

**HASSAS HAREKET SİSTEMLERİNDE SÜRTÜNME
ETKİSİNİN MODELLENMESİ VE
KOMPANZASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat AKSAKAL

497Y630

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Ocak 2000

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 2000

101048

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Hakan TEMELTAŞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahmet KUZUCU (İ.T.Ü.)

Doç. Dr. Metin GÖKAŞAN (İ.T.Ü.)

ŞUBAT 2000

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında ilgi ve değerli katkılarından dolayı başta tez danışmanım Sayın Hakan Temeltaş olmak üzere yazım sırasında yardımlarından dolayı kardeşim Zeynep Aksakal ve arkadaşım Ahmet Karacay'a teşekkür ederim.

Şubat 2000

Murat AKSAKAL



İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2. TRİBOLOJİ	3
2.1. Sürtünmenin Fiziksel olarak Açıklanması	3
2.1.1. Kontak Topoğrafyası	3
2.1.2. Kurukayma Yüzeyli Ortamlarda Sürtünme Kuvveti	5
2.1.3. Yağlamalı Kontak Yüzeylerinde Sürtünme Kuvveti	8
2.1.3.1. Stribeck Eğrisinin Matematiksel Formu	9
2.2. Mekanik Sistemlerde Sürtünmeyle İlgili Gözlemlenen Olaylar	11
2.2.1. Stribeck Eğrisi	11
2.2.2. Artan Statik Sürtünme Kuvveti	11
2.2.3. Sürtünme Hafızası	12
2.2.4. Kayma Öncesi Hareket	12
3. SÜRTÜNME ETKİSİNİN MODELLENMESİ	14
3.1. Statik Sürtünme Modelleri	14
3.1.1. Klasik Sürtünme Modelleri	14
3.1.2. Karnopp Sürtünme Modeli	16
3.1.3. Armstrong Modeli veya Yedi Parametrelili Sürtünme Modeli	18
3.2. Dinamik Sürtünme Modelleri	19
3.2.1. Dahl Modeli	19
3.2.2. Bristle Modeli	21
3.2.3. Sıfırlamalı İntegratör Modeli	22
3.2.4. Bliman Sorine Modeli	23
3.2.5. LuGre Modeli	24
4. BLİMAN SORİNE MODELİ	27
4.1. Konum Domeninde Formülasyon	27

4.2. Hıza Bağlı Sürtünme Olayları	31
4.3. Fiziksel Olarak Açıklaması	31
4.4 Zaman Domeninde Formülasyon	33
4.5. Lineerleştirme	34
4.6 Simetrik Olmayan Sürtünme	36
4.7. Modellenen Sürtünme Olayları	36
4.8. Model Parametrelerinin Açıklanması	37
4.9. Simülasyonlar	41
5. LUGRE SÜRTÜNME MODELİ	46
5.1. Sürtünme Modelinin Açıklanması	46
5.2. Durum Uzayında Formülasyon	48
5.3. Lineerleştirme	52
5.4. Hıza Bağlı Sönüm Olayı	53
5.5. Asimetrik Sürtünme Parametreleri	54
5.6. Model Parametrelerinin Tesbiti	55
5.7. Modellenen Sürtünme Olayları	57
5.8. Simülasyonlar	58
6. SÜRTÜNMENİN GÖZLENMESİ VE KOMPANZASYONU	60
6.1. Hareket Kontrol Sistemlerinde Limit Çevrim Oluşumu	60
6.1.1. LuGre Sürtünme Modeli	62
6.1.2. Bliman Sorine Sürtünme Modeli	65
6.2. Gözleyici Tabanlı Sürtünme Kompanzasyonu	68
6.2.1. Sürtünme Kompanzasyonu	69
6.2.2. Sürtünme Kuvveti Gözlemleyicisi	70
6.2.3. Gözleyici Tabanlı Pozisyon Kontrolü	71
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	73
KAYNAKLAR	74
EKLER	77
ÖZGEÇMİŞ	99

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. Sürtünme Kuvveti ile hız arasındaki nonlinear kısmı ifade eden matematiksel formlar.....	11
Tablo 4.1. (s_e, f_s) noktası sabit tutularak farklı altı (s_p, f_k) noktası için model parametreleri tablosu.....	43
Tablo 5.1. Simülasyonlar için verilen nominal Lugre sürtünme model parametreleri.....	57
Tablo 6.1. Kapalı Çevrim Kutuplarını veren karakteristik değerler.....	78
Tablo 6.2. PID Parametreleri.....	78
Tablo 6.3. LuGre model parametreleri.....	79
Tablo 6.4. Bliman Sorine model tanım parametreleri	82
Tablo 6.5. Bliman Sorine asimetrik model parametreleri	82

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1	: Makroskobik Yüzey Topoğrafyası.....	4
Şekil 2.2	: Mikroskobik boyutlarda ki malzeme yüzeyi.....	4
Şekil 2.3	: Gerçek temas yüzeyinin görünümü.....	5
Şekil 2.4	: Çekilen bir M kütlesi üzerinde sürtünmenin gösterilişi.....	6
Şekil 2.5	: Malzemelerin Çekme-Gerilme karakteristik eğrisi.....	7
Şekil 2.6	: Yağlamalı yüzeylerde sürtünme kuvveti-kararlı hal hız eğrisi....	8
Şekil 2.7	: Statik sürtünme kuvveti.....	10
Şekil 2.8	: Geçişken Çekme kuvveti ile oluşsn kırılms (break away) kuvvetleri.....	12
Şekil 2.9	: Sürtünme Gecikmesi.....	13
Şekil 2.10	: Kayma öncesi hareket.....	13
Şekil 3.1	: Statik sürtünme modelleri.....	15
Şekil 3.2	: Karnopp sürtünme modeline göre sürtünme kuvveti hız eğrisi ...	17
Şekil 3.3	: Dahl modeli.....	20
Şekil 4.1	: Bliman Sorine sürtünme kuvvetinin mutlak pozisyona göre cevabı. (iki birinci dereceden sistemin toplamıyla oluşan).....	30
Şekil 4.2	: Histerisiz şeklinde (se,fs),(sp,fk) noktalarının gösterimi.....	32
Şekil 4.3	: Sinüs giriş torkuna karşılık oluşan histerisiz eğrisi.....	38
Şekil 4.4	: Bliman sorine modelinin altı farklı noktada ki değeri.....	39
Şekil 4.5	: Bliman sorine modelinin altı farklı noktada sistem yanıtı.....	39
Şekil A.1	: Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin sinüs hız girişine karşılık sürtünme kuvveti-zaman grafiği.....	77
Şekil A.2	: Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin sinüs hız girişine karşılık sürtünme kuvveti-pozisyon grafiği.....	77
Şekil A.3	: Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin düşük frekansa sinüs giriş hızına karşılık sürtünme kuvveti-zaman grafiği.....	78
Şekil A.4	: Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin(viskoz sürtünmesiz) sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık sürtünme kuvveti- zaman grafiği.....	78
Şekil A.5	: Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin(viskoz sürtünmesiz.) sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık sürtünme kuvveti- pozisyon grafiği.....	79
Şekil A.6	: Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık sürtünme kuvveti-zaman grafiği.....	79
Şekil A.7	: Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık $u(t) = 0.25+0.25\sin(\omega t)$ karşılık yanıtı.....	80
Şekil A.8	: Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık $u(t) = 0.1+0.1\sin(\omega t)$ karşılık yanıtı.....	80
Şekil A.9	: Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık sürtünme kuvveti-pozisyon grafiği....	81

Şekil A.10	: Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık $u(t) = 0.2\sin(wt)$ karşılık yanıtı.....	81
Şekil A.11	: Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık $u(t) = 0.5\sin(wt)$ karşılık yanıtı.....	82
Şekil A.12	: Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinüs tork girişine karşılık $u(t) = 0.1+0.1\sin(wt)$ karşılık sürtünme kuvveti-hız yanıtı.....	82
Şekil 5.1	: Temas eden iki yüzeyi gösteren temsili şekil.....	46
Şekil 5.2	: Pozisyona göre sürtünme kuvvetini gösteren (sınır değerleri arasında) LuGre sürtünme modeli yanıtı.....	50
Şekil 5.3	: Kırılma (Break away) bölgesinde LuGre modelinin hıza göre sürtünme modeli yanıtı.....	51
Şekil 5.4	: Sürtünme kuvveti-hız eğrisi.....	56
Şekil B.1	: Sinüs hız girişi için Lugre sürtünme modelinin zaman göre değişimi.....	83
Şekil B.2	: Sinüs hız girişi için Lugre sürtünme modelinin pozisyona göre değişimi.....	83
Şekil B.3	: Açısal hızları farklı sinüs hız girişleri için sürtünme kuvvetinin zamana göre değişimi.....	84
Şekil B.4	: Sinüs şeklinde giriş torkuna karşılık Lugre sürtünme modelinin zaman göre değişimi.....	84
Şekil B.5	: Sinüs şeklinde giriş torkuna karşılık Lugre sürtünme modelinin ($\sigma_0 \neq 0$ olduğunda) zaman göre değişimi.....	85
Şekil B.6	: Açısal hızları farklı sinüs hız girişleri için sürtünme kuvvetinin zamana göre değişimi.....	86
Şekil B.7	: Sinüs şeklinde giriş torkuna karşılık Lugre sürtünme modelinin ($\sigma_1 = 0$ olduğunda) zaman göre değişimi.....	86
Şekil B.8	: $u(t) = B+Asin(wt)$ şeklinde giriş torkuna karşın oluşan sistem yanıtları.($A = 0.1Nt.$, $B = 0.1Nt.$ ve $A = 0.3Nt.$, $B = 0.3Nt.$).....	87
Şekil B.9	: $u(t) = B+Asin(wt)$ şeklinde giriş torkuna karşın oluşan sistem yanıtları. ($A = 0$, $B = 0.2Nt.$ ve $A = 0$, $B = 0.3Nt.$).....	85
Şekil 6.1	: Deney düzeneğinin şematik gösterimi.....	60
Şekil 6.2.	: Simülasyonlarda kullanılacak blok dyagram.....	61
Şekil 6.3	: Lugre modeline göre limit çevrim oluşumu.....	63
Şekil 6.4	: Sürtünme kuvveti ile kontrol işaretinin birlikte gösterimi.....	64
Şekil 6.5	: LuGre sürtünme kuvvetinin hıza göre değişimi.....	64
Şekil 6.6	: Durum uzayında limit çevrim oluşumu.....	65
Şekil 6.7	: Bliman Sorine modeline göre yapılan kontrolde pozisyon işaretinde oluşan limit çevrim ve kontrol işaretinin ayrı ayrı gösterimi.....	66
Şekil 6.8	: Kontrol işareti ile sürtünme kuvvetinin birarada gösterimi.....	67
Şekil 6.9.	: Bliman Sorine sürtünme kuvvetinin hıza göre değişimi.....	67
Şekil 6.10	: Kayma öncesi hareket.....	68
Şekil 6.11	: Kontrol sistemine ait blok dyagram.....	70
Şekil C.1	: $\theta=1rad.$ referans girişi için kompanzasyonyapılmış sistem yanıtı	88
Şekil C.2	: Hata fonksiyonu.....	88
Şekil C.3	: Sürtünme Gözlemleyicisi çıkışı.....	89
Şekil C.4	: Gözlemleyici hatası.....	89

Şekil C.5	: Durum uzayında sistem yanıtı.....	90
Şekil D.1	: EMPS kapalı çevrim sistemine ait prensib blok şeması.....	91
Şekil D.2	: RTI işaret akış diyagramı.....	92
Şekil D.3	: EMPS sisteminin eşdeğer blok şeması.....	95
Şekil D.4	: Tabla ve Referans hızın birlikte gösterimi.....	97
Şekil D.5	: Referans pozisyon işareti.....	97
Şekil D.6	: Tabla pozisyonu.....	98



HASSAS HAREKET KONTROLÜNDE SÜRTÜNME ETKİSİNİN MODELLENMESİ VE KOMPANZASYONU

ÖZET

Hassas hareket kontrol sistemlerindeki amaç, verilen yörüngeyi büyük bir doğruluk ile izlenmesidir. Ancak makina elemanlarının birbiriyle temas eden yüzeylerinde her zaman harekete ters yönde oluşan bir sürtünme etkisi vardır, bu fiziksel olay istenen hareket yörüngesinin hassas bir şekilde takip edilmesinde başlıca engeldir. Yapılan çalışmada, bu olayın fiziksel olarak açıklanması ve sürtünmenin altında yer alan (topolojik) gerçekler üzerinde durularak, sürtünme etkisinin özellikle hızın sıfır olduğu bölgelerde ki çok dinamik bir özellik gösteren nonlineer karakteristiğinin matematiksel modellenmesi üzerinde durulmuştur. Sürtünmeyi en iyi tanımlayan modeller olarak bilinen (Lugre ve Bliman-Sorine) modeller üzerinde performans incelenmesi simülasyon ortamında gerçekleştirilmiştir. Matlab ortamında geliştirilen simülasyon sonuçlarından sürtünmeyi en iyi tanımlayan dinamik modelin LuGre olduğu gözlenmiştir. Fakat konu üzerinde yapılan başka bir doktora araştırmasında modelin önemli bir eksikliği tesbit edilmiştir, bu eksiklik deneysel olarak ve modelleme kullanılarak elde edilen hız geridönüş noktaları sonuçlarının tam olarak uyuşmamasıdır. Günümüzde LuGre nin yetersizliğinden dolayı yeni modelleme yapıları presach operatörü kullanılarak düşünülmektedir.

Tezde ayrıca Lugre modeli için tasarlanan bir gözleyici üzerinden sürtünme izlenerek kompanze edilmiştir. Oluşan lineerleşmiş sistem bir PID üzerinden kontrol edilerek istenen performans sağlanmıştır. Gelişen donanım elemanları sayesinde, simülasyon ortamında elde edilen sonuçlar pratikte geçerli olabileceği düşünülmüş ve yeni sistemler üzerinde uygulama tasarımlarına gidilmiştir.

DESIGN FRICTION EFFECTS AND COMPENSATION FOR PRECISE MOTION CONTROL SYSTEM

SUMMARY

The aim of precise motion control system is to follow a desired motion trajectory precisely. However, reacted force or torque, which resist to given motion trajectory, are always exist due to friction effect in contacting surfaces of mechanical parts in motion control system. This disturbs the precision considerably in cases of slow motion rates and velocity reversal. In this study, first, the physical effect of friction is defined and dynamic effects having highly non-linear characteristic around stick-slip region are modelled. Well known friction models such as Bliman-Sorin and Lugre models are used in order to observe model performance in simulation. We observe that the best description of the friction between these dynamic models is LuGre in Matlab/Simulink toolbox, but other successive works in the literature say LuGre model has a mistake structure, which is velocity reversal point. Experimental results do not verify modelling results. Today Lugre model is tried to modify by using Presiach hysteresis operator.

An observer is designed for LuGre unmeasurable state is used to estimate friction effects. This estimation rejects the real friction in mechanical system and it becomes linear system and so we success precise motion control by using a PID controller. We think that we will get same results in real time application and tried to implement it EMPS. We observe that there is a considerably error due to big friction value.

1.GİRİŞ VE ÇALIŞMANIN AMACI

Bu çalışmada hareket kontrol sistemlerinde sürtünme etkisinin ortadan kaldırılması, hassas konum kontrollerinin gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir. Bu hedefe ulaşmak için sürtünme etkisinin kapsamlı bir şekilde modellenmesi ve bu model kullanılarak oluşturulmuş bir sürtünme izleyicisiyle sürtünmenin mekanik sistemdeki etkisi yok edilerek lineerleşmiş plan sistemin bir PID kullanılarak kontrolünü sağlamaktır.

Hassas konum kontrolünde çok etkin bir şekilde performansı etkileyen olay mekanik parçalar arasında oluşan sürtünme etkisidir. Özellikle düşük hız bölgelerinde sürtünme etkisi çok dinamik bir karakteristik gösterir ve modellenmesi de oldukça güçtür. Hızın yön değiştirdiği bölge olarak tanımlanan bu nonlinear çalışma bölgesinde, stick-slip sürtünme etkisi kompanzasyonda ana problem olarak karşılaşılır.

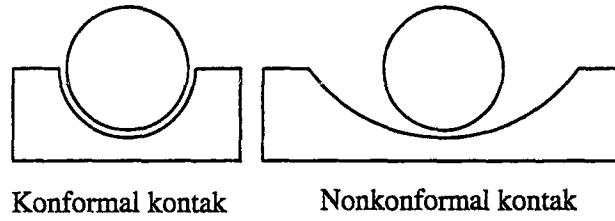
Yapılan çalışmalarda , özellikle düşük hız bölgelerinde sürtünme etkisinin dinamik özelliği, yağlama metodları veya uygun malzemeli yatak elemanlarının seçimi gibi mekanik iyileştirmelerle azaltılmış ancak tümüyle giderilememiştir ve bu problemin giderilmesi için kontrol mühendisliği çözümlerine ihtiyaç duyulmuştur [1-32]. Servo kontrol ile geliştirilen çözümler hem daha ekonomik hem de daha yüksek performans sağlamıştır.[3, 4, 8, 9, 17, 19, 26, 28 , 33, 34]

Tezin bölümleri kısaca özetlenecek olursa; İkinci bölüm de Triboloji başlığı altında sürtünmenin oluşumu ve mekanik sistemlerde ki sürtünmenin dinamik etkileri açıklanacak. Üçüncü bölümde Sürtünme Etkisinin Modellenmesi başlığı altında sürtünmenin günümüze kadar yapılmış modelleri arasından bazıları incelenecek bu inceleme modellerin statik ve dinamik modeller başlığı altında ayrı ayrı yapılacaktır. Dördüncü bölümde Bliman Sorine Sürtünme Modeli başlığı altında dinamik bir sürtünme modeli olan bu modelin detaylı analitik incelemeleri ve simülasyon ortamında model cevapları gösterilecektir. Beşinci bölümde LuGre sürtünme modeli

başlığı altında aynı şekilde dinamik sşrtşnme modelinin analitik incelemeği ve simşlasyon ortamında model yanıtları gşsterilecektir. Altıncı bşlşmde Sşrtşnmenin Gşzlemlenmesi ve Kompanzasyonu başlığı altında Bliman Sorine ve LuGre modellerine gşre oluşan limit çevrimler durum uzayında simşlasyonlarla gşsterilecek ve LuGre modeli kullanılarak oluşturulmuş bir Nonlinear gşzleyici ile sistemin kontrolş sağlanacaktır.

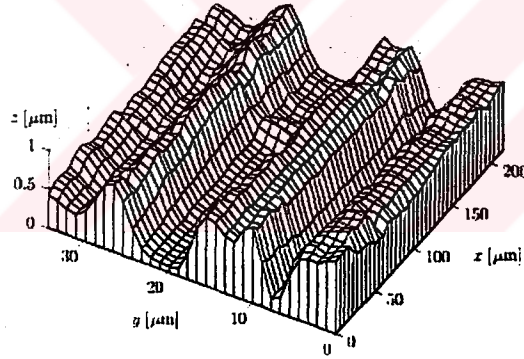


düşünülebilir. Makroskobik kontak yüzeyide konformal ve nonkonformal kontak olmak üzere Şekil 2.1. de ki gibi iki'ye ayrılır.



Şekil .2.1 Makroskobik yüzey topoğrafyası.

Şekil 2.1 de görüldüğü üzere konformal kontakda yüzeyler birbirini sarar, nonkonformal kontakta ise yüzeysel bir birleşme yoktur buradaki temas kısmı çizgisel veya noktasal bir bölge olarak düşünülebilir. İdeal bir durum olarak tasvir edilen nonkonformal kontak aslında kendi temas yüzeyini oluşturacak kadar diğer parça üzerinde konfor bir yüzey deforme etmiştir. Bu kabaca anlatılan heriki temas yüzeyi bütün makina sistemlerinde karşılaşılan bir durumdur.



Şekil 2.2 Mikroskobik boyutta ki malzeme yüzeyi.

Makroskobik boyutta gözlenen bu kontak yüzeyleri sürtünme kuvvetini açıklayabilmek için yeterli değildir. Mikroskop altında bu kontak yüzeyleri Şekil 2.2 de ki gibi görülür. Bütün mekanik sistemlerde ki temas yüzeyi düz veya prüssüz bir yapıya sahip değildir temsili olarak çizilen Şekil 2.3'e bakılacak olursa temas yüzeyi birçok irili ufaklı asperitlerden meydana geldiği görülür ve gerçek temas yüzeyi bu asperitler arasında meydana gelmektedir. Mühendislik materyallerinde asperitlerin temas yüzeyi eğimi $5 \cong 10$ derece arasında ve uzunluğu genellikle bir fikir vermek amacıyla 10^{-5} m.(çeliklerde) olarak verilebilir. Bu aşamadan, asperitler arasında ki sürtünme kuvvetini oluşturan gerçek temas

2. TRIBOLOJİ

Bütün mekanik sistemlerde birbiri üzerinde hareket eden makina elemanları (veya kısımları) vardır. Triboloji bu birbiriyle etkileşim halinde olan makina elemanlarının yüzey yapı karakteristikleri ve davranışlarıyla uğraşan bilim dalıdır. Triboloji biliminde kullanılan ve literatürde sıkça geçen popüler kelimeler malzeme yüzey topoğrafyası, sürtünme (birbiriyle temas eden iki yüzey arasında oluşan ve harekete teğet olan kuvvettir), yağlama (hareketli kısımlar arasında ki sürtünme kuvvetini düşürmek için kullanılan greas veya düşük vizkoziteli malzemeler) ve yüzey kaplamasıdır (sürtünme direncini küçültmek için hareket eden kısımlara yapılan işlem). Bu çalışmada sürtünmeli mekanizmalarda oluşan sürtünme olayları kontrol mühendisliği açısından gözönüne alınacaktır. Ayrıca Triboloji bize sürtünme kuvvetinin oluşum dinamiği dolayısıyla ileri ki bölümlerde açıklanacak modellerin anlaşılması ve yeni modellerin yorumlanması için bilinmesi gerekli olan temel kavramları verecektir.

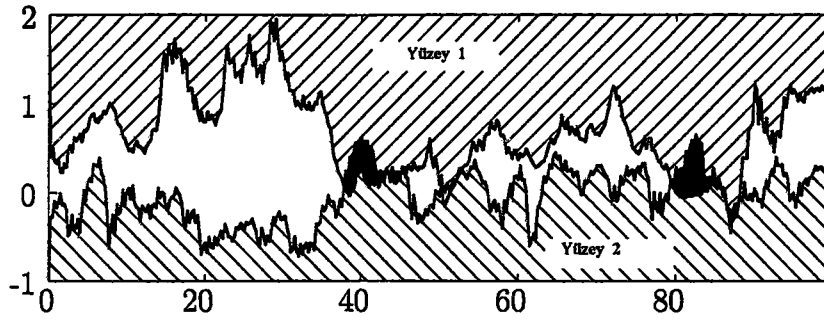
2.1 Sürtünmenin Fiziksel Olarak Açıklaması

Genel olarak sürtünmeyi yüzeyler arasında hareket sonucu oluşan, enerji yok edici (dissipative) ve harekete ters yönde bir reaksiyon kuvveti olarak tanımlarız. Klasik olarak yapılan bu tanımlama doğrudur fakat günümüzde geçerliliğini kısmen kaybetmiştir [11] ileriki bölümlerde bu daha açık bir şekilde görülecektir. Ayrıca bu tanımlamaya ek olarak sürtünme kuvvetini oluşturan sebepler üzerinde de durmakta fayda vardır. Bu sürtünmenin modellenmesi için oldukça önemli bir konudur ve yanıtı oldukça zordur. Biz yapacağımız model tanımlamalarında ana etkenler üzerinde duracağız oysa bu reaksiyon kuvveti (sürtünme) esas olarak birçok farklı fiziksel olayın birleşimi neticesidir örneğin, hareket esnasında birbirine temas eden yüzeylerin o anki sıcaklığı, yüzeylerin topoğrafik yapısı , malzemelerin karakteristik özellikleri, temas yüzeyi arasında bulunan kirletici maddeler veya yağlar ve temas yüzeylerinin birbirlerine göre hızları başlıca söylenebilir.

2.1.1 Kontak Topoğrafyası

Sürtünme olayı esasında mekanik parçalar arasında ki kontak yüzeyi ile ilgili olduğundan ilk önce kontak yüzeylerini yakın olarak incelemekte yarar vardır. Bu inceleme Makroskobik ve Mikroskobik olmak üzere iki ayrı kısım altında

yüzeyinin hesabı üzerinde durulacak kuru ve yağlamalı yüzeyler üzerinde sürtünme kuvvetinin oluşumu için önemli açıklamalara girilecektir.



Şekil 2.3 Gerçek temas yüzeyinin görünümü.

2.1.2 Kuru Kontak Yüzeyli Ortamlarda Sürtünme Kuvveti Oluşumu

Kuru kayma yüzeyli mekanik sistemlerde sürtünme kuvveti, kontak yüzeylerinde ki mikroskobik boyutlardaki yüzey pürüzlülüğünün (asperitlerin) elastik veya plastik bölgedeki davranışları neticesinde oluşan kuvvetler ile modellenir . Herbir yüzey pürüzü (asperit) normale etki eden yük kuvvetinin (F_N) bir kısmı olan F_t kadarını taşır. Herbir yüzey pürüzü birleşimde ki kontak alanı F_N yükünün bir kısmını taşıyacak kadar büyüyene kadar ki olaya elastik deformasyon dersek, herbir yüzey pürüzü birleşimde ki kontak alanı ;

$$A_i = \frac{F_i}{H} \quad (2.1)$$

olur. H temas halinde ki materyallerin en zayıf bölgesinin sertliğidir. Yaklaşık olarak toplam temas yüzeyi buradan,

$$A_R = \frac{F_N}{H} \quad (2.2)$$

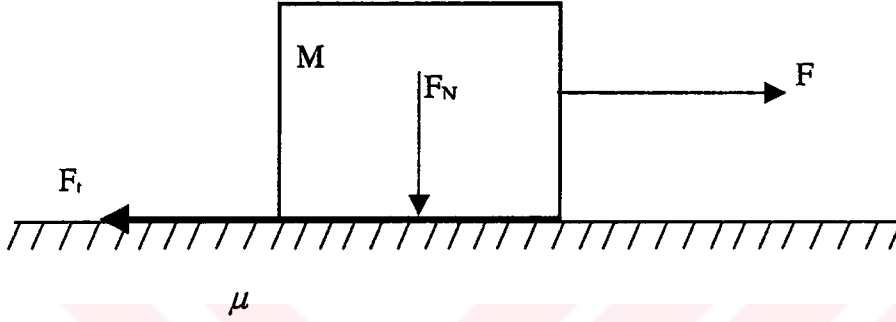
olarak yazılır. Herbir kontak yüzeyinde ki teğetsel deformasyon elastiktir ta ki uygulanan kuvvet, yüzey malzeme mukavemeti σ_y ' yi geçene kadar. Malzeme mukavemeti veya direnci σ_y geçildikten sonra plastik deformasyon dediğimiz olay gerçekleşir. Böylece sürtünme kuvveti ;

$$F_t = \sigma_y \times A_R \quad (2.3)$$

olur ve sürtünme çarpanı,

$$\mu = \frac{F_t}{F_N} = \frac{\sigma_y}{H} \quad (2.4)$$

olarak bulunur buradan sürtünme sabitinin hızı veya normal doğrultusunda ki yüke bağlı olmadığını görebiliriz. Böylelikle kontak yüzeylerine uygun bir materyal kaplanarak makina elemanlarının sürtünme karakteristikleriyle oynanabilir. Yuvarlanmalı sürtünme için sürtünme çarpanı normal doğrultusunda ki yük ile doğru orantılıdır $\mu \propto F_N^a$, $0.2 < a < 1.4$ [10].



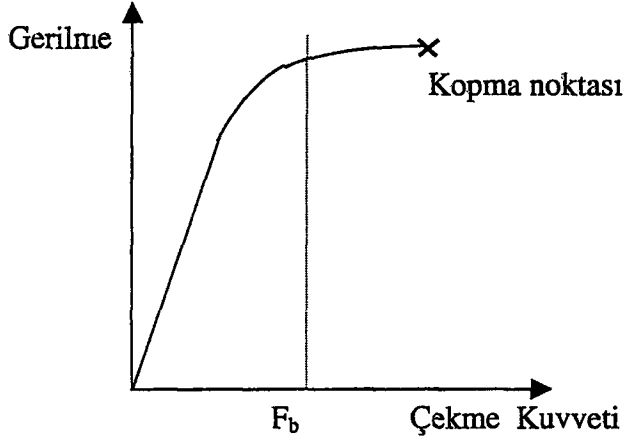
Şekil 2.4 Çekilen bir M kütlesi üzerinde sürtünmenin gösterilişi.

Bir başka açıdan sürtünme kuvveti yukarıda ki şekle göre yorumlanırsa çok küçük mikron düzeydeki hareketlerde oluşan teğetsel kuvvet, sürtünmenin tanımına uymayan elastik geri dönüşümlü bir özellik gösterir ve aşağıda ki gibi modellenebilir. ;

$$F_t(x) = -k_t x \quad (2.5)$$

k_t yüzey sertlik sabiti, yüzey pürüzü geometrisine , materyal elastisitesine ve uygulanan normal yüke bağlıdır x ise mikron düzeyindeki mutlak değer hareketi göstermektedir. Daha büyük çekme kuvveti ile M kütlesi çekilirse plastik geri dönüşümsüz deformasyon olur ve bu değerden daha büyük kuvvetlerde yüzey pürüzleri kopar. Şekil 2.5 'de Gerilme–Kuvvet karakteristiği bize malzemelerin dayanabileceği en büyük gerilim değerini göstermektedir.

Şekil 2.5 de görüleceği üzere çekme kuvveti yüzey pürüz birleşiminin dayanabileceği en büyük gerilme kuvvetinde büyükse birleşim kopar ve kayma dediğimiz hareket oluşur.



Şekil 2.5 Asperitlerin çekme kuvveti-gerilme karakteristik eğrisi.

Bu kuvvete ileride kopma noktası (Break away) kuvveti diyeceğiz F_b . x_b ' ye de kopma noktası pozisyonu denirse k_t yüzey sertlik sabitini ;

$$k_t = \frac{F_b}{x_b} \quad (2.6)$$

olarak buluruz.

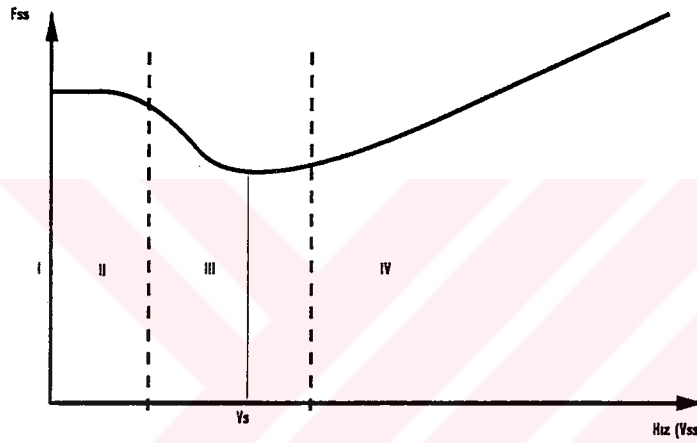
Kırılma kuvveti çelik malzemelerden oluşan birleşme yerinde $2-5 \mu\text{m}$. olduğu gözlenmiştir. Bu kayma öncesi hareketin ileride modellemelerde sıkça karşılaştığımız bir tanımdır.

Kırılma (breakaway) olayı olana kadar ki duruma sürtünme kuvvetinin durağan hal (stick) özelliği veya dinamik sürtünme kuvveti denmektedir. Burada önemli olarak şunu belirtebiliriz statik sürtünme bilim adamları tarafından gerçek bir sürtünme kuvveti olarak değerlendirilmemektedir. Durağan halden kayma bölgesine geçiş ve sonra ki sürtünme olayına statik sürtünme diyoruz. Kayma olayı başladığı zaman artık sürtünme kuvvetine şekil veren olay yüzeyler arasında ki yağlama veya diğer kirletici yabancı maddelerdir.

2.1.3 Yağlamalı Kontak Yüzeylerinde Sürtünme

Yüzeyler arasında yağlamanın olması kayma karakteristiğini veya sürtünme kuvvetinin değişimini etkiler. Yağlama hızla bağımlı olarak yüzeyler arasına ince bir yağ filmi oluşturur (akışkanların hidro-dinamik etkisinden dolayı).

Bu yüzyılın başlarında Stribeck adında rus asıllı alman bilim adamı aşağıda ki şekilde de gösterilen dört farklı bölgede sürtünme kuvveti-hız davranışını deneysel olarak gözlemledi. Bu sonuçlardan hızın düşük değerlerinde sürtünme kuvvetinin belli bir hız değerine kadar hızlı ve exponansiyel olarak düştüğünü ve bu noktadan sonra sürtünme kuvvetinin hızla doğru orantılı değiştiğini bulmuştur. Şekil 2.6



Şekil 2.6 Yağlamalı yüzeylerde kararlı hal sürtünme kuvveti – kararlı hal hız egrisi.

Şekil 2.6 da görüleceği üzere yağlamalı yüzeylerde dört farklı rejimden bahsedilebilir.;

I. Rejim Kayma öncesi hareket (Stick);

Bu bölümde ki dinamik olaylar kuru sürtünmeli yüzeylerde ki kopma (break away) sürtünme kuvvetinden önceki harekete çok benzer özellik gösterir sürtünmeyi oluşturan yüzey pürüzleri arasındaki elastik deformasyon gerilimidir. Eğer büyük miktarda bir hareket olursa yüzey pürüzleri arasında plastik deformasyon olur veya yüzey pürüzlerinin birbirini tutması söz konusu olmayacağından kayma başlar ve ikinci rejime geçilir.

II. Rejim Sınırsal yağlama (Boundary Lubrication) ;

Çok düşük hızlarda akışkan film tabakası tam olarak yüzeylerde oluşmadığından dolayı kısmen yüzey pürüzleri arasında temas olacaktır.

