

243

DÜZLEM İÇİ KUVVETLER ETKİSİNDEKİ
DİKDÖRTGEN ORTOTROP PLAKLARIN DÜZLEM İÇİ
VE DÜZLEM DIŞI TİTREŞİMLERİ

(DOKTORA TEZİ)

Yük. Müh. Ümit UZMAN

Tezin Fen Bilimleri Ens. Verildiği Tarih : 2 Eylül 1985

Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Aralık 1985

Doktorayı Yöneten Öğretim Öyesi : Prof. Dr. Hasan Boduroğlu

Diğer Juri Üyeleri : Prof. Dr. Murat Dikmen

Prof. Dr. Vural Cinemre

Y. G.

Yüksekokretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

İNŞAAT FAKÜLTESİ MATBAASI

1985

İÇİNDEKİLER

- ÖZET	V
- IN-PLANE AND OUT-OF-PLANE VIBRATIONS OF RECTANGULAR ORTHOTROPIC PLATES UNDER THE EFFECT OF IN-PLANE LOADING	VII
- SEMBOLLER	XIII
1. GİRİŞ: KONUNUN TANITILMASI VE AMAÇ	1
2. GENEL DENKLEMLER VE VON KÁRMÁN PLAK TEORİSİ	11
2.1. PROBLEMİN TANIMI	11
2.1.1. Koordinat Takımı ve İşaret Kuralı	11
2.1.2. Yer Değiştirmeler	13
2.1.3. Varsayımlar	13
2.1.4. Plak Mesnetleri	14
2.1.5. Dinamik Kenar Yükleri	15
2.2. VİRTÜEL İŞ İLKESİ	16
2.2.1. Plağın Şekil Değiştirmiş Konumu	16
2.2.2. Potansiyel ve Kinetik Enerji	17
2.2.3. Virtüel Yer Değiştirmeler	18
2.2.4. Virtüel İş İlkesi	19
2.3. PLAK DENKLEMLERİ	19
2.3.1. Bileşke Gerilme ve Momentler	19
2.3.2. Virtüel İş İlkesinin Plakta Uygulanması	20
2.3.2.1. Hareket Denklemleri	24
2.3.2.2. Sınır Koşulları	25
2.3.3. Gerilme Fonksiyonu	27
3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ	29
3.1. VARYASYON PROBLEMI	29
3.2. BOYUTSUZ DEĞİŞKENLER VE DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ	30
3.3. KOORDİNAT FONKSİYONLARI	35
3.3.1. Dört kenarı Ankastre Plaklar	35
3.3.2. Dört Kenarı Mafsallı Plaklar	37
3.3.3. Karşılıklı İki Kenarı Ankastre Diğer İki Kenarı Mafsallı Plaklar	40

II

3.3.4. Düzlem İçi Yer Değiştirmeler	41
3.4. KISITLAYICI DENKLEMLER	43
3.5. ZAMANA BAĞLI ADI DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ	45
3.6. DENKLEMLERİN MATRİS BİÇİMDE GÖSTERİLMESİ VE LAGRANGE ÇARPANLARININ YOK EDİLMESİ	50
3.7. ORTOTROP DİKDÖRTGEN LEVHALARIN DÜZLEM İÇİ TİTREŞİMLERİ	54
3.7.1. Giriş	54
3.7.2. Serbest Titreşimler	55
3.7.3. Zorlanmış Titreşimler	62
3.7.3.1. $\alpha_D(t)$ 'nin Basamak Fonksiyonu Olması Hali	64
3.7.3.2. $\alpha_D(t)$ 'nin Darbe Fonksiyonu Olması Hali	65
3.7.3.3. $\alpha_D(t)$ 'nin Rampa Fonksiyonu olması Hali	67
3.7.3.4. $\alpha_D(t)$ 'nin Harmonik Fonksiyon Olması Hali	68
4. ORTOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLARIN DİNAMİK STABİLİTESİ	70
4.1. GİRİŞ	70
4.2. NEWMARK YÖNTEMİ İLE (3.67) DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	71
4.2.1. Newmark Yöntemi	72
4.2.2. (4.3) Diferansiyel Denklem Sistemi İçin İterasyon Yapılması	74
4.3. STATİK KENAR YÜKLERİ ETKİSİNDE ORTOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLAR	75
4.3.1. Burkulma Yükleri ve Burkulma Modları	76
4.3.2. Von Kármán Plağı ve Yük-Sehim İlişkisi	77
4.3.3. Serbest Titreşim Frekansları ve Modları	81
4.4.4. Von Kármán Plağında Plak Titreşimleri	84
4.4. DİNAMİK KENAR YÜKLERİ ETKİSİNDE ORTOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLAR	87
4.5. ZAMANLA PERİYODİK DEĞİŞEN KENAR YÜKLERİ	87
4.5.1. Düzlem İçi Atalet Kuvvetlerinin İthal Edilmesi Hali	88
5. SONUÇLAR	93

III

KAYNAKLAR	96
EK I : AKIŞ DİYAGRAMI	100
EK II : 3.7. DE ZAMANA GÖRE İKİNCİ MERTEBEDEN MATRİS DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNDEKİ MATRİS VE VektörLERİN ELEMANLARI	101
EK III : DUHAMEL İNTEGRALİ İÇİN ADIM ADIM İNTEGRASYON YÖNTEMİ	110
TEŞEKKÜR	
ÖZGEÇMİŞ	

Ö Z E T

Bu çalışmada ortotrop malzemeden yapılmış ince dikdörtgen plakların düzlem içi dinamik kenar yükleri etkisindeki davranışını incelenmiştir. Problemin niteliği gereği çözüm sayısal hesaplarla elde edildiğinden genel bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Buna ait akış diyagramı tezin sonunda verilmiştir. Bu bilgisayar programı yardımıyla levha titreşimleri, plaqın statik burkulması, burkulma sonrasında plak davranışını, statik kenar yükleri etkisinde plak titreşimleri, titreşim modları ve frekanslarının genelde değişimi, dinamik kenar yükleri etkisinde önsehimli ve önsehimsiz plakların davranışını incelenebilir. Problemde düzlem içi atalet kuvvetleri de gözönüne alınabilmektedir.

Von-Kármán plak varsayımlarının esas alındığı bu çalışmada birinci bölümde konu ile ilgili yayınlar verilmiş ve çalışmanın amacı belirtimmiştir.

İkinci bölümde elastodinamikteki temel denklemler verilmiş olup bunlardan virtüel iş bağıntısı plak için yazılarak plak denklemleri ve sınır koşulları elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde koordinatlar, yer değiştirmeler ve gerilmeler değişken dönüşümü yapılarak boyutsuz hale getirilmiştir. Daha sonra boyutsuz yer değiştirmeler için iki doğrultuda Fourier serileri seçilerek Lagrange çarpanları yöntemi uygulanmıştır. Böylece sadece zamana bağlı adı diferansiyel denlem sistemi elde edilmiştir. Bu bölümün sonunda levhaların düzlem içi titreşimleri ele alınmış olup bununla ilgili çeşitli sonuçlar verilmiştir.

VI

Üçüncü bölümde elde edilmiş bulunan adı diferansiyel denklem sisteminin çözümü dördüncü bölümde yapılmıştır. Burada Kirchhoff plağı hali için burkulma yükleri ve titreşim frekansları arasındaki ilişki açıklanmıştır. Von Kármán plağında burkulma sonrası yük-yer değiştirmeye eğrisinin elde edilebilmesi için bir iterasyon verilmiştir. Statik veya dinamik kenar yükleri etkisinde bulunan plağın davranışını seçilen başlangıç koşulları altında bir başlangıç değer problemi olarak ele alınmış olup Newmark yöntemi kullanılarak adım adım integrasyon uygulanmıştır. Çeşitli yüklemeler için sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise bu çalışmada elde edilen sonuçlarla ilgili bir değerlendirme sunulmuştur.

IN-PLANE AND OUT-OF-PLANE VIBRATIONS OF RECTANGULAR
ORTHOTROPIC PLATES UNDER THE EFFECT OF IN-PLANE
LOADING

S U M M A R Y

The determination of natural frequencies is fundamentally important in the design of many structural elements. Thin rectangular plates are such commonly used elements. Therefore, there has been a considerable amount of work done on the vibrations of rectangular plates. If a plate is subjected to pulsating in-plane loads, the plate will generally experience forced in-plane vibrations and for certain frequencies of the pulses, in-plane resonance will take place. However, a completely different type of resonance will occur, when there is a certain relationship between the natural frequency of the out-of-plane vibration, the frequency of the pulses and their magnitudes. This problem is called the dynamic stability of plates. When the in-plane forces are static then we have the problem of plate stability which has been the subject of many investigators (References from 33 to 54). The most recent work dealing with dynamic in-plane forces are given in Ref. 15,55 through 69. In some of these in-plane inertia forces are included with certain limitations Ref. 15,37,38,40,41,50, 59,61,62,68.

In this thesis, thin rectangular orthotropic plates are investigated under the action of in-plane forces. Assumptions for von Kármán's plate theory are used and the in-plane inertia forces are included in the analysis. Therefore, at first the in-plane vibrations of thin plates are studied and later the general case of simultaneous in-plane and out-of-plane vibrations are considered. Thus the interaction between the in-plane and out-of-plane vibrations are studied.

VIII

In the first chapter of the thesis, the subject of the thesis and a literature survey are given and the object of the study is explained.

In the second chapter, the basic equations of elastodynamics are given and the assumptions used in the study are explained. In the analysis the following support conditions are considered :
i) clamped on four sides ii) simply supported on four sides
iii) clamped on two opposite sides and simply supported on the remaining sides. In all these cases, sides can move freely in the plane of the plate as shown in Figure 2.3. Rigid body motion of the plate in its own plane is also taken into account as shown in Figure 2.8. The inertia forces due to this rigid body motion are included in the differential equations. Initially the plate is considered to be under the action of the static in-plane forces along the edges. Then the dynamic in-plane forces are added to the static equilibrium configuration (see Equations 2.4, 2.5 through 2.7). The dynamic edge loads are chosen of the following types a) step function, b) impulsive, c) increasing linearly and d) harmonic as shown in Figure 2.5. The loading along the edges are chosen to be uniform normal loading, trapezoidal normal loading or uniform shear loading or any linear combination of these. In this chapter, the virtual work equation (Eq. 2.38) and the equations of motion of the plate (Eq. 2.41) and the boundary conditions (Equations 2.42 through 2.50) are obtained making use of the basic equations and the assumptions.

In the third chapter, by changing the variables dimensionless quantities for the coordinates, stresses and displacements are defined. The in-plane and out-of-plane displacements are expanded into two-dimensional Fourier series as shown in Equations 3.25 and 3.39. The force boundary conditions given by Eq . 2.50 put certain constraints on the coefficients (or the generalized coordinates) of the Fourier series as seen in Eq . 3.46. These constraints are independent of time when static buckling is

IX

investigated. In order to determine the generalized coordinates Lagrange multipliers are used in the analysis. As a result of this approach, a set of differential equations is obtained. This set consists of the differential equations given by Equations 3.54 through 3.56 which will yield the generalized coordinates for in-plane forced vibrations and the differential equation given by Eq . 3.57 which contains the generalized coordinates for parametrically excited out-of-plane vibrations. In the case of von Kármán plate there is a nonlinear interaction between these two sets of equations. These equations are written in matrix form and dimensions of the matrices are reduced by eliminating the Lagrange's multipliers. At the end of the third chapter, the in-plane vibrations of the plate is investigated and some of the results are given.

In the fourth chapter the solution is obtained for the set of ordinary differential equations derived in the third chapter. Here, the relationship between the buckling loads and the frequencies of the Kirchhoff's plate is explained. An iteration scheme is given for obtaining the load-displacement curve for the post-buckling behaviour of von Kármán's plate. Newmark's method of stepwise integration is applied to study the behavior of the plate under static and dynamic edge loadings by considering the plate as an initial value problem under the chosen initial conditions. Numerical examples are presented. The summary of the results are given below.

Case of In-Plane Vibrations :

- If the in-plane inertia forces are neglected, the displacements of the plate are expressed in terms of a_S and a_D given by Eq .3.39. Otherwise, the terms containing the coefficients $u_{ij}(t)$ and $v_{ij}(t)$ defined by the linear combination of the free vibration modes (Eq .3.89) should be added to these displacements.

- The edge loadings are zero in the case of free vibration modes. The vibration modes can be grouped into four by considering the symmetry and anti-symmetry of these modes and the calculations are carried out according to these groups.
- The convergence of the frequencies of the free vibrations is very fast depending on the number of terms in the series.
- In any type of symmetry, the first frequency of the free vibrations increases with the material parameters κ and decreases with v .

Case of out-of-plane vibrations :

- Under the assumptions of Kirchhoff's plate, the in-plane displacements will be the same as above
- In the case of von Kármán's plate when the in-plane inertia forces are neglected and even for the static case, there are terms containing the coefficients u_{ij} and v_{ij} in Eq . 3.39. The large deflections involve quadratic terms in the differential equations for the in-plane displacements and stresses are expected. In this study, these expressions are expressed in terms of the series given by Eq .3.32 utilizing the coefficients $h_{ij}^{(.)}$ in Eq. 3.33. These series simplify the application of the variational method used and the satisfaction of the in-plane boundary conditions.
- Parallel to the previous studies, the convergence rates for the static buckling loads and the frequencies of the out-of-plane free vibrations are very fast.
- The iteration technique used for determining the post-buckling displacements also shows good convergence rate. The number of terms used in the case of in-plane series effects the rate of convergence. The norm given by Eq .4.17 increases by 6 % if the number N in Equ. 3.39 changes from 4 to 6 and by 2 % if N changes from 6 to 8. Thus the convergence rate for the out-of-plane displacements is accelerated.
- The frequencies of the out-of-plane free vibrations are varied by the increase of the edge loadings as expected. This

variation obtained for the material and the geometric properties of the plate given in Eq . 3.85 are presented in Fig.4.5.

- The variation of a free vibration mode and its frequency as a function of the amplitudes are obtained by giving an initial out-of-plane velocity consistent with that mode as shown in Fig.4.6. Using a stepwise integration method initial value problem is solved. There exists a relationship between the given initial velocity and the maximum value of the norm given by Eq . 4.37 in the case of Kirchhoff's plate while no such relationship exists in the case of von Kármán's plate. The values of the term $\frac{c}{m} \max |f|$ obtained both for Kirchhoff's and von Kármán's assumptions are compared for the same initial velocity. For various initial velocities the results are 0.001 and 0.001 ; 0.1 and 0.09853 ; 2.0 and 1.037 ; 50.0 and 5.924 for the Kirchhoff's and von Kármán's plates respectively. In other words, Kirchhoff's assumptions yield results quite different than von Kármán's assumptions as the initial velocities increase.
- The results obtained for the edge loadings increasing linearly with time are quite similar to the ones given in Ref.67. In this thesis, in an example the results are effected by 2 % if the in-plane inertia forces are included. In this case, since the step-wise integration method is used the time increments should be selected according to the period of vibrations. If the time increments are not taken small, then the instability of the integration appears.
- The results obtained for the edge loadings varying harmonically with time are similar to the ones given in Ref. 63. Since a perturbation analysis is used in that study, the magnitude of the harmonic loading should be selected to be small in comparison to the buckling load. Otherwise many terms should be considered in the perturbation series. In this thesis there is no limitation for the magnitude of the harmonic loading and the out-of-plane vibrations can be investigated considering multimodes.

