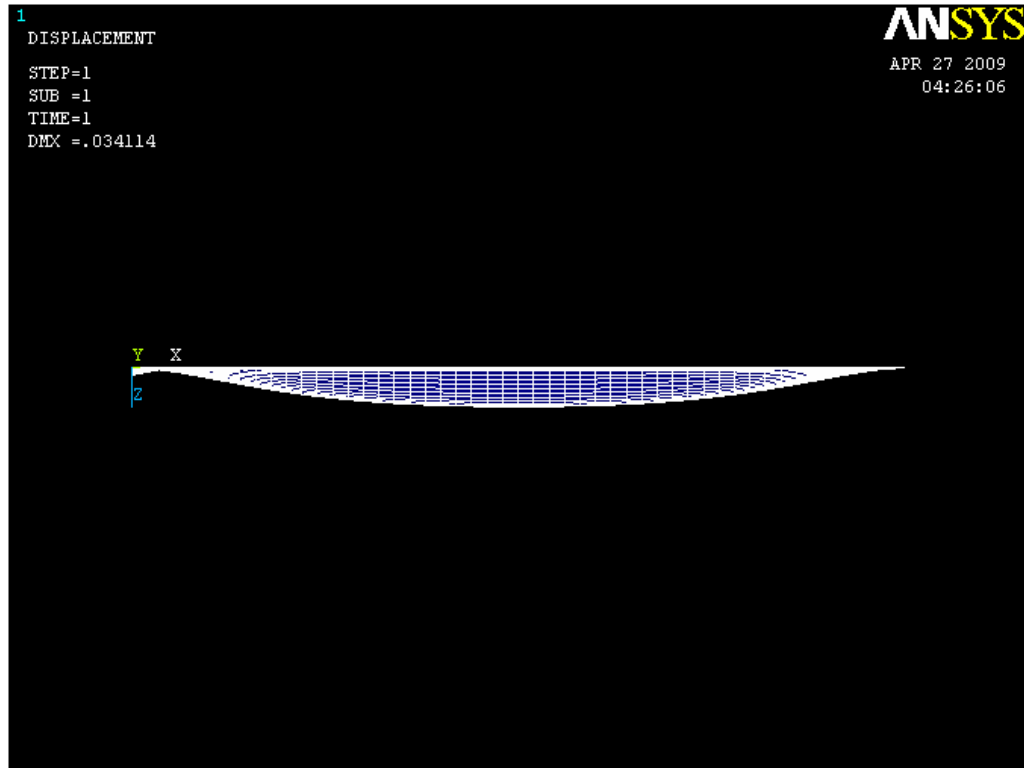
Şekil A.8 : Levha 4 için gerilme analizi.



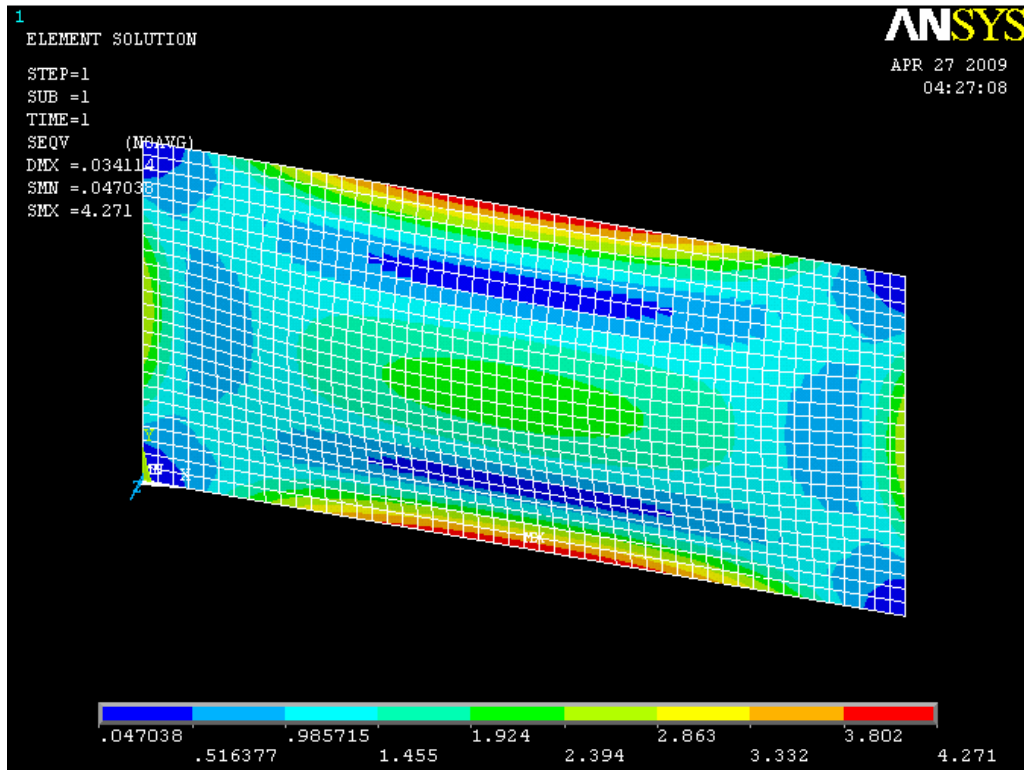
Şekil A.9 : Levha 5 için sehim analizi.