III. Rejim Kısmi yağlamalı yüzey (Partial Fluid Lubrication) ;

Bu rejim bölgesinde akışkan yağın vizkozitesinden dolayı temas yüzeyi arasında ince bir akışkan film tabakası oluşur fakat bu film tabakası kalınlığı yüzey pürüzlerinin büyüklüğünden daha küçüktür. Normal doğrultusunda ki yükün belli bir kısmı bu akışkan film tabakası tarafından diğer kısmı ise yüzey pürüzlerinin elastik ve plastik deformasyonları sırasında oluşan gerilim tarafından taşınır. Hız arttığı zaman , film kalınlığı artar ve teğetsel sürtünme kuvveti düşer çünkü akışkan film tabakası ile yüzey pürüzleri arasındaki direnç kuvveti , yüzey pürüzlerinin kendi aralarında ki direnç kuvvetinden daha düşük olduğundan dolayı böyle bir geçiş oluşur. Bu olaya aynı zamanda *Stribeck* eğriside denir.

IV. Rejim Tam Yağlama ;

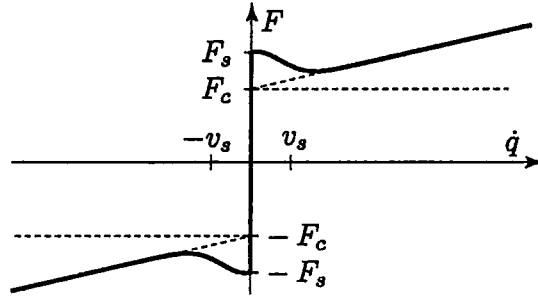
Bu bölümde akışkan film kalınlığı yüzey pürüzlerinin büyüklüğünden daha fazla olduğundan sürtünme kuvveti hidrodinamik gözönünde bulundurularak söylenebilir. Vizkoz sürtünme hızla artar çünkü akışkan film tabakasının, karşı direnç kuvveti, kayma hızıyla doğru orantılıdır.

2.1.3.1 Stribeck Eğrisinin Matematiksel Formu

Mekanik bir sistemin hız sürtünme kuvveti grafiği deneysel olarak elde edilmesinden sonra mekanik sistemlerin kontrol kararlılığı ve izleme performansı (tracking) analizini yapmak için bu karakteristik özelliğin matematiksel olarak ifade edilmesi gerekir bununla ilgili farklı formülasyonlar ve referanslar [21] numaralı yayından temin edilebilir. Hız ve sürtünme kuvveti arasında kararlı hal karakteristikleri için genel ifade aşağıda ki gibi verilebilir.

$$F(\dot{x}) = \sigma_2 \dot{x} + \sigma_0 g(\dot{x}) \operatorname{sgn} \dot{x} \quad (2.7)$$

burada ki semboller ; $\dot{x}$, kayma hızını ; σ_2 , vizkoz sürtünme çarpanını, $\sigma_0 g(\dot{x})$ ise hız-sürtünme kuvveti karakteristiğinin nonlinear kısmını tanımlamaktadır. Bu kararlı hal karakteristiği Şekil 2.7 'de görülmektedir.



Şekil 2.7 Statik sürtünme kuvveti.

Aşağıda ki tabloda $\sigma_0 g(x)$ için literatürde verilen bazı matematiksel formüller bulunmaktadır.

Tablo 2.1 Sürtünme kuvveti ile hız arasında ki nonlinear kısmı ifade eden matematiksel ifadeler.

Türü	Nonlinear $\sigma_0 g(x)$
Linear	F_c
Piecewise Linear	$F_s - \text{sat}(R \dot{x} , F_s - F_c)$
Exponential	$F_c + (F_s - F_c)e^{- \dot{x} /v_s}$
Gaussian	$F_c + (F_s - F_c)e^{-\left(\dot{x}/v_s\right)^2}$
Generalized Exponential	$F_c + (F_s - F_c)e^{-\alpha \dot{x} ^\delta}$
Laurentzian	$F_c + (F_s - F_c)\frac{1}{1 + (\dot{x}/v_s)^2}$

Burada ki tablodan seçilen bir model deneysel verilerle iyi örtüşecek şekilde olmalıdır.

2.2 Mekanik Sistemlerde Sürtünmeyle İlgili Gözlenen Olaylar

Aşağıda açıklanacak olan sürtünme olayları fiziksel olarak açıklanmadan önce deneysel olarak gözlenmiştir. Birçok uygulamalarda bu olayların arkasında yer alan fiziksel kavramları bilmek gerekmiyordu fakat bu olayları içine alan bir sürtünme modeli ihtiyacı vardı.(kontrol mühendisliği açısından bakılarak olayın değerlendirilmesidir)Yağlamalı makinalarada gözlenen ve statik modellerle açıklanamayan bu dört sürtünme olayı sırasıyla aşağıda ki gibi verilmektedir.

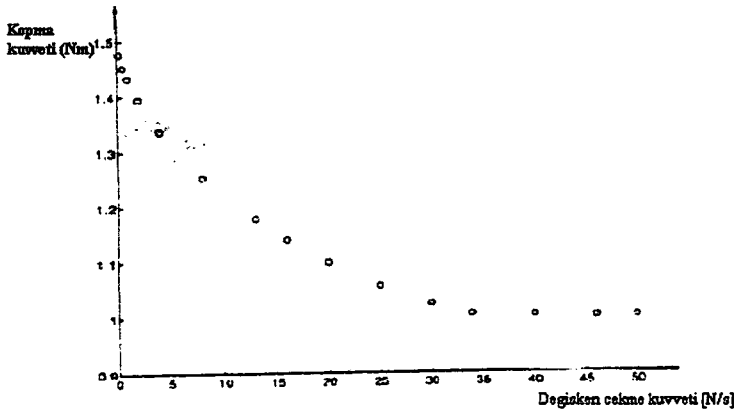
1. Stribeck sürtünmesi (Stribeck curve)
2. Artan statik sürtünme (Rising static friction)
3. Sürtünme Gecikmesi (Frictional lag)
4. Kayma öncesi hareket (Presliding displacement)

2.2.1 Stribeck Eğrisi

Stribeck tarafından deneysel olarak bulunan kararlı hal hız-sürtünme kuvveti eğrisinin negatif eğimli olan bölgesidir. Bu bölgede ki hareketin nasıl oluştuğu önceki konularda verilmişti. Düşük hızlarda gözüken bu karakteristik eğri (bazı yağlamasız yüzeylerde de gözüken) Şekil 2.6 da gözükmemektedir. Bu negatif eğimli kısım durma-kayma (stick-slip) olayının oluşmasına neden olan önemli bir bölgedir. Sürtünmenin dinamik etkisinden dolayı bir anlık sürtünme kuvveti basit olarak kayma hızının bir anlık değerinin bir fonksiyonu değildir fakat kararlı hızlarda kararlı sürtünme kuvveti gözlemlendiğinden dolayı sürtünme kuvveti kararlı hal hızının bir fonksiyonu olarak Şekil 2.6'da ki eğri gibi verilir.

2.2.2 Artan Statik Sürtünme Kuvveti

Durgunluktan harekete geçerken gerekli olan kuvvet, yani kopma (break away veya stiction) kuvveti uygulanan çekme kuvvetinin değişimine göre farklı değerler gösterir [2]. Artan sürtünme kuvvetinin altında yeralan fizik bir önceki konuda izah edildiği gibi açıklanabilir ve deneysel sonuçlar tribology literatüründen bulunabilir . Artan durgunluk sürtünmesi durma-kayma (stick slip) hareketinin oluşmasını sağlayan bir olaydır ve uygulanan çekme kuvvetinin değişiminin bir fonksiyonudur.Şekil 2.8



Şekil 2.8 Değişken çekme kuvveti ile oluşan kopma (breakaway) kuvvetleri.

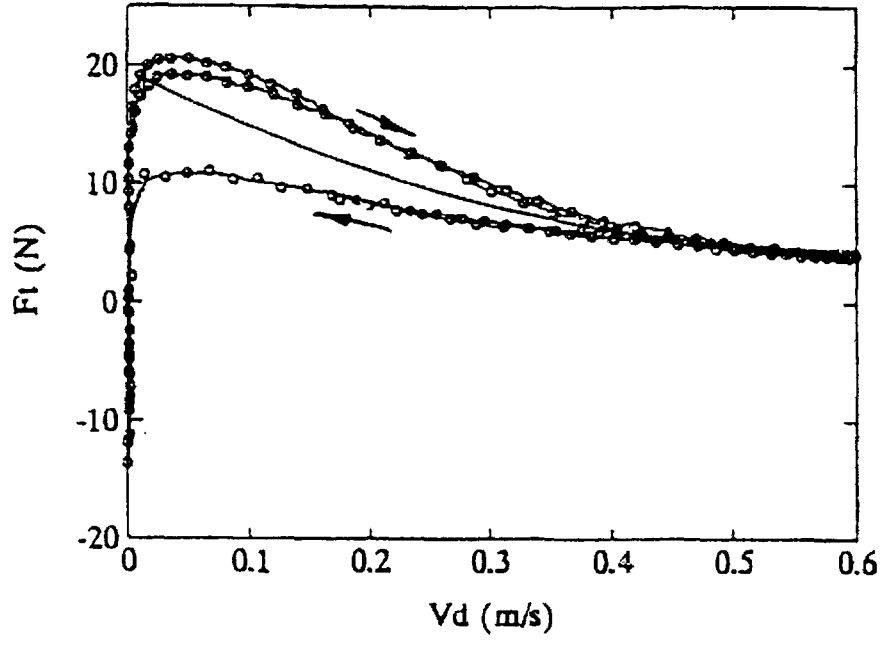
2.2.3 Sürtünme Hafızası

Sürtünme hafızası hızın ve normal doğrultusunda ki yük kuvvetinin değişimi sırasında gözlenen bir gecikme olayıdır ve eşdeğer olarak sürtünme kuvvetinde ki değişimdir. Bu olay en açık bir şekilde kısmi yüzey yağlamalı kontak yüzeylerinde oluşan sürtünme kuvveti – hız karakteristiklerinde deneysel olarak gözlenmiştir ve endüstride ki birçok mekanik sistem kısmi yağlamalı kontak yüzeyinden oluşmaktadır. Sonuç olarak anlık sürtünme kuvveti , anlık hız ve yükün aldığı değerin yanında kayma hızının ve yükünün önceki aldığı değerlerinede bağlı olan bir fonksiyondur Şekil 2.9 deneysel olarak ölçülen sürtünme kuvvetinin değerinin o anki hızı karşı düşen grafiği gösterilmektedir.[1]

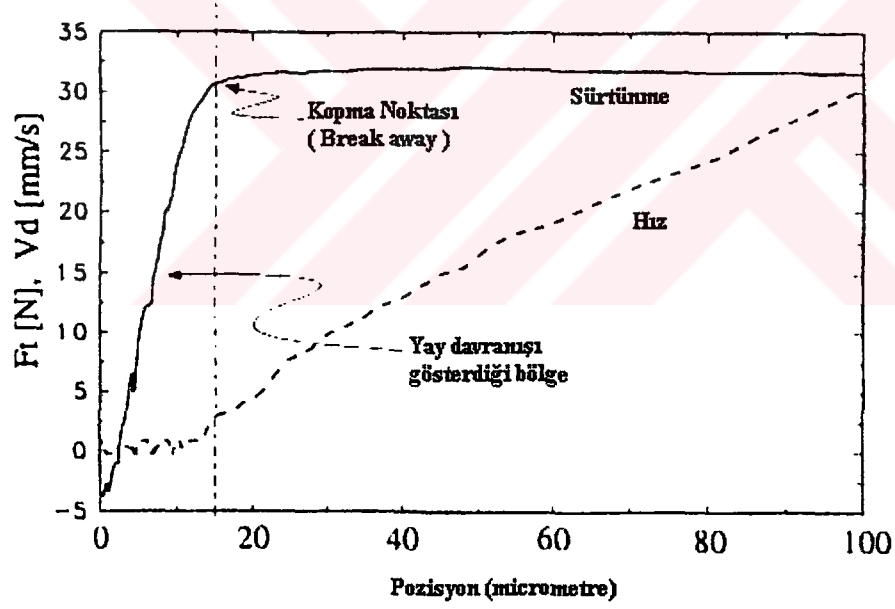
Başka bir şekilde yorumlanacak olursa; ivmelenme boyunca sürtünme kuvvetinin değeri yavaşlama boyunca karşılaşılan değerinden daha büyüktür bu olay Şekil 2.9 hysterezis şeklinde görülmektedir.

2.2.4 Kayma Öncesi Hareket

Bu olay gerçek kayma hareketi oluşmadan önce gözüken mikron mertebesinde ki hareketlere denmektedir. Kontak yüzeylerinde ki yüzey püzlerinin elastik veya plastik deformasyonu sonucu ortaya çıkan bir harekettir Şekil 2.10 da açık bir şekilde gösterilmektedir. Makina elemanlarında ki kayma öncesi hareket çelik konstrüksiyonlarda 1 ila 5 mikron civarında olduğu deneylerle gözlenmiştir.



Şekil 2.9 Sürtünme gecikmesi.



Şekil 2.10 Kayma öncesi hareket.

3. SÜRTÜNME ETKİSİNİN MODELLENMESİ

Aslında günümüze kadar yapılan modelleme çalışmalarını statik ve dinamik sürtünme modelleri olmak üzere iki ana kısma ayırmak mümkündür. Statik modeller, Sürtünme kuvveti - Kararlı hal hızı arasında oluşturulmuş statik fonksiyonlardır. Gözlemlenmiş sürtünme etkilerini modelleyemedikleri (Bölüm 2.2) için dinamik bir model yapısına ihtiyaç duyulmuş ve ilk olarak 1976' da Dahl tarafından dinamik sürtünme modelleri geliştirilmeye başlanmıştır.

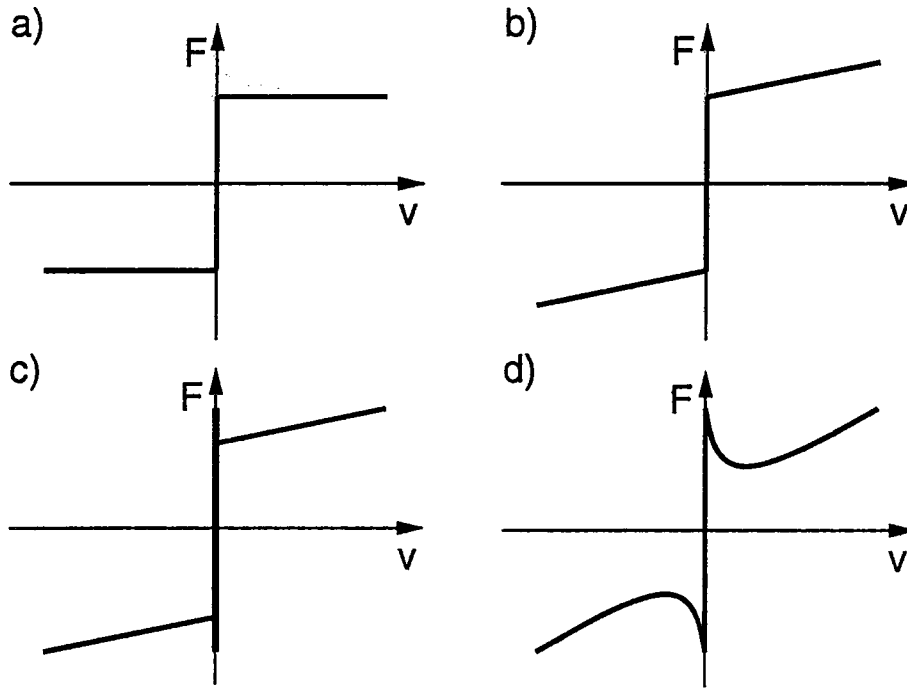
3.1 Statik Sürtünme Modelleri

En yaygın bir şekilde kullanılan statik sürtünme modelleri hakkında bilgi vermek gerekirse,

3.1.1 Klasik Sürtünme Modelleri

Sürtünmenin klasik modelleri bir ve birden fazla sürtünme bileşenini içine alan bir yapıdır. Bu bileşenlerden herbiri sürtünme kuvvetini farklı bir açıdan modellemektedir. Sürtünmenin bilinen en temel özelliği harekete ters yönde olmasıdır oysa ki mikroskobik boyutlarda yapılan çalışmalardan sürtünmenin her zaman harekete ters yönde olmadığı kayma öncesi hareket denen çok küçük hareket bölgesinde hareketi destekleyici yönde olduğu görülmüştür (Bölüm 2.2.4). Burada bilim adamlarının hareketin olmadığı durağan bölgede oluşan reaksiyon kuvvetinin gerçek bir sürtünme kuvveti olduğu üzerinde tartışmaları olmaktadır ki sürtünme kuvveti enerjiyi absorbe etme gibi bir özelliği vardır fakat bu bölgede ki hareketde asperitlerin esnemesi neticesinde enerji depolanması olmaktadır. Buda sürtünme kuvvetinin enerji yokedicisi (dissipative) olma özelliğine ters bir özelliktir[11]. Statik sürtünme modelleri bu olaya duyarsız kaldığından dinamik sürtünme modeli gerekliliği için önemli bir sebep oluşturmaktadır. Klasik manada sürtünme kuvveti, kontak yüzeylerinde ki hızdan bağımsız olarak aşağıda verilen eşitlikten bulunurdu.

$$F = F_c \operatorname{sgn}(v) \quad (3.1)$$



Şekil 3.1 Statik sürtünme modelleri . Sürtünme kuvveti hızın statik fonksiyonuna bağlı olarak ($V=0$ hariç) a) *Coulomb* sürtünmesi ; b) *Coulomb + Vizkoz* sürtünme ; c) *Stiction+Coulomb +Vizkoz* sürtünme d) *Stiction+Coulomb+Vizkoz* ve *Stribeck* eğrisi tarafından tanımlanan statik sürtünme kuvveti – hız ilişkisi.

Deneyssel verilere uyan basit formülasyon, hızla nonlinear bir değişim gösteren aşağıda ki tür bir eşitlikle sağlanmıştır.

$$F = F_v |v|^{\delta v} \text{sgn}(v) \quad (3.3)$$

δv yüzey parametresine göre değişen üssel faktördür. Durağan haldeki sürtünme kuvveti *Coulomb* sürtünme kuvveti değerinden daha büyüktür ve hıza bağlı olan lineer bir fonksiyonla tanımlanamaz. Statik sürtünme modellerinin hızın sıfırdaki değerlerinde sürekli bir yapıda olmayışı veya sürekli bir fonksiyonla tanımlanamaması dinamik sürtünme modellerinin gerekliliğini göstermiştir. Yapılan statik modellemelerde hızın sıfırdaki değerinde hıza bağlı olmaksızın aşağıdaki matematiksel ifadelerle durgun haldeki sürtünme kuvveti süreksiz olarak ifade edilmiştir.

$$F = \begin{cases} F_e & v = 0 \text{ ve } |F_e| < F_s \\ F_s \text{sgn}(F_e) & v = 0 \text{ ve } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (3.4)$$

Burada: F_e ; dışarıdan uygulanan kuvveti, F_s ; durağan haldeki (stick) sürtünme kuvveti değerini, F ise sürtünme kuvvetini göstermektedir. Sürtünme kuvveti hız sıfırda iken dışarıdan uygulanan kuvvete göre değer alır. Klasik olarak bilinen hızın bir fonksiyonu olarak türetilen sürtünme kuvvetinin burada geçerli olmadığı açıkça görülür. Öyleyse temas yüzeylerinde hareketin durağan haldeki (stiction) bölümünde sürtünme kuvveti $-F_s$ ile $+F_s$ arasında birçok değer alabilen bir tanımlamayla ifade edilebilir. Bu şekilde yapılan tanımlama bir sistem için oluşturulan hareket denklemlerinin çözümünün tekliğini bozmaktadır.

Klasik sürtünme bileşenleri farklı birçok şekilde toplanabilir. Şekil 3.1 c) ve bunun gibi türetilen diğer modellerde klasik sürtünme modelini oluşturmaktadır. Stribeck [18], sürtünme kuvvetinin şekil 3.1 c) de gösterildiği gibi durağan haldeki sürtünme seviyesinden (*Sticktion*) *Coulomb* sürtünme seviyesine düşmediğini yaptığı deneylerde gözlemledi ve hıza bağımlı olarak sürekli lineer olmayan bir model tanımladı. Şekil.3.1 d) de gözüken bu geçiş model *Stribeck* sürtünmesi olarak isimlendirildi. Klasik modellerden oluşan en genel bir statik sürtünme modeli ;

$$F = \begin{cases} F(v) & v \neq 0 \\ F_e & v = 0 \text{ ve } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & v = 0 \text{ ve } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (3.5)$$

Burada $F(v)$, şekil 3.1. d) de ki gibi herhangi bir fonksiyondur ve doğrusal olmayan yapının genel durumu ,

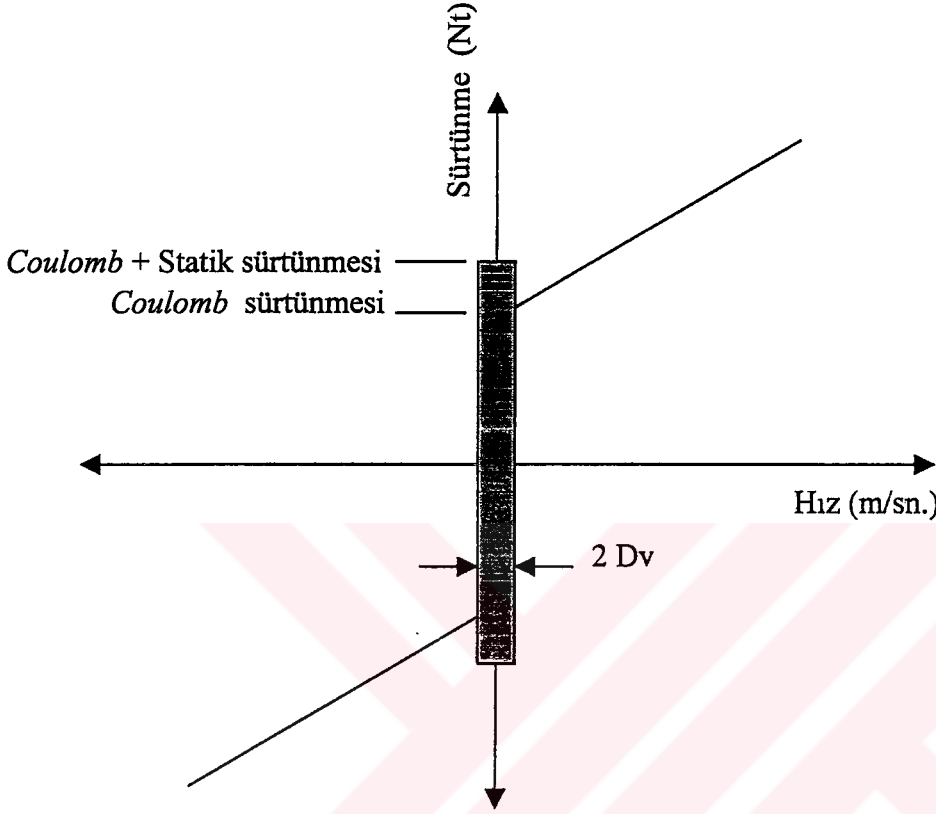
$$F(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-\left|\frac{v}{v_s}\right|^\alpha} + F_v v \quad (3.6)$$

olarak verilir. v_s stribeck hızı olarak adlandırılır. Bu tip modeller uzun süre sürtünmenin modellenmesinde kullanılmıştır fakat sürtünmenin dinamik özelliklerini (Bölüm 2.2) yanıtlayamadıkları için yetersizdir. F fonksiyonu sabit hızlarda ki hareketlerde sürtünme kuvveti ölçülerek kolay bir şekilde elde edilir ve bu eğriler genellikle asimetrik olarak modellenir.

3.1.2 Karnopp Sürtünme Modeli

Klasik sürtünme modellerini kontrol veya simulasyon amaçları için kullanıldığında dez avantaj hızın sıfırdan geçtiği anın tesbit edilememesidir. Karnopp oluşturduğu modelle bu problemi ortadan kaldırmaya çalışmıştır.[31]

Modelinde durgunluk (stick) ve kayma (sliding) halinde ki farklı durum eşitliklerinden geçişten kaçınarak, çeşitli mekanik sistem modellerinde başarıyla kullanmıştır. Model içerisinde sıfır hız bölgesi tanımlanmaktadır ($|v| < Dv$) Şekil 3.2.



Şekil 3.2 Karnopp sürtünme modeline göre sürtünme kuvveti-hız eğrisi.

Matematiksel olarak modelin kısaca açıklaması ;

$$F_m(v(t), F_a(t)) = \begin{cases} -\operatorname{sgn}[F_a(t)] \max[|F_a(t)|, (F_c + F_s)] & |v(t)| < Dv \\ -\operatorname{sgn}[v(t)] F_c + \alpha v(t) & |v(t)| \geq Dv \end{cases}$$

$F_a(t)$; dışarıdan uygulanan kuvvet, $F_m(t)$; modellenen sürtünme kuvveti ;

α ; viskoz sürtünme çarpanı olmak üzere.

Hızın sıfıra yakın bölgeleri şekildende görüldüğü gibi Dv aralığı içerisinde tanımlıdır. Bu aralık dışında sürtünme kuvveti hızın bir fonksiyonudur, bu fonksiyon herhangi bir statik modelden biri olabilir. Dv aralığı içerisinde ise sürtünme kuvveti, kırılma noktasına (break away) kadar dışarıdan uygulanan

kuvvetin ters işaretlisi olarak tanımlanır. Bu modellemede anlaşılacağı üzere giriş işareti olarak dışarıdan uygulanan kuvvet kullanılmaktadır ve uygulamalarda bunun tesbiti çeşitli zorluklar çıkarmaktadır. Bu modelin performansı seçilen Dv aralığına çok bağlı olması istenilen bir durum değildir yani mümkün olduğunca Dv bölgesi küçük seçilmesi gerçek fiziksel sürtünme olayını modellemede ki hatayı azaltacaktır.

3.1.3 Armstrong Modeli veya Yedi Parametrelili Sürtünme Modeli

Yedi parametrelili sürtünme modeli sürtünmenin statik bileşenlerini içine alan (*Coulomb*, *Viskoz* ve *Stribeck* sürtünmesi) statik sürtünme modelleri dışında, gözlemlenen dört dinamik sürtünme olayını da (Bölüm2.2) tanımlaması için Armstrong tarafından geliştirilen [32] bir modeldir. Sürtünme kuvveti , durağan hal (stick) bölgesinde ayrı ve kayma (slip) hal bölgesinde ayrı olarak aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$F(x) = \sigma_0 x$; Durağan hal bölgesinde ki hareket,

$$F(v, t) = \left(F_c + F_s(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + \left(\frac{v(t - \tau_l)}{v_s} \right)^2} \right) \text{sgn}(v) + F_v v$$

; Kayma hal bölgesinde geçerlidir. (*Coulomb*+ *Viskoz* + *Stribeck* eğrisi ve sürtünme hafızası.)

$$F_s(\gamma, t_d) = F_{s,a} + \left(F_{s,\infty} - F_{s,a} \frac{t_d}{t_d + \gamma} \right)$$

; Artan durağan hal sürtünme kuvveti (Breakaway sürtünmesi),

Bu model biri durağan hal diğeri kayma hali olmak üzere iki farklı sürtünme modeli içerdiğinden , bir switching operatörüyle hangisinin kullanılacağı düzenlenmesi gerekir ve her switchleme oluşumundan sonra model durumlarının başlangıç durumları yaklaşık olarak verilmelidir. Modelin bir avantajı da fiziksel olayların hepsi fiziksel parametrelerle ifade edilmiş olmasıdır.

Yukarıda ki eşitliklerle tanımlanan model için aşağıdaki model parametreleri açıklanmıştır.

$F(x(t))$; Anlık sürtünme kuvveti,

F_c ; *Coulomb* sürtünme kuvveti,

F_v ; *Viskoz* sürtünme kuvveti,

F_s ; Durağan hal (stiction) sürtünme kuvveti,

$F_{s,a}$; Bir önceki kayma hareketi sonunda ki *Stribeck* sürtünme değeri,

$F_{s,\infty}$; Sürekli halde *Stribeck* sürtünmesinin değeri,

σ_0 ; Durağan hal bölgesindeki temas yüzeyinin sertlik sabiti,

V_s ; *Stribeck* sürtünmesinde ki karakteristik hız,

τ_l ; Sürtünme hafızası için zaman sabiti,

γ ; Artan statik sürtünme geçici hal parametresi,

t_d ; Durağan hal bölgesinde harcanan zaman,

3.2 Dinamik Sürtünme Modelleri

Son yıllarda dinamik sürtünme modellerine artan bir şekilde ilgi duyulmaktadır bunun bir nedeni gelişen hassas donanım elemanları sayesinde daha kompleks yapıları model tabanlı sürtünme kompanzasyonlarının yapılabilmesidir ve bir diğer taraftan daha hassa servo mekanizmaların kurulması istenmesidir. Bu kısımda sadece bazı önemli dinamik sürtünme modelleri üzerinde kısaca durulacaktır.

3.2.1 Dahl Modeli

Dahl modeli 1976 yılında sürtünmeli mekanik sistemlerin simülasyonunu yapmak amacıyla Dahl tarafından geliştirilen sürtünme modelidir. Bu model daha sonradan birçok sürtünme kompanzasyonu tasarımlarında kullanılmıştır [19,20]. Dahl'ın bu modeli oluşturmasında ki başlangıç noktası yuvarlanmalı yataklarda ki sürtünmenin deneysel olarak elde edilen sonuçlarıydı. Deneylerden elde ettiği bulgulardan biri yuvarlanmalı yataklarda ki sürtünmenin katı cisimler arasındaki sürtünmeye çok benzer ve temas yüzeylerinin Şekil 2.3 deki gibi metal kontaklardan oluştuğunu görmekdi. Dahl diğer modellerle karşılaştırılabilecek

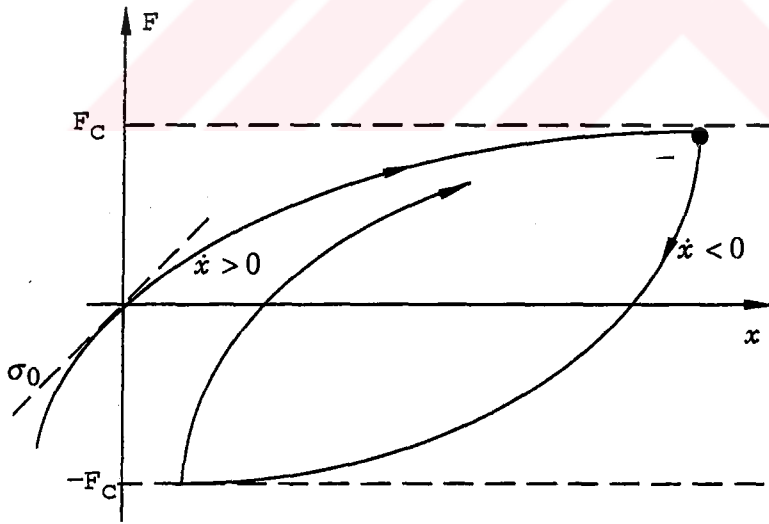
kadar basit bir model geliştirdi ve uzunca bir süre bu model yuvarlanmalı yatak elemanlarının simülasyonlarında kullanıldı. [10]

Dahl modelinin başlangıç noktası katı cisimlerden oluşan sistemlerdeki gerilim-kuvvet eğrisidir (stress-strain curve) Şekil 2.5. Dahl diferansiyel denklemlerle stress-strain eğrisini modellemiştir Şekil 3.3. de x konum, F sürtünme kuvveti olmak üzere Dahl modeli aşağıdaki matematiksel yapıya sahiptir.

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha ; \quad (3.7)$$

σ ; sertlik çarpanı, α ; kuvvet-gerilme eğrisine şekil veren parametredir. $\alpha=1$ en çok kullanılan değeridir. Daha yüksek değerlerde daha keskin eğimli kuvvet-gerilim eğrisi elde edilir. Burada ki modellemelerde sürtünme kuvveti asla F_c Coulomb sürtünmesinden daha büyük olmayacağından F 'in başlangıç değeri $|F(0)| < F_c$ olur.

Modele dikkat edilecek olursa sürtünme kuvveti pozisyona ve hızın işaret fonksiyonunda aldığı değere bağlıdır. Buda bize Dahl modelinin sadece pozisyona bağlı bir sürtünme kuvveti olduğunu gösterir. Hızdan bağımsız olması bu modelin önemli bir özelliğidir.



Şekil 3.3 Pozisyona bağlı sürtünmeyi veren Dahl modeli.

Zaman domenin de elde edilen Dahl eşitliği şu şekildedir.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha v \quad (3.8)$$

bu matematiksel ifade basit *Coulomb* sürtünme kuvvetini dinamik olarak bize verir fakat modelin *Stribeck* etkisini dolayısıyla durağan hal (stick) sürtünme kuvvetini tanımlamamasından ve hızdan bağımsız olmasından ötürü sürtünme gecikmesi olayını modelleyemediği için başka dinamik modellerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Geliştirilen dinamik modeller Dahl modeli üzerine oturtularak tasarlanmış ve tezde dördüncü ve beşinci bölümlerde detaylı olarak ele alınmıştır.

$\alpha = 1$ için Dahl modeli ;

$$\frac{dF}{dt} = \sigma \left(v - \frac{F}{F_c} |v| \right) \quad (3.9)$$

$F = \sigma z$ olarak tanımlarsak Dahl modeli;

(3.10)

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_c} z \quad ;$$

$$F = \sigma z \quad \text{olur.}$$

3.2.2 Bristle Modeli

Haessig ve Friedland temas yüzeylerindeki mikroskobik temas noktalarının davranışlarını gözönünde bulundurarak 1991 yılında bir sürtünme modeli tanımı yapmışlardır [22]. Temas yüzeyinin düzensizliği yüzünden kontak noktalarının sayısı ve yerleri geliş güzel olarak dağılmıştır. Herbir kontak noktası herbir elastik kılın birleştiği bir düğüm noktası olarak düşünülmüştür. Temas yüzeyleri birbirini üzerinde hareket ettirildiği zaman düğüm noktalarında gerilme artar ve kılların elastik yapısı bir yay gibi davranmasını sağlar artan sürtünme kuvvetinin oluşumuna sebebiyet verirler. Bu kuvvet aşağıda ki eşitlikle verilir.