S E M B O L L E R

	<u>Sayfa</u>		<u>Sayfa</u>
A		G_3, G_4	50
a		G_{12}	18
a_i ($i=1, 2, \dots, N_1$)		g, g_{ij}	51, 35
B		H	50
B_k ($k=1, 2, 3, 4$)		$H_{ij}^{(x)}, H_{ij}^{(y)}, H_{ij}^{(1)}, H_{ij}^{(2)}, H_{ij}^{(3)}$	46
b		h_1, h_2, h_x, h_o	50
b_1 ($i=1, 2, \dots, N_1$)		h	52
C		h	11
c		$h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$	31
\bar{c}		$h^{(x)}, h^{(y)}$	32
D		$h_{ij}^{(1)}, h_{ij}^{(2)}, h_{ij}^{(3)}, h_{ij}^{(x)}, h_{ij}^{(y)}$	36
D_m ($m=1, 2, \dots, N_D$)		$I^*, I^{**}, I^{***}, I^{***}, I^{****}, \dots, I^{***}$	48
E_k ($k=1, 2, \dots, 9$)		$K^{(2)}, K^{(4)}$	52
E		\bar{K}	16
E..		L	29
E_{11}, E_{22}		L	50
E		$L^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, 6$)	52
e_{ij} ($i, j=1, 2, 3$)		L_k ($k=1, 2, 3$)	23
e		$M_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2$)	19
F, F_i ($i=a, b, c$)		$\bar{M}_{n\alpha}$ ($\alpha=1, 2$)	23
$F^{(S)}, F^{(D)}$		$M_{nn}, \bar{M}_{nn}, M_{ns}, \bar{M}_{ns}$	24
F, F_k ($k=1, 2, 3$)		\bar{N}	16
F_k ($k=1, 2, \dots, 6$)		$N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2$)	19
F		$\bar{N}_{n\alpha}$ ($\alpha=1, 2$)	23
F..		\bar{N}_k ($k=1, 2, 3, 4$)	23
F		$N_{n\alpha}$ ($\alpha=1, 2$)	24
\bar{F}		$N_D, N_{tt}, N_{t\zeta}, N_{\zeta t}, N_{\zeta\zeta}$	44
f, f_{ij}	50, 35	n, n_α ($\alpha=1, 2$)	21
f, f_k	73	P	56
f_{ilk}, f_s	75	p, p_i ($i=1, 2, \dots, N_1$)	56
f_o	77	Q	55
		q, q_i	55

XIII

	<i>Sayfa</i>		<i>Sayfa</i>
$R^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, 5$)	52	$\gamma^{(k)}$ ($k=3, 4, 5, 6$)	52
r_u, r_v, r_D	41	y_i ($j=1, 2, \dots, M$)	35
S	50	$y^{(.)}$	37
s	21	y_{qsj}	
s_i ($i=a, b, c, d$)	15	$y_{..}, y_{::}, y_{:::}$	48
T	17	y, y_i ($i=1, 2, 3, .$)	11
t	13	y_1, y_2, y_r	50
t_{ij} ($i, j=1, 2, 3$)	17	y	52
u	17	Z	50
U	13	z, z_i ($i=1, 2, 3$)	16
U_o	27	z_1, z_2, z_r	51
U_s, U_d	41	\bar{z}, \bar{z}_i ($i=1, 2, \dots, N_1$)	56
u, u_k ($k=1, 2, 3$)	13	$z^{(S)}, z^{(S)}$	77
u	30	α_s, α_d	15
$u^{(S)}, u^{(i)}$ ($i=a, b, c, d$)	42	α, α_k ($k=1, 2, \dots, M^2$)	73
u_{ij} ($i, j=0, 1, 2, \dots, N$)	41	β	30
$u_{ij}^{(S)}$	77	γ	19
$u_{ij}^{(K)} \cdot u_{ij}^{(V)}$	77	θ	65
V	13	κ	19
\bar{v}_3	23	λ	50
v_3	24	v_{12}, v_{21}	18
v_o	27	v	19
v_s, v_d	41	ρ	20
v	30	$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_k$ ($k=1, 2, 3, 4$)	30
$v^{(S)}, v^{(i)}$ ($i=a, b, c, d$)	42	$\sigma^{(S)} \sigma^{(i)}$ ($i=a, b, c, d$)	41
v_{ij} ($i, j=0, 1, 2, \dots, N$)	41	$\bar{\sigma}$	42
$v_{ij}^{(S)}$	77	$\tau_{xy}, \bar{\tau}_k$ ($k=1, 2, 3, 4$)	30
$v_{ij}^{(K)}, v_{ij}^{(V)}$	77	$\bar{\tau}^{(S)}, \bar{\tau}^{(i)}$ ($i=a, b, c, d$)	41
w_o	11	$\bar{\tau}$	42
w	13	ψ	27
w, w_o	30	Ω	20
x_i ($i=1, 2, \dots, M$)	35	Ω^2	55
$x_{pri}^{(.)}$	37	ω, ω_i ($i=1, 2, \dots, N_1$)	55
$x_{..}, x_{::}, x_{:::}$	48		
x_i ($i=1, 2, 3$)	11		
x	30		

BÖLÜM 1

GİRİŞ: KONUNUN TANITILMASI VE AMAÇ

Teknikte kullanılan çubuk, plak, levha, kabuk gibi yapı elemanları birer sürekli ortam olarak göz önüne alınabilir. Sürekli ortamlarda yer değiştirmeye, şekil değiştirme ve gerilme gibi alan büyülükleri ve malzeme özellikleri noktadan noktaya sürekli veya parça parça sürekli olarak değişir. Sürekli ortam mekaniği, sürekli ortamın çeşitli iç ve dış etkiler altında davranışını incelemektedir [1, 2]. Yani malzemeye ait bünye bağıntılarını ve alan büyülükleri arasında yazılan diğer bağıntıları kullanarak, sürekli ortama gelen etkilerin ortaya koyduğu sınır ve başlangıç koşulları altında sürekli ortamdaki alan büyülüklerini belirlemektedir. Zamana bağlı iç ve dış etkiler halinde alan büyülükleri zamanla değişken olur. Bunlar arasında titresimler önemli bir yer tutar. Fizik ve teknığın hemen her alanını kapsayan titresimlerle pek çok araştırıcı ilgilenmekte ve bu konudaki yayınlar hızla artmaktadır [3]. Bu çalışmada plaklar ele alınmıştır. Plaklar, bir boyutu diğer iki boyutuna oranla küçük olan düzlem yapı elemanlarıdır [4 - 8]. Küçük boyuta kalınlık denir. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri, ortalama yüzey diye adlandırılır. İdeal bir plakta bu yüzey bir düzlemdir. Doğabilecek çeşitli yapım kurşurlarından dolayı düzlemliği sağlanamamışsa böyle plağa önsehimli plak adı verilir.

Dış yükler plak düzlemine dik ve plak düzlemi içinde olmak üzere iki bileşene ayrılabilir. Plak noktalarının yer değiştirmeye vektörleri de aynı şekilde iki bileşene ayrılabilir. Düzlem dışı yer değiştirmeye bileşenine sehim denir. Bu çalışmada düzlem dışı yük bileşeni sıfır alınmış; ve düzlem içi yükler, plak kenarlarından

zamanla değişken olarak etkitilmiştir. Bu tür yükler etkisinde önsehimsiz bir plakta sehimler ortaya çıkmayabilir. Sadece düzlem içi yükler etkisinde kalan ve düzlem içi yer değiştirmeler yapan plak, levha adını alır [8 - 11]. Levhanın dinamik kenar yükleri etkisinde yapacağı zorlanmış titreşimler, elastodinamigin iki boyutlu bir problemidir [11].

Düzlem içi ve düzlem dışı yer değiştirmelerin sonsuz küçük olduğunun varsayıldığı Kirchhoff plağında, plağın düzlem içi yer değiştirmelerinin sağlayacağı diferansiyel denklemler, düzlem dışı yer değiştirmelerden bağımsız olup levhanın diferansiyel denklemleri ile aynıdır. Bir başka deyişle Kirchhoff plağında düzlem içi yer değiştirmeler sehimlerden ve önsehinden bağımsız olarak levhaya ait diferansiyel denklemler yardımıyla çözülebilir [2 - 8].

Düzlem içi yer değiştirmelerin sonsuz küçük; fakat düzlem dışı yer değiştirmelerin sonlu olduğunun varsayıldığı von Kármán plağında ise sehimler ve sehimlerin türevleri düzlem içi yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sağlayacağı diferansiyel denklemlere kuadratik ifadeler şeklinde girmektedir [2 - 8]. Yani bu diferansiyel denklemlerin çözümü sehimlere bağlı olmaktadır.

Düzlem içi dinamik kenar yükleri etkisindeki önsehimsiz bir plağın düzlem konumunu koruyup koruyamayacağı, incelenmesi gereken diğer bir problemdir. Bu problem plak stabilitesi diye adlandırılır [12 - 16]. Düzlem dışı bozucu bir etki verildiğinde ortaya çıkan sehimler, düzlem konumun civarında kalan bir titreşim hareketi şeklindeyse sözü edilen dinamik kenar yükleri etkisinde plağın düzlem konumunun kararlı (stabil) olduğu söylenir. Sehimler, düzlemden farklı diğer bir denge konumu civarındaki titreşim hareketine geçerse, plağın düzlem konumu karsızdır.

Statik kenar yükleri etkisinde bulunan bir plağın düzlemden farklı diğer bir denge konumunun kararlılığı da aynı şekilde araştırılabilir. Böyle bir denge konumunu bozucu bir etki verildiğinde ortaya çıkan titreşimler bu denge konumu civarında

kaliyorsa kararlı, değilse kararsızdır [17]. Hız-yer değiştirmeye düzleminde (faz düzleimi) bu denge konumlarına karşılık olan noktalar önemli olup çeşitli titreşimlere ait faz eğrileri arasında bu noktalar birtakım özelliklere sahiptirler [3].

Plağın stabilitesinin yani düzlem konumunun kararlılığının bozulmasına plağın bürkulması denir. Plağın bürkulması, kenar yüklerinin statik veya dinamik olmasına göre statik bürkülme ya da dinamik bürkülme adını alır.

Bu konudaki çalışmalarında plak kenarlarının düzlem içi yer değiştirmelerinin büyük yeri vardır. Bilindiği gibi düzlem içi kenar yükleri etkisinde bulunan plaklarda yer değiştirmelerin ortaya çıkabilmesi için plak çevresinde az da olsa yüklü bir kenar parçasının düzlem içi yer değiştirmeye yapabilmesi gereklidir. Aksi halde kenar yüklerinden plak etkilenmez. Bazı çalışmalarında plak kenarlarının düzlem içi rıjıt yer değiştirmeye (ötelenme ve dönme) yaptığı göz önüne alınmıştır. Bu durumda bir kenarın rıjıt öteleme ve dönmesinin büyülüğu o kenara etkiyen yüklerin bileşkesine ve yerine bağlı olup bu bağıntılar göz önüne alınan kenarda düzlem içi sınır koşullarını belirtir. Bu halde kenar boyunca yük dağılışı önemli değildir. Bazı çalışmalarında ise plak kenarlarının düzlem içi yer değiştirmeleri rıjıt olarak sınırlanmış bu çalışmada olduğu gibi tamamen serbest bırakılmıştır. Bu durumda kenarın her noktasında gerilme kenar yükünün oradaki değerine eşittir. Bu ise gerilmeler cinsinden yazılan düzlem içi sınır koşullarıdır.

Plakların statik bürkulma probleminin en eski çözümünün 1891 de Bryan^{*} tarafından verildiğini kaynaklardan öğreniyoruz [12,14]. Bryan Kirchhoff plak varsayımlarını kullanmıştır. İzotrop malzemeden yapılmış dört kenarından serbestçe oturan ince dikdörtgen bir plağın karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı basıncı yükleri etkisindeki bürkulmasını incelemiştir. Yayılı yükün

* Bryan, G.H.,

"On the Stability of a Plane Plate under Thrusts in Its Own Plane with Application of the Buckling of the Sides of a Ship", Proc. London Math. Soc., Vol.22, (1891), s.54-67.

siddetinin bazı değerleri için düzlem konum kararsızdır. Bu değerlere burkulma yükleri, bunlara karşılık gelen düzlemden farklı denge konumlarına ise burkulma modları denir. Yük-sehim diyagramı, bu kritik yük değerlerinde çokdeğerli çözümlerin olması nedeniyle dallanma gösterir.

Değişik kenar yükleri etkisinde bulunan plakların statik burkulması şimdije kadar pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bazıları [7, 12, 14] ün kaynaklar kısmından elde edilebilir. [18 - 30] ise yakın yıllara ait bu konudaki bazı çalışmalardır. Bunlardan [18] de izotrop plaklar, [19 - 22] de ortotrop plaklar Kirchhoff varsayımlarına göre incelenmişlerdir. [23 - 25] de izotrop plaklar, [26 - 28] de ortotrop plaklar von Kármán varsayımlarına göre incelenmişlerdir. [29, 30] da ise kalın plakların burkulması ele alınmıştır. Bu çalışmalarda değişik kenar yükleri ve mesnet biçimleri için statik burkulma yükleri, dallanma noktaları (bifurcation), burkulma yükünden daha büyük yüklemeler için yük-sehim ilişkisi (postbuckling) incelenmiştir. Düzlem içi sınır koşulları çeşitli şekillerde göz önüne alınmıştır.

Düzlem içi yer değiştirmelerin hesaplanması sırasında kullanılan gerilme fonksiyonunun sağlayacağı diferansiyel denklemin von Kármán plağı halinde sehimlere bağlı olacağı yukarıda belirtildi. Sehimler için genellikle seri şeklinde çözümler seçilmekte ve herhangi bir varyasyon yönteminin [6, 31, 32] uygulanması sonucunda genelleştirilmiş koordinatlar denilen, seçilen serideki kat sayılarının sağlayacağı bir denklem sistemi elde edilmektedir. Statik burkulma halinde cebrik olan bu denklem sistemi çözümlerek burkulma incelenmektedir.

Statik kenar yükleri etkisinde bulunan plakların titresimleri şimdije kadar pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Bakkınız [3, 7]). Bu konuda son yıllarda yapılan bazı çalışmalar [33 - 54] den elde edilebilir. Bunların bir kısmında düzlem içi gerilmeler ve yer değiştirmeler bir gerilme fonksiyonu yardımıyla elde edilmektedir. Gerilme fonksiyonunun sağlayacağı diferansiyel denklemin elde edilmesinde [2] ise düzlem içi atalet kuvvetleri ihmali edildiği için böyle çalışmalarında düzlem içi atalet

kuvvetleri göz önüne alınmamıştır. Bu kuvvetlerin göz önüne alındığı çalışmalarında düzlem içi yer değiştirmeler ve gerilimler hareket denklemleri yardımıyla elde edilmektedir [37,38,40, 41,50].

Markus ve Nánási, kalın plak teorisini kullanmış ve çeşitli mesnetlenme biçimleri için dairesel plakların titreşimlerine düzlem içi atalet kuvvetlerinin etkilerini incelemiştir [37]. Aksu, sonlu farklar yöntemini kullanarak kirişlerle takviye edilmiş plakların titreşimlerini incelemiştir [38]. Bu çalışmada plak kenarlarının rıjıt ötelenebildiği hali ele almıştır. Raju, I.S., Rao, G.V. ve Raju, K.K., kenarları düzlem içi yer değiştirmeyen dikdörtgen plakta düzlem dışı tek mod almış ve titreşim frekansına düzlem içi atalet kuvvetlerinin etkisini incelemiştir [40]. Ayrıca bu etkinin, von Kármán plağında büyük sehimlerin etkisini azaltıcı yönde olduğunu plak kalınlığına bağlı olarak arttığını ve ihmal edilebilecek kadar az olduğunu göstermiştir. Düzlem içi yer değiştirmeye bileşenlerinin herbiri için düzlem dışı titreşimdeki aynı açısal frekansı ile titreşim yapan tek mod almış ve Rayleigh-Ritz yöntemini kullanmıştır. Bu çalışma ile ilgili bir yorum Prathap tarafından verilmiştir [41].

