



PİEZOELEKTRİK MALZEMEDEN YAPILMIŞ SANDVIÇ PLAK-ŞERİTİN DELAMİNASYON BURKULMASI

S. D. Akbarov^{1,2} and N. Yahnioğlu³

¹ Yıldız Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 39340 Beşiktaş, İstanbul,

² Azerbaycan Milli Bilimler Akademisi, Matematik ve Mekanik Enstitüsü, Bakü, Azerbaycan

³ Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, 34220 Davutpaşa, İstanbul

SUMMARY

In this study, the buckling delamination problem of a sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers, which is containing cracks between the face and core layers is investigated under uniformly distributed compressive forces acting along the cracks. It is assumed that the plate-strip is simply supported and grounded along its two parallel ends. Moreover, it is supposed that the upper and the lower free face-planes and, also cracks' surfaces of the plate are traction free of both mechanical or electrical forces and unelectroded with vanishing normal electric displacement and also non-permittivity conditions are satisfied in the cracks' regions. It is also supposed that before the plate-strip is loaded (i.e. in the natural state), the surfaces of these cracks have insignificant initial imperfections. Due to compressive forces acting along the cracks the critical parameters are determined from the criteria of which considered insignificant initial imperfections of the cracks' surfaces grow indefinitely. Mathematical modeling of the considered problem is formulated within the scope of the exact nonlinear equations of electro-elasticity in the framework of the piecewise homogeneous body model in the plane-strain state and solved numerically by employing the finite elements method. Numerical results showing the influence of various geometrical and material parameters as well as the coupling of the electrical and mechanical fields on the values of the critical parameters of the delamination-buckling of the considered sandwich plate are presented and analyzed.

ÖZET

Bu çalışmada, alt ve üst katmanları piezoelektrik malzemeden, orta katmanı elastik malzemeden yapılmış ve katmanları arasında çatlak olduğu kabul edilen sandviç plak-şerit'in, karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı dış basınç kuvveti altında delaminasyon-burkulma problemi incelenmiştir. Plak-şeritin karşılıklı iki kenarından basit mesnetli ve aynı yüzeyde elektrik potansiyelin sıfır olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca,

plağın alt ve üst serbest yüzeyleri ile çatlak yüzeyinde herhangi bir mekaniksel ve elektriksel yükün olmadığı, belirtilen yüzeylerin dış ortam ile elektriksel iletiminin bulunmadığı kabul edilmiş ve çatlak bölgesinin elektriksel geçirgenliği ihmal edilmiştir. Yükleme yapılmadan önce (yani, başlangıç durumunda) çatlak yüzeylerinin çok küçük ön eğintilere sahip olduğu kabul edilmektedir. Çatlaklar doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvvetinin etkisiyle, bu eğintilerin büyüyerek sonsuza gitmesi kriterinden kritik parametreler belirlenecektir. Ele alınan sınırdeğer problemi, düzlem şekil değiştirme durumunda, elektro-elastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemleri ve parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde matematiksel olarak modellenmiş ve sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Sayısal incelemelerde, çeşitli malzeme ve geometrik parametreler ile mekaniksel ve elektriksel alanın karşılıklı etkisinin, ele alınan sandviç plak-şeritin delaminasyon burkulma değerlerine etkisi araştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Günümüzde pek çok mühendislik uygulamalarında örneğin, elektrik enerjisini mekanik enerjisine (veya tersine) dönüştüren transistörlerde (transducers), frekans kontrolünde veya telekomünikasyonda kullanılan ses yansıtıcılarında (resonators), hassas zaman ve ses senkronizasyon ayarlayıcılarda, sıcaklık veya basınç değişimlerinin belirlenmesi (sensörler) gibi pek çok aygıtta (elektro-mekanik araç-gereçlerde) piezoelektrik malzemelerin kullanımı hızla artmaktadır. Bu malzemelerin uygulama alanlarının çeşitlenmesi, uygulamalarda karşılaşılan problemler ve bunlara çözüm arayışı, bu malzemeler üzerine yapılan teorik ve deneysel bilimsel çalışmaların da artmasına neden olmaktadır.

Uygulamada çoğunlukla piezoelektrik malzemeden yapılmış kısımlar, temel yapıyı veya makine parçasını oluşturan ana bileşene tutturulan levha formundaki bileşenler olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla farklı malzemelerden oluşturulmuş çokkatlı bir kompozit yapı ortaya çıkmaktadır. Çok katlı kompozit malzemelerin önemli problemlerinden biri de katmanlar arasında oluşabilecek boşluk/çatlakların, bunlar doğrultusunda etkiyen dış basınç kuvveti altında bu yapılarda sıklıkla karşılaşılan delaminasyon burkulma problemleridir.

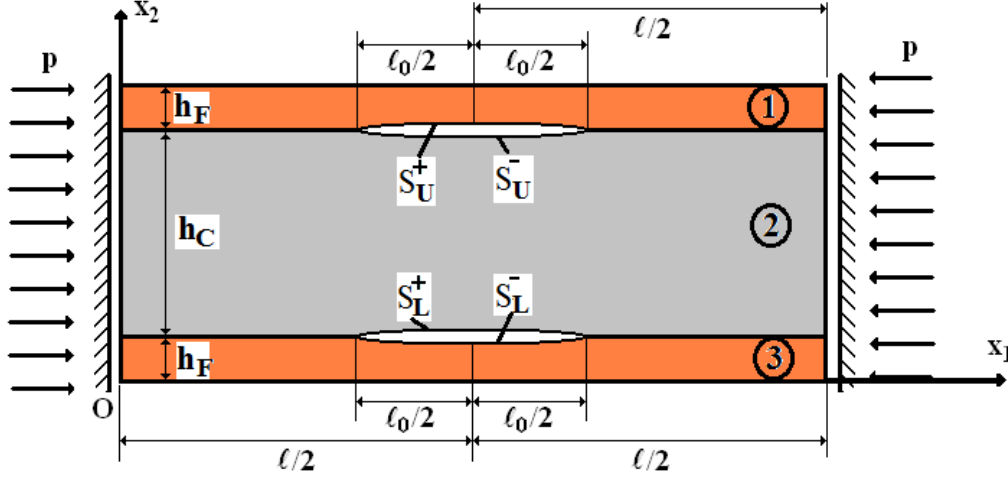
Elastisite ve viskoelastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde, çok katlı kompozit plaklara ait çeşitli 2 ve 3 boyutlu delaminasyon-burkulma problemleri elastik ve viskoelastik kompozit malzemeden yapılmış yapı elemanları için son yıllarda Akbarov ve öğrencileri tarafından çalışılmıştır [1,2,3]. Akbarov ve öğrencileri tarafından yapılan bu alandaki tüm çalışmalar [4] kaynağında toparlanmıştır. Piezoelektrik malzemeden yapılmış yapı elemanlarına ait delaminasyon-burkulma problemlerine ait bazı çalışmalar [5,6,7,8] olarak verilebilir. Ancak bu araştırmalarda yaklaşık plak ve şerit teorileri kullanılmıştır.