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (3.11)$$

N ; yüzeyde ki kıl sayısı, σ_0 ; kılların sertlik çarpanını, x_i ; kılların pozisyonlarını, b_i ; kontak noktalarının olduğu yerdir. $|x_i - b_i| = \delta_s$ esneme boşluğu olarak adlandırılır. Modelin karmaşıklığı yüzeydeki kıl sayısı (N) arttıkça artmaktadır. Yapılan çalışmalarda 20-25 kıldan oluşan bir modellemenin iyi sonuç verdiği

görülmüştür fakat tek bir kıl üzerinde tanımlanan sürtünme kuvveti dikkate değer sonuçlar da vermiştir. Kılların esneme katsayısı σ_0 , hıza bağlı olarak da modellenebilir. Burada dikkat edilecek diğer bir nokta da bu modelle sürtünmenin random özelliğinin model içerisinde olmasıdır. Bu belirsizlik yüzeyde ki modellenen kıl sayısı ile doğrudan bağlıdır. Bu model kompleks özelliğinden dolayı simülasyonlar için uygun bir yapıya sahip değildir. Kılların modellenmesinde sönüm terimi kullanılmadığından durağan hal bölgesinde ki hareket sınımlı bir şekilde oluşacaktır.

3.2.3 Sıfırlamalı İntegrator Modeli

Haessing ve Friedland takip eden çalışmalarında reset integrator sürtünme modelini önerdi. Bu model *Bristel* modelini daha uygun bir formata sokmak için yapılan bir iyileştirme gibi de düşünülebilir. Bristel modelindeki esneme boşluğu yerine, bristel'ların oluşturduğu düğüm noktasında uygulanan kuvvetteki artışa göre düğümde ki kuvveti gösteren bir z durumu model içerisine yerleştirilmiştir ve sürtünme kuvvetinin tesbiti için bunun belirlenmeside gerekir aşağıda ki formulasyona sahiptir.

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 & (v > 0 \text{ ve } z \geq z_0) \text{ yada } (v < 0 \text{ ve } z \leq -z_0) \\ v & \end{cases} \quad (3.12)$$

Sürtünmeyi veren eşitlik,

$$F = (1 + a(z))\sigma_0(v)z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (3.13)$$

Burada ki $\sigma_1 \frac{dz}{dt}$ sönüm terimidir ve sadece durağan hal bölgesinde kendisini göstermektedir. Burda ki sönüm çarpanı σ_1 istenen sönüm oranı sağlanacak şekilde seçilebilir.

Durağan hal $a(z)$ fonksiyonuyla başanlır ve bu eşitlik

$$a(z) = \begin{cases} a & |z| < z_0 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.14)$$

gibidir. Eğer $|z| < z_0$ aralığında ise model durağan hal bölgesini tanımlar ve burada sürtünme kuvveti z 'in bir fonksiyonu olarak elde edilir. Eğer gözlenen z sapması en büyük değeri olan z_0 ulaşırsa, z değişkeni sabit kalır ve $a(z)$ sıfır

değerini alır. Kayma bölgesinde ki sürtünme kuvveti $\sigma_0(v)$ 'le verilen hızın herhangi bir fonksiyonudur. Reset integrator model, *Bristel* modeline göre simülasyon için daha uygun bir yapıya sahiptir fakat z süreksiz olduğundan $|z| > z_0$ tesbiti şarttır buda dezavantaj oluşturmaktadır.

3.2.4 Bliman Sorine Modeli

Bliman ve Sorine çıkardıkları yayınlarda bir dizi dinamik sürtünme modeli önermişlerdir[24,25]. Bütün bu öneriler Rabinowicz'in yaptığı deneysel sonuçlara dayandırılarak oluşturulmuştur [23].

Bliman Sorine dinamik sürtünme modeli hızdan bağımsızdır. Bu modelde sürtünme kuvvetinin genliği, hızın işaret fonksiyonunda aldığı değere ve s ile tanımlanan durum değişkenine bağlıdır. Konum tanım domeninde, konum s aşağıda ki gibi tanımlıdır,

$$s = \int_0^t |v(\tau)| d\tau \quad (3.15)$$

Bliman Sorine modellerinde sürtünme sadece pozisyona bağlıdır, yani sistemin ne kadar hızlı bir şekilde ilerlediği yol aldığı önemli değildir sadece bulunduğu o anki konuma göre bir değer alır. Modelin bu özelliğinden dolayı histerisiz operatörleriyle geliştirilmesine uygun bir ortam sağlamaktadır. Bu model s konum domeninde, lineer sistem denklemleri şeklinde aşağıda ki gibi yazılabilir.

$$\frac{dx_s}{ds} = Ax_s + Bv_s \quad (3.17)$$

$$F = Cx_s$$

v_s değişkeni $\text{sgn}(v)$ olduğundan sadece hızın işaretinin belirlenmesi giriş işareti için yeterli olacaktır. Bliman ve Sorine farklı karmaşıklıkta birçok dinamik sürtünme modeli oluşturmuştur. Birinci dereceden model aşağıda ki gibi verilebilir.

$$A = -\frac{1}{\varepsilon_f} \quad B = \frac{f_1}{\varepsilon_f} \quad \text{ve} \quad C = 1 \quad \text{ise}$$

model aşağıda ki şekilde tekrar düzenlenebilir.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{ds} \frac{ds}{dt} = |v| \frac{dF}{ds} = \frac{f_1}{\varepsilon_f} \left(v - |v| \frac{F}{f_1} \right) \quad (3.18)$$

Dahl modeliyle aşağıda ki eşitlik büyük bir benzerlik göstermektedir.

$$F_c = f_1, \quad \sigma = \frac{f_1}{\varepsilon_f} \quad \text{ve} \quad \alpha = 1$$

Birinci dereceden bu sürtünme modeli ne durağan hal (sticktion) sürtünme kuvvetini ne de kırılma (breakaway) sürtünme kuvvetini Rabinowicz tarafından gözlenen deneysel sonuçlara göre modelleyemediğinden ikinci derceden Dahl modeli önerilmiştir.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta \varepsilon_f} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon_f} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{f_1}{\eta \varepsilon_f} \\ -\frac{f_2}{\varepsilon_f} \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 1)$$

Burada $f_1 - f_2$ kinetik sürtünme kuvvetine eşdeğerdir (F_c) ve exponansiyel olarak $s \rightarrow \infty$ son değerine ulaşır. Bu model birbirine paralel bağlı olan yavaş ve hızlı birinci dereceden iki Dahl modelinden elde edilir. Yavaş modelde ki sürtünme kuvveti hızlı modelden türetilmiştir ve hızlı model durağan hal sürtünme kuvvetini (sticktion) oluşturan modeldir. Oluşturulan heriki model de enerjiyi sönümleyen yapıya sahiptir (disipative). Bliman ve Sorine $\varepsilon_f \rightarrow 0$ gitmesi durumunda birinci dereceden Dahl modelinin klasik *Coulomb* sürtünmesi gibi davranacağını göstermiş ve ikinci dereceden Dahl modeli ise hem *Coulomb* hemde durağan hal (sticktion) sürtünme karakteristiklerini gösterecek şekilde tasarlamıştır. Fakat yapılan deneysel sonuçlardan ikinci dereceden Dahl modelinin *stirbeck* eğrisini veren yapının pratik çalışmalarla tutarlı bir benzeşim göstermediği görülmüştür [18]. İkinci dereceden Dahl modeli durağan hal sürtünme kuvvetinden *stirbeck* eğrisini yaparak sürekli halde *Coulomb* seviyesine düşer fakat hareketin yavaşlayıp durması durumunda fiziksel gerçeklere uygun hareket etmez.

3.2.5 LuGre Modeli

Model Bristel yapısından esinlenerek türetilmiştir, genişletilmiş analiz ve yorumu 5.Bölümde yapılacaktır ayrıca [2,13] referanlarda ayrıntılı bilgi edinilebilir.

Sürtünme kuvveti temas yüzeylerindeki kıllarda (bristel) elastik olarak yapılan ortalama sapmadan türetilir. Teğetsel bir çekme kuvveti M kütlesine uygulandığı zaman Şekil 2.4 kıllar bir yay gibi esnerler eğer bu sapma yeterince büyük olursa kıllar birbiri üstünde kaymaya başlar. Kararlı hal hareketinde ortalama kıl sapması hızla belirlenir, düşük hızlarda ufak değerler büyük hızlarda büyük sapmalar gözlenir. Model aynı zamanda *stribeck* etkisini de modeller. Lugre modeli hıza bağlı sürtünme olaylarını (yani değişen kırılma sürtünme kuvvetini (breakaway) ve sürtünme geçikmesi olaylarını) modellediği için daha uygun bir yapısı vardır. Aşağıda ki şekilde ifade edilir.

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (3.16)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1(v) \frac{dz}{dt} + f(v) \quad (3.17)$$

burada z ortalama kıl sapmasını gösterir mikron boyutunda ki hareketlerde model bir yay gibi davranış gösterir. Yukarıda ki modeli $v=0$ ve $z=0$ noktasına göre lineerleştirirsek ;

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta z)}{dt} &= \delta v, \\ \delta F &= \sigma_0 \delta z + (\sigma_1(0) + f(0)) \delta v \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada, σ_0 ; kılların sertlik sabiti , $\sigma_1(v)$ sönüm çarpanı olarak kararlı hal hızlarında kararlı hal sürtünme kuvveti,

$$F = g(v) \operatorname{sgn}(v) + f(v) \quad (3.19)$$

$g(v)$ fonksiyonu *stribeck* etkisini modellemektedir (Bölüm 2.1.3.1) $f(v)$ viskoz sürtünmeyi gösterir ve $g(v)$ nin iyi bir şekilde seçimi *stribeck* eğrisinin gerçeğe yakın bir şekilde elde edilmesini sağlar.

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \quad (3.20)$$

$\alpha_0 + \alpha_1$; durağan hal sürtünme kuvvetini , α_0 ; *Coulomb* sürtünme kuvvetini, v_0 parametresi $g(v)$ 'nin $\alpha_0 < g(v) \leq \alpha_0 + \alpha_1$ arasında nasıl değiştiğini göstermektedir. Genellikle viskoz sürtünme için seçilen $f(v) = \alpha_2 v$ 'dir. Lugre modelini aşağıdaki gibi sabit σ_1 parametresiyle belirtirsek;

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)} z$$

$$g(v) = \frac{1}{\sigma_0} \left(F_c + (F_s - F_c) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} \right) \quad (3.21)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v$$

standart formunu alır fakat hız artıkça düşen sönüm parametresi kullanımı uygulamalarda daha iyi sonuç verdiğiinden sönüm parametresi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_1(v) = \sigma_1 e^{-\left(\frac{v}{v_d}\right)^2} \quad (3.22)$$

4. BLİMAN SORİNE MODELİ

Pierre-Alexandre Bliman ve Michel Sorine histerisiz operatörlerine dayanan birçok kuru sürtünme modeli tanımlamışlardır [24,25]. Geliştirdikleri en son kuru sürtünme modeli durağan hal sürtünme kuvvetini, kayma öncesi ve histerisiz hareketini içermektedir. Model Dahl modelinin üzerine kurulmuştur. Modellemedeki ana amaçlar aşağıda ki gibi sıralanabilir ;

1. Hızdan bağımsız geçici hal hareketi gösteren bir model sunmak, fakat $\text{sgn}(v(t))$ sabit kaldığı sürece aldığı yol $s = \int v(t) dt$ bağlı olacak. Deneylerle gözlemledikleri sonuçlara göre böyle bir yorum çıkarılmıştır.
2. Sürtünme enerji yok edici (dissipative) olduğu için modelde aynı yapıda olmalı.
3. Model parametrelerinin bulunmasının kolay olması.
4. Hareket denklemleriyle verilen sürtünme modelinin uygulanabilir bir eşitlikler kümesine sahip olması.
5. Bu model özel bir durum olarak *Coulomb* sürtünmesi içerebilmeli.
6. Model gerçek zaman uygulamalarında kullanılabilecek kadar basit olmalı.

4.1 Konum Domeninde Formülasyon

Bliman ve Sorine'in geliştirdikleri modeller en iyi konum domeninde ifade edilen eşitliklerdir. Genel olarak bu modeller için, konum domenine göre oluşturulan eşitlikler matematiksel analiz ve model tanıma, zaman domenine göre yapılan formülasyon simülasyon ve sürtünme kompanzasyonu tasarımı için daha uygun bir yapıya sahiptir diyebiliriz.

Yaptıkları çalışmalarda genel histerisiz operatörlerini tanımladıktan sonra (Dahl histerisizi) aşağıdaki konum domeninde lineer zamanla değişmeyen diferansiyel denklem takımını (Linear Space Invariant [LSI]) oluşturdular

$A \in \mathbb{R}^{p \times p}, B \in \mathbb{R}^{p \times 1}, C \in \mathbb{R}^{1 \times p}, D \geq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dx_s}{ds} = Ax_s + Bu_s, \quad x_s(s) = x_o \in \mathbb{R}^p \quad (4.1)$$

$$F(u_s) = Cx_s + Du_s$$

s konum olarak tanımlanmıştır ve aşağıda ki dönüşüm ile elde edilmiştir.

$$ds = |v(t)| dt \quad (4.2)$$

yada integral formu,

$$s = \int |v(\tau)| d\tau \quad (4.3)$$

s sembolü hızın son işaret değiştirdikten sonraki konumu tanımlar. Hızın her işaret değiştirdiği yer s - domeni için yeni bir orijin oluşturur.

İlk olarak birinci dereceden sürtünme modelini şöyle tanımlayabiliriz,

$$A = -\frac{1}{\varepsilon_f}, \quad B = \frac{f_l}{\varepsilon_f}, \quad C = 1 \quad (4.4)$$

ve (4.1) eşitliğinde ki $u_s = \text{sgn}(v)$ 'dir. f_l parametresinin boyutu kuvvet ve *Coulomb* sürtünmesini temsil etmektedir, ε_f ; kayma öncesi hareketde oluşan karakteristik bir konum değerini göstermektedir. Sistemin katsayılarının değişmez olması hızdan bağımsız olduğunu gösterir yani sistem çıkışı girişte ki hız değişimlerinden bağımsızdır. Sonuç olarak (4.4) tanımlamalarıyla üretilen sürtünme kuvveti sadece orijine olan mesafeye bağlıdır. Hız sıfırdan itibaren sürekli bir yapıda olan sürtünme kuvveti bu modelle sürekli bir yapıya sahip olmuş ve bu bölgede *Coulomb* sürtünmesi modellenmesi sürekli bir yapıda sağlanabilmiştir. Ayrıca model sıfır hızdaki kayma öncesi hareketi (Dahl etkisini) de tanımlamaktadır. Bu model aslında birinci dereceden bir filtredir ve giriş işareti step şeklinde $\text{sgn}(v)$ olarak hızın işaretini alır.

Daha yüksek durağan hal sürtünme kuvvetini oluşturmak için düşünülen ilk fikir ikinci bir durumu (4.4) tanımlamasına katmaktı ve sonuç olarak ;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} & -\frac{2\xi}{\varepsilon} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\varepsilon^2} \end{bmatrix}, C = [f_c \ 0] \quad (4.5)$$

Daha açık bir ifadeyle şöyle yazabiliriz.

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + 2\xi\varepsilon \frac{dF}{ds} + F = f_c \operatorname{sgn}(v) \quad (4.6)$$

Sönüm oranı ($0 \leq \xi \leq 1$) aralığında olan bu ikinci dereceden sistem birim basamak yanıtıyla oluşan aşım sayesinde durağan hal sürtünme kuvvetini modellemektedir. Böyle bir yapıyla kayma öncesi hareketi ve durağan hal sürtünme kuvvetini hızdan bağımsız olarak veren bir modele sahip olmuş oluruz. Ancak bu model belli şartlar bulunduğu sürece enerji üretecek bir yapıya sahip olduğu için enerji yok etme özelliğine sahip değildir. Buda sürtünmenin fizikine ters bir özelliktir. (4.4) tanımlamasıyla oluşan birinci dereceden model enerji yok etme özelliğine sahiptir.

Buradan hareketle ikinci dereceden sürtünme modeli yeniden oluşturuldu,

$$A = -\frac{1}{\varepsilon_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{\varepsilon_f} \begin{bmatrix} \frac{f_1}{\eta} \\ -f_2 \end{bmatrix}, C = [1 \ 1] \quad (4.7)$$

Bu yapı iki tane paralel birinci dereceden modelden oluşmaktadır yani (4.6) da ki kompleks kutuplar reel kutuplar olacak şekilde yer değiştirmiştir.

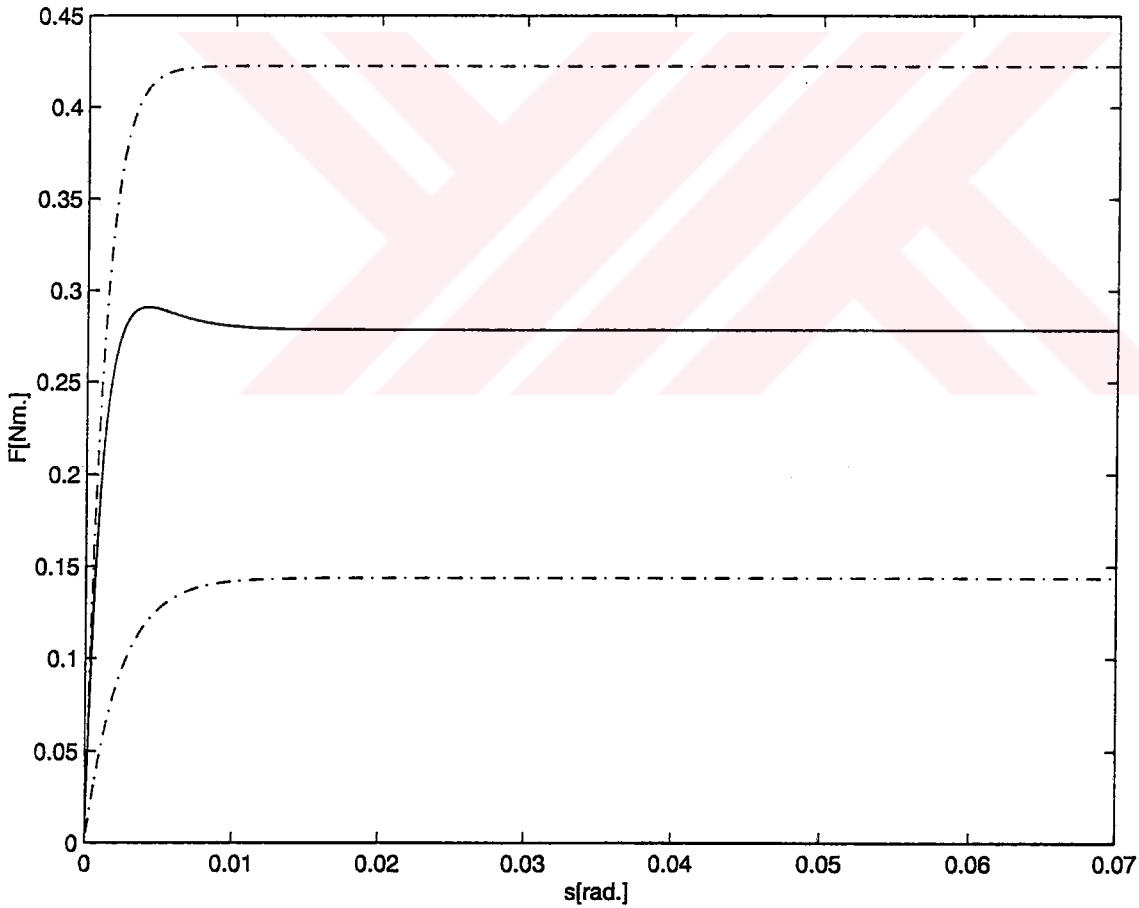
Modelin bu en son yapısı ileride de modellemede kullanılacak eşitliktir. (4.1) durum denklemleri ile verilen ifade kullanılarak Laplace dönüşümü yapılacak olursa,

$$Y = \mathfrak{I}\{F\} \text{ ve } U = \mathfrak{I}\{\text{sgn}(v)\} \quad (4.8)$$

$$Y = C(sI - A)^{-1} Bu = \left(\frac{f_1}{\varepsilon_f \eta s + 1} - \frac{f_2}{\varepsilon_f s + 1} \right) u$$

elde ederiz ve buradan iki tane paralel bağılı birinci dereceden sistemden (Dahl modeli) oluşan yapıyı açıkça görürüz.

Bunlardan birincisi olan f_1 statik kazancı f_2 statik kazancından daha hızlıdır, η faktörü zaman domeninde ki zaman sabitine eşdeğer olarak konum domenindeki değeridir ve boyutsuzdur. f_1 ve f_2 parametreleri kuvvet boyutunda , ε_f mesafe cinsinden verilmiştir. $f_1 - f_2$ *Coulomb* sürtünme kuvvetini oluşturmaktadır. Bu parametrelerin fiziksel eşdeğerleri Bölüm 4.8 de verilecektir.



Şekil 4.1 Bliman Sorine sürtünme kuvvetinin mutlak pozisyona göre cevabı. (İki birinci dereceden sistemin toplamıyla oluşan.)

Bu sürtünme modelinin cevabı Şekil 4.1 de ki gibi iki birinci dereceden oluşan sistemin cevabı şeklinde olur.(4.8) eşitliği yeniden yazarsak,

$$Y = \frac{\frac{f_1 - \eta f_2}{\varepsilon_f \eta} s + \frac{f_1 + f_2}{\varepsilon_f^2 \eta}}{s^2 + \frac{\eta + 1}{\varepsilon_f \eta} s + \frac{1}{\varepsilon_f^2 \eta}} u \quad (4.9)$$

Bu eşitlikden ikinci dereceden bir sistem transfer fonksiyonu görüyoruz.

4.2 Hıza Bağlı Sürtünme Olayları

(4.7) tanımlanan model yapısı hızdan bağımsızdır fakat deneysel gözlemler hıza bağlı sürtünme olayları varlığını göstermektedir. En açık olarak vizkos sürtünme kuvvetinin oluşumunu söyleyebiliriz. Viskoz sürtünme için en basit olarak ya genel lineer fonksiyon (α ; viskoz sürtünme çarpanı, v ; hız olmak üzere) $F_v = \alpha v$ fonksiyonu yada nonlinear bir fonksiyon kullanılmaktadır. Durağan haldeki sürtünme kuvvetinden (Stiction) *Coulomb* sürtünme seviyesine düşüşteki hıza bağlı olan değişik davranışlarda yani değişken kırılma (break away) noktalarının nasıl modelleneceği (pozisyona bağlı ifadelerle) açıklığa kavuşturulmamıştır. Bu bölgede ki tutarsız yapılanma model içine hıza bağlı değişik davranış gösteren dinamik tanımlar ekleme ihtiyaını göstermiştir.

Başka bir hıza bağlı sürtünme olayı da sürtünme geikmesidir (Bölüm 2.2.3). (4.7) eşitliğindeki Bliman Sorine modeli Dahl modelinin tabi yapısını koruduğundan bu olaya karşıda duyarsızdır. Ayrıca model sadece hızın işaret değiştirdikten sonraki mutlak değer konuma bağlı olarak sürtünme kuvvetini oluşturur. Oysa ki sürtünme geçikmesi tek yönlü hareketlerde oluşur ve pozisyona bağlı bir ifadeyle açıklanamaz.

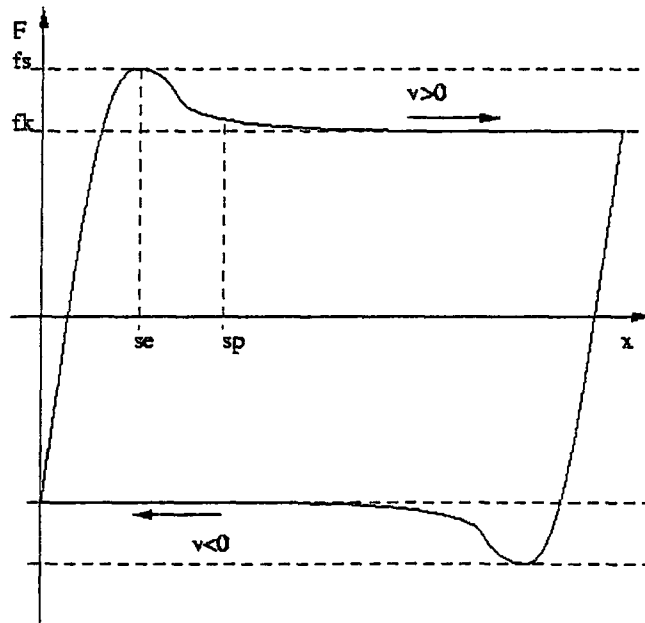
4.3 Fiziksel Olarak Açıklanması

Bliman-Sorin modelinin fiziksel açıklaması, ikinci bölümde de izah edildiği üzere temes yüzeylerinde ki przlerin gerilme-çekilme karakteristiğinden çıkarılmıştır.

Kayma öncesi hareket boyutlarında ki çok küçük hareketlerde yüzey pürüzlerinin temas yüzeyi elastik olarak deforme olacaktır ve dışarıda uygulanan kuvvete bir yay karakteristiği şeklinde enerji depolayarak cevap verecektir. Daha büyük boyutlardaki hareketlerde yüzey pürüzlerinin oluşturduğu birleşme alan bölgesi plastik olarak deforme olacaktır. Elastik ve plastik deformasyon arasında olan ve karışık bir yapı, yani enerjinin bir kısmını depolayan bir kısmını yokeden bir bölge de vardır. Plastik deformasyon, bu sürtünme kuvvetinin oluşumunun bir parçası olduğu müddetçe sürtünme histerisiz özelliğini pozisyona karşı gösterecektir. Modelde bahsedilen bu bölgeler şu parametrelerle tanımlanır. s_e ; kayma öncesi sınır pozisyonu gösterir, f_s ; s_e noktasındayken oluşan en büyük durağan hal kuvvetini gösterir, s_p ; büyük miktarda plastik deformasyonun oluşuktan sonraki pozisyonu gösterir, f_k ; s_p noktasının yakınında oluşan kinetik sürtünme kuvvetini (*Coulomb* sürtünmesini) gösterir. Bu noktalar Şekil 4.2 de açık bir şekilde görülmektedir. Bu parametreler model eşitliklerinde ki parametreler değildir. Model eşitliklerinde ki parametreleri bulmak için bir dönüşüm fonksiyonu tanımlanarak,

$$[f_s \ f_k \ s_e \ s_p] \rightarrow [f_1 \ f_2 \ \varepsilon_f \ \eta \ \alpha]$$

bulunur. Burada α lineer sürtünme çarpanıdır.



Şekil 4.2 Histerisiz hareketinde karakteristik (s_e, f_s) ve (s_p, f_k) noktalarının gösterimi.

Elastik bölgede ki mikron düzeyinde ki hareketlerde ki maximum sertlik sabiti k_F^+ model parametrelerinin yardımıyla aşağıdaki gibi açıklanabilir. Aynı zamanda kırılma noktasından sonra elde edilen k_F^- negatif extramum sertlik sabiti aşağıdaki model parametreleriyle tanımlanabilir.

$$k_F^- = \frac{2f_2}{\varepsilon_f} \left(\frac{\eta^2 f_2}{f_1} \right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} (1-\eta) \quad (4.10)$$

$$k_F^+ = \frac{2}{\eta \varepsilon_f} (f_1 - \eta f_2) - k_F^-$$

4.4 Zaman Domeninde Formülasyon

Matematiksel analiz için (4.7) de verilen tür bir sürtünme modellemesi iyi bir yapıdadır fakat bu model simulasyon çalışmalarında bir sisteme bağlanarak kullanılamadığından zaman domenine dönüşüm yapma zorunluluğumuz vardır. (4.1) de verilen sistem denklemini zaman domeninde aşağıdaki forma dönüştür.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= |v|Ax + Bv \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.11)$$

Buradaki A, B ve C matrisleri (4.7) tanımlamaları yukarıda kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -|v| \frac{1}{\varepsilon_f \eta} x_1 + \frac{f_1}{\varepsilon_f \eta} v \\ \dot{x}_2 &= -|v| \frac{1}{\varepsilon_f} x_2 - \frac{f_2}{\varepsilon_f} v \\ F &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aşağıda ki değişken dönüşümü yapılırsa, daha sonradan gösterilecek LuGre sürtünme modeli ile kıyaslanması daha kolay olacaktır.

$$z_1 = \frac{\varepsilon_f \eta}{f_1} x_1$$

$$z_2 = \frac{\varepsilon_f}{f_2} x_2$$

zaman domeninde bulunan Bliman Sorine modeli simülasyonlar için daha uygundur. Aşağıdaki eşitlikden görüleceği üzere model Lugre modeline benzer iki tane iç durum değişkeni içermektedir.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -|v| \frac{1}{\varepsilon_f \eta} z_1 + v \\ \dot{z}_2 &= -|v| \frac{1}{\varepsilon_f} z_2 - v \\ F &= \frac{f_1}{\varepsilon_f \eta} z_1 + \frac{f_2}{\varepsilon_f} z_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.5 Lineerleştirme

(4.13) eşitliklerinde verilen sürtünme modelini bir z_0, v_0 ağırlık noktasında lineerleştirirsek ve $z_0 = 0$ ve $v_0 = 0$ olarak alınırsa (4.13) eşitliği,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v \\ \dot{z}_2 &= v \\ F &= \frac{f_1}{\varepsilon_f \eta} z_1 - \frac{f_2}{\varepsilon_f} z_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

olur. Yukarıdaki eşitliklerde gerekli düzenlemeler yapılırsa ,

$$F = \sigma x \quad (4.15)$$

$$\sigma = \frac{f_1 - \eta f_2}{\varepsilon_f \eta} \quad (4.16)$$

elde edilir. σ ; pozisyona bağılı sürtünme kuvvetini veren eşitliğin sertlik çarpanıdır. Sürtünme modelinin hızın sıfıra yakın olduğu bölgelerdeki davranışını yakından incelemek için serbest bir m kütesinin hareket denklemini aşağıdaki gibi lineerleştirilmiş Bliman Sorine sürtünme kuvveti modelini viskoz sürtünme kuvvetinide katarak yazalım,

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{f_1 - \eta f_2}{m \varepsilon_f \eta} x = 0 \quad (4.17)$$

karşılaştırma yapmak için standart formu yazarsak ;

$$\ddot{x} + 2\xi \omega \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (4.18)$$

sistemin doğal frekansı ;

$$\omega = \sqrt{\frac{f_1 - \eta f_2}{m \varepsilon_f \eta}} \quad (4.19)$$

ve sönüm ;

$$\xi = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_f \eta}{m(f_1 - \eta f_2)}} \quad (4.20)$$

Son eşitliğe dikkat edecek olursak sönüm oranı ξ viskoz sürtünme çarpanı α ile doğru orantılıdır ve buradan sönüm oranını kontrol etmek için modelin diğer önemli parametrelerinden birini değiştirmekten başka bir yol yoktur. Viskoz sürtünme katsayısı sıfır olduğunda sönüm oranıda sıfır olacaktır ve bu sistemden beklenen yanıt çok osilasyonlu bir şekil olacaktır.

$z_0 \neq 0$, $v_0 = 0$ denge noktası için ;

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_f \eta} z_1 \operatorname{sgn}(v) \right) \downarrow_{v, z_{10}} v \\ \dot{z}_2 &= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_f} z_2 \operatorname{sgn}(v) \right) \downarrow_{v, z_{20}} v \\ F &= \frac{f_1}{\varepsilon_f \eta} z_1 - \frac{f_2}{\varepsilon_f} z_2 \end{aligned}$$

sürtünme kuvvetini elde ederiz ve $v > 0$ ise ;

$$F = \left(\frac{f_1}{\varepsilon_f \eta} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_f \eta} z_{10} \right) - \frac{f_2}{\varepsilon_f} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_f} z_{20} \right) \right) x$$

$v < 0$ ise ;

$$F = \left(\frac{f_1}{\varepsilon_f \eta} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_f \eta} z_{10} \right) - \frac{f_2}{\varepsilon_f} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_f} z_{20} \right) \right) x$$

yani lineerleştirilmiş birinci dereceden sistemlerin sertlik sabiti z 'in başlangıç koşuluna bağlı olarak artmakta veya değişmektedir. Toplam sistemin sertlik sabiti ise hıza bağlı olarak yukarıdaki eşitliklerle verilebilir.

4.6 Simetrik Olmayan Sürtünme

Gerçek mekanik sistemlerde sürtünme karakteristikleri asimetriktir. Simetrik olmayan sürtünmeyi Bliman Sorine modeli için aşağıda verilen parametreleri kullanarak açıklamak basittir.

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \varepsilon_f & \eta \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} f_1^- & f_2^- & \varepsilon_f^- & \eta^- & V < 0 \\ f_1^+ & f_2^+ & \varepsilon_f^+ & \eta^+ & V > 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.21)$$

Hıza bağlı olarak süreksiz bir yapıda verilen yukarıdaki model parametreleri (4.12) eşitliklerinde sürekli bir yapı göstermektedir. Yani F sürtünme kuvvetinin birinci türevi mevcuttur. Lineerleştirilmiş eşitliklerde de asimetrik parametreler kullanılabilir.

4.7 Modelenen Sürtünme Olayları

Triboloji bölümünde, *Stribeck* etkisi, sürtünme kuvvetinin hıza bağlı çizilen grafiğinde negatif eğimle gözüken kısmı olarak tanımlanmıştır. Sürtünme kuvvetinin hareket başlangıcında durağan haldeki sürtünme kuvveti değerinden, *Coulomb* sürtünme değerine düşeceği açıktır. İkinci bölümde de izah edildiği üzere hız sıfıra doğru yaklaştıkça sürtünme kuvvetinin değerinde bir artış gözlenecektir. Bliman Sorine

modeli yukarıda tanımlandığı şekilde hareket başlangıcında *Stribeck* eğrisini vermekte *Coulomb* sürtünme seviyesine düşmekte fakat yavaşlama sırasında tekrar hızın sıfıra yakın olduğu yerlerde artan sürtünme kuvvetini verememektedir. Diğer taraftan model kayma öncesi hareketi ve durağan haldeki sürtünme kuvvetini modelliyebilmektedir. Tek yönlü hareketlerde geçici hal bölgesinden sonra konuma bağlı olarak sürtünme kuvveti vereceğinden bu model sürtünme gecikmesi gibî hıza bağlı sürtünme olayını da modelleyememektedir.