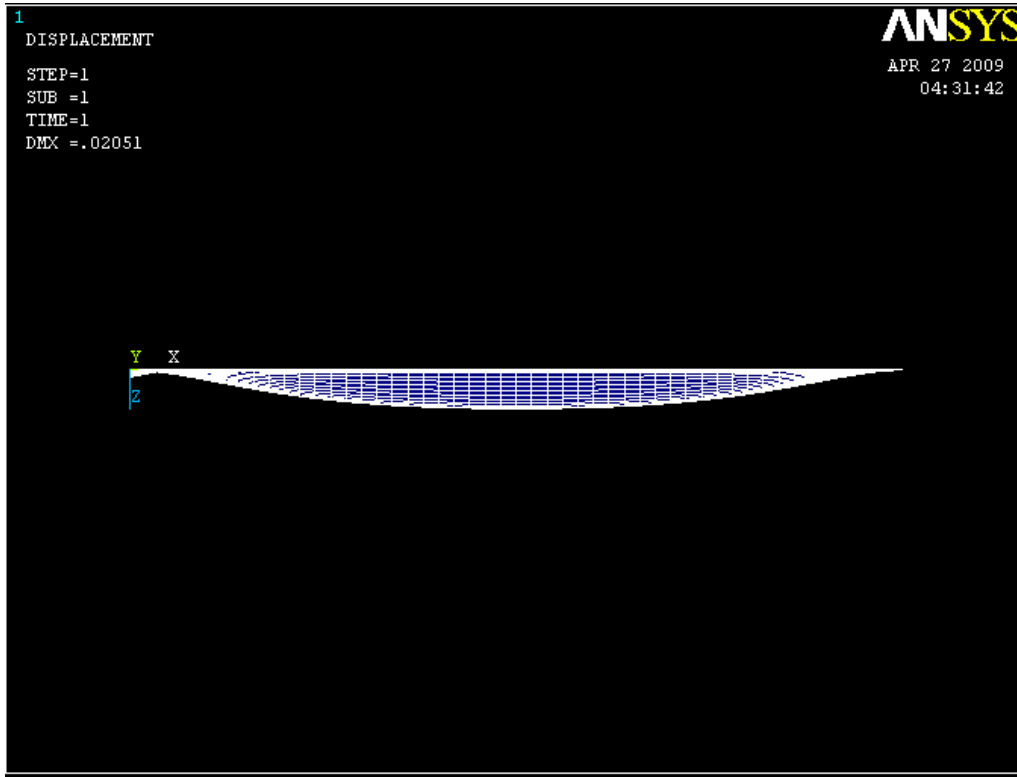
Şekil A.10 : Levha 5 için gerilme analizi.



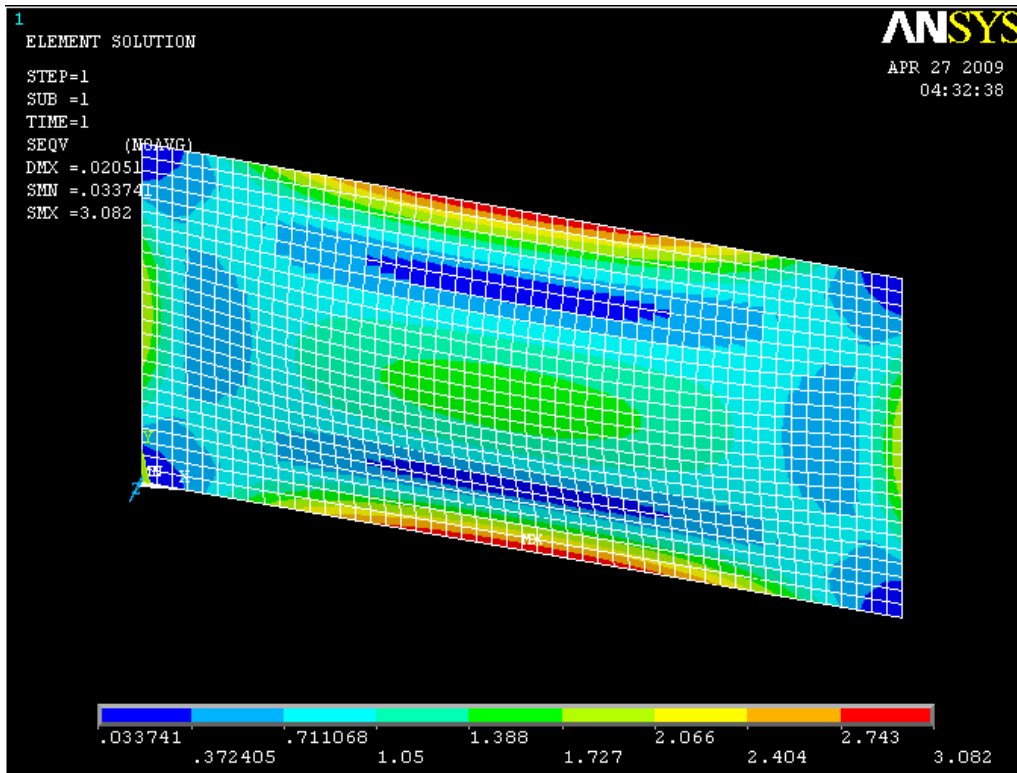
Şekil A.11 : Levha 6 için sehim analizi.