Ele alınan çalışmada dış katmanları piezoelektrik, orta katmanı elastik malzemeden yapılmış ve katmanları arasında çatlak içeren sandviç plağın, çatlaklar doğrultusunda etki eden dış basınç kuvveti etkisinde yapısında oluşan delaminasyon-burkulma problemi, elektro-elastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemleri çerçevesinde incelenmiştir. Bu çalışma [9] kaynağındaki çalışmaların bir kısmını içermektedir.

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Ele alınan piezoelektrik sandviç plak-şeritin geometrik verileri ve yükleme durumu Şekil 1’de verilmiştir. Buna göre şerit plak, kalınlığı h_F olan dış piezoelektrik katmanlar ile kalınlığı h_C olan elastik orta katmandan oluşmakta ve katmanlar arasında ℓ_0 uzunluğunda çatlak olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, ele alınan plak-şeritin, $x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell$

düzlemlerinden basit mesnetli ve elektriksel potansiyelin sıfır olduğu, alt ve üst serbest yüzeyi ile çatlak yüzeylerinden elektriksel ve mekanik herhangi bir yükün etki etmediği ve sadece $x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell$ yüzeylerinden çatlaklar doğrultusunda, yayılı yük şiddeti p olan, düzgün yayılı normal basınç yükünün etki ettiği kabul edilmektedir (Şekil 1).



Şekil 1. Çözüm bölgesi ve yükleme durumu

Matematiksel temsil kolaylığı açısından her katman numaralandırılmış, üst, orta ve alt katmanlara ait büyüklükler sırasıyla üst indis “(r_1)”, “(r_2)” ve “(r_3)” ile gösterilmiştir. Eğer alt ve üst katmanların aynı piezoelektrik malzemeden yapıldığı kabul edilirse, diğer bir işaretleme olarak dış katmanlara (orta katmana) ait büyüklükler üst indis “(2)” (“(1)”) ile gösterilecektir. Dolayısıyla bu durum için $r_1 = r_3 = 2$ ve $r_2 = 1$ olur. Yüklemeden önceki durumda Ox_1x_2 koordinatları Şekil 1 de gösterildiği gibi alınmış ve matematiksel modelleme Lagrange koordinatları kullanılarak yazılmıştır.

Verilenlere göre ele alınan sınırdeğer probleminin çözüm bölgesi,

$$\Omega = \Omega^{(r_1)} \cup \Omega^{(r_2)} \cup \Omega^{(r_3)} \quad (1)$$

burada,

$$\Omega^{(r_3)} = \{0 \leq x_1 \leq \ell, 0 \leq x_2 \leq h_F\}, \quad \Omega^{(r_2)} = \{0 \leq x_1 \leq \ell, h_F \leq x_2 \leq h_F + h_C\},$$

$$\Omega^{(r_1)} = \{0 \leq x_1 \leq \ell, h_F + h_C \leq x_2 \leq 2h_F + h_C\} \quad (2)$$

dir. Ayrıca, sandviç plak-şeritin katmanları arasında olduğu kabul edilen çatlakların konumu

$$\Gamma_1 = \{(\ell - \ell_0)/2 \leq x_1 \leq (\ell + \ell_0)/2, x_2 = h_F\} \text{ ve}$$

$$\Gamma_2 = \{(\ell - \ell_0)/2 \leq x_1 \leq (\ell + \ell_0)/2, x_2 = h_F + h_C\} \quad (3)$$

dir. Burada ℓ_0 çatlakın Ox_1 eksenine doğrultusundaki uzunluğu olup, çatlakların $x_2 = h_F/2$ ve $x_1 = \ell/2$ düzlemlerine göre simetrik olduğu ve başlangıçta (kuvvet etkileden önce) çatlak

yüzeylerinin çok küçük eğintilere sahip olduğu kabul edilmektedir. Buna göre çatlak yüzeylerinin denklemi,

$$x_2^\pm = h_F + \varepsilon f^\pm(x_1), \quad (\ell - \ell_0)/2 \leq x_1 \leq (\ell + \ell_0)/2 \quad (\text{alt çatlak}),$$

$$x_2^\pm = h_F + h_C + \varepsilon f^\pm(x_1), \quad (\ell - \ell_0)/2 \leq x_1 \leq (\ell + \ell_0)/2 \quad (\text{üst çatlak}) \quad (4)$$

ile verilebilir. (4) de ε ($\varepsilon \ll 1$) çatlak yüzeyinde olduğu kabul edilen başlangıçtaki eğintilerin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametreyi, $f(x_1)$ çatlak yüzeylerindeki eğintilerin formunu temsil eden fonksiyonu ve üst indis “+” (“-”) ele alınan çatlağın üst (alt) yüzeyini temsil etmektedir. Burada $f(x_1)$ fonksiyonunun aşağıdaki eşitlikleri sağladığı kabul edilmektedir:

$$f^+(x_1) = -f^-(x_1), \quad f^\pm((\ell - \ell_0)/2) = f^\pm((\ell + \ell_0)/2) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial f^\pm(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1=(\ell-\ell_0)/2} = \left. \frac{\partial f^\pm(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1=(\ell+\ell_0)/2} = 0. \quad (5)$$

