

**TEK SERBESTLİK DERECELİ LİNEER OLMAYAN
SALINICILARIN YAKLAŞIK SİMETRİLERİ VE
İLK İNTEGRALLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mat. Müh. Ahmet KIRIŞ
(509960201011)

100645

100645

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 31 Mayıs 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Haziran 1999

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Gazanfer ÜNAL
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Erdoğan ŞUHUBİ
Prof.Dr. Vural CİNEMRE

[Handwritten signatures]
Vural Cınemre

HAZİRAN 1999

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, doğada birçok problemde karşılaşılan, tek serbestlik dereceli, lineer olmayan salınıcıların yaklaşık simetrileri ve ilk integralleri hesaplanmıştır. Konuya ilgi duymamı sağlayan, tez çalışmam süresince yardımlarını benden esirgemeyen ve özellikle akademik yaşantıyla tanışmamda büyük katkıları olan tez danışmanım Sayın Hocam Doç. Dr. Gazanfer Ünal' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca karşılaştığım tüm güçlüklerde bana her türlü desteği veren aileme ve arkadaşlarıma da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 1999

Mat. Müh. Ahmet KIRIŞ



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ÖZET	iv
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. KTD Takımının Karakteristiklerle Çözümü	4
1.2. Lineer Kısımın Genelleştirilmiş Simetrilerinin Bulunması	6
2. 1. VE 2. MERTEBE YAKLAŞIK SİMETRİLER	8
2.1. 1. Mertebe Yaklaşık Simetrilerin Analizi	8
2.1.1. 1. mertebe rezonans koşullarının incelenmesi	10
2.1.2. 1. mertebe yaklaşık simetriler	14
2.2. 2. Mertebe Yaklaşık Simetrilerin Analizi	16
2.2.1. 2. mertebe rezonans koşullarının incelenmesi	19
2.2.1.1. C_0^{11} için rezonans koşulları	20
2.2.1.2. C_0^{21} için rezonans koşulları	20
2.2.1.3. C_0^{31} için rezonans koşulları	24
2.2.1.4. C_0^{41} için rezonans koşulları	26
2.2.1.5. $C_{0s_1s_2}^{k_1}$ için rezonans koşulları	29
2.3. 1. Mertebe Yaklaşık Simetriler	34
2.3.1. $n = \text{tek tamsayı}$ için 1. mertebe simetri	34
2.3.2. $n = \text{çift tamsayı}$ için 1. mertebe simetri	34
2.4. 2. Mertebe Yaklaşık Simetriler	35
2.4.1. $n = \text{tek tamsayı}$ için 2. mertebe simetri	36
2.4.2. $n = \text{çift tamsayı}$ için 2. mertebe simetri	36
3. YAKLAŞIK NOETHER TEOREMİ VE İLK INTEGRALLER	38
3.1. Yaklaşık Noether Teoremi	38
3.1.1. Lagrange sistemleri için yaklaşık Noether Teoremi	38
3.1.2. Hamilton sistemleri için yaklaşık Noether Teoremi	40
3.2. Yaklaşık İlk İntegral	42
3.3.1. Karakteristikler yöntemi çözümünden ilk integralin bulunması	47
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	48
KAYNAKLAR	49
EKLER	50
ÖZGEÇMİŞ	52

TEK SERBESTLİK DERECELİ LİNEER OLMAYAN SALINICILARIN YAKLAŞIK SİMETRİLERİ VE İLK İNTEGRALLERİ

ÖZET

Bu çalışmada, tek serbestlik dereceli, zorlamalı-sönümlü, aşağıdaki yapıdaki dinamik sistemle modellenen salınımların yaklaşık ilk integralleri hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 = -x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2(\gamma \cos \omega t - \delta x_2), \quad 0 < \epsilon \ll 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Burada, γ ve ω sırasıyla kuvvetin genliği (zorlama katsayısı) ve açısal frekansı, δ ise sönüm parametresidir. Bu analiz $n \in Z^*, (Z^* = Z^+/\{0,1\})$ olduğu durumlar için yapılmıştır. (1) dinamik sistemiyle, n ' nin farklı değerleri için doğadaki birçok problemde karşılaşılmaktadır. Örneğin $n = 2$ değeri için kulak zarı ve Helmholtz salınımları olarak bilinen gemi devrilme problemlerinde kullanılır. (1) denklemi ayrıca $n = 3$ için, elektronik salınımların modellenmesinde de kullanılır. Bu Duffing salınımları olarak da bilinir.

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık simetri analizi, Baikov, Gazizov ve Ibragimov tarafından geliştirilmiştir. Yazarlar, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin yaklaşık simetri analiziyle hesaplanmasında da yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Burada kullanılacak olan yöntem temel olarak bu yaklaşımın modifiye bir versiyonudur. Bu nedenle burada kısaca değinilecektir.

İncelenen dinamik sistem

$$\Delta^j \equiv \dot{x}^j - f_0^j(\mathbf{x}, t) - \epsilon f_1^j(\mathbf{x}, t) - \epsilon^2 f_2^j(\mathbf{x}, t) = 0\tag{2}$$

yapısında olsun. Burada, $j = 1, \dots, n$, $\mathbf{x} \in R^n$ ve $(\cdot)$ ise t ' ye göre türevi göstermektedir ve $f_0^j(\mathbf{x}, t)$ lineerdir. (2) denkleminde uygulanabilecek, bir 2. mertebe yaklaşık simetri vektör alanı,

$$\mathbf{X} = \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \eta_m^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k}\tag{3}$$

olarak seçilsin. Bu durumda seçilen vektör alanı $\mathbf{X}$, yaklaşık yüzey kriterini;

$$\mathbf{X} \Delta^j|_{\Delta^j=0} = O^j(\epsilon^3)\tag{4}$$

sağlamalıdır. Burada, $\mathbf{X}'$ in birinci uzatması;

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \xi_m^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}\tag{5}$$

olarak tanımlanmıştır. Buradan itibaren toplama kuralı tekrarlanan indislere uygulanacak ve parantez içindeki indislere ise uygulanmayacaktır. (2) ile verilen Δ^j ' ye, $\mathbf{X}'$ in 1. uzatması uygulanarak ve Δ^j ' nin bu vektör alanı altında invaryant kalması koşulları gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned} & \eta_{0,t}^j + f_0^k \eta_{0,k}^j - \eta_0^k f_{0,k}^j + \epsilon(\eta_{1,t}^j + f_0^k \eta_{1,k}^j - \eta_1^k f_{0,k}^j + f_1^k \eta_{0,k}^j - \eta_0^k f_{1,k}^j) \\ & + \epsilon^2(\eta_{2,t}^j + f_0^k \eta_{2,k}^j - \eta_2^k f_{0,k}^j - \eta_0^k f_{2,k}^j + f_2^k \eta_{0,k}^j - \eta_1^k f_{1,k}^j + f_1^k \eta_{1,k}^j) + O(\epsilon^3) = O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (6)$$

elde edilir. Burada ", " x_l koordinatına göre türevi göstermektedir. (6)' dan aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem takımı bulunur.

$$\eta_{m,t}^j + f_0^k \eta_{m,k}^j - \eta_m^k f_{0,k}^j = V_m^j \quad (m = 0, 1, 2). \quad (7)$$

Burada

$$V_0^j = 0, \quad V_1^j = \eta_0^k f_{1,k}^j - f_1^k \eta_{0,k}^j, \quad V_2^j = \eta_0^k f_{2,k}^j - f_2^k \eta_{0,k}^j + \eta_1^k f_{1,k}^j - f_1^k \eta_{1,k}^j \quad (8)$$

olarak tanımlanmıştır. Önce bu kısmi türevli diferansiyel denklem takımı $m = 0$ için çözülmelidir. Bu çözüm V_1^j ' de yerine yazıldığında, V_1^j ' de tüm büyüklükler bilinir. (7) kısmi türevli diferansiyel denklem takımının $m = 1$ için çözülmesinden η_1^j elde edilir. η_1^j ' nin $m = 2$ için KTD takımında yerine yazılmasıyla da η_2^j bulunur. Böylelikle 2. mertebe yaklaşık simetri vektör alanları elde edilir. Bu simetrilerin gerçekten 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler (Lie-Bäcklund) olduğuna dikkat edilmelidir. Burada asıl amaç, (7) denklemini çözmektir. Bunun için öncelikle değişken dönüşümü,

$$x_j = S_{jl} z_l \quad (9)$$

tanıtılarak (1) dinamik sistemine uygulanırsa,

$$\dot{z}_j = \lambda_{(j)} z_{(j)} + \epsilon \frac{\lambda_j}{2} (z_1 + z_2)^n + \epsilon^2 \frac{\lambda_j}{2} \left[\delta i (z_1 - z_2) - \frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right] \quad (10)$$

elde edilir. (9) denkleminde, S dönüşüm matrisi (1) dinamik sisteminin lineer kısmının özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerden elde edilebilir. Bu dönüşüm matrisi ve tersi;

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad (11)$$

(7)' ye uygulandığında,

$$\bar{\eta}_{0,t}^j + \lambda_{(k)} z_{(k)} \bar{\eta}_{0,k}^j - \lambda_{(j)} \bar{\eta}_0^j = U_m^j \quad (12)$$

elde edilir. Burada,

$$U_0^j = 0, \quad U_1^j = \bar{\eta}_0^l \bar{f}_{1,l}^{(j)} - \bar{f}_1^l \bar{\eta}_{0,l}^{(j)}, \quad U_2^j = \bar{\eta}_1^l \bar{f}_{1,l}^j - \bar{f}_1^l \bar{\eta}_{1,l}^j + \bar{\eta}_0^l \bar{f}_{2,l}^j - \bar{f}_2^l \bar{\eta}_{0,l}^j \quad (13)$$

olarak tanımlanmıştır. (12) denklemini $m = 0$ için karakteristikler yöntemiyle çözülebilir;

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0^1 &= e^{\lambda_1 t} F_1(C_1, C_2) = e^{\lambda_1 t} F_1(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}), \\ \bar{\eta}_0^2 &= e^{\lambda_2 t} F_2(C_1, C_2) = e^{\lambda_2 t} F_2(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}). \end{aligned} \quad (14)$$

Bu çözüm (13)₂' de yazılarak $m = 1$ için (12) denklemini çözümlürse,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^1 &= e^{\lambda_1 t} (F_3(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) + K_1(t, z_1, z_2)), \\ \bar{\eta}_1^2 &= e^{\lambda_2 t} (F_4(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) + K_2(t, z_1, z_2)) \end{aligned} \quad (15)$$

bulunur. Burada, $K_i = \int_0^t e^{-\lambda_i r} H_i(r) dr$, $H_1(t)$ ve $H_2(t)$, (12) denkleminin $m = 1$ için sağ taraflarıdır. Buradan çözümün keyfi fonksiyonlarla ifade edilebildiği dolayısıyla, ilk integrallerin de keyfi fonksiyonlarla ifade edilebileceği görülmektedir. Bu nedenle

$$C e^{\alpha t} z_1^\beta z_2^\gamma \quad (16)$$

şeklinde bir çözüm önerildiğinde bu tip çözümlerin lineer kombinasyonu;

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0^l = & C_0^{1(l)} e^{\lambda_{(l)} t} + C_0^{2(l)} \lambda_{(l)} z_{(l)} + C_0^{3(l)} z_{(l)} + C_0^{4(l)} \sum_{\substack{j \neq l \\ j=1,2}} \left(e^{(\lambda_l - \lambda_j) t} z_l \right) \\ & + \sum_{\substack{\Lambda_l = \lambda_l - (s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2) \\ s_1 + s_2 \geq 2, \quad s_1, s_2 \geq 0}} C_{0s_1 \dots s_n}^{k_l} e^{\Lambda_l t} (z_1)^{s_1} (z_2)^{s_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

elde edilir. (17)' ye ters dönüşümün uygulanmasıyla da (3) yardımıyla lineer kısmın genelleştirilmiş simetrisi bulunur. (12)' nin $m = 0$ için çözümünden, $\bar{\eta}_0^1$ belirlenir ve bu çözüm (13)₂' de kullanılarak U_1^j bulunur. Fakat burada rezonans durumu ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle $\mathbf{X}$ vektör alanına karşı gelen simetrilere bazıları kırılır. (1) dinamik sisteminin 1. ve 2. mertebe simetri analizi için hesaplanan rezonans koşulları ve simetri kırılmasının tanımı 2. Bölüm' de verilmiştir. U_1^1 ' e rezonans koşullarının uygulanmasından sonra, C_0^{11} , C_0^{31} , C_0^{41} ve $C_{0s_1 s_2}^{k_1}$ grup parametrelerine karşı gelen simetrisinin, n ' nin tek tamsayı değerlerinde kırıldıkları, çift değerlerinde ise kırılmadıkları gözlenir. C_0^{21} grup parametresine karşı gelen simetri ise iki durumda da kırılmamaktadır. $\bar{\eta}_1^1$ kırılmayan terimlerden elde edildikten sonra, benzer işlemlerle U_2^1 ' de hesaplanır ve buradan da rezonans koşullarına dikkat edilirse, n parametresinin iki durumunda da sadece C_0^{21} ' e karşı gelen 2. mertebe yaklaşık simetrinin kırılmadığı gözlenir. Bu 2. mertebe yaklaşık simetri vektör alanı ise aşağıdaki gibi bulunur; n tek tamsayı için,

$$\begin{aligned} C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} = & \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \\ = & \left(x_2 + \epsilon \left(-\frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_2 \right) + \epsilon^2 \left(2 \left(n a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_2 \right. \right. \right. \\ & + (1-n) a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \omega \sin \omega t \left. \left. \left. \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \right. \\ & + \left(-x_1 + \epsilon \left(\frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_1 - x_1^n \right) \right. \\ & + \epsilon^2 \left(-2 \left(a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} n x_1 - a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} ((n+1)x_2^2 + 2n x_1^2) \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \cos \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Gamma(1+n) \Gamma(2+n)}{\Gamma(\frac{3+n}{2})^4 2^{2+2n}}, \\ a_2 &= \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\frac{3+n}{2})^2 2^{2+n}} \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır ve n çift tamsayı ise yaklaşık simetri,

$$\begin{aligned} C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \\ &= \left(x_2 + \epsilon^2 \left(2 \left(\frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \omega \sin \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &\quad + \left(-x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2 \left(-2 \left(\frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \cos \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (19)$$

olarak bulunur. 2. mertebe yaklaşık simetrilerden (18-19) ise yaklaşık ilk integraller aşağıdaki gibi elde edilir.

n serbestlik dereceli bir Hamilton sistemi düşünüldüğünde,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (20)$$

burada, $H = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \dots + \epsilon^{(k)} H_{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ Hamilton fonksiyonu, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{q}$ momentum ve konumdur. Eğer bir $\mathbf{X}$ yaklaşık simetri vektör alanı;

$$\mathbf{X} = \eta_l^p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial p_l} + \eta_l^q(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q_l}, \quad (l = 1, \dots, n), \quad (21)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \Omega = 0 \quad (22)$$

denkliğini sağlarsa, yerel olarak Hamilton simetri vektör alanıdır denir. Burada, $\mathcal{L}$ Lie türevi, ve $\Omega = dp_l \wedge dq_l$, $\wedge$ dış çarpım olarak tanımlanmıştır. Eğer (21) ile verilen vektör alanı,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} H = O(\epsilon^{k+1}), \quad (23)$$

denklemini sağlarsa, yaklaşık Noether simetri vektör alanıdır denir. Böyle bir vektör alanına karşı gelen ilk integral vardır ve

$$\mathbf{X} \lrcorner \Omega = dI + O(\epsilon^{k+1}) \quad (24)$$

denkleminde bulunabilir. Burada I , k . dereceden yaklaşık ilk integral, ve $\lrcorner$ ise iç çarpımdır. Bu yöntem otonom olmayan Hamiltoniyen sistemler içinde geçerlidir. (24) denkleminde, 2. mertebe yaklaşık simetriler kullanılarak yaklaşık ilk integraller; n tek tamsayı için,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \left(\frac{x_1^{1+n}}{1+n} - \frac{2a_3}{1+n}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n+1}{2}} \right) \\ &\quad + \epsilon^2 \left(\frac{\gamma}{\omega^2 - 1}(x_1 \cos \omega t - x_2 \omega \sin \omega t) + a_1(x_1^2 + x_2^2)^n - 2a_2 x_1^{1+n}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

bulunur. Burada

$$a_3 = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})}$$

olarak tanımlanmıştır. n tek çinse,

$$I = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \frac{x_1^{1+n}}{1+n} - \epsilon^2 \frac{\gamma}{\omega^2 - 1}(x_1 \cos \omega t - x_2 \omega \sin \omega t) \quad (26)$$

elde edilir.

Bu ilk integrallerin düzey eğrileri Mathematica kullanılarak çizdirilmiştir. Bu düzey eğrilerinin yapısı, n değerinin tek veya çift olmasına göre değişmektedir. n değerinin büyüklüğünün bu değişimde çok fazla bir etkisi yoktur. Eğer n tek ise, (25) denkleminin düzey eğrileri, periyodik çözümlerin eş merkezli çemberlerini kapsayan bir heteroklinik manifoldun varlığını göstermektedir. n 'nin çift tamsayı olma durumunda ise, (26) yaklaşık ilk integralinin düzey eğrilerinde, periyodik çözümlerin eş merkezli çemberlerini kapsayan homoklinik bir manifoldla karşılaşmaktadır.

APPROXIMATE SYMMETRIES AND THE FIRST INTEGRALS OF THE NONLINEAR OSCILLATORS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

SUMMARY

In this work, the approximate first integrals of the one degree of freedom, forced and damped oscillators that can be modelled with the dynamical system below, are investigated

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 = -x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2(\gamma \cos \omega t - \delta x_2), \quad 0 < \epsilon \ll 1.\end{aligned}\tag{1}$$

Here, γ and ω , respectively, are the amplitude of the force (the force coefficient) and the angular frequency and δ is the damping parameter. The analysis is done for the cases that $n \in \mathbb{Z}^*$, ($\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}^+ \setminus \{0, 1\}$). Many problems of the nature can be modelled with the dynamical system (1) with different values of n . For instance when $n = 2$, it models the motion of ear drums and ship capsizing phenomenon and it is called Helmholtz oscillator. It also arises in modelling of the electronic oscillators when $n = 3$, and it is called Duffing oscillator .

Approximate symmetry analysis of the differential equations has been developed by Baikov, Gazizov and Ibragimov. They also introduced a new approach to study the approximate solutions of the differential equations by employing approximate symmetries. The method which will be discussed here is basically a modified version of this approach. Therefore, it deserves to be mentioned briefly here.

We consider the dynamical system in the form below,

$$\Delta^j \equiv \dot{x}^j - f_0^j(\mathbf{x}, t) - \epsilon f_1^j(\mathbf{x}, t) - \epsilon^2 f_2^j(\mathbf{x}, t) = 0,\tag{2}$$

where $j = 1, \dots, n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and $(\dot{})$ stands for the derivative with respect to t and $f_0^j(\mathbf{x}, t)$ is a linear function. In order for a vector field,

$$\mathbf{X} = \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \eta_m^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k},\tag{3}$$

to be a second-order approximate symmetry VF admitted by (2). This vector field $\mathbf{X}$ must satisfy the surface criteria;

$$\mathbf{X} \Delta^j|_{\Delta^j=0} = O^j(\epsilon^3).\tag{4}$$

Here, $\mathbf{X}$ is the first prolongation of $\mathbf{X}$, i.e.,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X} + \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \xi_m^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}.\tag{5}$$

Here, comma stands for the derivative with respect to the coordinate x_l . Summation convention applies to the repeated indices and it drops for the indices in the parentheses here after. After acting the first prolongation of $\mathbf{X}$ on the frame defined by Δ^j given in (2) and using approximate surface criterion given by (4) we obtain

$$\begin{aligned} & \eta_{0,t}^j + f_0^k \eta_{0,k}^j - \eta_0^k f_{0,k}^j + \epsilon(\eta_{1,t}^j + f_0^k \eta_{1,k}^j - \eta_1^k f_{0,k}^j + f_1^k \eta_{0,k}^j - \eta_0^k f_{1,k}^j) \\ & + \epsilon^2(\eta_{2,t}^j + f_0^k \eta_{2,k}^j - \eta_2^k f_{0,k}^j - \eta_0^k f_{2,k}^j + f_2^k \eta_{0,k}^j - \eta_1^k f_{1,k}^j + f_1^k \eta_{1,k}^j) + O(\epsilon^3) = O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (6)$$

(6) leads to the following set of partial differential equations (PDEs):

$$\eta_{m,t}^j + f_0^k \eta_{m,k}^j - \eta_m^k f_{0,k}^j = V_m^j \quad (m = 0, 1, 2), \quad (7)$$

where

$$V_0^j = 0, \quad V_1^j = \eta_0^k f_{1,k}^j - f_1^k \eta_{0,k}^j, \quad V_2^j = \eta_0^k f_{2,k}^j - f_2^k \eta_{0,k}^j + \eta_1^k f_{1,k}^j - f_1^k \eta_{1,k}^j. \quad (8)$$

Notice that one must first solve the set of PDEs for $m = 0$. Then its solution η_0^j must be substituted into V_1^j . Therefore all the quantities in V_1^j are determined. Solving the set of PDEs for $m = 1$ yields η_1^j . Substituting η_1^j into V_2^j we determine the right hand side (RHS) of the set of PDEs for $m = 2$. Solution of the latter yields η_2^j . Hence, one finds the second-order approximate symmetry VF admitted by the DS given in (2). Notice that these symmetries are, indeed, the second-order generalized (or Lie-Bäcklund) approximate symmetries due to the VFs considered in (3).