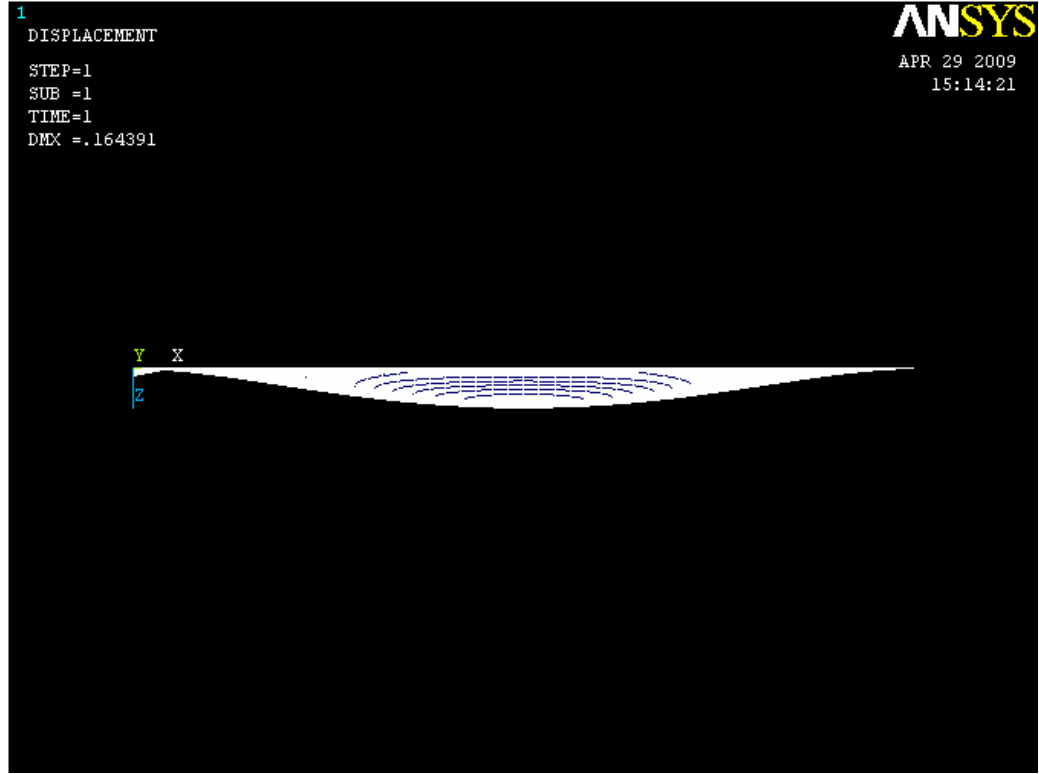
Şekil A.12 : Levha 6 için gerilme analizi.



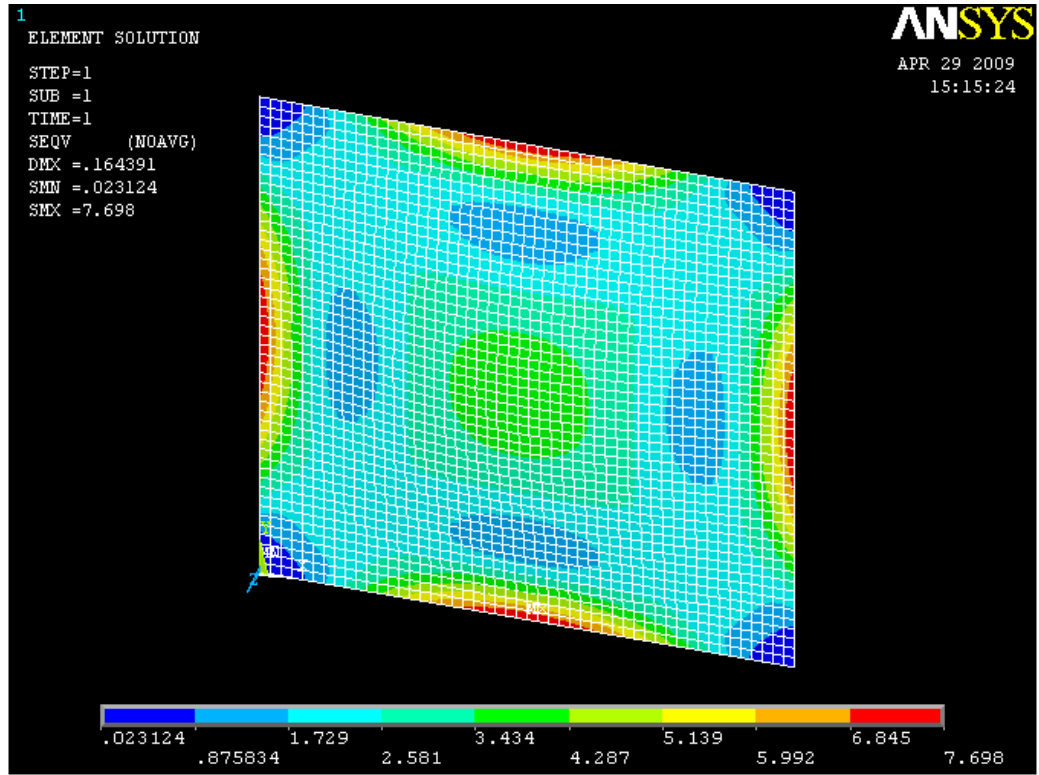
Şekil A.13 : Levha 7 için sehim analizi.