Böylece, çatlaklar doğrultusunda etki eden yayılı yük yoğunluğu p olan düzdün yayılı dış basınç kuvveti etkisinde çatlak yüzeylerindeki çok küçük eğintilerin büyüyerek sonsuza gitmesi (küçük eğinti kriteri) kriterinden, yapı elemanına ait kritik parametreler belirlenecektir. Araştırmalar düzlem şekil değiştirme çerçevesinde elektro-elastisite teorisinin geometrik lineer olmayan kesin denklemleri yardımıyla parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Buna göre çözüm bölgesi Ω (1)’da sağlanan alan denklemleri:

Alan denklemleri

$$\frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \quad K_{ji}^{(r_n)} = T_{jk}^{(r_n)} \left(\delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right) + M_{ji}^{(r_n)} \quad (6)$$

Bünye denklemleri

$$T_{ij}^{(r_n)} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, \quad D_i^{(r_n)} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)},$$

$$M_{ji}^{(r_n)} = \varepsilon_0 \left(E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j \right), \quad E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k}, \quad (7)$$

Kinematik bağıntılar:

$$s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l} \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k} \right), \quad (8)$$

dir. (6)-(8) ‘de $i, j, k = 1, 2, n = 1, 2, 3$ ayrıca, $T_{jk}^{(r_n)}$, $s_{kl}^{(r_n)}$ sırasıyla gerilme tansörü ile Green şekil değiştirme tansörü bileşenlerini, $M_{ji}^{(r_n)}$ Maxwell gerilme tansörü bileşenlerini, $u_k^{(r_n)}$ ve $D_i^{(r_n)}$ sırasıyla mekanik yerdeğiştirme ve elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşenlerini, $E_k^{(r_n)}$ elektriksel alan vektörü bileşenlerini, $\phi^{(r_n)}$ elektrik potansiyeli, $c_{ijkl}^{(r_n)}$, $e_{kij}^{(r_n)}$ ve $\varepsilon_{ik}^{(r_n)}$ sırasıyla elastik, piezoelektrik ve dielektrik malzeme sabitlerini göstermektedir.

Ele alınan probleme ait sınır koşulları;

$x_1 = 0$ ve $x_1 = \ell$ yüzeyleri için

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n)} \Big|_{x_2=0} &= u_2^{(r_n)} \Big|_{x_2=\ell} = 0, \quad \phi^{(r_n)} \Big|_{x_2=0} = \phi^{(r_n)} \Big|_{x_2=\ell} = 0, \\ K_{11}^{(r_n)} \Big|_{x_1=0} &= K_{11}^{(r_n)} \Big|_{x_1=\ell} = p, \end{aligned} \quad (9)$$

$x_2 = 0$ ve $x_2 = h$ yüzeyleri için

$$\begin{aligned} K_{2i}^{(r_1)} \Big|_{x_2=h} &= 0, \quad K_{2i}^{(r_3)} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad k; i = 1, 2, \\ D_2^{(r_3)} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad D_2^{(r_1)} \Big|_{x_2=h} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

Çatlak yüzeyleri için

$$\begin{aligned} K_{ji}^{(r_1)} \Big|_{S_U^+} n_{jU}^+ &= 0, \quad K_{ji}^{(r_2)} \Big|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \quad D_j^{(r_1)} \Big|_{S_U^+} n_{jU}^+ = 0, \quad D_j^{(r_2)} \Big|_{S_U^-} n_{jU}^- = 0, \\ K_{ji}^{(r_2)} \Big|_{S_L^+} n_{jL}^+ &= 0, \quad K_{ji}^{(r_3)} \Big|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0, \quad D_j^{(r_2)} \Big|_{S_L^+} n_{jL}^+ = 0, \quad D_j^{(r_3)} \Big|_{S_L^-} n_{jL}^- = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

sağlandığı kabul edilmektedir. (11) de $S_U^\pm$ and $S_L^\pm$ sırasıyla üst ve alt çatlak yüzeylerini, $n_{jU}^\pm$ ($n_{jL}^\pm$) üst (alt) çatlak ($S_U^\pm$ ($S_L^\pm$)) yüzeyine ait dış birim normal vektörü bileşenlerini göstermektedir. Ayrıca katmanlar arasında ideal temas koşullarını sağlandığı kabul edilmektedir yani,

$$\begin{aligned} K_{2i}^{(r_3)} \Big|_{x_2=h_F} &= K_{2i}^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F}, \quad u_i^{(r_3)} \Big|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F}, \\ \phi^{(r_3)} \Big|_{x_2=h_F} &= \phi^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F}, \quad D_2^{(r_3)} \Big|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F}, \\ K_{2i}^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F+h_C} &= K_{2i}^{(r_1)} \Big|_{x_2=h_F+h_C}, \quad u_i^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_1)} \Big|_{x_2=h_F+h_C}, \\ \phi^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_1)} \Big|_{x_2=h_F+h_C}, \quad D_2^{(r_2)} \Big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_1)} \Big|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (12)$$

ve $x_1 \in (0, (\ell - \ell_0)/2) \cup ((\ell + \ell_0)/2, \ell)$ dir.

Yukarıda (1)-(13) ile matematiksel modeli verilen sınırdeğer problemi; katmanları arasında çatlak bulunan piezoelektrik malzemeden yapılmış sandviç plağın, karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda etkiyen düzgün yayılı basınç yükü etkisinde delaminasyon burkulmasını temsil etmektedir.

