

İMLANTLAR VE PASTERNAK ZEMİNİ

A.Yalçın Aköz¹ ve Hale Ergun²

¹T.C. Maltepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Bölümü

²İTÜ İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim Dalı

ABSTRACT

In this study, Pasternak foundation model is used to analyse the behaviour of dental implants in bone and the variation of the total potential energy of the system is written to formulate the problem which yielded the required field equations with the boundary conditions. The assumed model is validated with photoelastic experiments.

ÖZET

Bu çalışmada implantın çene kemiği içindeki davranışını belirlemek üzere Pasternak zemin modeli kabul edilmiş ve formülasyon için sistemin Π toplam potansiyel enerjisi yazılıp bu ifadenin değişimi (varyasyonu) alınarak gerekli alan denklemleri ve sınır koşulları elde edilmiştir. Seçilen modelin doğruluğu, fotoelastik deneylerle test edilmiştir.

Anahtar kelimeler: *İmplantlar, Pasternak zemini, değişim (varyasyon) yöntemi, fotoelastik yöntem, integral denklem, Galarkin yöntemi*

1.Giriş

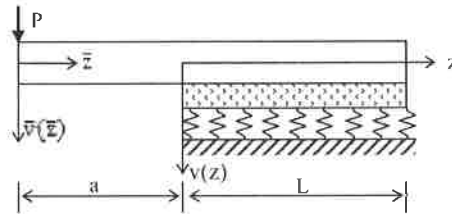
Diş hekimliğinde implant uygulamaları oldukça yaygınlaşmıştır. Bilindiği gibi implant çene kemiği içine yapay bir kök olarak yerleştirilmekte ve üzerine sonradan diş monte edilmektedir. Eğer ağızda çok sayıda diş eksiği varsa çene içine aralıklarla yerleştirilen birkaç kök üzerine yerleştirilen taşıyıcı bir sistem kullanılarak eksik dişler tamamlanabilmektedir. İmplant uygulamasını zorlaştıran konulardan birisi de implantın uygulanacağı bölgede sinirlerin olmasıdır. Bu durumda implant uygulaması sinirlerin özel bir operasyonla bölgeden uzaklaştırılmasını gerektirmektedir. Üst çenenin ön ortasındaki dar bir sinirsiz bölge bulunmaktadır. Bu bölgeye ikisi eğik olmak üzere dört implant yerleştirilebilmektedir. Ancak eğik implantlara gelen çiğneme kuvvetleri eksenel olmadıkları için moment yaratmaktadır. Bu da çene kemiğine alışılmışın dışında bir zorlama yaratacaktır. İmplant sisteminin üzerine kurulacak sistemin tasarımı için öncelikle eğik kuvvet etkisi altında bir çubuğun elastik bir zemin içindeki davranışı incelenmelidir.

Problemi incelemek için akla gelen çözüm yollarından birisi üç boyutlu sonlu eleman yönteminin kullanılmasıdır. Bu yöntemin güçlüğü bir yana sayısal sonuçların güvenilirliği tartışmalıdır.

Bu çalışmada, implant elastik çubuk ortam ise Pasternak zemini olarak modellenmiştir (Şekil.1). Alan denklemleri ve sınır koşulları enerji ve değişim (varyasyon) yöntemleri kullanılarak elde edilmiş, parametreler sonuçlarda açıkça görülecek şekilde kapalı olarak çözümler elde edilmiştir. Pasternak zemininin en önemli özelliği implantın ortama girdiği noktada oluşan kesme kuvvetindeki süreksizliktir. Bu süreksizlik sadece Pasternak zemininde söz konusudur. Bu süreksizlik koşulu da değişim yöntemi ile kolayca elde edilebilir [2,3]. Aynı problem Winkler zemini için de çözülmüştür. Bütün sonuçlar Pasternak zemini için elde edilen sonuçlarla mühendislik amaçları için birbirinin aynısıdır. Ancak bu problemde en önemli nokta implantın zemine girdiği noktadaki kesme kuvvet süreksizliği Winkler zemininde görülmediği için sonuçlar Winkler zeminine ait sonuçlar tartışma dışı bırakılmıştır. Çalışmada iki konu öne çıkmaktadır. Birincisi Pasternak modelinin bu problem için geçerliliği, diğeri de k ve G sabitlerinin bulunmasıdır. Matematik modelin ve çözümlerin geçerliliği fotoelastik deneylerle gerçekleştirilecektir.