Our main objective here is to solve the set of PDEs (7) for the DS given by (1). To achieve this goal we first introduce the change of variables;

$$x_j = S_{jl} z_l \quad (9)$$

to (1) to obtain,

$$\dot{z}_j = \lambda_{(j)} z_{(j)} + \epsilon \frac{\lambda_j}{2} (z_1 + z_2)^n + \epsilon^2 \frac{\lambda_j}{2} \left[\delta i (z_1 - z_2) - \frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right]. \quad (10)$$

In (9), the matrix $\mathbf{S}$ has been obtained from the eigenvectors corresponding to the eigenvalues $\lambda_1 = i$ and $\lambda_2 = -i$ of the linear part. The transformation matrix composed by the eigenvectors corresponding to those eigenvalues, and its inverse become,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}. \quad (11)$$

of this transformation is applied to (7),

$$\bar{\eta}_{0,t}^j + \lambda_{(k)} z_{(k)} \bar{\eta}_{0,k}^j - \lambda_{(j)} \bar{\eta}_0^j = U_m^j \quad (12)$$

where

$$U_0^j = 0, \quad U_1^j = \bar{\eta}_0^l \bar{f}_{1,l}^{(j)} - \bar{f}_1^l \bar{\eta}_{0,l}^{(j)}, \quad U_2^j = \bar{\eta}_1^l \bar{f}_{1,l}^{(j)} - \bar{f}_1^l \bar{\eta}_{1,l}^{(j)} + \bar{\eta}_0^l \bar{f}_{2,l}^{(j)} - \bar{f}_2^l \bar{\eta}_{0,l}^{(j)}. \quad (13)$$

Equation (12) for $m = 0$ can be solved by the method of characteristics to obtain;

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0^1 &= e^{\lambda_1 t} F_1(C_1, C_2) = e^{\lambda_1 t} F_1(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}), \\ \bar{\eta}_0^2 &= e^{\lambda_2 t} F_2(C_1, C_2) = e^{\lambda_2 t} F_2(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}). \end{aligned} \quad (14)$$

We first substitute (14) into (13)₂ to determine the RHS of (12) for $m = 1$, and then we solve it to get

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1^1 &= e^{\lambda_1 t} (F_3(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) + K_1(t, z_1, z_2)) \\ \bar{\eta}_1^2 &= e^{\lambda_2 t} (F_4(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) + K_2(t, z_1, z_2)).\end{aligned}\quad (15)$$

Here,

$$K_i = \int_0^t e^{-\lambda_i r} H_i(r) dr$$

in which $H_1(t)$ and $H_2(t)$ are the RHSs of (12) for $m = 1$. Notice that the infinitesimals found hitherto involve arbitrary functions. Proceeding in this manner will lead to the infinitesimals of the second-order approximate symmetries involving arbitrary functions, this, in turn, will yield approximate first integrals with arbitrary functions. For this reason when a solution like

$$C e^{\alpha t} z_1^\beta z_2^\gamma \quad (16)$$

is suggested, the combination of this type of linear independent solutions can be given as,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_0^l &= C_0^{1(l)} e^{\lambda_{(l)} t} + C_0^{2(l)} \lambda_{(l)} z_{(l)} + C_0^{3(l)} z_{(l)} + C_0^{4(l)} \sum_{\substack{j \neq l \\ j=1,2}} \left(e^{(\lambda_l - \lambda_j) t} z_l \right) \\ &+ \sum_{\substack{\Lambda_l = \lambda_l - (s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2) \\ s_1 + s_2 \geq 2, \quad s_1, s_2 \geq 0}} C_{0s_1 \dots s_2}^{k_l} e^{\Lambda_l t} (z_1)^{s_1} (z_2)^{s_2}\end{aligned}\quad (17)$$

of the inverse transformation is applied to the solution (17) and by using equation (3) we obtain generalized symmetries of linear part of (1). From (12) for $m = 0$, $\bar{\eta}_0^1$ is obtained. And when this is used in (13)₂, we determine U_1^j . Now, the RHS of the (12) for $m = 1$ is obtained and we can solve it to determine $\bar{\eta}_1^1$. But the resonance phenomena arises in these operations. For this reason, some approximate symmetries corresponding to the vector field $\mathbf{X}$ are broken. The resonance condition is obtained for first and second order approximate symmetry analysis for the DS (1) and the symmetry breaking is defined in the Chapter 2. After applying resonance condition to U_1^1 , it can be seen that the symmetries of the linear part corresponding to the parameters $C_0^{11}, C_0^{31}, C_0^{41}$ and $C_{0s_1 s_2}^{k_1}$ are broken when n is odd in (1). Symmetry corresponding to the parameter C_0^{21} is not broken. When the solution $\bar{\eta}_1^1$, obtained from the unbroken terms, is placed in (9) for $m = 2$, considering also the resonance conditions, by the similar procedures, $\bar{\eta}_2^1$ also can be obtained. After the second-order approximate symmetry analysis, it can be checked that all second-order approximate symmetries are broken except the one corresponding to the group parameter C_0^{21} .

The approximate symmetries are obtained by the application of the inverse transformations;

$$\begin{aligned}
C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \\
&= \left(x_2 + \epsilon \left(-\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_2 \right) + \epsilon^2 \left(2 \left(n a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (1-n) a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} x_1 x_2 \right) + \frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2-1)} \omega \sin \omega t \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\
&\quad + \left(-x_1 + \epsilon \left(\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_1 - x_1^n \right) \right. \\
&\quad \left. + \epsilon^2 \left(-2 \left(a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} n x_1 - a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} ((n+1)x_2^2 + 2n x_1^2) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2-1)} \cos \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{18}$$

for odd values of n . Here,

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\Gamma(1+n)\Gamma(2+n)}{\Gamma(\frac{3+n}{2})4^{2+2n}}, \\
a_2 &= \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\frac{3+n}{2})2^{2+2n}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \\
&= \left(x_2 + \epsilon^2 \left(2 \left(\frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2-1)} \omega \sin \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\
&\quad + \left(-x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2 \left(-2 \left(\frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2-1)} \cos \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{19}$$

for even values of n . Now the approximate first integrals can be found from these approximate second-order symmetries (18-19).

Let us now consider a Hamiltonian system with n degrees of freedom

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \tag{20}$$

Here, $H = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \dots + \epsilon^{(k)} H_{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ is the Hamiltonian function, and $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ are the canonical momenta and position, respectively. If an approximate symmetry VF of (20) of the form

$$\mathbf{X} = \eta_l^p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial p_l} + \eta_l^q(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q_l} \quad (l = 1, \dots, n) \tag{21}$$

satisfies

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \Omega = 0 \tag{22}$$

is said to be a locally Hamiltonian approximate symmetry VF. In (22), $\mathcal{L}$ stands for the Lie derivative, and $\Omega = dp_l \wedge dq_l$ where $\wedge$ is the wedge product. Furthermore, if the VF in (21) enjoys the property

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} H = O(\epsilon^{k+1}), \tag{23}$$

it is called the approximate Noether symmetry VF of order k . For such an approximate symmetry VF there corresponds to an approximate first integral (the approximate version of Noether's theorem), and it can be found from

$$\mathbf{X} \lrcorner \Omega = dI + O(\epsilon^{k+1}) \quad (24)$$

where I is an approximate first integral of order k , and $\lrcorner$ is the interior product. This can be extended to the nonautonomous Hamiltonian systems. It can be easily shown that the second-order approximate symmetry VFs given in (18-19) are the approximate Noether symmetry VFs provided that $\delta = 0$. Approximate first integrals corresponding to these symmetries have been obtained by employing (24). The second-order approximate first integrals corresponding to the symmetry VFs given in (18-19) are;

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \left(\frac{x_1^{1+n}}{1+n} - \frac{2a_3}{1+n} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n+1}{2}} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(\frac{\gamma}{\omega^2 - 1} (x_1 \cos \omega t - x_2 \omega \sin \omega t) + a_1 (x_1^2 + x_2^2)^n - 2a_2 x_1^{1+n} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

for odd values of n where $a_3 = \frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})}$ and

$$I = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \frac{x_1^{1+n}}{1+n} - \epsilon^2 \frac{\gamma}{\omega^2 - 1} (x_1 \cos \omega t - x_2 \omega \sin \omega t) \quad (26)$$

for even values of n .

The contour lines for the approximate first integrals given in (25-26) have been plotted by using Mathematica. The pattern in the contour lines depends on the parity of n given in (1), but not on the value of n . When n is even in (1), the contour lines of (26) point out that there exists a homoclinic manifold surrounding the concentric cylinders of periodic solutions. When n is odd, the contour lines of (25) pinpoint the existence of a heteroclinic manifold which surrounds the concentric cylinders of the periodic solutions.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, tek serbestlik dereceli, zorlamalı-sönümlü, aşağıda verilen yapıdaki dinamik sistemle modellenen salınımların yaklaşık ilk integralleri hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 = -x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2(\gamma \cos \omega t - \delta x_2), \quad 0 < \epsilon \ll 1.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Burada, γ ve ω sırasıyla kuvvetin genliği (zorlama katsayısı) ve açısal frekansıdır. δ ise sönüm parametresidir. Analiz $n \in Z^*(Z^* = Z^+/\{0,1\})$ olduğu durumlar için yapılmıştır.

(1.1) denklemi n 'nin farklı değerleri için birçok fizik, biyoloji ve mühendislik problemine uygulanabilir. Örneğin $n = 2$ değeri için kulak zarı hareketinin [1] ve Helmholtz salınıcı [2,3] olarak isimlendirilen gemi devrilme probleminin incelenmesinde kullanılır. (1.1) denklemi ayrıca $n = 3$ için, elektronik salınımların modellenmesinde de kullanılmaktadır. Bu Duffing salınıcı [4] olarak da bilinir.

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık simetri analizi Baikov, Gazizov ve Ibragimov tarafından geliştirilmiştir [5]. Yazarlar, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin yaklaşık simetri analiziyle hesaplanmasında da yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir [6]. Burada tartışılacak olan yöntem, temel olarak [5] te verilen yöntemin modifiye edilmiş versiyonudur [7,8]. Dolayısıyla, bu konu üzerinde burada kısaca durulacaktır. Bu çalışmada, (ϵ^2) ile sınırlandırılmış dinamik sistemler ele alınacağından sadece bu durum için kısa bir tanıtım yapılacaktır ve daha sonra da (1.1) dinamik sistemi incelenecektir.

İncelenen dinamik sistem,

$$\Delta^j \equiv \dot{x}^j - f_0^j(\mathbf{x}, t) - \epsilon f_1^j(\mathbf{x}, t) - \epsilon^2 f_2^j(\mathbf{x}, t) = 0\tag{1.2}$$

yapısında olsun. Burada, $j = 1, \dots, n$, $\mathbf{x} \in R^n$ ve $(\cdot)$, t 'ye göre türevi göstermektedir ve $f_0^j(\mathbf{x}, t)$ lineer bir fonksiyondur. (1.2) denkleminde uygulanabilecek bir 2. mertebe yaklaşık simetri vektör alanı,

$$\mathbf{X} = \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \eta_m^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k}\tag{1.3}$$

olarak seçilsin. Bu durumda seçilen vektör alanı $\mathbf{X}$, yaklaşık yüzey kriterini,

$$\mathbf{X}\Delta^j|_{\Delta^j=0} = O^j(\epsilon^3) \quad (1.4)$$

sağlamalıdır [5]. Burada, $\mathbf{X}$ 'in birinci uzatması;

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X} + \sum_{m=0}^2 \epsilon^m \xi_m^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}, \quad (1.5)$$

$$\xi_m^k = \eta_{m,t}^k + \dot{x}_l \eta_{m,l}^k$$

olarak tanımlanmıştır ve ", " x_l koordinatına göre türevi göstermektedir. Bundan sonra, toplama kuralı tekrarlanan indislere uygulanacak, parantez içindeki indislerde ise uygulanmayacaktır. Δ^j ile tanımlanan ifadeye, $\mathbf{X}'$ in 1. uzatmasının uygulanmasından sonra,

$$\begin{aligned} & \eta_{0,t}^j - \eta_0^k f_{0,k}^j + \dot{x}^k \eta_{0,k}^j + \epsilon(\eta_{1,t}^j + \dot{x}^k \eta_{1,k}^j - \eta_0^k f_{1,k}^j - \eta_1^k f_{0,k}^j) \\ & + \epsilon^2(\eta_{2,t}^j + \dot{x}^k \eta_{2,k}^j - \eta_2^k f_{0,k}^j - \eta_0^k f_{2,k}^j - \eta_1^k f_{1,k}^j)|_{\Delta^j=0} = O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (1.6)$$

elde edilir. Δ^j ' nin $\mathbf{X}$ vektör alanı altında invaryant kalması istendiğinden, bu koşul (1.6) denkleminde kullanıldığında ise,

$$\begin{aligned} & \eta_{0,t}^j + f_0^k \eta_{0,k}^j - \eta_0^k f_{0,k}^j + \epsilon(\eta_{1,t}^j + f_0^k \eta_{1,k}^j - \eta_1^k f_{0,k}^j + f_1^k \eta_{0,k}^j - \eta_0^k f_{1,k}^j) \\ & + \epsilon^2(\eta_{2,t}^j + f_0^k \eta_{2,k}^j - \eta_2^k f_{0,k}^j - \eta_0^k f_{2,k}^j + f_2^k \eta_{0,k}^j - \eta_1^k f_{1,k}^j + f_1^k \eta_{1,k}^j) + O(\epsilon^3) = O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (1.7)$$

bulunur. (1.7) denklemi aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem takımını (KTDs) verir,

$$\eta_{m,t}^j + f_0^k \eta_{m,k}^j - \eta_m^k f_{0,k}^j = V_m^j, \quad (m = 0, 1, 2). \quad (1.8)$$

Burada

$$V_0^j = 0, \quad V_1^j = \eta_0^k f_{1,k}^j - f_1^k \eta_{0,k}^j, \quad V_2^j = \eta_0^k f_{2,k}^j - f_2^k \eta_{0,k}^j + \eta_1^k f_{1,k}^j - f_1^k \eta_{1,k}^j. \quad (1.9)$$

Çözüm için, (1.8) kısmi türevli diferansiyel denklem takımının ardışık olarak çözülmesi gerektiğine dikkat edilmelidir. Yani, (1.8) KTDs önce $m = 0$ için çözülerek, V_1^j belirlenmelidir. Böylece $m = 1$ değeri için KTDs' nin sağ tarafı belirlenmiş olur. Bu ifadenin çözümünden ise η_1^k elde edilir. Bulunan η_1^k çözümü ve birinci aşamada elde edilen η_0^k çözümü, $m = 2$ için V_2^j yi belirler, dolayısıyla (1.8) KTDs, bu durum içinde yazılmış olur. Bu denklemin çözümünden ise, η_2^k bulunur. Tüm bu $\eta_0^k, \eta_1^k, \eta_2^k$ çözümlerinden ise, (1.2) denklemini sağlayan yaklaşık simetri vektör alanı,

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \quad (1.10)$$

olarak bulunabilir. Burada,

$$\mathbf{X}_i = \eta_i^j \partial x_j \quad (1.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yani $\mathbf{X}_0$ lineer kısmın simetrileri, $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ ise, sırasıyla, 1. ve 2. mertebe yaklaşık simetrilerdir. Bu simetrilerin gerçekten (1.3)' te düşünülen vektör alanını sağlayan 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler (Lie-Bäcklund [9]) olduğuna dikkat edilmelidir.

1. ve 2. mertebe simetrilerin hesaplanabilmesi için, öncelikle (1.1) denkleminin teditirgenmemiş lineer kısmının gerçek simetrileri hesaplanmalıdır.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \epsilon \mathbf{F}_1 + \epsilon^2 \mathbf{F}_2. \quad (1.12)$$

Burada, $\mathbf{F}_i = f_i^l(\mathbf{x}, t) \partial x^l$, ($i = 0, 1, 2$) olarak tanımlanmıştır. (1.1) ve (1.12) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= f_0^l(\mathbf{x}, t) \partial x^l = x_2 \partial x_1 - x_1 \partial x_2, \\ \mathbf{F}_1 &= f_1^l(\mathbf{x}, t) \partial x^l = -x_1^n \partial x_2, \\ \mathbf{F}_2 &= f_2^l(\mathbf{x}, t) \partial x^l = -(\delta x_2 - \gamma \cos \omega t) \partial x_2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

bulunur. (1.13) denkleminde $\mathbf{F}_0$ ' ın lineer olduğu görülür yani (1.1) ile verilen dinamik sistemin teditirgenmemiş kısmı aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L} \mathbf{x}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Buradan, $\mathbf{L}$ matrisinin özdeğerlerine ($\lambda_1 = i$ ve $\lambda_2 = -i$) karşı gelen özvektörlerden oluşan $\mathbf{S}$ matrisi ve tersi ise,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

olarak elde edilir.

$$x_j = S_{jl} z_l \quad (1.16)$$

dönüşümü (1.14) denkleminde uygulandığında,

$$\dot{z}_j = \lambda_{(j)} z_{(j)} \quad (1.17)$$

bulunur. Bu dönüşüm (1.11) denkleminde uygulandığında ise,

$$\bar{X} = \bar{\eta}_0^k(\mathbf{z}, t) \frac{\partial}{\partial z_k} \quad (1.18)$$

olduğu görülür. (1.18) ile verilen bir vektör alanının (1.17) denkleminin bir simetri vektör alanı olabilmesi için, sonsuz küçük $\bar{\eta}_0^k$ büyüklüğünün aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem takımını (hatırlatma (1.8)) $m = 0$ için sağlaması gerekir.

$$\bar{\eta}_{0,t}^{(j)} + \lambda_{(l)} z_{(l)} \bar{\eta}_{0,l}^{(j)} - \lambda_{(j)} \bar{\eta}_0^{(j)} = 0. \quad (1.19)$$

(1.15) dönüşümü kullanılarak [7,8],

$$\eta_k^j = S\bar{\eta}_k^j(S^{-1}\mathbf{x}, t) \quad \text{ve} \quad \bar{\eta}_k^j = S^{-1}\eta_k^j(S\mathbf{z}, t),$$

$$\dot{z}_j = \lambda_{(j)}z_{(j)} + \epsilon \frac{\lambda_j}{2}(z_1 + z_2)^n + \epsilon^2 \frac{\lambda_j}{2} \left[\delta i(z_1 - z_2) - \frac{\gamma}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right] \quad (1.20)$$

bulunur. Bu dönüşümün $m = 1, 2$ için (1.8) kısmi türevli diferansiyel denklem takımına uygulanmasıyla da aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$\bar{\eta}_{1,l}^j + \lambda_{(l)}z_{(l)}\bar{\eta}_{1,l}^{(j)} - \lambda_{(j)}\bar{\eta}_1^{(j)} = U_1^j, \quad (1.21)$$

$$\bar{\eta}_{2,t}^j + \lambda_{(l)}z_{(l)}\bar{\eta}_{2,t}^j - \lambda_{(j)}\bar{\eta}_2^{(j)} = U_2^j. \quad (1.22)$$

Burada

$$U_1^j = \bar{\eta}_0^l \bar{f}_{1,l}^{(j)} - \bar{f}_1^l \bar{\eta}_{0,l}^{(j)} \quad \text{ve} \quad U_2^j = \bar{\eta}_1^l \bar{f}_{1,l}^j - \bar{f}_1^l \bar{\eta}_{1,l}^j + \bar{\eta}_0^l \bar{f}_{2,l}^j - \bar{f}_2^l \bar{\eta}_{0,l}^j \quad (1.23)$$

olarak tanımlanmıştır.