3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Ele alınan (1)-(12) lineer olmayan sınırdeğer probleminin çözümü, [4,9]'da verilen seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenerek çözülür. Buna göre, Kısım 2'de matematiksel modeli verilen lineer olmayan sınırdeğer probleminde yer alan büyüklükler, çatlak yüzeylerinin çok küçük ön eğintisinin derecesini gösteren boyutsuz küçük parametre ε 'na göre seri formda

$$\left\{ K_{ij}^{(r_n)}; T_{ij}^{(r_n)}; M_{ij}^{(r_n)}; s_{ij}^{(r_n)}; u_i^{(r_n)}; D_i^{(r_n)}; E_{ij}^{(r_n)}; \phi^{(r_n)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ K_{ij}^{(r_n),q}; T_{ij}^{(r_n),q}; M_{ij}^{(r_n),q}; s_{ij}^{(r_n),q}; u_i^{(r_n),q}; D_i^{(r_n),q}; E_{ij}^{(r_n),q}; \phi^{(r_n),q} \right\} \quad (13)$$

temsil edilir, (6)-(12) denklem ve bağıntılarında yerine yazılır ve küçük parametrenin derecesine göre gruplandırılırsa, ε 'nın derecesine göre seri-sınır değer problemleri elde edilir. Bu sınır değer problemlerinin her biri, ε 'nın derecesine göre isimlendirilirse; sıfıncı sınırdeğer problemi, birinci sınırdeğer problemi (yaklaşım) vb. elde edilir. Bunlardan bazıları,

i) Sıfıncı yaklaşım,

$$\frac{\partial T_{ji}^{(r_n),0}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial D_i^{(r_n),0}}{\partial x_j} = 0, \quad T_{ij}^{(r_n),0} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n),0} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n),0},$$

$$D_i^{(r_n),0} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n),0} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n),0}, \quad E_k^{(r_n),0} = -\frac{\partial \phi^{(r_n),0}}{\partial x_k}$$

$$s_{kl}^{(r_n),0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^{(r_n),0}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n),0}}{\partial x_k} \right),$$

(14)

Sınır ve temas koşulları,

$$u_2^{(r_n),0} \Big|_{x_1=0} = u_2^{(r_n),0} \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad \phi^{(r_n),0} \Big|_{x_1=0} = \phi^{(r_n),0} \Big|_{x_1=\ell} = 0,$$

$$T_{11}^{(r_n),0} \Big|_{x_1=0} = T_{11}^{(r_n),0} \Big|_{x_1=\ell} = q,$$

$$T_{2i}^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h} = 0, \quad T_{2i}^{(r_3),0} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad k; i = 1, 2,$$

$$D_2^{(r_3),0} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad D_2^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h} = 0.$$

$$T_{2i}^{(r_3),0} \Big|_{x_2=h_F} = T_{2i}^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F}, \quad u_i^{(r_3),0} \Big|_{x_2=h_F} = u_i^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F},$$

$$\phi^{(r_3),0} \Big|_{x_2=h_F} = \phi^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F}, \quad D_2^{(r_3),0} \Big|_{x_2=h_F} = D_2^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F},$$

$$\begin{aligned} T_{2i}^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C} &= T_{2i}^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C}, \quad u_i^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C} = u_i^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C}, \\ \phi^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C} &= \phi^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C}, \quad D_2^{(r_2),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C} = D_2^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C} \end{aligned} \quad (15)$$

ii- Birinci Yaklaşım,

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ji}^{(r_n),1}}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial D_j^{(r_n),1}}{\partial x_j} = 0, \\ K_{ji}^{(r_n),1} &= G_{jikm}^{(r_n)} \frac{\partial u_m^{(r_n),1}}{\partial x_k} - R_{mji}^{(r_n)} E_m^{(r_n),1}, \quad D_k^{(r_n),1} = R_{kji}^{(r_n)} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} + L_{kj}^{(r_n)} E_j^{(r_n),1}, \end{aligned} \quad (16)$$

burada

$$\begin{aligned} G_{jikm}^{(r_n)} &= c_{jikm}^{(r_n)} + T_{jk}^{(r_n),0} \delta_i^m, \quad L_{kj}^{(r_n)} = \varepsilon_{kj}^{(r_n)}, \\ R_{kji}^{(r_n)} &= e_{kji}^{(r_n)} + \varepsilon_0 \left(E_k^{(r_n),0} \delta_i^j - E_j^{(r_n),0} \delta_i^k - E_m^{(r_n),0} \delta_i^m \delta_j^k \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Sınır ve temas koşulları,

$$\begin{aligned} u_2^{(r_n),1} \Big|_{x_1=0} &= u_2^{(r_n),1} \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad \phi^{(r_n),1} \Big|_{x_1=0} = \phi^{(r_n),1} \Big|_{x_1=\ell} = 0, \\ K_{11}^{(r_n),1} \Big|_{x_1=0} &= K_{11}^{(r_n),1} \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad K_{2i}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h} = 0, \quad K_{2i}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad k; i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3 \\ D_2^{(r_3),1} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad D_2^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h} = 0 \quad \text{için} \quad x_1 \in (0, \ell) \end{aligned} \quad (18)$$

$$K_{2i}^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F+h_c+0} = -T_{11}^{(r_1),0} \frac{df^+}{dx_1} \delta_i^1, \quad K_{2i}^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_c-0} = -T_{11}^{(r_1),0} \frac{df^-}{dx_1} \delta_i^1,$$

$$D_2^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F+h_c+0} = -D_1^{(r_1),0} \frac{df^+}{dx_1}, \quad D_2^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_c-0} = -D_1^{(r_2),0} \frac{df^-}{dx_1},$$

$$K_{2i}^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} = -T_{11}^{(r_2),0} \frac{df^+}{dx_1} \delta_i^1, \quad K_{2i}^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h_F-0} = -T_{11}^{(r_3),0} \frac{df^-}{dx_1} \delta_i^1,$$

$$D_2^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} = -D_1^{(r_2),0} \frac{df^+}{dx_1}, \quad D_2^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h_F-0} = -D_1^{(r_3),0} \frac{df^-}{dx_1}$$

$$\text{için } x_1 \in ((\ell - \ell_0) / 2, (\ell + \ell_0) / 2) \quad (19)$$

şeklinde verilebilir. Diğer yaklaşımlar (13) yardımıyla, (16)-(19) denklem sistemine benzer şekilde elde edilebilir. (14)-(19) denklem ve bağıntılarında üst indir “0” ve “1” ilgili büyüklüklerin sırasıyla sıfırcı ve birinci yaklaşıma ait olduklarını ayrıca, denklem (17)’de

$T_{jk}^{(r_n),0}$ değerleri sıfırcı yaklaşıma ait büyüklükleri göstermektedir. Dolayısıyla (16)-(19) birinci yaklaşımın çözülebilmesi için sıfırcı yaklaşımın ((14),(15)) öncelikle çözülmesi gereklidir.