4.8 Model parametrelerinin Belirlenmesi

Model tasarımcıları pozisyona bağlı sürtünme kuvvetini veren grafik üzerinden bir parametre tanımlaması önermişlerdir. Şekil 4.2 de görüldüğü üzere. Bu grafik üzerinde iki önemli nokta olan (s_e, f_s) ve (s_p, f_k) tesbit edildikten sonra, parametreler aşağıdaki şekilde oluşturulmuş bir dönüşüm ile bulunabilir.

$$\begin{aligned} [f_s \quad f_k \quad s_e \quad s_p] &\rightarrow [f_1 \quad f_2 \quad \varepsilon_f \quad \eta \quad \alpha] \\ f_1 &= \frac{(m_1 m_2 + 2)p}{2(p-1)} f_k \\ f_2 &= \frac{m_1 m_2 p + 2}{2(p-1)} f_k \\ \varepsilon_f &= \frac{s_p}{3} \\ \eta &= \frac{m_1 m_2 + 2}{m_1 m_2 p + 2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

m_1 ve m_2 aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$m_1 = \frac{f_s - f_k}{f_k}, \quad m_2 = e^{3s_e/s_p},$$

ve $p > 0$ ise çözüm,

$$\frac{m_1 m_2 + 2}{m_1 m_2} \ln p = (p-1) \ln m_2 \quad (4.23)$$

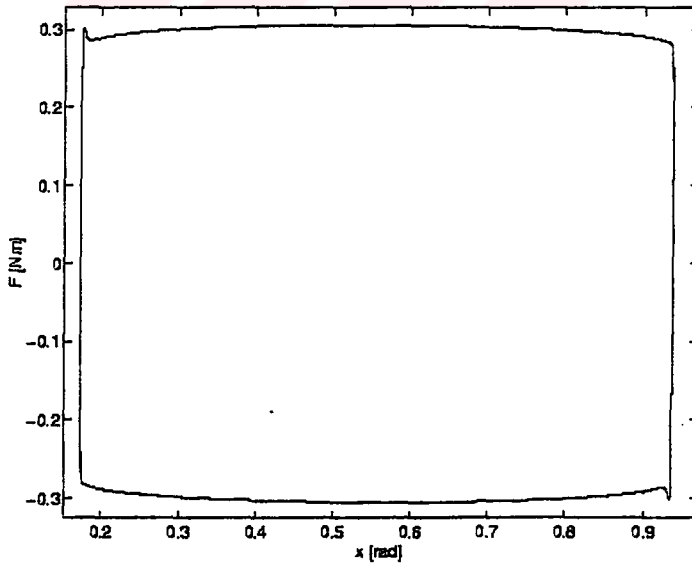
bir çözümün var olması ve tek bir çözümün oluşması için sadece ve sadece

$$\ln m_2 < \frac{m_1 m_2 + 2}{m_1 m_2}$$

olmalıdır. Bu şart fiziksel bir sistemin modellenmesi için bir sınır vermektedir. Örneğin $3s_e < s_p$ yani kayma öncesi hareket s_e ye kadar ise , sürtünme kuvveti kesinlikle $3s_e$ olmadan önce *Coulomb* seviyesine düşmez. (4.22)' nin tersi ;

$$\begin{aligned} f_k &= f_1 - f_2 \\ f_s &= f_k + 2f_2 \left(\frac{\eta f_2}{f_1} \right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} (1-\eta) \\ s_e &= \frac{\varepsilon \eta}{1-\eta} \ln \frac{f_1}{\eta f_2} \\ s_p &= 3\varepsilon_f \end{aligned} \quad (4.24)$$

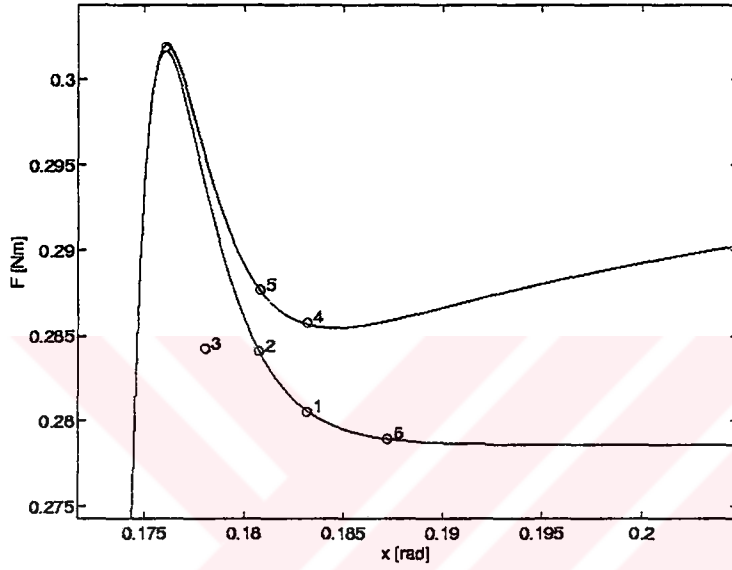
viskoz sürtünme gözönüne alınmamıştır fakat oldukça basit olarak ayrı bir şekilde tanımlanabilmektedir. Şekil 4.3 de basit bir mekaniksel sistemde Bliman sorine sürtünme modeli gözönüne alınarak yapılmış bir simülasyonda pozisyona bağlı histerisiz eğrisi açık bir şekilde görülmektedir.



Şekil 4.3 Sinüsodal giriş momentuna karşılık oluşan histerisiz eğrisi.

Şekil 4.4 de, Şekil 4.3 de görülen sol üst kısmın daha yakından görüntüsü verilmektedir ve burada viskoz sürtünmeli model ile onsuz modelin oluşturduğu eğri gözükmemektedir. Model de kullanılan parametreler gerçek bir sistem üzerinde yapılan ölçümlerle yukarıdaki prosedüre göre tesbit edilmiştir.(Model parametreleri İsveç teknoloji enstitüsünden alınmıştır.)

Önerilen model tanımlama parametreleri dönüşümü çok iyi bir şekilde



çalışmamaktadır. Özellikle $(s_p f_k)$ noktası iyi bir şekilde tanımlanmamıştır. Aşağıdaki örnekle bu konu üzerinde duracağız amacımız bu noktanın tesbitinde ki ufak bir sapma sürtünme model parametrelerinde ne tür bir değişiklik oluşturduğunu görmektir. $(s_e f_s)$ ve $(s_p f_k)$ noktaları, Bliman Sorine sürtünme modeliyle tanımlanan basit bir mekanik sistemin simülasyon ortamında elde edilen çıkışlardan bulunacaktır. Simulasyonlarda kullanılan sürtünme model parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$[f_1 \quad f_2 \quad \varepsilon_f \quad \eta \quad \alpha] = [0.4224 \quad 0.1438 \quad 0.0023 \quad 0.4999 \quad 0.0177]$$

Şekil 4.4 de $(s_e f_s)$ noktası sabit tutularak altı farklı noktada $(s_p f_k)$ noktasının tesbiti görülmektedir. Model tanımlama parametrelerinin bu altı farklı noktada ki duyarlılığı Tablo 4.1 de görülmektedir. Dikkat edilirse model parametrelerinin en iyi yaklaşık değeri veren 3 no lu nokta olduğu tablodan görülür fakat bu nokta histerisiz eğrisi üzerinde bulunmamaktadır.

Tablo 4.1 $(s_e f_s)$ noktası sabit tutularak farklı altı $(s_p f_k)$ noktası için model parametreleri tablosu.

No	f_k	S_p	f_1	f_2	ε_f	η
1	0.2805	0.0109	0.3192	0.0387	0.0036	0.2227
2	0.2841	0.0084	0.3121	0.0480	0.0028	0.2974
3	0.2842	0.0057	0.4139	0.1296	0.0019	0.5185
4	0.2857	0.01109	0.3144	0.0286	0.0036	0.2066
5	0.2877	0.0085	0.3245	0.0368	0.0028	0.2766
6	0.2790	0.0149	0.3076	0.0287	0.0050	0.1500

Şekil 4.5 de farklı model tanımlama parametrelerine göre oluşan model yanıtları görülmektedir. En önemli fark farklı kinetik sürtünme kuvveti göstermeleridir. İki extremum çıkış noktası arasında ki fark yaklaşık olarak %5 'dir.

4.9 Simülasyonlar

Bu bölümde Bliman Sorine sürtünme modelinin bazı karakteristik özellikleri simülasyonlarda gösterilecektir. Eşdeğer simülasyonlar daha sonradan Lugre içinde yapılacaktır. Simülasyonlarda kullanılan model parametreleri (İsveç Teknoloji Enstitüsünde) gerçek bir sistemden yukarıda açıklanan tanımlama prosedürüne göre elde edilmiştir.

Simülasyonlar, serbest sürtünme modeli için model girişi olarak doğrudan hız kullanılarak çıkışı gözlemlemek vede basit bir mekanik düzende sürtünmeyi bu modelle tanımlayarak moment girişi için elde edilen çıkışlar olacaktır.

Üzerine hiçbir kuvvet etkimeyen durgunlukta bulunan bir sistemde sürtünme kuvveti değeri sıfırdır. Bliman Sorine modeli için model durum değişkenlerinin oluşturduğu sürtünme kuvveti toplamı değeri sıfır olmasıyla eşdeğerdir.

$$F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = 0$$

dikkat edilirse buradan bu eşitliği sağlamak için model durumlarının sıfır olması gerekliliği olmadığı görülür fakat genelde simülasyonlarda başlangıç değeri olarak sıfır verilir.

Model parametre noktaları verildiğinde, biz modelin nasıl yanıt oluşturacağını model tanımlama eşitlikleri yardımıyla tahmin edebiliriz. Bu durum sadece sistem dönüşümlü olarak simetrik bir şekilde stick-slip hareketi yapıyorsa yani her seferinde durumlar saturasyona giriyorsa geçerlidir. Daha açık olarak söylemek gerekirse sticktion sürtünme kuvveti f_s , kayma öncesi hareket noktası s_e ve plastik deformasyonun gerçekleştiği s_p nin başlangıç koşullarına bağlıdır fakat f_k başlangıç koşullarından bağımsızdır. Bunu daha iyi anlamak için (4.7) ile tanımlanan model dikkate alınarak incelemeler yapalım. $Sgn(v) = 1$ ve başlangıç koşulları $X_1(0) = X_{10}$ ve $X_2(0) = X_{20}$ seçilerek

$$\begin{aligned}x_1(s) &= f_1 + (x_{10} - f_1)e^{-\frac{1}{\varepsilon_f \eta} s} \\x_2(s) &= -f_2 + (x_{20} + f_2)e^{-\frac{1}{\varepsilon_f} s}\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$F(s) = x_1(s) + x_2(s)$$

buradan maximum $F(s)$ ' i bulabilmek için $(s = s_e)$;

$$F(s) = f_1 + (x_{10} - f_1)e^{-\frac{1}{\varepsilon_f \eta} s} - f_2 + (x_{20} + f_2)e^{-\frac{1}{\varepsilon_f} s}$$

$F'(s_e) = 0$ 'a eşitleyerek ;

$$\frac{x_{10} - f_1}{\varepsilon_f \eta} e^{-\frac{1}{\varepsilon_f \eta} s_e} - \frac{x_{20} + f_2}{\varepsilon_f} e^{-\frac{1}{\varepsilon_f} s_e} = 0 \Rightarrow \frac{-x_{10} + f_1}{(x_{20} + f_2)\eta} = e^{-\left(\frac{1}{\varepsilon_f} - \frac{1}{\varepsilon_f \eta}\right) s_e},$$

sonuç olarak,

$$s_e = \frac{\varepsilon_f \eta}{1 - \eta} \ln \frac{-x_{10} + f_1}{(x_{20} + f_2)\eta} \quad (4.26)$$

Maximum sürtünme kuvveti için bulunan bu s_e değeri (4.25) eşitliğinde yerine konursa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$F(s) = f_1 - f_2 + (x_{10} - f_1) \left(\frac{(x_{20} + f_2)\eta}{-x_{10} + f_1} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} + (x_{20} + f_2) \left(\frac{(x_{20} + f_2)\eta}{-x_{10} + f_1} \right)^{\frac{\eta}{1-\eta}} \quad (4.27)$$

(4.26) da ki eşitlik dikkat edilirse x_{10} ve x_{20} 'ın tüm başlangıç koşulları için $[x_{10} \ x_{20}] = \beta [-f_1 \ f_2]$, $\beta \geq 0$ olmak üzere maximum değerini aynı relatif konumda vermektedir.

$$s_e = \frac{\varepsilon_f \eta}{1 - \eta} \ln \frac{f_1}{f_2 \eta} \quad (4.28)$$

Sonuç olarak (4.28) eşitliği (4.24)'de verilen s_e için tanım denklemdir.

Saturasyonlu histerisiz hareketlerinde hız işaret değiştirdiğinde

$x_1 = \pm f_1$ ve $x_2 = \mp f_2$ model iç durumları olarak tanımlanırsa

$\text{sgn}(v) = 1$, $x_{10} = -f_1$ ve $x_{20} = f_2$ olmak üzere (4.25) eşitliği tekrar aşağıdaki gibi

düzenlenir.

$$\begin{aligned} x_1(s) &= f_1(1 - 2e^{-\frac{1}{\epsilon_f \eta} s}) \\ x_2(s) &= -f_2(1 - 2e^{-\frac{1}{\epsilon_f} s}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$F(s) = x_1(s) + x_2(s)$$

4.28) de verilen s_e eşitliğinden yararlanılarak (4.29) eşitliğinin maximumu bulunur ve (4.27) eşitliği ile birlikte ,

$$F(s_e) = f_1 - f_2 + 2f_2 \left(\frac{f_2 \eta}{f_1} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} (1 - \eta) \quad (4.30)$$

bulunur. Bu denklem (4.24) no' lu eşitlikte verilen f_s 'in tanım denklemdir.

$x_{10} = 0$, $x_{20} = 0$ olarak sıfır başlangıç koşulları (4.25) de uygulanırsa,

$$\begin{aligned} x_1(s) &= f_1(1 - e^{-\frac{1}{\epsilon_f \eta} s}) \\ x_2(s) &= -f_2(1 - e^{-\frac{1}{\epsilon_f} s}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$F(s) = x_1(s) + x_2(s)$$

Burada da maximum sürtünme kuvveti elde etmek için (4.28) de verilen s_e eşitliği kullanılır ve (4.27) eşitliğiyle birlikte,

$$F(s_e) = f_1 - f_2 + f_2 \left(\frac{f_2 \eta}{f_1} \right)^{\frac{1}{1-\eta}} (1 - \eta) \quad (4.32)$$

olarak tesbit edilir. (4.26) ve (4.27) eşitlikleri bize farklı başlangıç koşullarının farklı maximum sürtünme momentini verdiklerini gösterdi. Özel olarak, saturasyonlu histerisiz hareketlerde ki başlangıç koşulları ve sıfır başlangıç koşulları maximum sürtünme kuvvetini aynı s_g noktasında vermektedir fakat (4.30) ve (4.32) eşitlikleri bize max. momentin farklı olduğunu göstermektedir. Aynı zamanda f_s-f_k farkı da ikinci bir faktör olarak farklıdır. (4.29) ve (4.31) eşitlikleri bize her ikisinin de aynı asimtotik cevabı verdiğini göstermektedir yani heriki sürtünme kuvveti büyük s lerde de $F(s) = f_1-f_2 = f_k$ 'ya asimtotik olarak yaklaşacaktır. Bu aynı zamanda (4.24) de f_k için verilen tanımlamadır.

Serbest model davranışı ;

Şekil A.1 ve Şekil A.2 bize Bliman Sorine sürtünme modelinin, sinüsoidal hız girişi için model cevabını göstermektedir. Şekil A.1 de ilk kırılma (breakaway) kuvvetinin diğer kırılma (breakaway) kuvvetlerinden daha düşük olduğunu sıfır başlangıç koşulundan dolayı görmekteyiz.

Şekil A.5 da uygulanan giriş hızının frekansı ve genliği değiştirilmiş ve sürtünme kuvveti yanıtı pozisyona bağlı olarak çizilmiştir. Modelin hız değişiminden bağımsızlığı şekilden açıkça görülmektedir.

Fiziksel sistemdeki model davranışı ;

Basit bir mekanik sistemde Şekil 6.1 , hareket sırasında oluşan sürtünme kuvveti bu modelle tanımlanmaktadır. Sistem üzerinde giriş işareti olarak sinüsoideal $u = A\sin(\omega t)$ moment uygulanıyor ve sürtünme model parametreleri aşağıdaki gibidir,

$$[f_1 \ f_2 \ \varepsilon_f \ \eta \ \alpha] = [0.4224 \ 0.1438 \ 0.0023 \ 0.4999 \ 0]$$

viskoz sürtünme çarpanı kullanılmamıştır. İlk aşamada bu sisteme, giriş moment işareti olarak $A = 0.305$ (bu kuvvet kırılma kuvvetinin az üstünde bir kuvvettir) açısal frekansı $\omega=5 \text{ rad/s}$ verilmiştir. Şekil A.4 ve Şekil A.5 de sürtünme kuvveti zamana ve pozisyona karşı değişimi gösterilmektedir.

Şekiller den hızın işaret değıştirdiğı yerlerde salınımların oluştuğunu görüyoruz bunların nasıl oluştuğunu Bölüm 4.5 açıklanmıştı. Viskoz sürtünmeyi gözönüne almadığımız için $\alpha = 0$ olmuştur ve lineerleştirilmiş sönüm oranı (4.20) eşitliğinden sıfır olarak görülür.

Şekil A.6 ve Şekil A.7 de daha gerçekçi bir durum gözönüne alınarak yani vizkoz sürtünme çarpanı $\alpha = 0.0177 \text{ Nms/rad}$ alınarak oluşan sistem yanıtları gözükmemektedir. Buradan salınımların azaldığını fakat yok olmadığını görürüz. Sonuçda Bliman Sorine modeli için en ciddi sorunlardan birinin düşük hızlarda ki bu salınımlı hareketin olduğunu görürüz. Durağan haldeki sürtünme kuvvetinin salınımını azaltmak yani sönüm oranını artırmak yüksek hızlarda ki viskoz sürtünme çarpanını artırmaktan başka bir yolu yoktur.

Kayma öncesi hareket

Kayma öncesi hareketlerde Bliman Sorine sürtünme modelinden beklenen davranış bir yay karakteristiğı şeklindedir. Bu davranışı gösterebilmek için Şekil 6.1 gözükken sistem üzerinde Bliman Sorine sürtünme modeli düşünülerek simülasyonlar yapılmış ve giriş kuvveti olarak $u = B + A \sin(\omega t)$ uygulanmıştır. $J = 0.0025 \text{ Nms/rad}$ ve Bliman Sorine model parametreleri aşağıda ki gibi verilirse ;

$$[f_1 \ f_2 \ \varepsilon_f \ \eta \ \alpha] = [1.6130 \ 1.0869 \ 0.0201 \ 0.6347 \ 0.0180]$$

(4.16) eşitliği doğrusal sertlik sabitini $\sigma = 72 \text{ Nm/rad}$ olarak vermektedir ve Şekil 4.13 de giriş işareti olarak $u(t) = 0.1 + 0.1 \sin(\omega t)$ momenti sisteme uygulandığı zaman sürtünme momentinin konuma göre değışimini görüyoruz. Buradan küçük giriş momentleri için hemen hemen lineer hareket davranışı görmekteyiz fakat daha büyük giriş momentlerinde yanıtlar nonlineer olmakta ve Şekil A.9 histerisiz göstermektedir. Bu şekillerden tek yönlü giriş işareti mekanik sistemi başlangıç pozisyonuna tekrar geri götürmemektedir. Şekil A.11 dave Şekil A.10 de simetrik iki yönlü giriş işareti ortalama değeri sıfır olacak şekilde uygulandığında sistemin başlangıç pozisyonuna yaklaşık olarak döndüğü görülmektedir. Şekil A.12 de sürtünme momentinin açısal hıza göre değışimi görülmektedir.

5. LUGRE SÜRTÜNME MODELİ

Lugre sürtünme modeli Carlos Canudas de Wit, Henrik Olsson, Karl Johan Aström ve Pablo Lischinsky tarafından önerilmiştir [2]. Model giriş işareti olarak kontak halindeki temas yüzeylerinin birbirlerine göre göreceli hızı alır ve çıkışı olarak sürtünme kuvvetini veren dinamik bir yapıya sahiptir. Sürtünmeyi bir benzetimle kontak yüzeylerinde ki kılların dinamik olarak oluşturduğu olay olarak açıklamaktadır. Bu model basitleştirilmiş Dahl modelinin de gelişmiş hali olarak düşünülür ve aşağıdaki genel yapıya sahiptir,

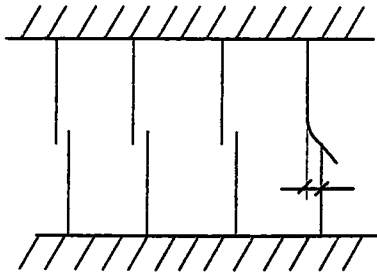
$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (5.1)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1(v) \frac{dz}{dt} + f(v)$$

$v(t)$ temas yüzeyleri arasındaki göreceli hız olmak üzere buradaki değişkenler üzerinde yorumlar ileriki bölümlerde yapılacaktır.

5.1 Sürtünmenin LuGre Modeliyle Açıklanması

Yukarıda kısaca ifade edildiği üzere sürtünme kuvveti kontak yüzeylerinde ki kılların harekete karşı oluşturduğu direnç olarak düşünülür. Başka bir ifadeyle yüzeylerdeki prüzlerin birbiriyle birleştiği temas noktalarında hareketin içiçe geçmiş kılardan oluşan sisteme benzetilerek sürtünme kuvvetinin buradan tanımlanmasıdır. Mikron boyutunda küçük hareketlerde yüzey prüzleri tıbbi bir yay gibi esnerler ve elastik deformasyon dediğimiz hareketi oluştururlar. Büyük miktarda ki hareketlerde plastik deformasyon yada kopma dediğimiz olay gerçekleşir yani kıllar birbiri üzerinde kaymaya başlar. (Şekil 5.1)



Şekil 5.1 Temas eden iki yüzeyi gösteren temsili şekil.

Sürtünmenin ilk olarak bu şekilde yorumlanması Haessing ve Friedland tarafından 1990 yılında yapılmıştır fakat bu tanımlamada sadece bir kıl üzerinde değil birden fazla kıl üzerinde yapılmıştır. Bu simülasyon ve kontrolde uygulanabilirlik açısından uygun olmayan bir yapı oluşturuyordu buna alternatif olarak getirilen modelde yeterince uygulanabilir bulunmamıştır. (Bölüm 3.2.2) Burada izah edilecek olan Lugre modeli bu dağınık kılardan oluşan harekete yeni bir formülasyon vermektedir.

Buraya kadar olan açıklamalardan da anlaşılabacağı üzere mikron düzeyinde ki hareketlerde bu model bir yay karakteristiği gösterecektir. (5.1) eşitliğindeki σ_0 parametresi sertlik çarpanını göstermektedir ve $\sigma_1(v)$ sönüm oranını vermektedir. Büyük miktarda ki hareketlerde kayma olayı oluşur. Kaymaya geçiş $g(v)$ fonksiyonuna bağlıdır ve $g(v)$, stribeck eğrisini veren hıza bağlı olarak değişen nonlinear bir eğridir. (Bölüm 2.1.3.1) σ_1 ve σ_0 hız sıfırda sürtünmenin dinamik yapısını tanımladığından sürtünmenin dinamik parametreleri denir.

Sabit hızlarda kararlı hal sürtünme kuvveti ;

$$F_{ss} = g(v_{ss}) \text{sgn}(v_{ss}) \quad (5.2)$$

olur $g(v)$ fonksiyonunun iyi seçimi *Stribeck* eğrisinin iyi bir yaklaşımla oluşturulmasını sağlar ve genelde tercih edilen model,

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \quad (5.3)$$

ile verilir. $\alpha_0 + \alpha_1$ toplamı durağan haldeki sürtünme kuvvetine eşdeğerdir, α_0 ; *Coulomb* sürtünme kuvvetini vermektedir, v_0 ; durağan halden kaymaya geçerken kullanılan karakteristik bir değerdir. α_0, α_1 ve v_0 modelin statik davranışını verdiğinden statik parametrelerde denmektedir.

$f(v)$ terimi *viskoz* sürtünme kuvvetini vermektedir ve sadece yüksek hızlarda önemlidir ve düşük hız bölgelerinde etkili değildir. Genel olarak tercih edilen viskoz sürtünme modeli hızla lineer bir şekilde değişen $f(v) = \alpha_2 v$ eşitliğidir. Buradaki tanımlamalar bizi takip eden model yapısına götürmektedir.

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \\
g(v) &= \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \\
F &= \sigma_0 z + \sigma_1(v) \frac{dz}{dt} + \alpha_2 v
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Bu yapı Lugre için kullanılan genel formdur. Buradan sonra yapılacak incelemeler bu yapıyı ve aşağıdaki tabloda ki değerleri kullanacaktır.

Tablo 5.1 Simulasyonlar için nominal Lugre sürtünme model parametreleri.

σ_0	σ_1	v_0	α_0	α_1	α_2
[N/m]	[Ns/m]	[m/s]	[N]	[N]	[Ns/m]
[Nm/rad]	[Nms/rad]	[rad/s]	[Nm]	[Nm]	[Nms/rad]
260	1.2	0.1	0.279	0.0389	0.0177

5.2 Durum Uzayında Formülasyon

Lugre modelinin $s = \int_0^t v(\tau) dt$ değişken dönüşümü yapılarak tekrar formüle

edilmesi analizler için çok faydalı olacaktır. s hızın yön değiştirdiği enson noktaya olan mutlak uzaklığı belirtmek üzere. (5.4) de standart form,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{ds} &= \text{sgn}(v) - \sigma_0 \frac{1}{g(v)} z \\
F &= \sigma_0 z + |v| \sigma_1 \frac{dz}{ds} + \alpha_2 v
\end{aligned} \tag{5.5}$$

ifadesine dönüşür. çok küçük düzeyde ki hareketlerde sönüm oranını ve viskoz sürtünme terimini bir süre için ihmal edecek olursak, (yani $\sigma_1 = 0$ ve $\alpha_2 = 0$)

$$\frac{dF}{ds} = \sigma_0 \left(\text{sgn}(v) - \frac{\sigma_0}{g(v)} F \right) \tag{5.6}$$

birinci dereceden $\frac{\sigma_0}{g(v)}$ olarak hıza bağılı bir katsayı , hızın işareti ve σ_0 gibi bir

çarpandan oluşan durum uzayında genel bir ifade alır. $g(v)$ ' nin standart olarak parametreleri göz önüne alınırsa $\alpha_0 \leq g(v) \leq \alpha_0 + \alpha_1$ aralığında değer alacaktır.

Dolayısıyla (5.6) 'da verilen eşitlik ;

$$\frac{dF}{ds} = \sigma_0 \operatorname{sgn}(v) - \frac{\sigma_0^2}{\alpha_0 + \alpha_1} F \quad (5.7)$$

ve

$$\frac{dF}{ds} = \sigma_0 \operatorname{sgn}(v) - \frac{\sigma_0^2}{\alpha_0} F \quad (5.8)$$

olacak şekilde sınırlandırılmış bir çıkışa sahip olacaktır.

Düşük hızlarda (5.6) eşitliği bu sınırlandırılmış çıkışlardan ilk formdakine (5.7). Yüksek hızlarda ise ikinci formdakine (5.8) sahip olacaktır. Bu şekilde sınırlı değer alan sistemler birinci dereceden katsayıları değişmeyen sistemlerdir. Yani sistem çıkışı hızdan bağımsız sadece o anki pozisyona bağlıdır.

Lugre modelinin hıza bağılı olması (5.6) denkleminde hıza bağılı olarak $\alpha_0 \leq g(v) \leq \alpha_0 + \alpha_1$ aralığında değer alan $g(v)$ fonksiyonuyla açıklanabilir. Bu iki sınır noktası arasındaki geçiş v_0 hızına ve sistem hızına bağlıdır. *Coulomb* sürtünme kuvvetinden daha büyük bir kırılma kuvveti modellemek istiyorsak (5.7) de verilen sınır değerinde ki denklem çıkışının maksimum olduğu noktada bu kuvveti elde ederiz. Bu noktadan daha düşük mesafelerde daha küçük kırılma kuvvetleri oluşacaktır. Deneysel olarak da gözlemlenen bir olaydır. Yukarıda (5.6) la gösterilen sistem denklemi için pozisyon sabiti $\frac{g(v)}{\sigma_0}$ dır ve fiziksel sistemin

kayma öncesi hareketini belirler.

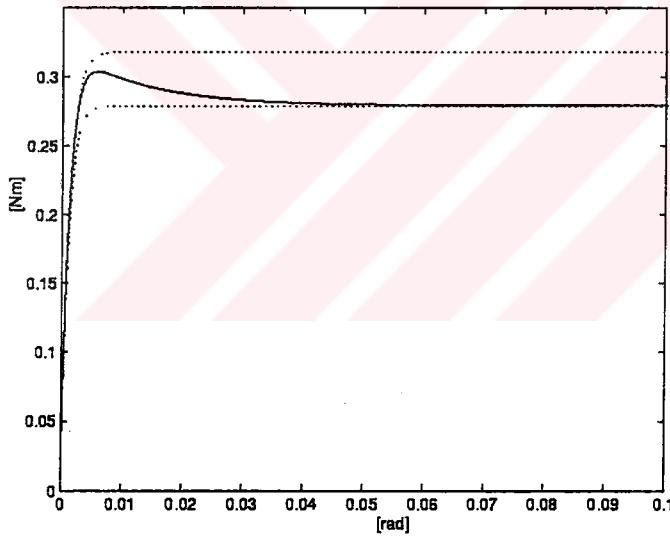
ε ile gösterilen, kayma öncesi hareket boyutunda bir pozisyon olsun. Lugre sürtünme modeli ile tanımlanan bir sistem için yaklaşık olarak aşağıda ki eşitlikle belirtilir.

$$\varepsilon = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\sigma_0} \ln(10)$$

sıfırdan farklı olan σ_1 ve v_0 değerleri gözönüne alınmasına rağmen yukarıdaki açıklamalar ve sonuçlar geçerliliğini gösterir. Daha sonradan göreceğimiz üzere σ_1 daha karmaşık özelliklerini modellemektedir. σ_1 zamana karşı değişen z ile

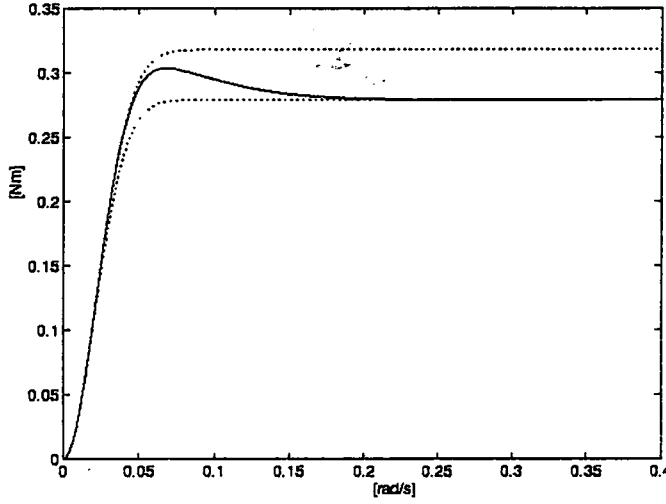
çarpım durumunda olduğu için sürtünme kuvvetine ek bir bileşen olarak girmektedir. Bunu şöyle de açıklayabiliriz z artınca sürtünme kuvvetindeki artış (5.6) da verilen eşitlikten ($\dot{z} > 0$ olduğundan) daha büyük olacaktır. Eşdeğer olarak z de azalma olduğu zaman, $\sigma_1 \dot{z}$ bileşeni negatif değer alacak ve (5.6) da ki modelden daha hızlı olarak toplam sürtünme kuvvetinin değeri düşecektir. (5.5) eşitliğinde $\sigma_1 \dot{z}$ teriminin $\sigma_1(v) \frac{dz}{ds}$ şekline dönüştüğünü görüyoruz. Böylece hıza bağlı değişen üç tane yapı modelimizde görülmektedir. Bunlardan birincisi (5.6) denkleminde tanımlanan hıza bağlı değişen $g(v)$ fonksiyonu ikincisi $\sigma_1 \dot{z}$ sürtünme terimi ve üçüncüsü $\alpha_2 v$ olarak tanımlanan viskoz sürtünme terimidir.

Şekil 5.2 de yukarıda tanımlanan durumlar sınırlandırılmış sistem cevaplarıyla gösterilmiştir. Simulasyonda sürtünme modeline sıfır başlangıç koşulları altında sinusoidal hız girişi uygulanmıştır.



Şekil 5.2 Pozisyona göre sürtünme kuvvetini gösteren sınır değerleri arasında Lugre sürtünme modeli yanıtı.

Şekil 5.3 hıza bağlı olarak sınır değerler aralığında geçişin nasıl olduğunu göstermektedir. Simulasyonda v_0 , 0.1 rad/sn olarak alınmıştır bu hız değerinde sistem çıkışı iki sınır değer aralığı içinde ortalama sürtünme kuvvetine karşı düşer.



Şekil 5.3 LuGre sürtünme modelinin hıza göre (iki sınır değer arasında) değişimi.

