MİKROGERMELİ PLAKLARDA DALGA YAYILIMI VE FARKLI SINIR KOŞULLARI İÇİN TİTREŞİM ANALİZİ

Ahmet KIRIŞ[*] *ve Esin İNAN*[**]

[*]*İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Maslak İstanbul*
[**]Işık Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Maslak, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada mikrogermeli ortam teorisi ile modellenmiş plakların, farklı sınır koşulları altında titreşim analizi incelenmiştir. Mikrogermeli ortamda dalga analizi klasik elastisite teorisinde gözlenmeyen yeni dalgaların ortaya çıktığını göstermektedir. Bu kapsamda farklı sınır koşullarına sahip dikdörtgen plaklar için Chebyshev-Ritz metodu yardımıyla frekans denklemleri elde edilmiştir. Mikrogermeli ortam teorisinde gözlenen ek dalgalar nedeniyle beklendiği üzere, klasik elastisite teorisinden elde edilen klasik frekansların aralarında plağın mikro yapısından kaynaklanan ek frekansların ortaya çıktığı gözlenmiştir.

1. GİRİŞ

Malzemeler, klasik sürekli ortamlar teorisinde her ne kadar homojen olarak tanımlansa da, gerçekte mikro ölçekte bu süreklilik varsayımını bozan, birçok farklı boyut ve formda mikro kusura sahiptirler. Bu anlamda klasik elastisite teorisi sıkı yapılı malzemeler için güvenilir sonuçlar verse de, polimerler, mikro hasarlı malzemeler gibi tanecikli ve mikro yapılı malzemelerin davranışını açıklamada yetersiz kalmaktadır. Eringen tarafından geliştirilen mikrogermeli ortam teorisi [1], malzemenin her parçacığının klasik şekil değiştirmesinin yanı sıra, ondan bağımsız olarak ek bir mikrodönme ve hacimsel mikrogenleşme yapabildiği fikrine dayanmaktadır ve malzemenin davranışını etkileyen mikro yapının etkilerini göz önüne aldığı için, klasik teoriye göre fiziksel gerçekleri daha iyi yansıtmaktadır.

Mikrogermeli ortam için Singh ve Kumar [2], klasik elastisite teorisinde gözlenen "enine ve boyuna yerdeğiştirme dalgaların" yanı sıra, mikropolar ortam için Parfitt ve Eringen [3]' in ortaya koyduğu "enine ve boyuna mikropolar dalgaların" ve hem klasik hem de mikropolar teoride gözlenemeyen "boyuna mikrogermeli dalganın" varlığını göstermiştir.

Bu çalışmada mikro yapılı ve farklı sınır koşullarına sahip plaklar mikrogermeli ortam teorisi ile modellenmiştir. Mikrogermeli ortamda Singh ve Kumar [2] tarafından açıklanan ek dalgalara uygun olarak, mikrogermeli ortam teorisi ile modellenen plakların titreşim analizi, klasik elastisite teorisi ile elde edilen frekanslar arasında ek frekansların ortaya çıktığını göstermektedir. Doğal olarak, mikrogermeli ortam sabitlerinin sıfır alınması durumunda bu ek frekanslar ortadan kaybolmakta ve sadece klasik frekanslar gözlenmektedir. Ayrıca, mikrogermeli ortamın malzeme sabitleri büyütüldükçe, ortamın mikroyapısından kaynaklanan bu ek frekans değerleri hızla artmakta ve anlamlı klasik frekanslar arasına girmektedir. Dahası mikro sabitler, klasik frekanslara nazaran ek frekanslar üzerinde çok daha etkili olduğundan, sabitler büyütüldükçe klasik frekanslar değişmezken, ek frekanslar hızla anlamlı frekans aralığından çıkmakta ve anlamlı frekans aralığında sadece klasik frekanslar gözlenmekte ve mikro sabitler ancak bu eşik değerleri aştığında klasik frekanslarda da bozulmalar başlamaktadır.

Bu sonuçlar, beklentilerimize uygun olarak, bize eşik değerler aşıldığında ortamın artık mikrogermeli yapıyı kaybetmeye başladığını, kusurların artık makro kusurlar haline gelmeye başladığını ve ortamın artık mikro yapılı olarak ele alınmaması gerektiğini düşündürtmektedir. Dolayısıyla ek frekansların anlamlı frekans aralığından çıkıp, klasik frekanslarda bozulmaların başladığı mikro sabitlerin bu eşik değerlerinin, incelenen malzeme için mikrogermeli ortam sabitlerinin üst sınırları oldukları ve ileride yapılacak optimizasyon çalışmaları ile bu üst sınırların belirlenebileceği beklenmektedir. Bu kapsamda polimer bir matris içinde keyfi yönelimli kısa cam lifler içeren bir kompozitin deneysel frekanslarından [4], Kırış ve İnan tarafından optimizasyon yöntemleri ile elde edilen mikrogermeli ortamın malzeme sabitleri [5] kullanılarak farklı sınır koşulları için titreşim frekansları da örnek olarak verilmiştir.

2. Temel denklemler ve dalga analizi

Lineer izotrop homojen mikrogermeli katının bünye denklemleri

$$\begin{aligned} t_{kl} &= \lambda\,\varepsilon_{mm}\,\delta_{kl} + (\mu+\kappa)\,\varepsilon_{kl} + \mu\,\varepsilon_{lk} + \lambda_0\,\theta\,\delta_{kl}, \\ m_{kl} &= \alpha\,\gamma_{mm}\,\delta_{kl} + \beta\,\gamma_{kl} + \gamma\,\gamma_{lk}, \\ m_k &= a_0\,\theta_{,k}, \\ s-t &= \lambda_1\,\theta + \lambda_0\,\varepsilon_{kk} \end{aligned} \tag{1}$$

ile verilmektedir [6]. Burada t_{kl}, m_{kl} gerilme ve moment tansörleri, m_k mikrogerme vektörü, $s = s_{kk}$, $t = t_{kk}$ dır. Mikrogermeli ortamın genleme tansörleri Eringen tarafından [6]

$$\varepsilon_{kl} = u_{l,k} + e_{lkm}\phi_m, \quad \gamma_{kl} = \phi_{k,l}, \quad \gamma_k = \theta_{,k} \tag{2}$$

olarak verilmektedir, burada λ, μ Lamé sabiti ve kayma modülü, $\kappa, \alpha, \beta, \gamma$ mikropolar sabitler, λ_0, λ_1 ve a_0 mikrogermeli ortam sabitleri, ρ birim hacim başına kütle yoğunluğu, j mikro-atalet, e_{ijk} permütasyon sembolü ve $\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}$ ve θ sırasıyla yerdeğiştirme ve mikrodönme vektörleri ve mikrogerme skaleridirler.