1.1. KTD Takımının Karakteristiklerle Çözümü

(1.19,21) kısmi türevli diferansiyel denklem takımı karakteristikler yöntemiyle çözülebilir. (1.19) kısmi türevli diferansiyel denklemini daha açık yazıldığında,

$$\frac{\partial \bar{\eta}_0^1}{\partial t} + \lambda_1 z_1 \frac{\partial \bar{\eta}_0^1}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial \bar{\eta}_0^1}{\partial z_2} - \lambda_1 \bar{\eta}_0^1 = 0$$

elde edilir. Buradan karakteristikler yöntemiyle

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz_1}{\lambda_1 z_1} = \frac{dz_2}{\lambda_2 z_2} = \frac{d\bar{\eta}_0^1}{\lambda_1 \bar{\eta}_0^1}$$

bulunur. Bu adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünden ise,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} = \frac{dz_1}{\lambda_1 z_1} &\Rightarrow dz_1 = \lambda_1 z_1 dt \Rightarrow z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \Rightarrow C_1 = z_1 e^{-\lambda_1 t}, \\ \frac{dt}{1} = \frac{dz_2}{\lambda_2 z_2} &\Rightarrow dz_2 = \lambda_2 z_2 dt \Rightarrow z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow C_2 = z_2 e^{-\lambda_2 t}, \\ \frac{dt}{1} = \frac{d\bar{\eta}_0^1}{\lambda_1 \bar{\eta}_0^1} &\Rightarrow d\bar{\eta}_0^1 = \lambda_1 \bar{\eta}_0^1 dt \Rightarrow \bar{\eta}_0^1 = C_3 e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan çözüm,

$$\bar{\eta}_0^1 = e^{\lambda_1 t} F_1(C_1, C_2) = e^{\lambda_1 t} F_1(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) \quad (1.24)$$

elde edilir ve benzer şekilde,

$$\bar{\eta}_0^2 = e^{\lambda_2 t} F_2(C_1, C_2) = e^{\lambda_2 t} F_2(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) \quad (1.25)$$

bulunur. (1.24) ve (1.25) çözümlerinin (1.19) kısmi türevli diferansiyel denklemini sağladığı kolayca görülebilir. Bulunan $\bar{\eta}_0^1$ (1.24) ve $\bar{\eta}_0^2$ (1.25), (1.21) kısmi türevli diferansiyel denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\eta}_1^1}{\partial t} + \lambda_1 z_1 \frac{\partial \bar{\eta}_1^1}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial \bar{\eta}_1^1}{\partial z_2} - \lambda_1 \bar{\eta}_1^1 &= \frac{n}{2} \lambda_1 (z_1 + z_2)^{n-1} (e^{\lambda_1 t} F_1 + e^{\lambda_2 t} F_2) \\ &\quad - \frac{(z_1 + z_2)^n}{2} (\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial C_1} + \lambda_2 \frac{\partial F_1}{\partial C_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}) \\ \frac{\partial \bar{\eta}_1^2}{\partial t} + \lambda_1 z_1 \frac{\partial \bar{\eta}_1^2}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial \bar{\eta}_1^2}{\partial z_2} - \lambda_1 \bar{\eta}_1^2 &= \frac{n}{2} \lambda_2 (z_1 + z_2)^{n-1} (e^{\lambda_1 t} F_1 + e^{\lambda_2 t} F_2) \\ &\quad - \frac{(z_1 + z_2)^n}{2} (\lambda_1 \frac{\partial F_2}{\partial C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial C_2}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri ise,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1^1 &= e^{\lambda_1 t} (F_3(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) + K_1(t, z_1, z_2)), \\ \bar{\eta}_1^2 &= e^{\lambda_2 t} (F_4(z_1 e^{-\lambda_1 t}, z_2 e^{-\lambda_2 t}) + K_2(t, z_1, z_2)) \end{aligned} \quad (1.27)$$

şeklinde dir. Burada

$$K_i = \int_0^t e^{-\lambda_i r} H_i(r) dr$$

olarak tanımlanmıştır. $H_1(t), H_2(t)$ ise, (1.26) denklemlerinin sağ taraflarıdır.

Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{1,t}^1 &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t} F_3 + e^{\lambda_1 t} \frac{\partial F_3}{\partial C_1} (-\lambda_1) z_1 e^{-\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \frac{\partial F_3}{\partial C_2} (-\lambda_2) z_2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} K_1 \\ &\quad + e^{\lambda_1 t} \frac{\partial K_1}{\partial t}, \\ \bar{\eta}_{1,1}^1 &= e^{\lambda_1 t} \frac{\partial F_3}{\partial C_1} e^{-\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t} \frac{\partial K_1}{\partial z_1}, \\ \bar{\eta}_{1,2}^1 &= e^{\lambda_1 t} \frac{\partial F_3}{\partial C_2} e^{-\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t} \frac{\partial K_1}{\partial z_2} \end{aligned}$$

değerleri (1.26)' de yerine yazılırsa,

$$e^{\lambda_1 t} \left(\frac{\partial K_1}{\partial t} + \lambda_1 z_1 \frac{\partial K_1}{\partial z_1} + \lambda_2 z_2 \frac{\partial K_1}{\partial z_2} \right) = H_1(t)$$

bulunur. Buradan da K_1 çözümünün elde edileceği görülmektedir. Benzer çözüm K_2 için de geçerlidir. Buradan yaklaşık Noether teoremi gereğince [7,8], ilk integral,

$$dI = G_1 dz_1 + G_2 dz_2$$

$$G_1 = -(\bar{\eta}_0^2 + \epsilon \bar{\eta}_1^2 + \epsilon^2 \bar{\eta}_2^2) \quad \text{ve} \quad G_2 = \bar{\eta}_0^1 + \epsilon \bar{\eta}_1^1 + \epsilon^2 \bar{\eta}_2^1$$

olarak yazılabilir. Eğer bu ifade tam ise integre edilebileceği için, tamlık testi uygulanırsa, bu ifadenin tam olması için çözümde görünen keyfi fonksiyonların üzerine bazı kısıtlamaların geleceği açıktır. ϵ^0 için,

$$\frac{\partial G_1}{\partial z_2} = \frac{\partial G_2}{\partial z_1} \Rightarrow -\frac{\partial \bar{\eta}_0^2}{\partial z_2} = \frac{\partial \bar{\eta}_0^1}{\partial z_1}$$

bulunur. Buradan da tamlık için birinci koşul olarak

$$-\frac{\partial F_2}{\partial C_2} = \frac{\partial F_1}{\partial C_1}$$

elde edilir. ϵ^1 için ise,

$$-\frac{\partial \bar{\eta}_1^2}{\partial z_2} = \frac{\partial \bar{\eta}_1^1}{\partial z_1},$$

koşulu bulunur. Bu ifadenin sonucundan,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_4}{\partial C_2} &= \frac{\partial F_3}{\partial C_1}, \\ -\frac{\partial K_2}{\partial z_2} e^{\lambda_2 t} &= \frac{\partial K_1}{\partial z_1} e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

koşulları elde edilir. Görüldüğü gibi karakteristikler yöntemiyle çözüme ulaşılabilenkte ama bu çözüm keyfi fonksiyonlarla ifade edilebilmektedir, tamlık şartı uygulanarak bu keyfilik sınırlandırılabilenkte ancak tüm keyfilikler belirlenememektedir.

1.2. Lineer Kısımın Genelleştirilmiş Simetrileri

(1.19) denkleminin

$$C'e^{\alpha t} z_1^\beta z_2^\gamma \quad (1.28)$$

şeklinde bir çözümü aranır, süperpozisyon ilkesi gereğince buradan çözüm bu tip lineer bağımsız çözümlerin kombinasyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir [7,8];

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_0^l &= C_0^{1(l)} e^{\lambda_l t} + C_0^{2(l)} \lambda_l z_l + C_0^{3(l)} z_l + C_0^{4(l)} \sum_{\substack{j \neq l \\ j=1,2}} \left(e^{(\lambda_l - \lambda_j)t} z_l \right) \\ &+ \sum_{\substack{\Lambda_l = \lambda_l - (s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2) \\ s_1 + s_2 \geq 2, \quad s_1, s_2 \geq 0}} C_{0s_1s_2}^{k_l} e^{\Lambda_l t} (z_1)^{s_1} (z_2)^{s_2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

(1.29) çözümüne, (1.15)₂ ters dönüşümü uygulanarak da, lineer kısmın genelleştirilmiş yaklaşık simetrileri (1.3) yardımıyla elde edilebilir. Burada $C_0^{1(l)}$, $C_0^{2(l)}$, $C_0^{3(l)}$, $C_0^{4(l)}$ ve $C_{0s_1s_2}^{\Lambda_l}$ grup parametreleri olarak isimlendirilir. (1.29) çözümünün (1.24-25) çözümlerinin bir alt kümesi olduğu açıktır. Yani incelenen çözüm yöntemiyle, tüm keyfi polinomlar uzayı olan çözüm kümesi bir anlamda kısıtlanmakta, bu uzayın için de belki de gerçekte hiç var olmayan çözümler safdışı edilmektedir. Şimdi, öncelikle (1.1) sisteminin lineer kısmının genelleştirilmiş simetrileri bulunacaktır.

(1.29) denklemi (1.1)' de verilen dinamik sistem için açık olarak yazılırsa,

$$\bar{\eta}_0^1 = C_0^{11} e^{it} + iC_0^{21} z_1 + C_0^{31} z_1 + C_0^{41} e^{2it} z_2 + \sum_{\substack{s_1 + s_2 \geq 2 \\ i = ik_1 + s_1 i - s_2 i}} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1 t} z_1^{s_1} z_2^{s_2} \quad (1.30)$$

bulunur. Bu problem için $(1.20)_1$ dönüşümünün

$$\eta_0^1 = 2Re(\bar{\eta}_0^1), \quad \eta_0^2 = -2Im(\bar{\eta}_0^1) \quad (1.31)$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan da (1.1) dinamik sisteminin lineer kısmının genelleştirilmiş simetrileri, yani 0. mertebe simetriler şu şekilde elde edilir:

$$C_0^{ij} \Rightarrow X_1^0 = \eta_0^1 \partial x_1 + \eta_0^2 \partial x_2. \quad (1.32)$$

Örnek : (1.1) denkleminin tedirgenmemiş kısmının $2 \leq s_1 + s_2 \leq 4$ için genelleştirilmiş simetrileri

$$C_0^{11} \Rightarrow X_1^0 = 2 \cos t \partial x_1 - 2 \sin t \partial x_2,$$

$$C_0^{21} \Rightarrow X_2^0 = x_2 \partial x_1 - x_1 \partial x_2,$$

$$C_0^{31} \Rightarrow X_3^0 = x_1 \partial x_1 + x_2 \partial x_2,$$

$$C_0^{41} \Rightarrow X_4^0 = (x_1 \cos 2t - x_2 \sin 2t) \partial x_1 + (-x_1 \sin 2t - x_2 \cos 2t) \partial x_2,$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

şeklindedir.

Bölüm 2' de, (1.1) dinamik sistemini sağlayan 1. ve 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetri vektör alanlarının analizi yapılacaktır. Bölüm 3' te, yaklaşık Noether Teoremi tartışılarak yaklaşık ilk integraller elde edilecektir. Son olarak Bölüm 4' te ise bu ilk integraller faz uzayı üzerinde tartışılacaktır.

2. 1. ve 2. MERTEBE YAKLAŞIK SİMETRİLER

Bu bölümde, 1. ve 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler belirlenecektir. (1.21) ve (1.22) KTDs' nin çözülerek, bu çözümlere (1.15)₂ ters dönüşümünün uygulanmasıyla, sırasıyla, 1. ve 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler elde edilir. (1.22, 23) denklemlerinden de açıkça görüleceği gibi 2. mertebe analiz, 1. mertebe analiz sonucunda elde edilecek simetrilere bağlıdır. Dolayısıyla, öncelikle 1. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler hesaplanmalıdır.

2.1. 1. Mertebe Yaklaşık Simetrilerin Analizi

Yukarıda da bahsedildiği gibi 1. mertebe simetrileri bulmak için ilk adım, (1.21) KTD' nin çözülmesidir. Bu denklemin sağ tarafında görünen U_1^1 , (1.23) denkleminde hesaplanmalıdır. Ancak (1.23) denkleminde U_1^1 ' in hesaplanması için, $\bar{\eta}_0^2$ de belirlenmelidir. (1.20)_{1,2} denklemlerinden elde edilen;

$$\bar{\eta}_i^2 = (\bar{\eta}_i^1)^* \quad (2.1)$$

denklemi ve $C_0^{11} = C_0^{12}$, $C_0^{21} = C_0^{22}$, $C_0^{31} = C_0^{32}$, $C_0^{41} = C_0^{42}$ eşitlikleri kullanılarak,

$$\bar{\eta}_0^2 = C_0^{11} e^{-it} - iC_0^{22} z_2 + C_0^{31} z_2 + C_0^{41} e^{-2it} z_1 + \sum_{\substack{s_1+s_2 \geq 2 \\ -i=ik_2+s_1i-s_2i}} C_0^{k_2}_{s_1s_2} e^{ik_2t} z_1^{s_1} z_2^{s_2} \quad (2.2)$$

olarak hesaplanır. Şimdi, (1.23) denkleminde U_1^1 şu şekilde hesaplanabilir;

$$\begin{aligned}
U_1^1 = & \frac{ni}{2} \left[C_0^{11} e^{it} + C_0^{21} i z_1 + C_0^{31} z_1 + C_0^{41} e^{2it} z_2 + \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} (z_1)^{s_1} (z_2)^{s_2} \right. \\
& + C_0^{11} e^{-it} - C_0^{21} i z_2 + C_0^{31} z_2 + C_0^{41} e^{-2it} z_1 \\
& + \left. \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_2} e^{ik_2t} (z_1)^{s_1} (z_2)^{s_2} \right] (z_1 + z_2)^{n-1} \\
& - \frac{i}{2} (z_1 + z_2)^n \left[i C_0^{21} + C_0^{31} + \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} s_1 (z_1)^{s_1-1} (z_2)^{s_2} \right] \\
& + \frac{i}{2} (z_1 + z_2)^n \left[C_0^{41} e^{2it} + \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} s_2 (z_1)^{s_1} (z_2)^{s_2-1} \right].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$C_{0s_1s_2}^{k_1} = C_{0s_2s_1}^{k_2}$ eşitliği dikkate alınarak aşağıda hesaplanan,

$$\begin{aligned}
\sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_2} e^{ik_2t} z_1^{s_1} z_2^{s_2} &= \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_2s_1}^{k_1} e^{ik_2t} z_1^{s_1} z_2^{s_2} \\
&= \sum_{ik_2=-i-i(s_2-s_1)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_2t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} \\
&= \sum_{ik_2=-i+i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_2t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} \\
&= \sum_{ik_2=-(i-i(s_1-s_2))} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_2t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} \\
&= \sum_{ik_2=-ik_1} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_2t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} \\
&= \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{-ik_1t} z_1^{s_2} z_2^{s_1}
\end{aligned}$$

ifadesi (2.3) denkleminde kullanılır ve sonuç basitleştirilirse,

$$\begin{aligned}
U_1^1 = & C_0^{11} \left[\frac{ni(e^{it} + e^{-it})}{2} (z_1 + z_2)^{n-1} \right] + C_0^{21} \left[\frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{2} ((1-n)z_1 + (1+n)z_2) \right] \\
& + C_0^{31} \left[\frac{i}{2} (n-1)(z_1 + z_2)^n \right] + C_0^{41} \left[\frac{i}{2} \left(e^{-2it} n z_1 (z_1 + z_2)^{n-1} + e^{2it} (z_1 + z_2)^{n-1} \right. \right. \\
& \left. \left. (z_1 + (1+n)z_2) \right) \right] + \frac{i}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{ik_1t} (z_1 + z_2)^n \left(\frac{n z_1^{s_1} z_2^{s_2}}{z_1 + z_2} - s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2} \right. \right. \\
& \left. \left. + s_2 z_1^{s_1} z_2^{s_2-1} \right) + e^{-ik_1t} n (z_1 + z_2)^{n-1} z_1^{s_2} z_2^{s_1} \right]
\end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir. U_1^1 bulunduğuna göre artık (1.21) denklemi $\bar{\eta}_1^1$ için çözülebilir. Ancak önce bazı grup parametrelerinin sıfırlanmasına yol açan rezonanslar belirlenmelidir.

2.1.1. 1. Mertebe Rezonans Koşullarının İncelenmesi

(2.4) denklemi (1.21)' de yerleştirildiğinde, (1.21)' in sağ tarafının en genel halde $D_1 e^{mit} z_1^p z_2^r$ yapısında olduğu görülmektedir. O halde

$$P\bar{\eta}_1^1 - \lambda_1 \bar{\eta}_1^1 = D_1 e^{mit} z_1^p z_2^r, \quad P = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_{(k)} z_{(k)} \frac{\partial}{\partial z_k} \quad (2.5)$$

şeklinde bir denklem ele alınırsa bunun bir özel çözümünün $D_2 e^{mit} z_1^p z_2^r$ yapısında olacağı açıktır. Bu çözüm, (2.5) denkleminde kullanılarak,

$$D_2 m i e^{mit} z_1^p z_2^r + i z_1 D_2 p e^{mit} z_1^{p-1} z_2 - i z_2 D_2 e^{mit} r z_1^p z_2^{r-1} - i D_2 e^{mit} z_1^p z_2^r = D_1 e^{mit} z_1^p z_2^r \quad (2.6)$$

bulunur. (2.6) nın basitleştirilmesinden

$$(im + ip - ir - i)D_2 = D_1, \quad D_2 = \frac{D_1}{(im + ip - ir - i)} \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.7)₂ denkleminde görüldüğü gibi eğer $im + ip - ir - i = 0$ ise rezonans ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla rezonans durumunda, (1.21) denkleminde rezonans koşulunu sağlayan grup parametresi C' ler sıfır alınmalıdır. Buradan da, bu grup parametrelerine karşı gelen simetrilerin sıfır olacağı yani kırılacağı sonucu ortaya çıkar. (2.5) denkleminde anlaşılacağı üzere, rezonans koşullarının kontrol edilebilmesi için, (1.21) denkleminin sağ tarafında yani U_1^1 deki her bağımsız terim, z_1 ve z_2 nin üstleri biçiminde yazılmalıdır. (1.21)' de C_0^{11} ve C_0^{31} parametreleri için sonuç açıktır, diğer parametreler içinse,

C_0^{21} için, katsayısı ${}_1K_0^{21}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} {}_1K_0^{21} &= \frac{1}{2}(z_1 + z_2)^{n-1} \left[(1-n)z_1 + (1+n)z_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} \left((1-n)z_1 + (1+n)z_2 \right) z_1^j z_2^{n-1-j} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (1-n)z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (1+n)z_1^j z_2^{n-j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} (1-n)z_1^j z_2^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (1+n)z_1^j z_2^{n-j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!(j-1)!} \left(\frac{1-n}{n-j} + \frac{1+n}{j} \right) z_1^j z_2^{n-j} + (1+n)z_2^n + (1-n)z_1^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!(j-1)!} \left(\frac{n(n-2j+1)}{(n-j)j} \right) z_1^j z_2^{n-j} + (1+n)z_2^n + (1-n)z_1^n \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-2j+1) z_1^j z_2^{n-j} + (1+n)z_2^n + (1-n)z_1^n \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde edilir. C_0^{41} 'in katsayısı ${}_1K_0^{41} = e^{-2it}{}_1K_{01}^{41} + e^{2it}{}_1K_{02}^{41}$ alınarak, burada birbirinden bağımsız iki terim olduğundan bu terimlerin katsayıları ayrı ayrı hesaplanırsa,

$${}_1K_{01}^{41} = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} {}_1K_{02}^{41} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (z_1 + (1+n)z_2) z_1^j z_2^{n-1-j} \\ &= \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (1+n) z_1^j z_2^{n-j} \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} z_1^j z_2^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (1+n) z_1^j z_2^{n-j} \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-1)!} \left(\frac{1}{n-j} + \frac{1+n}{j} \right) z_1^j z_2^{n-j} + z_1^n + (1+n) z_2^n \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-1)!} \left(\frac{n(n-j+1)}{(n-j)j} \right) z_1^j z_2^{n-j} + z_1^n + (1+n) z_2^n \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-j+1) z_1^j z_2^{n-j} + z_1^n + (1+n) z_2^n \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. $C_{0s_1s_2}^{k_1}$ için;

$$\begin{aligned} {}_1K_{0s_1s_2}^{k_1} &= \frac{ni}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} z_1^{s_1} z_2^{s_2} (z_1 + z_2)^{n-1} \\ &\quad + \frac{ni}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{-ik_1t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} (z_1 + z_2)^{n-1} \\ &\quad - \frac{i}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2} (z_1 + z_2)^n \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} s_2 z_1^{s_1} z_2^{s_2-1} (z_1 + z_2)^n, \\ {}_1K_{0s_1s_2}^{k_1} &= \frac{i}{2} \left[\sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left(e^{ik_1t} (z_1 + z_2)^n \left[\frac{nz_1^{s_1} z_2^{s_2}}{z_1 + z_2} - s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2} + s_2 z_1^{s_1} z_2^{s_2-1} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n e^{-ik_1t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} (z_1 + z_2)^{n-1} \right) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade

$${}_1K_{0s_1s_2}^{k_1} = e^{-ik_1t} {}_1K_{0s_1s_21}^{k_1} + e^{ik_1t} {}_1K_{0s_1s_22}^{k_1} \quad (2.11)$$

yapısındadır. Burada,

$${}_1K_{0s_1s_21}^{k_1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!j!} z_1^{j+s_2} z_2^{n-j-1+s_1},$$

$$\begin{aligned}
{}_1K_{0s_1s_2}^{k_1} &= (z_1 + z_2)^{n-1} \left[nz_1^{s_1} z_2^{s_2} - s_1 z_1^{s_1} z_2^{s_2} - s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2+1} + s_2 z_1^{s_1+1} z_2^{s_2-1} + s_2 z_1^{s_1} z_2^{s_2} \right] \\
&= (z_1 + z_2)^{n-1} \left[(n - s_1 + s_2) z_1^{s_1} z_2^{s_2} - s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2+1} + s_2 z_1^{s_1+1} z_2^{s_2-1} \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} z_1^j z_2^{n-1-j} \left[(n - s_1 + s_2) z_1^{s_1} z_2^{s_2} - s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2+1} + s_2 z_1^{s_1+1} z_2^{s_2-1} \right] \\
&= \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} (n - s_1 + s_2) z_1^{j+s_1} z_2^{n-1-j+s_2} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} s_1 z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} s_2 z_1^{j+s_1+1} z_2^{n-j+s_2-2} \right] \\
&= \left[\sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-j)!(j-1)!} (n - s_1 + s_2) z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} s_1 z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j+1)!(j-2)!} s_2 z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} \right]
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Şimdi (1.21) denkleminde görülen U_1^1 , her grup parametresinin katsayısı, z_1 ve z_2 ' nin kuvvetleri cinsinden olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned}
U_1^1 &= C_0^{11} \left[\frac{ni}{2} \left(e^{it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!j!} z_1^j z_2^{n-1-j} + e^{-it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!j!} z_1^j z_2^{n-1-j} \right) \right] \\
&\quad + C_0^{21} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-2j+1) z_1^j z_2^{n-j} + (1+n) z_2^n + (1-n) z_1^n \right) \right] \\
&\quad + C_0^{31} \left[\frac{i}{2} (n-1) \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^j z_2^{n-j} \right] \\
&\quad + C_0^{41} \left[\frac{i}{2} \left(n e^{-2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{2it} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-j+1) z_1^j z_2^{n-j} + z_1^n + (1+n) z_2^n \right) \right) \right] \\
&\quad + \frac{i}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[n e^{-ik_1 t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!j!} z_1^{j+s_2} z_2^{n-j-1+s_1} \right. \\
&\quad + e^{ik_1 t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} A_1(n, j, s_1, s_2) z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} \right. \\
&\quad + (n(1-s_1) + s_2) z_1^{s_1} z_2^{n-1+s_2} + (n(1+s_2) - s_1) z_1^{n+s_1-1} z_2^{s_2} - s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \\
&\quad \left. \left. + s_2 z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Burada $A_1(n, j, s_1, s_2) = \left(\frac{(n-s_1+s_2)}{(n-j)(j-1)} - \frac{s_1}{j(j-1)} + \frac{s_2}{(n-j+1)(n-j)} \right)$ olarak tanımlanmıştır. (2.12) ifadesi, (1.21)' de yerleştirildiğinde, sonucun (2.5) ile aynı yapıda olduğu görülür.