(5.5) eşitliğini tekrar yazacak olursak,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \text{sgn}(v) - \sigma_0 \frac{1}{g(v)} z \\ F &= \sigma_0 z \left(1 - \sigma_1 \frac{|v|}{g(v)} \right) + (\sigma_1 + \alpha_2) v \end{aligned} \quad (5.9)$$

Bu eşitliklerden $\sigma_1 z$ teriminin viskoz sürtünmeye ek olarak bir sürtünme kuvveti oluşturduğu, küçük hareketlerde ki sertlik sabiti $\sigma_0 \left(1 - \sigma_1 \frac{|v|}{g(v)} \right)$ gibi bir faktörle hıza bağlı olarak değişen bir yapı gösterdiğini görüyoruz.

Yorum 1 : Sınırlandırılmış sistemler Bliman Sorine modelinde bulunan aynı tür birinci dereceden sabit katsayılı (space invariant) sistemlerdir. Bliman Sorine modeli durağan haldeki sürtünme kuvvetini tanımlayabilmek için birbirine paralel iki birinci dereceden sistem kullanmıştı. Lugre modeli ise aynı sürtünme kuvvetini oluşturmak için bir tane birinci dereceden değişken katsayılı sistem kullanmaktadır. Bu model iki tane birinci dereceden sabit katsayılı sistemle sınırlandırılmıştır. Böylelikle Lugre modeli aynı sürtünme olayını tek bir durum değişkeni ile modelliyeabilmektedir. Şekil 5.3

Dikkat 2 : Sınırlandırılmış sistemler gerçekte dikkat edilecek olursa Dahl modelinin kendisidir. Buradan Lugre modeli ile Dahl modeli arasında ki ilişki açık bir şekilde görülebilir. Şekil 5.2

5.3 Lineerleştirme

Bliman Sorine modelinde ki gibi Lugre modelinde (5.4) eşitliğine göre $v_0 = 0$ ve $z_0 = 0$ denge noktasında lineerleştirirsek aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \alpha_2 v \end{aligned} \quad (5.10)$$

(5.10) da ki ilk denklemi sürtünme kuvvetini veren eşitlikte yerine koyarsak ;

$$F = \sigma_0 x + (\sigma_1 + \alpha_2) v \quad \text{olur.}$$

Hızın sıfıra yakın olduğu bölgelerdeki model davranışını yakından incelemek için bir M kütleinin hareket denklemini aşağıdaki gibi lineerleştirilmiş Lugre modelini kullanarak oluşturalım,

$$M \ddot{x} + (\sigma_1 + \alpha_2) \dot{x} + \sigma_0 x = 0$$

bu yapıyı genel ikinci dereceden sistem eşitliğiyle karşılaştıracak olursak ;

$$M \ddot{x} + 2\xi w \dot{x} + w^2 x = 0$$

sistemin sönüm oranı ve doğal frekansını aşağıdaki gibi buluruz,

$$w = \sqrt{\frac{\sigma_0}{M}} \quad (5.11)$$

$$\xi = \frac{\sigma_1 + \alpha_2}{2\sqrt{M\sigma_0}} \quad (5.12)$$

(5.12) eşitliğinin (4.20) de ki eşitliğe çok benzer olduğunu görüyoruz fakat (5.12) ifadesinde sönüm oranını kontrol eden σ_1 gibi ek bir parametreye sahibiz, yani sönüm oranını değiştirmek için diğer model parametrelerini değiştirmeksizin σ_1 ayarlayarak değiştirme imkanım vardır. Doğal olarak σ_1 değişmesi model davranışını etkileyecektir fakat bu eşitlik bize fazladan bir derece serbestlik avantajını vermektedir. Yapılan simülasyonlarda Lugre modelinin Bliman Sorine modelindeki gibi salınım yapmadığı görülmüştür.

$v_0 = 0$ ve $z_0 \neq 0$ denge noktası için yapılan lineerleştirme bize aşağıdaki eşitliği verir.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= G(v, z_0)v \\ F &= \sigma_0 z + (\sigma_1 G(v, z_0) + f'(0))v \end{aligned} \quad (5.13)$$

burada ,

$$G(v, z_0) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sigma_0 z_0}{g(0^+)}\right) & v > 0 \\ \left(1 + \frac{\sigma_0 z_0}{g(0^-)}\right) & v < 0 \end{cases}$$

olarak asimetrik $g(v)$ oluşturulmaktadır. Sertlik sabiti ve sönüm oranı $G(v, z_0)$ gibi bir çarpanla ifade edildiğinden direkt olarak etkilenmektedir.

5.4 Hıza Bağlı Sönüm Oranı

Hızın tüm değişim aralığı boyunca sönüm oranı sabit olması için bir sebep yoktur. Düşük ve yüksek hızlarda yapılan deneysel sonuçlardan bir çok farklı durumla karşılaşmıştır. Gözlemlenen fiziksel durumları iyi bir şekilde ifade eden matematiksel ifade $\sigma_1(v)$ (5.27) 'de ki eşitlik olduğu bulunmuştur. İki tür hıza bağlı $\sigma_1(v)$ fonksiyonu önerilmiştir. Bunlar sırasıyla:

$$\sigma_1(v) = \sigma_1 e^{-\left(\frac{v}{v_d}\right)} \quad (5.14)$$

$$\sigma_1(v) = \sigma_1 / v \quad (5.15)$$

(5.14) eşitliği ek olarak v_d parametresini tanımlar. (5.15) eşitliği uygulanabilirlik açısından daha kolaydır.

Yüksek hızlarda yapılan birçok deneyde farklı durumlarla karşılaşmıştır. Farklı durumlar bize farklı hızlarda farklı sönüm oranının kullanılmasının gerekliliğini göstermektedir. (5.14) de verilen hıza bağlı sönüm oranı deneysel olarak da yapılan çalışmalarda gözlemlendiği üzere sürtünme gecikmesini daha iyi modelleyebilmektedir.

Hıza bağlı sönüm oranı σ_1 'nin passivity ve kararlılık için oluşan bazı matematiksel güçlükleri ortadan kaldırdığı da gözükmemektedir. Uygulamalarda bu passivity tanımlamasındaki matematiksel şartlar doğrultusunda ortaya bir problem çıkmamıştır. Farklı olarak hızdan bağımsız tanımlanması da dikkate değer sonuçlar üretmektedir bu nedenle bu tip standart (5.4) modelini terk etme gerekliliği görülmemiştir.

5.5 Asimetrik Sürtünme Karakteristikleri

Gerçek sistemlerde, sürtünme karakteristikleri çoğunlukla hızın işaretine bağlıdır. Böyle bir tanımlama yapmanın Lugre modeli için de bir sakıncası yoktur.

Asimetrik model kullanınca, static parametreler aşağıdaki gibi üst indisleri hızın işaretine bağlı olarak değişen değerler olacaktır.

$$\alpha_0^+, \alpha_0^-, \alpha_1^+, \alpha_1^-, \alpha_2^+, \alpha_2^-, v_0^+, v_0^-$$

Yorum 1 → Asimetrik parametre tayini süreksiz bir $g(v)$ fonksiyonu vereceğine dikkat edersek. (5.4) de ki ilk eşitliğin sağ tarafının hızın sıfırdaki değerinde de tanımlı olduğunu görürüz.

Dinamik parametreler için bu bağımlılık hızın işaretine değil z nin işaretine bağlıdır. Bu tanım (5.10) da ki lineerleştirilmiş terim incelenirse daha iyi anlaşılacaktır. Sürtünmenin bir yay karakteristiği gösterdiği kayma öncesi harekete, yay sabiti σ_0 ve sönüm oranı σ_1 eğer sabit ve negatif işaretli (indis) bir değer alıyorsa hızın yöndeğiştirilmesi halinde belli bir süre σ_0 ve σ_1 buna

rağmen negatif indisli değerini koruyacaktır. Bu yorumdan anlaşılacağı üzere asimetrik modeldeki dinamik parametreler ($\sigma_0^+, \sigma_0^-, \sigma_1^+, \sigma_1^-$ olarak gösterilir) üssel indisleri hızın işaretini değil z in işaretini göstermektedir.

5.6 Model Parametrelerinin Tesbiti

Buradaki model parametre tanımlaması özellikle statik parametreler için dikkate değer sonuçlar vermektedir.

Uygulanacak olan prosedür aşağıdaki eşitlik üzerine oluşturulmuştur.

$$J \ddot{q} = u - \alpha_2 \dot{q} - \tau \quad (5.16)$$

u ; uygulanan moment işareti, $\alpha_2 \dot{q}$; sürtünme momentinin doğrusal viskoz bileşenini ve τ sürtünme momenti, (5.4) eşitliğindeki viskoz sürtünme kuvveti hariç genel **Lugre sürtünme** modelidir.

Model parametrelerinin tesbiti 4 adımda gerçekleştirilecektir.

1. Viskoz sürtünme çarpanı (α_2) ve *Coulomb* sürtünmesi (α_0),
2. α_1 parametresinin tesbiti,
3. σ_0 ve σ_1 dinamik parametrelerinin tesbiti,
4. v_o stribeck hızının tesbiti,

Adım.1 $\rightarrow \alpha_0, \alpha_2$

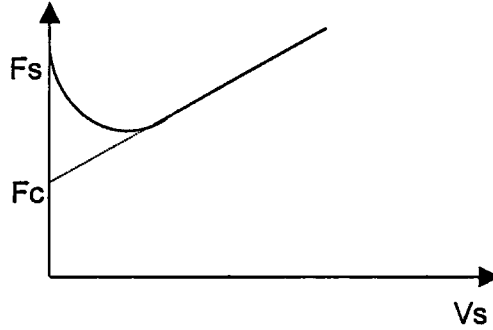
α_2, α_0 parametreleri, kararlı hal sürtünme kuvveti eşitliğinden bulunur.

$$F_{ss} = g(v_{ss}) \operatorname{sgn}(v_{ss}) + \alpha_2 v_{ss}$$

$v_{ss} > v_o$ için $g(v_{ss}) = \alpha_0$ vereceği için,

$$F_{ss} = \alpha_0 \operatorname{sgn}(v_{ss}) + \alpha_2 v_{ss} \quad (5.17)$$

Vizkoz sürtünmeyi tesbit etmek için *Stribeck* eğrisini gözönüne almak durumundayız. Bu dikkat edilerek yapılan ölçümlerden en küçük kareler yaklaşımı ile uygun α_2 viskous sürtünme çarpanı elde edilir. *Coulomb* sürtünmesini bulmak için,



Şekil 5. 4 Sürtünme kuvveti –hız karakteristik eğrisi.

Şekil 5.4 den kolayca anlaşılacağı üzere viskoz sürtünme kuvvetinin eğiminin $v_{ss} = 0$ 'daki sürtünme kuvveti eksenini kestiği değer bulunmalıdır.

Adım2. →

Kontrol işaretinin değeri herhangi bir limit çevrime girdiğinde dikkat edilecek olursa değeri kırılma (breakaway) momentine eşittir. Lugre modeline göre hızla bağlı değişen kırılma (breakaway) kuvvetini budurumda gözönünde bulundurmazsak, buradaki kontrol işaretinden kırılma (breakaway) momentinin değerini tesbit etmiş ve $\tau_B = \alpha_0 + \alpha_1$ eşitliğinden $\alpha_1 = \tau_B - \alpha_0$ şeklinde elde etmek mümkün olacaktır.

Adım3. →

(5.10) ve (5.13) eşitlikleri model dinamik parametrelerinin tesbiti için uygun düzenlerdir. (5.10) eşitliğini tekrar yazacak olursak,

$$F = \sigma_0 x + (\sigma_1 + \alpha_2) v \quad (5,18)$$

Bu eşitliğe göre $z(0) = x(0) = 0$ ise $z(t) = x(t)$ olacaktır. Buradan kararlı hal pozisyonu $x = 0$ için sürtünme kuvveti değeri de sıfır olacaktır. Durağan hal bölgesinde $x = 0$ 'a yakın mikron düzeyindeki hareketlerde bu lineerleştirilmiş model kullanılarak en küçük kareler metodu ile σ_0 ve σ_1 parametrelerinin tesbiti

yapılabilir. Eşitlikteki sürtünme kuvveti F , x ve v değerleri ölçülmesi gerekli değişkenlerdir fakat yapılan uygulamalarda F , x ve v 'nin bu bölgelerde ölçülmesi çok zor olduğu görülmüş başka yaklaşımlara gidilmiştir. Gene de istenen manada bir kolaylık bulunamamıştır. Gerçekte sadece σ_0 tesbiti mümkün olmakta, σ_1 ise iyi bir sönüm oranı verecek şekilde seçilmektedir.

4. Adım $\rightarrow v_0$

Stribeck hızı, karalı hal hızının düşmesiyle artan kararlı hal sürtünme kuvvetinin çizmiş olduğu ve stribeck eğrisi olarak da adlandırılan karakteristik bölgenin tesbiti ile bulunabilir. Fakat bu bölge çok düşük hızlarda olduğu için deneysel olarak gözlemlenmesi çok zordur. Bu yüzden başka bir yaklaşım aranmıştır. Lugre modelinde v_0 hızı hareketin durağan halden kayan hale geçişini tanımlayan karakteristik bir değerdir. Sonuç olarak durağan hal bölgesinden başlayarak, kaymaya (slip) geçene kadar uygun momenti yavaş yavaş artırdığım zaman elde ettiğim hız ve sürtünme momenti değerleri bir grafik üzerinde göstererek v_0 hızını şöyle tanımlayabiliriz ; v_0 , sürtünme kuvvetinin $(\alpha_0 + \alpha_1)/2$ değerini aldığı noktadaki değerdir. Yani kırılma (breakaway) momentinin, kinetik sürtünmeye düşerken ortalama sürtünme momentinin karşı düştüğü hız değeridir.

Bu grafiksel yöntem bize tam olarak olmasa da olması gereken bir değer aralığında ortalama bir sonuç sağlayacaktır. Tabi ki daha uygun bir sayısal yaklaşım optimal v_0 verecek bir yöntem geliştirilebilir.

5.7 Modelenen Sürtünme Olayları

Bliman Sorin modelinde olduğu gibi Lugre modelide kayma öncesi hareket ve durağan hal kuvvetini açıklayabilmektedir. Ayrıca Lugre modeli hıza bağlı olduğundan değişken kırılma (breakaway) momentini modelleyebilmektedir. Bliman Sorine sürtünme modeli sadece pozisyona bağlı *Stribeck* etkisini modellediğinden Şekil 4.6 dan gözüktüğü gibi hızın yavaşladığı ve işaret değiştirdiği bölgede bu etkiyi modelleyememektedir. Lugre modeli kararlı hal *Stribeck* etkisini tam olarak modelleyebilmektedir. Ayrıca Bliman Sorine pozisyonun mutlak değerine bağlı olduğundan sürtünme gecikmesi gibi (frictional lag) sürtünme olayını modelleyememektedir. Lugre modeli (5.6) da ki eşitlikten de gözüktüğü gibi hıza bağlı değişen çarpandan dolayı $(g(v))$ sürtünme gecikmesini modelleyebilmektedir.

5.8 Simülasyonlar

Bu bölümde Lugre modelinin özelliklerini simülasyonda göstereceğiz. Bliman Sorine modelinde görülen başlangıç koşullarına göre değişen kırılma (breakaway) kuvveti Lugre modeli için söz konusu değildir. Bu netice Lugre modelinin tek durum değişkeninden oluşmasının sonucudur. Lugre modelinde sınırlandırılmış ($g(v)$ fonksiyonuna göre) sistemler her zaman aynı maximum değerine mutlaka ulaşır fakat pozisyonu (bulunduğu yer) başlangıç şartına göre değişmektedir. Bu nedenle kırılma noktası başlangıç şartlarına bağlı değildir fakat hızın değişimine bağlıdır. Kayma öncesi hareket Bliman Sorin modelinde olduğu gibi başlangıç koşullarına bağlıdır.

Bir sisteme uygulandığı zaman durağan hal bölgesinde olduğu görülen büyük osilasyonlu hareket problemi bu modelde gözlemlenmemiştir. (5.12) den açık bir şekilde görüldüğü gibi lineerleştirilmiş sönüm oranı σ_1 parametresiyle kontrol edilebilmektedir. σ_1 dinamik parametresi iyi bir sönüm verecek şekilde seçilebilir.

Serbest model :

Şekil B.1 ve Şekil B.2' den Lugre modelinin sinusoidal hız girişi için gösterdiği cevabı görüyoruz. En büyük önemli fark Bliman Sorine modelinin aynı giriş işareti için gösterdiği simülasyon sonuçlarından başlangıç koşullarına bağlı olarak gözüken ilk düşük kırılma (breakaway) sürtünme kuvvetine sahip olmamasıdır. Ayrıca model durağan halden kaymaya geçerken sürtünme kuvvetinde bir peak gözükmemektedir. Şekil B.3 de sinusoidal hız giriş işaretinin farklı frekanslarda olması durumunda model yanıtını görmekteyiz modelin hıza bağlı değişim özelliği burada açıkça görülmektedir.

Sürtünme modelinin sistem üzerinde davranışı ;

Burada kullanılan sistem modeli Şekil 6.1' de gözüken modelle aynı olacaktır. Bu sefer sürtünme kuvvetini Lugre modeli oluşturacak şekilde parametreleri aşağıdaki gibi alıyoruz.

$$[\sigma_0 \ \sigma_1 \ v_0 \ \alpha_0 \ \alpha_1 \ \alpha_2] = [260 \ 1,2 \ 0,1 \ 0,279 \ 0,0389 \ 0]$$

Şekil B.4 de ki sistem yanıtına dikkat edilecek olursa viskoz sürtünme olmamasına karşın iyi bir sönümlü davranış görülmektedir. σ_1 parametresi durağan hal bölgesinde viskoz sürtünme çarpanına ek olarak iyi bir sönüm sağlamaktadır. Viskoz sürtünme çarpanının sıfırdan farklı olduğu durumda ($\alpha_2 = 0.0177 \text{ Nms / rad.}$) sistem yanıtı Şekil B.5’de görülmektedir.

Lugre modelinin farklı açısal hız değişimi Şekil B.6’ da görülmektedir. Buradaki simülasyonda kırılma (breakaway) momenti bölgesi büyütülerek şekilde gösterilmektedir. $w = 1 \text{ rad / sn.}$ $w = 5 \text{ rad / sn.}$ alınarak aynı model çıkışı iki kez çizilmiştir. Şekil B.6 da kırılma (breakaway) sürtünme momentinin açısal hızın $w = 5 \text{ rad / sn.}$ olması durumunda daha düşük bir değer aldığını görmekteyiz.

Sönüm parametresinin sistem yanıtı üzerindeki iyileştirmesini daha iyi görebilmek için σ_1 sıfır yaparak aynı giriş momenti için sistem yanıtı Şekil B.7 de gösterilmiştir. Zamana göre çizilen grafikden durağan hal bölgesinde Bliman Sorine modeline benzer bir salınım hareketi olduğu yeni model içinde görmekteyiz.

Önemli bir sonuç olarak σ_1 z sönüm terimi hızın yön değiştirdiği bölgede iyi bir model çıkışı sağlayabilmek için bulunması gerekli bir sürtünme bileşenidir.

Küçük Hareketler:

Çok küçük miktarlardaki hareketler için Lugre modelinden beklenen davranış doğrusal bir yay karakteristiği şeklindedir. Bu davranışı simülasyon ortamında görmek için Lugre sürtünme modeli kullanılarak bir kütlenin dinamik hareket denklemini yazacağız.

Kütleye uygulanacak moment $u = B + A \sin(wt)$ formunda olacaktır Şekil B.8 de tek yönlü farklı genliklerdeki giriş momenti için sistem yanıtı görülmektedir. Şekildende görüldüğü üzere küçük giriş torkları için hemen hemen lineer bir sürtünme momenti Şekil B.8 a) gözlemekteyiz fakat daha büyük genlikdeki giriş işaretlerine karşılık sistem yanıtı nonlineer ve histerizis şeklini almaktadır.

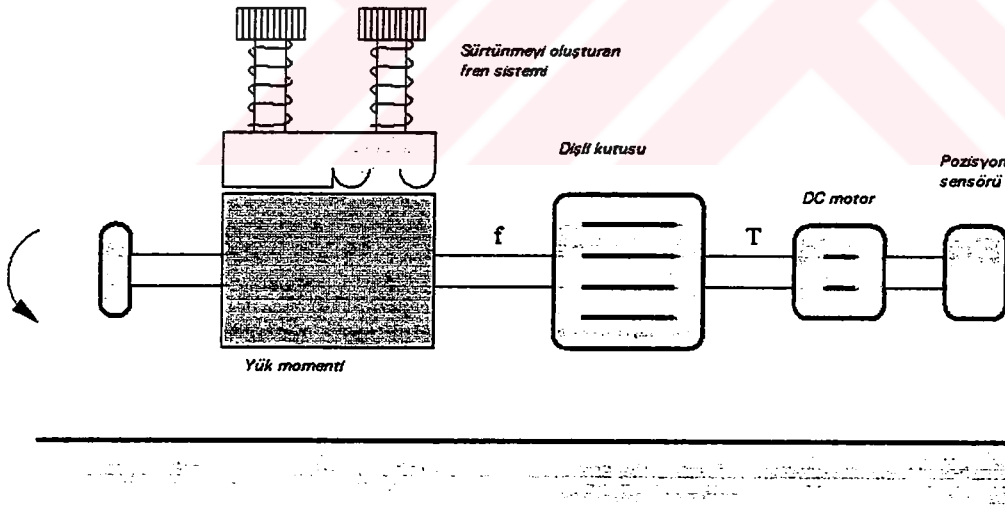
Şekil B.8 b)

6. SÜRTÜNMENİN GÖZLEMLENMESİ VE KOMPANZASYONU

6.1 Hareket Kontrol Sistemlerinde Limit Çevrim Oluşumu

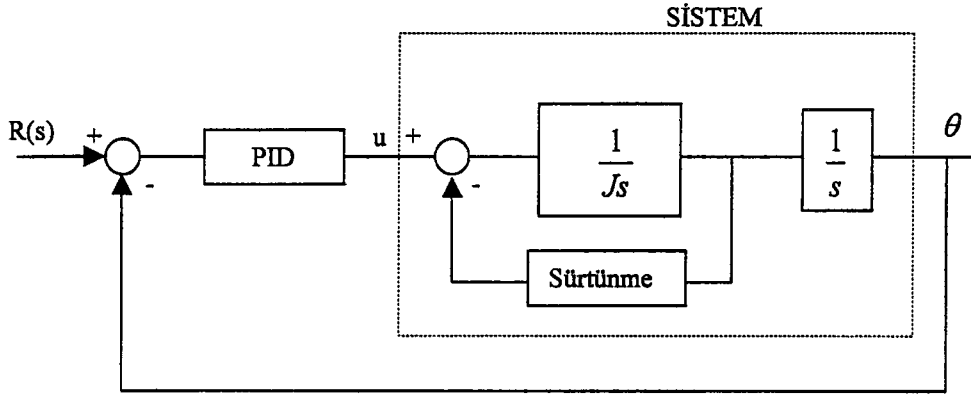
Sürtünmeli sistemlerde PID tabanlı yapılan pozisyon veya hız kontrolünde limit çevrimler oluşur. Bu olay sürtünme etkisinin hızın sıfıra yakın bölgelerindeki çok dinamik değişimi neticesi oluşan kayma-durma (stick-slip) hareketini doğurur. Burada simülasyon ortamında oluşturulan basit bir sistem üzerinde modelleme performansını inceleyeceğiz. Simülasyonda kullanılan gerçek model parametreleri ve sisteme ait değerler İsveç Teknoloji Enstitüsünden* elde edilmiştir.

Bir PID kontrolörü kullanılarak yapılacak pozisyon kontrolünde aşağıdaki sisteme ait oluşturulan Şekil 6.2 de ki blok diyagram kullanılacaktır.



Şekil 6.1 Deney düzeneğinin şematik gösterimi.

* Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology



Şekil 6.2. Simülasyonlarda kullanılacak blok dyagram

İlk aşamada mekanik sisteme ait sürtünme momentinin klasik olarak kullanılan hızla lineer olarak değişen bir model olarak tanımlayarak aşağıdaki gibi PID kontrolörü tasarlayalım.

PID kontrolörü ;

$$PID(s) = K_p + K_d s + \frac{K_I}{s} \quad (6.1)$$

Sisteme ait kapalı çevrim karakteristik polinomu ;

$$(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2) (s + w_n)$$

Sistemin transfer fonksiyonu ;

$$G(s) = \frac{1}{s(Js + \alpha)} \quad (6.2)$$

Kapalı Çevrim Transfer Fonksiyonu;

$$T(s) = \frac{\theta(s)}{R(s)} = \frac{1/J(K_I + K_p s + K_d s^2)}{s^3 + \left(\frac{\alpha + K_d}{J}\right)s^2 + \frac{K_p}{J}s + \frac{K_I}{J}} \quad (6.3)$$

Burada ki limit çevrim oluşumu yalnızca yağlamalı yüzeyler için oluşturulmuş sürtünme modeli için geçerlidir. Tablo 6.1 de kapalı çevrim karakteristik

polinomuna ait tasarım parametreleri ve Tablo 6.2 de bu değerlere göre uygun PID kazançları verilmiştir. ($J=0.0025\text{kg/m}^2$ $\alpha = 0.0177\text{Nt.sn/rad.}$)

Tablo 6.1 Kapalı çevrim kutuplarını veren karakteristik değerler.

$w_n [\text{rad/s}]$	ξ
6	0.5

Tablo 6.2 PID parametreleri.

K_p [Nm/rad]	K_I [Nm/rads]	K_d [Nms/rad]
0.18	0.54	0.013

Referans giriş işareti olarak 1 rad. verilecektir. Aşağıda gösterilen farklı iki sürtünme etkisi modeli kullanarak simülasyonlar yapılacaktır.

1- Lugre modeli.

2- Bliman Sorin modeli.

Simülasyonlarda kontrolör parametreleri aynı değerlerde sabit tutulmuştur. Mekanik sisteme ait sürtünme momentinin bu farklı iki sürtünme modeli ile tanımlanması İsveç Teknoloji Enstitüsü Laboratuvarlarında yapılmış ve model parametreli sırasıyla aşağıdaki gibi gözlenmiştir.

6.1.1 LuGre Sürtünme Modeli

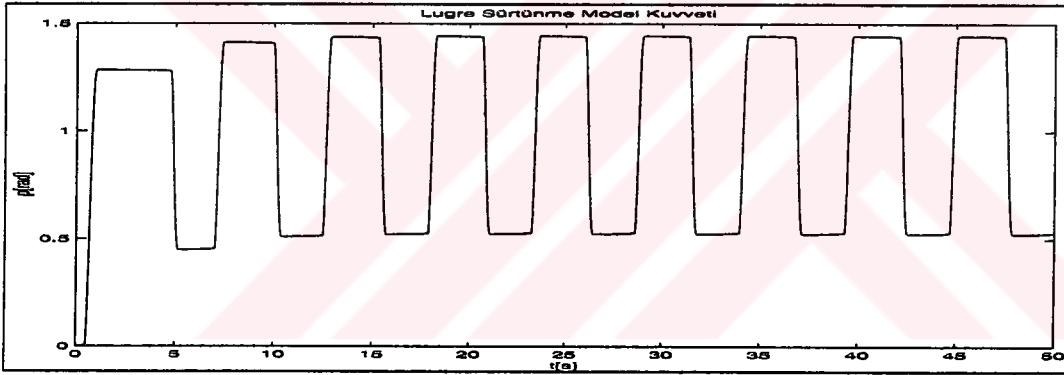
Mekanik sistemde Lugre dinamik sürtünme modeliyle temsil edilen sürtünme momenti Şekil 6.1 de ki blok diyagramda kullanılmıştır. Lugre model parametreleri Tablo 6.3 de verilmiştir.

Tablo 6.3 Lugre model parametreleri.

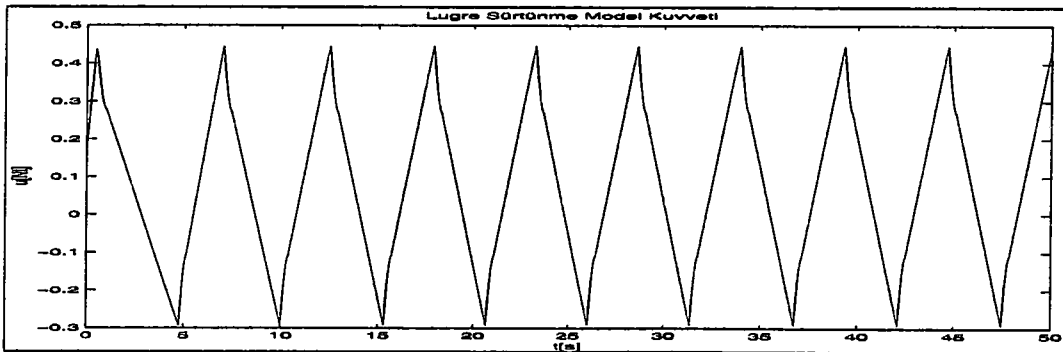
σ_0	σ_1	ν_0	α_0	α_1	α_2
[-] 280	1	0.1	0.14	0.16	0.017
[+] 280	1	0.1	0.30	0.16	0.017

Şekil 6.3 de pozisyona göre simetrik, kontrol işaretine göre asimetrik bir limit çevrim oluşmaktadır. Bu model pratikte karşılaşılan sürtünme olayını doğru olarak modelliyeabilmektedir. Bölüm 5.2 de verilen özelliğe göre kayma öncesi hareketin farklı yönlerde yaklaşık olarak $2mrad.$ ve $4mrad.$ olması gereklidir. Kayma öncesi hareketi pozisyon sinyalini yeteri kadar büyüttüğümüzde açıkça görmekteyiz. Şekil 6.10

Şekil 6.4 kontrol işaretinin büyütülmüş görüntüsünü ve durağan halden kayma haline geçişi açık bir şekilde göstermektedir.



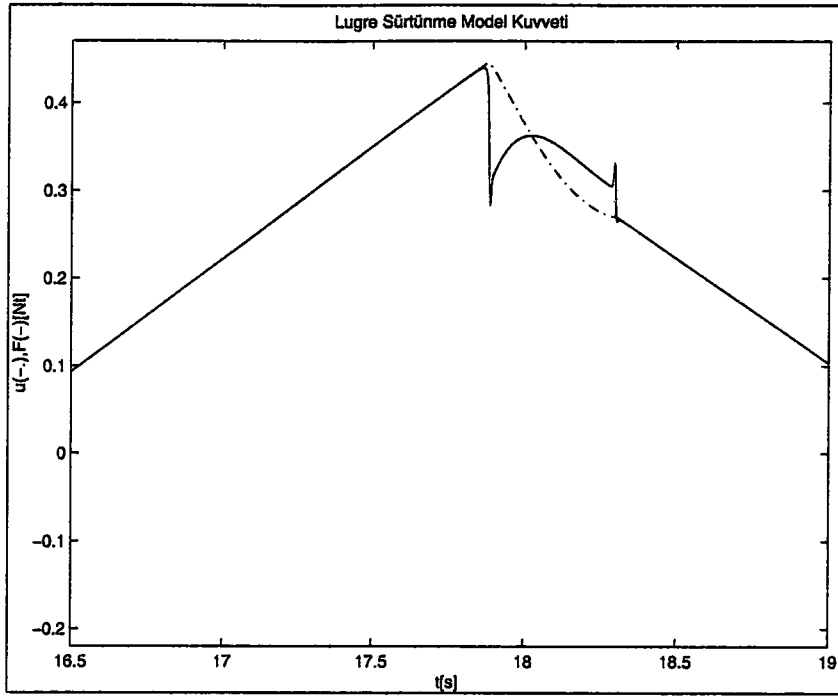
a)



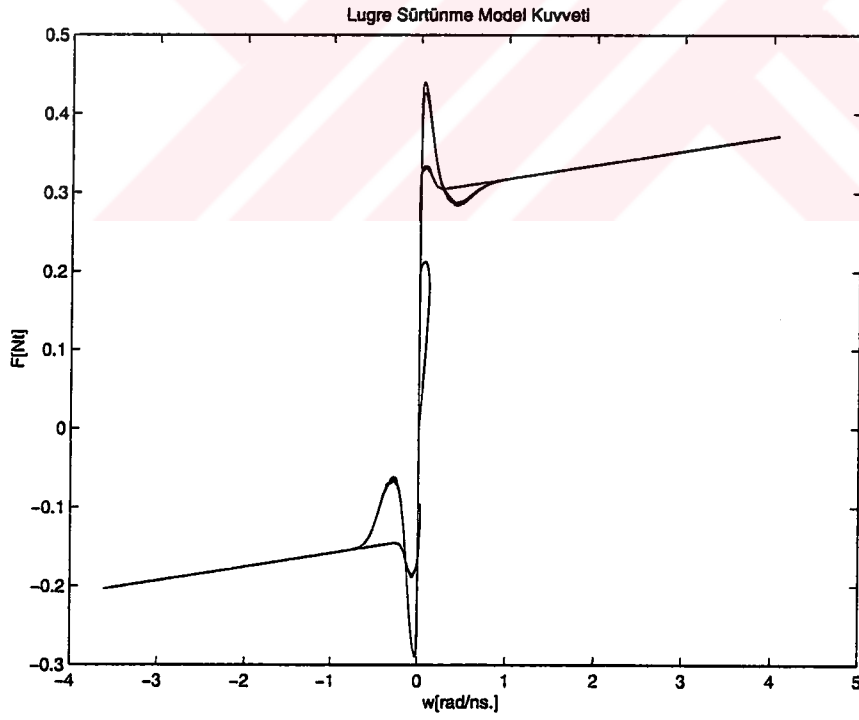
b)

Şekil 6.3 Lugre modeline göre limit çevrim oluşumu,

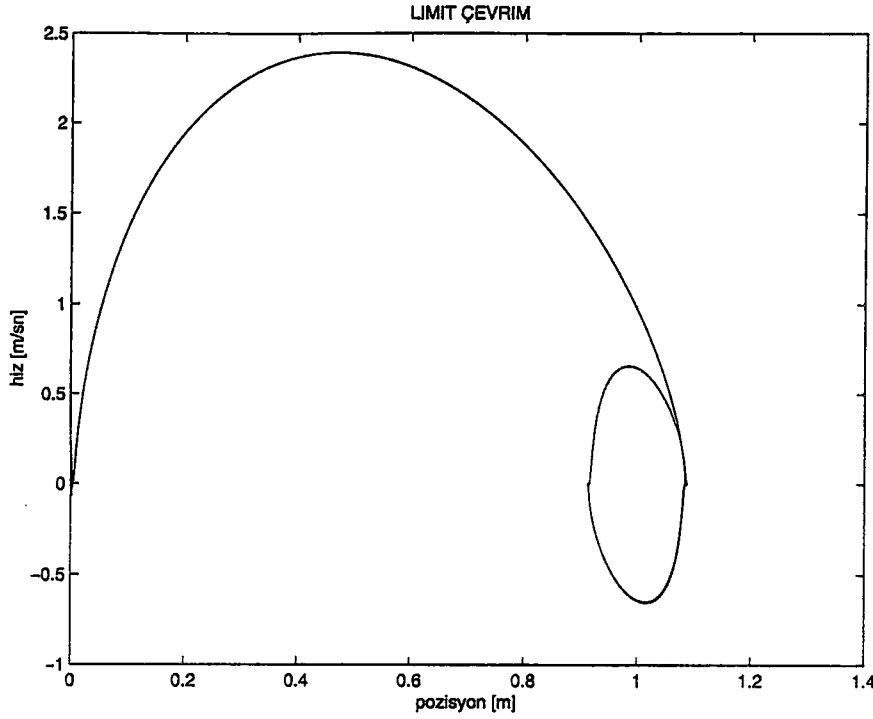
- a) Zamana göre pozisyon,
- b) Zamana göre kontrol işareti,



Şekil 6.4 Sürtünme momenti ile kontrol işaretinin birlikte gösterimi.