Belirtelim ki, [3,4,9] ve diğer çalışmalara göre, ele alınan şerit-plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesi için sıfırcı ve birinci yaklaşımı çözmek yeterlidir. Diğer yaklaşımların çözülmesi, kritik parametre değerlerini etkilemediğinden burada ele alınmayacaktır.

iii- Sıfırcı ve birinci yaklaşımın çözümü

Sıfırcı yaklaşım ((14),(15)) , karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı dış basınç kuvveti etkisinde olan sandviç plak-şerit problemi temsil etmektedir. [3,4,9] vb. çalışmalarına göre çatlaklar doğrultusunda etki eden dış basınç kuvveti altında yapıda oluşan gerilme durumuna, şerit-plağın yapısındaki çatlaklar herhangi bir etki göstermediğinden, sıfırcı yaklaşımın çözümü, katmanlar arasındaki çatlaklar ihmal edilerek belirlenmiştir. Buna göre, ele alınan sınır koşulları ve yükleme durumu altında, piezoelektrik sandviç plağın yapısında oluşan gerilme yayılımı,

$$T_{11}^{(r_1),0} = T_{11}^{(r_3),0} = p \frac{h}{h_c A^{(r_1)} / A^{(r_2)} + 2h_F}, \quad T_{11}^{(r_2),0} = A^{(r_1)} \sigma_{11}^{(r_1),0} / A^{(r_2)},$$

$$E_1^{(r_k),0} = 0, \quad D_2^{(r_k),0} = 0, \quad k=1,2,3 \quad (20)$$

burada,

$$E_2^{(r_k),0} = -\frac{e_{21}^{(r_k)}}{\varepsilon_{22}^{(r_k)}} s_{11}^{(r_k),0} - \frac{e_{22}^{(r_k)}}{\varepsilon_{22}^{(r_k)}} s_{22}^{(r_k),0},$$

$$D_1^{(r_k),0} = \left(e_{11}^{(r_k)} - \varepsilon_{12}^{(r_k)} \frac{e_{21}^{(r_k)}}{\varepsilon_{22}^{(r_k)}} \right) s_{11}^{(r_k),0} + \left(e_{12}^{(r_k)} - \varepsilon_{12}^{(r_k)} \frac{e_{22}^{(r_k)}}{\varepsilon_{22}^{(r_k)}} \right) s_{22}^{(r_k),0},$$

$$s_{11}^{(r_k),0} = -A^{(r_k)} T_{11}^{(r_k),0}, \quad s_{22}^{(r_k),0} = -B^{(r_k)} T_{11}^{(r_k),0},$$

$$A^{(r_k)} = \frac{c_{22}^{(r_k)} + (e_{22}^{(r_k)})^2 / \varepsilon_{22}^{(r_k)}}{(c_{11}^{(r_k)} + (e_{21}^{(r_k)})^2 / \varepsilon_{22}^{(r_k)})(c_{22}^{(r_k)} + (e_{22}^{(r_k)})^2 / \varepsilon_{22}^{(r_k)}) - (c_{12}^{(r_k)} + e_{21}^{(r_k)} e_{22}^{(r_k)} / \varepsilon_{22}^{(r_k)})^2},$$

$$B^{(r_k)} = \frac{c_{12}^{(r_k)} + e_{22}^{(r_k)} e_{21}^{(r_k)} / \varepsilon_{22}^{(r_k)}}{(c_{11}^{(r_k)} + (e_{21}^{(r_k)})^2 / \varepsilon_{22}^{(r_k)})(c_{22}^{(r_k)} + (e_{22}^{(r_k)})^2 / \varepsilon_{22}^{(r_k)}) - (c_{12}^{(r_k)} + e_{21}^{(r_k)} e_{22}^{(r_k)} / \varepsilon_{22}^{(r_k)})^2}. \quad (21)$$

olarak verilebilir. Belirtelim ki, C_{ijkl} ((7), (14), (17) ve (19) da verilen) katsayıları kolaylık olsun diye C_{nm} ile yer değiştirilmiştir. Buna göre ij ve kl ($ij;kl = 11,22,33,23,13,12$) ikilileri sırasıyla n ve m ($n;m=1,2,3,4,5,6$) ile temsil edilmiştir. Aynı işaretleme e_{kij} sabiti için uygulanmış ve bu sabit e_{kn} ($k=1,2,3$) ile yer değiştirilmiştir. Not edelim ki, (20)'de verilen gerilme yayılımı sandviç plak-şerit mesnetlerine yakın civarında geçerli değildir. Bununla beraber katmanlar arası çatlak içeren sandviç plağın delaminasyon burkulması çatlak bölgesi

yani, mesnetlerinden yeterince uzak olan bölgede gerçekleştiğinden sıfırcı yaklaşım için (19) çözümünün kullanılması sakınca doğurmaz.