2. Pasternak Zemini

Bu bölümde, sonsuz düzleme L uzunluğu boyunca gömülü kirişin, P yanal yüklemesi altındaki davranışı, iki parametrelili Pasternak zemin modeli kullanılarak incelenmiştir (Şekil.1).



Şekil 1. Problemin geometrisi ve Pasternak zemin modeli

Kirişe ait toplam potansiyel enerji Π , kesme kuvvetinin etkisi ihmal edilip, sadece eğilme momenti hesaba katılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Pi = \int_0^a \frac{EI}{2} (\bar{v}'')^2 d\bar{z} - P\bar{v}(0) + \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dz + \int_0^L \left[\frac{G}{2} (v')^2 + \frac{k}{2} v^2 \right] dz \quad (1)$$

Burada EI kirişin eğilme rijitliğidir. Pasternak zeminin birinci parametresi olan k'nın birimi $[K/L^2]$, ikinci parametresi olan G'nin birimi ise $[K]$ dir. Toplam potansiyel enerjinin varyasyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\delta \Pi = \int_0^a EI \bar{v}'' \delta \bar{v}'' d\bar{z} - P \delta \bar{v}(0) + \int_0^L EI v'' \delta v'' dz + \int_0^L (G v' \delta v' + k v \delta v) dz$$

Gerekli kısmi entegrasyonlar uygulandıktan sonra aşağıdaki (2) ifadesi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \delta \Pi = EI \bar{v}'' \delta \bar{v}' \Big|_0^a - EI \bar{v}''' \delta \bar{v} \Big|_0^a + \int_0^a EI \bar{v}^{IV} \delta \bar{v} dz + EI v'' \delta v' \Big|_0^1 - EI v''' \delta v \Big|_0^1 + G v' \delta v \Big|_0^1 \\ + \int_0^L (EI v^{IV} - G v'' + k v) \delta v dz - P \delta \bar{v}(0) \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{z} = a$, $z = 0$ birleşim noktasında süreklilik nedeniyle

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}(a) &= v(0) \\ \bar{v}'(a) &= v'(0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \delta \bar{v}(a) &= \delta v(0) \neq 0 \\ \delta \bar{v}'(a) &= \delta v'(0) \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

yazılır.

$$\begin{aligned} \bar{v}^{IV} \delta \bar{v} &= 0 & 0 < \bar{z} < a \\ (v^{IV} - 2\eta^2 v'' + \lambda^4 v) \delta v &= 0 & 0 < z < L \end{aligned} \quad (4)$$

Burada,

$$\lambda^4 = \frac{k}{EI} \quad (5a)$$

$$2\eta^2 = \frac{G}{EI} \quad (5b)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} [-EI \bar{v}'''(0)] \delta \bar{v}'(0) + [EI \bar{v}'''(0) - P] \delta \bar{v}(0) + [EI v'''(L)] \delta v'(L) + [EI \bar{v}''(a) - EI v''(0)] \delta v'(0) \\ + [G v'(L) - EI v'''(L)] \delta v(L) + [EI v'''(0) - EI \bar{v}'''(a) - G v'(0)] \delta v(0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Varyasyonlar hesabının temel teoremi gereği çarpanlar sıfır olmalıdır [1]. Yani bölgede,

$$\bar{v}^{IV} = 0 \quad 0 < \bar{z} < a \quad (7a)$$

$$v^{IV} - 2\eta^2 v'' + \lambda^4 v = 0 \quad 0 < z < L \quad (7b)$$

Sınırlarda ise,

$$\bar{v}''(0) = 0 \quad (8a)$$

$$\bar{v}'''(0) = \frac{P}{EI} \quad (8b)$$

$$\bar{v}''(a) = v''(0) \quad (8c)$$

$$v'''(0) - \bar{v}'''(a) - \frac{G}{EI} v'(0) = 0 \quad (8d)$$

$$v'''(L) = 0 \quad (8e)$$

$$\frac{G}{EI} v'(L) - v'''(L) = 0 \quad (8f)$$

sınır koşulları elde edilir. (7a) ve (7b) diferansiyel denklemlerinin çözümlerini bulmak için ayrıca çökme ve dönmenin sürekliliğini ifade eden koşullarını da probleme eklemek gerekir.