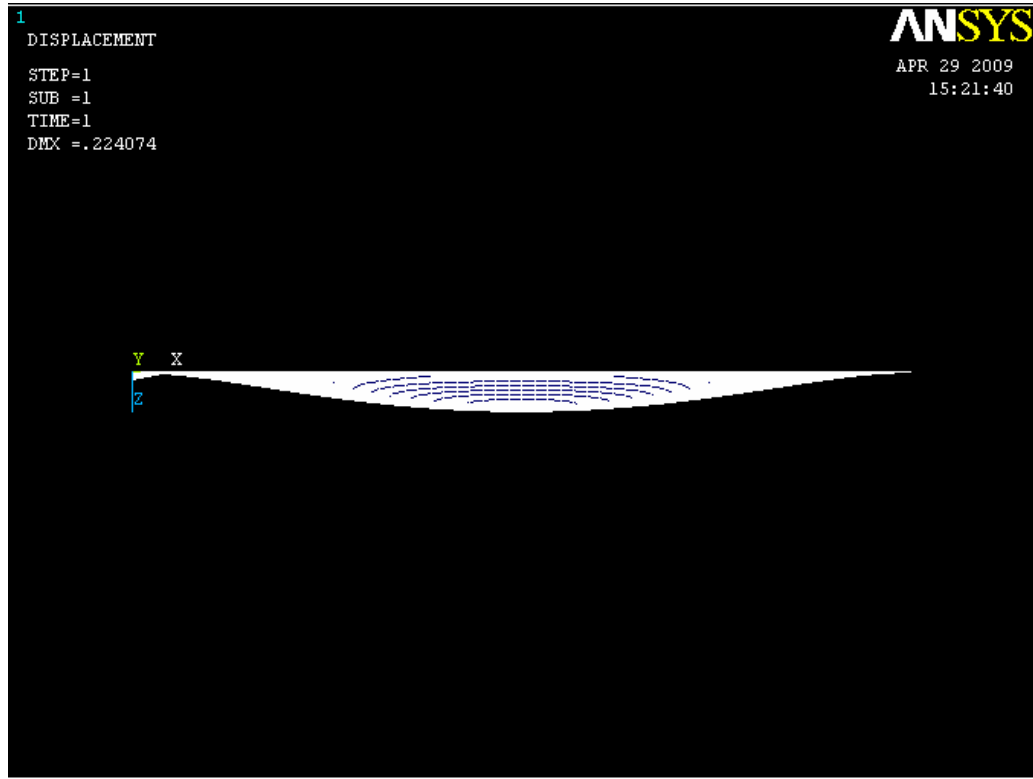
Şekil A.14 : Levha 7 için sehim analizi.



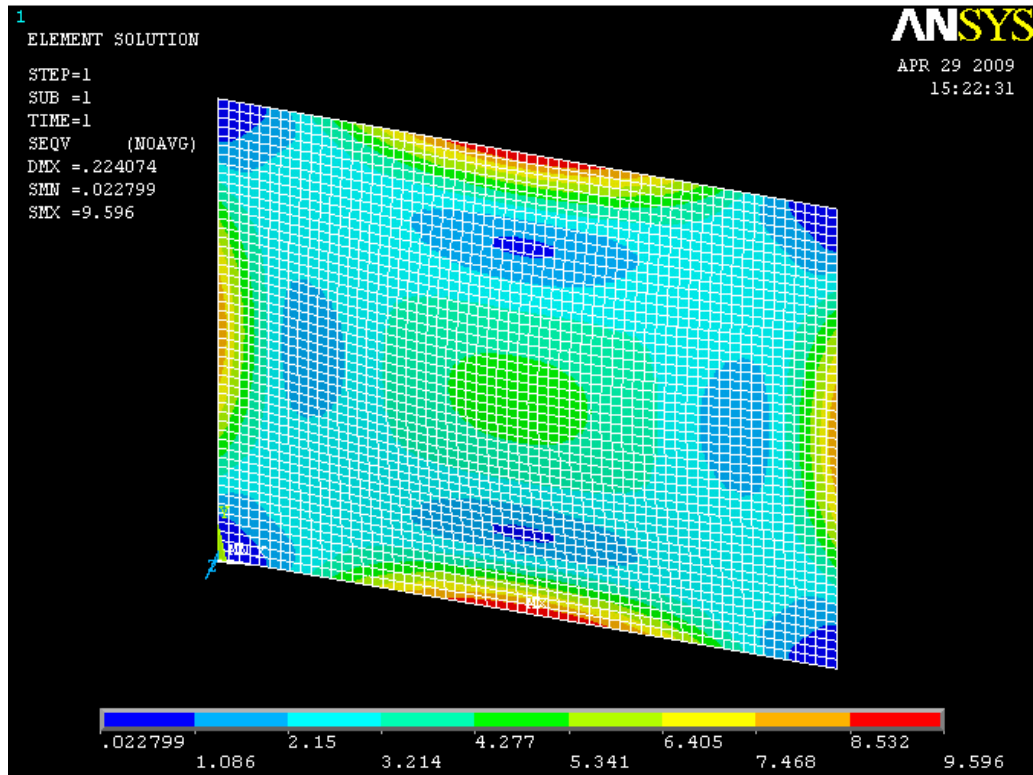
Şekil A.15 : Levha 8 için sehim analizi.