İkinci yaklaşıma ((16)-(19)) ait sınırdeğer probleminin çözümü ancak sayısal olarak (sonlu elemanlar yardımıyla) belirlenecektir. Sonlu elemanlar modellemesi için aşağıdaki fonksiyonel kullanılmıştır [4,9,10]:

$$\begin{aligned} \Pi(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, \varphi^{(r_n),1}) = & \sum_{n=1}^3 \iint_{\Omega^{(r_n)}} \left[\frac{1}{2} G_{ijkl}^{(r_n)} \frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l} + \right. \\ & \left. + R_{ijk}^{(r_n)} \frac{\partial \varphi^{(r_n),1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(r_n)} \frac{\partial \varphi^{(r_n),1}}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi^{(r_n),1}}{\partial x_l} \right] d\Omega^{(r_n)} - \\ & \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} \sigma_{11}^{(r_3),0} u_1^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} \sigma_{11}^{(r_2),0} u_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 - \\ & \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} \sigma_{11}^{(r_2),0} u_1^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} \sigma_{11}^{(r_1),0} u_1^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1 - \\ & \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} D_1^{(r_3),0} \phi^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h_F-0} dx_1 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} D_1^{(r_2),0} \phi^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+0} dx_1 - \\ & \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} D_1^{(r_2),0} \phi^{(r_2),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C-0} dx_1 - \int_{(\ell-\ell_0)/2}^{(\ell+\ell_0)/2} D_1^{(r_1),0} \phi^{(r_1),0} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0} dx_1. \quad (22) \end{aligned}$$

Belirtelim ki, (22) fonksiyonelinin birinci varyasyonelinin sıfıra eşitliğinden (16)-(19) sınırdeğer problemine ait alan denklemleri ile gerilmelere göre sınır ve temas koşulları elde edilmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi gereği, çözüm bölgesi sonlu eleman adı verilen alt bölgelere ayrılır ve her alt bölgede aranan fonksiyonlar $(u_1^{(r_n),1}, u_2^{(r_n),1}, \varphi^{(r_n),1})$ polinom olarak kabul edilir. Bu polinom ifadeler, her bir aranan büyüklük için, sonlu elemanların düğüm noktalarında (nod) tanımlı şekil fonksiyonları ile aranan büyüklüğün noddaki bilinmeyen değerinin çarpımı şeklinde alınır ve fonksiyonelde yerine yazılarak Ritz tekniği yardımıyla problemin çözümü, lineer cebirsek denklemlerin çözümüne indirgenir. Bu cebirsel denklemlerin çözülmesiyle nodlarda aranan büyüklükler, dolayısıyla her sonlu elemanda polinom fonksiyonlar ve bunların uygun birleşimi ile bütün bölgede aranan yerdeğiştirme ve elektriksel potansiyel fonksiyonları belirlenir [11].

Kritik burkulma yükünün belirlenmesinde,

$$p \rightarrow p_{cr} \text{ için } u_2^{(r_1),1} \Big|_{x_2=h_F+h_C+0}^{x_1=\ell/2} = u_2^{(r_3),1} \Big|_{x_2=h_F-0}^{x_1=\ell/2} \rightarrow \infty \quad (23)$$

den yararlanılır (başlangıç eğinti kriteri). (20) tanımlamasından

$$X_{cr} = T_{11.cr}^{(2),0} / C_{44}^{(2)} = p_{cr} \frac{h}{h_c A^{(2)} / A^{(1)} + 2h_F} \quad (24)$$

değerleri kritik parametre olarak sayısal sonuçlarda verilmiştir.

4. SAYISAL SONUÇLAR

Ele alınan delaminasyon burkulma problemi için sayısal hesaplamalarda sandviç plağın dış katmanlarının PZT-4 piezoelektrik malzemesinden, orta katmanının alüminyum ($E = 67 \text{ GPa}, G = 27 \text{ GPa}, \nu = 0.3$ [8]) malzemesinden yapıldığı kabul edilmektedir. PZT-4 malzemesinin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri Tablo 1 de verilmiştir [10]. Bilindiği gibi, piezoelektrik malzemeler özel malzemeler olup, mekanik yükleme altında yapısında kutuplanma veya elektriksel alan içerisine konulduğunda mekanik yerdeğiştirme yapabilmek özelliğine sahiptirler ve yükleme altında transversal izotrop malzeme özellikleri göstermektedirler. Bu çalışmada ele alınan sandviç plak-şeritin dış katmanlarını oluşturan PZT-4 malzemesinin hem Ox_1 hem de Ox_2 doğrultusunda kutuplanma eksenini olması durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Kutuplanma eksenini aynı zamanda transversal izotropi eksenini olup, bünye denklemlerinde yer alan malzeme sabitlerinin uygun yerleşimi ile göz önüne alınabilmektedir. İlâveten, elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkilerinin araştırılması için iki durumda incelemeler yapılmıştır. Bunlar, $e_{ij}^{(r_n)} = 0, \varepsilon_{ij}^{(r_n)} = 0$ (Durum 1) ve $e_{ij}^{(r_n)} \neq 0, \varepsilon_{ij}^{(r_n)} \neq 0$ (Durum 2) dir. Belirtelim ki, $e_{ij}^{(r_n)} (\varepsilon_{ij}^{(r_n)})$, (r_n) ($n=1,2,3$) dış katmanları oluşturan piezoelektrik malzemeye ait piezoelektrik (dielektrik) sabitleri göstermektedir. Durum 1 ve Durum 2'ye ait sayısal sonuçların karşılaştırılması piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin kritik parametrelere etkisini yani, elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisini gösterecektir. Ayrıca, (4) ve (5) denklemlerinde verilen ve çatlak yüzeylerinde yüklemmeden önce bulunduğu kabul edilen ön eğitilerin formunu gösteren $f(x_1)$ fonksiyonu,

$$f(x_1) = \pm A \sin^2 \frac{\pi}{\ell_0} \left(x_1 - \frac{\ell - \ell_0}{2} \right) \quad (25)$$

şeklinde seçilmiştir. (25)'de, A sabit ve $A \ll \ell$ dir. (4) ve (13)'de verilen $\varepsilon = A/\ell$ alınmıştır.

Çözümü öngörülen sınırdeğer problemi ve çözüm bölgesi $x_1 = \ell/2$ ve $x_2 = h/2$ ($h = h_C + 2h_F$) düzlemlerine göre simetrik olduğundan sonlu eleman modellemesi çeyrek bölgede yapılmıştır. Bu bölge, x_1 eksenini doğrultusunda 40, x_2 eksenini doğrultusunda 12 standart dokuz nodlu dikdörtgen sonlu elemanlara ayrılmıştır. Buna göre çeyrek bölgeye ait sonlu eleman ağı, toplam 480 sonlu eleman, 2065 nod ve 4704 serbestlik derecesine sahiptir. Belirtelim ki, ele alınan problemlerin çözümünde kullanılan bütün sonlu eleman algoritma ve programlar tarafımızdan yapılmıştır.