$$\bar{v}(a) = v(0) \quad (8g)$$

$$\bar{v}'(a) = v'(0) \quad (8h)$$

(7a-7b) olmak üzere iki adet diferansiyel denklem ve (8a-8h) olmak üzere sekiz adet koşul ile problem ortaya konmuş olur. $0 \leq \bar{x} \leq a$ aralığındaki (7a) diferansiyel denkleminin çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\bar{v}(\bar{x}) = \delta_0 + \theta_0 \bar{x} + \frac{P}{6EI} \bar{x}^3 \quad (9)$$

Burada δ_0 ve θ_0 , P nin uygulandığı $\bar{x} = 0$ başlangıç noktasındaki çökme ve dönmedir. (7b) nolu diferansiyel denklemin çözümü için $v = v e^{i\eta \bar{x}}$ önerildiğinde karakteristik denklemin köklerinin durumuna göre aşağıdaki üç farklı hal olabilir.

I.HAL: $\eta = \lambda$ olduğu geçiş durumu için çözüm aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$v(\bar{x}) = C_1 e^{i\lambda \bar{x}} + C_2 \bar{x} e^{i\lambda \bar{x}} + C_3 e^{-i\lambda \bar{x}} + C_4 \bar{x} e^{-i\lambda \bar{x}} \quad (10)$$

II. HAL: $\eta > \lambda$ durumu için çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v(\bar{x}) = D_1 e^{a\bar{x}} + D_2 e^{-a\bar{x}} + D_3 e^{b\bar{x}} + D_4 e^{-b\bar{x}} \quad (11)$$

Burada,

$$a^2 = \eta^2 + \sqrt{\eta^4 - \lambda^4}$$

$$b^2 = \eta^2 - \sqrt{\eta^4 - \lambda^4}$$

olarak tanımlanmıştır.

III.HAL: $\eta < \lambda$ hali için karakteristik denklem

$$p^2 = \eta^2 (1 \pm i\sqrt{\phi - 1})$$

$$p^2 = \eta^2 \sqrt{\phi} e^{\pm 2i\theta}$$

halini alır. Burada,

$$\kappa = \eta^2 \sqrt{\phi - 1}$$

$$\phi = \frac{\lambda^4}{\eta^4}$$

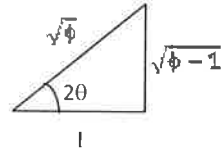
olarak tanımlanmıştır. Karakteristik denklem Şekil.2'de tanımlanan θ açısı kullanılarak,

$$p_k = \pm \lambda (\cos \theta \pm i \sin \theta) = \pm \lambda e^{\pm i\theta} \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (14)$$

bulunur.

$$\alpha = \lambda \cos \theta \quad (15a)$$

$$\beta = \lambda \sin \theta \quad (15b)$$



Şekil 2.

tanımlarını yapalım. Yukarıda tanımlanmış katsayılar arasında işlemleri önemli ölçüde kolaylaştıracak aşağıdaki ilişkiler mevcuttur.

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= \lambda^2 \\ \alpha^2 - \beta^2 &= \eta^2 \\ 2\alpha\beta &= \lambda^2 \sin 2\theta \\ 3\alpha^2 - \beta^2 - 2\eta^2 &= \lambda^2 \\ 3\beta^2 - \alpha^2 + 2\eta^2 &= \lambda^2\end{aligned}\quad (16)$$

(7b) diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$v(z) = (A + C)K_{11} + (B + D)K_{12} + (A - C)K_{21} + (B - D)K_{22} \quad (17a)$$

Bu çözümün sınır koşullarını uygulamak için türevlerini hazırlayalım.