Kütle kuvvet ve momentlerinin yokluğunda lineer homojen ve izotrop mikrogermeli katının hareket denklemleri [6],

$$\begin{aligned} &(c_1^2+c_3^2)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} - (c_2^2+c_3^2)\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} + c_3^2\nabla\times\boldsymbol{\phi} + \bar{\lambda}_0\nabla\theta = \ddot{\mathbf{u}} \\ &(c_4^2+c_5^2)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\phi} - c_4^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\phi} + \omega_0^2\nabla\times\mathbf{u} - 2\omega_0^2\boldsymbol{\phi} = \ddot{\boldsymbol{\phi}} \\ &c_6^2\Delta\theta - c_7^2\theta - c_8^2\nabla\cdot\mathbf{u} = \ddot{\theta} \end{aligned} \tag{3}$$

olarak verilmektedir, burada

$$c_1^2=\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho},\quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho},\quad c_3^2=\frac{\kappa}{\rho},\quad c_4^2=\frac{\gamma}{\rho j},\quad c_5^2=\frac{(\alpha+\beta)}{\rho j},$$
$$c_6^2=\frac{2a_0}{\rho j},\quad c_7^2=\frac{2\lambda_1}{3\rho j},\quad c_8^2=\frac{2\lambda_0}{3\rho j},\quad \omega_0^2=\frac{c_3^2}{j},\quad \overline{\lambda}_0=\frac{\lambda_0}{\rho}. \tag{4}$$

Yerdeğiştirme ve mikrodönme vektörleri Helmholtz ayrıştırımı uyarınca solenoidal ve rotasyonel kısımlarına ayrılır,

$$\mathbf{u}=\nabla\overline{u}+\nabla\times\mathbf{U},\quad \nabla\cdot\mathbf{U}=0,\quad \boldsymbol{\phi}=\nabla\overline{\phi}+\nabla\times\mathbf{\Phi},\quad \nabla\cdot\mathbf{\Phi}=0 \tag{5}$$

ve bu potansiyeller hareket denklemlerinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}&(c_1^2+c_3^2)\Delta\overline{u}+\overline{\lambda}_0\theta=\ddot{\overline{u}},\quad c_6^2\Delta\theta-c_7^2\theta-c_8^2\Delta\overline{u}=\ddot{\theta},\\&(c_2^2+c_3^2)\Delta\mathbf{U}+c_3^2\nabla\times\mathbf{\Phi}=\ddot{\mathbf{U}},\quad c_4^2\Delta\mathbf{\Phi}-2\,\omega_0^2\,\mathbf{\Phi}+\omega_0^2\,\nabla\times\mathbf{U}=\ddot{\mathbf{\Phi}},\\&(c_4^2+c_5^2)\Delta\overline{\phi}-2\,\omega_0^2\,\overline{\phi}=\ddot{\overline{\phi}}.\end{aligned} \tag{6}$$

elde edilir. (6) denklemlerinin ilk iki çift denklemi sırasıyla $\overline{u}$ ve θ skalerlerine ve $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{\Phi}$ vektörlerine göre kupledir. $\mathbf{n}$ birim vektörünün pozitif yönünde yayılan düzlem harmonik dalgalar için

$$\{\overline{u},\overline{\phi},\theta,\mathbf{u},\mathbf{\Phi}\}=\{\overline{u}_0,\overline{\phi}_0,\theta_0,\mathbf{u}_0,\mathbf{\Phi}_0\}e^{ik(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}-Vt)} \tag{7}$$

yazılabilir, burada k dalga sayısı, V faz hızıdır. (7) ve (4) denklemleri (6) denklemlerinin ilk çiftinde kullanılır ve buradan $\overline{u}$ ve θ elimine edilirse, faz hızları

$$V_{1,2}^2=\frac{1}{2A_1}\left[B_1\mp\sqrt{B_1^2-4\,A_1\,C_1}\right] \tag{8}$$

olarak elde edilmektedir, burada

$$A_1=1-\frac{\lambda_1 A}{3\kappa},\quad B_1=c_1^2+c_3^2+c_6^2-\frac{A}{3\kappa}\left[\lambda_1(c_1^2+c_3^2)-\lambda_0\overline{\lambda}_0\right],$$
$$C_1=c_6^2(c_1^2+c_3^2),\quad A=2\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \tag{9}$$

dir ve $\overline{u}$ ve θ ile ilişkili dalgalar, dalga yayılımı yönündedir ve bu nedenle sırasıyla “boyuna yerdeğiştirme dalgası” ve “boyuna mikrogerme dalgası” olarak isimlendirilirler [2]. (7) dalga yayılımı koşulları altında (6) denklemlerinin ikinci çiftinden, mikropolar ortam için Parfitt ve Eringen [3] tarafından elde edilenlere benzer olarak “enine yerdeğiştirme dalgası” ve “enine mikrodönme dalgası”

$$V_{3,4}^2=\frac{1}{2(1-a)}\left\{c_2^2+c_3^2+c_4^2-(c_2^2+\frac{c_3^2}{2})a\pm\left[(c_4^2-c_2^2-c_3^2+(c_2^2+\frac{c_3^2}{2})a)^2+2\,c_3^2c_4^2a\right]^{1/2}\right\} \tag{10}$$

şeklinde elde edilir. (6)’ nın son denkleminden ise yine mikropolar ortama [3] benzer olarak

$$V_5^2=(c_4^2+c_5^2)+2\frac{\omega_0^2}{k^2} \tag{11}$$

“boyuna mikro dönme dalgası” elde edilir.

Sonuç olarak lineer homojen izotropik mikrogermeli elastik katı için, farklı faz hızlarına sahip beş tip dalga yayılımı elde edilmektedir; kuple “boyuna mikrogerme” ve “boyuna yerdeğiştirme” dalgaları, kuple “enine yerdeğiştirme” ve “enine mikrodönme” dalgaları ve son olarak “boyuna mikrodönme” dalgası. Bu dalgalardan birinci dalga hem klasik hem mikropolar elastisite teorilerinde, son iki dalga ise klasik elastisite teorisinde gözlenmemektedir.