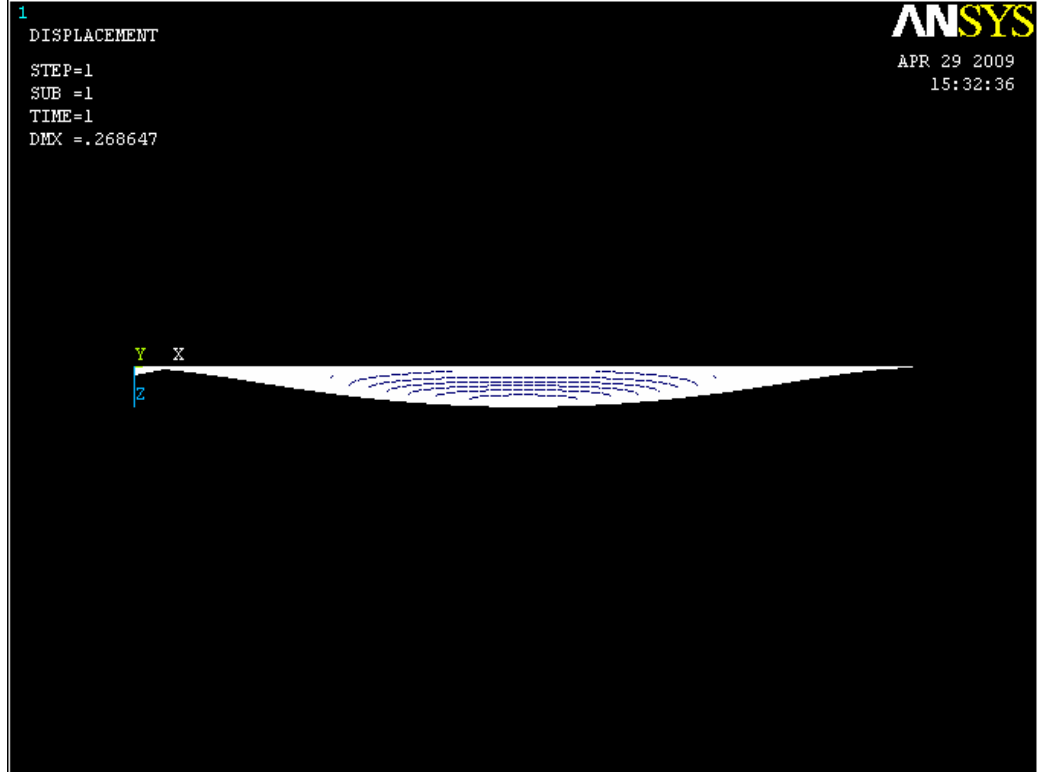
Şekil A.16 : Levha 8 için gerilme analizi.



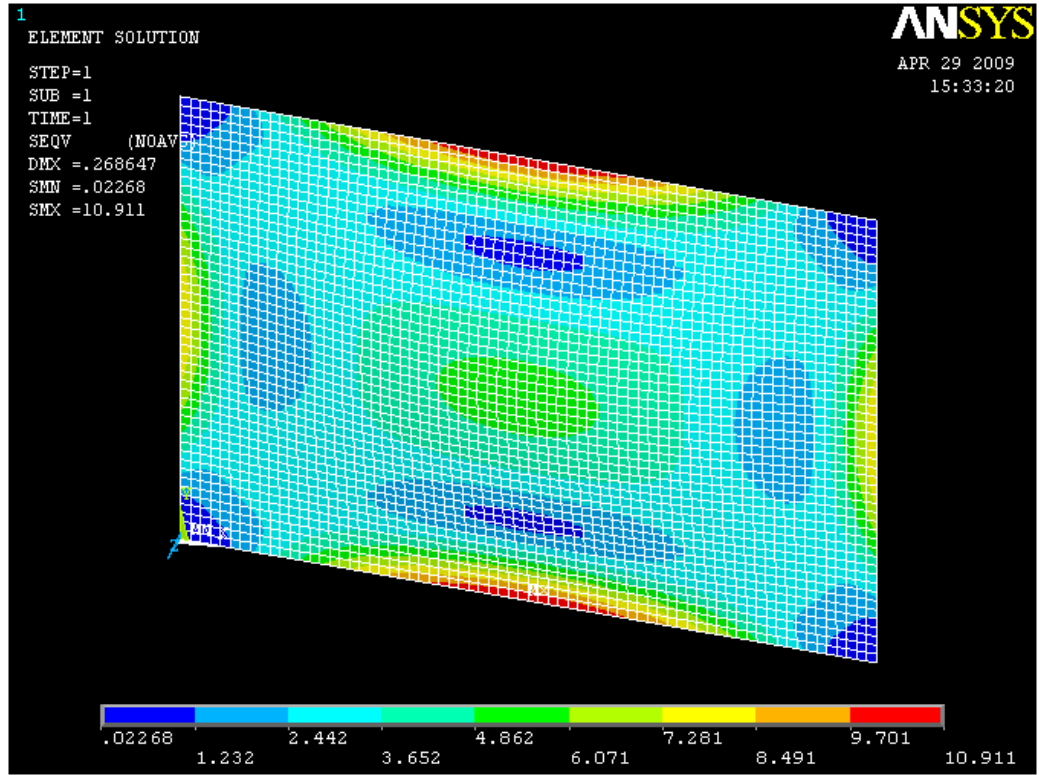
Şekil A.17 : Levha 9 için sehim analizi.