Artık $(2.7)_2$ denklemi ile verilen rezonans koşullarını kontrol ederek $\bar{\eta}_1^1$ çözümünü elde etmek mümkündür. Aşağıdaki tabloda, (2.12) ifadesindeki her grup parametresinin her terimi için rezonans koşulları gösterilmiştir.

Tablo.2.1 1. mertebe analiz için rezonans koşulları

<u>Grup parametresi</u>	<u>Terim No.</u>	<u>Rezonans Koşulu</u>
C_0^{11}	1	$(2j + 1 - n)i = 0$
	2	$(2j - 1 - n)i = 0$
C_0^{21}	1	$(2j - 1 - n)i = 0$
	2	$(n + 1)i = 0$
	3	$(n - 1)i = 0$
C_0^{31}	1	$(2j - 1 - n)i = 0$
$C_{0s_1s_2}^{k1}$	1	$(2j - 1 - n)i = 0$
	2	$(2j + 1 - n)i = 0$
	3	$(n + 1)i = 0$
	4	$(n - 1)i = 0$
	1	$(2j - 1 - n)i = 0$
	2	$(2j - 1 - n)i = 0$
	3	$(n - 1)i = 0$
	4	$(n - 1)i = 0$
	5	$(n + 1)i = 0$
	6	$(n + 1)i = 0$

Tablo.2.1 incelendiğinde, her grup parametresinin sıfırlanması için, herhangi bir terimin rezonans koşulunu $(2.7)_2$ sağlamanın yeterli olduğu görülür. Ancak (1.1) dinamik sistemi, $n \geq 2$ durumunda incelendiği için Tablo.2.1' deki rezonans koşullarından bir kısmının kesinlikle sağlanmadığı görülmektedir, rezonans koşulunu sağladığı görülen terimlerde ise dikkatli bir inceleme yapılmalıdır. Çünkü rezonans koşullarından elde edilen j değerleri o terimi sıfırlayabilir, bu durumda da rezonans koşulunun bir anlamı kalmamaktadır. Bu kontrol yapıldığında sadece C_0^{21} grup parametresi için rezonans koşulunu sağlayan $j = \frac{n+1}{2}$ değerinin o terimin katsayısını sıfırladığı görülür. Yani C_0^{21} ' e karşı gelen simetri, n değeri ne olursa olsun kırılmamaktadır. Diğer grup parametrelerine karşı gelen simetrilerin ise, j bir tamsayı olmak zorunda olduğu için, n ' in tek değerlerinde kırıldıkları, çift değerlerinde ise kırılmadıkları söylenebilir.

2.1.2. 1. mertebe yaklaşık simetriler

Şimdi (2.7)₂ gözönünde tutularak (1.21) lineer KTDD' in çözümü, (2.12)' ye rezonans koşulları uygulanarak aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_1^{-1} = & C_0^{11} \left[\frac{1}{2} \left(e^{it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n+1} z_1^j z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-1-j} \right) \right]_{n_{\zeta}} \\
& + C_0^{21} \left[\frac{i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^j z_2^{n-j} + z_2^n + z_1^n \right]_{n_{t\zeta}} \\
& + C_0^{31} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-j} \right]_{n_{\zeta}} \\
& + C_0^{41} \left[\frac{1}{2} \left(e^{-2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{2it} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} z_1^j z_2^{n-j} + \frac{1}{n+1} z_1^n + \frac{1+n}{1-n} z_2^n \right] \right) \right]_{n_{\zeta}} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{j+s_2} z_2^{n-j-1+s_1} \right. \\
& + e^{ik_1t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{1}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} \right. \\
& + (n(1-s_1)+s_2) \frac{1}{1-n} z_1^{s_1} z_2^{n-1+s_2} + (n(1+s_2)-s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n+s_1-1} z_2^{s_2} \\
& \left. \left. - \frac{s_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} \right) \right]_{n_{\zeta}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Burada $A_2(n, j, s_1, s_2) = \left(\frac{n-s_1+s_2}{(n-j)(j-1)} - \frac{s_1}{j(j-1)} + \frac{s_2}{(n-j+1)(n-j)} \right)$ olarak tanımlanmıştır. (2.1) denkleminde de $\bar{\eta}_1^2$ şu şekilde elde edilir;

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_1^2 = & C_0^{11} \left[\frac{1}{2} \left(e^{-it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n+1} z_2^j z_1^{n-1-j} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_2^j z_1^{n-1-j} \right) \right]_{n_{\zeta}} \\
& + C_0^{21} \left[-\frac{i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_2^j z_1^{n-j} + z_1^n + z_2^n \right]_{n_{t\zeta}} \\
& + \bar{\eta}_{11}^2,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_{11}^2 = & C_0^{31} \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} z_1^{n-j} z_2^j \right]_{n_{\mathbb{C}}} \\
& + C_0^{41} \left[\frac{1}{2} \left(e^{2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{n-1-j} z_2^{j+1} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-2it} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} z_1^{n-j} z_2^j + \frac{1}{n+1} z_2^n + \frac{1+n}{1-n} z_1^n \right] \right) \right]_{n_{\mathbb{C}}} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_2} \left[e^{-ik_2t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{n-j-1+s_1} z_2^{j+s_2} \right. \\
& + e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{1}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j+s_2} z_2^{j+s_1-1} \right. \\
& + (n(1-s_1)+s_2) \frac{1}{1-n} z_1^{n-1+s_2} z_2^{s_1} + (n(1+s_2)-s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{s_2} z_2^{n+s_1-1} \\
& \left. \left. - \frac{s_1}{n+1} z_1^{n+s_2} z_2^{s_1-1} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{s_2-1} z_2^{n+s_1} \right) \right]_{n_{\mathbb{C}}} .
\end{aligned}$$

Dolayısıyla artık 1. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler, (1.18) yardımıyla 0. mertebe genelleştirilmiş simetrilerle birlikte, (2.13) ve (2.14) denklemleri de kullanılarak kompleks düzlemde hesaplanabilir, ve daha sonra ise (1.20)₁ dönüşümüyle de reel düzleme geçilebilir. Ancak burada asıl amaç 2. mertebe analiz uygulamak olduğu için, 1. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetri vektör alanları,

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}_0 + \epsilon \bar{\mathbf{X}}_1$$

kompleks düzlemde ve sadece aşağıdaki grup parametreleri için verilmiştir.

$$\begin{aligned}
C_0^{11} \Rightarrow \bar{\mathbf{X}} = & \left(e^{it} + \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(e^{it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n+1} z_1^j z_2^{n-1-j} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{-it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-1-j} \right) \right]_{n_{\mathbb{C}}} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} \\
& + \left(e^{-it} + \left[\frac{1}{2} \left(e^{-it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n+1} z_1^{n-1-j} z_2^j \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{n-1-j} z_2^j \right) \right]_{n_{\mathbb{C}}} \right) \frac{\partial}{\partial z_2} \\
C_0^{21} \Rightarrow \bar{\mathbf{X}} = & \left(iz_1 + \epsilon \left[\frac{i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^j z_2^{n-j} + z_2^n + z_1^n \right]_{n_{\mathbb{C}}} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} \\
& \left(-iz_2 + \epsilon \left[-\frac{i}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^{n-j} z_2^j + z_1^n + z_2^n \right]_{n_{\mathbb{C}}} \right) \frac{\partial}{\partial z_2}
\end{aligned}$$

$$C_0^{31} \Rightarrow \bar{\mathbf{X}} = \left(z_1 + \epsilon \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-j} \right]_{n_\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial z_1} \\ + \left(z_2 + \epsilon \left[\frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} z_1^{n-j} z_2^j \right]_{n_\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

Burada n_t, n_ϵ ve $n_{t\epsilon}$ alt indisleri sırasıyla n =tek, çift ve her iki durumda da o ifadenin geçerliliğini koruyacağını göstermektedir. Daha önce de belirtildiği gibi, kompleks düzlemdeki bu genelleştirilmiş yaklaşık simetrilere (1.20)₁ dönüşümü uygulanarak, simetriler reel düzlemde de hesaplanabilirler. Ancak, bu işlem 2. mertebe analiz sonucunda sadece kırılmayan simetriler için yapılacaktır.

2.2. 2. Mertebe Yaklaşık Simetrilerin Analizi

1. mertebe analiz sonucunda kırılmayan simetriler yardımıyla, 2. mertebe analiz yapılır. 2. mertebe analiz için $\bar{\eta}_2^1$ elde edilmelidir. Bunun için ise (1.22) denkleminin çözülmesi gerekir. O halde öncelikle, (1.22) denkleminin sağ tarafı, U_2^1 , belirlenmelidir. U_2^1 ' i belirlemek için (1.30)' dan $\bar{\eta}_0^1$, (2.2)' den $\bar{\eta}_0^2$, (2.13)' den $\bar{\eta}_1^1$, (2.14)' den $\bar{\eta}_1^2$ ve

$$f_1^1 = \frac{i}{2}(z_1 + z_2)^n, \quad f_1^2 = -\frac{i}{2}(z_1 + z_2)^n, \\ f_2^1 = -\frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i(z_1 - z_2) \right), \\ f_2^2 = \frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i(z_1 - z_2) \right), \\ f_{1,1}^1 = \frac{i}{2}n(z_1 + z_2)^{n-1}, \quad f_{1,2}^1 = \frac{i}{2}n(z_1 + z_2)^{n-1}, \\ f_{2,1}^1 = -\frac{\delta}{2}, \quad f_{2,2}^1 = \frac{\delta}{2}$$

değerleri, (1.23)₂' nin açık şekli,

$$U_2^1 = \bar{\eta}_1^1 \bar{f}_{1,1}^1 + \bar{\eta}_1^2 \bar{f}_{1,2}^1 - \bar{f}_1^1 \bar{\eta}_{1,1}^1 - \bar{f}_1^2 \bar{\eta}_{1,2}^1 + \bar{\eta}_0^1 \bar{f}_{2,1}^1 + \bar{\eta}_0^2 \bar{f}_{2,2}^1 - \bar{f}_2^1 \bar{\eta}_{0,1}^1 - \bar{f}_2^2 \bar{\eta}_{0,2}^1$$

ifadesinde kullanılarak, U_2^1 aşağıdaki yapıda elde edilir;

$$\begin{aligned}
U_2^1 = & C_0^{11} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n+1} e^{it} z_1^j z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} e^{-it} z_1^j z_2^{n-1-j} \left. \right) \frac{i}{2} n (z_1 + z_2)^{n-1} \\
& + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n+1} e^{-it} z_1^{n-1-j} z_2^j \right. \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} e^{it} z_1^{n-1-j} z_2^j \left. \right) \frac{i}{2} n (z_1 + z_2)^{n-1} \\
& - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n+1} j e^{it} z_1^{j-1} z_2^{n-1-j} \right. \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} j e^{-it} z_1^{j-1} z_2^{n-1-j} \left. \right) \\
& + \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n+1} (n-1-j) e^{it} z_1^j z_2^{n-2-j} \right. \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (n-1-j) e^{-it} z_1^j z_2^{n-2-j} \left. \right) - e^{it} \frac{\delta}{2} + e^{-it} \frac{\delta}{2} \Big]_{n_{\mathfrak{F}}} \\
& + C_0^{21} \left[\frac{i}{2} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^j z_2^{n-j} + z_2^n + z_1^n \right) \frac{i}{2} n (z_1 + z_2)^{n-1} \right. \\
& - \frac{i}{2} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^{n-j} z_2^j + z_1^n + z_2^n \right) \frac{i}{2} n (z_1 + z_2)^{n-1} \\
& + \frac{1}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} j z_1^{j-1} z_2^{n-j} + n z_1^{n-1} \right) \\
& - \frac{1}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1} + n z_2^{n-1} \right) \\
& + i z_1 \left(-\frac{\delta}{2} \right) - i z_2 \frac{\delta}{2} + \frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i (z_1 - z_2) \right) i \Big]_{n_{\mathfrak{F}}} \\
& + C_0^{31} \left[\left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-j} \right) \frac{i}{4} n (z_1 + z_2)^{n-1} \right. \\
& + \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} z_2^j z_1^{n-j} \right) \frac{i}{4} n (z_1 + z_2)^{n-1} \\
& - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} j z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{4}(z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1} \right) \\
& + z_1 \left(-\frac{\delta}{2} \right) + z_2 \left(\frac{\delta}{2} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i(z_1 - z_2) \right) \Big]_{n_{\mathfrak{C}}} \\
& + C_0^{41} \left[\frac{1}{2} \left(e^{-2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
& + e^{2it} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} z_1^j z_2^{n-j} + \frac{1}{n+1} z_1^n + \frac{1+n}{1-n} z_2^n \right) \frac{i}{2} n(z_1 + z_2)^{n-1} \\
& + \frac{1}{2} \left[e^{2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{n-1-j} z_2^{j+1} \right. \\
& + e^{-2it} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} z_1^{n-j} z_2^j + \frac{1}{n+1} z_2^n + \frac{1+n}{1-n} z_1^n \right) \Big] \frac{i}{2} n(z_1 + z_2)^{n-1} \\
& - \frac{i}{4}(z_1 + z_2)^n \left(\left(e^{-2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+1) z_1^j z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
& + e^{2it} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} j z_1^j z_2^{n-j} + \frac{n}{n+1} z_1^{n-1} \right) \Big) \Big) \\
& + \frac{i}{4}(z_1 + z_2)^n \left(\left(e^{-2it} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (n-1-j) z_1^{j+1} z_2^{n-2-j} \right. \right. \\
& + e^{2it} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1} + \frac{n(1+n)}{1-n} z_2^{n-1} \right) \Big) \Big) \\
& + e^{2it} z_2 \left(-\frac{\delta}{2} \right) + e^{-2it} z_1 \frac{\delta}{2} - \frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i(z_1 - z_2) \right) e^{2it} \Big]_{n_{\mathfrak{C}}} \\
& + \left[\frac{1}{2} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{j+s_2} z_2^{n-1-j+s_1} \right. \right. \\
& + e^{ik_1t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{1}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} \right. \\
& + (n(1-s_1) + s_2) \frac{1}{1-n} z_1^{s_1} z_2^{n-1+s_2} + (n(1+s_2) - s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n+s_1-1} z_2^{s_2} \\
& + \frac{s_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} \Big) \Big] \frac{i}{2} n(z_1 + z_2)^{n-1} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_2} \left[e^{-k_2t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} z_1^{n-1-j+s_1} z_2^{j+s_2} \right. \\
& + e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{1}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j+s_2} z_2^{j+s_1-1} \right. \\
& + (n(1-s_1) + s_2) \frac{1}{1-n} z_1^{n-1+s_2} z_2^{s_1} + (n(1+s_2) - s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{s_2} z_2^{n+s_1-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s_1}{n+1} z_1^{n+s_2} z_2^{s_1-1} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{s_2-1} z_2^{n+s_1} \Bigg) \Bigg] \frac{i}{2} n (z_1 + z_2)^{n-1} \\
& - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[\epsilon^{-ik_1t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{j+s_2}{2j-n-1} \right. \\
& z_1^{j+s_2-1} z_2^{n-1-j+s_1} \\
& + e^{ik_1t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{j+s_1-1}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{j+s_1-2} z_2^{n-j+s_2} \right. \\
& + (n(1-s_1)+s_2) \frac{s_1}{1-n} z_1^{s_1-1} z_2^{n-1+s_2} + (n(1+s_2)-s_1) \frac{n+s_1-1}{n-1} z_1^{n+s_1-2} z_2^{s_2} \\
& \left. \left. + \frac{s_1}{n+1} (s_1-1) z_1^{s_1-2} z_2^{n+s_2} + \frac{s_2}{n+1} (n+s_1) z_1^{n+s_1-1} z_2^{s_2-1} \right) \right] - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \\
& \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{n-1-j+s_1}{2j-n-1} z_1^{j+s_2} z_2^{n-2-j+s_1} \right. \\
& + e^{ik_1t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{n-j+s_2}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{j+s_1-1} z_2^{n-j+s_2} \right. \\
& + (n(1-s_1)+s_2) \frac{n-1+s_2}{1-n} z_1^{s_1} z_2^{n-2+s_2} + (n(1+s_2)-s_1) \frac{s_2}{n-1} z_1^{n+s_1-1} z_2^{s_2} \\
& \left. \left. + \frac{s_1}{n+1} (n+s_2) z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2-1} + \frac{s_2}{n+1} (s_2-1) z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-2} \right) \right] \\
& - \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \frac{\delta}{2} e^{ik_1t} z_1^{s_1} z_2^{s_2} + \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_2} \frac{\delta}{2} e^{ik_2t} z_1^{s_2} z_2^{s_1} \\
& + \frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i (z_1 - z_2) \right) \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} e^{ik_1t} s_1 z_1^{s_1-1} z_2^{s_2} \\
& - \frac{i}{2} \left(\frac{\gamma}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \delta i (z_1 - z_2) \right) \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \epsilon^{ik_1t} s_2 z_1^{s_1} z_2^{s_2-1} \Bigg]_{n\epsilon} . \tag{2.15}
\end{aligned}$$

U_2^1 , elde edildikten sonra 1. mertebe analize benzer adımlar takip edilerek 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler belirlenir. Dolayısıyla öncelikle rezonans koşulları incelenmelidir.

2.2.1. 2. Mertebe Rezonans Koşullarının İncelenmesi

U_2^1 ifadesi de, 1. mertebe analizde hesaplanan U_1^1 (2.12) denklemine benzer olarak, $D_1 e^{imt} z_1^p z_2^r$ yapısındadır, yani rezonans koşulu yine (2.7)₁ denklemine benzer olarak $e^{imt} z_1^p z_2^r$ gibi bir ifade için,

$$im + ip - ir - i = 0$$

bulunur. Şimdi bu rezonans koşulunun hangi simetrileri kırdığı incelenmelidir. Ancak U_2^1 ifadesinde rezonans koşullarının incelenebilmesi için bu ifade yine z_1 ve z_2 '

nin kuvvetleri olarak yazılmalıdır. Fakat bu kez ifade oldukça uzun olduğundan, U_2^1 'i bu halde yazmak yerine, her grup parametresinin katsayısı yazılacak ve rezonans koşulları bu grup parametreleri için tek tek incelenecektir. Herhangi bir grup parametresine karşı gelen 2. mertebe yaklaşık simetrisinin kırıldığını göstermek için U_2^1 (2.15) ifadesinde bu parametrenin katsayısında, sadeleşme yapılamayacak herhangi bir terimin, rezonans koşulunu $(2.7)_2$ sağladığını göstermek yeterlidir.

2.2.1.1. C_0^{11} için Rezonans Koşulları

C_0^{11} grup parametresinin katsayısında,

$$-e^{it} \frac{\delta}{2}$$

teriminin rezonans koşulunu sağladığı açıktır. Dolayısıyla C_0^{11} grup parametresine karşı gelen 2. mertebe yaklaşık simetri n 'nin değerine bağlı olmaksızın kırılmaktadır.

2.2.1.2. C_0^{21} için Rezonans Koşulları

C_0^{21} için C_0^{11} 'deki gibi doğrudan rezonans koşulunu yazmak mümkün olmamaktadır, çünkü C_0^{21} 'in katsayısında rezonans koşulunu açıkça sağladığı görülen ifadeler sadeleşmekte ve kalan terimlerde rezonans koşulunu çıkarmak ilk bakışta mümkün görünmemektedir. Bu nedenle C_0^{21} 'in katsayısı rezonans koşullarının uygulanabileceği yapıya getirilmelidir, yani bu katsayı z_1 ve z_2 'nin kuvvetlerine göre toparlanabilmelidir.