Öncelikle, tarafımızca yapılan algoritma ve programlardan elde edilen sayısal sonuçlar, literatürde bilinen uygun sayısal sonuçlarla test edilmiştir. Buna göre Giannopoulos vd. [8] tarafından çatlak içermeyen piezoelektrik sandviç plak (PZT/Alüminyum/PZT) için elde edilen kritik burkulma değeri ile tarafımızdan yapılan algoritma ve programlarla elde edilen uygun sayısal değer Tablo 2'de verilmiştir. Tablo 2'de verilen sayısal sonuçların birbirine yeterince yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca, elde edilen pek çok sayısal sonuçların fiziksel

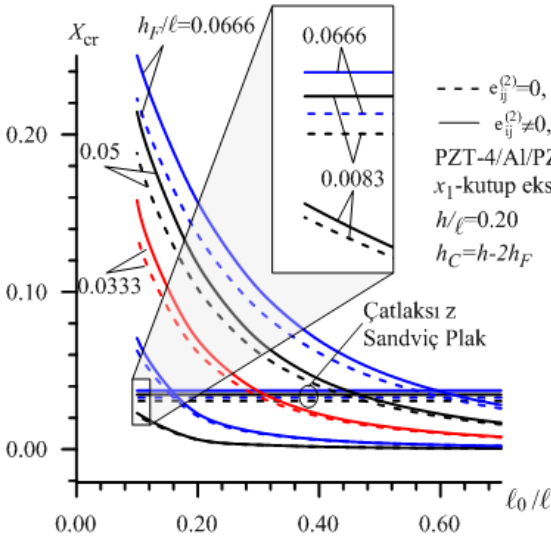
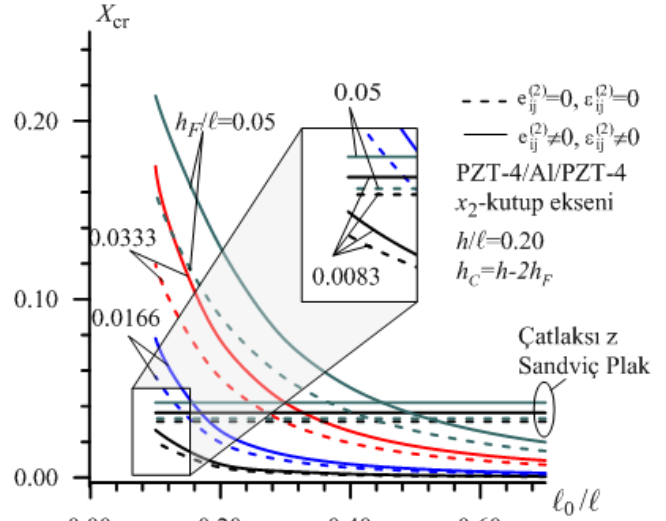
ve mekaniksel bakış açılarına uygunluğuna dayanarak tarafımızdan yapılan algoritma ve programlara güven sağlanmıştır.

Tablo 1. PZT-4 malzemesine ait malzeme sabitleri [10]

$c_{11}^{(r_1)}$	$c_{12}^{(r_1)}$	$c_{13}^{(r_1)}$	$c_{33}^{(r_1)}$	$c_{44}^{(r_1)}$	$c_{66}^{(r_1)}$	$e_{31}^{(r_1)}$	$e_{33}^{(r_1)}$	$e_{15}^{(r_1)}$	$\varepsilon_{11}^{(r_1)}$	$\varepsilon_{33}^{(r_1)}$
13,9	7,78	7,40	11,5	2,56	3,06	-5,2	15,1	12,7	0,646	0,562
$\times 10^{10} \text{ N/m}^2$						C/m^2			$\times 10^{-8} C/Vm$	

Tablo 2. Kritik burkulma yükü ($e_{ij}^{(r_n)} = 0, \varepsilon_{ij}^{(r_n)} = 0,)$

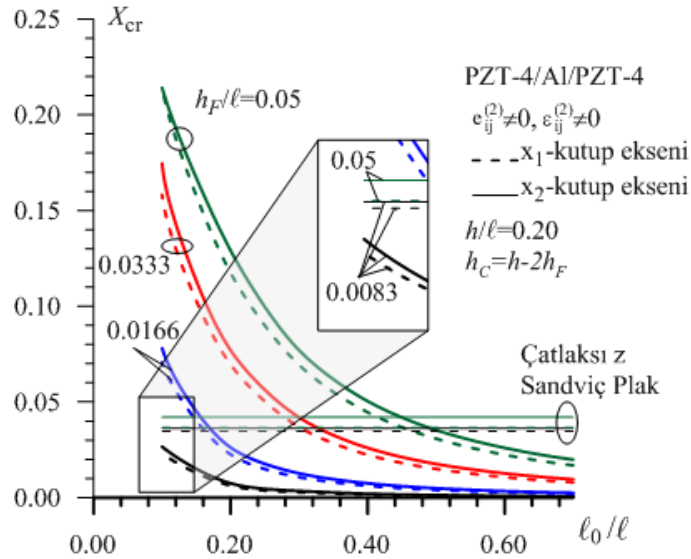
Giannapulos vd [8]	5.13
Bu çalışma	5.1270

Şekil 2. Farklı h_F için X_{cr} 'in l_0/l 'ye göre grafikleri (x_1 eksen kutup eksen).Şekil 3. Farklı h_F için X_{cr} 'in l_0/l 'ye göre grafikleri (x_2 eksen kutup eksen).