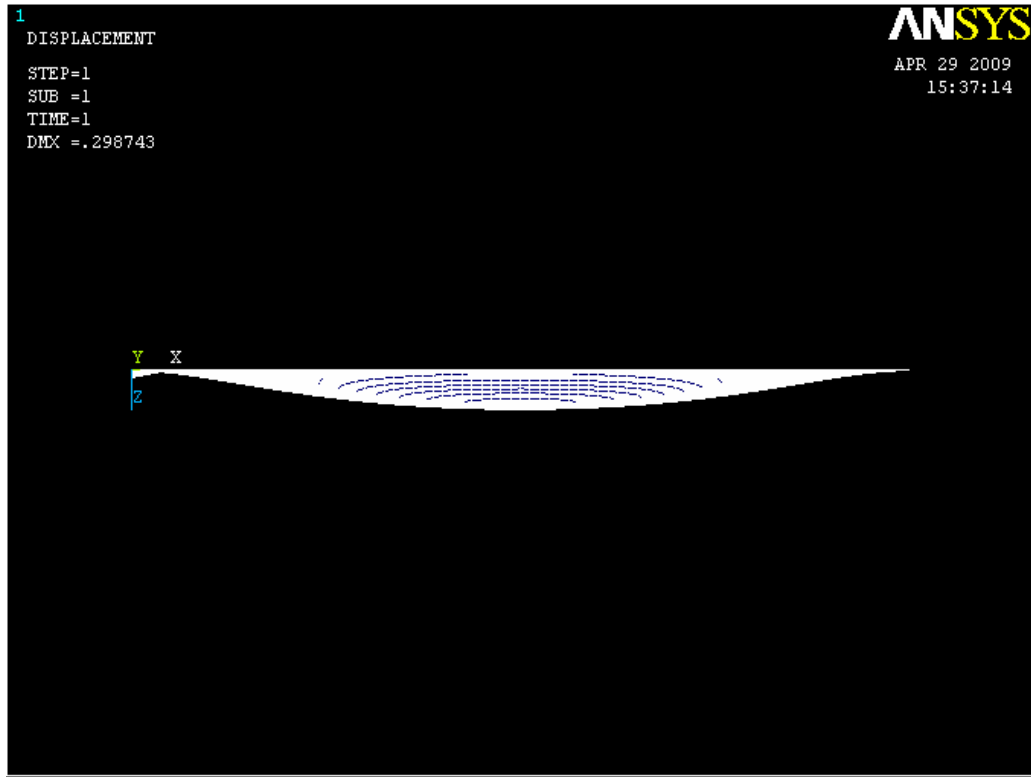
Şekil A.18 : Levha 9 için gerilme analizi.



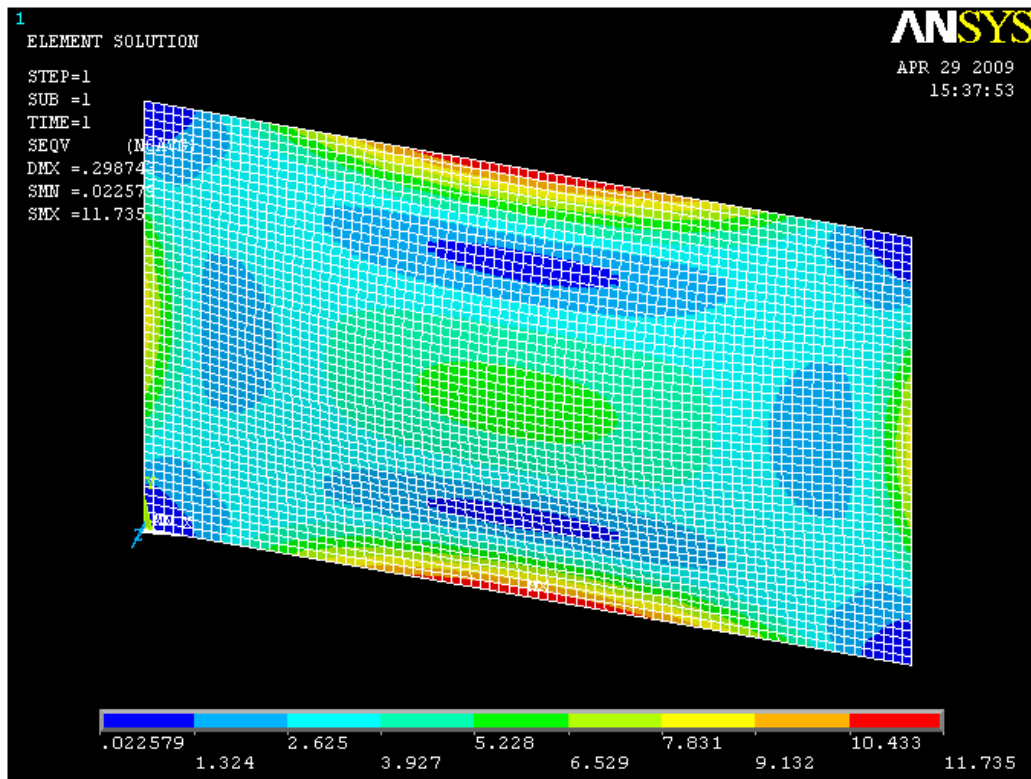
Şekil A.19 : Levha 10 için sehim analizi.