2. Mikrogermeli plağın titreşim analizi

Homojen, izotropik, boyu a, genişliği b ve kalınlığı h olan dikdörtgen mikrogermeli plağın orta noktasına, plağın normali x_3 ekseninin pozitif yönü olacak şekilde (x_1, x_2, x_3) Kartezyen sistemi yerleştirilmiş olsun.

$V_{\max}$ ve $T_{\max}$ sırasıyla plağın lineer elastik genleme enerjisi ve kinetik enerjisi olmak üzere, mikrogermeli plağın maksimum enerji fonksiyoneli

$$\Pi = V_{\max} - T_{\max} \tag{12}$$

olarak verilir. İzotropik mikrogermeli ortamın lineer elastik genleme enerjisi yoğunluğu

$$W = \frac{1}{2}\left[t_{kl}\,\varepsilon_{kl} + m_{kl}\,\gamma_{lk} + m_k\,\gamma_k + (s-t)\,\theta\right] \tag{13}$$

olarak verilmektedir. İzotrop mikrogermeli ortam için birim kütle başına kinetik enerji ise

$$K = \frac{1}{2}\,\rho\,\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}\rho\, j\,\dot{\boldsymbol{\phi}}\cdot\dot{\boldsymbol{\phi}} + \frac{3}{2}\rho\, j\,\dot{\theta}\,\dot{\theta} \tag{14}$$

dir. Matematiksel kolaylık açısından

$$\xi = \frac{2x}{a},\quad \eta = \frac{2y}{b},\quad \zeta = \frac{2z}{h} \tag{15}$$

boyutsuz parametreleri ile, mikrogermeli plağın toplam elastik genleme enerjisi ve kinetik enerjisi

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{h}{4\alpha_1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[\lambda\,\overline{\Lambda}_1^2 + (2\mu+\kappa)\overline{\Lambda}_2 + 2\mu\overline{\Lambda}_3 + (\mu+\kappa)\overline{\Lambda}_4 + \alpha\overline{\Lambda}_5^2 + (\beta+\gamma)\overline{\Lambda}_6 \\ & \qquad + 2\beta\overline{\Lambda}_7 + \gamma\overline{\Lambda}_8 + a_0\overline{\Lambda}_9\Big]d\zeta\, d\eta\, d\xi \\ & + \frac{b\,h}{8}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[\kappa\,\overline{\overline{\Lambda}}_3 + 2\,\lambda_0\,\Theta\,\overline{\Lambda}_1\Big]d\zeta\, d\eta\, d\xi + \frac{a\,b\,h}{16}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[\kappa\overline{\overline{\overline{\Lambda}}}_3 + \lambda_1\Theta^2\Big]d\zeta\, d\eta\, d\xi \end{aligned} \tag{16}$$

ve

$$T = \frac{\rho}{16}a\,b\,h\,\omega^2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big\{\Big[U_1^2 + U_2^2 + U_3^2\Big] + j\Big[\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2\Big] + 3\,j\,\Theta^2\Big\}d\zeta\, d\eta\, d\xi \tag{17}$$

olarak yazılabilir, burada Λ_i $(i = 1,\ldots,9)$ [5] te verilmiştir.

Serbest titreşim altında mikrogermeli plağın periyodik yerdeğiştirme, mikrodönme ve mikrogerme bileşenleri, genlik fonksiyonları kullanılarak

$$\left\{\mathbf{u}(x,y,z,t), \boldsymbol{\phi}(x,y,z,t), \theta(x,y,z,t)\right\} = \left\{\mathbf{U}(x,y,z,t), \boldsymbol{\Phi}(x,y,z,t), \Theta(x,y,z,t)\right\}e^{i\omega t} \tag{18}$$

şeklinde yazılabilir, burada ω doğal frekanstır.

Mikrogermeli plağın şekil değiştirme alanları için kabul edilebilir fonksiyonlar olarak Chebyshev polinomları, plağın sınır şartlarına uygun sınır fonksiyonları ile çarpılarak kullanılmıştır, yani,

$$U_1(\xi,\eta,\zeta)=F_{u_1}(\xi,\eta)\sum_{i,j,k=1}^{\infty}A_{ijk}P_i(\xi)P_j(\eta)P_k(\zeta),\quad \Phi_1(\xi,\eta,\zeta)=F_{\Phi_1}(\xi,\eta)\sum_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}=1}^{\infty}\hat{A}_{\hat{i}\hat{j}\hat{k}}P_{\hat{i}}(\xi)P_{\hat{j}}(\eta)P_{\hat{k}}(\zeta),$$

$$U_2(\xi,\eta,\zeta)=F_{u_2}(\xi,\eta)\sum_{l,m,n=1}^{\infty}B_{lmn}P_l(\xi)P_m(\eta)P_n(\zeta),\quad \Phi_2(\xi,\eta,\zeta)=F_{\Phi_2}(\xi,\eta)\sum_{\hat{l},\hat{m},\hat{n}=1}^{\infty}\hat{B}_{\hat{l}\hat{m}\hat{n}}P_{\hat{l}}(\xi)P_{\hat{m}}(\eta)P_{\hat{n}}(\zeta),$$

$$U_3(\xi,\eta,\zeta)=F_{u_3}(\xi,\eta)\sum_{p,q,r=1}^{\infty}C_{pqr}P_p(\xi)P_q(\eta)P_r(\zeta),\quad \Phi_3(\xi,\eta,\zeta)=F_{\Phi_3}(\xi,\eta)\sum_{\hat{p},\hat{q},\hat{r}=1}^{\infty}\hat{C}_{\hat{p}\hat{q}\hat{r}}P_{\hat{p}}(\xi)P_{\hat{q}}(\eta)P_{\hat{r}}(\zeta),$$

$$\Theta(\xi,\eta,\zeta)=F_{\Theta}(\xi,\eta)\sum_{\hat{\hat{i}},\hat{\hat{j}},\hat{\hat{k}}=1}^{\infty}\hat{\hat{A}}_{\hat{\hat{i}}\hat{\hat{j}}\hat{\hat{k}}}P_{\hat{\hat{i}}}(\xi)P_{\hat{\hat{j}}}(\eta)P_{\hat{\hat{k}}}(\zeta). \tag{19}$$