$$\begin{aligned}v'(z) &= (A + C)[\alpha K_{21} - \beta K_{12}] + (A - C)[\alpha K_{11} - \beta K_{22}] \\ &\quad + (B + D)[\alpha K_{22} + \beta K_{11}] + (B - D)[\alpha K_{12} + \beta K_{21}]\end{aligned}\quad (17b)$$

$$\begin{aligned}v''(z) &= (A + C)[\eta^2 K_{11} - \kappa K_{22}] + (A - C)[\eta^2 K_{21} - \kappa K_{12}] \\ &\quad + (B + D)[\eta^2 K_{12} + \kappa K_{21}] + (B - D)[\eta^2 K_{22} + \kappa K_{11}]\end{aligned}\quad (17c)$$

$$\begin{aligned}v'''(z) &= (A + C)[\alpha F_{1K_{21}} - \beta F_{2K_{12}}] + (A - C)[\alpha F_{1K_{11}} - \beta F_{2K_{22}}] \\ &\quad + (B + D)[\alpha F_{1K_{22}} + \beta F_{2K_{11}}] + (B - D)[\alpha F_{1K_{12}} + \beta F_{2K_{21}}]\end{aligned}\quad (17d)$$

Burada, K_{ij} ler aşağıda verildiği gibi z nin fonksiyonlarıdır.

$$\begin{aligned}K_{11} &= \text{ch}(\alpha z) \cos(\beta z) \\ K_{12} &= \text{ch}(\alpha z) \sin(\beta z) \\ K_{21} &= \text{sh}(\alpha z) \cos(\beta z) \\ K_{22} &= \text{sh}(\alpha z) \sin(\beta z)\end{aligned}\quad (18)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}F_1 &= 2\eta^2 - \lambda^2 \\ F_2 &= 2\eta^2 + \lambda^2\end{aligned}\quad (19)$$

olarak tanımlanmıştır. (8c), (8d), (8g) ve (8h) sınır koşulları ile δ_0 ve θ_0 cinsinden elde edilen $v(z)$ çözümü (8e) ve (8f) sınır koşullarında yerine konarak δ_0 ve θ_0 değişkenlerine göre iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}\quad (20)$$

Burada,

$$\begin{aligned}A_{11} &= M_1 - \frac{\eta^2 M_3}{\kappa} \\ A_{12} &= aM_1 + \frac{M_2}{2\alpha} - \frac{a\eta^2 M_3}{\kappa} + \frac{M_4}{2\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= M_6 - \frac{\eta^2 M_8}{\kappa} \\
A_{22} &= aM_6 + \frac{M_5}{2\alpha} - \frac{a\eta^2 M_8}{\kappa} + \frac{M_7}{2\beta} \\
B_1 &= -\frac{Pa^2}{EI} \left(\frac{aM_1}{6} - \frac{M_2}{2\alpha a^2 \lambda^2} + \frac{M_2}{4\alpha} + \frac{M_3}{a\kappa} - \frac{a\eta^2 M_3}{6\kappa} + \frac{M_4}{4\beta} + \frac{M_4}{2\beta a^2 \lambda^2} \right) \\
B_2 &= -\frac{Pa^2}{EI} \left(\frac{aM_6}{6} + \frac{M_7}{2\beta a^2 \lambda^2} + \frac{M_7}{4\beta} + \frac{M_8}{a\kappa} - \frac{a\eta^2 M_8}{6\kappa} + \frac{M_5}{4\alpha} - \frac{M_5}{2\alpha a^2 \lambda^2} \right)
\end{aligned} \tag{21}$$

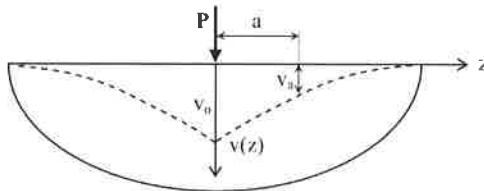
Burada,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \eta^2 K_{11} - \kappa K_{22} \\
M_2 &= \eta^2 K_{21} - \kappa K_{12} \\
M_3 &= \eta^2 K_{22} + \kappa K_{11} \\
M_4 &= \eta^2 K_{12} + \kappa K_{21} \\
M_5 &= \alpha K_{11} + \beta K_{22} \\
M_6 &= \alpha K_{21} + \beta K_{12} \\
M_7 &= \alpha K_{22} - \beta K_{11} \\
M_8 &= \alpha K_{12} - \beta K_{21}
\end{aligned} \tag{22}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada KIJ ler (18) ifadeleri ile verilen fonksiyonlarının $z = l$ deki değerleri olan sabit sayılardır. Bu denklem takımı çözülerek δ_0 ve θ_0 bulunur. Böylece, çubuğa ait çökme, dönme, moment ve kesme kuvveti ifadeleri hesaplanmış olur.