C_0^{21} 'in katsayısı ${}_2K_0^{21}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} {}_2K_0^{21} = & -\frac{n}{4} \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^j z_2^{n-j} \right) + z_2^n + z_1^n \right] (z_1 + z_2)^{n-1} \\ & + \frac{n}{4} \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^{n-j} z_2^j \right) + z_1^n + z_2^n \right] (z_1 + z_2)^{n-1} \\ & + \frac{1}{4} (z_1 + z_2)^n \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} j z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right) + n z_1^{n-1} \right] \\ & - \frac{1}{4} (z_1 + z_2)^n \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-j) z_1^{j-1} z_2^{n-j-1} \right) + n z_2^{n-1} \right] \\ & - \frac{i}{2} \delta z_1 - \frac{i}{2} \delta z_2 - \frac{\gamma}{4} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{i}{2} \delta z_1 - \frac{i}{2} \delta z_2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılarak,

$$\begin{aligned}
{}_2K_0^{21} = & -\frac{1}{4}n(z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (z_1^j z_2^{n-j} - z_1^{n-j} z_2^j) \right) \\
& + \frac{1}{4}(z_1 + z_2)^n \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (j z_1^{j-1} z_2^{n-j} - (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1}) \right) \right. \\
& \left. + n(z_1^{n-1} - z_2^{n-1}) \right] - \delta i z_2 - \frac{\gamma}{4}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})
\end{aligned} \quad (2.17)$$

elde edilir. Bu ifadede ki, toplamlar j' nin tamsayı olma koşulu dikkate alınarak açıldığında ise,

$${}_2K_0^{21} = {}_2K_{01}^{21} + {}_2K_{02}^{21} + {}_2K_{03}^{21}, \quad (2.18)$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{01}^{21} = & -\frac{1}{4}n(z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (z_1^j z_2^{n-j} - z_2^j z_1^{n-j}) \right) \\
& + \frac{1}{4}(z_1 + z_2)^n \left[\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (j z_1^{j-1} z_2^{n-j} - (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1}) \right) \right. \\
& \left. + n(z_1^{n-1} - z_2^{n-1}) \right], \\
{}_2K_{02}^{21} = & \frac{1}{4}n(z_1 + z_2)^{n-1} \left(\frac{n!}{(n-j)!j!} (z_1^j z_2^{n-j} - z_1^{n-j} z_2^j) \right)_{(j=\frac{n+1}{2})_{n_t}} \\
& - \frac{1}{4}(z_1 + z_2)^n \left(\frac{n!}{(n-j)!j!} (j z_1^{j-1} z_2^{n-j} - (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1}) \right)_{(j=\frac{n+1}{2})_{n_t}}, \\
{}_2K_{03}^{21} = & -\delta i z_2 - \frac{\gamma}{4}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})
\end{aligned} \quad (2.19)$$

olarak tanımlanmıştır. (2.19) ifadesinde yine j şartlarına dikkat edilmelidir. Çünkü j' nin tamsayı olma koşulundan dolayı bazı n ' ler için (2.19) ifadesinin bazı terimleri hiç var olmamaktadır. ${}_2K_{03}^{21}$ teriminde rezonans koşullarını kolayca kontrol etmek mümkündür, ancak, diğer terimler için şu anda rezonans koşulunu açık olarak görmek mümkün olmadığından bu terimler ayrı ayrı incelenmelidir.

$$\begin{aligned}
{}_2K_{01}^{21} &= \frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{4} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \left(-nz_1^j z_2^{n-j} + nz_1^{n-j} z_2^j + (z_1 + z_2)(jz_1^{j-1} z_2^{n-j} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - nz_1^j z_2^{n-j-1} + jz_1^j z_2^{n-j-1}) \right) + n(z_1 + z_2)(z_1^{n-1} - z_2^{n-1}) \right) \\
&= \frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{4} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (-nz_1^j z_2^{n-j} + nz_1^{n-j} z_2^j + jz_1^j z_2^{n-j} + jz_1^{j-1} z_2^{n-j+1} \right. \\
&\quad \left. - nz_1^{j+1} z_2^{n-j-1} - nz_1^j z_2^{n-j} + jz_1^{j+1} z_2^{n-j-1} + jz_1^j z_2^{n-j}) \right. \\
&\quad \left. + n(z_1^n - z_1 z_2^{n-1} + z_1^{n-1} z_2 - z_2^n) \right) \\
&= \frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{4} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \left[2(j-n)z_1^j z_2^{n-j} + nz_1^{n-j} z_2^j + jz_1^{j-1} z_2^{n-j+1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (j-n)z_1^{j+1} z_2^{n-j-1} \right] + nz_1^n - nz_1 z_2^{n-1} + nz_1^{n-1} z_2 - nz_2^n \right], \\
&= \frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{4} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (2j-n)z_1^j z_2^{n-j} + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} z_1^j z_2^{n-j} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=2}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} z_1^j z_2^{n-j} + nz_1^n - nz_1 z_2^{n-1} + nz_1^{n-1} z_2 - nz_2^n \right] \\
&= \frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{4} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-1)!} \left(\frac{2j-n}{(n-j)j} + \frac{1}{j} - \frac{1}{n-j} \right) z_1^j z_2^{n-j} \right. \\
&\quad + \frac{n!}{(n-1)!} z_2^n - \frac{n!}{(n-1)!} z_1^{n-1} z_2^1 \\
&\quad \left. - \left(-\frac{n!}{(n-1)!} z_1 z_2^{n-1} + \frac{n!}{(n-1)!} z_1^n \right) \right. \\
&\quad \left. + nz_1^n - nz_1 z_2^{n-1} + nz_1^{n-1} z_2 - nz_2^n \right] \\
&= \frac{(z_1 + z_2)^{n-1}}{4} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-1)!} \left(\frac{2j-n+n-j-j}{(n-j)j} \right) z_1^j z_2^{n-j} \right. \\
&\quad \left. + nz_2^n - nz_1^{n-1} z_2 + nz_1 z_2^{n-1} - nz_1^n + nz_1^n - nz_1 z_2^{n-1} + nz_1^{n-1} z_2 - nz_2^n \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

${}_2K_{01}^{21}$ ifadesi sıfır olduğundan dolayı ${}_2K_0^{21} = \left({}_2K_{02}^{21}\right)_{n_t} + \left({}_2K_{03}^{21}\right)_{n_{t\bar{q}}}$ olur. ${}_2K_{02}^{21}$ incelendiğinde ise,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{02}^{21} &= \frac{1}{4}n(z_1 + z_2)^{n-1} \left(\frac{n!}{(n-j)!j!} (z_1^j z_2^{n-j} - z_1^{n-j} z_2^j) \right)_{j=\frac{n+1}{2}} \\
&\quad - \frac{1}{4}(z_1 + z_2)^n \left(\frac{n!}{(n-j)!j!} (j z_1^{j-1} z_2^{n-j} - (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1}) \right)_{j=\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}! \frac{n+1}{2}!}} (z_1 + z_2)^{n-1} \left[n z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{n-1}{2}} - n z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{n+1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - (z_1 + z_2) \left(\frac{n+1}{2} z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{n-1}{2}} - \frac{n-1}{2} z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{n-3}{2}} \right) \right] \\
&= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}! \frac{n+1}{2}!}} (z_1 + z_2)^{n-1} \left[\left(n - \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2} \right) z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{n-1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - \left(n + \frac{n+1}{2} \right) z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{n+1}{2}} + \frac{n-1}{2} z_1^{\frac{n+3}{2}} z_2^{\frac{n-3}{2}} \right] \\
&= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}! \frac{n+1}{2}!}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} z_1^j z_2^{n-1-j} \left[(n-1) z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{n-1}{2}} - \frac{3n+1}{2} z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{n+1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{n-1}{2} z_1^{\frac{n+3}{2}} z_2^{\frac{n-3}{2}} \right] \\
&= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}! \frac{n+1}{2}!}} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!(n-1)}{(n-1-j)!j!} z_1^{j+\frac{n+1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-3}{2}} \right. \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} \frac{3n+1}{2} z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} \frac{n-1}{2} z_1^{j+\frac{n+3}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-5}{2}} \right] \\
&= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}! \frac{n+1}{2}!}} \left[\sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!(n-1)}{(n-j)!(j-1)!} z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} \right. \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!j!} \frac{3n+1}{2} z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} \\
&\quad \left. + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{(n-1)!}{(n+1-j)!(j-2)!} \frac{n-1}{2} z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} \right] \\
&= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}! \frac{n+1}{2}!}} \left[\sum_{j=2}^{n+1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!(j-2)!} A_3(n, j) z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + (n-1) \left(1 - \frac{3n+1}{2} \right) z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{3n-3}{2}} - \frac{3n+1}{2} z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{3n-1}{2}} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$A_3(n, j) = \left(\frac{n-1}{(n-j)(j-1)} - \frac{3n+1}{2(j-1)j} + \frac{n-1}{2(n+1-j)(n-j)} \right) \quad (2.20)$$

olarak tanımlanmıştır. Sonuç olarak C_0^{21} grup parametresinin katsayısı,

$$\begin{aligned} {}_2K_0^{21} = & \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2}!} \left[\sum_{j=2}^{n+1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!(j-2)!} z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} A_3(n, j) \right. \\ & + (n-1) \left(1 - \frac{3n+1}{2} \right) z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{3n-3}{2}} - \frac{3n+1}{2} z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{3n-1}{2}} \Big]_{n_t} \\ & + \left[-\delta i z_2 - \frac{\gamma}{4} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right]_{n_t \epsilon} \end{aligned} \quad (2.21)$$

olarak bulunur.

(2.21) ifadesinde C_0^{21} grup parametresi için rezonans koşulları artık kontrol edilebilir. Burada 2. terim rezonans koşulunu kesin olarak sağlamamaktadır. Ancak, diğer terimler (1,3,4) için rezonans koşulları, sırasıyla, $j = \frac{n+1}{2}$, $\omega = 1$ ve $\omega = -1$ dir. Rezonans koşullarından görüldüğü gibi $j = \frac{n+1}{2}$ tamsayı değerleri için yani n' nin tek tamsayı değerlerinde koşul sağlanır. Ancak 1. Mertebe analizde olduğu gibi burada da bu j değeri için $B(n, j) = 0$ olur. Sonuç olarak, 2. Mertebede de C_0^{21} grup parametresine karşı gelen simetri, n' nin tek veya çift tamsayı değerlerinde kırılmamaktadır. Sadece $\omega = \mp 1$ durumlarında bu parametreye karşı gelen simetri kırılır.

2.2.1.3. C_0^{31} için Rezonans Koşulları

C_0^{31} ' in katsayısı aşağıdaki gibidir.

$${}_2K_0^{31} = {}_2K_{01}^{31} + {}_2K_{02}^{31}.$$

Burada,

$$\begin{aligned} {}_2K_{01}^{31} = & \left(\frac{i}{4} n \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-j} \right) (z_1 + z_2)^{n-1} \\ & + \left(\frac{i}{4} n \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} z_1^{n-j} z_2^j \right) (z_1 + z_2)^{n-1} \\ & - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} j z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right) \\ & + \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} (n-j) z_1^j z_2^{n-j-1} \right), \\ {}_2K_{02}^{31} = & \delta z_2 + i \frac{\gamma}{4} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. ${}_2K_{02}^{31}$ ifadesinin rezonans koşullarını sağlamadığı açıktır.

O halde sadece ${}_2K_{01}^{31}$ ifadesinin analizi yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}
{}_2K_{01}^{31} &= \left(\sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n(n-1)}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-j} + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n(n-1)}{n-2j-1} z_1^j z_2^{n-j} \right. \\
&\quad - \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} j z_1^j z_2^{n-j} - \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} j z_1^{j-1} z_2^{n-j+1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-1)}{2j-n-1} (n-j) z_1^{j+1} z_2^{n-j-1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^n \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-1}{2j-n-1} (n-j) z_1^j z_2^{n-j} \Big) \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-1) \left(\frac{2(n-j)}{2j-n-1} + \frac{2n-j}{(n-2j-1)} + \frac{j}{(2j-n-3)} \right) z_1^j z_2^{n-j} \right. \\
&\quad - \frac{n(n-1)}{n+1} z_2^n + n z_1^n + n z_2^n - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1^n - n z_1^n - \frac{n(n-1)}{n+1} z_2^n + \frac{n(n-1)}{(n-3)!} z_1^n \\
&\quad \left. - \frac{n(n-1)}{n+1} z_2^n \right] \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \\
&= \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-1) A_4(n, j) z_1^j z_2^{n-j} + \frac{4n(n-1)}{(n-3)(n+1)} z_1^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{4n}{n+1} z_2^n \right].
\end{aligned}$$

Burada

$$A_4(n, j) = \left(\frac{2(n-j)}{2j-n-1} + \frac{2n-j}{n-2j-1} - \frac{j}{n-2j+3} \right)$$

olarak tanımlanmıştır. Buradan da bir takım basitleştirmelerle,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{01}^{31} &= \frac{i}{4} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-1) A_4(n, j) z_1^{j+k} z_2^{2n-(j+k+1)} \right. \\
&\quad + \frac{4n(n-1)}{(n-3)(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} z_1^{n+k} z_2^{n-1-k} \\
&\quad \left. + \frac{4n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} z_1^k z_2^{2n-1-k} \right]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir.

(2.22) denkleminde rezonans koşulları incelendiğinde, 1. 2. ve 3. terimlerden, sırasıyla, $j+k=n$, $k=0$ ve $k=n$ şartları elde edilir. Ancak 3. terimden elde edilen $k=n$ şartı toplamının indisinin üst limiti $(n-1)$ ' e kadar olduğu için geçersizdir.

1. ve 2. terimlerde ise koşullar sağlanır. Şimdi simetriyi kıran terimlerin katsayıları (${}_2K_{0R}^{31}$) incelenmelidir.

$$\begin{aligned} {}_2K_{0R}^{31} &= \left[\frac{4n(n-1)}{(n-3)(n+1)} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{n!(n-1)}{(n-j)!j!} A_4(n, j) \right)_{j+k=n} \right] z_1^n z_2^{n-1} \\ &= \left[\frac{4n(n-1)}{(n-3)(n+1)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!2j!} (n-1) A_4(n, j) \right] z_1^n z_2^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bu katsayının sıfıra eşit olmadığı bu çalışmada analitik olarak gösterilememiştir. Ancak yapılan bilgisayar uygulamaları ardışık iki terim arasındaki farkın başlangıçta negatif olduğunu ve monoton azalarak küçüldüğünü, yani sıfır olamayacağını göstermiştir [Ek.1].

2.2.1.4. C_0^{41} için Rezonans Koşulları

C_0^{41} ' in katsayısı

$${}_2K_0^{41} = {}_2K_{01}^{41} e^{-2it} + K_{02}^{41} e^{2it} + z_1 \frac{\delta}{2} e^{-2it} - z_1 \frac{\delta}{2} e^{2it} - i \frac{\gamma}{8} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

şeklinde. Bu terimlerden herhangi birinin rezonans koşulunu sağladığını göstermek yeterli olacaktır. ${}_2K_{01}^{41}$ terimi incelenirse,

$$\begin{aligned} {}_2K_{01}^{41} &= e^{-2it} \left[\frac{i}{4} n (z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{z_1^{j+1} z_2^{n-1-j}}{2j-n-1} - \frac{n z_1 z_2^{n-1}}{n+1} \right) \right. \\ &\quad + \frac{i}{4} n (z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{n-j+1}{2j-n+1} z_1^{n-j} z_2^j + \frac{1}{n+1} z_2^n - \frac{n+1}{n-1} z_1^n \right) \\ &\quad - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{j+1}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-1-j} - \frac{n}{n+1} z_2^{n-1} \right) \\ &\quad \left. + \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{n-1-j}{2j-n-1} z_1^{j+1} z_2^{n-2-j} - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1 z_2^{n-2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu ifade ortak çarpanlarına göre parantezlenerek basitleştirildiğinde aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
{}_2K_{01}^{41} &= e^{-2it} \left[\frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{n}{2j-n-1} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
&\quad - \frac{n^2}{n+1} z_1 z_2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{j+1}{n-2j+1} n z_1^j z_2^{n-j} + \frac{n}{n+1} z_2^n - \frac{n(n+1)}{n-1} z_1^n \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+1) z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} + \frac{n}{n+1} z_1 z_2^{n-1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+1) z_1^j z_2^{n-j} + \frac{n}{n+1} z_2^n \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{(n-1-j)}{2j-n-1} z_1^{j+2} z_2^{n-2-j} - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1^2 z_2^{n-2} \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{(n-1-j)}{2j-n-1} z_1^{j+1} z_2^{n-1-j} - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1 z_2^{n-1} \right) \right] \\
&= e^{-2it} \left[\frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=2}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{n}{2j-n-3} z_1^j z_2^{n-j} \right. \right. \\
&\quad - \frac{n^2}{n+1} z_1 z_2^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{j+1}{n-2j+1} n z_1^j z_2^{n-j} + \frac{n}{n+1} z_2^n - \frac{n(1+n)}{n-1} z_1^n \\
&\quad - \sum_{j=2}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{j}{2j-n-3} z_1^j z_2^{n-j} + \frac{n}{n+1} z_1 z_2^{n-1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-1-j)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+1) z_1^j z_2^{n-j} + \frac{n}{n+1} z_2^n \\
&\quad + \sum_{j=3}^{n+1} \frac{n!}{(n-j+1)!(j-2)!} \frac{n-j+1}{2j-n-5} z_1^j z_2^{n-j} - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1^2 z_2^{n-2} \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=2}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{(n-j)}{2j-n-3} z_1^j z_2^{n-j} - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1 z_2^{n-1} \right) \right], \\
&= e^{-2it} \left[\frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} z_1^j z_2^{n-j} A_5(n, j) + \frac{n^2}{n-3} z_1^n \right. \right. \\
&\quad - \frac{n^2}{n+1} z_1 z_2^{n-1} + \frac{2n^2}{n-1} z_1 z_2^{n-1} + \frac{n}{n+1} z_2^n - \frac{n(1+n)}{n-1} z_1^n - \frac{n^2}{n-3} z_1^n \\
&\quad + \frac{n}{n+1} z_1 z_2^{n-1} + \frac{2n(n-1)}{n-1} z_1 z_2^{n-1} + \frac{n}{n+1} z_2^n + \frac{n(n-1)}{n+1} z_1^2 z_2^{n-2} \\
&\quad \left. \left. + \frac{n(n-1)}{n+1} z_1^2 z_2^{n-2} - \frac{n(n-1)}{n-5} z_1^n - \frac{n(n-1)}{n+1} z_1 z_2^{n-1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Burada,

$$A_5(n, j) = \left(\frac{(2n-j)(j+1)}{j(n-2j+1)} - \frac{(j-1)}{(n-2j+5)} - \frac{2(n-j)}{n-2j+3} \right)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
A_6(n) &= \left(-\frac{2n^2}{n+1} + \frac{2n^2}{n-1} + \frac{2n}{n+1} + 2n \right), \\
A_7(n) &= \frac{n(n+1)}{n-1} + \frac{n(n-1)}{n-5}, \\
A_8(n) &= \frac{2n}{n+1}
\end{aligned}$$

tanımlamaları ile birlikte ${}_2K_{01}^{41}$ şu şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
{}_2K_{01}^{41} &= e^{-2it} \left[\frac{i}{4} (z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} A_5(n, j) z_1^j z_2^{n-j} + A_6(n) z_1 z_2^{n-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A_8(n) z_2^n + A_7(n) z_1^n \right) \right. \\
&= e^{-2it} \left[\frac{i}{4} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} A_5(n, j) z_1^{j+k} z_2^{2n-(j+k+1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} A_6(n) z_1^{k+1} z_2^{2n-2-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} A_8(n) z_1^k z_2^{2n-1-k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} A_7(n) z_1^{n+k} z_2^{n-1-k} \right) \right]. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

(2.25) de rezonans koşulları incelendiğinde, 1., 2., 3. ve 4. terimlerden, sırasıyla, $k = n+1-j$, $k = n$, $k = n+1$ ve $k = 1$ şartları elde edilir. 2. ve 3. terimlerde bu şartları sağlayan k bulunamaz, dolayısıyla simetriyi kıran diğer iki terimin toplamı ise,

$${}_2K_{0R}^{41} = \frac{i}{4} \left[(n-1)A_7(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} A_5(n, j) \right] z_1^{n+1} z_2^{n-2} \tag{2.26}$$

bulunur. Burada, $k = n+1-j$ kullanılırsa,

$${}_2K_{0R}^{41} = \frac{i}{4} \left[(n-1)A_7(n) + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(j-2)!(n+1-j)!} \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} A_5(n, j) \right] z_1^{n+1} z_2^{n-2} \tag{2.27}$$

elde edilir. (2.27) ifadesinin, U_2^1 (2.15)' de C_0^{41} grup parametresinin katsayısının birbirinden bağımsız terimlerinden birinin, rezonans koşulunu sağlayan kısmı olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer (2.27) ifadesinin katsayısı sıfır değilse C_0^{41} grup parametresine karşı gelen simetri kırılmaktadır. Bu katsayının da sıfıra eşit olmadığı analitik olarak gösterilememiştir. Fakat, sayısal olarak burada da ardışık iki terim arasındaki fark başlangıçta negatiftir ve monoton azalarak küçülmektedir. Dolayısıyla (2.27) ifadesi sıfır olmamaktadır [Ek.2].