Burada, bir boyutlu i^{th} Chebyshev polinomu

$$P_i(\chi)=Cos\left[(i-1)\,ArcCos(\chi)\right] \tag{20}$$

olarak verilmektedir. Sınır fonksiyonları ise

$$F_{\delta}(\xi,\eta)=f_{\delta}^{1}(\xi)f_{\delta}^{2}(\eta),\ \ (\delta=u_i,\phi_i,\theta,\ i=1,...,3) \tag{21}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Chebyshev polinomlarını kabul edilebilir fonksiyonlar olarak seçmenin nedeni, tam ve ortagonal bir küme oluşturmaları nedeniyle hızlı yakınsamaları ve kolay kodlanabilir olmalarıdır [7]. Makro şekil değiştirmelerle karşılaştırıldığında, mikrodönme ve mikrogenleşmenin etkileri küçüktür, bu nedenle her ne kadar amacı tam karşılamasa da bu çalışmada sınırlarda farklı sınır koşulları için dahi mikro şekil değiştirmelerin üzerine ek kısıtlar konulmamıştır. Bu nedenle tüm farklı tip sınır koşulları için mikro şekil değiştirmelerle ilgili sınır fonksiyonları

$$f_{\delta}^{1}(\xi)=f_{\delta}^{2}(\eta)=1,\ \ (\delta=\phi_i,\theta,\ i=1,...,3)\,, \tag{22}$$

olarak ele alınacaktır. Makro şekil değiştirmeler için ise farklı sınır koşulları için sınır fonksiyonlarının değerleri [7] de verilmiştir.

Son olarak (19) seri açılımları (16) ve (17) enerji ifadelerinde yerine yazılır ve bu sonuçlar (12) maksimum enerji fonksiyonelinde kullanılarak, bu fonksiyonel Chebyshev polinomlarının katsayılarına göre minimize edilirse,

$$\left(\mathbf{K}-\Omega^2\,\mathbf{M}\right)\mathbf{Z}=\mathbf{0} \tag{23}$$

özdeğer problemi yazılabilir, burada

$$\Omega=\omega\,\mathrm{a}\sqrt{\rho} \tag{24}$$

ve rijitlik matrisi alt matrisleri cinsinden

$$
\mathbf{K}=\begin{pmatrix}
[K_{u_1u_1}] & [K_{u_1u_2}] & [K_{u_1u_3}] & \mathbf{0} & [K_{u_1\phi_2}] & [K_{u_1\phi_3}] & [K_{u_1\theta}] \\
[K_{u_1u_2}]^T & [K_{u_2u_2}] & [K_{u_2u_3}] & [K_{u_2\phi_1}] & \mathbf{0} & [K_{u_2\phi_3}] & [K_{u_2\theta}] \\
[K_{u_1u_3}]^T & [K_{u_2u_3}]^T & [K_{u_3u_3}] & [K_{u_3\phi_1}] & [K_{u_3\phi_2}] & \mathbf{0} & [K_{u_3\theta}] \\
\mathbf{0} & [K_{u_2\phi_1}]^T & [K_{u_3\phi_1}]^T & [K_{\phi_1\phi_1}] & [K_{\phi_1\phi_2}] & [K_{\phi_1\phi_3}] & \mathbf{0} \\
[K_{u_1\phi_2}]^T & \mathbf{0} & [K_{u_3\phi_2}]^T & [K_{\phi_1\phi_2}]^T & [K_{\phi_2\phi_2}] & [K_{\phi_2\phi_3}] & \mathbf{0} \\
[K_{u_1\phi_3}]^T & [K_{u_2\phi_3}]^T & \mathbf{0} & [K_{\phi_1\phi_3}]^T & [K_{\phi_2\phi_3}]^T & [K_{\phi_3\phi_3}] & \mathbf{0} \\
[K_{u_1\theta}]^T & [K_{u_2\theta}]^T & [K_{u_3\theta}]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [K_{\theta\theta}]
\end{pmatrix} \tag{25}
$$

olarak, kütle matrisi yine alt matrisleri cinsinden

$$
\mathbf{M}=\begin{pmatrix}
[M_{u_1u_1}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & [M_{u_2u_2}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{u_3u_3}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\phi_1\phi_1}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\phi_2\phi_2}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\phi_3\phi_3}] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [M_{\theta\theta}]
\end{pmatrix} \tag{26}
$$

olarak ve sütun vektörü $\mathbf{Z}$ alt sütun vektörleri cinsinden

$$
\mathbf{Z}=\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\hat{\mathbf{A}},\hat{\mathbf{B}},\hat{\mathbf{C}},\hat{\hat{\mathbf{A}}}\}^T \tag{27}
$$

şeklinde yazılabilir. Burada her sütun vektörü

$$
\mathbf{A}=\{A_{111},\ldots,A_{11N},\ldots,A_{1k1},\ldots,A_{1kN},\ldots,A_{I11},\ldots,A_{IJK}\} \tag{28}
$$

şeklinde verilmektedir. $\mathbf{K}$ rijitlik matrisinin ve $\mathbf{M}$ kütle matrisinin bileşenlerinin açık şekli [5] de verilmiştir.

(23) denkleminden Ω çözülerek, mikrogermeli plağın frekansları kolayca elde edilebilir.

Burada kullanılan Chebyshev polinomları $P_i(\chi)$, $i=1,3,5,\ldots$ için simetrik (**S**) ve $i=2,4,6,\ldots$ için antisimetrik (**A**)' tir. Ayrıca aynı sınır koşullarına karşı gelen sınır fonksiyonları $f_\delta^1(\xi)$, $\xi=1$ ve $\xi=-1$ de ve $f_\delta^1(\eta)$, $\eta=1$ ve $\eta=-1$ de simetriktir. Bu simetri özelliği, bize bu iki ayrı titreşim modunun ayrı ayrı belirlenebilmesini ve dolayısıyla da daha küçük bir küme üzerinde özdeğerleri elde edebilmemizi sağlar. Bu, geometrik simetriye sahip, simetrik sınır koşullarına maruz bırakılmış bir plak için titreşim modları kümesinin birinci, ikinci ve üçüncü harfler sırasıyla ξ, η ve ζ yönlerinde simetri modlarını göstermek üzere **AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS,**

SSA ve SSS olmak üzere sekiz farklı alt kümeye ayrılabileceği anlamına gelmektedir.