2. Malzeme Sabitleri

Bu bölümde, P tekil yükü altında yarı sonsuz düzlemin yer değiştirmesi problemi ele alınarak malzeme sabitleri olarak Pasternak zemin parametrelerinin belirlenmesi amaçlanmıştır (Şekil.3).



Şekil 3. Tekil yük deneyi

Sisteme ait toplam potansiyel enerji Π aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Pi = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{G}{2} (v')^2 + \frac{k}{2} v^2 \right) dz - P v(0) \quad (23)$$

Burada $v(0)$, P tekil yükünün altında meydana gelen Şekil.3 deki v_0 çökmesidir. Toplam potansiyel enerjinin varyasyonu ise aşağıdaki gibidir.

$$\delta \Pi = 2 \int_0^{\infty} (G v' \delta v' + k v \delta v) dz - P \delta v(0) \quad (24)$$

Kısmi integrasyon uygulandıktan sonra düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\delta \Pi = 2 \int_0^{\infty} (k v - G v'') \delta v dz + 2 G v'(\infty) \delta v(\infty) - (2 G v'(0) + P) \delta v(0) \quad (25)$$

elde edilir. Varyasyonlar hesabının temel teoremi gereği çarpanlar sıfır olmalıdır [1]. Yani bölgede,

$$v'' - \omega^2 v = 0 \quad 0 < z < \infty \quad (26)$$

Burada $\omega^2 = k/G$ dir. Sınırlarda ise,

$$v' = -\frac{P}{2G} \quad z = 0 \quad (27a)$$

$$v' = 0 \quad z = \infty \quad (27b)$$

yazılabilir. Yukarıdaki diferansiyel denkleminin çözümü sınır koşulları uygulandıktan sonra aşağıdaki gibi bulunur.

$$v(z) = \frac{P}{2G\omega} e^{-\omega z} \quad (28)$$

Şekil.6 da görülen $z = 0$ ve $z = a$ noktalarındaki çökme değerleri v_0 ve v_a olarak ölçülmüş olsun. Yukarıda (28) denkleminde yerlerine yerleştirilerek bu iki ifadeden k ve G sabitleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k = \frac{P}{2v_0} \frac{\ln(v_0/v_a)}{a} \quad (29a)$$

$$G = \frac{P}{2v_0} \frac{a}{\ln(v_0/v_a)} \quad (29b)$$

Burada, belirli bir P yükünün altındaki v_0 çökmesi biliniyor ise, $\omega = v_0/v_a$ olacak şekilde v_a çökmesinin olduğu a_0 mesafesi tespit edilerek, (29) bağıntıları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$k = \frac{P}{2v_0 a_0} \quad (30a)$$

$$G = \frac{P a_0}{2v_0} \quad (30b)$$

3. Self Kalibrasyon ve Deneysel Gerçekleme

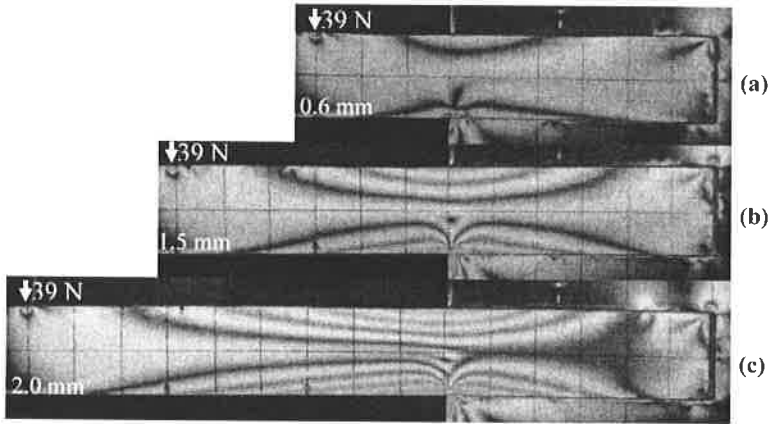
Kurulan matematik modelin ve çözümün doğruluğunu kontrol etmek için fotoelastik deneye başvurulmuştur. Ortam ve implantı temsil etmek üzere **0.5cm** kalınlığında plastik kullanılmıştır. Çubuğun yüksekliği **h = 2cm**, boyu ise 16cm olarak seçilmiştir. **L = 6cm** lik çubuk zemin içine gömülmüş ve zeminin dışında **a₁ = 3cm**, **a₂ = 6cm** ve **a₃ = 9cm** uzaklıktan **P = 39N** çubuğa dik kuvvet uygulanmıştır. Yapılan ön deneyde kullanılan malzemenin elastisite modülü **E = 270kN/cm²**, optik sabiti ise **f = 134N/cm/fringe** olarak ölçülmüştür.