Vendhan, düzlem içi yer değiştirmeler için kuvvet serileri, düzlem dışı yer değiştirmeye için tek mod seçerek dikdörtgen, dairesel, eliptik ve üçgen plakların titreşim frekanslarını von Kármán plak varsayımlarına göre incelemiştir [50]. Aynı çalışmada kuvvet serilerindeki terim sayısına bağlı olarak Galerkin ve Rayleigh-Ritz yöntemleri ile elde ettiği sonuçları karşılaştırılmıştır. Burada Rayleigh-Ritz yöntemini plaqın varyasyon ilkelarından elde edilmiş bulunan hareket denklemlerine uygularken Galerkin yöntemini ilk iki hareket denkleminin üçüncüde yerine konulmasıyla elde edilen değiştirilmiş plak denklemlerine uygunmuştur. Terim sayısı arttırıldıkça Galerkin yöntemiyle bulunan düzlem dışı titreşim frekansı alttan, Rayleigh-Ritz yöntemiyle bulunan ise üstten gerçek değere yaklaşmaktadır. Bu durumu terim sayısına bağlı olarak iki ayrı varyasyon yönteminden elde edilen

sonuçların birbirine yakınsaması olarak nitelendirmiştir. Halbuki değiştirilmiş hareket denklemleri ancak gerçek yer değiştirmeye bileşenleri için esas hareket denklemlerine eşdeğer olur. Çünkü yaklaşık çözüm yerine konulduğunda ilk iki hareket denklemine ait eşitlikler kabaca doğru olup gerçek eşitlik olmayı̄ değistirilmiş denklemlerden ve esas denklemlerden bulunacak titreşim frekanslarının farklı olmasına yol açacaktır. Vendhan'ın çalışmasında [50] iki ayrı varyasyon yöntemi ile bulunan titreşim frekanslarının birinin alttan diğerinin üstten gerçek değere yakınsasının bu yöntemlerin özelliklerine değil de çözümde kullanılan farklı denklemlere bağlanması daha doğru bir açıklama olur. Çünkü enerji yöntemlerinde yakınsama daima üstten olup Galerkin ve Rayleigh-Ritz yöntemleri, [50] de belirtildiği kadar farklı yöntemler değildir [32]. Vendhan bu çalışmasında plak kenarlarının düzlem içi yer değiştirmelerinin a) sıfır, b) serbest, c) rıjıt ötelenme hallerini incelemiştir. Kenar yükleri olmadığı için b halinde kenarlardaki gerilmeler sıfır olmalıdır. Bu sınır koşulu yaklaşık olarak kenarlardaki ortalama gerilmenin sıfır olması şeklinde sağlanmıştır. Düzlem içi atalet kuvvetlerinin titreşim frekansı üzerine doğrusal olmayan etkisinin yumuşayan yay biçiminde olduğunu ve sehimlerin çok büyük olduğu hallerde ihmali edilebileceğini göstermiştir.

Düzlem içi atalet kuvvetlerinin ihmali edildiği çalışmalar arasında [34, 42 - 44, 47 - 49, 51, 52] plak kenarlarının düzlem içi yer değiştirmeleri bakımından ilgi çekici olanlardır. [39] ise büyük sehimlerin titreşimler üzerine etkisinin incelendiği ilk çalışma olması bakımından önem taşır.

Dinamik kenar yükleri etkisindeki dikdörtgen plakların davranışları ile ilgili yakın yıllara ait elde edilebilen çalışmalar [55 - 69] da verilmiştir. Bunlardan [61 - 69] da düzlem dışı sonlu yer değiştirmeler esas alınmıştır.

Zajaczkowski ve Yamada, Karşılıklı iki kenarı mafsallı diğer kenarlarından biri serbest diğeri ankastre olan izotrop dikdörtgen plakta serbest ve ankastre kenarların birbirinden uzaklığının harmonik olarak değişmesi halinde plağın kararlılığını incele-

miştir [56]. Mortimer, Chou ve Rodini levhanın bir kenarına düzlem içi doğrultuda bir darbenin etki etmesi halini incelemiştir [59]. Darbe, diğer bir dikdörtgen levhanın bir kenarının çarpması ile uygulanmış olup darbenin zamanla değişimi dikdörtgen olarak alınmıştır. Yer değiştirmelerin sadece yük doğrultusunda olduğu düşünülmüştür; ve problem tek doğrultuda dalga denklemine indirgenmiştir. Tylikowski, zamanla değişken basınç gerilmeleri etkisindeki plakta Liapunov teorisine [17] göre kararlılığı incelemiştir [66]. Ekstrom, kenarları kayıcı mafsallı olarak mesnetlenmiş önsehimli ortotrop dikdörtgen plağın bir doğrultuda zamanla doğrusal olarak artan basınç yükleri etkisindeki davranışını incelemiştir [67]. Benveniste ve Aboudi, sonsuz uzun plak şeritlerinin yan yana yapıştırılmasıyla elde edilen tabakalı ortamda şeritlerin düzlem içi doğrultuda kenarlarına dik olarak uygulanan düzgün yayılı darbe etkisindeki davranışını incelemiştir [68]. Murthy ve Alwar, önsehimli sandviç plakta düzlem dışı düzgün yayılı basınç yüklerinin statik ve dinamik olması hallerini karşılaştırmıştır. Düzlem içi kenar yüklerinden hareket edilmediği için bu çalışma bizim ele aldığımız anladındaki dinamik burkulma değildir.

Kaynaklarda verilen dinamik kenar yükleri etkisindeki plaklar konusundaki diğer çalışmalarda kenar yükleri zamanla harmonik olarak değişmektedir. Böyle yükler etkisinde plakların kararlılığı konusunda ilk çalışmaların 1935 lerde yapıldığını [15] den öğreniyoruz*. Von Kármán plağında aynı çalışmaların başlaması ise [39] un yayınlandığı yıl olan 1956 yi beklemiştir [15].

* Einaudi, R.

Sulle Configurazioni di Equilibrio Instabile di una Piastra Sollecitata da Sforzi Tangenziali Pulsanti, Atti Accad. Gioenia 1, 1935-1936, Memoria XX, 1-5.

Bodner, V.A.

The Stability of Plates Subjected to Longitudinal Periodic Forces Prikl. Mat. i Mekhan. (N.S.), 1938, 2, 87-104.

Khalilov, Z.I.

The Dynamic Stability of a Plate under the Action of Periodic Longitudinal Forces, Tr. Azerb. Gos. Univ., Ser., Mar., 1942, 1, 28-32.

Plak kenarlarının rijit ötelenebildiği hal için von Kármán plağıının kararlılığı [15,61,62] de incelenmiştir. Kisliakov, dört kenarı kayıcı olarak mafsallanmış plakta zamanla harmonik olarak değişen düzgün yayılı basınç yüklerinin şiddetini, burkulma yüküne göre çok küçük almış ve perturbasyon yöntemini kullanmıştır [63]. Bu çözüm yönteminin büyük sehimler halinde ortaya çıkan vuruların (beat) varlığının araştırılabilmesi gibi bazı ıstınlıklarının olduğu belirtilmiştir. Bolotin, bu yöntemi küçük parametre yöntemi diye adlandırmaktadır [15]. Perturbasyon yönteminin uygulandığı diğer bir çalışma Shivamoggi tarafından yapılmıştır [64]. Yazar çalışmasında dört kenarı mafsallı plakta bir doğrultuda düzgün yayılı kenar yüklerini göz önüne almıştır. Burada Kirchhoff plağı haline ait titreşim modlarını kullanmış olup von Kármán plağı halinde ortaya çıkan modlar arasındaki etkileşimi ihmali etmiştir. Bu çalışma ile ilgili yorum Rajappa tarafından verilmiştir [65].

Dinamik kenar yükleri etkisindeki plaklarda düzlem içi atalet kuvvetlerinin göz önüne alındığı çalışmalar [15,59,61,62,68] dir. Bunlardan Somerset ve Evan-Iwanowski [61,62] ile Bolotin [15], plak kütlesinin düzlem içi atalet kuvvetlerinin değil, plağın bir kenarında bulunan ve düzlem içi kenar yüklerinin uygulanmasına yarayan rijit yükleme kırısının hareketi sırasında doğan atalet kuvvetlerinin etkisini incelemiştir.

Bu çalışmada ortotropi eksenleri kenarlara paralel olan ince ortotrop dikdörtgen plakların düzlem içi dinamik kenar yükleri etkisindeki davranışları incelenmiştir. Plağın dört kenarı ankastre, dört kenarı mafsallı ve karşılıklı iki kenarı ankastre diğer iki kenarı mafsallı olması halleri göz önüne alınmış olup plak kenarları düzlem içi doğrultularda serbestçe kayabilemektedir. Plağın şekil değiştirmeksızın bu doğrultularda rijit hareket yapabileceği de dikkate alınmıştır. Bu rijit harekete ait atalet kuvvetleri diferansiyel denklemlere girmektedir. Plak başlangıçta statik kenar yükleri etkisinde bulunmaktadır. Bu halde denge konumunda iken üzerine dinamik kenar yükleri eklenmektedir. Dinamik kenar yüklerinin zamanla değişimi için a) basamak, b) darbe, c) rampa,

d) harmonik fonksiyonları göz önüne alınmıştır. Kenarlar boyunca yük dağılımı için düzgün yayılı normal gerilmeler, düzgün yayılı kayma gerilmeleri, bir doğrultuda trapez yayılı normal gerilmeler veya bunların herhangi bir doğrusal toplamı düşünülmüştür.

Düzlem içi ve düzlem dışı yer değiştirmeler içiniki doğrultuda Fourier serileri seçilmektedir (statik burkulmanın incelendiği statik kenar yükleri halinde bu serilerdeki katsayılar zamandan bağımsız değişmezlerdir) [70]. Gerilmeler cinsinden yazılan sınır koşullarının saflatılması sırasında Fourier serilerindeki katsayılar (genelleştirilmiş koordinatlar) üzerine bazı kısıtlamalar gelmektedir (bu kısıtlayıcı denklemler statik burkulmanın incelenmesinde zamandan bağımsızdır). Bu çalışmada varyasyon yöntemlerinden biri olan Lagrange çarpanları yöntemi [32] kullanılmış olup buhun sonucu olarak zamana bağlı bir diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir (bu diferansiyel denklem sistemi statik burkulmanın incelenmesi halinde zamandan bağımsız cebrik bir denklem sistemi halini alır). Bu diferansiyel denklem sistemi von Kármán plağı halinde düzlem dışı genelleştirilmiş koordinatlara doğrusal olmayan terimlerle de bağlıdır. Bu diferansiyel denklem sistemi, düzlem içi genelleştirilmiş koordinatların hesaplanacağı zorlanmış titresim diferansiyel denklem sistemi ve düzlem dışı genelleştirilmiş koordinatların sağlayacağı plağın parametrik olarak uyarılmış diferansiyel denklem sisteminden oluşmaktadır. Aralarında etkileşim bulunan bu iki diferansiyel denklem sisteminin probleme ait başlangıç koşulları altında birlikte çözülmesi sonucunda plağın dinamik davranışının incelenmiş olup düzlem içi atalet kuvvetleri de göz önüne alınmıştır. Bir başlangıç değer problemi olan bu problemin çözümünde adım adım integrasyon yöntemlerinden olan Newmark yöntemi kullanılmıştır [71 - 77].

Bilindiği gibi burkulma yüklerinin ve titresim frekanslarının hesaplanması bir özdeğer problemine indirgenmektedir. Bunların hesaplanması [78] deki bilgisayar programlarından faydalanılmıştır.

Problemin niteliği gereği çözüm sayısal hesaplarla elde edildiğinden geniş bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Buna ait akış diyagramı tezin sonunda verilmiştir. Bu bilgisayar programı yardımıyla levha titreşimleri, plakın statik burkulması, burkulma sonrasında plak davranışları, statik kenar yükleri etkisinde plak titreşimleri, titreşim modları ve frekansların genlikle değişimi, dinamik kenar yükleri etkisinde önsehimli ve önsehimsiz plakların davranışları amaçlanmıştır.

BÖLÜM 2

GENEL DENKLEMLER VE VON KÄRMAN PLAK TEORİSİ

2.1. PROBLEMİN TANIMI

2.1.1. Koordinat Takımı ve İşaret Kuralı

Bu çalışmada ortotrop dikdörtgen malzemeden yapılmış ince dikdörtgen plaklar incelenmiştir. Şekil 2.1 de gösterildiği gibi plaqın kenar uzunlukları a ve b dir. Kalınlığı h dir. Plak kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olan ortalama yüzey çeşitli kusurlardan dolayı düzlem olmayabilir. Plak gerilmesiz iken ortalama yüzeyin

$$W_o = W_o(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

denklemi plaktaki önsehimi (ön yer değiştirmeye) gösterir. Plak geometrisini belirlemek için bu yüzey esas alınırsa bir P noktasının $t=0$ anında koordinatları

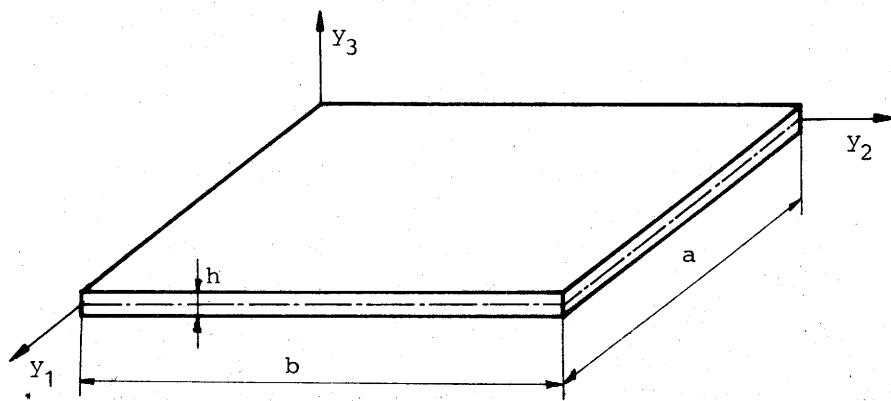
$$y_\alpha(x_k) = x_\alpha - W_{o,\alpha} x_3, \quad y_3(x_k) = W_o + x_3 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir* (Şekil 2.2). Burada x_3 , P nin ortalama yüzeyden ölçülen uzaklığıdır. Plak denklemleri eğrisel olan x_k koordinatlarına göre ifade edilecektir. x_k lar maddesel (veya Lagrange) koordinatlardır.

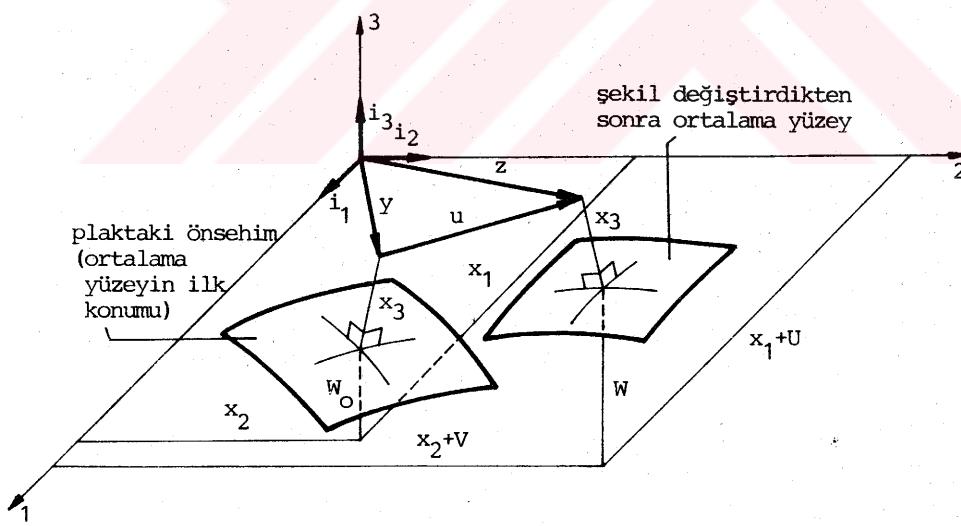
* 1) Aksi söylenmedikçe Grek indisleri 1 ve 2 değerlerini, Romen indisleri 1, 2, 3 değerlerini alırlar.

2) $|W_{o,\alpha}| < 1$ varsayılmıştır.

3) $()_{,k} = \partial() / \partial x_k$ gösterimi kullanılmıştır.