3. Karşılaştırma ve sayısal sonuçlar

Mikrogermeli plağın serbest titreşim analizi ile ilgili yapılmış bir çalışma bildiğimiz kadarıyla yoktur. Bu nedenle mikrogermeli ortamın malzeme sabitleri sıfır alınarak, klasik elastisite teorisi ile incelenmiş plak için elde edilen sonuçlarla [7] karşılaştırılması Tablo.1. de verilmiştir. Burada $\Delta = b/(a\,h\,\pi^2)\sqrt{12(1\text{-}\nu^2)/E}\;\Omega$ boyutsuz frekans parametresi olarak verilmektedir.

Tablo.1. Boyutsuz frekans parametresinin karşılaştırma sonuçları, ($\nu = 0.3$) S:Basit Bağlı, C:Ankastre

Bağ.-Simetri $\alpha_1 - \alpha_2$ terim s.	Karşılaştırma	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
SSSS- SSS 1-0.2 6*x*6*x*2	3-D Ritz[7]	4.6127	7.7465	10.314	10.314	13.838	16.632
	Sonuç	4.6127	7.74654	10.3144	10.3144	13.8382	16.6318
CCCC AAS 1.5-0.3 8*x*8*x*4	3-D Ritz[7]	4.2234	5.1628	6.3962	8.0677	8.8143	9.0568
	Sonuç	4.2235	5.1633	6.3962	8.0687	8.8143	9.0569
SSSS. NoSym. 1-0.1 8*x*8*x*4	3-D Ritz[7]	1.9342	4.6222	4.6222	6.5234	6.5234	7.1030
	Sonuç	1.9342	4.6224	4.6224	6.5234	6.5234	7.1038
CCCC SSS 2-0.5 8*x*8*x*4	3-D Ritz[7]	2.4682	3.8884	3.9131	4.0559	4.3534	4.5282
	Sonuç	2.4685	3.8888	3.9135	4.0564	4.3536	4.5283
SSSS. NoSym. 1-0.2 8*x*8*x*4	3-D Ritz[7]	1.7558	3.2617	3.2617	3.8991	3.8991	4.6128
	Sonuç	1.7759	3.2617	3.2617	3.9010	3.9010	4.6128

Tablo 2-6 da sırasıyla SSSS, CCCC, SSCC, SSFF ve CCFF (S:Basit bağlı, C:Ankastre, F:Serbest) sınır koşulları için mikrogermeli ortamın frekans denklemleri verilmektedir. Bu tablolarda plağın geometrik özellikleri ($a = 1m,\ \alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0.1$) olarak, elastik özellikleri ise Gauthier malzemesine uygun olarak ($\nu = 0.4$, $E = 5.29\,GPa$, $j = 1.96\times10^{-7}\,m^2$) olarak alınmıştır.

Tablo.2. SSSS için frekans değerleri

Mikro Malzeme sabitleri	Klasik, mikropolar ve mikrogenleşmeye ait frekanslar sırasıyla normal, altcizgili ve italik olarak gösterilmiştir. Bozulmaya başlayan klasik frekanslar ise koyu formatta gösterilmiştir.
$hepsi = 0$	1.9273, 4.5858, 4.5858, 6.0395, 6.0395, 7.0226, 8.5411, 8.5483, 8.5483, 10.7084, 10.7084, 12.079, 12.079, 13.5049
$hepsi = 10^{-10}$	*0.0182,* 0.0315, 0.0371, 0.0428, 0.0466, 0.0580, *0.0600, 0.0829*, 0.0888, 0.0909, 0.0980, 0.1064, *0.1158,* 0.1274, *0.1291,* 0.1334, 0.1376, 0.1436, 0.1561, 0.1593
$hepsi = 10^{-8}$	*0.1820*, 0.3153, 0.3711, 0.4281, 0.4666, 0.5808, *0.6002, 0.8290*, 0.8884, 0.9093, 0.9800, 1.0647, *1.1582,* 1.2745, *1.2918,* 1.3343, 1.3759, 1.4360, 1.5611, 1.5939
$hepsi = 10^{-7}$	*0.5757,* 0.9971, 1.1735, 1.3538, 1.4757, 1.8368, *1.8980,* 1.9273, *2.6217,* 2.8095, 2.8757, 3.0991, 3.3669, *3.6628,* 4.0303, *4.0850,* 4.2194, 4.3511, 4.541, 4.5858
$hepsi = 10^{-6}$	*1.8205,* 1.9273, 3.1532, 3.7111, 4.2811, 4.5858, 4.5858, 4.6666, 5.8085, *6.0020,* 6.0395, 6.0395, 7.0226, *8.2907,* 8.5411, 8.5484, 8.5484, 8.8846, 9.0938, 9.8004
$hepsi = 10^{-5}$	**1.9274, 4.5860, 4.5860,** *5.7569*, 6.0395, 6.0395, **7.0228,** 8.5411, **8.5485, 8.5485,** 9.9713, **10.7085, 10.7085**, 11.7357, 12.079, 12.079, 13.5049
$hepsi = 10^{-4}$	**1.9284, 4.5876, 4.5876,** 6.0395, 6.0395, **7.0244, 8.5412, 8.5500, 8.5500, 10.7101, 10.7101, 12.0791, 12.0791, 13.505, 13.505**
$hepsi = 10^{-2}$	**2.0360, 4.7591, 4.7591, 6.0435, 6.0435, 7.1937, 8.5484, 8.7161, 8.7161, 10.8765, 10.8765, 12.0909, 12.0909, 13.5202, 13.5202**
$polar = 5\times10^{-5}$	**1.9278, 4.5867, 4.5867**, 6.0395, 6.0395, **7.0235,** 8.5411, **8.5492, 8.5492, 10.7092, 10.7092, 12.0791, 12.0791, 13.505, 13.505**
$\text{genleþme} = 7\times10^{-5}$	1.9273, 4.5858, 4.5858, 6.0395, 6.0395, 7.0226, 8.5411, 8.5483, 8.5483, 10.7084, 10.7084, 12.079, 12.079, 13.5049