Üç ayrı noktadan yapılan yüklemeler için elde edilen deney fotoğrafları Şekil.4'te görülmektedir. Bu şekiller incelendiği zaman aşağıdaki karakteristik sonuçlar net olarak belirlenebilir:

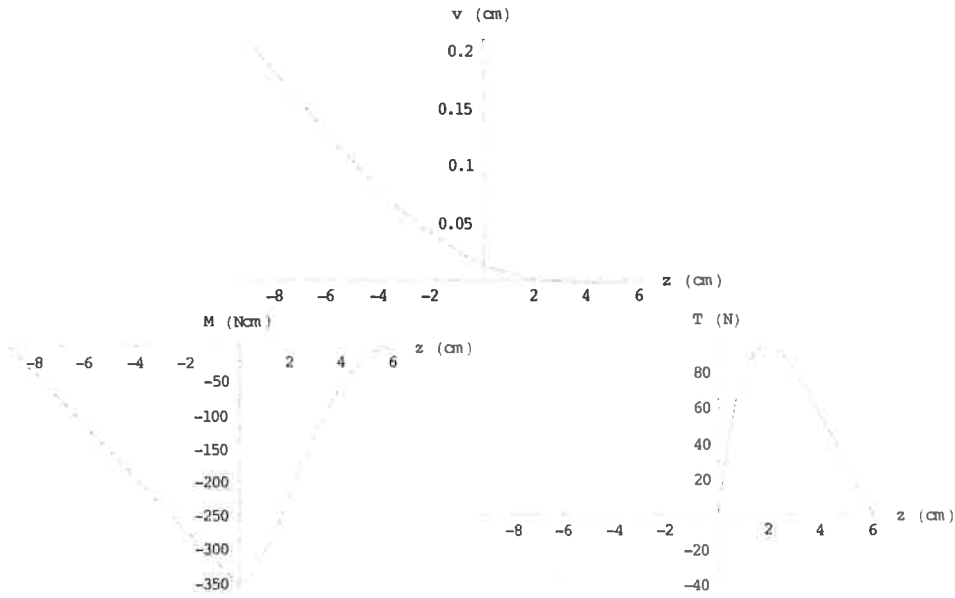
- Kuvvet sınıra yaklaştıkça izotropik nokta olarak adlandırdığımız siyah nokta sınırdan içeri doğru hareket etmektedir. **a = 9cm** için izotropik nokta tam sınırdadır. Bu da sınır noktasında çubuk kesme kuvvetinde P kadar bir atlama olduğu ve bu nedenle **T = 0** olması gerektiğini belirler. Öyleyse G sabiti bu noktada kesme kuvvetini sıfır yapacak şekilde belirlenmelidir. Bu özellikler P'nin büyüklüğüne bağlı değildir.

- En uç noktada **a = 9cm** için çökme yaklaşık **2mm** olarak ölçülmüştür. Öyleyse ortamın k ve G değerleri bu iki sonucu sağlayacak şekilde belirlenmelidir.

Problemin çözümü için bir Mathematica programı yazılmıştır. Yukarıda anlatılan yol izlenerek çözümler üzerinde k ve G ye değişik değerler verilerek **a = 9cm** lik çubuk için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir (Şekil.5).