Şekil 2.1: Plak boyutları ve plağın başlangıç konumu



Şekil 2.2: PLAĞIN BİR P NOKTASININ YER DEĞİŞTIRMEDEN ÖNCESİ VE SONRAKİ KONUMU

2.1.2. Yer Değiştirmeler

Plağın bir P noktasının yer değiştirme vektörü, i_k lar karteziyen baz vektörleri göstermek üzere

$$u = u_k(x_m, t) i_k \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir*. Ortalama yüzeydeki bir noktanın yer değiştirme vektörü bileşenleri,

$$U = U(x_\alpha, t) = u_1(x_1, x_2, 0, t)$$

$$V = V(x_\alpha, t) = u_2(x_1, x_2, 0, t) \quad (2.4)$$

$$W - W_o = W(x_\alpha, t) - W_o(x_\alpha) = u_3(x_1, x_2, 0, t)$$

sadece x_1 , x_2 ve t nin fonksiyonudur. U , V düzlem içi yer değiştirme bileşenleri, $W - W_o$ ise düzlem dışı doğrultudaki yer değiştirme bileşenidir. Herhangi bir t anındaki W sehiminden W_o önsehimi çıkarılarak elde edilir. Yani düzlem dışı W yer değiştirmesi içinde W_o ön yer değiştirmesi de vardır.

2.1.3. Varsayımlar

Bu çalışmada von Kármán plak teorisi esas alınmıştır. Bu teori aşağıdaki ilk beş varsayıma dayanır [2].

V.1. Plak incedir. h kalınlığı tipik plak boyutundan çok küçükdür. Yani $h \ll a, b$ dir.

V.2. Düzlem içi U, V yer değiştirmeleri sonsuz küçük, düzlem dışı W sehimi ise h kalınlığı ile aynı mertebedendir:

$$|U|, |V| \ll h ; |W| = O(h) ; |W| \ll a, b$$

V.3. $W_{,\alpha}$ eğimleri her yerde küçüktür: $|W_{,\alpha}| \ll 1$

V.4. Bütün şekil değiştirme bileşenleri küçüktür, Hooke kuralları geçerlidir.

V.5. Kirchhoff varsayımları geçerlidir. Yani başlangıçta plak ortalamaya yüzeyine dik bir çizgi üzerinde bulunan noktalar,

*1) Bir terim içinde tekrarlanan indis üzerinde toplama uyluşımı kullanılmıştır.

2) Kalın yazılmış harfler vektörel büyüklükleri gösterir.

Şekil değişiminden sonra da bu yüzeyin yeni konumuna dik bir çizgi üzerinde kalırlar. Ve ortalama yüzeye paralel yüzelerde gerilmeler ihmali edilir.

v.6. h plak kalınlığı sabittir.

v.7. Plak ortotrop malzemeden yapılmıştır. Ortotropi eksenleri plak kenarlarına paraleldir.

v.8. Kütle kuvvetleri yoktur.

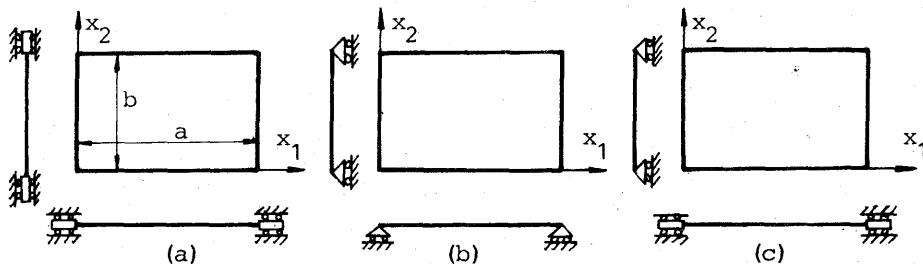
v.9. Plak yükleri $x_3 = -h/2$ ve $x_3 = +h/2$ alt ve üst yüzeylerinde sıfırıdır. Plak kenarlarında moment yüklemesi yoktur.

v.10. Plak kenarlarında W_0 önsehimi ve düzlem dışı W yer değiştirmesi sıfırdır.

2.1.4. Plak Mesnetleri

Şekil 2.3 de bu çalışmada incelenen değişik mesnet biçimleri gösterilmiştir. Plak kenarı etrafında plaqın serbestçe dönebildiği mesnetlere mafsallı mesnet denir. Ankastre mesnette plak bu kenar etrafında dönemeyecek şekilde mesnetlendirilmiştir. Şekil 2.3 de gösterilen mesnetler düzlem içi yer değiştirmelere göre kayıcı mesnetlerdir. Yani, plak kenarının düzlem içi yer değiştirmeleri genel tutulmuştur. Eğer sıfır alınırsa sabit kenarlar durumu elde edilir. Bu çalışmada;

- dört kenarı kayıcı ankastre,
- dört kenarı kayıcı mafsallı,
- karşılıklı iki kenarı kayıcı ankastre diğer iki kenarı kayıcı mafsallı olarak mesnetlenmiş plaklar gözönüne alınmıştır.

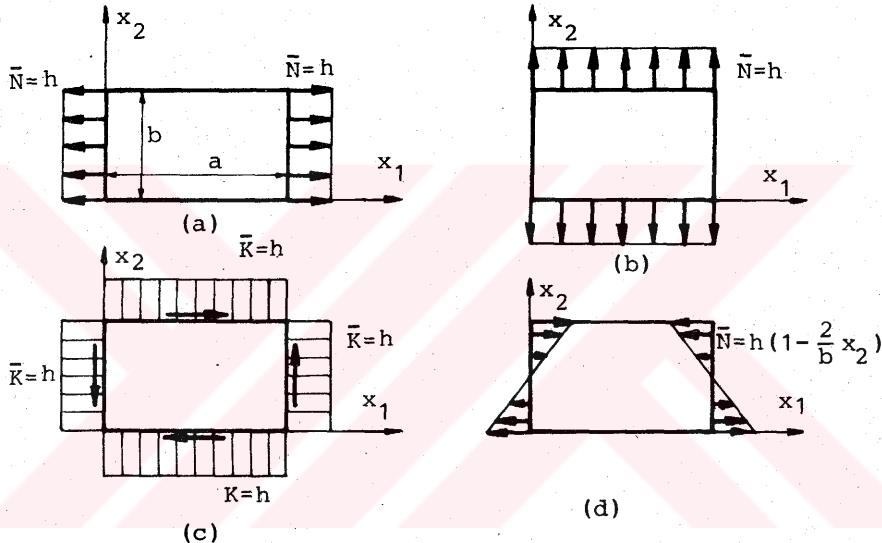


Şekil 2.3: Plak mesnetleri

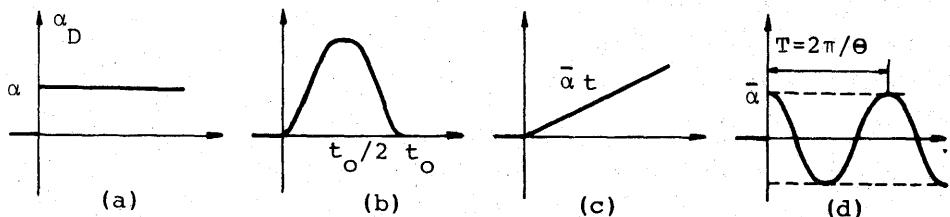
2.1.5. Dinamik Kenar Yükleri

V.9. varsayımdan anlaşılacağı üzere bu çalışmada gözönüne alınan yükler, ortalama düzleme göre simetrik olarak plak kenarlarından etkiyen yüklerdir. Bu yükler, Şekil 2.4 deki kenar yüklemelerinin (F_i , $i=a,b,c,d$) herhangi bir doğrusal toplamı olarak düşünülmüştür. Ve

$$F = [\alpha_S s_i + \alpha_D(t) d_i] F_i \quad (2.5)$$



Şekil-2.4. Plak kenar yükleri, yukarıda görülen dört ayrı yüklemenin (2.5) ifadeleri ile hesaplanan doğrusal bir toplamıdır.



Şekil-2.5. $\alpha_D(t)$ fonksiyonu: a) Basamak, b) Darbe, c) Rampa, d) Harmonik fonksiyon. Burada darbe fonksiyonu $(0, t_0)$ aralığında $\alpha_D(t) = (30\bar{\alpha}/t_0) [(1-t/t_0)t/t_0]^2$ olarak seçilmiştir.

biçiminde seçilmiş olup statik ve dinamik iki kısma ayrılabilmektedir. Böylece kenar yüklerinin statik ve dinamik kısımları için

$$F^{(S)} = s_i F_i, \quad F^{(D)} = d_i F_i \quad (2.6)$$

şeklinde iki ayrı doğrusal toplam düşünülmüştür*. s_i , d_i katsayıları ve Şekil 2.4 de gösterilen yüklemeler zamana bağlı değildir. $\alpha_D(t)$ fonksiyonu zamana bağlıdır (Şekil 2.5). (2.6) tanımları kullanılırsa (2.5) ifadesi

$$F = \alpha_S F^{(S)} + \alpha_D(t) F^{(D)} \quad (2.7)$$

yazılabilir. Burada ilk terim statik yükü, ikincisi dinamik yükü gösterir.

Daha sonra F kenar kuvveti kenara teğet ve dik iki bileşene ayrılarak teğet olan \bar{K} ile dik olanı \bar{N} ile gösterilecektir (Şekil 2.6 ve 2.7 ya bakınız).

2.2. VİRTÜEL İŞ İLKESİ

2.2.1. Plağın Şekil Değiştirmiş Konumu

Plağın yer değiştirdikten sonraki koordinatları, von Kármán plak varsayımları sunucu

$$\begin{aligned} z_1(x_k, t) &= x_1 + U - W, \\ z_2(x_k, t) &= x_2 + V - W, \\ z_3(x_k, t) &= W + x_3 \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilebilir (Şekil 2.2). (2.8) ifadeleri, z_k ve x_k arasında bir dönüşümdür. Von Kármán plak varsayımları nedeni ile birebirdir. Eğrisel z_k koordinatlarında sonsuz küçük dz artım vektörünün ds uzunluğu x_k lar cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$(ds)^2 = dz \cdot dz = g_{ij} dx_i dx_j \quad (2.9)$$

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j, \quad g_k = z_{,k} = z_{m,k} \quad (2.10)$$

Burada g_{ij} kovariant ölçüm tansörü bileşenleridir [1]. Plakta (2.8), (2.9) ve (2.10) dan g_{ij} bileşenleri

* Bir terimin kuvvetleri ile karışmaması için üst indisler parantez içinde yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1+2U+W^2, 1-2W, 11x_3 \\ g_{22} &= 1+2V+W^2, 2-2W, 22x_3 \\ g_{12} &= g_{21} = U, 2+V, 1+W, 1W, 2-2W, 12x_3 \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak hesaplanır. Von Kármán plak varsayımları nedeniyle bu bileşenler

$$g_{ij} \approx \delta_{ij} \quad (2.12)$$

olarak alınabilir. Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır. Yani $i=j$ için birdir. $i \neq j$ için sıfırdır. (2.12) bağıntıları, vektör ve tansörlerin, kovariant, kontravariant ve fiziksel bileşenlerinin çok farklılığını gösterir.

2.2.2. Potansiyel ve Kinetik Enerji

Dış yükler etkisinde bulunan elastik bir cisimde bir U potansiyel enerjisi ve cismin hareketi nedeniyle de bir T kinetik enerjisi vardır. U ve T ,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V t_{ij} e_{ij} dv \quad (2.13)$$

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{z} \cdot \dot{z} dv = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{z}_k \dot{z}_k dv \quad (2.14)$$

olarak ifade edilirler*. Burada dv cismin hacim elemanını, ρ kütle yoğunluğunu, t_{ij} gerilme tansörü bileşenlerini, e_{ij} şekil değiştirmeye tansörü bileşenlerini göstermektedir. e_{ij} ler maddesel koordinatlarda

$$e_{ij}(x_k, t) = \frac{1}{2} [g_{ij}(x_k, t) - g_{ij}(x_k, 0)] \quad (2.15)$$

şeklindedir [1]. (2.11), (2.15) de konulursa plak için

$$\begin{aligned} e_{11} &= U, 1 + \frac{1}{2} W^2, 1 - \frac{1}{2} W_0^2, 1 - (W, 11 - W_0, 11)x_3 \\ e_{22} &= V, 2 + \frac{1}{2} W^2, 2 - \frac{1}{2} W_0^2, 2 - (W, 22 - W_0, 22)x_3 \\ e_{12} &= e_{21} = \frac{1}{2} [U, 2 + V, 1 + W, 1W, 2 - W_0, 1W, 2 - 2(W - W_0), 12x_3] \\ e_{13} &= e_{31} = e_{23} = e_{32} = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Şekil değiştirmeye yer değiştirmeye bağıntıları elde edilir.

* $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial t$ gösterimi kullanılmıştır.

t_{ij} gerilme bileşenleri, e_{ij} lerin fonksiyonudur. Lineer elastik malzemelerde a_{ijmn} sabitleri kullanılırsa

$$t_{ij} = a_{ijmn} e_{mn} \quad (2.17)$$

şeklinde elde edilir. En genel halde 21 tanesi bağımsız olan a_{ijmn} sabitleri, malzemenin ortotrop olması halinde; eksen takımı ortotropi eksenleriyle çakıştırılırsa 9 bağımsız sabit kalır. Bu çalışmada Kirchhoff plak varsayımları geçerli olduğu için bu 9 sabitten aşağıdaki

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{12} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\nu_{12} E_{22} = \nu_{21} E_{11}$$

gerilme şekil değiştirme bağıntılarında geçen dört bağımsız sabit kullanılmaktadır [4].

2.2.3. Virtüel Yer Değiştirmeler

Cismin geometrik sınır koşullarına uygun sonsuz küçük herhangi yer değiştirmelerine virtüel yer değiştirmeler denir. Plağın ortalaması yüzeyinin δU , δV , δW ile gösterilen virtüel yer değiştirmelerden dolayı herhangi bir noktasında (2.8) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \delta z_1 = \delta U - x_3 \delta w_{,1} \\ \delta u_2 &= \delta z_2 = \delta V - x_3 \delta w_{,2} \\ \delta u_3 &= \delta z_3 = \delta W \end{aligned} \quad (2.19)$$

olarak hesaplanabilen virtüel yer değiştirmeler meydana gelir.

Eğer cismin $[t_a, t_b]$ zaman aralığındaki davranışını incelenmekte ise virtüel yer değiştirmeler, t_a ve t_b anlarında

$$\delta u_k(x_m, t_a) = \delta u_k(x_m, t_b) = 0 \quad (2.20)$$

şeklindedir.

2.2.4. Virtüel iş ilkesi

Cismin hareketi esnasında bir t anındaki yer değiştirmiş konumunda atalet kuvvetleri de katılmak üzere üzerine etkiyen iç ve dış kuvvetler denge halindedir. Virtüel yer değiştirmelerde bu kuvvetlerin yapacakları işler eşittir. Böylece tanımlanan virtüel iş ilkesi dinamik problemlerde

$$\int_{t_a}^{t_b} [\delta T - \delta U + \iint_P \delta z dv + \iint_A F \cdot \delta z dA] dt = 0 \quad (2.21)$$

bağıntısı ile ifade edilir[6]. Burada δT ve δU , sırayla kinetik ve potansiyel enerjilerdeki değişimleri gösterir. A cismin yüzey alanıdır. P , birim hacma etkiyen kütle kuvveti bu çalışmada sıfır alınmaktadır (V.8 varsayıımı). F , cismin yüzeyinde birim alana etkiyen yüzey kuvvetidir.

2.3. PLAK DENKLEMLERİ

2.3.1. Bileşke Gerilme ve Momentler

(2.18) bağıntılarından gerilmeler

$$\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{22} \\ t_{12} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \gamma & v & 0 \\ v & \frac{1}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

olarak elde edilir. Burada v, γ, E, κ

$$v = \sqrt{v_{12} v_{21}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}, \quad E = \frac{\sqrt{E_{11} E_{22}}}{1-v^2}, \quad \kappa = \frac{G_{12}}{E} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $t_{\alpha\beta}$ gerilmeleri ve x_3 ile çarpımları h plak kalınlığı boyunca integre edilirse sırayla $N_{\alpha\beta}$ membran kuvvetleri ve $M_{\alpha\beta}$ plak eğilme momentleri elde edilir:

$$N_{\alpha\beta}(x_\alpha, t) = \int_{-h/2}^{+h/2} t_{\alpha\beta}(x_k, t) dx_3$$

$$M_{\alpha\beta}(x_\alpha, t) = \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 t_{\alpha\beta}(x_k, t) dx_3 \quad (2.24)$$

Bu büyüklükler x_3 koordinatından bağımsızdır.