Tablo.3. CCCC için frekans değerleri	
$hepsi = 0$	3.3259, 6.3046, 6.3046, 8.8010, 10.3466, 10.4557, 12.2717, 12.2717, 12.488, 12.488, 13.7958
$hepsi = 10^{-10}$	*0.0182,* 0.0315, 0.0371, 0.0428, 0.0466, 0.0580, *0.0600, 0.0829,* 0.0888, 0.0909, 0.0980, 0.1064, *0.1158*, 0.1274, *0.1291*, 0.1334, 0.1376, 0.1436, 0.1561, 0.1593
$hepsi = 10^{-8}$	*0.1820*, 0.3153, 0.3711, 0.4281, 0.4666, 0.5808, *0.6002, 0.8290,* 0.8884, 0.9093, 0.9800, 1.0647, *1.1582*, 1.2745, *1.2918*, 1.3343, 1.3759, 1.4360, 1.5611, 1.5939
$hepsi = 10^{-7}$	*0.5757*, 0.9971, 1.1735, 1.3538, 1.4757, 1.8368, *1.8980, 2.6217*, 2.8095, 2.8757, 3.0991, 3.3259, 3.3669, *3.6628*, 4.0303, *4.0850*, 4.2194, 4.3511, 4.541, 4.9368
$hepsi = 10^{-6}$	*1.8205*, 3.1532, 3.3259, 3.7111, 4.2811, 4.6666, 5.8085, *6.0020*, 6.3046, 6.3046, *8.2907*, 8.8010, 8.8846, 9.0938, 9.8004, 10.3466, 10.4557, 10.6473, *11.5828*
$hepsi = 10^{-5}$	**3.3260,** *5.7569*, **6.3048, 6.3048, 8.8012,** 9.9713, **10.3467, 10.4558**, 11.7357, 12.2717, 12.2717, **12.4881, 12.4881**, 13.5382, 13.7958
$hepsi = 10^{-4}$	**3.3268, 6.3059, 6.3059, 8.8024, 10.348, 10.457, 12.2718, 12.2718, 12.4894, 12.4894, 13.7959**
$hepsi = 10^{-2}$	**3.4104, 6.4334, 6.4334, 8.9371, 10.4841, 10.5872, 12.2758, 12.2758, 12.6279, 12.6279, 13.8111**
$polar = 5\times10^{-5}$	**3.3263, 6.3053, 6.3053, 8.8017, 10.3473, 10.4563, 12.2718, 12.2718, 12.4887, 12.4887, 13.7959**
$genleþme = 7\times10^{-5}$	3.3259, 6.3046, 6.3046, 8.8010, 10.3466, 10.4557, 12.2717, 12.2717, 12.488, 12.488, 13.7958

Tablo.4. SSCC için frekans değerleri	
$hepsi = 0$	2.7192, 4.9634, 6.0118, 6.0395, 7.9577, 8.7351, 10.2402, 10.895, 11.264, 11.9282, 11.9721, 12.079, 13.8827
$hepsi = 10^{-10}$	*0.0182*, 0.0315, 0.0371, 0.0428, 0.0466, 0.0580, *0.0600, 0.0829*, 0.0888, 0.0909, 0.0980, 0.1064, *0.1158*, 0.1274, *0.1291*, 0.1334, 0.1376, 0.1436, 0.1561, 0.1593
$hepsi = 10^{-8}$	*0.1820*, 0.3153, 0.3711, 0.4281, 0.4666, 0.5808, *0.6002, 0.8290*, 0.8884, 0.9093, 0.9800, 1.0647, *1.1582*, 1.2745, *1.2918*, 1.3343, 1.3759, 1.4360, 1.5611, 1.5939
$hepsi = 10^{-7}$	*0.5757*, 0.9971, 1.1735, 1.3538, 1.4757, 1.8368, *1.8980, 2.6217*, 2.7192, 2.8095, 2.8757, 3.0991, 3.3669, *3.6628*, 4.0303, *4.0850*, 4.2194, 4.3511, 4.541, 4.9368
$hepsi = 10^{-6}$	*1.8205*, 2.7192, 3.1532, 3.7111, 4.2811, 4.6666, 4.9634, 5.8085, *6.0020*, 6.0118, 6.0395, 7.9577, *8.2907*, 8.7351, 8.8846, 9.0938, 9.8004, 10.2402, 10.6473, 10.895
$hepsi = 10^{-5}$	**2.7193, 4.9635**, *5.7569*, **6.0119**, 6.0395, **7.9579, 8.7353**, 9.9713, **10.2404**, 10.895, **11.2641**, 11.7357, 11.9282, **11.9723**, 12.079, 13.5382, **13.8828**
$hepsi = 10^{-4}$	**2.7202, 4.9650, 6.0131**, 6.0395, **7.9593, 8.7368, 10.2416, 10.8951, 11.2656,** 11.9282, **11.9736, 12.0791, 13.8843**
$hepsi = 10^{-2}$	**2.8101, 5.1249, 6.0435, 6.1457, 8.1083, 8.9007, 10.3767, 10.9039, 11.4228, 11.9324, 12.0912, 12.1188, 14.043**
$polar = 5\times10^{-5}$	**2.7197, 4.9642, 6.0124,** 6.0395, **7.9585, 8.7359, 10.2409,** 10.895, **11.2648,** 11.9282, **11.9729, 12.0791, 13.8835**
$genleþme = 7\times10^{-5}$	2.7192, 4.9634, 6.0118, 6.0395, 7.9577, 8.7351, 10.2402, 10.895, 11.264, 11.9282, 11.9721, 12.079, 13.8827