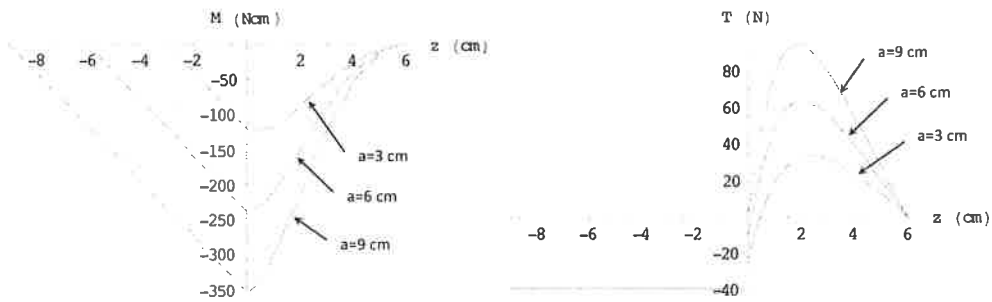
Şekil 4. **P = 39N**, **L = 6cm** için yapılan deneyler, (a) **a = 3cm**, (b) **a = 6cm**, (c) **a = 9cm**.



Şekil 5.

$P = 39\text{N}$, $L = 6\text{cm}$, $\lambda = 0.577\text{cm}^{-1}$, $\eta = 0.149\text{cm}^{-1}$, $k = 10\text{kN/cm}^2$, $G = 4\text{kN}$, $a = 9\text{cm}$, $\delta_o = 0.208\text{cm}$, $\theta_o = -0.0275$, $\delta = 0.0135\text{cm}$, $\theta = -0.0099$, $T_o = 0.876\text{N}$.

Buradan elde edilen $k = 10\text{kN/cm}^2$, $G = 4\text{kN}$ değerleri kullanılarak $a = 9\text{cm}$, $a = 6\text{cm}$ ve $a = 3\text{cm}$ uzaklıklardan yük uygulandığında elde edilen M ve T kesit tesir diyagramları Şekil.6'da görülmektedir.

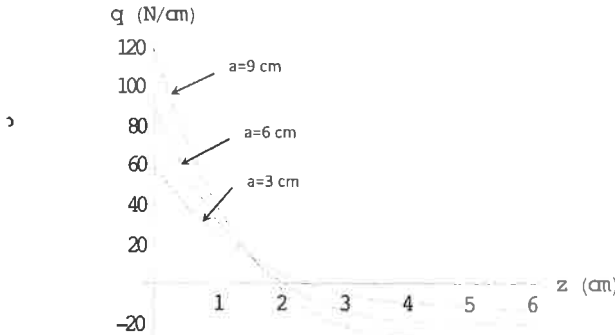


Şekil 6. $P = 39\text{N}$, $L = 6\text{cm}$, $\lambda = 0.577\text{cm}^{-1}$, $\eta = 0.149\text{cm}^{-1}$, $k = 10\text{kN/cm}^2$, $G = 4\text{kN}$,
 $a = 9\text{cm}$ ($\delta_o = 0.208\text{cm}$, $\theta_o = -0.0275$, $\delta = 0.0135\text{cm}$, $\theta = -0.0099$, $T_o = 0.876\text{N}$),
 $a = 6\text{cm}$ ($\delta_o = 0.083\text{cm}$, $\theta_o = -0.0148$, $\delta = 0.0100\text{cm}$, $\theta = -0.0070$, $T_o = -10.86\text{N}$),
 $a = 3\text{cm}$ ($\delta_o = 0.023\text{cm}$, $\theta_o = -0.0060$, $\delta = 0.0060\text{cm}$, $\theta = -0.0040$, $T_o = -22.59\text{N}$).

Bu grafikler incelendiğinde T ve M diyagramlarında hesaplanmış ve deneysel sonuçlar bakımından aşağıda belirlenen özelliklerin sağlandığı net olarak görülmektedir.

- a küçüldükçe momentin en büyük değeri çubuğun iç bölgesine yavaş yavaş bir kayma yaptığı **a = 6cm** için momentin en büyük değerinin tam sınırdaki olduğu,
- İç bölgedeki kesme değerlerinde ise a küçüldükçe bir düşüş olduğu net bir biçimde söylenebilir. **a = 6cm** için çubuğun iç ve dış bölgelerinde yaklaşık olarak bir eşitlik vardır. **a = 3cm** için iç bölgelerdeki T değerleri P den belirgin bir biçimde küçüktür.