(2.16) ve (2.22) bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned} N_{11} &= Eh \left[\gamma (U_{,1} + \frac{1}{2} W_{,1}^2 - \frac{1}{2} W_{0,1}^2) + v (V_{,2} + \frac{1}{2} W_{,2}^2 - \frac{1}{2} W_{0,2}^2) \right] \\ N_{22} &= Eh \left[v (U_{,1} + \frac{1}{2} W_{,1}^2 - \frac{1}{2} W_{0,1}^2) + \frac{1}{\gamma} (V_{,2} + \frac{1}{2} W_{,2}^2 - \frac{1}{2} W_{0,2}^2) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$N_{12} = Eh \kappa (U_{,2} + V_{,1} + W_{,1} W_{,2} - W_{0,1} W_{0,2})$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= - \frac{Eh^3}{12} [\gamma (W_{,11} - W_{0,11}) + v (W_{,22} - W_{0,22})] \\ M_{22} &= - \frac{Eh^3}{12} [v (W_{,11} - W_{0,11}) + \frac{1}{\gamma} (W_{,22} - W_{0,22})] \\ M_{12} &= - \frac{Eh^3}{6} \kappa (W_{,12} - W_{0,12}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

olarak elde edilir. (2.22) de verilen $t_{\alpha\beta}$ gerilmeleri bu büyüklikler cinsinden

$$t_{\alpha\beta}(x_k, t) = \frac{1}{h} N_{\alpha\beta}(x_\alpha, t) + \frac{12}{h^3} x_3 M_{\alpha\beta}(x_\alpha, t) \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2.3.2. Virtüel iş ilkesinin Plakta Uygulanması

(2.21) virtüel iş ilkesi plakta uygulanarak plak denklemleri elde edilecektir. Virtüel yer değiştirmeler esnasında kinetik enerji-deki δT değişiminin $[t_a, t_b]$ zaman aralığı boyunca integrali; (2.8), (2.19) ve (2.20) de kullanılır ve parça parça integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} \delta T dt &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \iiint_V \rho \delta (\dot{z}_k \dot{z}_k) dv dt \\ &= \iiint_V \rho \dot{z}_k \delta z_k dv \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \iiint_V \rho \ddot{z}_k \delta z_k dv dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \iint_{\Omega} \rho h [\ddot{U} \delta U + \ddot{V} \delta V + \ddot{W} \delta W + \frac{h^2}{12} (\ddot{W}_{,1} \delta W_{,1} + \ddot{W}_{,2} \delta W_{,2})] d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.28)$$

olarak hesaplanır [6]. Bu çalışmada Ω bölgesi

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (2.29)$$

$$d\Omega = dx_1 dx_2$$

şeklinde dikdörtgen bir bölgedir (Şekil 2.6).

Bu bölgenin $\partial\Omega$ sınırının birim dış normal vektörü ve birim teğet vektörü sırayla

$$n = n_1 i_1 + n_2 i_2, s = -n_2 i_1 + n_1 i_2 \quad (2.30)$$

dir (Şekil 2.6 b). Burada n_1 ve n_2 bileşenleri ve ds çizgi elemeni; her kenar için aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{lll} n_1 = -1 & n_2 = 0 & ds = dx_2 \dots x_1 = 0 \text{ kenarı} \\ n_1 = 0 & n_2 = -1 & ds = dx_1 \dots x_2 = 0 \text{ kenarı} \\ n_1 = +1 & n_2 = 0 & ds = dx_2 \dots x_1 = a \text{ kenarı} \\ n_1 = 0 & n_2 = +1 & ds = dx_1 \dots x_2 = b \text{ kenarı} \end{array} \quad (2.31)$$

Normal ve teğet doğrultularına göre türevler

$$\begin{aligned} (\cdot, n) &= n_1 (\cdot, 1) + n_2 (\cdot, 2) \\ (\cdot, s) &= -n_2 (\cdot, 1) + n_1 (\cdot, 2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklindedir. (2.16) ve (2.27) ifadeleri (2.13) de yerine konulur ve virtüel yer değiştirmeler esnasında iç kuvvetlerin yaptığı iş hesaplanırsa

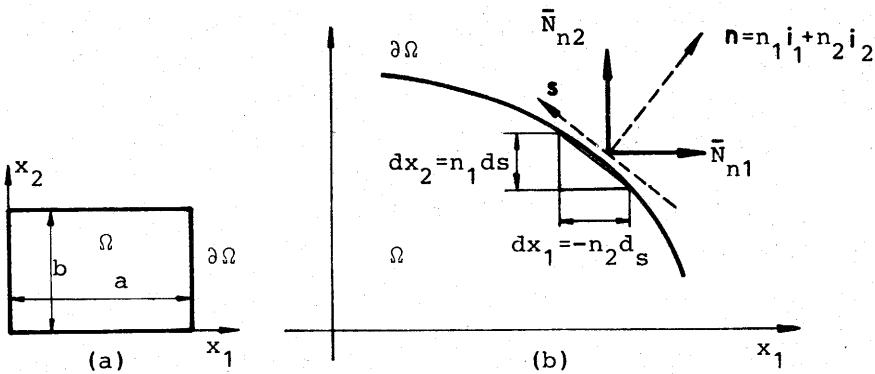
$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint_V t_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} dv \\ &= \iint_{\Omega} \{ N_{11} [\delta U_{,1} + W_{,1} \delta W_{,1}] + N_{22} [\delta V_{,2} + W_{,2} \delta W_{,2}] \\ &\quad + N_{12} [\delta U_{,2} + \delta V_{,1} + W_{,1} \delta W_{,2} + W_{,2} \delta W_{,1}] \\ &\quad - (M_{11} \delta W_{,11} + 2M_{12} \delta W_{,12} + M_{22} \delta W_{,22}) \} d\Omega \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde edilir.

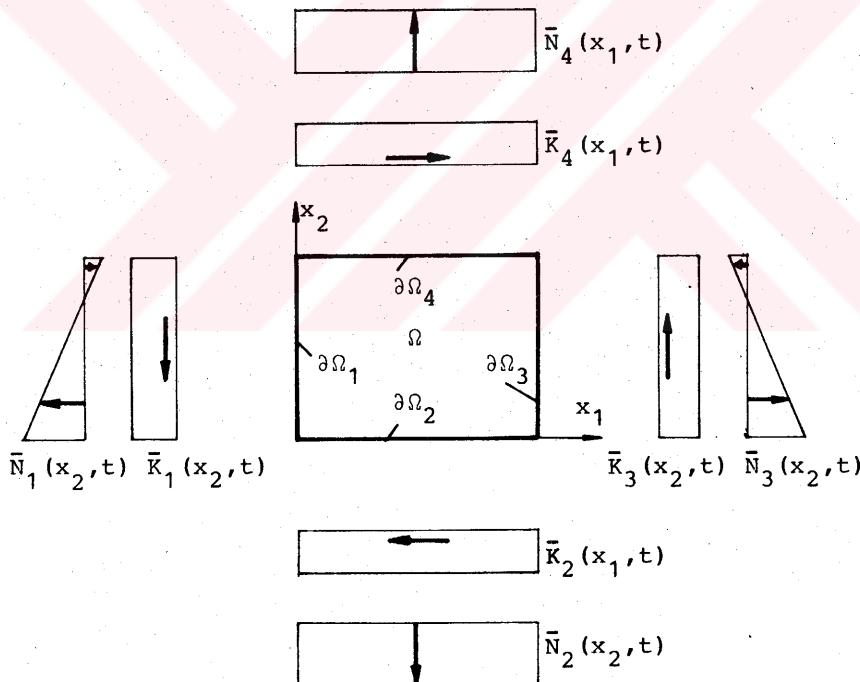
Plağın alt ve üst yüzeyleri yüksüzdür. Kenar yüzeylerine ise

$$F_k i_k, \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 F_\alpha dx_3 = 0 \quad (2.34)$$

yükleri etkidiği kabul edilmiştir (V.9 varsayıımı).



Sekil-2.6. a) Ω bölgesi ve $\partial\Omega$ sınırı
b) $\partial\Omega$ sınırında ds çizgi elemanı, birim dış normal ve tejet vektörleri, kenar yükü bileşenleri.



Sekil-2.7. Kenar yükleri zamanla değişkendir.

$\bar{N}_{n\alpha}$, $\bar{M}_{n\alpha}$, \bar{V}_3 ; bu kuvvetlerin bileşenlerinin

$$\begin{aligned}\bar{N}_{n\alpha} &= \int_{-h/2}^{+h/2} F_\alpha dx_3, \\ \bar{M}_{n\alpha} &= \int_{-h/2}^{+h/2} x_3 F_\beta dx_3 = 0, \quad \alpha \neq \beta, \\ \bar{V}_3 &= \int_{-h/2}^{+h/2} F_3 dx_3\end{aligned}\tag{2.35}$$

şeklindeki integralleri olarak tanımlanırsa dış kuvvetlerin virtüel işi

$$\iint_A F \cdot \delta z dA = \int_{\partial\Omega} (\bar{N}_{n1} \delta U + \bar{N}_{n2} \delta V + \bar{V}_3 \delta W + M_{n1} \delta W_{,1} + M_{n2} \delta W_{,2}) ds \tag{2.36}$$

olarak elde edilir. Burada ds ; $\partial\Omega$ sınırı boyunca çizgi elemanıdır. $\bar{N}_{n\alpha}$, kalınlık boyunca bileşke kenar yükünün i_α yönündeki bileşenidir. Bunlar plaqin $\partial\Omega$ kenarlarındaki \bar{N}_k , \bar{K}_k ($k=1, 2, 3, 4$) lar cinsinden

$$\begin{aligned}\bar{N}_{n1} &= -\bar{N}_1 & \bar{N}_{n2} &= -\bar{K}_1 & \dots \partial\Omega_1 \text{ de} \\ \bar{N}_{n1} &= -\bar{K}_2 & \bar{N}_{n2} &= -\bar{N}_2 & \dots \partial\Omega_2 \text{ de} \\ \bar{N}_{n1} &= +\bar{N}_3 & \bar{N}_{n2} &= +\bar{K}_3 & \dots \partial\Omega_3 \text{ de} \\ \bar{N}_{n1} &= +\bar{K}_4 & \bar{N}_{n2} &= +\bar{N}_4 & \dots \partial\Omega_4 \text{ de}\end{aligned}\tag{2.37}$$

olarak ifade edilebilir (Şekil 2.6 ve 2.7).

(2.21) virtüel iş bağıntısında yer alan terimler, (2.28), (2.33) ve (2.36) da hesaplanmıştır. Ω bölgesinde hesaplanacak bu integralerde görülen $\delta U_{,\alpha}$; $\delta V_{,\alpha}$; $\delta W_{,\alpha}$; $\delta W_{,\alpha\beta}$ lar; parça parça integrasyonlar yardımıyla δU , δV , δW haline getirilebilir. Sonuç olarak (2.21) virtüel iş bağıntısı

$$\begin{aligned}t_a^b &\{ \iint_{\Omega} [L_1(U, V, W) \delta U + L_2(U, V, W) \delta V + L_3(U, V, W) \delta W] d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} [B_1(U, V, W) \delta U + B_2(U, V, W) \delta V + B_3(U, V, W) \delta W \\ &+ B_4(W) \delta W_{,n}] ds \} dt = 0\end{aligned}\tag{2.38}$$

Şeklini alır. Burada geçen L_k ; ($k=1,2,3$) ve B_k ; ($k=1,2,3,4$) dife-
ransiyel operatörleri

$$\begin{aligned} L_1(U,V,W) &= N_{11,1} + N_{12,2} - \rho h \ddot{U} \\ L_2(U,V,W) &= N_{12,1} + N_{22,2} - \rho h \ddot{V} \\ L_3(U,V,W) &= M_{11,11} + 2M_{12,12} + M_{22,22} \\ &\quad + N_{11W,11} + 2N_{12W,12} + N_{22W,22} \\ &\quad + (N_{11,1} + N_{12,2})W,1 + (N_{12,1} + N_{22,2})W,2 \\ &\quad - \rho h \left[\ddot{W} - \frac{h^2}{12} (\ddot{W}_{,11} + \ddot{W}_{,22}) \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$B_1(U,V,W) = N_{n1} - \bar{N}_{n1}$$

$$B_2(U,V,W) = N_{n2} - \bar{N}_{n2}$$

$$B_3(U,V,W) = V_3 + N_{n1W,1} + N_{n2W,2} + M_{ns,s} - \bar{V}_3 - \bar{M}_{ns,s} - W_{,n}$$

$$B_4(W) = M_{nn} - \bar{M}_{nn}$$

olarak tanımlanmıştır. $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$, \bar{V}_3 , $\bar{N}_{n\alpha}$, $\bar{M}_{n\alpha}$; (2.25), (2.27)
ve (2.35) de ifade edilmiştir. $N_{n\alpha}$, M_{nn} , \bar{M}_{nn} , M_{ns} , \bar{M}_{ns} ise

$$\begin{aligned} N_{n1} &= n_1 N_{11} + n_2 N_{12} \\ N_{n2} &= n_1 N_{12} + n_2 N_{22} \\ M_{nn} &= n_1^2 M_{11} + 2n_1 n_2 M_{12} + n_2^2 M_{22} \\ \bar{M}_{nn} &= n_1 \bar{M}_{n1} + n_2 \bar{M}_{n2} \\ M_{ns} &= -n_1 n_2 (M_{11} - M_{22}) + (n_1^2 - n_2^2) M_{12} \\ \bar{M}_{ns} &= -n_2 \bar{M}_{n1} + n_1 \bar{M}_{n2} \\ V_3 &= n_1 (M_{11,1} + M_{12,2}) + n_2 (M_{12,1} + M_{22,2}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

ifadelerini göstermektedir.

2.3.2.1. Hareket Denklemleri

Virtüel yer değiştirmeler, cismin geometrik sınır koşullarına uygun sonsuz küçük herhangi yer değiştirmeler olarak tanımlanmıştır. Bu nedenle (2.38) eşitliği her $\delta U, \delta V, \delta W$ virtüel yer

değiştirmeleri için doğru olmalıdır. Bundan ötürü Ω bölgesinde ve $\partial\Omega$ sınırında hesaplanacak integrallerin ayrı ayrı sıfır olması gereklidir. İlk integralin sıfır olması için bu integralde $\delta U, \delta V, \delta W$ ların katsayıları ayrı ayrı sıfır olmalıdır. Böylece

$$L_k(U, V, W) = 0 \quad k=1, 2, 3 \quad (2.41)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bunlara plaqın hareket denklemleri denir.

2.3.2.2. Sınır Koşulları

(2.38) virtüel iş denkleminde $\partial\Omega$ sınırı boyunca hesaplanacak integralin sıfır olması, problemin sınır koşullarını verir. Plaqın mesnetlenme biçimine bağlı olarak plak kenarlarında U, V, W için bazı kısıtlamalar konulmuştur. Buna uygun olarak $\delta U, \delta V, \delta W, \delta W_n$ den bazıları $\partial\Omega$ sınırının bu kısımlarında sıfırdır. Bunların sıfır olmadıkları kısımlarda ise katsayıları sıfıra eşitlenir. Şekil 2.3 de gösterilen çeşitli mesnet tipleri için bu durum aşağıda ayrı ayrı açıklanacaktır.