2.2.1.5. $C_{0s_1s_2}^{k_1}$ için Rezonans Koşulları

Burada öncelikle, U_2^1 (2.15) ifadesinde ki $C_{0s_1s_2}^{k_1}$ 'nin katsayılarında görülen e^{ik_2t} li terim e^{ik_1t} yapısında yazılmalıdır;

$$\begin{aligned}
& \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_2} \left[e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{A_2(n, j, s_1, s_2)}{2j-n-1} z_1^{n-j+s_2} z_2^{j+s_1-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_1)+s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_2} z_2^{s_1} + (n(1+s_2)-s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{s_2} z_2^{n+s_1-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_1}{n+1} z_1^{n+s_2} z_2^{s_1-1} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{s_2-1} z_2^{n+s_1} \right) \right] \\
& = \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_2s_1}^{k_1} \left[e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{A_2(n, j, s_1, s_2)}{2j-n-1} z_1^{n-j+s_2} z_2^{j+s_1-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_1)+s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_2} z_2^{s_1} + (n(1+s_2)-s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{s_2} z_2^{n+s_1-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_1}{n+1} z_1^{n+s_2} z_2^{s_1-1} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{s_2-1} z_2^{n+s_1} \right) \right] \\
& = \sum_{ik_2=-i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{A_9(n, j, s_1, s_2)}{2j-n-1} z_1^{n-j+s_1} z_2^{j+s_2-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_2)+s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n(1+s_1)-s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{s_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \right) \right] \\
& = \sum_{ik_2=-i+i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{A_9(n, j, s_1, s_2)}{2j-n-1} z_1^{n-j+s_1} z_2^{j+s_2-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_2)+s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n(1+s_1)-s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{s_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \right) \right] \\
& = \sum_{ik_2=-ik_1} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{A_9(n, j, s_1, s_2)}{2j-n-1} z_1^{n-j+s_1} z_2^{j+s_2-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_2)+s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n(1+s_1)-s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{s_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \right) \right] \\
& = \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{A_9(n, j, s_1, s_2)}{2j-n-1} z_1^{n-j+s_1} z_2^{j+s_2-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_2)+s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n(1+s_1)-s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{s_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \right) \right].
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

Burada $A_9(n, j, s_1, s_2) = A_2(n, j, s_2, s_1)$ olmaktadır. (2.15)' de, $C_{0s_1s_2}^{k_1}$ grup parametresinin katsayısında, e^{ik_1t} ve e^{-ik_1t} yapısında ifadeler vardır. Bu ifadelerden herhangi birinin simetriyi kırdığını göstermek yeterli olacaktır. e^{-ik_1t} içeren terimler seçilirse,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{0s_1s_21}^{k_1} = & \left(\sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{z_1^{j+s_2} z_2^{n-1-j+s_1}}{2j-n-1} \right) \right] \right. \\
& + C_{0s_1s_2}^{k_2} \left[e^{ik_2t} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{1}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j+s_2} z_2^{j+s_1-1} \right. \right. \\
& - (n(1-s_1) + s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_2} z_2^{s_1} + (n(1+s_2) - s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{s_2} z_2^{n+s_1-1} \\
& \left. \left. + \frac{s_1}{n+1} z_1^{n+s_2} z_2^{s_1-1} + \frac{s_2}{n+1} z_1^{s_2-1} z_2^{n+s_1} \right) \right] \left. \right) \frac{i}{4} n (z_1 + z_2)^{n-1} - \frac{i}{4} (z_1 + z_2)^n \\
& \left(\sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{j+s_2}{2j-n-1} z_1^{j+s_2-1} z_2^{n-1-j+s_1} \right] \right. \\
& \left. \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{n-1-j+s_1}{2j-n-1} z_1^{j+s_2} z_2^{n-2-j+s_1} \right] \right) \quad (2.29)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.29)' de, e^{ik_2t} li ifadenin yerine (2.28)' de elde edilen sonuç yazılarak bazı basitleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{0s_1s_21}^{k_1} = & \frac{i}{4} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left((z_1 + z_2)^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{n}{2j-n-1} \right. \right. \right. \\
& z_1^{j+s_2} z_2^{n-1-j+s_1} \\
& + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{n}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j+s_1} z_2^{j+s_2-1} \\
& - (n^2(1-s_2) + s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n^2(1+s_1) - s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \\
& + \frac{ns_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{ns_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \\
& - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+s_2) z_1^{j+s_2} z_2^{n-1-j+s_1} \\
& - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+s_2) z_1^{j+s_2-1} z_2^{n-j+s_1} \\
& - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (n-1-j+s_1) z_1^{j+s_2+1} z_2^{n-2-j+s_1} \\
& \left. \left. \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (n-1-j+s_1) z_1^{j+s_2} z_2^{n-1-j+s_1} \right) \right) \right] \quad (2.30)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.30) ifadesinde de birtakım işlemlerle,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{0s_1s_2}^{k_1} &= \frac{i}{4} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left((z_1+z_2)^{n-1} \left[z_1^{s_2} z_2^{s_1} \right. \right. \right. \\
&\left. \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{n}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-1-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{j+s_2}{2j-n-1} z_1^j z_2^{n-1-j} \right. \right. \\
&\left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{j+s_2}{2j-n-1} z_1^{j-1} z_2^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{n-1-j+s_1}{2j-n-1} \right. \\
&\left. z_1^{j+1} z_2^{n-2-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (n-1-j+s_1) z_1^j z_2^{n-1-j} \right) \\
&+ z_1^{s_1} z_2^{s_2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{n!}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j} z_2^{j-1} \right. \\
&\left. - (n^2(1-s_2) + s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n^2(1+s_1) - s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \right. \\
&\left. + \frac{ns_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{ns_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \right) \Bigg] \\
&= \frac{i}{4} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left((z_1+z_2)^{n-1} \left[z_1^{s_2} z_2^{s_1} \right. \right. \right. \\
&\left. \left(\sum_{j=1}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{n}{2j-n+3} z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right. \right. \\
&\left. - \sum_{j=1}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{1}{2j-n-3} (j+s_2-1) z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right. \\
&\left. - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!j!} \frac{1}{2j-n-1} (j+s_2) z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right. \\
&\left. - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{n!}{(n-j+1)!(j-2)!} \frac{1}{2j-n-5} (n-j+1+s_1) z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right. \\
&\left. - \sum_{j=1}^n \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} \frac{1}{2j-n-3} (n-j+s_1) z_1^{j-1} z_2^{n-j} \right) \\
&+ z_1^{s_1} z_2^{s_2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!(j-2)!} \frac{n}{2j-n-1} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j} z_2^{j-1} \right. \\
&\left. + (n^2(1-s_2) + s_1) \frac{1}{1-n} z_1^{n-1+s_1} z_2^{s_2} + (n^2(1+s_1) - s_2) \frac{1}{n-1} z_1^{s_1} z_2^{n+s_2-1} \right. \\
&\left. + \frac{ns_2}{n+1} z_1^{n+s_1} z_2^{s_2-1} + \frac{ns_1}{n+1} z_1^{s_1-1} z_2^{n+s_2} \right) \Bigg]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

bulunur.

(2.31) ifadesindeki sonuçta, toplamalar ve üstler açılıp birtakım basitleştirmelerle,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{0s_1s_2}^{k_1} &= \frac{i}{4} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left((z_1 + z_2)^{n-1} \left(z_1^{s_2} z_2^{s_1} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} \right. \right. \right. \right. \\
&A_9(n, j, s_1, s_2) z_1^{j-1} z_2^{n-j} \Big) + z_1^{s_1} z_2^{s_2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{n-j} z_2^{j-1} \right) \\
&+ z_1^{s_2} z_2^{s_1} \left(A_{10}(n, s_1, s_2) z_2^{n-1} + A_{11}(n, s_1, s_2) z_1^{n-1} + \frac{n}{n+1} s_2 z_1^{-1} z_2^n - \frac{n}{n-3} z_1^n z_2^{-1} \right) \\
&- z_1^{s_1} z_2^{s_2} \left((n^2(1-s_2) + s_1) \frac{1}{n-1} z_1^{n-1} + (n^2(1+s_1) - s_2) \frac{1}{n-1} z_2^{n-1} + \frac{ns_2}{n+1} z_1^n z_2^{-1} \right. \\
&\left. \left. + \frac{ns_1}{n+1} z_1^{-1} z_2^n \right) \right] \Big) \Bigg] \\
&= \frac{i}{4} \sum_{ik_1=i-i(s_1-s_2)} C_{0s_1s_2}^{k_1} \left[e^{-ik_1t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} \right. \right. \\
&A_9(n, j, s_1, s_2) z_1^{k+s_2+j-1} z_2^{n-1-k+s_1+n-j} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} A_2(n, j, s_1, s_2) z_1^{k+s_1+n-j} z_2^{n-1-k+s_2+j-1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} A_{10}(n, s_1, s_2) z_1^{k+s_2} z_2^{n-1-k+s_1+n-1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} A_{11}(n, s_1, s_2) z_1^{k+s_2+n-1} z_2^{n-1-k+s_1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{ns_2}{n+1} z_1^{k+s_2-1} z_2^{n-1-k+s_1+n} \\
&- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \frac{ns_1}{n-3} z_1^{k+s_2+n} z_2^{n-1-k+s_1-1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \left(\frac{(n^2(1-s_2) + s_1)}{1-n} z_1^{k+s_1+n-1} z_2^{n-1-k+s_2} \right. \\
&+ \frac{(n^2(1+s_1) - s_2)}{n-1} z_1^{k+s_1} z_2^{n-1-k+s_2+n-1} + \frac{ns_2}{n+1} z_1^{k+s_1+n} z_2^{n-1-k+s_2-1} \\
&\left. \left. + \frac{ns_1}{n+1} z_1^{k+s_1-1} z_2^{n-1-k+s_2+n} \right) \right] \Bigg].
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
A_{10}(n, s_1, s_2) &= \left(-\frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}(n+s_1) + n(1+s_2) \right), \\
A_{11}(n, s_1, s_2) &= \left(\frac{n^2}{n-3} - \frac{n}{n-3}(n+s_2-s_1-1) - \frac{n(n-1)(s_1+1)}{n-5} \right)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Şimdi (2.32) ifadesinde rezonans koşullarına bakılırsa,

1. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_2 + j - 1 - (n - 1 - k + s_1 + n - j) - 1 = 0 \Rightarrow k = n - j + 1$,
2. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_1 + n - j - (n - 1 - k + s_2 + j - 1) - 1 = 0 \Rightarrow k = s_2 - s_1 + j$,
3. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_2 - (n - 1 - k + s_1 + n - 1) - 1 = 0 \Rightarrow k = n$,
4. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_2 + n - 1 - (n - 1 - k + s_1) - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$,
5. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_2 - 1 - (n - 1 - k + s_1 + n) - 1 = 0 \Rightarrow k = n + 1$,
6. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_2 + n - (n - 1 - k + s_1 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow k = 0$,
7. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_1 + n - 1 - (n - 1 - k + s_2) - 1 = 0 \Rightarrow k = s_2 - s_1 + 1$,
8. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_1 - (n - 1 - k + s_2 + n - 1) - 1 = 0 \Rightarrow k = n + s_2 - s_1$,
9. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_1 + n - (n - 1 - k + s_2 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow k = s_2 - s_1$,
10. terimde $\Rightarrow -k_1 + k + s_1 - 1 - (n - 1 - k + s_2 + n) - 1 = 0 \Rightarrow k = n + s_2 - s_1 + 1$

bulunur. Eğer k nın alabileceği değerlere dikkat edilirse, 3. ve 5. terimlerde bu şartı sağlayan k değerlerinin olmadığı görülür. Rezonans koşullarını sağlayan terimler toplanırsa,

$$\begin{aligned}
{}_2K_{0s_1s_2R}^{k_1} &= z_1^{n+s_2} z_2^{n+s_1-2} \left(\sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(j-2)!(n-j+1)!} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} A_9(n, j, s_1, s_2) \right. \\
&+ \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-s_2+s_1-j)!(s_2-s_1+j)!} \frac{n!}{(n-j-1)!(j-2)!} A_2(n, j, s_1, s_2) \\
&+ (n-1)A_{11}(n, s_1, s_2) + \frac{ns_1}{n-3} + \frac{(n-1)!}{(n-s_2+s_1-2)!(s_2-s_1+1)!} \frac{n^2(1-s_2)+s_1}{1-n} \\
&+ \frac{(n-1)!}{(n+s_2-s_1)!(-s_2+s_1-1)!} \frac{n^2(1+s_1)-s_2}{n-1} \\
&\left. + \frac{(n-1)!}{(n-s_2+s_1-1)!(s_2-s_1)!} \frac{ns_2}{n+1} + \frac{(n-1)!}{(-s_2+s_1-2)!(n+s_2-s_1+1)!} \frac{ns_1}{n+1} \right) \quad (2.33)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade sıfırdan farklı ise $C_{0s_1s_2}^{k_1}$ ' a karşı gelen simetri kırılır, aksi halde kırılmaz. Bu durumda bu grup parametresine karşı gelen simetri de elde edilebilir. Ancak burada C_0^{21} grup parametresine karşı gelen simetrimin kesinlikle kırılmadığı bilindiği için bu parametreye karşı gelen simetriden yaklaşık ilk integral elde edilebileceğinden, (2.32) ifadesinin sıfırdan farklı olup olmadığını kontrol etmeye gerek duyulmamıştır.

Sonuç olarak, 2. mertebe analizde, C_0^{21} grup parametresine karşı gelen simetri n değeri ne olursa olsun kırılmamakta, diğer grup parametrelerine karşı gelen simetriler ise 1. mertebe analizde sadece n 'in tek değerlerinde kırılırken, 2. mertebede n ' in çift değerlerinde de kırılmaktadır.

2.3. 1. Mertebe Yaklaşık Simetriler

Yukarıda yapılan analiz sonucunda artık C_0^{21} grup parametresine karşı gelen 1. ve 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetri bulunabilir. 1. mertebe simetriyi bulmak için, 1. mertebe analizde elde edilen $\bar{\eta}_1^1$ (2.13)' de görülen, C_0^{21} grup parametresinin katsayısı

$${}_z K_0^{21} = \frac{i}{2} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n-1} \frac{n!}{(n-j)!j!} z_1^j z_2^{n-j} + z_2^n + z_1^n \right) \quad (2.34)$$

olarak bulunur. Şimdi n tamsayısının durumuna göre bu parametreye karşı gelen 1. mertebe simetri hesaplanmalıdır.

2.3.1. $n = \text{tek}$ tamsayı için 1. mertebe simetri

(2.34) denkleminde n' in tek tamsayı değerlerinde $(j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}$ koşulu geçerli olduğu için, $j = 1, \dots, n-1$ e kadar olan toplamdan bu değer çıkartılır ve bir takım basitleştirmeler yapılırsa,

$$\bar{\eta}_1^1 = \frac{i}{2} \left(- \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\frac{1+n}{2})\Gamma(\frac{3+n}{2})} z_1^{\frac{1+n}{2}} z_2^{\frac{-1+n}{2}} + (z_1 + z_2)^n \right) \quad (2.35)$$

elde edilir. (2.35) denkleminde ise ters dönüşüm formülleri (1.20)₁ uygulanarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa, $n = \text{tek}$ için,

$$\begin{aligned} \eta_1^1 &= - \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_2, \\ \eta_1^2 &= \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_1 - x_1^n \end{aligned} \quad (2.36)$$

bulunur. Dolayısıyla $n = \text{tek}$ için 1. Mertebe simetri,

$$\begin{aligned} C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 \\ &= \left(x_2 + \epsilon \left(- \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &+ \left(-x_1 + \epsilon \left(\frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_1 - x_1^n \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

olarak elde edilir.

2.3.2. $n = \text{çift}$ tamsayı için 1. mertebe simetrinin hesaplanması

Bu kez (2.34) denkleminde görülen $(j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}$ koşulu zaten geçerli değildir, dolayısıyla, (2.34) denkleminin diğer terimleri basitleştirilirse;

$$\bar{\eta}_1^1 = \frac{1}{2} (z_1 + z_2)^n \quad (2.38)$$

bulunur ve bu ifadeye de ters dönüşüm $(1.20)_1$ uygulanarak, $n = \text{çift}$ için,

$$\begin{aligned}\eta_1^1 &= 0, \\ \eta_1^2 &= -x_1^n\end{aligned}\tag{2.39}$$

bulunur. (2.39) ve (1.33) kullanılarak da $n = \text{çift}$ tamsayı için simetri

$$\begin{aligned}C_0^{21} &\Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 \\ &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_1 - \epsilon x_1^n) \frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{2.40}$$

olarak elde edilir.

2.4. 2. Mertebe Yaklaşık Simetrinin Hesaplanması

C_0^{21} grup parametresine karşı gelen 1. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetriler bulunduğundan sonra benzer işlemler $\bar{\eta}_2^1$ ' e uygulanarak 2. mertebe simetrilerde elde edilebilir. Dolayısıyla, öncelikle daha önce çok uzun bir ifade olduğundan hesaplanmayan $\bar{\eta}_2^1$, sadece C_0^{21} grup parametresinin katsayısı için, (2.21) denkleminde rezonans koşulları uygulanarak hesaplanmalıdır. Bu işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_2^1 &= \frac{n!}{4^{\frac{n-1}{2}} \frac{n+1}{2}!} \left[\sum_{\substack{j=2 \\ (j \neq \frac{n+1}{2})_{n_t}}}^{n+1} \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!(j-2)!} \frac{i}{(n-2j+1)} A_3(n, j) \right. \\ &\quad \left. z_1^{j+\frac{n-1}{2}} z_2^{-j+\frac{3n-1}{2}} + (n-1) \left(\frac{1-3n}{2} \right) \frac{i}{(n-1)} z_1^{\frac{n+1}{2}} z_2^{\frac{3n-3}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3n+1}{2} \frac{i}{(1+n)} z_1^{\frac{n-1}{2}} z_2^{\frac{3n-1}{2}} \right]_{n_t} + \left[-\delta i z_2 - \frac{\gamma}{4} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right]_{n_t \epsilon}\end{aligned}\tag{2.41}$$

elde edilir. Burada $A_3(n, j)$ daha önce tanımlanmıştı (2.20). (2.41) ifadesi basitleştirildiğinde,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_2^1 &= \left[\frac{i}{16\Gamma(\frac{3+n}{2})^4} \left(2n\Gamma(1+n)\Gamma(2+n)z_1^n z_2^{n-1} - \Gamma(1+n)\Gamma(\frac{3+n}{2})^2 z_1^{\frac{1}{2}(-1+n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(1 + \frac{z_1}{z_2} \right)^n z_2^{\frac{3}{2}(-1+n)} ((-1+n)z_1 + z_2 + 3nz_2) \right) \right]_{n_t} \\ &\quad + \left[-\delta i z_2 - \frac{\gamma}{4} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \right]_{n_t \epsilon}\end{aligned}\tag{2.42}$$

elde edilir. Artık n tamsayısının durumuna göre, C_0^{21} grup parametresine karşı gelen 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetri elde edilebilir.

2.4.1. $n = \text{tek tamsayı için 2. mertebe simetrisinin hesaplanması}$

(2.42) denkleminin (1.20)₁ ters dönüşümünün uygulanması sonucu, $n = \text{tek}$ için,

$$\begin{aligned}\eta_2^1 &= 2 \left(n a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_2 + (1-n) a_2 x_1 x_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} + \frac{\delta}{4} x_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \omega \sin \omega t \right), \\ \eta_2^2 &= -2 \left(n a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_1 - a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} ((n+1)x_2^2 + 2n x_1^2) + \frac{\delta}{4} x_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \cos \omega t \right)\end{aligned}\quad (2.43)$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\Gamma(1+n)\Gamma(2+n)}{\Gamma(\frac{3+n}{2})^4 2^{2+2n}}, \\ a_2 &= \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(\frac{3+n}{2})^2 2^{2+n}}\end{aligned}$$

olarak tanımlanmıştır. Buradan 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetri,

$$\begin{aligned}C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \\ &= \left(x_2 + \epsilon \left(-\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_2 \right) + \epsilon^2 \left(2 \left(n a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-n) a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} x_1 x_2 \right) + \frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \omega \sin \omega t \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &\quad + \left(-x_1 + \epsilon \left(\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_1 - x_1^n \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^2 \left(-2 \left(a_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1} n x_1 - a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} ((n+1)x_2^2 + 2n x_1^2) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \cos \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2}\end{aligned}\quad (2.44)$$

olarak bulunur.

2.4.2. $n = \text{çift tamsayı için 2. mertebe simetrisinin hesaplanması}$

(2.42) denkleminin (1.20)₁ ters dönüşümünün uygulanması sonucu $n = \text{çift tamsayı}$ için,

$$\begin{aligned}\eta_2^1 &= 2 \left(\frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \omega \sin \omega t \right), \\ \eta_2^2 &= -2 \left(\frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \cos \omega t \right)\end{aligned}\quad (2.45)$$

elde edilir. Buradan 2. mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetri,

$$\begin{aligned}
C_0^{21} \Rightarrow \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 \\
&= \left(x_2 + \epsilon^2 \left(2 \left(\frac{\delta}{4} x_1 - \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \omega \sin \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \\
&\quad + \left(-x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2 \left(-2 \left(\frac{\delta}{4} x_2 + \frac{\gamma}{2(\omega^2 - 1)} \cos \omega t \right) \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

bulunur. 3. Bölüm' de, (2.44) ve (2.46) denklemleri ile verilen, sırasıyla, $n = \text{tek}$ ve çift tamsayılar için elde edilen². mertebe genelleştirilmiş yaklaşık simetrilerden yararlanarak, Yaklaşık Noether teoremi uyarınca yaklaşık ilk integraller elde edilecektir.