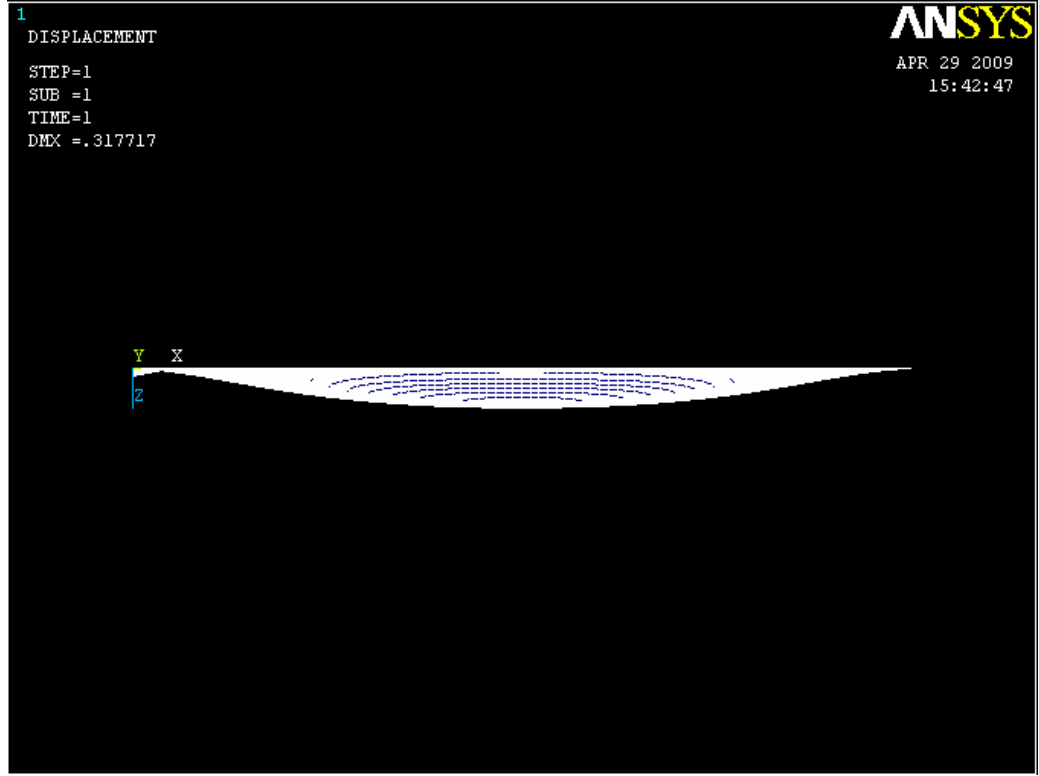
Şekil A.20 : Levha 10 için gerilme analizi.



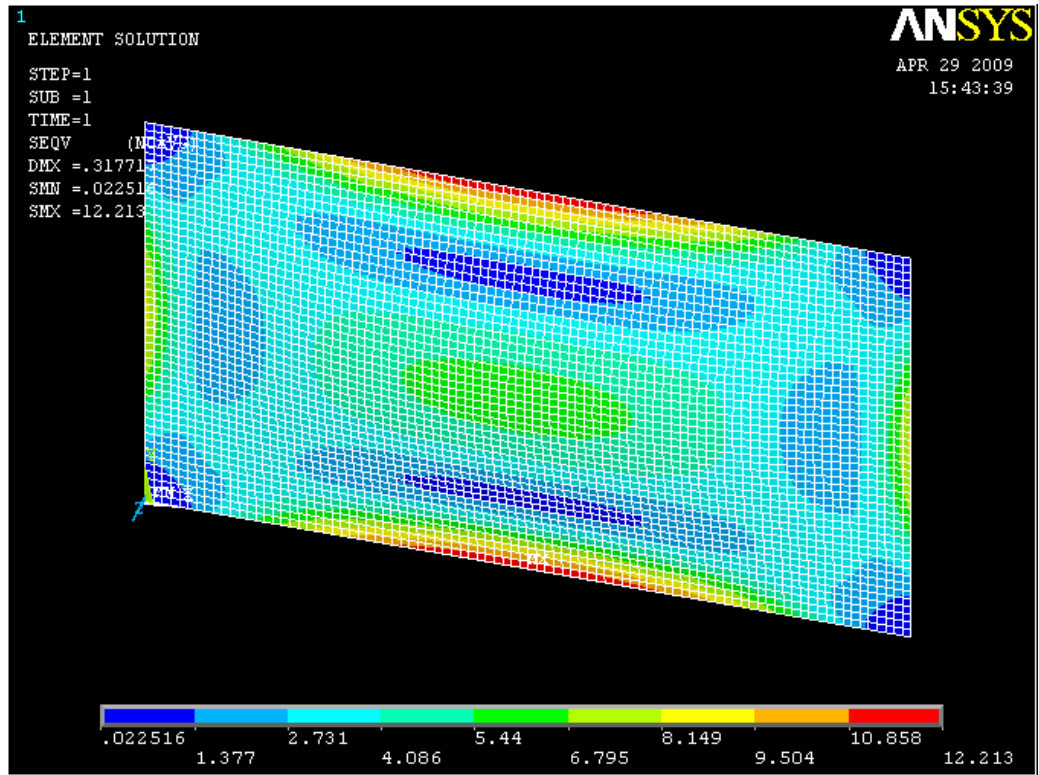
Şekil A.21 : Levha 11 için sehim analizi.