V.10 varsayıma göre plak kenarlarında

$$W = 0, \quad \delta W = 0, \quad \dots, \quad \partial\Omega \text{ da} \quad (2.42)$$

alınır. Bu, Şekil 2.3 deki her üç mesnet tipi için geçerlidir.

a) Dört kenarı ankastre plaklar: Ankastre kenara dik doğrultuda W_n dönmezleri sıfırdır. Buna uygun olarak virtüel yer değiştirmeler ankastre kenarda $\delta W_n = 0$ alınır. (2.30) ve (2.31) ifadeleri kullanılırsa

$$W_{,1} = 0, \quad \delta W_{,1} = 0, \quad \dots, \quad \partial\Omega_1 \text{ ve } \partial\Omega_3 \text{ de} \quad (2.43)$$

$$W_{,2} = 0, \quad \delta W_{,2} = 0, \quad \dots, \quad \partial\Omega_2 \text{ ve } \partial\Omega_4 \text{ de} \quad (2.44)$$

elde edilir.

b) Dört kenarı mafsallı plaklar: Plak kenarının W_n dönmesi için bir kısıtlama yoktur. Mafsallı kenarda

$$M_{nn} - \bar{M}_{nn} = 0 \quad (2.45)$$

olmalıdır. V.9 varsayıımı, (2.26), (2.35) ve (2.40) yardımıyla buradan

$$(\gamma n_1^2 + v n_2^2) (W - W_o),_{11} + 4kn_1 n_2 (W - W_o),_{12} + (vn_1^2 + \frac{1}{\gamma} n_2^2) (W - W_o),_{22} = 0 \quad (2.46)$$

elde edilir. (2.31) ifadeleri kullanılırsa

$$w_{,11} = w_{o,11} \dots \partial\Omega_1 \text{ ve } \partial\Omega_3 \text{ de} \quad (2.47)$$

$$w_{,22} = w_{o,22} \dots \partial\Omega_2 \text{ ve } \partial\Omega_4 \text{ de} \quad (2.48)$$

sınır koşulları elde edilir.

c) $x_1=0$ ve $x_1=a$ kenarları ankastre, $x_2=0$ ve $x_2=b$ kenarları mafsallı plaklar: Bu plaklarda (2.43) ve (2.48) sınır koşulları gerçekleşmelidir.

Sadece düzlem dışı W yer değiştirmesine bağlı olan (2.42)-(2.48) sınır koşulları sağlandığı takdirde (2.38) virtüel iş bağıntısında $\partial\Omega$ sınırı boyunca hesaplanan integralde δU ve δV nin bulunduğu terimler kalır.

$$\int_{\partial\Omega} [B_1(U, V, W)\delta U + B_2(U, V, W)\delta V] ds = 0 \quad (2.49)$$

şeklinde sıfır olmalıdır.

Bu çalışmada plak kenarları kayıcı olarak mesnetlenmiştir (Şekil 2.3). Kenarların U ve V yer değiştirmeleri için hiç bir kısıtlama yoktur. Bu halde sınır koşulları, δU ve δV lerin katsayıları sıfıra eşitlenirse (2.25),(2.31),(2.37) ve (2.40)' yardımı ile $\partial\Omega_k$ sınırında

$$\begin{aligned} \gamma U_{,1} + v V_{,2} &= \frac{\bar{N}_k}{Eh} - \frac{1}{2}\gamma(W_{,1}^2 - W_{o,1}^2) - \frac{1}{2}v(W_{,2}^2 - W_{o,2}^2) \quad k=1,3 \\ v U_{,1} + \frac{1}{\gamma} V_{,2} &= \frac{\bar{N}_k}{Eh} - \frac{1}{2}v(W_{,1}^2 - W_{o,1}^2) - \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}(W_{,2}^2 - W_{o,2}^2) \quad k=2,4 \\ \kappa(U_{,2} + V_{,1}) &= \frac{\bar{K}_k}{Eh} - \kappa(W_{,1}W_{,2} - W_{o,1}W_{o,2}) \quad k=1,2,3,4 \end{aligned} \quad (2.50)$$

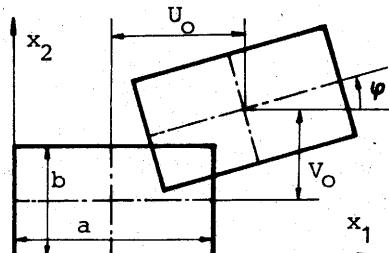
şeklinde ifade edilir.

Yukarıda elde edilen bütün denklemler elastik bir cisim olan plağın şekil değiştirmelerine bağlı olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada plak kenarlarının düzlem içi U, V yer değiştirmelerine hiç bir

kısıtlama konulmadığı için Şekil 2.8 de gösterilen ve plakta şekil değiştirmelere yol açmayan

$$\begin{aligned} U &= U_0 - \left(x_2 - \frac{b}{2} \right) \varphi \\ V &= V_0 + \left(x_1 - \frac{a}{2} \right) \varphi \end{aligned} \quad (2.51)$$

yer değiştirmeleriyle ifade edilen rıjıt hareketin belirlenmesinde mekaniğin temel ilkelarından olan çizgisel ve açısal momentum ilke-lerinden faydalanylmalıdır. Bu ca-lışmada plağın elastodinamik dav-ranışı incelenmekte olduğundan şe-kil değiştirmelere yol açmayan rıjıt hareket konu dışı bırakıl- mıştır.



Şekil 2.8: Plağın düzlem içi doğrultularda rıjıt yer değiştirmesi

2.3.3. Gerilme Fonksiyonu

$$\int_{-h/2}^{+h/2} (e_{11,22} + e_{22,11} - 2e_{12,12}) dx_3 \quad (2.52)$$

integrali (2.22) ve (2.24) bağıntıları yardımıyla $N_{\alpha\beta}$ lar cinsinden hesaplanır ve aynı integralin (2.16) dan hesaplanacak ifade-sine eşitlenirse

$$\begin{aligned} & (\gamma N_{22,11} - v N_{11,11} - v N_{22,22} + \frac{1}{\gamma} N_{11,22} - \frac{1-v^2}{\kappa} N_{12,12}) \frac{1}{Eh(1-v^2)} \\ & = (w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22}) - (w_{o,12}^2 - w_{o,11} w_{o,22}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $N_{\alpha\beta}$ lar için bir F gerilme fonksiyonundan

$$\begin{aligned} N_{11} &= F_{,22} - \int \rho h \ddot{U} dx_1 \\ N_{22} &= F_{,11} - \int \rho h \ddot{V} dx_2 \\ N_{12} &= -F_{,12} \end{aligned} \quad (2.54)$$

şeklinde türetilen ifadeler seçilirse bunlar (2.41) deki ilk iki hareket denklemini sağlarlar. (2.53) de yerlerine konulursa F gerilme fonksiyonunun sağlayacağı

$$\begin{aligned}
 & \gamma F_{,1111} + \left(\frac{1-\nu^2}{\kappa} - 2\nu \right) F_{,1122} + \frac{1}{\gamma} F_{,2222} \\
 & = Eh(1-\nu^2) [(w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22}) - (w_{o,12}^2 - w_{o,11} w_{o,22})] \\
 & + \rho h \left[\left(\frac{1}{\gamma} \int \ddot{U} dx_1 - \nu \int \ddot{V} dx_2 \right)_{,22} + \left(\gamma \int \ddot{V} dx_2 - \nu \int \ddot{U} dx_1 \right)_{,11} \right]
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

diferansiyel denklemi elde edilir [2].

BÖLÜM 3

ÇÖZÜM YÖNTEMİ

3.1. VARYASYON PROBLEMI

Ortotrop malzemeden yapılmış ince dikdörtgen plakların çeşitli düzlem içi dinamik yükler etkisindeki davranışını incelemek üzere gerekli diferansiyel denklemler önceki bölümde bazı basitleştirici kabuller altında elde edilmiştir. Şekil 2.6 daki Ω dikdörtgen bölgesinde (2.41) diferansiyel denklemlerini ve bu bölgenin $\partial\Omega$ sınırında, plak mesnetlerine bağlı olarak (2.42)-(2.50) sınır koşullarını sağlayan U, V, W fonksiyonları hesaplanacaktır. Bunlar plak ortalama yüzeyinin yer değiştirmeye vektörü bileşenleridir (Şekil 2.2).

Kesin çözümü yapılamayan problemlerde başvurulan çözüm yöntemlerinden biri varyasyon yöntemleridir. Sürekli ortam mekaniğinde çok iyi sonuçlar verdiği için başarıyla kullanılmaktadır. Çünkü sürekli ortam mekaniğindeki problemlerde birtakım fonksiyoneller ekstremum olmaktadır. Uygun bir fonksiyoneli ekstremum kılan ve verilen sınır koşullarını sağlayan fonksiyonların aranması bir varyasyon problemidir. Plak için yazılan (2.38) v.i.b. (virtüel iş bağıntısı), bir potansiyelden türetilemeyen dış kuvvetler halinde böyle bir fonksiyonelin ekstremum olmasının ifadesi olup, genel bir ifadedir. Dış kuvvetlerin bir potansiyelden türetilebilmesi halinde bu fonksiyonel $L = T - U$ Lagrange fonksiyonudur [6].

Bu çalışmada önce aşağıdaki boyutsuz değişkenler tanımlanmıştır ve 2.Bölümdeki bütün denklemlere bu değişken dönüşümü uygulanmıştır. Sonra bir varyasyon yöntemi olan Lagrange çarpanları yöntemi uygulanarak çözüme gidilmiştir.

3.2. BOYUTSUZ DEĞİŞKENLER VE DEĞİŞKEN DÖNÜŞÜMÜ

Bu çalışmada kullanılan boyutsuz değişkenler; c ve β değerleri

$$c = \sqrt{ab}, \quad \beta = \sqrt{a/b} \quad (3.1)$$

olmak üzere boyutsuz koordinatlar

$$x = \frac{\pi}{a} x_1, \quad y = \frac{\pi}{b} x_2, \quad (3.2)$$

boyutsuz yer değiştirmeler ve plak önsehimi,

$$(u, v, w, w_o) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} (U, V, W, W_o), \quad (3.3)$$

boyutsuz gerilmeler ve kenar yükleri

$$(\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \bar{\sigma}_k, \bar{\tau}_k) = \frac{1}{Eh} (N_{11}, N_{12}, N_{22}, \bar{N}_k, \bar{K}_k) \quad (3.4)$$

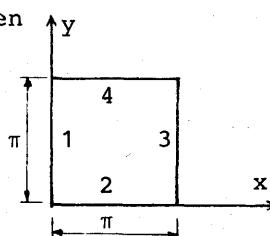
şeklindedir. Dikdörtgen olan (2.29) daki Ω bölgesi, değişken dönüşümüne göre

$$B = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.5)$$

kare bölgесine dönüşür (Şekil 3.1). x , y bağımsız değişkenlerinin tanım aralıkları

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \quad (3.6)$$

olmaktadır. (3.1) ve (3.2) den



Şekil 3.1 B bölgesi ve kenarlarının numaralandırılması

$$\begin{aligned}
 dx_1 &= \frac{a}{\pi} dx = \frac{c}{\pi} \beta dx \\
 dx_2 &= \frac{b}{\pi} dy = \frac{c}{\pi} \frac{1}{\beta} dy \\
 (\),_x &= \frac{d(\)}{dx} = \frac{dx_1}{dx} \frac{d(\)}{dx_1} = \frac{c}{\pi} \beta (\),_1 \\
 (\),_y &= \frac{c}{\pi} \frac{1}{\beta} (\),_2 \\
 (\),_1 &= \frac{\pi}{c} \frac{1}{\beta} (\),_x \\
 (\),_2 &= \frac{\pi}{c} \beta (\),_y
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

türev bağıntıları elde edilir. Bu değişken dönüşümü sonunda (2.25) ve (2.26) ifadeleri

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \frac{\gamma}{\beta} u,_x + v \beta v,_y + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\beta^2} h^{(1)} + \frac{1}{2} v \beta^2 h^{(2)} \\
 \sigma_{yy} &= \frac{v}{\beta} u,_x + \frac{1}{\gamma} \beta v,_y + \frac{1}{2} \frac{v}{\beta^2} h^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\gamma} h^{(2)} \\
 \sigma_{xy} &= \kappa [\beta u,_y + \frac{1}{\beta} v,_x + h^{(3)}] \\
 M_{11} &= -E \bar{c} h \frac{c}{\pi} \left[\frac{\gamma}{\beta^2} (w-w_o) ,_{xx} + v \beta^2 (w-w_o) ,_{yy} \right] \\
 M_{22} &= -E \bar{c} h \frac{c}{\pi} \left[\frac{v}{\beta^2} (w-w_o) ,_{xx} + \frac{1}{\gamma} \beta^2 (w-w_o) ,_{yy} \right] \\
 M_{12} &= -E \bar{c} h \frac{c}{\pi} 2\kappa (w-w_o) ,_{xy}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklini alır. Burada $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$ ve \bar{c}

$$\begin{aligned}
 h^{(1)} &= w_{,x}^2 - w_{o,x}^2, \quad h^{(2)} = w_{,y}^2 - w_{o,y}^2, \quad h^{(3)} = w_{,x} w_{,y} - w_{o,x} w_{o,y}, \\
 \bar{c} &= \frac{h^2}{12} \left(\frac{\pi}{c} \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ifadelerini göstermektedir. e, $h^{(x)}$, $h^{(y)}$ ise

$$e = \frac{\rho}{E} \left(\frac{c}{\pi} \right)^2 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{\gamma}{\beta^3} (w_{,x} w_{,xx} - w_{0,x} w_{0,xx}) + \kappa \beta (w_{,x} w_{,yy} - w_{0,x} w_{0,yy}) \\
 &\quad + (\nu + \kappa) \beta (w_{,y} w_{,xy} - w_{0,y} w_{0,xy}) \\
 h(y) &= \frac{\kappa}{\beta} (w_{,y} w_{,xx} - w_{0,y} w_{0,xx}) + \frac{\beta^3}{\gamma} (w_{,y} w_{,yy} - w_{0,y} w_{0,yy}) \\
 &\quad + \frac{(\nu + \kappa)}{\beta} (w_{,x} w_{,xy} - w_{0,x} w_{0,xy})
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak tanımlanır ve (3.1)-(3.7) tanım ve bağıntıları (2.39) da konulursa $L_k(u, v, w)$ ifadeleri

$$\begin{aligned}
 L_1(u, v, w) &= Eh \frac{\pi}{c} \left[\left(\frac{1}{\beta} \sigma_{xx,x} + \beta \sigma_{xy,y} \right) - e \ddot{u} \right] \\
 &= Eh \frac{\pi}{c} \left[\frac{\gamma}{\beta^2} u_{,xx} + \kappa \beta^2 u_{,yy} + (\nu + \kappa) v_{,xy} + h(x) - e \ddot{u} \right]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
 L_2(u, v, w) &= Eh \frac{\pi}{c} \left[\left(\frac{1}{\beta} \sigma_{xy,x} + \beta \sigma_{yy,y} \right) - e \ddot{v} \right] \\
 &= Eh \frac{\pi}{c} \left[\frac{\kappa}{\beta^2} v_{,xx} + \frac{\beta^2}{\gamma} v_{,yy} + (\nu + \kappa) u_{,xy} + h(y) - e \ddot{v} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_3(u, v, w) &= Eh \frac{\pi}{c} \left\{ -\bar{c} \left[\frac{\gamma}{\beta^4} w_{,xxxx} + 2(\nu + 2\kappa) w_{,xxxy} + \frac{\beta^4}{\gamma} w_{,yyyy} \right] \right. \\
 &\quad + \bar{c} \left[\frac{\gamma}{\beta^4} w_{0,xxxx} + 2(\nu + 2\kappa) w_{0,xxxy} + \frac{\beta^4}{\gamma} w_{0,yyyy} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\beta^2} w_{,xx} \sigma_{xx} + 2w_{,xy} \sigma_{xy} + \beta^2 w_{,yy} \sigma_{yy} \\
 &\quad + \frac{1}{\beta} w_{,x} \left(\frac{1}{\beta} \sigma_{xx,x} + \beta \sigma_{xy,y} \right) + \beta w_{,y} \left(\frac{1}{\beta} \sigma_{xy,x} + \beta \sigma_{yy,y} \right) \\
 &\quad \left. - e \ddot{w} + e \bar{c} \left(\frac{1}{\beta^2} \ddot{w}_{,xx} + \beta^2 \ddot{w}_{,yy} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. (2.42)-(2.50) sınır koşulları sağlandığı takdirde (2.38) v.i.b. nda $\partial\Omega$ sınırı boyunca hesaplanan integral sıfır olur. Böylece bu denklem

$$\int_0^\pi \int_0^\pi [L_1(u, v, w) \delta u + L_2(u, v, w) \delta v + L_3(u, v, w) \delta w] dx dy = 0 \tag{3.14}$$

şeklini alır. (2.41) hareket denklemleri ise

$$L_k(u, v, w) = 0 \quad k=1, 2, 3 \quad (3.15)$$

olur. Bu denklemlerin ilk ikisinden

$$\frac{1}{\beta} \sigma_{xx,x} + \beta \sigma_{xy,y} = e \ddot{u}, \quad \frac{1}{\beta} \sigma_{xy,x} + \beta \sigma_{yy,y} = e \ddot{v} \quad (3.16)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunlar (3.13) de yerine konulursa $L_3(u, v, w)$ ifadesi

$$\begin{aligned} L_3(u, v, w) = & Eh \frac{\pi}{c} \left\{ -\bar{c} \left[\frac{\gamma}{\beta^4} w_{xxxx} + 2(v+2k)w_{xxyy} + \frac{\beta^4}{\gamma} w_{yyyy} \right] \right. \\ & + \bar{c} \left[\frac{\gamma}{\beta^4} w_{o,xxxx} + 2(v+2k)w_{o,xxyy} + \frac{\beta^4}{\gamma} w_{o,yyyy} \right] \\ & + \frac{1}{\beta^2} w_{xx} \sigma_{xx} + 2w_{xy} \sigma_{xy} + \beta^2 w_{yy} \sigma_{yy} \\ & \left. + e \left[\frac{1}{\beta} w_{x} \ddot{u} + \beta w_{y} \ddot{v} - \bar{c} \left(\frac{1}{\beta^2} w_{xx} + \beta^2 w_{yy} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir. Bu çalışmada $L_3(u, v, w)$ ifadesinin (3.17) deki değiştirilmiş şekli kullanılmıştır.