3. YAKLAŞIK NOETHER TEOREMİ VE İLK İNTEGRALLER

Bu bölümde, 2. Bölümde elde edilen 2. mertebe yaklaşık simetrilere karşı gelen ilk integraller bulunacaktır. Ancak, önce bazı teorem ve tanımlamaları vermekte fayda vardır.

3.1. Yaklaşık Noether Teoremi

Yaklaşık Noether Simetri Grubu

Hareket denklemlerini yaklaşık olarak invaryant bırakan bir dönüşüm grubu:

$$\bar{t} = t + a(\tau^0 + \epsilon\tau^1), \quad \bar{q}_i = q_i + a(\xi_i^0 + \epsilon\xi_i^1), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

olarak tanımlansın. Burada $\tau^0 = \tau^0(t, \mathbf{q})$, $\tau^1 = \tau^1(t, \mathbf{q})$, $\xi_i^0 = \xi_i^0(t, \mathbf{q})$, $\xi_i^1 = \xi_i^1(t, \mathbf{q})$, a grup parametresi, ϵ küçük bir parametre ve $\mathbf{q}$ konumdur. Eğer bu dönüşüm grubu altında etki integrali de yaklaşık olarak invaryant kalıyorsa, yani:

$$\int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} L(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}'; \epsilon) d\bar{t} = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}; \epsilon) dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dG}{dt} dt + O(\epsilon) \quad (3.2)$$

ise, (3.1) denkleminde verilen dönüşüm grubuna yaklaşık Noether simetri grubu denir [10]. Burada $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ Lagrange fonksiyonu, $G = a(g + \epsilon g^1)$ Ayar fonksiyonudur ve $(') = \frac{d}{dt}$, $(\bar{\cdot}) = \frac{d}{d\bar{t}}$ olarak tanımlanmışlardır.

3.1.1. Lagrange Sistemleri İçin Yaklaşık Noether Teoremi

Her yaklaşık Noether simetri grubuna karşı gelen bir yaklaşık ilk integral vardır ve

$$I = g^0 + \epsilon g^1 - \left[(\tau^0 + \epsilon\tau^1) L + \left[(\xi_j^0 + \epsilon\xi_j^1) - \dot{q}_j(\tau^0 + \epsilon\tau^1) \right] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right], \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

olarak bulunabilir [6,10].

İspat: Yaklaşık Noether simetri grubu tanımında (3.2), (3.1) ile verilen dönüşüm kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} L(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}'; \epsilon) d\bar{t} &= \int_{t_0}^{t_1} L(t + a(\tau^0 + \epsilon\tau^1), \mathbf{q} + a(\xi^0 + \epsilon\xi^1), \mathbf{q}' + a(\xi^{0'} + \epsilon\xi^{1'}); \epsilon) dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} La \frac{d}{dt}(\tau^0 + \epsilon\tau^1) dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denkleminin sağ tarafındaki Lagrange fonksiyonu grup parametresi (a)' ya göre Taylor serisine açıldığında,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} L(t + a(\tau^0 + \epsilon\tau^1), \mathbf{q} + a(\xi^0 + \epsilon\xi^1), \mathbf{q}' + a(\xi^{0'} + \epsilon\xi^{1'}); \epsilon) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L + a \left(\frac{\partial L}{\partial t} \Big|_{a=0}(\tau^0 + \epsilon\tau^1) + \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_j} \Big|_{a=0}(\xi_j^0 + \epsilon\xi_j^1) + \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_j'} \frac{\partial \bar{q}_j'}{\partial a} \Big|_{a=0} \right) \right] dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} La(\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1) dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada görülen $\frac{\partial \bar{q}_j'}{\partial a} \Big|_{a=0}$ ifadesi, yani;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}_j'}{\partial a} \Big|_{a=0} &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial t} \right) \Big|_{a=0} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} \right) \Big|_{a=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left[(\dot{q}_j + a(\dot{\xi}^0 + \epsilon\dot{\xi}^1)) (1 - a(\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1)) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\dot{q}_j - \dot{q}_j a(\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1) + a(\dot{\xi}_j^0 + \epsilon\dot{\xi}_j^1) + O(a^2) \right] \\ &= (\dot{\xi}_j^0 + \epsilon\dot{\xi}_j^1 - \dot{q}_j(\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1)) + O(a), \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.5) denklemde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} L(\bar{t}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}'; \epsilon) d\bar{t} &= \int_{t_0}^{t_1} \left[L + a \left((\tau^0 + \epsilon\tau^1) \frac{\partial L}{\partial t} + (\xi_j^0 + \epsilon\xi_j^1) \frac{\partial L}{\partial q_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [(\dot{\xi}_j^0 + \epsilon\dot{\xi}_j^1) - \dot{q}_j(\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1)] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + (\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1) L \right) \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (L + a(\dot{g}^0 + \epsilon\dot{g}^1)) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

bulunur. Buradan, "Killing" denklemi [11]:

$$\begin{aligned} (\tau^0 + \epsilon\tau^1) \frac{\partial L}{\partial t} + (\xi_j^0 + \epsilon\xi_j^1) \frac{\partial L}{\partial q_j} + [(\dot{\xi}_j^0 + \epsilon\dot{\xi}_j^1) - \dot{q}_j(\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1)] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ + (\dot{\tau}^0 + \epsilon\dot{\tau}^1) L = \dot{g}^0 + \epsilon\dot{g}^1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.8) ifadesi düzenlenerek yazıldığında,

$$\begin{aligned} &(\xi_j^0 + \epsilon\xi_j^1 - \dot{q}_j(\tau^0 + \epsilon\tau^1)) \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \\ &+ \frac{d}{dt} \left[L(\tau^0 + \epsilon\tau^1) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} (\xi_j^0 + \epsilon\xi_j^1 - \dot{q}_j(\tau^0 + \epsilon\tau^1)) \right] = \frac{d}{dt} (g^0 + \epsilon g^1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

bulunur. Lagrange hareket denkleminde, (3.9) ifadesindeki ilk terim sıfırlanır, diğer terimler yeniden düzenlendiğinde ise,

$$\frac{d}{dt} \left[g^0 + \epsilon g^1 - \left((\tau^0 + \epsilon \tau^1) L + ((\xi_j^0 + \epsilon \xi_j^1) - \dot{q}_j(\tau^0 + \epsilon \tau^1)) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] = O(\epsilon^2) \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.10) denkleminde parantez içindeki ifadenin ise (3.3) ile verilen ilk integral olduğu görülmektedir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.2. Hamilton Sistemleri İçin Yaklaşık Noether Teoremi

Yaklaşık Noether teoremini Hamilton sistemleri için yazarken dönüşüm gruplarının üreteçlerinden yararlanılacaktır [7].

Yerel Olarak Hamilton Vektör Alanı

Eğer bir vektör alanı, $\mathbf{X} = \eta_l^p(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial p_l} + \eta_l^q(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial q_l}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \Omega = 0 \quad (3.11)$$

denkliğini sağlarsa yerel olarak Hamilton vektör alanıdır [12]. Burada $\mathcal{L}$ Lie türevi [12], $\Omega = dp_l \wedge dq_l$ ($\mathbf{p}$ momentum, $\mathbf{q}$ konum), $\wedge$ dış çarpım ve $l = 1, \dots, n$ dir.

Yaklaşık Noether Simetri Vektör Alanı

Hamilton denklemlerini;

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad H = H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \dots + \epsilon^{(k)} H_{(k)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.12)$$

yaklaşık olarak invaryant bırakan bir yaklaşık Hamilton simetri vektör alanı $\mathbf{X}$, eğer Hamilton fonksiyonunu da invaryant bırakıyorsa, yani;

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} H = O(\epsilon^{k+1}) \quad (3.13)$$

ise, bu vektör alanına Yaklaşık Noether simetri vektör alanı denir [7].

2. Bölüm' de bulunan yaklaşık simetri vektör alanlarının, (3.13) denklemini $\delta = 0$ için sağladığı gösterilebilir. (3.13) açık olarak yazılırsa,

$$(\eta_0^1 + \epsilon \eta_1^1 + \epsilon^2 \eta_2^1) \frac{\partial H}{\partial x_1} + (\eta_0^2 + \epsilon \eta_1^2 + \epsilon^2 \eta_2^2) \frac{\partial H}{\partial x_2} = O(\epsilon^3) \quad (3.14)$$

elde edilir. (1.1) dinamik sistemi için Hamilton fonksiyonu ise,

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \frac{1}{n+1} x_1^{n+1}$$

bulunur. Buradan n ' nin tek veya çift tamsayı durumlarında (3.14) denkleminin sağlandığı açıktır.

Hamilton sistemleri için Yaklaşık Noether Teoremi

Her yaklaşık Noether simetri vektör alanına karşılık gelen bir yaklaşık ilk integral $I(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \epsilon^k)$ vardır ve

$$\mathbf{X} \lrcorner \Omega = dI + O(\epsilon^{k+1}) \quad (3.15)$$

denkleminde bulunabilir [7]. Burada $\lrcorner$ iç çarpımı [12] göstermektedir.

Otonom olmayan Hamilton dinamik sistemleri içinde benzer bir yaklaşım geliştirilebilir. Bu durumda $\mathbf{X} \lrcorner \Omega'$ nin bir-formunun tam olması yeterli olacaktır. Yani;

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} H = f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t).$$

Bu konu [7] de incelenmektedir. Dolayısıyla, öncelikle, (3.15) ifadesinin tamlığı kontrol edilmelidir. Burada,

$$F_1 = -(\eta_0^2 + \epsilon \eta_1^2 + \epsilon^2 \eta_2^2) \quad \text{ve} \quad F_2 = \eta_0^1 + \epsilon \eta_1^1 + \epsilon^2 \eta_2^1 \quad (3.16)$$

ifadesi açık yazılarak,

$$\begin{aligned} F_1 = & x_1 + \epsilon \left(-2a_3(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_1 + x_1^n \right) \\ & + \epsilon^2 \left(2n a_1(x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_1 - 2a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} ((n+1)x_2^2 + 2nx_1^2) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\omega^2 - 1} \cos \omega t \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

ve

$$\begin{aligned} F_2 = & x_2 + \epsilon \left(-2a_3(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} x_2 \right) \\ & + \epsilon^2 \left(2n a_1(x_1^2 + x_2^2)^{n-1} x_2 + 2a_2 x_1^n (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-3}{2}} (1-n)x_1 x_2 \right. \\ & \left. - \frac{\gamma}{\omega^2 - 1} \omega \sin \omega t \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. Burada,

$$a_3 = \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{3+n}{2})}$$

olarak tanımlanmıştır. Buradan, (3.15)'in $\delta = 0$ için tam olduğu açıkça görülmektedir. Dolayısıyla, bu yaklaşık simetrilere karşı gelen bir yaklaşık ilk integral (3.15) denklemi aracılığıyla elde edilebilir [7].

3.2. Yaklaşık İlk İntegral

Şimdi 2. mertebe yaklaşık simetri analizi sonucunda kırılmayan C_0^{21} grup parametresine karşı gelen yaklaşık simetri vektör alanı için yaklaşık ilk integral hesaplanacaktır. (3.15) denkleminde,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int F_1 dx_1, \\ I_2 &= \int (F_2 - \frac{dI_1}{dx_2}) dx_2, \\ I &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

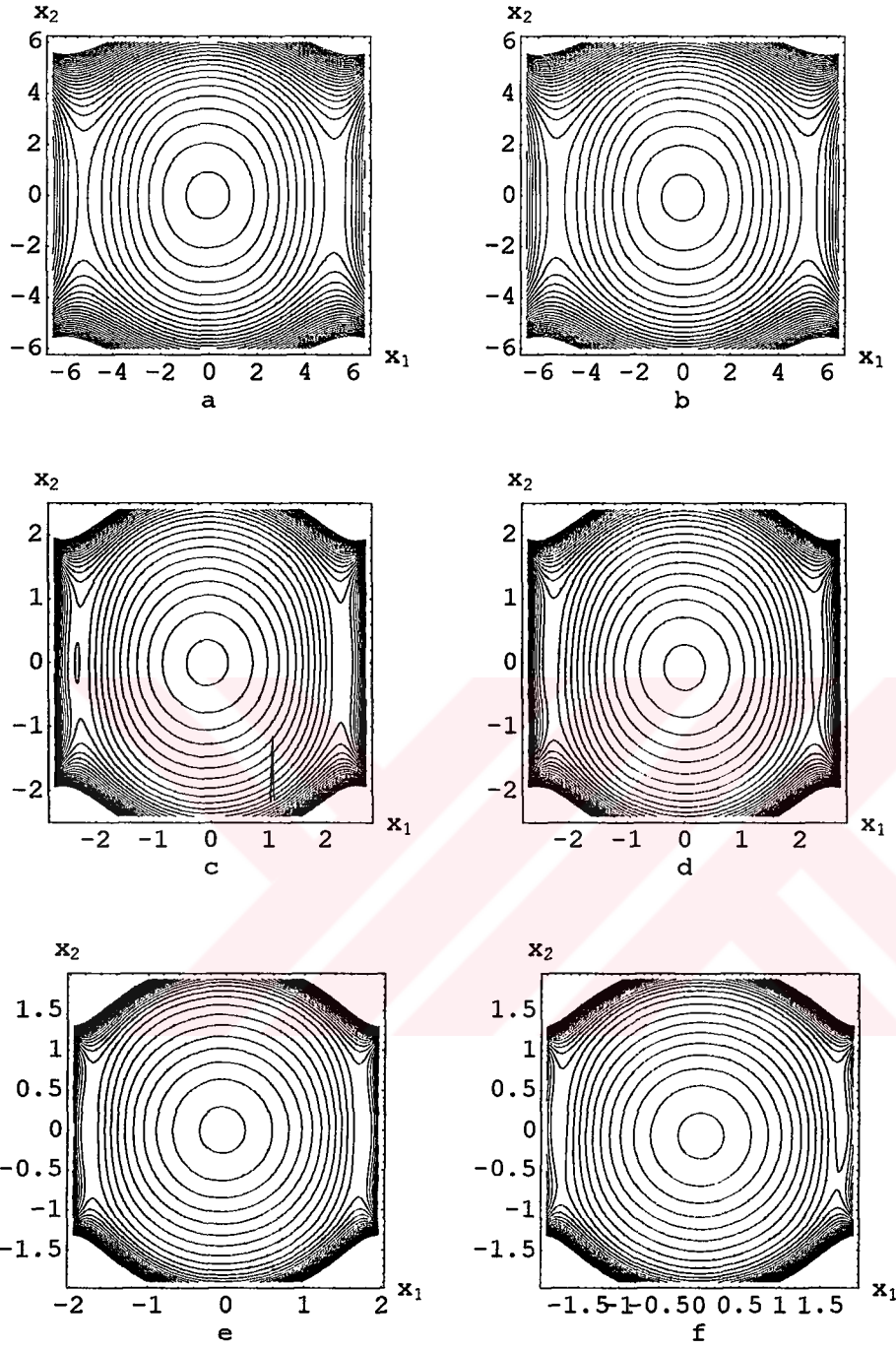
elde edilir. Buradan $n = \text{tek}$ için,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}x_1^2 + \epsilon \left(\frac{1}{1+n} (x_1^{1+n} - 2a_3(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. \epsilon^2 \left(\frac{\gamma}{\omega^2 - 1} x_1 \cos \omega t + a_1(x_1^2 + x_2^2)^{n-1}(x_1^2 + x_2^2) - 2a_2x_1^{n+1}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) \right), \\ I_2 &= -\epsilon^2 \frac{\gamma \omega \sin \omega t}{\omega^2 - 1} x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{aligned}$$

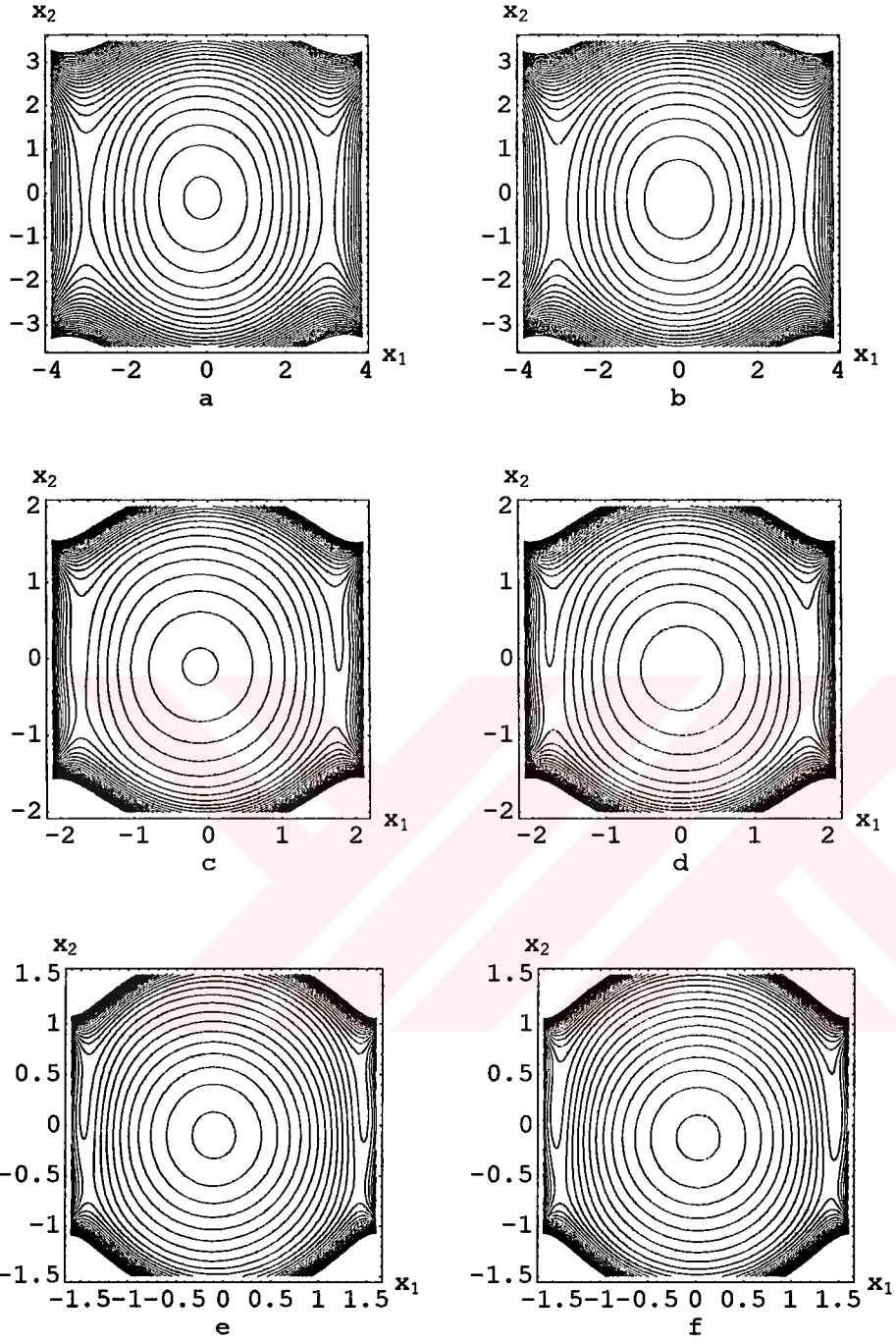
bulunur ve buradan da ilk integral,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \left(\frac{x_1^{1+n}}{1+n} - \frac{2a_3}{1+n} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n+1}{2}} \right) \\ &\quad + \epsilon^2 \left(\frac{\gamma}{\omega^2 - 1} (x_1 \cos \omega t - x_2 \omega \sin \omega t) + a_1(x_1^2 + x_2^2)^n - 2a_2x_1^{1+n}(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n-1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

olarak elde edilir. (3.19) ile elde edilen ilk integralin düzey eğrileri Mathematica 3.01 [13] kullanılarak çizdirilmiştir (Şekil.3.1-2).