Tablo.5. SSFF için frekans değerleri	
$hepsi = 0$	0.9320, 1.4768, 3.3460, 3.6119, 4.1798, 4.6555, 6.0395, 6.1151, 6.6211, 7.6182, 8.1008, 8.5411, 9.1808, 9.9678, 10.6718, 11.3024, 11.4851, 11.8048, 12.0792
$hepsi = 10^{-10}$	*0.0182*, 0.0315, 0.0371, 0.0428, 0.0466, 0.0580, *0.0600, 0.0829,* 0.0888, 0.0909, 0.0980, 0.1064, *0.1158*, 0.1274, *0.1291*, 0.1334, 0.1376, 0.1436, 0.1561, 0.1593
$hepsi = 10^{-8}$	*0.1820*, 0.3153, 0.3711, 0.4281, 0.4666, 0.5808, *0.6002, 0.8290,* 0.8884, 0.9093, 0.9320, 0.9800, 1.0647, *1.1582*, 1.2745, *1.2918,* 1.3343, 1.3759, 1.4360, 1.4768
$hepsi = 10^{-7}$	*0.5757*, 0.9320, 0.9971, 1.1735, 1.3538, 1.4757, 1.4768, 1.8368, *1.8980, 2.6217*, 2.8095, 2.8757, 3.0991, 3.3460, 3.3669, 3.6119, *3.6628*, 4.0303, *4.0850*, 4.1798
$hepsi = 10^{-6}$	0.9320, 1.4768, *1.8205*, 3.1532, **3.3461**, 3.6119, 3.7111, 4.1798, 4.2811, 4.6555, 4.6666, 5.8085, *6.0020*, 6.0395, 6.1151, **6.6212, 7.6183**, 8.1008, *8.2907*, 8.5411
$hepsi = 10^{-5}$	**0.9322, 1.4770, 3.3462, 3.6121, 4.1800**, 4.6555, *5.7569*, 6.0395, **6.1154, 6.6214, 7.6184, 8.1010**, 8.5411, **9.1810, 9.9662**, 9.9713, 10.6718, **11.3027**, 11.4851
$hepsi = 10^{-4}$	**0.9337, 1.4789, 3.3485, 3.6138, 4.1820, 4.6556**, 6.0395, **6.1174, 6.6238, 7.6201, 8.1027, 8.5412, 9.1831, 9.9698, 10.672, 11.3048, 11.4852**, 11.8048, **12.0793**
$hepsi = 10^{-2}$	**1.0839, 1.6765, 3.5878, 3.7990, 4.3886, 4.6654, 6.0438, 6.3405, 6.8789, 7.8007, 8.2940, 8.5484, 9.4134, 10.1648, 10.6931, 11.4896, 11.5441, 11.8096, 12.09**
$polar = 5\times10^{-5}$	**0.9328, 1.4778, 3.3472, 3.6129, 4.1809**, 4.6555, 6.0395, **6.1163, 6.6224, 7.6192, 8.1018**, 8.5411, **9.1819, 9.9688, 10.6719, 11.3036**, 11.4851, 11.8048, **12.0793**
$genleþme = 7\times10^{-5}$	0.9320, 1.4768, 3.3460, 3.6119, 4.1798, 4.6555, 6.0395, 6.1151, 6.6211, 7.6182, 8.1008, 8.5411, 9.1808, 9.9678, 10.6718, 11.3024, 11.4851, **11.8047**, 12.0792

Tablo.6. CCFF için frekans değerleri	
$hepsi = 0$	2.0956, 2.3875, 3.8384, 5.3158, 5.5571, 5.6802, 6.8579, 7.1651, 9.5349, 9.8203, 9.8672, 10.2956, 10.3744, 11.3166, 11.4255, 11.5007, 12.3849, 13.1231, 13.7499
$hepsi = 10^{-10}$	*0.0182*, 0.0315, 0.0371, 0.0428, 0.0466, 0.0580, *0.0600, 0.0829*, 0.0888, 0.0909, 0.0980, 0.1064, *0.1158*, 0.1274, *0.1291*, 0.1334, 0.1376, 0.1436, 0.1561, 0.1593
$hepsi = 10^{-8}$	*0.1820*, 0.3153, 0.3711, 0.4281, 0.4666, 0.5808, *0.6002, 0.8290*, 0.8884, 0.9093, 0.9800, 1.0647, *1.1582*, 1.2745, *1.2918*, 1.3343, 1.3759, 1.4360, 1.5611, 1.5939
$hepsi = 10^{-7}$	*0.5757*, 0.9971, 1.1735, 1.3538, 1.4757, 1.8368, *1.8980*, 2.0956, 2.3875, *2.6217*, 2.8095, 2.8757, 3.0991, 3.3669, *3.6628*, 3.8384, 4.0303, *4.0850*, 4.2194, 4.3511
$hepsi = 10^{-6}$	*1.8205*, 2.0956, 2.3875, 3.1532, 3.7111, 3.8384, 4.2811, 4.6666, 5.3158, 5.5571, **5.6803**, 5.8085, *6.0020*, 6.8579, **7.1652**, *8.2907*, 8.8846, 9.0938, 9.5349, 9.8004
$hepsi = 10^{-5}$	**2.0957, 2.3877, 3.8386, 5.3159**, 5.5571, **5.6804**, *5.7569*, **6.8581, 7.1653, 9.5350, 9.8205**, 9.8672, 9.9713, 10.2956, 10.3744, **11.3168, 11.4258, 11.5006**, 11.7357
$hepsi = 10^{-4}$	**2.0965, 2.3890, 3.8406, 5.3172, 5.5572, 5.6818, 6.8604, 7.1671, 9.5363, 9.8225, 9.8687**, 10.2956, **10.3746, 11.3184, 11.4279, 11.5008**, 12.3849, .**13.1232, 13.7518**
$hepsi = 10^{-2}$	**2.1820, 2.5277, 4.0557, 5.4478, 5.5638, 5.8379, 7.1085, 7.3581, 9.6758, 10.0212, 10.0374, 10.3005, 10.3893, 11.4887, 11.5086, 11.6624, 12.3947, 13.1407**
$polar = 5\times10^{-5}$	**2.0960, 2.3883, 3.8395, 5.3165**, 5.5571, **5.6810, 6.8592, 7.1661, 9.5356, 9.8214, 9.868**, 10.2956, **10.3745, 11.3175, 11.4267**, 11.5007, 12.3849, 13.1231, **13.7509**
$genleþme = 7\times10^{-5}$	2.0956, 2.3875, 3.8384, 5.3158, 5.5571, 5.6802, 6.8579, 7.1651, 9.5349, 9.8203, 9.8672, 10.2956, 10.3744, 11.3166, 11.4255, 11.5007, 12.3849, 13.1231, 13.7499

Kırış ve İnan [5], optimizasyon problemini çözmek için Genetik Algoritma ve Downhill Simplex yöntemini kullanarak, Ayorinde ve Yu tarafından [4] polimer bir matris içine keyfi yönelimli kısa cam lifler içeren bir kompozit için elde edilen deneysel frekanslardan mikro malzeme sabitlerinin üst sınırlarını

$$\kappa = 3.5455\times10^{-6} GPa, \quad \alpha = 6.4980\times10^{-2} kN, \quad \beta = 2.9947\times10^{-4} kN,$$
$$\gamma = 1.0853\times10^{-2} kN, \quad a_0 = 3.8588\times10^{-2} kN, \quad \lambda_0 = 6.8329\times10^{-3} kN, \qquad (29)$$
$$\lambda_1 = 0.48113 kN$$

olarak elde etmişlerdir. Bu mikro malzeme sabitleri ve $E = 16.59\,GPa$, $\nu = 0.3$, $\rho = 1850\,kg/m^3$ ve $j = 1.95\times10^{-8} m^2$ alınarak, hem deneyde kullanılan dört ucu serbest (FFFF), hem de diğer (SSSS, CCCC, SSCC, SSFF ve CCFF) sınır koşulları için bahsedilen kompozitin serbest titreşim frekansları Tablo.7 de verilmiştir. Deneyde verilen frekans değerleri (f) ile burada verilen frekans (Δ) değerleri arasında

$$f = \frac{t\pi}{2b^2}\sqrt{\frac{E}{\rho\, 12(1-\nu^2)}}\ \Delta \qquad (30)$$

bağıntısı bulunmaktadır.