Değişken dönüşümünden dolayı problemin bilinmeyenleri bundan sonra u, v, w fonksiyonlarıdır. Bunlar (3.5) deki B bölgesinde tanımlıdır. $z = \{u, v, w\}$ şeklinde tanımlanacak elemanlar

$$z = \{u, v, w\} \in T \quad (3.18)$$

şeklinde bi T uzayını oluştururlar. (3.12) ve (3.17) diferansiyel operatörleri birleştirilmek üzere diferansiyel operatörü

$$Lz = \{L_1 z, L_2 z, L_3 z\} \in D \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanırsa (3.15) plak denklemleri

$$Lz = 0 \quad \dots \text{B bölgesinde} \quad (3.20)$$

olur. (3.19) da D uzayı L diferansiyel operatörünün değer bölgesidir. $a \subset T$ ve $b \subset D$ elemanları için bilineer operatör

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) dx dy \quad (3.21)$$

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (3.14) v.i.b kısaca

$$\langle Lz, \delta z \rangle = 0 \quad (3.22)$$

$$Lz \in D, \delta z = \{ \delta u, \delta v, \delta w \} \in T$$

şeklini alır.

Plağın sınır koşullarına uygun herhangi bir öz virtüel yer değiştirmesi için (3.22) v.i.b. ni sağlayan $z(x, y, t) = \{u, v, w\} \in T$ bilinmeyen fonksiyonunun belirlenmesi problemi, (3.20) diferansiyel denklemının (2.42)-(2.50) sınır koşulları altında çözümüne esdeğer olan varyasyon problemidir [31,32].

Yine (3.1)-(3.7) değişken dönüşümü sonunda (2.54) ifadeleri ve (2.55) diferansiyel denklemi, $\bar{F}=F/Eh$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \beta^2 \bar{F}_{,yy} - e\beta \int \ddot{u} dx \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \frac{1}{\beta^2} \bar{F}_{,xx} - \frac{e}{\beta} \int \ddot{v} dy \\ \sigma_{xy} &= -\left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \bar{F}_{,xy} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\beta^4} \bar{F}_{,xxxx} + \left(\frac{1-v^2}{\kappa} - 2v \right) \bar{F}_{,xxyy} + \frac{\beta^4}{\gamma} \bar{F}_{,yyyy} &= \\ = (1-v^2) \left(\frac{c}{\pi} \right)^2 [(w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22}) - (w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22})] & \quad (3.24) \\ + e \left(\frac{c}{\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{\beta^3}{\gamma} \int \ddot{u} dx - v\beta \int \ddot{v} dy \right)_{,yy} + \left(\frac{\gamma}{\beta^3} \int \ddot{v} dy - \frac{v}{\beta} \int \ddot{u} dx \right)_{,xx} \right] \end{aligned}$$

şeklini alır. Statik yükler halinde ü ve v li terimler, Kirchhoff plağı halinde ise (3.24) deki w ve w_o li terimler atılır.

3.3. KOORDİNAT FONKSİYONLARI

Sekil 2.2 de gösterilen plak ortalama yüzeyinin U, V, W yer değiştirmeye vektörü bileşenleri, (3.3) değişken dönüşümü sonunda u, v, w olarak boyutsuz hale konulmuştur*. Bunlar için ise seri çözümler kullanılmıştır.

3.3.1. Dört Kenarı Ankastre Plaklar

Dört kenarı ankastre plaklarda w ve w_o için

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_{ij}(t) x_i(x) y_j(y) \\ w_o(x, y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_{ij} x_i(x) y_j(y) \end{aligned} \quad (3.25)$$

İfadeleri seçilmiştir. Burada $x_i, (i=1, 2, \dots)$, dizisi;

$$x(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \quad (3.26)$$

serisinin (2.42) ve (2.43) sınır koşullarını sağlayan doğrusal bağımsız bütün $x_i(x)$ çözümüleridir, yani

$$x_i(x) = [\cos(i-1)x - \cos(i+1)x] = 2 \sin x \sin ix \quad (3.27)$$

$$i=1, 2, 3, \dots$$

fonksiyonlarıdır. (2.42) ve (2.44) sınır koşullarını sağlayan $y_j(y)$ fonksiyonları benzer şekilde

$$y_j(y) = [\cos(j-1)y - \cos(j+1)y] = 2 \sin y \sin jy \quad (3.28)$$

olarak seçilmiştir. $w_o(x, y)$ önsehiminin (3.25) seri açılımındaki g_{ij} katsayıları, bu önsehimin iki doğrultuda Fourier kosinüs serisine açılımındaki

* Bu bölümde ve daha sonraki bölgelerde, seçilen ifadeler, 2. Bölümdeki ifadelerde yerlerine konulurken (3.1)-(3.7) değişken dönüşümü gözönünde bulundurulmalıdır.

$$w_o(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=0}^{\frac{\pi}{2}} \bar{g}_{ij} \cos ix \cos jy \quad (3.29)$$

$$\bar{g}_{ij} = \frac{A}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} w_o(x, y) \cos ix \cos jy$$

$$A = \begin{cases} 4 & \dots i \neq 0, j \neq 0 \\ 2 & \dots i=0, j \neq 0 \text{ veya } i \neq 0, j=0 \\ 1 & \dots i=j=0 \end{cases}$$

\bar{g}_{ij} katsayılarından hesaplanabilir. Bunun için (3.27) ve (3.28) ifadeleri (3.25) de yerlerine konulduktan sonra w_o (3.25) ve (3.29) seri açılımları karşılaştırılmalıdır. Bunun sonucu olarak m ve n indisleri ikişer artmak üzere g_{ij} sabitleri

$$g_{ij} = \sum_m^{i-1} \sum_n^{j-1} \bar{g}_{mn} \quad (3.29)$$

$$m=0, 2, 4, \dots \quad i=\text{tek} \text{ ise}$$

$$m=1, 3, 5, \dots \quad i=\text{çift} \text{ ise}$$

$$n=0, 2, 4, \dots \quad j=\text{tek} \text{ ise}$$

$$n=1, 3, 5, \dots \quad j=\text{çift} \text{ ise}$$

şeklinde hesaplanır.

Bu çalışmada von Kármán plağının çözümünde (3.25) serisinde doku-zar terim alınmıştır.

$$f = [f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{31}, f_{32}, f_{33}]^T \quad (3.31)$$

$$g = [g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{31}, g_{32}, g_{33}]^T$$

Kirchhoff plağında yani düzlem dışı sonsuz küçük yer değiştirmeler halinde ise terim sayısı artırılmıştır.

(3.25) ifadeleri (3.9) ve (3.11) de yerlerine konulursa $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, $h^{(3)}$, $h^{(x)}$, $h^{(y)}$ ifadeleri

$$h^{(1)} = 2 \sum_{i=0} \sum_{j=0} h_{ij}^{(1)} \cos ix \cos jy$$

$$h^{(2)} = 2 \sum_{i=0} \sum_{j=0} h_{ij}^{(2)} \cos ix \cos jy$$

$$h^{(3)} = \sum_{i=0} \sum_{j=0} h_{ij}^{(3)} \sin ix \sin jy$$

$$h^{(x)} = \sum_{i=0} \sum_{j=0} h_{ij}^{(x)} \sin ix \cos jy$$

$$h^{(y)} = \sum_{i=0} \sum_{j=0} h_{ij}^{(y)} \cos ix \sin jy$$

(3.32)

birimini alır. Burada $h_{ij}^{(1)}$ ifadeleri

$$h_{ij}^{(1)} = \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s (f_{pq} f_{rs} - g_{pq} g_{rs}) x_{pri}^{(1)} y_{qsj}^{(1)}$$

$$h_{ij}^{(2)} = \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s (f_{pq} f_{rs} - g_{pq} g_{rs}) x_{pri}^{(2)} y_{qsj}^{(2)}$$

$$h_{ij}^{(3)} = \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s (f_{pq} f_{rs} - g_{pq} g_{rs}) x_{pri}^{(3)} y_{qsj}^{(3)} \quad (3.33)$$

$$h_{ij}^{(x)} = -i \left(\frac{\gamma}{\beta^3} h_{ij}^{(1)} + \nu \beta h_{ij}^{(2)} \right) + \beta \kappa h_{ij}^{(3)} j$$

$$h_{ij}^{(y)} = \frac{i}{\beta} \kappa h_{ij}^{(3)} - j \left(\frac{\nu}{\beta} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^3}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \right)$$

şeklinde f_{ij} ve g_{ij} lerin kuadratik fonksiyonlarıdır. $x_{pri}^{(1)}$ ve $y_{qsj}^{(1)}$ ler Tablo 3.1 den plağın mesnet biçimine göre alınacak sabitlerdir. Alt bölüm 3.5. deki (3.49) v.i.b. nda $h_{ij}^{(1)}$ ve $h_{ij}^{(2)}$ nin f_{kl} ye göre türevi ile karşılaşacaktır. Bunlar, $x_{pri}^{(1)}$, $y_{qsj}^{(1)}$, $x_{pri}^{(2)}$, $y_{qsj}^{(2)}$ sabitlerinin ilk iki indise göre simetrik olmaları nedeniyle

$$\frac{\partial h_{ij}^{(1)}}{\partial f_{kl}} = \sum_p \sum_q 2f_{pq} x_{pki}^{(1)} y_{qlj}^{(1)} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial h_{ij}^{(2)}}{\partial f_{kl}} = \sum_p \sum_q 2f_{pq} x_{pki}^{(2)} y_{qlj}^{(2)}$$

şeklinde hesaplanır.

3.3.2. Dört Kenarı Mafsallı Plaklar

Dört kenarlı mafsallı plaklarda w ve w_o için (3.25) ifadeleri seçilmiştir. Burada x_i ve y_j $i, j=1, 2, \dots$, dizileri

$$x_i(x) = \sin ix \quad i=1, 2, \dots \quad (3.34)$$

$$y_j(y) = \sin jy \quad j=1, 2, \dots$$

şeklinde Fourier sinüs dizileridir. (3.25) ve (3.34) ifadeleri (2.42), (2.47) ve (2.48) sınır koşullarını sağlar. g_{ij} katsayıları

Tablo-3.1 $x_{pri}^{()}$ ve $y_{qsj}^{()}$ katsayıları

1) DÖRT KENARI ANKASTRE PLAKLAR

$$x_{\text{pri}}^{(1)} = A_{\text{pri}}^{(1)} \quad y_{\text{qsj}}^{(1)} = A_{\text{qsj}}^{(2)} \quad x_{\text{pri}}^{(2)} = A_{\text{pri}}^{(2)} \quad y_{\text{qsj}}^{(2)} = A_{\text{qsj}}^{(1)} \quad x_{\text{pri}}^{(3)} = A_{\text{pri}}^{(3)} \quad y_{\text{sqj}}^{(3)} = A_{\text{sqj}}^{(3)}$$

2) DÖRT KENARI MAFSALLI PLAKLAR

$$x_{\text{pri}}^{(1)} = B_{\text{pri}}^{(1)} \quad y_{\text{qsj}}^{(1)} = B_{\text{qsj}}^{(2)} \quad x_{\text{pri}}^{(2)} = B_{\text{pri}}^{(2)} \quad y_{\text{qsj}}^{(2)} = B_{\text{qsj}}^{(1)} \quad x_{\text{pri}}^{(3)} = B_{\text{pri}}^{(3)} \quad y_{\text{qsj}}^{(3)} = B_{\text{sqsj}}^{(3)}$$

3) KARŞILIKLI İKİ KENARI ANKASTRE DİĞER İKİ KENARI MAFSALLI PLAKLAR

$$x_{\text{pri}}^{(1)} = A_{\text{pri}}^{(1)} \quad y_{\text{qsj}}^{(1)} = B_{\text{qsj}}^{(2)} \quad x_{\text{pri}}^{(2)} = A_{\text{pri}}^{(2)} \quad y_{\text{qsj}}^{(2)} = B_{\text{qsj}}^{(1)} \quad x_{\text{pri}}^{(3)} = A_{\text{pri}}^{(3)} \quad y_{\text{qsj}}^{(3)} = B_{\text{qsj}}^{(3)}$$

	$B_{11i}^{(1)}$	$B_{12i}^{(1)}$	$B_{13i}^{(1)}$	$B_{22i}^{(1)}$	$B_{23i}^{(1)}$	$B_{33i}^{(1)}$		$B_{11i}^{(2)}$	$B_{12i}^{(2)}$	$B_{13i}^{(2)}$	$B_{22i}^{(2)}$	$B_{23i}^{(2)}$	$B_{33i}^{(2)}$
i=0	0.25	0.00	0.00	1.00	0.00	2.25		0.25	0.00	0.00	0.25	0.00	0.25
1	0.00	0.50	0.00	0.00	1.50	0.00		0.00	0.25	0.00	0.00	0.25	0.00
2	0.25	0.00	0.75	0.00	0.00	0.00		-0.25	0.00	0.25	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	-0.25	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.00	0.75	1.00	0.00	0.00		0.00	0.00	-0.25	-0.25	0.00	0.00
5	0.00	0.00	0.00	0.00	1.50	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	-0.25	0.00
6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.25		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.25

	$A_{11i}^{(1)}$	$A_{12i}^{(1)}$	$A_{13i}^{(1)}$	$A_{22i}^{(1)}$	$A_{23i}^{(1)}$	$A_{33i}^{(1)}$		$A_{11i}^{(2)}$	$A_{12i}^{(2)}$	$A_{13i}^{(2)}$	$A_{22i}^{(2)}$	$A_{23i}^{(2)}$	$A_{33i}^{(2)}$
i=0	1.00	0.00	-1.00	2.50	0.00	5.00		0.75	0.00	0.25	0.50	0.00	0.50
1	0.00	1.00	0.00	0.00	2.00	0.00		0.00	0.50	0.00	0.00	0.25	0.00
2	0.00	0.00	2.00	-1.75	0.00	-4.00		-1.00	0.00	0.25	-0.25	0.00	-1.00
3	0.00	0.50	0.00	0.00	-1.50	0.00		0.00	-0.75	0.00	0.00	0.00	0.00
4	-1.00	0.00	1.00	1.50	0.00	-1.00		0.25	0.00	-0.75	-0.50	0.00	0.25
5	0.00	-1.50	0.00	0.00	2.50	0.00		0.00	0.25	0.00	0.00	-0.50	0.00
6	0.00	0.00	-2.00	-2.25	0.00	4.00		0.00	0.00	0.25	0.25	0.00	-0.50
7	0.00	0.00	0.00	0.00	-3.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-4.00		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25

$$g_{ij} = \frac{4}{\pi^2} \iint w_o(x,y) \sin ix \sin jy \quad i,j=1,2,\dots \quad (3.35)$$

şeklinde iki doğrultuda Fourier sinüs serisine açılımındaki kat-sayılardır.