Şekil 6.5 LuGre sürtünme momentinin hıza göre değişimi.



Şekil 6.6 Durum uzayında limit çevrim oluşumu.

Laboratuvarıda yapılan deneysel sonuçlara en iyi bir şekilde uygunluk gösteren sürtünme modeli Lugre'dir.

6.1.2 Bliman Sorine Sürtünme Modeli

Tablo 6.4 de model tanım parametreleri. Tablo 6.5 ise model parametreleri verilmiştir. Bu parametreleri seçerken kayma öncesi hareketin yaklaşık olarak $s_e \approx 5 \text{ mrad}$ ve dolayısıyla $s_p \approx 20 \text{ mrad} > 3s_e$ olacak şekilde düşünülmüştür.

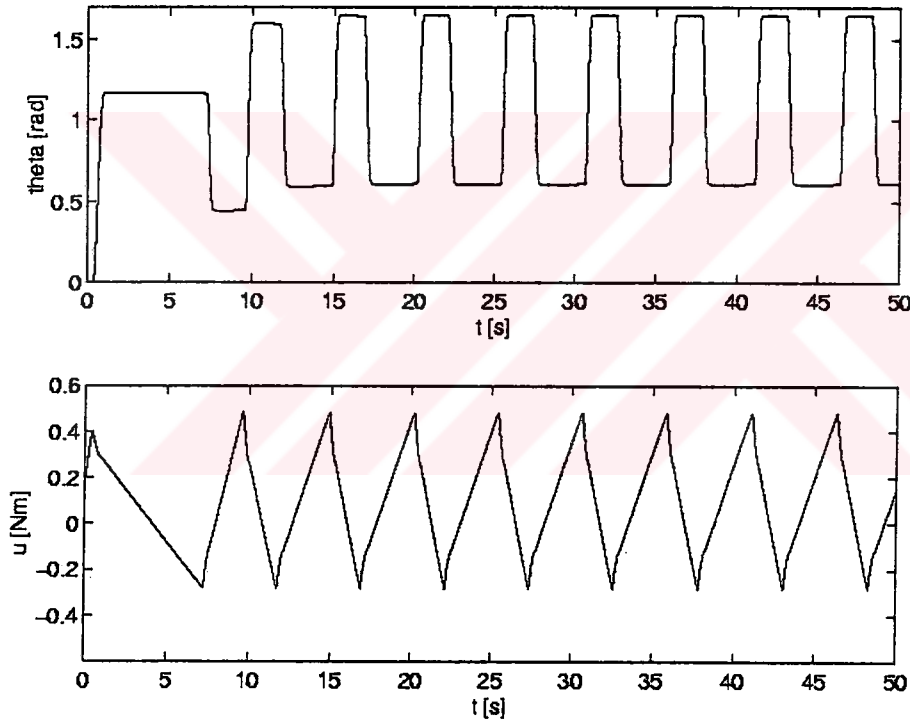
Tablo 6.4 Bliman Sorine model tanım parametreleri.

	F_s	F_k	s_e	s_p
[-]	0.30	0.14	0.005	0.02
[+]	0.46	0.30	0.005	0.02

Şekil 6.7 de limit çevrimlerin hem pozisyon işaretinde hem de kontrol işaretinde asimetrik olduğunu görüyoruz. Bunun sebebi model tanımlama parametrelerinin istenen model yanıtını oluşturamamasıdır. Negatif hızlarda durağan haldeki sürtünme momentini $0,46 \text{ Nm}$. olarak alındı fakat $0,47 \text{ Nm}$. elde edildi. Aynı şekilde pozitif hız bölgesinde durağan haldeki sürtünme momenti $0,30 \text{ Nm}$. olarak tanımlandı fakat $0,27 \text{ Nm}$. elde edildi. Pozisyon işaretinde oluşan limit çevrimin

simetrik olma şartı kinetik ve statik sürtünme momentlerinin farkının her iki yönde eşit olmasıdır. Model tanımlama parametrelerinde bu şart $0,16 \text{ Nm}$. olarak sağlanmış. Fakat bu şart model cevabında sağlanamamıştır. Bu problem Bölüm 4.8 de model tanımlama parametreleriyle oluşturulan sürtünme modelinin her zaman amaçlanan yanıtı vermeyeceği şeklinde açıklanmıştır.

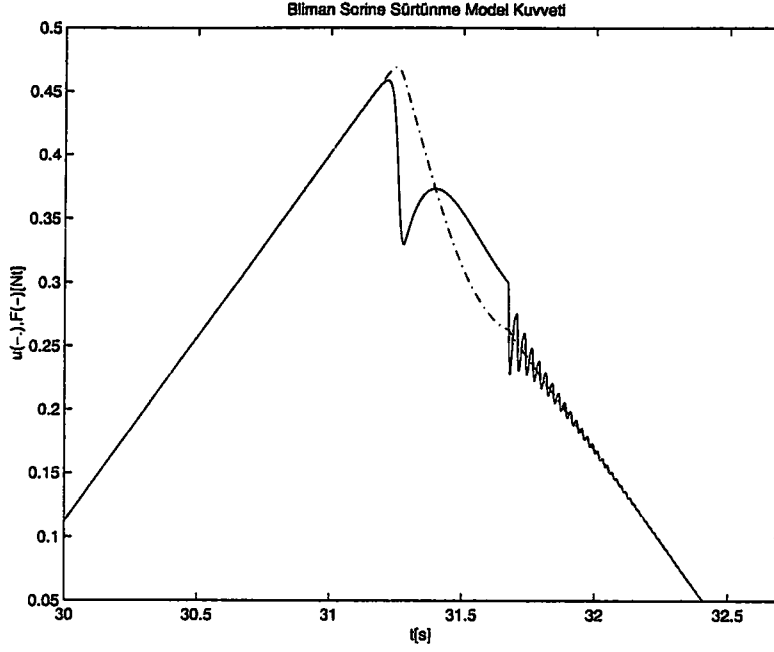
Şekil 6.7 bu modellemeye oluşan limit çevrimi göstermektedir. Kayma öncesi hareket Şekil 6.10 beklendiği şekilde gözlenmekte ve ilk kırılma noktası (breakaway) diğer kırılma noktalarından daha düşük olduğu kontrol işaretinden görülmektedir. Bunun sebebi Bliman Sorine modeli özellikleri incelendiği kısımda açıkça belirtilmiştir. Şekil 6.8 kontrol işaretinin yeterince yakından görüntüsü verilmektedir.



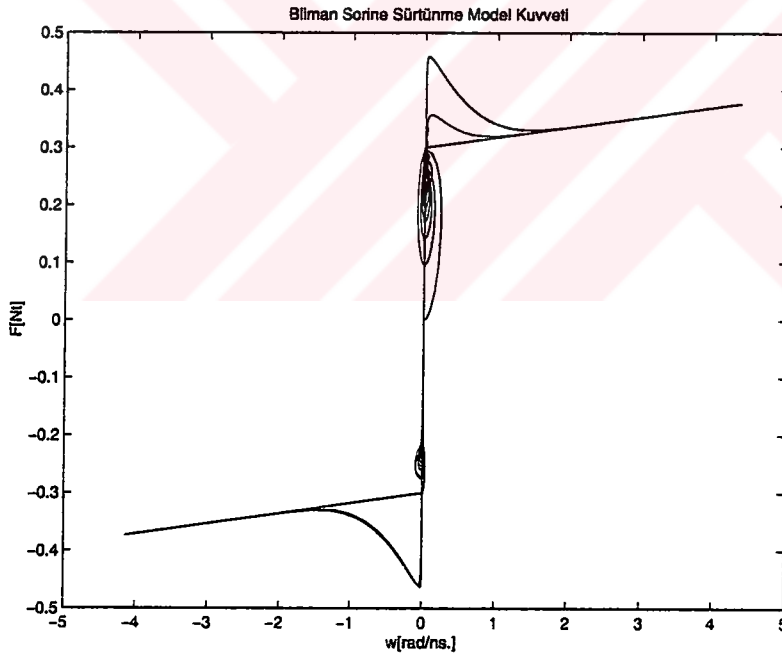
Şekil 6.7 Bliman Sorine modeline göre yapılan kontrolde pozisyon işaretinde oluşan limit çevrim ve kontrol işaretinin ayrı ayrı gösterimi.

Tablo 6.5 Bliman Sorine modeli simülasyon asimetrik model parametreleri.

F_1 [Nm]	F_2 [Nm]	ε_f	η	α [Nm/rad]
[-] 0.39	0.25	0.0067	0.32	0.017
[+] 0.53	0.23	0.0067	0.25	0.017

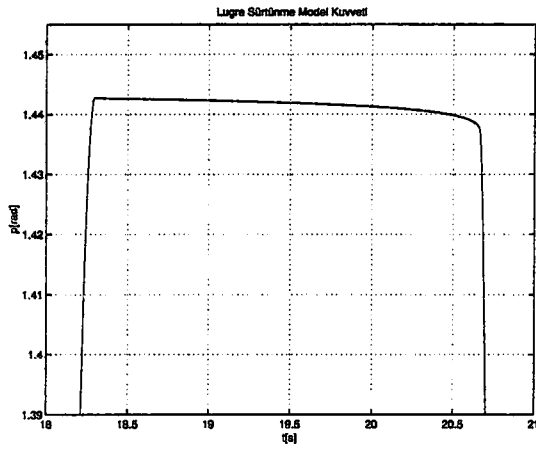


Şekil 6.8 Kontrol işareti ile sürtünme momentinin birarada gösterimi.

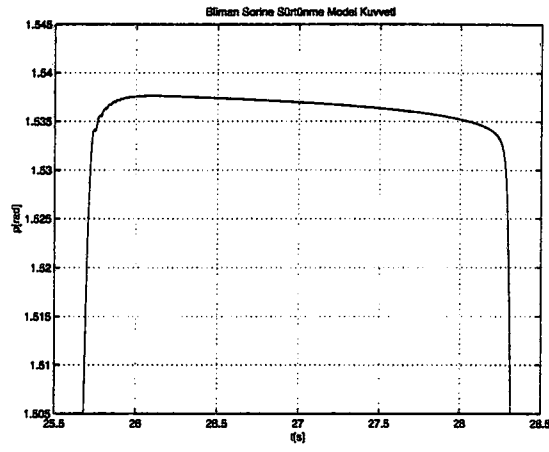


Şekil 6.9 Bliman Sorin sürtünme momentinin hıza göre değişimi.

Şekil 6.8 den görüldüğü gibi model yanıtında çok fazla salınım vardır. Bunun ayrıntılı açıklaması Bölüm 3 de lineerleştirilmiş durum denklemlerinden yorumlanmıştır.



a)



b)

Şekil 6.10 Kayma öncesi hareket ;

- a) Lugre model yanıtına göre.
- b) Bliman Sorine model yanıtına göre.

6.2 Gözleyici Tabanlı Sürtünme Kompanzasyonu

Hareket kontrol sistemlerinde karşılaşılan sürtünme, sistem performansını sınırlayan bir olaydır. Son yıllarda sürtünmenin kötü etkisini azaltacak kontrol stratejileri üzerinde ciddi çalışmalar artmıştır. Mekaniksel olarak önerilen çözümlerin yetersiz kalması model tabanlı kompanzasyonun gerekliliğini göstermiştir. Sürtünmenin dinamik özelliklerini içine alan matematiksel modeller gerçek zamanda uygulanabilirlik açısından basit olmalıdır. Bu açıdan hız kontrolünde sıkça kullanılan klasik sürtünme modelleri (*Viskoz+Coulomb* sürtünme modeli) yüksek hızlarda iyi bir performans vermekte düşük hızlarda ise yetersiz kalmaktadır.

Yeni tasarlanan ve tezde incelenen dinamik sürtünme modelleri sürtünmenin dinamik özelliklerini modellemekte ve düşük hızlarda iyi performans sağlamaktadır.

Bu bölümde daha önce detaylı olarak incelenen Lugre ve Bliman Sorine dinamik sürtünme modelleri kullanılarak model tabanlı sürtünme kompanzasyonu yapılacaktır. Kompanzasyon tasarımı dinamik sürtünme modellerinin ölçülemeyen iç durumlarını elde etmek için bir gözlemleyici gerektirir.

Gözlemleyicinin özelliği doğrudan kontrol stratejisinde de etkilidir. Kontrol stratejisi bir önceki bölümde Şekil 6.2 de oluşturulan blok diyagramdaki sisteme göre tasarlanacaktır.

6.2.1 Sürtünme Kompanzasyonu

Sürtünme etkilerini minimuma düşürecek birçok kontrol stratejisi günümüze dek önerilmiştir. En basit bir kontrol stratejisi olarak aşağıdaki gibi bir yaklaşım yapılabilir.

$$U(t) = U_{lin}(t) + \hat{F}(t) \quad (6.4)$$

burada $\hat{F}$, gözlemlenen sürtünme kuvvetini, $U_{lin}(t)$; sürtünmenin göz önünde bulundurulmadan lineer bir sistem gibi düşünülerek tasarlanmış kontrol işaretini göstermektedir.

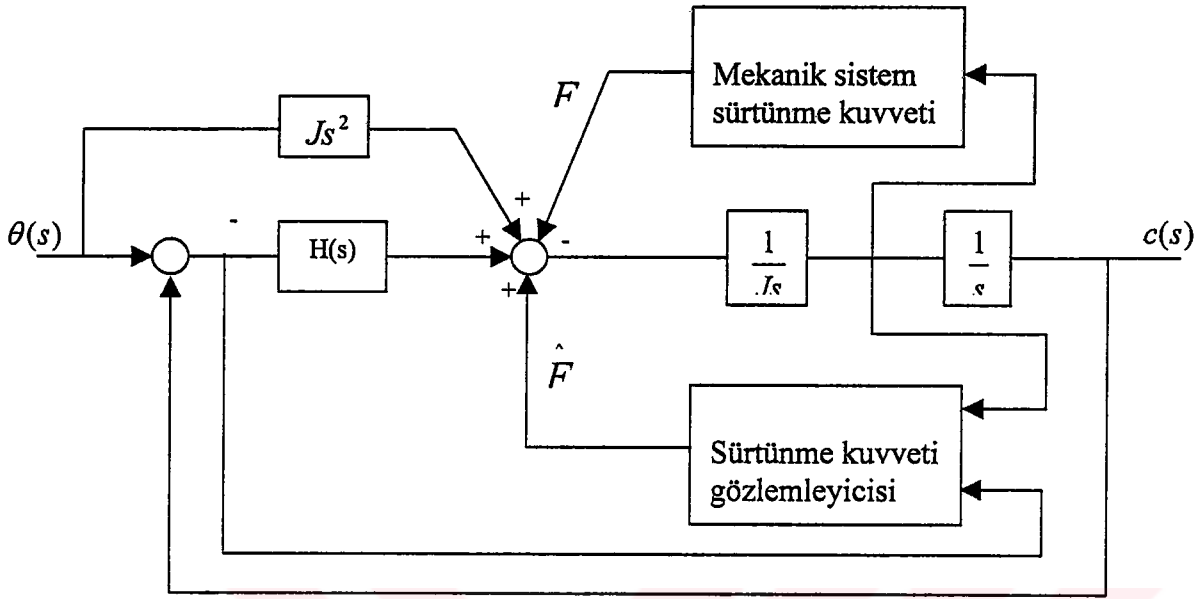
Sürtünme kuvvetinin F olarak gösterildiği şekil 6.2 de ki basit sisteme (6.4) no'lu kontrol stratejisini uygularsak;

$$J \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = U - F = U_{lin} + \hat{F} - F = U_{lin} - \tilde{F} \quad (6.5)$$

yukarıdaki sisteme ait olan matematiksel dinamik denklemini elde ederiz. Sürtünme

kuvvetinin iyi bir şekilde gözlemlenmesi $\tilde{F} = F - \hat{F} = 0$ sonucunu verecek ve dolayısıyla sistem lineer bir yapı kazanacaktır. Bu durumda lineer sistemler için oluşturulan bir kontrolör yaklaşımı asimtotik karalı bir sistem çıkışı oluşturacaktır. Burada uygulanan kontrol stratejisini sürtünmenin kompanzasyonu ve normal kontrol (lineer kontrol tasarımı) olmak üzere ikiye ayırmak mümkündür.

Gerçekte anlaşılabacağı üzere sürtünme kuvvetinin tam olarak bilinmesine imkan yoktur. Çünkü birbirinden bağımsız birçok faktör bu sürtünme kuvvetinin oluşumuna sebebiyet vermektedir. Dolayısıyla gözlemleyici hatası hiçbir zaman sıfır olmayacaktır. Aslında yapılan ölçüm hataları ve sürtünme model belirsizliklerinin kontrol stratejisi duyarlılığı üzerinede ki etkileri konusunda hala çalışmalar yapılmaktadır.



Şekil 6.11 Kontrol sistemine ait blok dyagram.

6.2.2 Sürtünme Kuvveti Gözlemleyicisi

Lugre modeline göre sürtünme kuvveti,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \\ g(v) &= \alpha_0 + \alpha_1 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \\ F &= \sigma_0 z + \sigma_1(v) \frac{dz}{dt} + \alpha_2 v \end{aligned} \quad (6.6)$$

bu eşitliklerle tanımlanır. Denklemlerden görüleceği üzere bilinmeyen z durumu için bir gözlemleyici şarttır z gözlemlenmesi ile $\hat{F}$ kuvvetinin tahmin edilmesi mümkün olmaktadır. Aşağıdaki gözlemleyici tasarımını bir önceki bölümde kullanılan model parametreleri esas alınarak oluşturulacaktır.

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} \hat{z} - ke, \quad k > 0 \quad (6.7)$$

$$\hat{F} = \sigma_0 \hat{z} + \sigma_1(v) \frac{d\hat{z}}{dt} + \alpha_2 v$$

$$\sigma_1(v) \leq \frac{4\sigma_0 g(v)}{|v|}$$

eşitsizliği v ile F arasında enerji sönümleyici (dissipative) bir yapı oluşması için gerekli şarttır.[26] Hıza bağlı sönüm oranının bu eşitsizlik gözönüne alınarak seçilmesi model yanıtında iyi bir sönüm sağlayacaktır.

6.2.3 Gözleyici Tabanlı Pozisyon Kontrolü

Şekil 6.7 ki blok dyagram gözönünde bulundurularak pozisyon kontrolünü gerçekleştireceğiz. Kontrolör tasarımında birinci gayemiz sistemin kararlılığını yani hatanın sifıra doğru yaklaşmasını sağlamaktır. Aşağıda yazılı olan hareket denklemini düşünerek,

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = J \frac{dw}{dt} = u - F \quad (6.8)$$

Kontrol işareti,

$$U(s) = H(s) E_v(s) + J s w_{ref}(s) + \hat{F}(s) \quad (6.9)$$

Burada $e(s) = \theta_r - \theta$ olarak pozisyon hatasını θ_r referans pozisyonu (iki kez türevi alınabilir bir hareket yörüngesinden) göstermektedir. Gözleyicide ki ke terimi pozisyon hatasından türetilen doğrultma terimidir. Gözleyici giriş işareti olarak $-e(s)$ hatasını kullanır.

(6.9) eşitliği (6.8)'da yerine koyarsak ;

$$E_v(s) = \frac{1}{Js^2 + H(s)} \tilde{F}(s) = G(s) \tilde{F}(s) \quad (6.10)$$

elde ederiz.

Dissipative bir gözlemleyiciye ek olarak uygun bir kontrolör kullanılırsa pozisyon hatamızın sifıra gideceği hususunda gerekli şartı sağlamış oluruz.[Teorem.1]

Teorem 1: (6.8) no'lu dinamik sistem modelinde (6.6) no'lu dinamik sürtünme modeli gözönüne alınarak (6.9) numaralı kontrol kuralını uygulayalım. Sönüm oranı (6.7) no'lu eşitsizliği sağlıyacak şekilde seçilerek. Öyle bir $G(s)$ fonksiyonu $H(s)$ seçilerek oluturalımki $G(s)$ 'nin karakteristik polinomunun kökleri imajiner eksen üzerinde olmasın ve $w>0$ için $Re[G(jw)]>0$ olsun. Bu kapalı çevrim kontrol sistemi global olarak asimtotik kararlıdır. [26]

Yukarıdaki teoreme göre $H(s)$ öyle seçilmeli ki

$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + H(s)} \quad (6.11)$$

(6.11) eşitliğinde paydanın kökleri pozitif gerçek olmalı ve imajer eksende kutpu olmamalıdır, şöyle ki $w>0 \Rightarrow Re[G(jw)]>0$. Bu art bize $H(s)$ seçimi için çok geniş bir serbestlik vermektedir.

$H(s)$ 'i bir PI kontrolörü olarak düşünürsek,

$$G(s) = \frac{1}{Js^2 + K_p + K_i/s} = \frac{s}{Js^3 + K_p s + K_i} \quad K_p>0, K_i>0 \quad (6.12)$$

PID kontrolörü baz alınarak,

$$G(s) = \frac{1}{Js^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i} \quad (6.13)$$

Burada paydadaki polinomun kökleri $w>0 \Rightarrow Re[G(jw)]>0$ için şartı sağlanırsa $e_\theta \rightarrow 0$ asimtotik olarak gidecektir. Örneğin ekil 6.2'de ki blok dyagramında kullanılan PID kontrolörü ekil 6.11' de ki blok diyagramında kullanılırsa 1 rad. referans işareti için Ek C de verilen sonuçlar alınır.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Sürtünme etkilerinin oluşumu ve modellenmesinin detaylı olarak incelenmesi tez içerisinde sağlanmıştır. Ayrıca kontrol performansını etkileyen bu olayların statik modellerle açıklanmasının mümkün olmadığı belirtilmiştir. Hızın sıfırda ki değerinde veya stick bölgesinde sürekli bir fonksiyon olarak tanımlanan dinamik modellerin gerekliliği ortaya konmuştur. Dinamik modellerin modelleme (stick ve slip bölgelerinde) performanslarının çok daha iyi olduğu gözlenmiştir. İleri sürülen iki dinamik modelden LuGre modelinin gerçek fiziksel sistemi daha iyi modellediği ve Bliman Sorine modelinin modellemede eksik kaldığı görülmüştür. Simülasyon ortamında elde edilen bu modelleme performanslarını kurulan bir deney düzeneğinde gerçek zamanda incelemesi yapılmaktadır diğer taraftan modelin frekans domeninde incelenmesi düşünülmektedir.

Kurulan dinamik modellerin esas hızın sıfır bölgesi civarında sürtünmenin histerizis modelleriyle tanımlanmasıdır bu açıdan değişik histerizis yapılarını kullanarak modelleme performansının artırılması üzerinde çalışmalar geliştirilebilir.

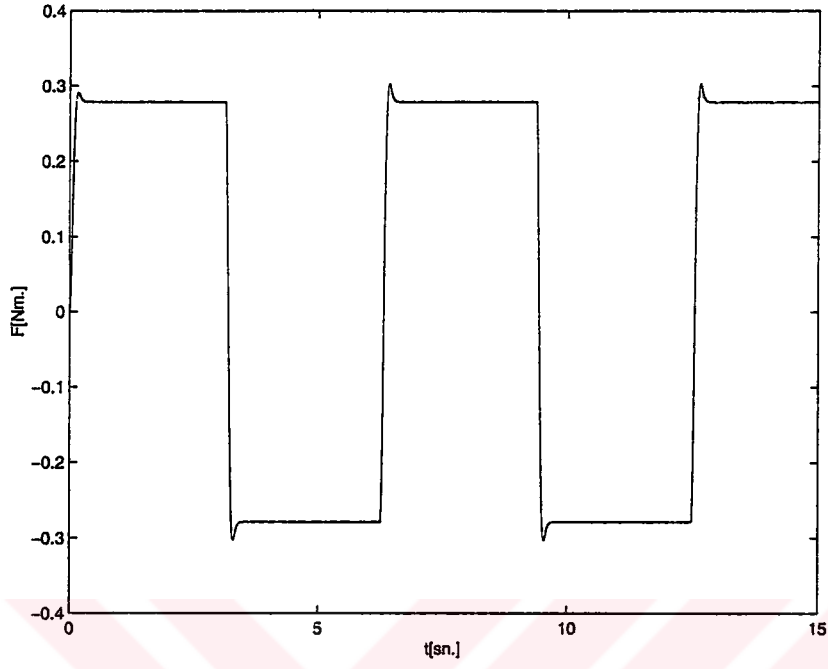
KAYNAKLAR

- [1]. **C.Canudas De Wit, H. B. Armstrong, P. Dupont**, 1994. Survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction, *Automatica*, v30, n7, p 1083-1138.
- [2]. **C.Canudas De Wit, H. Olsson, K. J. Aström and P.Lischinsky**, 1995. A New Model for Control of Systems with Friction, *IEEE Trans. Of Automatic Control*, Vol.40, No.3, p.p. 419 –425.
- [3]. **Iwasaki, Makoto; Shibata, Tomohiro; Matsui, Nobuyuki**, 1999. Disturbance- Observer Based Non-linear Friction Compensation in Table Drive System, *IEEE\ASME Transactions on Mechatronics*, Vol 4, No 1.
- [4]. **Misovec, Kathleen M.; Annaswamy, Anuradha M.**, 1999. Friction Compensation using adaptive non-linear control with persistent excitation, *Int.J.Control*, vol72, No5, 457-479.
- [5]. **Nuninger, B. Balaud and F. Kratz**, 1997. Disturbance Rejection using output and input estimation. Application to the Friction Compensation of a DC Motor, *Contr. Eng. Practice*, vol5, no4, pp 477-483.
- [6]. **C. Canudas De Wit, G. Morel, P. Lischinsky**, 1999. Friction Compensation for an Industrial Hydraulic Robot, *IEEE Control Systems*.
- [7]. **H.olsson, K. J. Astrom, C. Canudas De Wit, P. Lischinsky**, 1993. Dynamic friction models and control design, *American Cont. Conf.*, p.p. 1920-1926.
- [8]. **S. Meshkat**, 1995. Observer algorithm compensates for machine tool friction torque, *The Fusion of Power & Motion Technology & Applications*, v 21 n, p 50-53.
- [9]. **J. Amin, B. Friedland, A. Harnoy**, 1996. Implementation of a friction estimation and compensation technique, *IEEE Conf. On Control Applications-Proc.*, p 804-808.

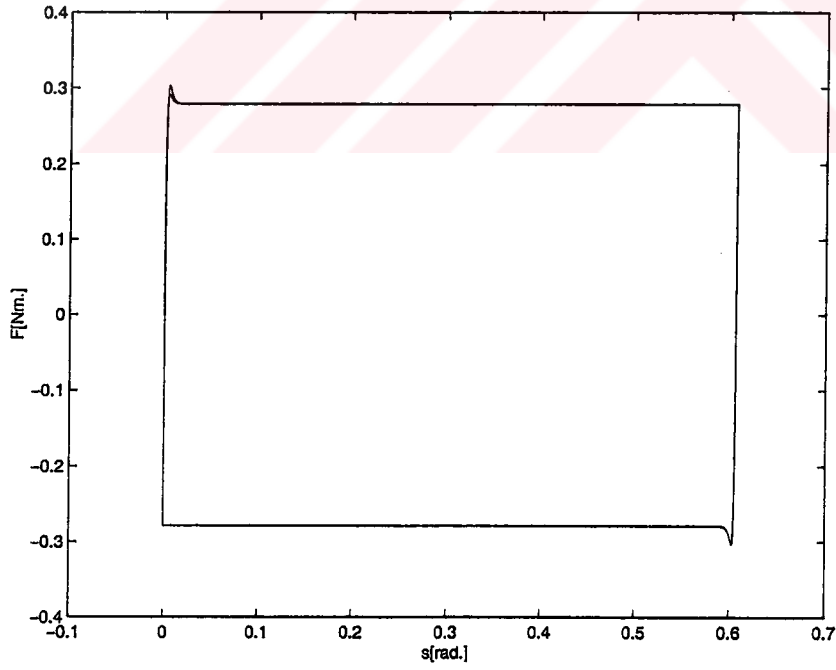
- [10]. **H.Olsson, K. J. Aström, C. Canudas De Wit, M. Gafvert, P. Lischinsky,** 1998. Friction Models and Friction Compensation, *European Journal of Control*, v 4, n.3, p 176-195,
- [11]. **F. Altpeter,** 1999. Friction Modelling, Identification and Compensation” *PhD thesis Lausanne.*
- [12]. **S. Neculescu, J. DE Carefel, C. Canudas De Wit,** 1997. Investigation on the efficiency of acceleration feedback in servomechanism with friction, *Dynamics and Control*, v 7, n 4, p 377-397.
- [13]. **M. Gafvert,** 1997. Comparison of two Frictions Models , *M. Thesis.*
- [14]. **P. Dahl,** 1968. A Solid friction model , Technical report TOR -0158 (3107-18)-1, *The Aerospace Corporation El Segundo, CA.*
- [15]. **P. A. J. Bliman,** 1992. Mathematical study of the Dahl’s friction model, *Euro. J. Mech., A\Solids*, 11 n 6 p 835-848.
- [16]. **C.B. Baril ,**1993. Control of Mechanical Systems Affected by Friction and other Nondifferentiable nonlinearities, *PhD. Thesis, Technion, Israel Institute of Technology*, Haifa, Israel.
- [17]. **B.Friedland and Y.-J.Park,** 1991. On adaptive friction compensation. *Proc. Of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2899-2902.
- [18]. **R.Stribeck,** 1902. Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit- und Rollenlager- The key qualities of sliding and roller bearings zeitschrift des Vereines Seutscher Ingenieure., 46 (38,39) : 1342-48, 1432-37.
- [19]. **N.Ehrich Leonard and P. Krishnaprasad,** 1992. Adaptive friction compensation for bi-directional low-velocity position tracking, *Proc. Of the 31st. Conference on Decition and Control*, pages 267-273,
- [20]. **C.Walfrath,** 1984. Adaptive bearing friction compensation based on recent knowledge of dynamic friction, *Automatica* 20(6) : 717-727.
- [21]. **B.Armstrong-Helouvry,** 1991. Control of Machines with Friction, *Kluver Academic Publishers, Massachusetts.*
- [22]. **D.A.Haessig and B. Friedland,** 1991. On the modelling and simulation of friction, *J Dyn Syst Meas Control Trans ASME*, 113(3):354-362.
- [23]. **Ernest Rabinowicz,** 1851. The nature of the static and kinetic coefficients of friction, *Journal of Applied Physics*, 22(11):1373-79.

- [24]. **P.-A. Bliman and M. Sorine**, 1991. Friction modelling by hysteresis operators application to Dahl, sticktion and Stribeck effects, *In proc. Of the conference Models of hysteresis*, Trento, Italy.
- [25]. **P.-A. Bliman and M. Sorine**, 1995. Easy-to-use realistic dry friction models for automaticcontrol, *In proc. Of 3rd European Control Conference, Rome, Italy*, pages 3788-3794.
- [26]. **O. Henrik and K. J. Aström**, 1996. Observer-based friction compensation, *Proc.35 IEEE Conf. On Decision and Control*, v 4, P 4345-4350.
- [27]. **M.Naumovic, M.Stojic**, 1997. Design of the observer based cross-coupled positioning servodrives, *IEEE Int. Symp. on Industrial Electronics*, v2, p643-648.
- [28]. **R. Hu, P. C. Mueller**, 1996. Independent joint control: estimation and compensation of coupling and friction effects in robot position control, *Journal of Intelligent and Robotic Systems : Theory & Applications*, v15, n1, p 41-51.
- [29]. **H. Olsson, K. J. Astrom, C. Canudas De Wit, P. Lischinsky**, 1993. Dynamic friction models and control design, *American Cont. Conf.*, p 1920-1926.
- [30]. **C. Canudas De Wit**, 1998. Comments on a new model for control of systems with friction, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v43, n8, p1189-1190.
- [31]. **D. Karnopp**, 1985. Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems, *Transactions of the ASME*, Vol.107.
- [32]. **B. Armstrong, C. Canudas De Wit , J. Tal, T. R. Kurfess, H. Jenkins, M. Steinbuch, G.Schootstra, O. H. Bosgra**, Friction Modeling and Compensation, *Control Eng. Handbook* p 1369-1382.
- [33]. **H. Henrichfreise**, 1992. Observer –based Coulomb friction torque compensation for a position control system, *PCIM'92 Conference*, Nürnberg, Germany
- [34]. **C. Canudas De Wit, G. Morel, P. Lischinsky**, 1999. Friction Compensation for an Industrial Hydraulic Robot “, *IEEE Control Systems*.