Tablo.7. Polimer matris içinde keyfi yönelimli kısa lifli camlar içeren kompozit için frekanslar		
Deney [4] (f) FFFF		54.4, 78.8, 99.2, 138.4, 138.4, 242.4, 242.4, 254.0, 263.4, 306.6
Sayısal [4] (f) FFFF Klasik		55.6665, 81.0368, 100.364, 143.754, 143.891, 252.245, 252.897, 263.092, 286.156, 318.928
FFFF	Klasik (Δ)	1.36175, 1.98237, 2.45515, 3.51658, 3.51995, 6.17056, 6.18648, 6.4359, 7.00012, 7.80179
	Mikrogerme	**1.36494, 1.98739, 2.4589, 3.52033, 3.5237, 6.1746, 6.19052, 6.43942, 7.00449, 7.80536**
SSSS	Klasik (Δ)	1.9968, 4.9862, 4.9940, 7.9810, 9.9652, 9.9861, 12.9557, 12.9687, 17.5945
	Mikrogerme	**1.9988, 4.9886, 4.9965, 7.9836**, *8.2089*, **9.9679, 9.9887, 12.9584, 12.9714, 17.5972**
CCCC	Klasik (Δ)	3.6705, 7.4657, 7.4775, 11.0083, 13.3958, 13.4663, 16.7738, 16.791
	Mikrogerme	**3.6720, 7.4676, 7.4795**, *8.2089*, 11.0083, **13.3981, 13.4685, 16.7761, 16.7933**

SSCC	Klasik (Δ)	2.9487, 5.5479, 7.0576, 9.6014, 10.3337, 13.1553, 14.1939, 15.7355,
	Mikrogerme	**2.9503, 5.5501, 7.0596**, *8.2089*, **9.6038, 10.3363, 13.1576, 14.1965, 15.7379**
SSFF	Klasik (Δ)	0.9731, 1.6309, 3.7147, 3.9334, 4.7211, 7.1476, 7.6164, 8.8832, 9.6957,
	Mikrogerme	**0.9751, 1.6335, 3.7180, 3.9358, 4.7238, 7.1506, 7.6201**, *8.2089*, **8.8859, 9.6985**
CCFF	Klasik (Δ)	2.2596, 2.6889, 4.4275, 6.2211, 6.8276, 8.0889, 8.8916, 12.2231, 12.6111, 12.8898
	Mikrogerme	**2.2608, 2.6907, 4.4305, 6.2230, 6.8297, 8.0925**, *8.2089*, **8.8942, 12.2254, 12.6142**

Tablo.2-7 den görüleceği üzere makro şekil değiştirme üzerine farklı sınır koşulları alınmasına rağmen giriş bölümünde bahsedilen temel yapı aynı kalmaktadır. Tüm farklı sınır koşulları için, mikro sabitler sıfır alındığında sadece klasik frekanslar elde edilmekte, mikro sabitleri büyülttükçe, ek frekanslar hızla büyümekte ve sabitlerin belirli bir limit değerinden sonra anlamlı frekans aralığından çıkmakta ve sadece klasik frekanslar görülmektedir. Mikro sabitler daha da büyütüldüğünde ise, anlamlı frekans aralığında ki klasik frekanslarda da bozulmalar başlamaktadır. Sınır koşulları sadece makro hareket üzerine konulduğu, mikro hareket üzerine sınır koşulu konulmadığı için, plağın farklı sınır şartları için ortaya çıkan ek frekanslar aynıdır. Ayrıca farklı sınır koşullarına rağmen bu ek frekansların anlamlı frekans aralığından çıkmaya ve klasik frekansların bozulmaya başladığı mikro malzeme sabiti değerleri de yaklaşık aynı ölçektedir.

Dahası, ikinci bölümde belirtilen (6) denklemlerindeki kuple ilişkilerden beklendiği üzere, mikropolar sabitler, mikrogenleşen dalga frekanslarına, tersine mikrogenleşme sabitleri mikropolar dalgaların frekanslarına hiçbir etki yapmamakta, ancak her iki sabit kümesi de klasik frekanslar üzerinde mikro ölçekte etkili olmaktadırlar.

Tüm farklı sınır şartlarında gözlenen ek frekansların anlamlı frekans aralığından çıkıp, klasik frekansların bozulmaya başlaması, bu noktada, mikro sabitlerin eşik değerlerinin incelenen malzeme için mikro sabitlerin üst sınırları olduğu düşüncesine bizi zorlamaktadır. Bu gözlemden yola çıkarak, ters problem çözülerek, deneysel frekanslarla hesaplanan frekanslar arasındaki farkı minimize eden optimizasyon problemlerinin çözümü gelecek çalışmaları beklemektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Eringen A. C.,** 1990. Theory of thermo-microstretch elastic solids*, International Journal of Engineering Science*, **28**, 12, 1291-1301.

[2] **Singh B., Kumar R.,** 1998. Wave propagation in a generalized thermo-microstretch elastic solid, *International Journal of Engineering Science*, **36**, 891-912.

[3] **Parfitt V. R., Eringen A. C.,** 1969. Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar elastic half space, Journal of Acoustical Society of America, **45**, 1258-1272.

[4] **Ayorinde E. O., Yu L.,** 2005. On the elastic characterization of composite plates with vibration data, **283**, 243-262.

[5] **Kırış A. C., İnan. E,** 2007. On the identification of microstretch elastic moduli of materials by using vibration data of plates, McMat2007 ASME Applied Mechanics and Materials Conference, University of Texas, Austin.

[6] **Eringen A. C.,** 1999. Microcontinuum Field Theories I Foundations and Solids, Springer, New York.

[7] **Zhou D., Cheung Y. K., Au F. T. K., Lo S. H.,** 2002. Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 6339-6353.