Şekil 2-4'de X_{cr} (24) parametresinin, bazı parametre değerlerinde yapıda bulunan çatlak uzunluğuna (l_0) bağlı grafikleri verilmiştir. Aynı zamanda her bir grafikte aynı parametre değerleri için çatlak içermeyen sandviç plak-şerite ait kritik X_{cr} değerleri de verilmiştir. Burada X_{cr} , kritik dış basınç kuvvetinin şiddetini veya kritik basınç şekildeğiştirmesini temsil etmektedir. Buna göre, Şekil 2 (Şekil 3)'de sandviç plak-şeritin dış katmanlarını oluşturan PZT-4 piezoelektrik malzemesinin kutuplanma eksen Ox_1 (Ox_2) eksen olması durumunda, farklı dış katman kalınlıkları (h_F) ile Durum 1 ($e_{ij}^{(2)} = 0, \varepsilon_{ij}^{(2)} = 0$) ve Durum 2 ($e_{ij}^{(2)} \neq 0, \varepsilon_{ij}^{(2)} \neq 0$) için X_{cr} 'nin çatlak uzunluğundan bağımlılığını gösteren grafikler verilmiştir. Buna göre dış katmanların (piezoelektrik

malzemenin) kalınlığı arttıkça X_{cr} değeri artmaktadır. Durum 2 için elde edilen değerler her zaman Durum 1 için elde edilen değerlerden büyük kalmaktadır. Ayrıca belirli bir çatlak uzunluğundan (örneğin, bu belirli değeri ℓ_0^* ile gösterelim) küçük çatlak uzunlukları için elde edilen X_{cr} değerleri, çatlak içermeyen uygun sandviç plak için elde edilen X_{cr} değerlerinden büyük kalmaktadır, her h_F değeri için ℓ_0^* çatlak uzunluğu farklıdır ve h_F arttıkça bu değer artmaktadır. Bu durum, ℓ_0^* 'dan küçük çatlak uzunlukları için çatlak içermeyen tüm plak-şeritin stabilite kaybının, çatlak içeren plak-şeritin delaminasyon burkulmasından önce gerçekleşmektedir, şeklinde açıklanabilir.

Kutuplanma eksenini değişiminin X_{cr} değerine etkisi Şekil 4'de verilmiştir. Buna göre Ox_2 kutup eksenini olması durumunda elde edilen X_{cr} değerlerinin, Ox_1 kutup eksenini olması durumunda elde edilen X_{cr} değerlerinden her zaman büyük olduğu görülmektedir.



Şekil 4. Farklı h_F ve kutup eksenini için X_{cr} 'in ℓ_0/ℓ 'ye göre grafikleri.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, dış katmanları piezoelektrik malzemeden, orta katmanı elastik malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında çatlak içeren piezoelektrik sandviç plağın, karşılıklı iki kenarından çatlaklar doğrultusunda etki eden normal basınç kuvveti etkisinde delaminasyon-burkulması incelenmiştir. Yük etki etmeden önce çatlak yüzeylerinin çok küçük ön eğintilere sahip olduğu kabul edilmiş ve dış basınç kuvveti etkisinde bu eğintilerin büyüyerek sonsuza gitmesi kriterinden (başlangıç eğinti kriteri), kritik parametreler belirlenmiştir. Ele alınan problemin matematiksel modeli parçalı homojen cisim modeli ve elektro-elastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemleri çerçevesinde yapılmıştır. Lineer olmayan sınırdeğer probleminin çözümü, sınır formu pertürbasyon yöntemi yardımıyla seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenmiş, bu seri sınırdeğer problemlerinden sıfırıncı ve birinci yaklaşım, sırasıyla analitik ve sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözülerek kritik dış basınç kuvveti belirlenmiştir. Araştırma sonucunda aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır;

1. Dış katmanların piezoelektrik olması kritik dış kuvvetin değerini artırmaktadır,

2. Kutuplanma ekseninin dış yüklerin doğrultusuna dik olması kritik kuvvetin değerini büyötmektedir,
3. Piezoelektirik dış katman kalınlıklarının artması, kritik kuvvetin değerini büyötmektedir,
4. Piezoelektirik ve dielektirik sabitlerin göz önüne alınması (yani Durum 2: $e_{ij}^{(2)} \neq 0, \varepsilon_{ij}^{(2)} \neq 0$) kritik kuvvetin değerini büyötmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Akbarov S.D. and N. Yahnioglu, "A method of investigation of the general theory of stability problems on structural elements fabricated from the viscoelastic composite materials" Compos Part B 32, 475-482, 2001.
- [2]. Akbarov S.D., N. Yahnioglu and E. E. Karatas, "Buckling Delamination of a Rectangular Plate containing a rectangular Crack and made from elastic and viscoelastic composite materials" Int. J. Solids and Structures 47, 3426-3434, 2010.
- [3]. Akbarov S.D., N. Yahnioglu and A. Tekin, "3D FEM Analyses of the Buckling Delamination of a Rectangular Sandwich Plate Containing Interface Rectangular Cracks and Made from Elastic and Viscoelastic Materials" CMES-Computer Modeling in Engineering & Sciences 64, 147-185, 2010.
- [4]. Akbarov S.D., "Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites" Springer Heidelberg, New York- 2013.
- [5]. Rao S.S. and M. Sunar, "Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures: A Survey" Applied Mechanical Reviews, 47, 113-123, 1994.
- [6]. Yang J.S., "Buckling of a Piezoelectric Plate" Int. J. of Applied Electromagnetics and Mechanics 9, 399-408, 1998.
- [7]. Hu Y.T., J.S. Yang and Q. Jiang, "A model for Electroelastic Plates Under Biasing Fields With Applications in Buckling Analysis" Int. J. of Solids and Structures 39, 2629-2642, 2002.
- [8]. Giannopoulos G., F. Santafe, J. Monreal and J. Vantomme, "Thermal, Electrical, Mechanical Coupled Mechanics for Initial Buckling Analysis of Smart Plates and Beams Using Discrete Layer Kinematics" Int. J. Solids and Structures 44, 4707-4722, 2007.
- [9]. Akbarov S.D. and N. Yahnioglu, "Buckling Delamination of a Sandwich Plate-Strip with Piezoelectric Face and Elastic Core Layers" Applied Mathematical Modelling 37, 8029-8038, 2013.
- [10]. Yang J., "An Introduction to the Theory of Piezoelectricity" Springer- 2005.
- [11]. Zienkiewicz O.C. and R.L. Taylor, "The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems" Vol. 1, fourth ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford-1989.