Ayrıca Şekil.7 de zeminden çubuğa gelen yayılı zemin tepkisi olan $q(z)$ fonksiyonları çizilmiştir. Bu fonksiyonlar kesme kuvveti ifadelerinin türevleri alınarak elde edilmiştir. Çubuğun serbest cisim diyagramında $q(z)$ fonksiyonuna ek olarak $z = 0$ ve $z = L$ 'deki tekil kuvvetleri de yerleştirmek gerekir.



Şekil 7. (a) **a = 3cm**, (b) **a = 6cm**, (c) **a = 9cm** için $q(z)$ zemin tepkisi fonksiyonları.

4.Sonuçlar

Bu çalışmada implantların lateral yük altında çene kemiğine yaptığı etkileri bulmak için ortamın kendisini incelemek yerine incelenmesi daha kolay olan çubuk incelenmiştir. Elastik ortam Pasternak zemini olarak kabul edilmiştir.

- Alan denklemleri ve sınır koşulları sistemin toplam potansiyeli üzerinde değişim (varyasyon) alınarak elde edilmiştir. Bu yöntem sınır koşullarını elde etmek için çok önemlidir. Aynı zamanda alan denklemleri de kolayca bulunabilmektedir.
- G ve k sabitleri ile EI rijitlik değerlerine bağlı olarak üç farklı çözüm ayrı ayrı bulunmuştur. Ancak uygulamada karşımıza çıkan malzemeler için III. Bölgedeki çözüm integral sabitleri sınır koşulları kullanılarak elde edilmiştir.
- Bu incelemede dikkati çeken önemli özellik çubuğun ortama girdiği noktada çubuk kesme kuvvetindeki süreksizliktir. Eğer ortam Winkler zemini olarak alınsa idi kesme kuvvetinde bu süreksizlik elde edilememektedir. Deneylerde ise kesme kuvvetindeki bu süreksizlik son derece net bir biçimde görülmektedir. Gerçek uygulamada ortaya çıkan sorunların gerçek nedeni de budur.
- Ortam için k ve G Pasternak katsayıları self kalibrasyonla elde edilmiştir.

- Gerçek çene kemiğinde buradaki olanak olmadığı için Pasternak katsayılarını bulmak üzere P tekil yüklemesine ait çökme fonksiyonu elde edilmiştir. Bu çözüm kullanılarak k ve G değerinin basitçe elde edilmesi gösterilmiştir. Ancak hassas ölçümler için deney düzeneği olmadığından bu yöntem bu çalışmada denenmemiştir.
- Bundan önceki bölümde ayrıntılı olarak anlatıldığı gibi matematik modelleme ve buradan elde edilen kapalı çözümlerle deneysel çözümler arasındaki mükemmel diyebileceğimiz uyuşma burada önerilen basit modellemenin geçerliğini kanıtlamaktadır.
- Deney ve teorinin birlikte uygulanmasının yarattığı avantaj bu çalışma nedeniyle bir kez daha vurgulanabilir.
- Bir eleman zemin ilişkisi çözüldükten sonra üst yapı hesabı ve daha karmaşık üst yapı problemi teorik olarak çözülebilir. Ancak bir kez daha vurgulamak gerekir ki çene kemiğinin k ve G Pasternak katsayıları elde edilmelidir.

Kaynaklar

- [1] M.M.Frocht, Photoelasticity, Vol.I, John Wiley&Sons Inc., 1941.
- [2] I.M.Gelfand ve S.V.Fomin, Calculus of Variations Prentice-Hall Inc.,1963
- [3] A.D.Kerr, On the derivation of well posed boundary value problems in structural mechanics, Int.J.Solids Structures 12, 1-11, 1976.
- [4] J.E.Bowles, Analytical and Computer Methods in Foundation Eng., Mc Graw-Hill., 1974.
- [5] M.Cehreli, J.Duyck, M.De Cooman, R.Puers, I.Naert, Implant design and interface force transfer. A photoelastic and strain-gauge analysis, Clin. Orl. Impl. Res. 15, 249–257, 2004.
- [6] S.C.Dutta, R.Roy, A critical review on idealization and modeling for interaction among soil–foundation–structure system, Computers and Structures 80, 1579–1594, 2002.
- [7] G.Celik ve B.Uludag, Photoelastic stress analysis of various retention mechanisms on 3-implant retained mandibular overdentures, The Journal of Prosthetic Dentistry 97 (4) 229-235, April 2007.