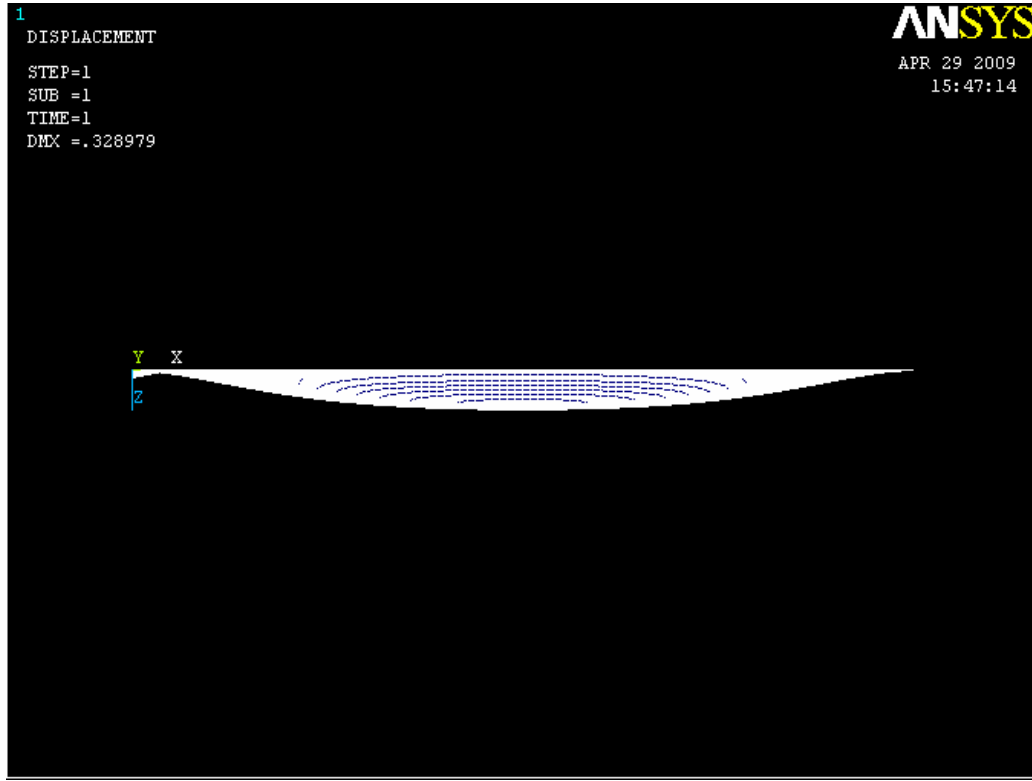
Şekil A.22 : Levha 11 için gerilme analizi.



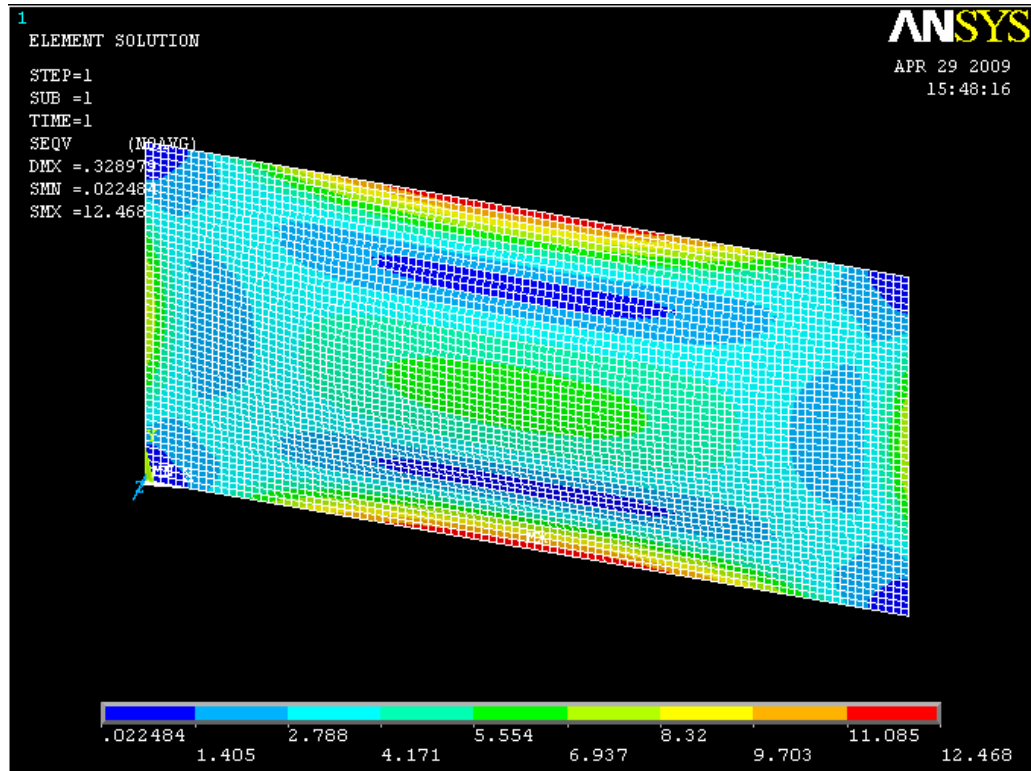
Şekil A.23 : Levha 12 için sehim analizi.



Şekil A.24 : Levha 12 için gerilme analizi.



Şekil A.25 : Levha 13 için sehim analizi.



Şekil A.26 : Levha 13 için gerilme analizi.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Mehmet Ferhan TUĞYAN

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul 1983

Adres: Barış Mahallesi Zafer Caddesi Gaye Apt B1 Blok Daire 20
Beylikdüzü/İSTANBUL

Lisans Üniversite: Trakya Üniversitesi/Makine Mühendisliği Bölümü 2005