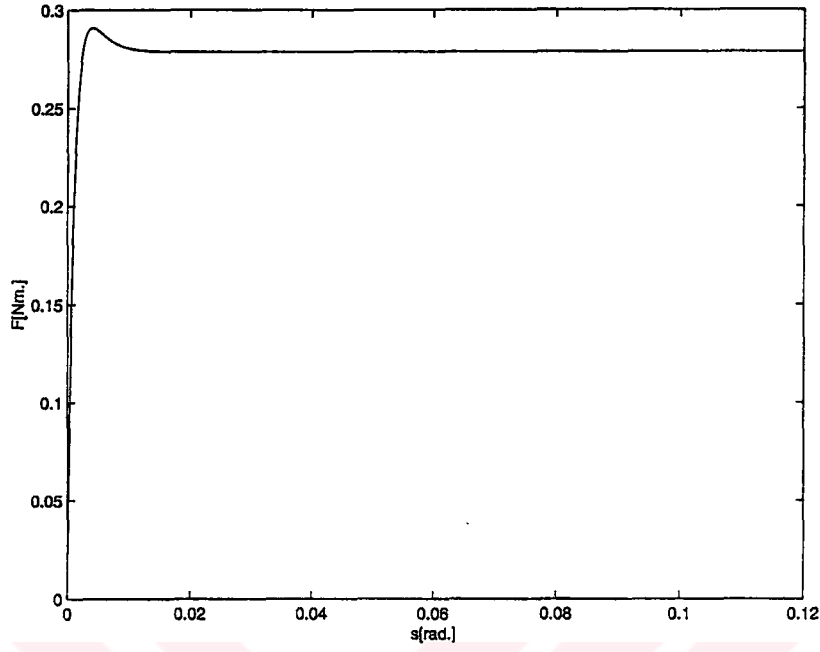
EK A



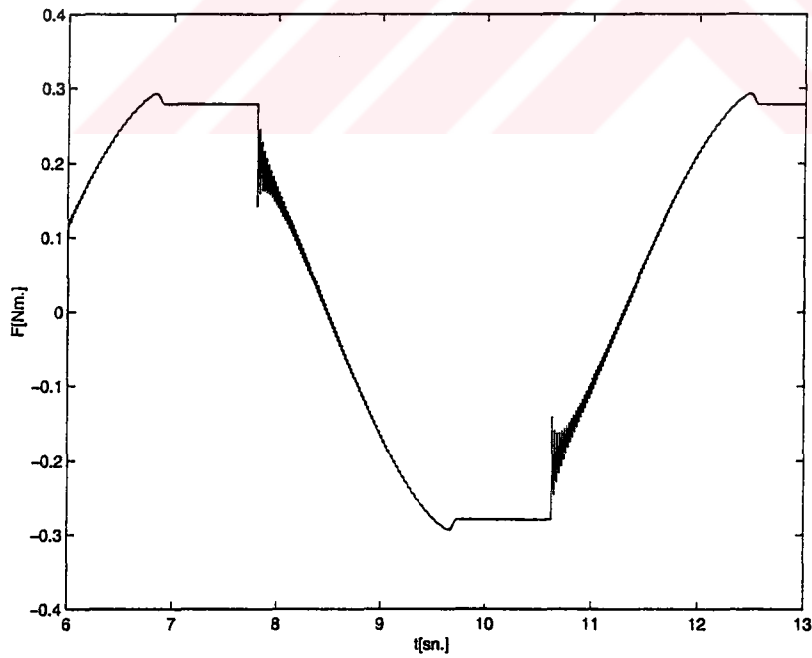
Şekil A.1 Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin sinusoidal giriş hızına karşılık sürtünme kuvveti - zaman grafiği.



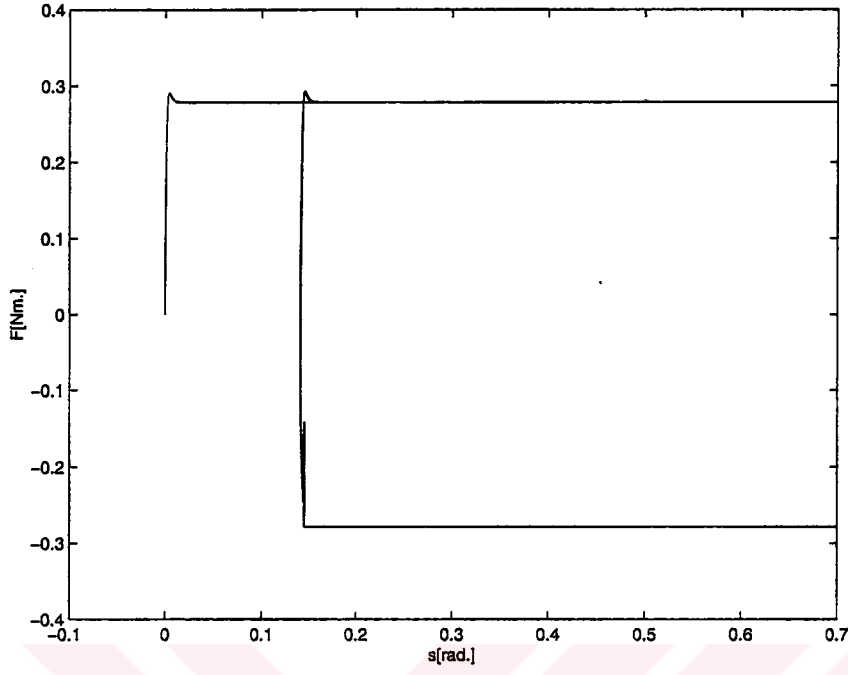
Şekil A.2 Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin sinusoidal giriş hızına karşılık sürtünme kuvveti - pozisyon grafiği.



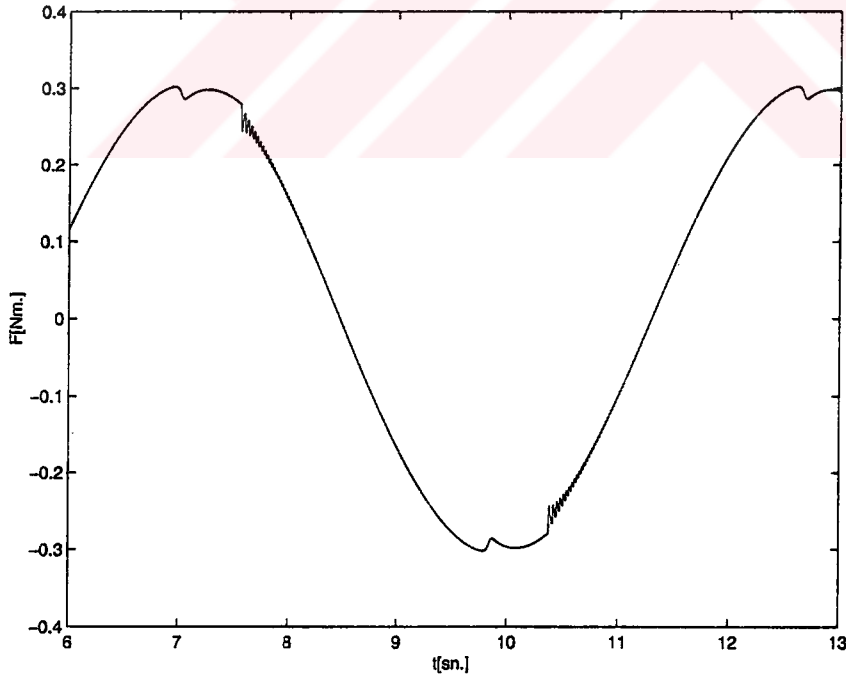
Şekil A.3 Bliman Sorine serbest sürtünme modelinin düşük frekansa sinusoidal giriş hızına karşılık sürtünme kuvveti - zaman grafiği.



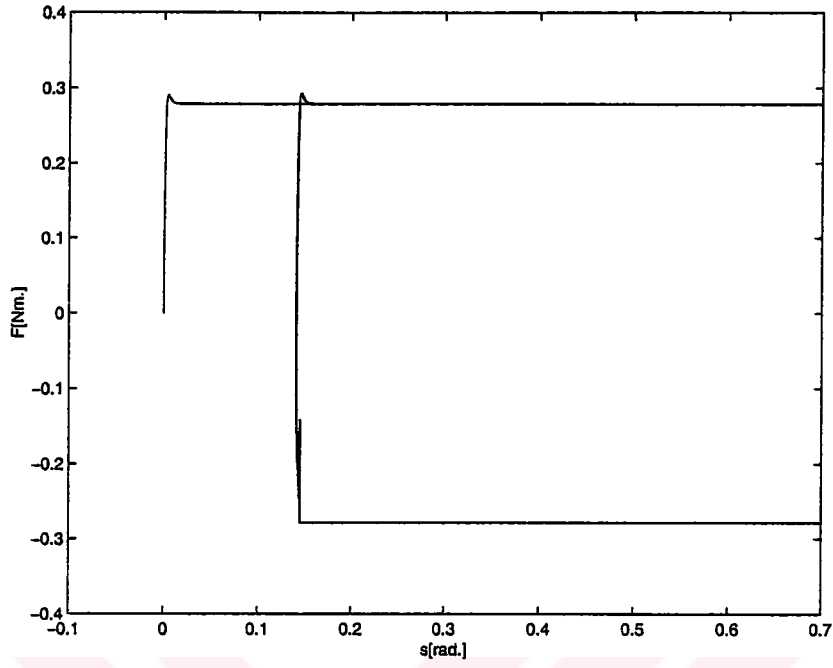
Şekil A.4 Bliman Sorine sürtünme modelinin (viskoz sürtünmesiz) sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna karşılık sürtünme momenti - zaman grafiği.



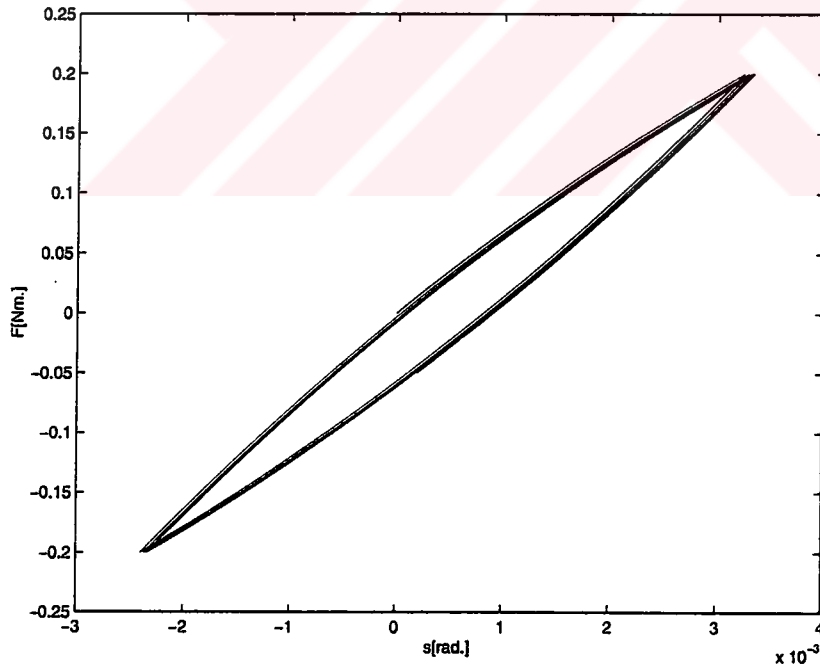
Şekil A.5 Bliman Sorine sürtünme modelinin (viskoz sürtünmesiz) sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna karşılık sürtünme momenti - pozisyon grafiği.



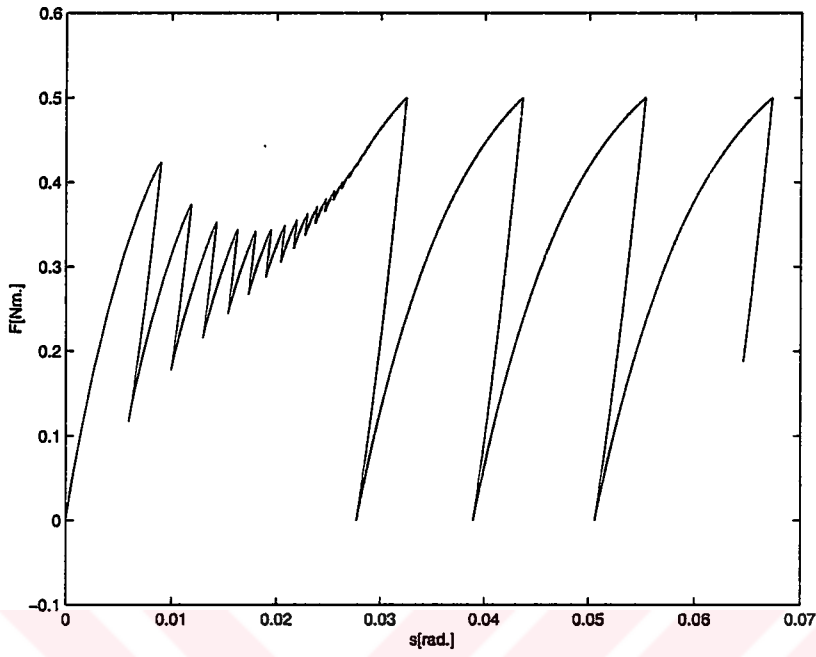
Şekil A.6 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna karşılık sürtünme momenti- zaman grafiği. ($\alpha=0.0177\text{Nms/rad}$)



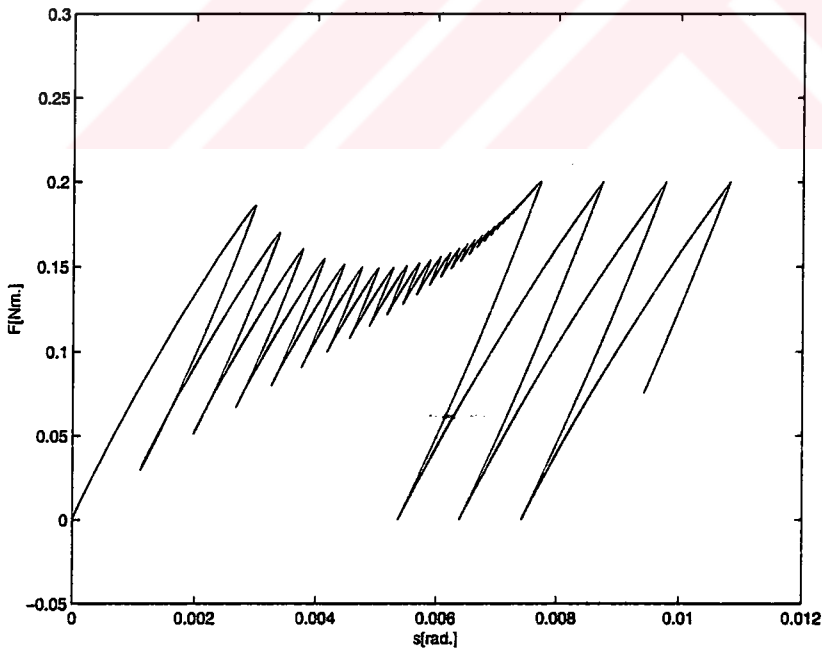
Şekil A.7 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentine karşılık yanıtı. ($\alpha=0.0177\text{Nms/rad}$)



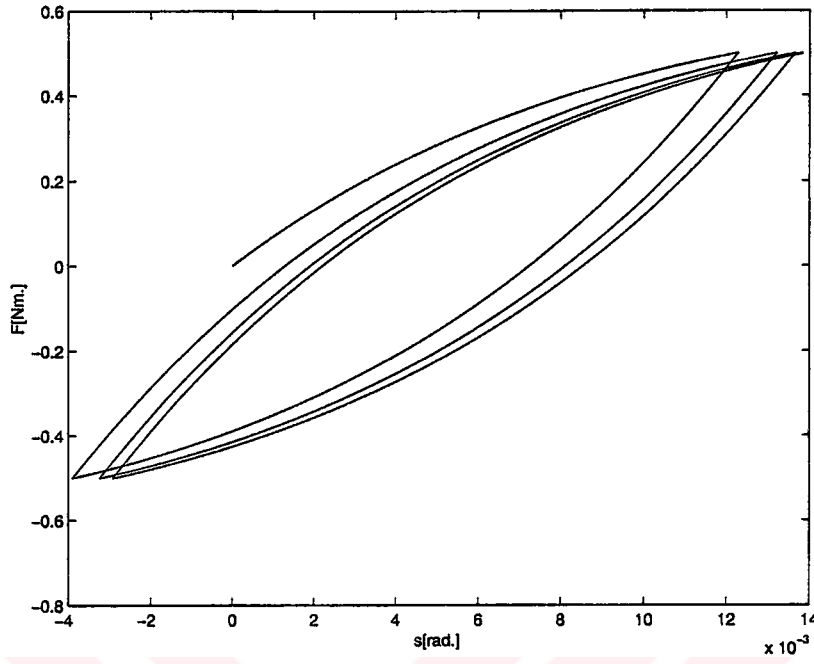
Şekil A.8 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentine ($u(t) = 0.2\sin(\omega t)$) karşılık yanıtı.



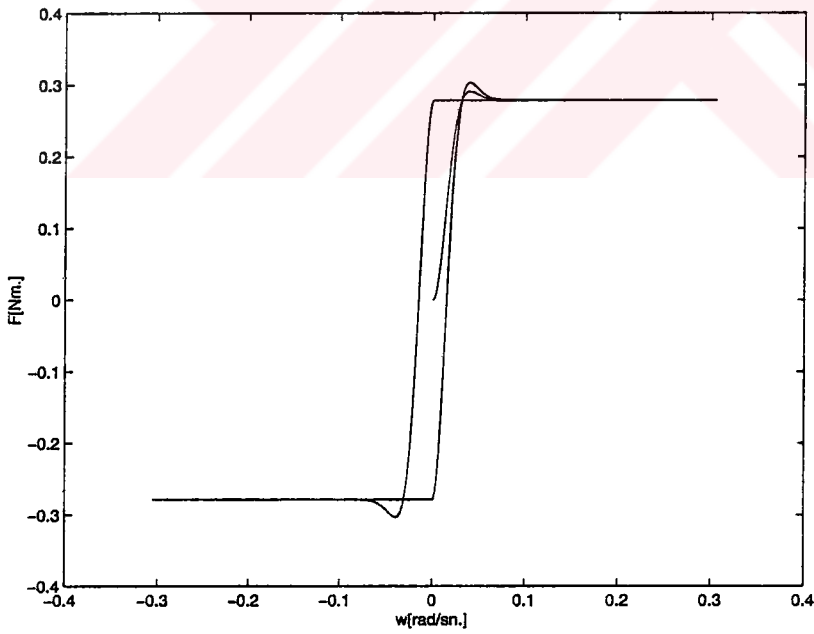
Şekil A.9 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna karşılık sürtünme kuvveti – pozisyon grafiği.



Şekil A.10 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna ($u(t) = 0.1 + 0.1\sin(\omega t)$) karşılık yanıtı.

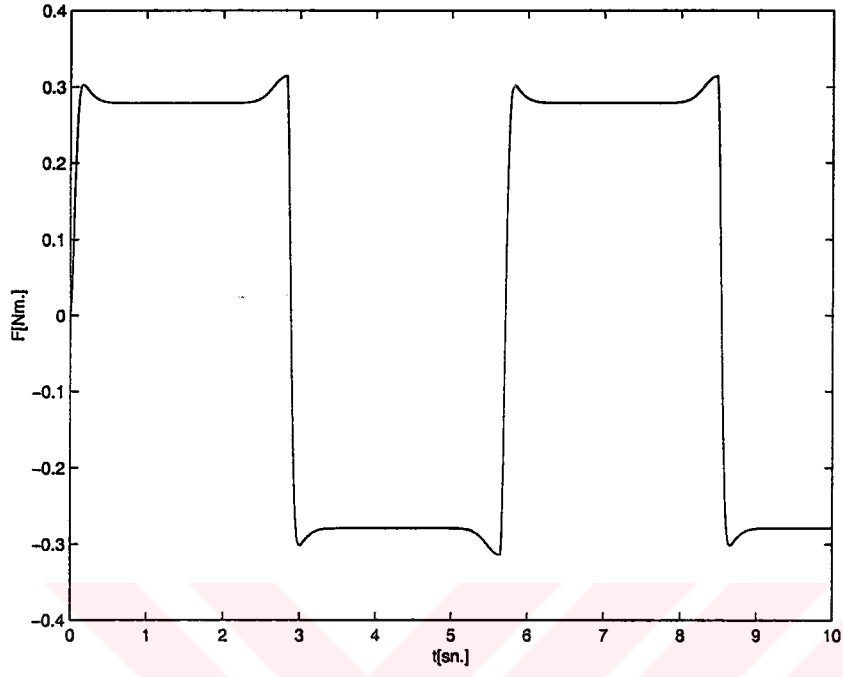


Şekil A.11 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna ($u(t) = 0.5 \sin(\omega t)$) karşılık yanıtı.

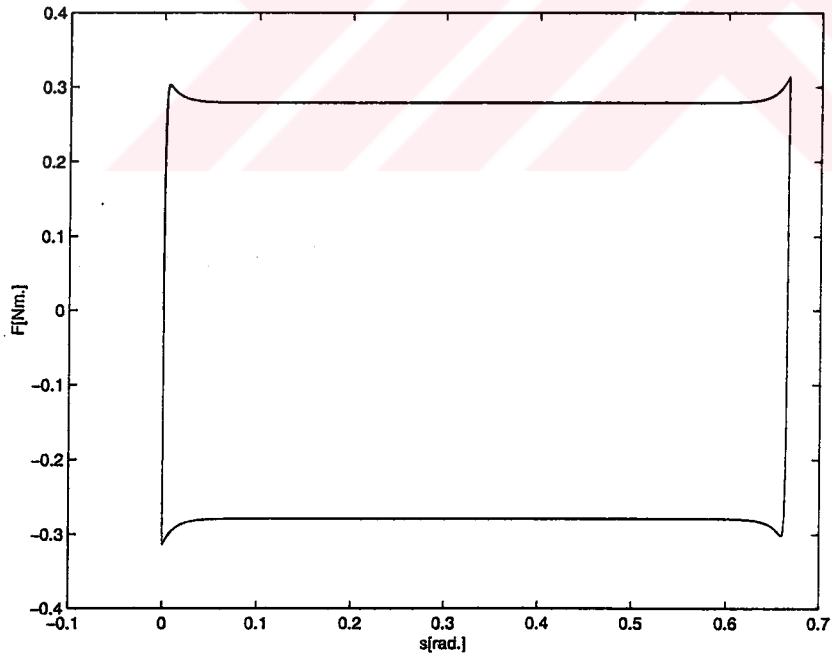


Şekil 4.12 Bliman Sorine sürtünme modelinin sistem üzerinde sinusoidal giriş momentuna ($u(t) = 0.5 \sin(\omega t)$) karşılık sürtünme momenti-hız yanıtı.

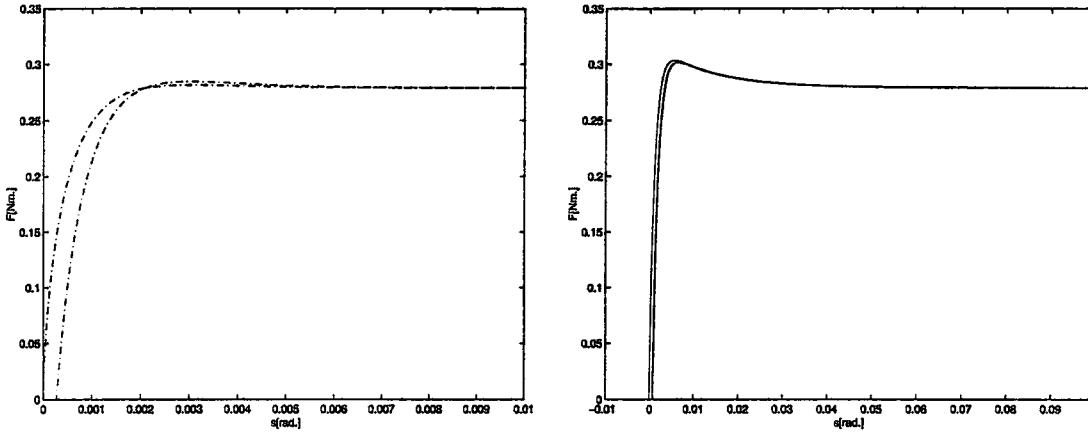
EK B



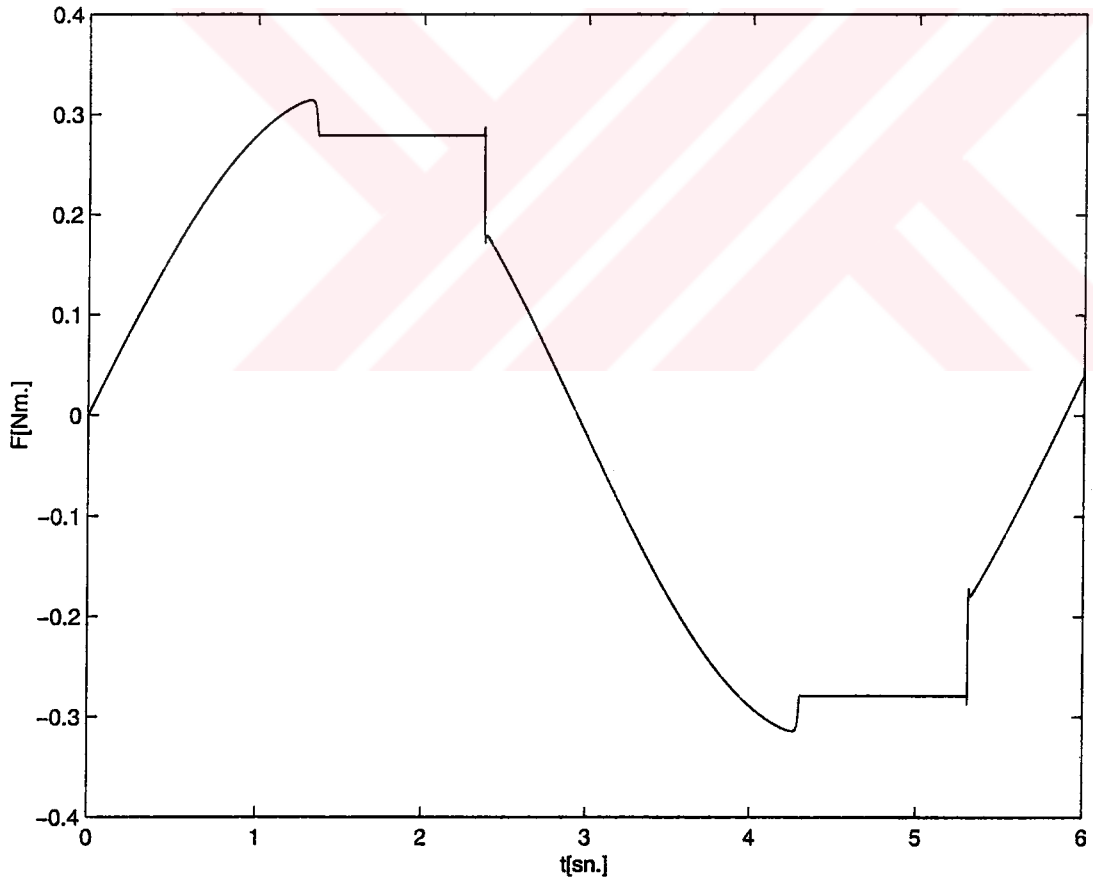
Şekil B.1 Sinüs hız girişi için Lugre sürtünme modelinin zamana göre değişimi.



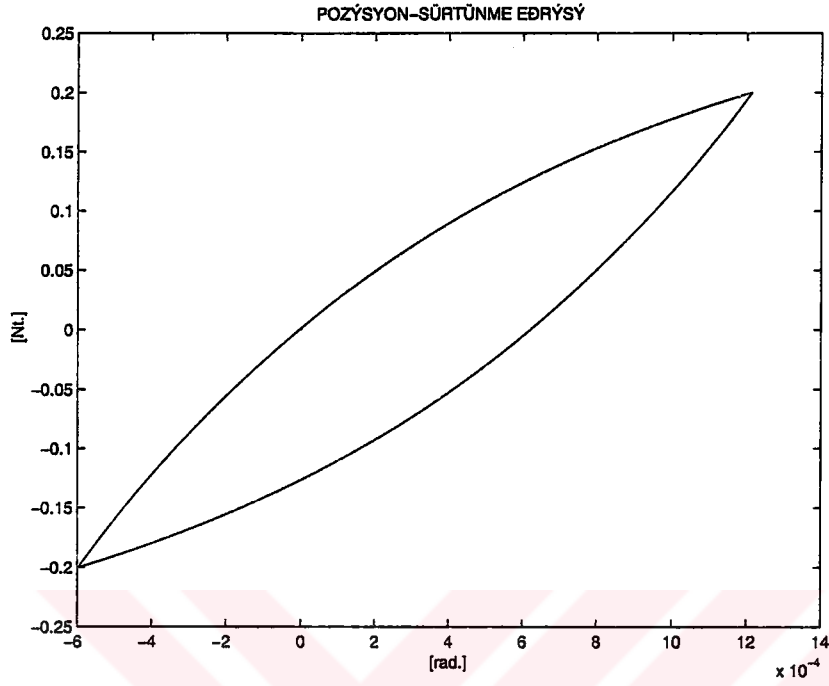
Şekil B.2 Sinüs hız girişi için Lugre sürtünme modelinin pozisyona göre değişimi.



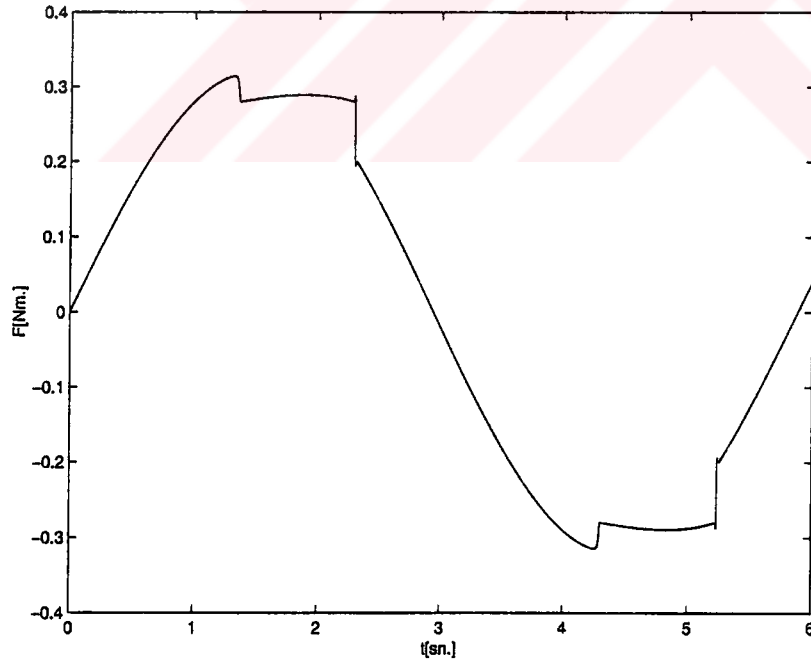
Şekil B.3 Açısal hızları farklı Sinüs hız girişleri için sürtünme momentinin zamana Göre değişimi.



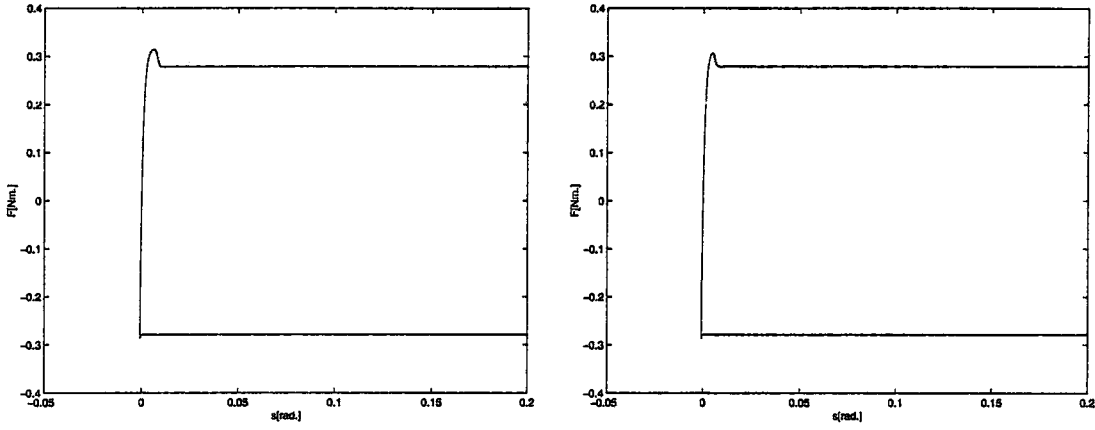
Şekil B.4 Sinüs şeklinde giriş momentine karşılık Lugre sürtünme modelinin zaman Göre değişimi.