Şekil.3.1 $n=$ tek tamsayı için yaklaşık ilk integralin düzey eğrileri, $\omega = \sqrt{2}, \gamma = 5, \epsilon = 0.1$ a. $n=3, t=0$, b. $n=3, t=\pi$, c. $n=5, t=0$, d. $n=5, t=\pi$, e. $n=7, t=0$, f. $n=7, t=\pi$

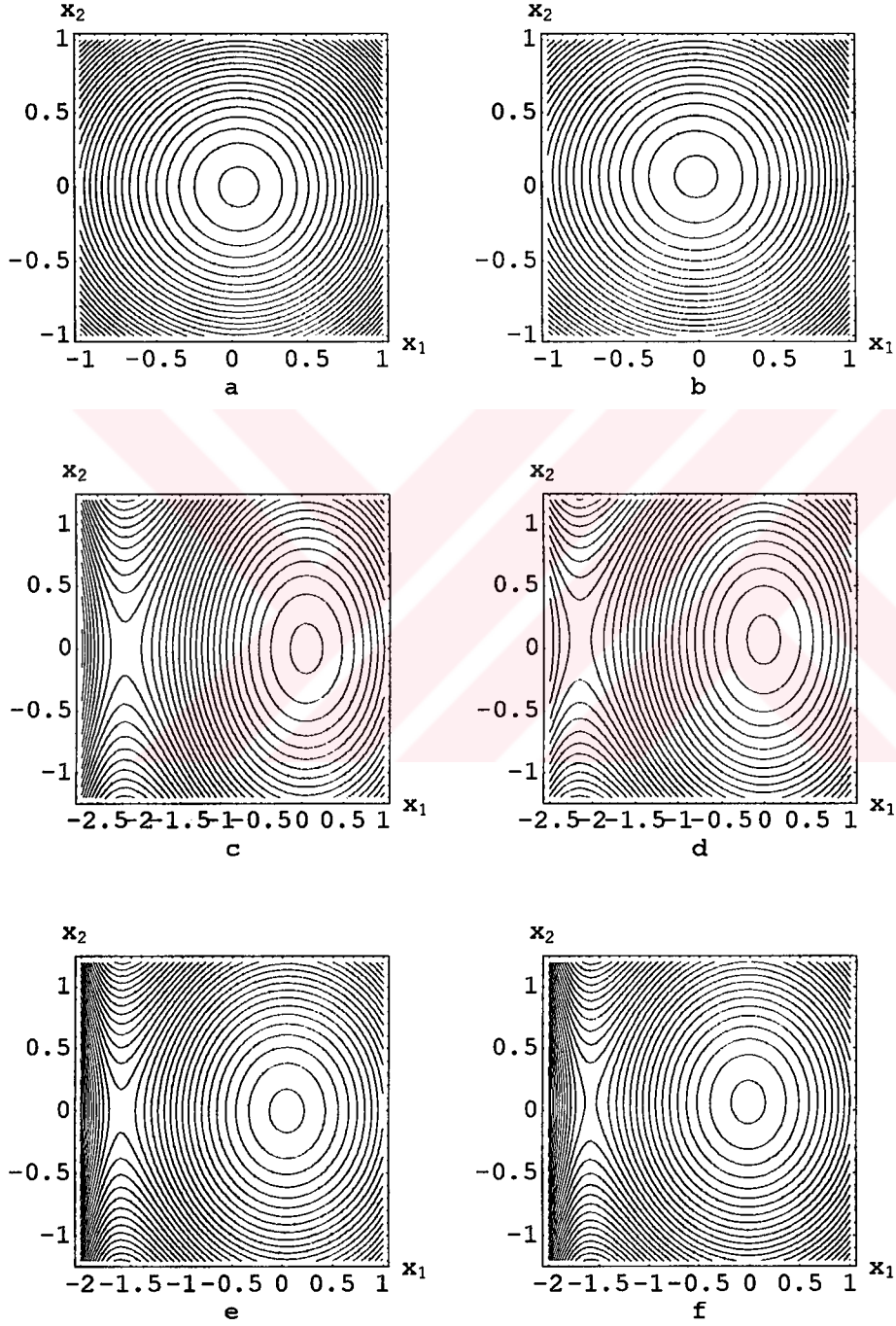


Şekil.3.2 $n =$ tek tamsayı için yaklaşık ilk integralin düzey eğrileri,
 $\gamma = 1, \epsilon = 0.3, t = \pi$ **a.** $n = 3, \omega = 1.7$, **b.** $n = 3, \omega = \sqrt{2}$, **c.** $n = 5, \omega = 0.7$, **d.** $n = 5,$
 $\omega = \sqrt{2}$, **e.** $n = 7, \omega = 0.7$, **f.** $n = 7, \omega = \sqrt{2}$

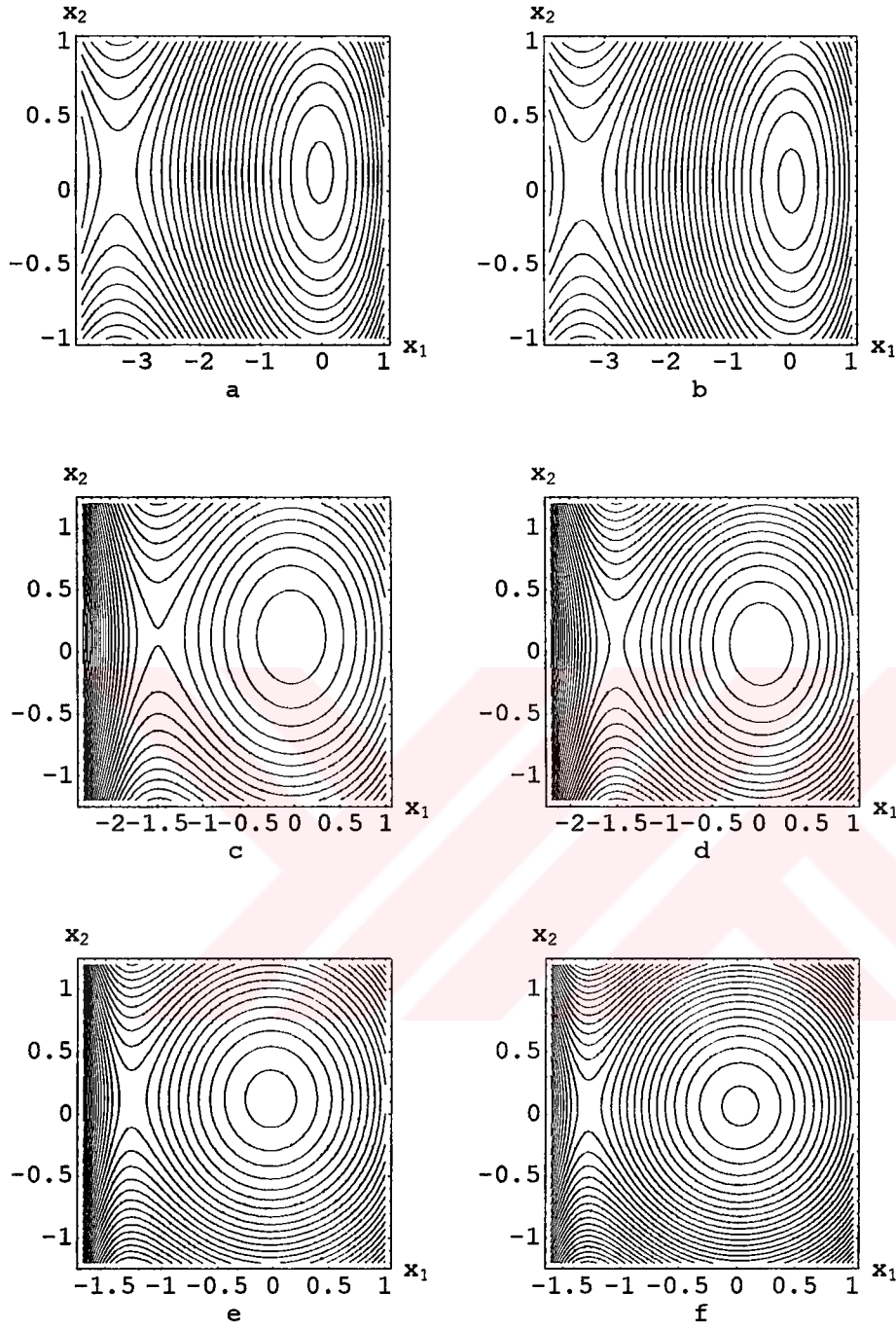
$n = \text{çift}$ için ise yaklaşık ilk integral,

$$I = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon \frac{x_1^{1+n}}{1+n} - \epsilon^2 \frac{\gamma}{\omega^2 - 1} (x_1 \cos \omega t - x_2 \omega \sin \omega t) \quad (3.20)$$

olarak kolayca hesaplanabilmektedir. $n = \text{çift}$ tamsayı için elde edilen yaklaşık ilk integralin (3.20) düzey eğrileride çizdirilmiştir (Şekil.3.3-4).



Şekil.3.3 $n = \text{çift}$ tamsayı için yaklaşık ilk integralin düzey eğrileri, $\omega = \sqrt{2}$, $\gamma = 5$, $\epsilon = 0.1$ a. $n = 2$, $t = 0$, b. $n = 2$, $t = \pi$, c. $n = 4$, $t = 0$, d. $n = 4$, $t = \pi$, e. $n = 6$, $t = 0$, f. $n = 6$, $t = \pi$



Şekil.3.4 $n =$ çift tamsayı için yaklaşık ilk integralin düzey eğrileri, $\gamma = 1$, $\epsilon = 0.1$, $t = \pi$ **a.** $n = 2$, $\omega = \sqrt{2}$, **b.** $n = 2$, $\omega = 1.7$, **c.** $n = 4$, $\omega = \sqrt{2}$, **d.** $n = 4$, $\omega = 1.7$, **e.** $n = 6$, $\omega = \sqrt{2}$, **f.** $n = 6$, $\omega = 1.7$

Şekil.3.1-4' de görülen periyodik yörüngeler, çözümlerinde periyodik olduğunu göstermektedir. Burada ilk göze çarpan, düzey eğrilerinin yapısının, n değerinin tek veya çift olmasına göre değişmesidir. n değerinin büyüklüğünün bu değişimde çok fazla bir etkisi yoktur. Eğer n tek ise, (3.19) denkleminin düzey eğrileri, periyodik çözümlerin eş merkezli çemberlerini kapsayan bir heteroklinik manifoldun [4] varlığını

göstermektedir (Şekil.3.1-2). n 'in çift tamsayı olma durumunda ise, (3.20) yaklaşık ilk integralinin düzey eğrilerinde, periyodik çözümlerin eş merkezli çemberlerini kapsayan homoklinik bir manifoldla [4] karşılaşmaktadır (Şekil.3.3-4). n değerinin büyüklüğü ise, her iki durumda da yani n tek veya çift tamsayı olması durumunda, bu homoklinik ve heteroklinik yörüngelerin daha küçük bir bölgede görülmesini sağlamaktadır. Büyük n değerlerinde, eğer (saddle) noktaları orijine biraz daha yaklaşmaktadır. ϵ parametresinde ki artımda benzer etkiye neden olmaktadır. Ancak burada düzey eğrilerinin doğasından dolayı bu eğer noktaları tam olarak görülememektedir.

3.2.1. Karakteristikler Yöntemiyle Elde Edilen Çözüm için İlk İntegralin Bulunması

1. Bölüm' de elde edilen, keyfi fonksiyonlar içeren (1.24-27) çözümlerinden de ilk integrali elde etmek mümkündür. Bu çözümler aşağıdaki denklemde kullanılırsa,

$$dI = G_1 dz_1 + G_2 dz_2$$

$$\begin{aligned} G_1 &= -(\bar{\eta}_0^2 + \epsilon \bar{\eta}_1^2 + \epsilon^2 \bar{\eta}_2^2) \quad \text{ve} \quad G_2 = \bar{\eta}_0^1 + \epsilon \bar{\eta}_1^1 + \epsilon^2 \bar{\eta}_2^1 \\ I_1 &= \int G_1 dz_1 = e^{\lambda_2 t} \left(\left(\frac{\partial F_2}{\partial C_1} z_1^2 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\partial F_2}{\partial C_2} z_2 z_1 e^{-\lambda_2 t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \left(\frac{\partial F_4}{\partial C_1} z_1^2 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\partial F_4}{\partial C_2} z_2 z_1 e^{-\lambda_2 t} + \int e^{\lambda_2 t} K_2 dz_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

elde edilir. Yine 1. Bölüm' de hesaplanan tamlik koşulundan elde edilen kısıtlamalar (3.21) denkleminde kullanıldığında,

$$\frac{dI_1}{dz_2} = e^{\lambda_2 t} \left(\frac{\partial F_2}{\partial C_2} e^{-\lambda_2 t} + \epsilon \left(\frac{\partial F_4}{\partial C_2} z_1 e^{-\lambda_2 t} \right) \right) - e^{\lambda_1 K_1} \quad (3.22)$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int (G_2 - \frac{dI_1}{dz_2}) dz_2 = e^{\lambda_1 t} \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial C_1} z_1 z_2 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\partial F_1}{\partial C_2} z_2^2 e^{-\lambda_2 t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon \left(\frac{\partial F_3}{\partial C_1} z_1 z_2 e^{-\lambda_1 t} + \frac{\partial F_3}{\partial C_2} z_2^2 e^{-\lambda_2 t} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

bulunur. İlk integral ise,

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \frac{\partial F_2}{\partial C_1} z_1^2 + e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \frac{\partial F_1}{\partial C_2} z_2^2 + \\ &\quad + \epsilon \left(\frac{\partial F_4}{\partial C_1} z_1^2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \frac{\partial F_3}{\partial C_2} z_2^2 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi yaklaşık ilk integral karakteristikler yöntemiyle bulunan çözümlerle ifade edildiğinde, keyfi fonksiyonlara bağlı olarak elde edilebilmektedir.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, tek serbestlik dereceli, zorlamalı, sönümlü aşağıdaki dinamik sistemle;

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \dot{x}_2 = -x_1 - \epsilon x_1^n + \epsilon^2(\gamma \cos \omega t - \delta x_2), \quad 0 < \epsilon < 1\end{aligned}$$

modellenebilen salıncılara, 2. mertebe yaklaşık simetri analizi uygulanarak, incelenen dinamik sistemin yaklaşık ilk integralleri elde edilmiştir. 2. mertebe yaklaşık simetrilerin hesaplanmasında kullanılan yöntem, Baikov, Gazizov ve Ibragimov' un, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin yaklaşık simetri analizi ile bulunması için geliştirdikleri yöntemin [5] modifiye edilmiş bir versiyonudur [7]. Yaklaşık ilk integraller, 2. mertebe yaklaşık simetrilere, Hamilton sistemleri için yaklaşık Noether Teoremi kullanılarak [7] elde edilmiştir. Hesaplanan bu yaklaşık ilk integrallerin düzey eğrileri Mathematica.3.01' de çizdirilerek sonuçlar tartışılmıştır. Bu düzey eğrileri incelenen dinamik sistemin periyodik çözümlerinin olduğunu göstermektedir. Ayrıca, bu düzey eğrilerinin yapısının, özellikle n parametresinin tek veya çift tamsayı değerlerine göre değiştiği gözlenmiştir. Eğer n tek tamsayı ise, dinamik sistemin düzey eğrileri, periyodik çözümlerin eş merkezli çemberlerini kapsayan bir heteroklinik manifoldun [4] varlığını göstermektedir. n 'in çift tamsayı olma durumunda ise, yaklaşık ilk integralin düzey eğrilerinde, periyodik çözümlerin eş merkezli çemberlerini kapsayan homoklinik bir manifoldla [4] karşılaşmaktadır. n değerinin ve ϵ parametresinin büyük değerlerinde ise, bu homoklinik ve heteroklinik yörüngeler daha küçük bir bölgede görülmektedirler yani büyük n ve ϵ değerlerinde, eğer (saddle) noktaları orijine biraz daha yaklaşmaktadır. Ancak düzey eğrilerinin özelliğinden dolayı bu eğer noktaları şekillerde görülememektedir.

Burada incelenen dinamik sistem diğer perturbasyon yöntemleriyle de sayısal olarak çözümlenerek sonuçlar karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Rubio, M. A., Torre, M. and Antoranz, J.C., 1989. *Physica D*, **36**, 92-108.
- [2] Thompson, J.N.T., Rainey, R.C.T. and Soliman, M.S., 1992. Phil. Trans. R. Soc. London A, 838, 471-490, London.
- [3] Bikdash, M., Balanchandran, B. and Nayfeh, A., 1994. Melnikov Analysis for a ship with a general Roll-Damping Model, *Nonlinear Dynamics*, **6**, 101-124.
- [4] Wiggins, S., 1990. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, Springer-Verlag, New York.
- [5] Baikov, V. A., Gazizov, R. K. and Ibragimov, N. H., Perturbation methods in group analysis, 1991. *Itogi Nauki Tekhniki, Ser. Sovremennye Problemy Matematiki*, **34**, 85, Moscow. (İngilizce çevirisi *Journal of Soviet Mathematics*, **55.1**, 1450).
- [6] Baikov, V. A., Gazizov, R.K. and Ibragimov, N. H., 1989. Approximate symmetries, *Mat. Sb.*, **136** (3), 435. (İngilizce çevirisi *Math. U.S.S.R. sb.*, **64** (2), 427).
- [7] Ünal, G., 1999. Approximate generalized symmetries, normal forms and approximate first integrals, *Physics Letters A*, (kabul edildi).
- [8] Ünal, G., 1999. Periodic solutions and approximate symmetries, *Nonlinear Dynamics*, (kabul edildi).
- [9] Anderson, R. L. and Ibragimov, N. H., 1979. Lie-Bäcklund transformations in applications, *SIAM Studies in Appl. math.*, vol. 1. SIAM, Philadelphia.
- [10] Govinder, K.S., Heil, T.G. and Uzer, T., 1998. Approximate Noether symmetries, *Physics Letters A*, **240**, 127-131.
- [11] Sarlet, W. and Cantrijn, F., 1981. Generalization of Noether's Theorem in classical mechanics, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **23**(4), 467-494.
- [12] Westenholtz, C., 1981. Differential forms in mathematical physics, North-Holland Pub. Co.
- [13] Wolfram, S., 1991. Mathematica: A system for doing mathematics by computer, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York.

EK-1

C_0^{31} IN KATSAYISININ İNCELENMESİ

```
CC[n_, j_] := -2 (n - j) / (n - 2 j + 1) - n / (-n + 2 j + 1) +
  (n - j) / (n - 2 j - 1) - j / (n - 2 j + 3)
```

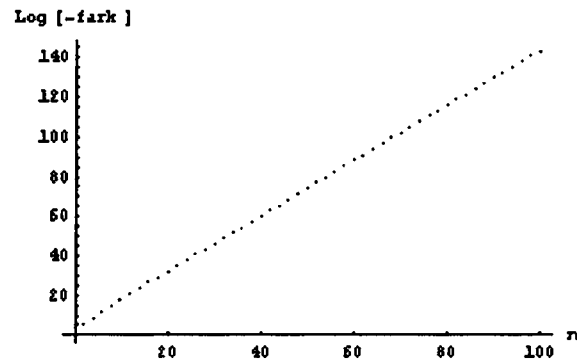
```
K[n_] := 4 n (n - 1) / ((n - 3) (n + 1)) +
  Sum[n! (n - 1)! / ((j - 1)! (n - j)! ^2 j!) (n - 1) CC[n, j],
    {j, 1, n - 1}]
```

```
fark = K[n + 2] - K[n];
```

```
list = Table[{nn, fark /. n -> nn}, {nn, 2, 100, 2}];
```

```
lis1 = Table[{list[[i, 1]], N[Log[-list[[i, 2]]]]},
  {i, 1, Length[list]}];
```

```
ListPlot[lis1, PlotJoined -> False,
  AxesLabel -> {"n", "Log[-fark]"}]
```



Şekil.E.1 C_0^{31} için rezonans terimlerinin farkı

EK – 2

C_0^{41} IN KATSAYISININ İNCELENMESİ

```
CC[n_, j_] := -n / (n - 2 j + 3) - n (j + 1) / ((-n + 2 j - 1) j) +
  j / (n - 2 j + 3) + (n - j) (j + 1) / (j (n - 2 j + 1)) -
  (j - 1) (n - j + 1) / ((n - j + 1) (n - 2 j + 5)) -
  (n - j) / (n - 2 j + 3)
```

```
DD[n_] := -n^2 / (n - 1) - n / (n - 1) + n^2 / (n - 5) - n / (n - 5)
```

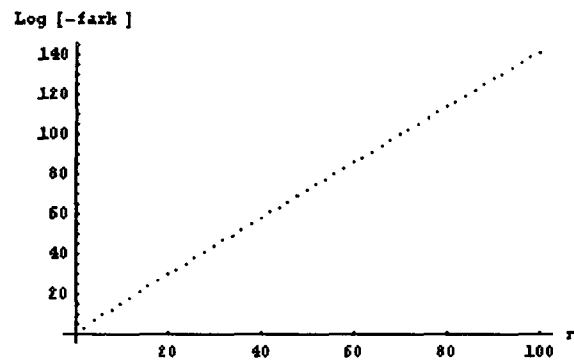
```
K[n_] :=
  1 / 4 ((n - 1) DD[n] + Sum[(n - 1) ! / ((j - 2) ! (n + 1 - j) !)
    n ! / ((n - j) ! (j - 1) !) CC[n, j],
    {j, 2, n - 1}])
```

```
fark = K[n + 2] - K[n];
```

```
list = Table[{nn, fark /. n -> nn}, {nn, 2, 100, 2}];
```

```
lis1 = Table[{list[[1, 1]], N[Log[-list[[1, 2]]]]},
  {i, 1, Length[list]}];
```

```
ListPlot[lis1, PlotJoined -> False,
  AxesLabel -> {"n", "Log[-fark]"}]
```



Şekil.E.2 C_0^{41} için rezonans terimlerinin farkı

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet KIRIŞ, 1971 yılında Kastamonu' da doğmuş lise öğrenimini Aydın Söke Ziraat Teknik Lisesinde yapmıştır. 1990 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümüne girmiş ve bir yıl İngilizce hazırlık öğrenimiyle birlikte 1996 kış döneminde mezun olmuştur. 1996 yılında başladığı yüksek lisans öğrenimini İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı Mekanik programında sürdürmektedir. 1996 yılında İTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Mühendislik Bilimleri Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başlamış ve halen aynı görevdedir.