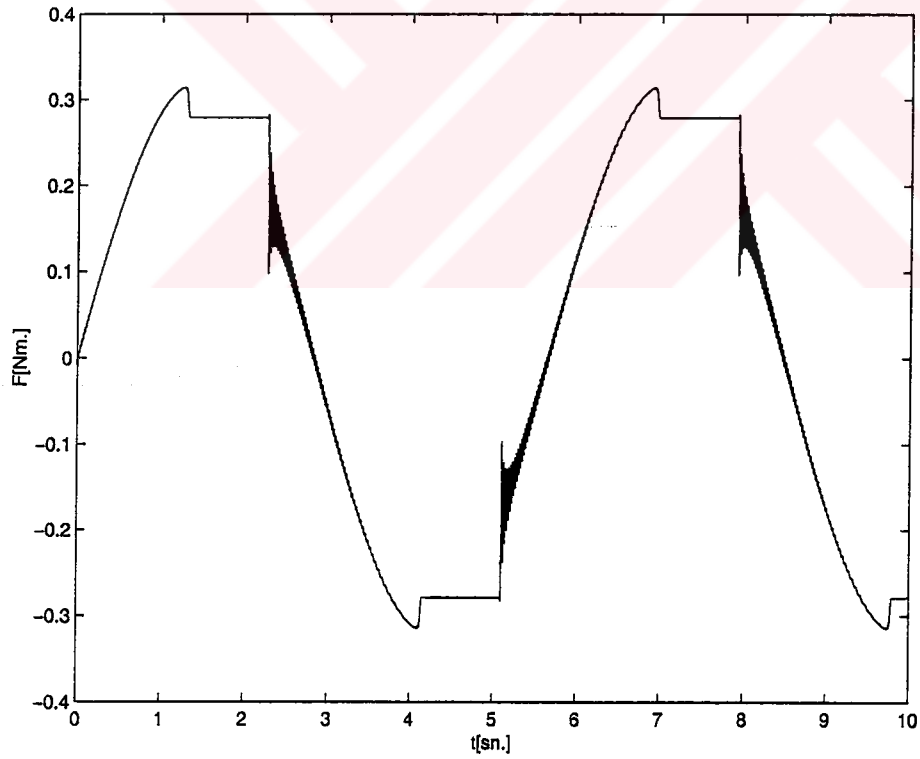
Şekil B.9 $u = B + A\sin(\omega t)$ şeklinde giriş momenti $B = 0Nm.$, $A = 0.2Nm.$



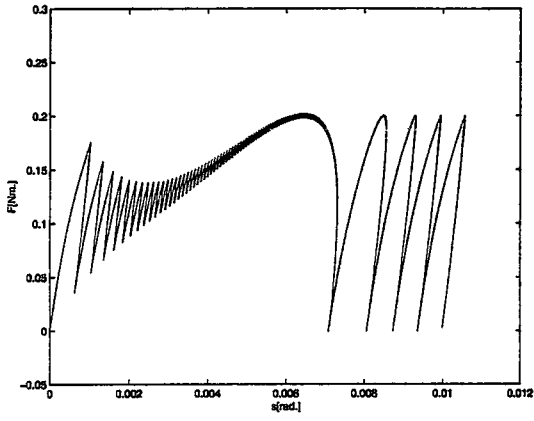
Şekil B.5 Sinüs şeklinde giriş momentine karşılık Lugre sürtünme modelinin ($\alpha = \sigma_2 \neq 0$ olduğunda) zaman göre değişimi.



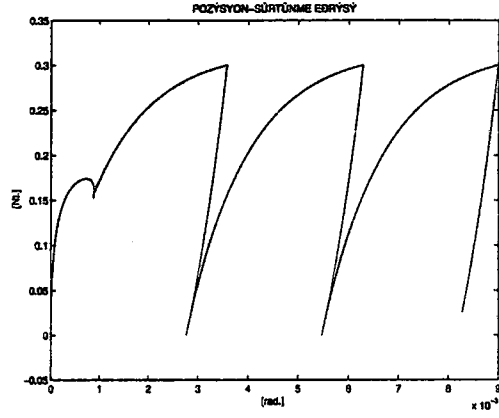
Şekil B.6 Açısal hızları farklı Sinüs hız girişleri için sürtünme kuvvetinin pozisyona göre değişimi.



Şekil B.7 Sinüs şeklinde giriş momentine karşılık Lugre sürtünme modelinin ($\sigma_1 = 0$ olması halinde) zaman göre değişimi.



a)



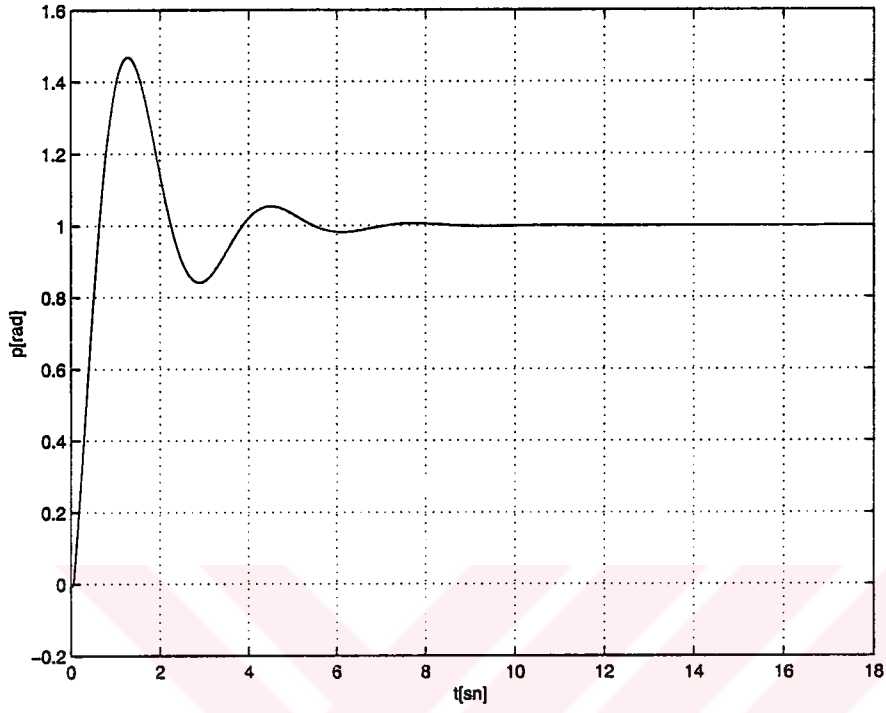
b)

Şekil B.8 $u = B + A\sin(\omega t)$ şeklinde giriş momentine göre ,

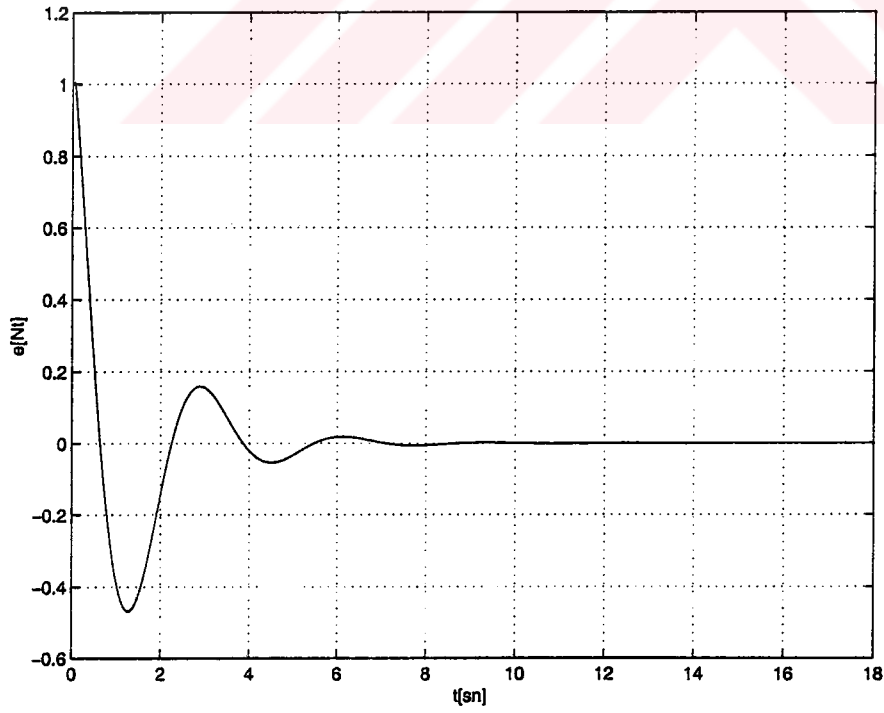
a) $B = 0.1Nm.$, $A = 0.1Nm.$

b) $B = 0.3Nm.$, $A = 0.3Nm$ için Lugre model yanıtları.

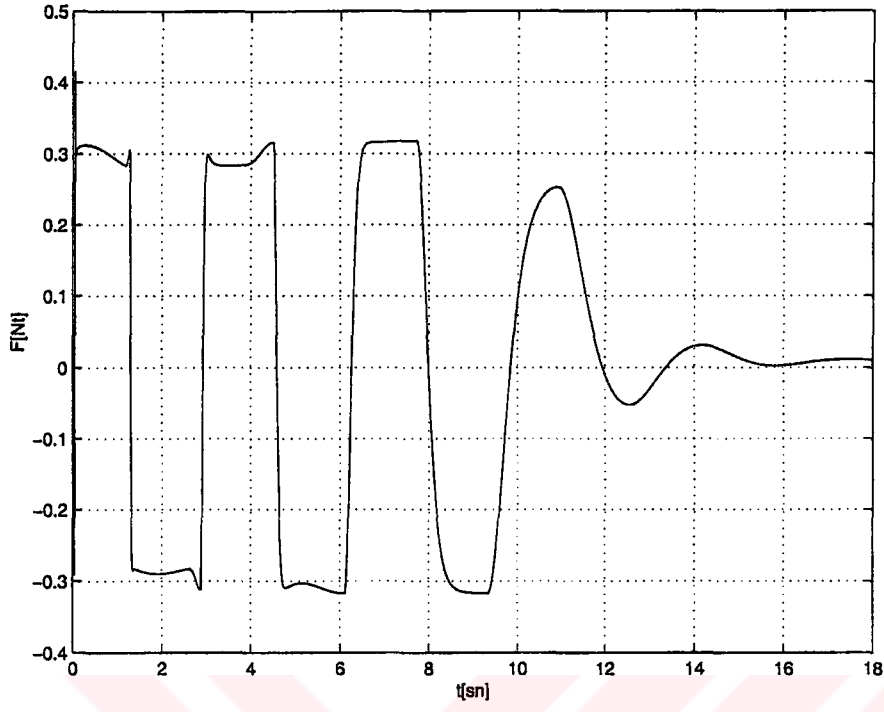
EK C



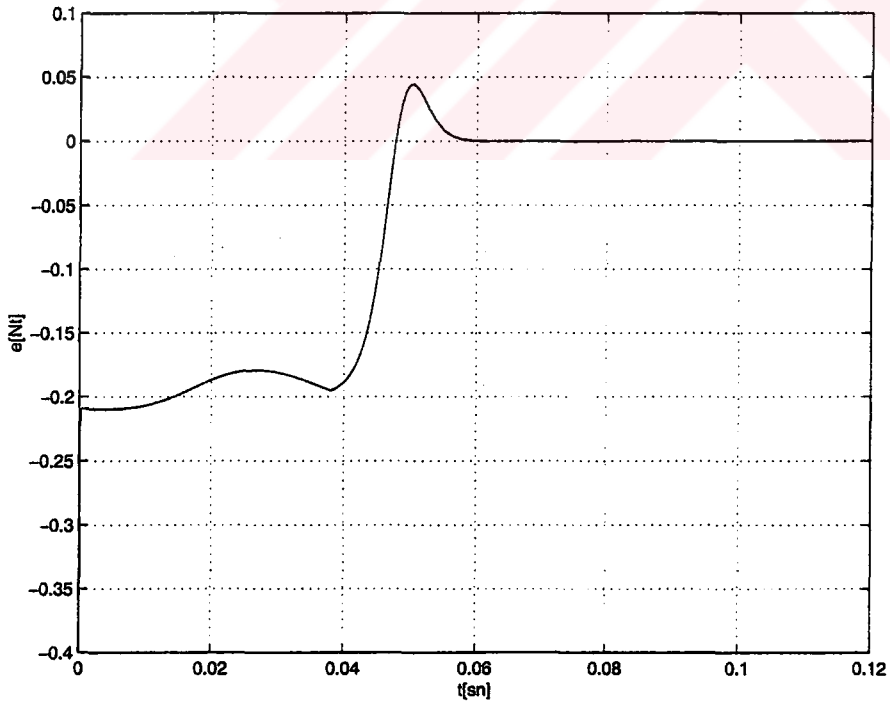
Şekil C.1 $\theta = 1 \text{ rad.}$ referans girişi için (kompanzasyon yapılmış) sistem yanıtı.



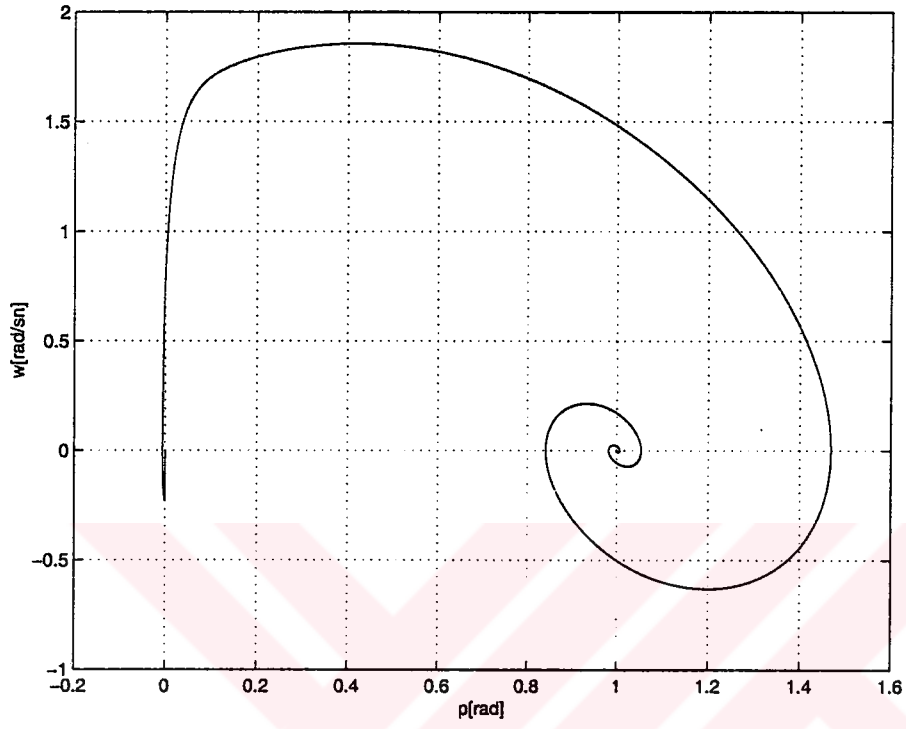
Şekil C.2 Hata değeri.



Şekil C.3 Sürtünme gözlemleyicisi çıkışı.

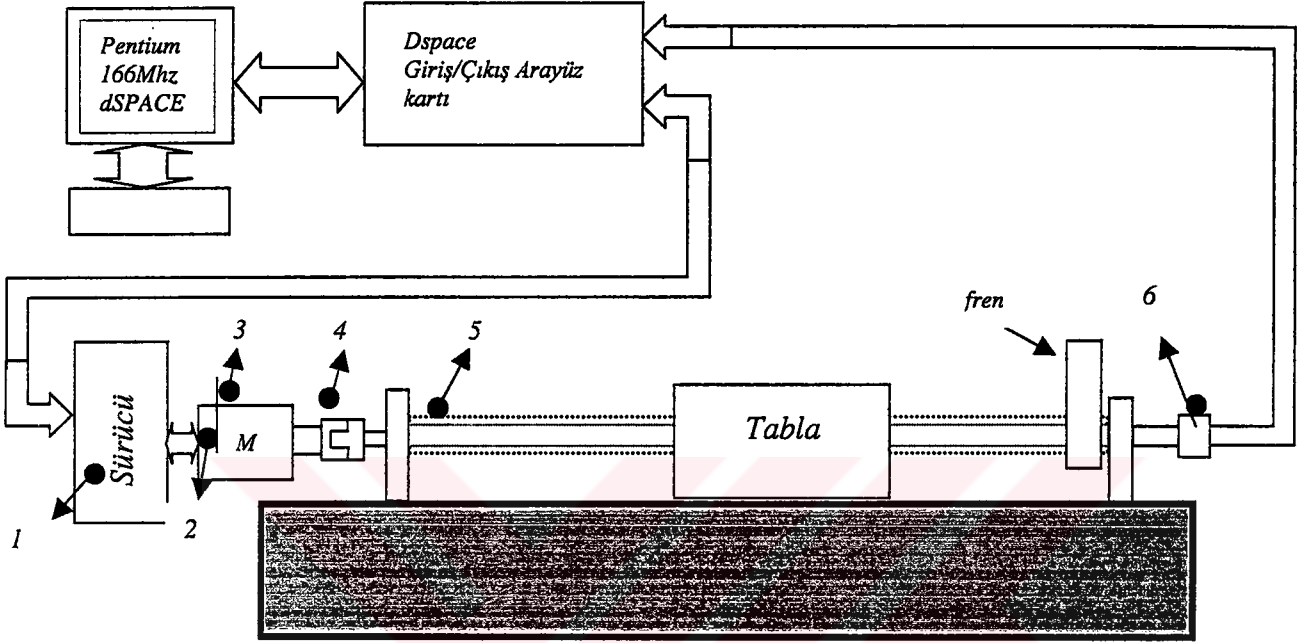


Şekil C.4 Gözlemleyici hatası.



Şekil C.5 Durum uzayında sistem yanıtı.

MEKANİK SİSTEMLERDE SÜRTÜNME



Şekil. D.1 EMPS kapalı çevrim sistemine ait prensib blok şeması.

Giriş

Teorik olarak yapılan modelleme çalışmasının pratikte geçerliliğini ve performansını görebilmek amacıyla tezin adı altında Fen Bilimlerine bir proje önerisinde bulunulmuştur. Proje için oluşturulan deney düzeneğinin prensib blok şeması yukarıda görülmektedir. Robotik laboratuvarında oluşturulan elektromekanik sistem üç ana kısım altında açıklanmıştır. ; 1. Deney düzeneği , 2. Mekanik sistem modellemesi, 3. Simülasyon.

D.1 Deney düzeneği

Prensib blok şemasından görüldüğü üzere elektromekanik sistem, elektronik ve mekanik bölümlerin birleşiminden oluşmaktadır. Literatürde EMPS (

ElektroMekanik Pozisyonlama Sistemi) olarak da adlandırılan bu sisteme ait kısımlar iki ana bölüm altında incelenir.

1- Elektromekanik yapı

2-Yazılım ve donanım

1-Elektromekanik yapı;

Vidalı tabla mekanizması (5) ; Üzerine trapez diş oluşturulmuş mil, üzerindeki tablanın hareketini sağlamaktadır. ;

Mil boyu : 70 cm.

Diş adımı : 6 mm/dev.

Mil heriki tarafından rulmanla yataklanmıştır ve yük tarafındaki ucuna ikinci enkoder bağlıdır. Diğer ucu şekildende görüldüğü üzerekapling elemanı ile motor miline bağlanmıştır.

Sürücü (1) ; kendi içerisinde motordan alınan konum bilgisi üzerinden PID, PD, PI kontrol yapıları ile kapalı çevrimler oluşturabilmektedir. Sürücünün motora uyuladığı gerilimin frekansı kullanıcı tarafından kontrol edilebilir, böylece motorun hızı istenen değere ayarlanabilmektedir. Ayrıca sürücünün birden fazla motoru sürme özelliğide vardır.

Deney düzeneğinde sürücü açık çevrim tork modunda çalıştırılarak kullanılmaktadır. Sürücüden aldığımız konum ve hız bilgisi dSPACE kartı üzerinde oluşturulan kontrol algoritmaları için sistem durum bilgisi olarak kullanılmaktadır

Sürücünün teknik özellikleri şöyle özetlenebilir ;

- ◆ 0,75 kW gücünde
- ◆ 380-480 V AC üç faz güç girişi,
- ◆ UD51 arabağlantısı ile ikinci enkoder girişi,

- ◆ RS232, 4 telli RS485 ve 2 telli RS485 seri iletişim üniteleriyle PLC ile haberleşebilmektedir.

Sevo Motor (3) ; Fırçasız AC Servo motor üç fazlı, altı kutuplu ,yüksek çözünürlüklü enkoder (4096 puls\dev), düşük eylemsizlik gibi önemli özelliklere sahiptir.

Motrun teknik özellikleri şöyle özetlenebilir ;

- ◆ Güç : 0.34 kW.
- ◆ R : 73.44 Ohms.
- ◆ Çekilen akım : 0.73 A.
- ◆ L : 109.2 mH.
- ◆ Çalışma hızı : 3000 rpm.
- ◆ K_t :1.6 Nm\A.
- ◆ Motor momenti : 1.1Nm.
- ◆ K_e : 98 Vrms/krpm.

Kaplin (4); Mekanik sistemlerde, kısımlar arasında güç iletimini sağlayan elmanlardır. Gerçekte ideal güç iletimi sağlanamadığından sistem modellemesinde dönüşüm sırasında kaybolan güç gözönünde bulundurulmalıdır. Birçok çeşiti bulunan kaplinler, farklı makina kısımları arasındaki güç iletiminde ki eksen kaçıklığında sönümlemektedir.

Enkoder(2-6) ; Pozisyon ölçümü için kullanılan dijital algılayıcı elemandır. Temel işleyişi bir tambur üzerinde açılmış yarıklardan okunan pulsların dijital olarak değerlendirilmesidir. Motor tarafında mile bağılı olan enkoder bir devirde 4096 puls üretmektedir.

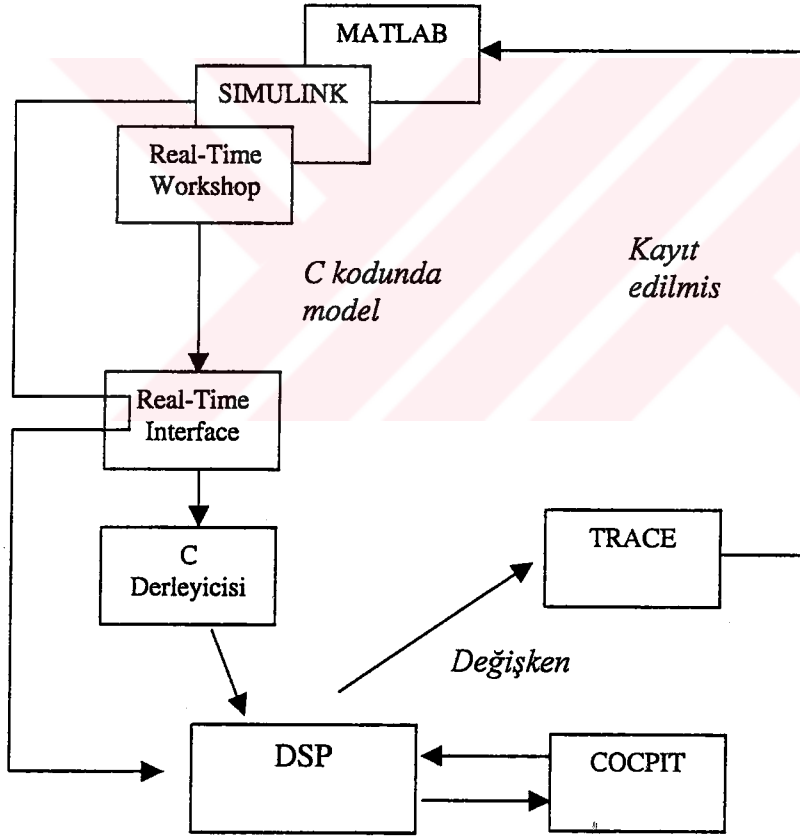
2-Yazılım ve Donanım Yapısı

MATLAB /Simulink ; MATLAB' ın bir uzantısı olan SIMULINK dinamik sistemlerin benzetimi amacı ile hazırlanmış bir programdır. SIMULINK, MATLAB'ın genel amaçlı fonksiyonlarını kullanarak dinamik sistemlerin çözümünde pek çok kolaylık sağlar.

Gerçek zamanda çalışma (RTW) uzantısı modellemeye ait blokları C ye çeviren bir arabirimdir. Kontrol uzantısının kullanımı ile SİSTEM'e ait karakteristik özellikleri rahatça görebilme imkanı sağlamaktadır.

RTI ; Dspace Real-time Interface (RTI) arayüzü MATLAB/SIMULINK ve Real-Time Workshop (RTW) uygulama programlarıyla iletişim kurabilmektedir. Simulink uzantısı sayesinde bloklarla oluşturulan modeller kusursuz bir şekilde C koduna RTW tarafından dönüştürmektedir. Herhangibir C kodunda oluşturulan SIMULINK modeli RTI tarafından C koduna derlenmekte ve Dspace kartı üzerinde ki DSP işlemcisine yüklenmektedir.

RTI ile MATHWORKS arasında ki ilişkiyi göstermektedir.

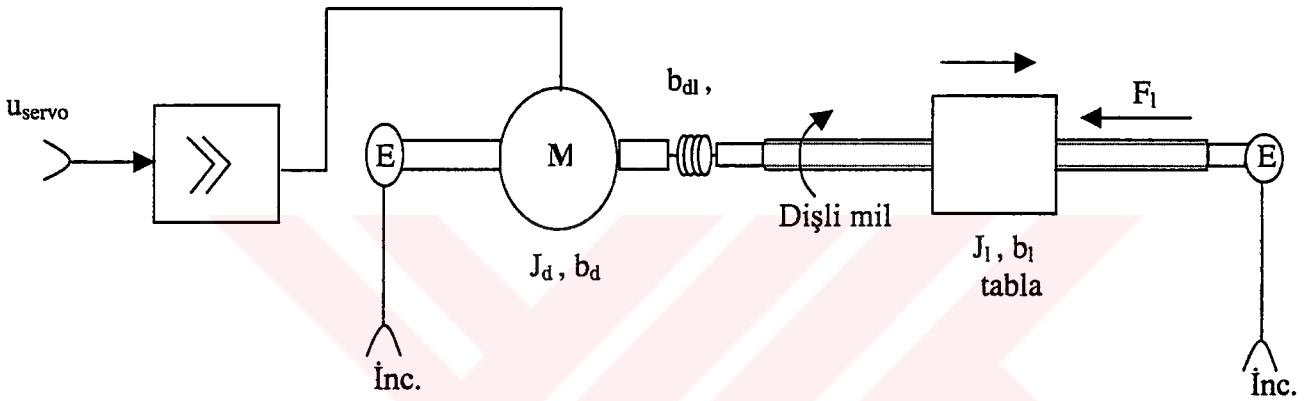


Şekil D.2 RTI işaret akış diyagramı.

Trace ; Gerçek zamanda veri akışı için kullanılan bir programdır ve DSP işlemcisi sayesinde gerçek zamanda işlem yapma yetisi oluşmaktadır. Programın çalışması

esnasında her bir örnekleme zamanı süresince servis kodunun bir kısmını kullanılır. Servis rutininin her çağrılışında bir veri alır ve bunu buffera kaydeder. Gerçek zaman işlemcisi üzerindeki veri akışı biter bitmez buffer TRACE tarafından okunur. Başka bir ifadeyle TRAC'e veri akışının örnekleme hızı her zaman gerçek zaman programının örnekleme hızına eşittir.

D.2 Matematiksel Modelleme



Şekil D.3 EMPS sisteminin eşdeğer blok şeması.

Yukarıdaki mekanik sisteme ait matematiksel model aşağıdaki gibidir.;

J_d : Motor ve Incremental Encoder eylemizliği,	J_1 : Dişli, encoder ve tablanın eylemsizliği,
F_1 : Dış kuvvet,	C_{d1} : Yay sertlik katsayısı,
M_d : Motor momenti,	b_{d1} : Sönüm çarpanı,
φ_d : Sürücü tarafı açısal pozisyon,	b_d : Sürücü tarafı sönüm sabiti,
φ_1 : Yük tarafının açısal pozisyonu,	b_1 : Yük tarafı sönüm sabiti,
Ω_d : Sürücü tarafı açısal hızı,	M_{fr1} : Sürtünme momenti,
Ω_1 : Yük tarafı açısal hızı,	

$$J_d \dot{\Omega}_d = M_d - b_d \Omega_d - b_{dl}(\Omega_d - \Omega_l) - c_{dl}(\varphi_d - \varphi_l) \quad (D.1)$$

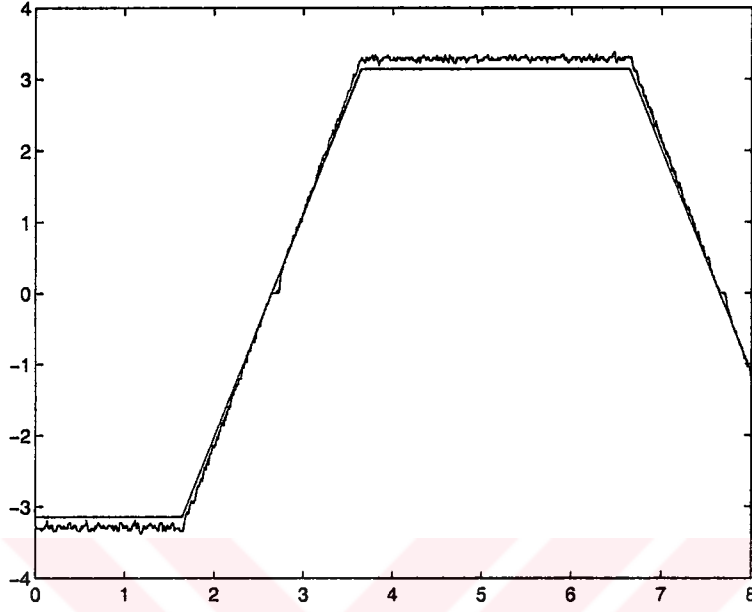
$$J_l \dot{\Omega}_l = b_{dl}(\Omega_d - \Omega_l) + c_{dl}(\varphi_d - \varphi_l) - b_l \Omega_l - (M_l + M_{frl})$$

(D.2) numaralı eşitlik,

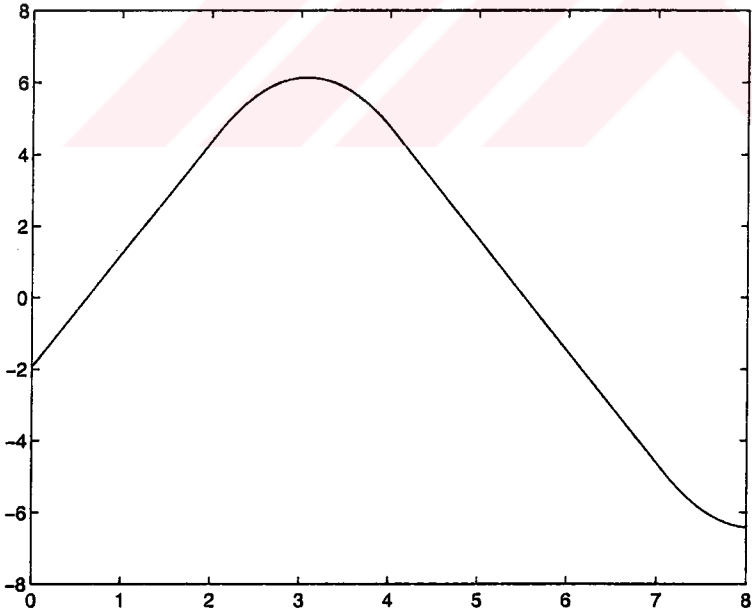
$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_d \\ \dot{\Omega}_d \\ \dot{\varphi}_l \\ \dot{\Omega}_l \\ \dot{M}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{dl}}{j_d} & -\frac{b_d + b_{dl}}{j_d} & \frac{c_{dl}}{j_d} & \frac{b_{dl}}{j_d} & \frac{1}{j_d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c_{dl}}{j_l} & -\frac{b_{dl}}{j_l} & -\frac{c_{dl}}{j_l} & -\frac{b_{dl}}{j_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{servo}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_d \\ \Omega_d \\ \varphi_l \\ \Omega_l \\ M_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_{servo}}{T_{servo}} \end{bmatrix} u_{servo} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{j_l} \\ 0 \end{bmatrix} (M_l + M_{frl})$$

$$\begin{bmatrix} inc. \\ inc. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_d \\ \Omega_d \\ \varphi_l \\ \Omega_l \\ M_d \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_{pc} u_{pc} + B u_{pd} \\ Y &= C_{pm} x_p \end{aligned} \quad (D.3)$$

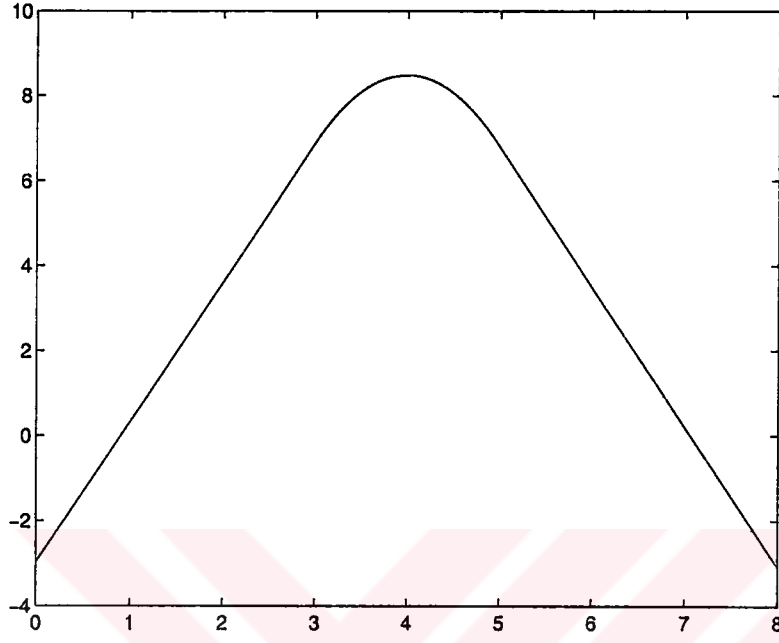
D.3 Simülasyon



Şekil D.4 Tabla ve Referans hızın birlikte gösterimi.



Şekil D. 5 Referans Pozisyon işareti.



Şekil D.6 Tabla pozisyonu.

ÖZGEÇMİŞ

1974 İstanbul doğumluyum. İlk ve Orta öğretimimi İstanbulda tamamladıktan sonra İstanbul Haydarpaşa Teknik Lisesinden son sınıfı okumadan bölüm birinciliği ile ayrılarak üniversiteyi kazandım . İ.T.Ü Elektrik Mühendisliğini bölümünden 1996 yılında mezun olduktan sonra. 1997 yılında İ.T.Ü Kontrol ve Bilgisayar Mühendisliği Yüksek Lisans Programına Kayıt oldum.1998 yılından sonra Araştırma Görevlisi olarak Kontrol ve Kumanda Anabilim Dalında çalışmaktayım.