Bu çalışmada von Kármán plağı hali incelenirken i, j indisleri için 3 sınırı konulmuştur. (3.25) ve (3.34) ifadeleri (3.9) ve (3.11) de yerlerine konulursa $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h^{(x)}, h^{(y)}$ ifa-deleri yine (3.32) deki biçimde elde edilir. Dört kenarı mafsallı plaklar için de $h_{ij}^{()}$ katsayıları (3.33) de görüldüğü üzere f_{kl} ve g_{kl} ler cinsinden kuadratik ifadelerdir.

3.3.3. Karşılıklı İki Kenarı Ankastre Diğer İki Kenarı Mafsallı Plaklar

Bu plaklarda w ve w_o için (3.25) deki ifadeleri seçilmiştir.

$x_i(x)$ ler (3.27), $y_j(y)$ ler (3.34) deki gibi

$$\begin{aligned} x_i(x) &= \cos(i-1)x - \cos(i+1)x = 2 \sin x \sin ix \\ y_j(y) &= \sin jy \quad j=1,2,\dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

şeklinde seçilmiştir. (3.25) ve (3.36) ifadeleri, (2.42), (2.43) (2.48) sınır koşullarını sağlar. g_{ij} katsayıları, plak önsehimini-nin iki doğrultuda aşağıdaki

$$\begin{aligned} w_o(x,y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{g}_{ij} \cos ix \sin jy \\ \bar{g}_{ij} &= \frac{A}{\pi^2} \iint_0^\pi w_o(x,y) \cos ix \cos jy \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$A = \begin{cases} 4 & \dots i \neq 0 \text{ için} \\ 2 & \dots i = 0 \text{ için} \end{cases}$$

Fourier serisi açılımındaki \bar{g}_{ij} katsayılarından (3.30) dakine benzer düşünüle

$$g_{ij} = \sum_m^{i-1} \bar{g}_{mj} \quad m=0,2,4,\dots \quad i=\text{tek ise} \\ m=1,3,5,\dots \quad i=\text{çift ise} \quad (3.38)$$

şeklinde hesaplanır.

Bu çalışmada von Kármán plağı hali incelenirken i, j indisleri için 3 sınırı konulmuştur. (3.25) ve (3.36) ifadeleri (3.9) ve (3.11) de yerlerine konulursa $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h(x), h(y)$ ifadele-ri yine (3.32) deki biçimde elde edilir. Bu plaklarda da $h_{ij}^{(1)}$ katsayıları (3.33) de görüldüğü üzere f_{kl} ve g_{kl} ler cinsinden kuadratik ifadelerdir.

3.3.4. Düzlem içi Yer Değiştirmeler

Düzlem içi u ve v yer değiştirmeleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} u(x,y,t) = & \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N u_{ij}(t) \sin ix \cos jy \\ & + r_U(t) - \frac{1}{\beta} r_D(t) (y - \frac{\pi}{2}) \\ & + \alpha_S U_S(x,y) + \alpha_D(t) U_D(x,y) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} v(x,y,t) = & \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N v_{ij}(t) \cos ix \sin jy \\ & + r_V(t) + \beta r_D(t) (x - \frac{\pi}{2}) \\ & + \alpha_S V_S(x,y) + \alpha_D(t) V_D(x,y) \end{aligned}$$

seçilmiştir. Burada u_{ij} ve v_{ij} li terimler birer Fourier serisi- dir. r_U , r_V ve r_D ; plağın Şekil 2.8 deki rıjit hareketini be- lirtir. α_S ve $\alpha_D(t)$ altbölüm 2.1.5 deki gibi tanımlanmıştır. Di- namik kenar yükleri; $F^{(S)}$ gibi sabit kenar yüklemesinin α_S katı ile $F^{(D)}$ gibi diğer bir sabit kenar yüklemesinin $\alpha_D(t)$ katının toplamı olarak alınmıştır. α_S ve α_D ye yüklemenin şiddetini be- lirten birer sayı olarak bakılabilir. α_S , yükün sabit kısmının α_D ise değişken kısmının büyüklüğünü gösterir.

(3.4) boyutsuz değişkenleri kullanılırsa (2.6) ve (2.7) ifade-leri, bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{(S)} &= \sum_i s_i \bar{\sigma}^{(i)} \\ \bar{\tau}^{(S)} &= \sum_i s_i \bar{\tau}^{(i)} \\ \bar{\sigma}^{(D)} &= \sum_i d_i \bar{\sigma}^{(i)} \\ \bar{\tau}^{(D)} &= \sum_i d_i \bar{\tau}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ve

$$\bar{\sigma} = \alpha_S \bar{\sigma}^{(S)} + \alpha_D(t) \bar{\sigma}^{(D)}$$

$$\bar{\tau} = \alpha_S \bar{\tau}^{(S)} + \alpha_D(t) \bar{\tau}^{(D)}$$
(3.41)

yazılır. Şekil 2.4 deki yükleme tipleri, yukarıdaki toplam işaretlerinde i indisıyla yer alır. Statik halde Kirchhoff plaqında bu yükleme tipleri için (2.50) sınır koşullarını sağlayan $u^{(i)}$ ve $v^{(i)}$ yer değiştirmelerinin hesaplanmasıdır.

$$a) F = \frac{1}{2} x_2^2 \quad b) F = \frac{1}{2} x_1^2 \quad c) F = -x_1 x_2$$

$$d) F = \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{3b} x_2^3$$
(3.42)

gerilme fonksiyonlarından faydalanylabilir [9]. Bu fonksiyonlar (3.24) diferansiyel denkleminin homogen kısmını ve bunlardan (3.23) ile türetilen gerilmeler (2.50) sınır koşullarını sağlarlar. Bu yüklemeler için yer değiştirme ve gerilmeler

$$a) E u^{(a)} = \frac{\beta}{\gamma(1-v^2)} (x - \frac{\pi}{2}), \quad E v^{(a)} = -\frac{v}{\beta(1-v^2)} (y - \frac{\pi}{2})$$

$$E \sigma_{xx}^{(a)} = 1, \quad \sigma_{xy}^{(a)} = 0, \quad \sigma_{yy}^{(a)} = 0$$

$$b) E u^{(b)} = -\frac{v\beta}{1-v^2} (x - \frac{\pi}{2}), \quad E v^{(b)} = \frac{\gamma}{\beta(1-v^2)} (y - \frac{\pi}{2})$$

$$\sigma_{xx}^{(b)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(b)} = 0, \quad E \sigma_{yy}^{(b)} = 1$$

$$c) E u^{(c)} = \frac{1}{2\kappa\beta} (y - \frac{\pi}{2}), \quad E v^{(c)} = \frac{\beta}{2\kappa} (x - \frac{\pi}{2})$$

$$\sigma_{xx}^{(c)} = 0, \quad E \sigma_{xy}^{(c)} = 1, \quad \sigma_{yy}^{(c)} = 0$$
(3.43)

$$d) E u^{(d)} = \frac{-2\beta}{\gamma(1-v^2)\pi} (x - \frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2})$$

$$E v^{(d)} = \frac{1}{(1-v^2)\pi} [\frac{\beta^3}{\gamma} (x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{v}{\beta} (y - \frac{\pi}{2})^2]$$

$$E \sigma_{xx}^{(d)} = 1 - \frac{2}{\pi} y, \quad \sigma_{xy}^{(d)} = 0, \quad \sigma_{yy}^{(d)} = 0$$

olarak hesaplanır. Daha sonra (3.40) dekilere benzer toplamlarla $u^{(S)}, v^{(S)}, \sigma_{xx}^{(S)}, \sigma_{xy}^{(S)}, \sigma_{yy}^{(S)}, u^{(D)}, v^{(D)}, \sigma_{xx}^{(D)}, \sigma_{xy}^{(D)}, \sigma_{yy}^{(D)}$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} (\)^{(S)} &= \sum_i s_i (\)^{(i)} \\ (\)^{(D)} &= \sum_i d_i (\)^{(i)} \end{aligned} \quad (3.43)^*$$

olarak hesaplanabilir.

3.4. KISITLAYICI DENKLEMLER

(3.32), (3.39) ve (3.43) ifadeleri (3.8) de yerlerine konulursa bu ifadeler

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[\frac{\gamma}{\beta} i u_{ij} + v \beta j v_{ij} + \frac{\gamma}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + v \beta^2 h_{ij}^{(2)} \right] \cos ix \cos jy \\ &\quad + [\alpha_S \sigma_{xx}^{(S)} + \alpha_D \sigma_{xx}^{(D)}] \\ \sigma_{yy} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[\frac{v}{\beta} i u_{ij} + \frac{\beta}{\gamma} j v_{ij} + \frac{v}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^2}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \right] \cos ix \cos jy \\ &\quad + [\alpha_S \sigma_{yy}^{(S)} + \alpha_D \sigma_{yy}^{(D)}] \\ \sigma_{xy} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[-k \beta j u_{ij} - k \frac{1}{\beta} i v_{ij} + k h_{ij}^{(3)} \right] \sin ix \sin jy \\ &\quad + [\alpha_S \sigma_{xy}^{(S)} + \alpha_D \sigma_{xy}^{(D)}] \end{aligned} \quad (3.44)$$

olarak hesaplanır. Bunlar (2.50) sınır koşullarında yerlerine konulursa kenar yükleri, buradaki α_S ve α_D li terimlerle birlikte yok olur. Böylece $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\pi$ kenarlarında

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \left\{ \sum_{i=0}^N (+1) \left[\frac{\gamma}{\beta} i u_{ij} + v \beta j v_{ij} + \frac{\gamma}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + v \beta^2 h_{ij}^{(2)} \right] \right\} \cos j y &= 0 \\ \sum_{j=0}^N \left\{ \sum_{i=0}^N (-1)^i \left[\frac{\gamma}{\beta} i u_{ij} + v \beta j v_{ij} + \frac{\gamma}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + v \beta^2 h_{ij}^{(2)} \right] \right\} \cos j y &= 0 \\ \sum_{i=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N (+1) \left[\frac{v}{\beta} i u_{ij} + \frac{\beta}{\gamma} j v_{ij} + \frac{v}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^2}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \right] \right\} \cos i x &= 0 \\ \sum_{i=0}^N \left\{ \sum_{j=0}^N (-1)^j \left[\frac{v}{\beta} i u_{ij} + \frac{\beta}{\gamma} j v_{ij} + \frac{v}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^2}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \right] \right\} \cos i x &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin sol yanları, kenarlar boyunca açılmış birer Fourier kosinüs serisidir.

İlk ikisi kendi aralarında son ikisi de kendi aralarında bir kere

toplanır bir kere de çıkarılırsa herbiri Fourier kosinüs serisi olan dört yeni eşitlik elde edilir. Sıfıra eşit olmaları ise ancak her kosinüslü terimin katsayısı sıfır ise sağlanır. Böylece u_{ij} ve v_{ij} ler üzerine kısıtlama getiren

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=0}^N \left[\frac{\gamma}{\beta} i u_{ij} + v \beta j v_{ij} + \frac{\gamma}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + v \beta^2 h_{ij}^{(2)} \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\gamma}{\beta} i u_{ij} + v \beta j v_{ij} + \frac{\gamma}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + v \beta^2 h_{ij}^{(2)} \right] = 0 \\ \sum_{j=1}^N \left[\frac{v}{\beta} i u_{ij} + \frac{\beta}{\gamma} j v_{ij} + \frac{v}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^2}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \right] = 0 \\ \sum_{j=0}^N \left[\frac{v}{\beta} i u_{ij} + \frac{\beta}{\gamma} j v_{ij} + \frac{v}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^2}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \right] = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a^{(j)} \\ b^{(j)} \\ c^{(i)} \\ d^{(i)} \end{array} \quad (3.46)$$

denklemleri elde edilir*. Bu kısıtlayııcı denklemler i ve j indislerinin

$$\left(\begin{array}{l} i=\text{tek} \\ j=\text{tek} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{l} i=\text{tek} \\ j=\text{çift} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{l} i=\text{çift} \\ j=\text{tek} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{l} i=\text{çift} \\ j=\text{çift} \end{array} \right) \quad (3.47)$$

şeklinde tek veya çift değerlerini bulunduranlar olmak üzere dört gruba ayrılmaktadır. Bu gruplar ise plak ortasından kenarlara paralel düşünülen eksenlere göre simetrik ve antisimetrik yer değiştirmeleri karakterize etmektedir.

i, j indisleri için N sınırı konulursa, kısıtlayııcı denklemler

$$N_D = N_{tt} + N_{tg} + N_{ct} + N_{gg} = 4(N+1) \quad (3.47)$$

$$N_{tt} = N_{tg} = N_{ct} = N_{gg} = (N+1) \quad \dots \quad N=\text{tek} \text{ ise}$$

$$\left. \begin{array}{l} N_{tt} = N \\ N_{tg} = N_{ct} = N+1 \\ N_{gg} = N+2 \end{array} \right\} \quad \dots \quad N=\text{çift} \text{ ise}$$

tanedir.

* Altında çizgi olan indis, karşısında görülen değerden itibaren iki artan değerler alır.

$$\sum_{i=5} = \sum_{i=5,7,9,\dots}, \quad \sum_{i=5} = \sum_{i=5,6,7,\dots}$$

3.5. ZAMANA BAĞLI ADI DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ

Lagrange Çarpanları Yöntemi'nin uygulanması sonucu uzay koordinatlarından bağımsız, sadece zamana bağlı bir diferansiyel denklem sistemi elde edilmektedir.

Bu çalışmada seçilen yer değiştirmeye ifadeleri ve bu ifadelerdeki zamana bağlı katsayıların sağlanması gereken kısıtlayıcı denklemler, alt bölüm 3.3 ve 3.4 de verilmiştir. Varyasyon ilkelerine uygun olarak kısıtlayıcı denklemlerin etkisi, kısıtlayıcı denklem sayısı kadar Lagrange çarpanı ile (3.25) v.i.b. na katılabilmektedir [32].

u, v, w yer değiştirmelerine verilecek virtüel yer değiştirmeler; bunlar için seçilen (3.25) ve (3.29) ifadelerinde zamana bağlı katsayırlara verilecek değişimlerle

$$\begin{aligned}\delta u &= \delta r_U - \frac{1}{\beta} \delta r_D \left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N \delta u_{ij} \sin i x \cos j y \\ \delta v &= \delta r_V + \beta \delta r_D \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N \delta v_{ij} \cos i x \sin j y \\ \delta w &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \delta f_{ij} x_i y_j\end{aligned}\quad (3.48)$$

şeklinde seçilir. Kısıtlayıcı denklemler D_m ($m=1, 2, \dots, N_D$) olsun. Bunlara karşılık N_D tane λ_m ($m=1, 2, \dots, N_D$) Lagrange çarpanı katılırsa Lagrange Çarpanları Yöntemine göre (3.25) v.i.b. yerine

$$\begin{aligned}<\mathbf{L}_z, \delta z> - \sum_{m=1}^{N_D} \lambda_m \left\{ \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\delta u_{ij} \frac{\partial D_m}{\partial u_{ij}} + \delta v_{ij} \frac{\partial D_m}{\partial v_{ij}} \right) \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^9 \delta f_k \left[\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left(\frac{\partial h_{ij}^{(1)}}{\partial f_k} \frac{\partial D_m}{\partial h_{ij}^{(1)}} + \frac{\partial h_{ij}^{(2)}}{\partial f_k} \frac{\partial D_m}{\partial h_{ij}^{(2)}} \right) \right] \right\} = 0\end{aligned}\quad (3.49)$$

denkleminin sağlanması gerekmektedir. $\delta r_U, \delta r_V, \delta r_D, \delta u_{ij}, \delta v_{ij}, \delta f_{ij}$ lerin her değeri için bu eşitliğin sağlanması ise ancak bunların katsayılarının ayrı ayrı sıfır olması halinde gerçekleşir. Böylece sadece zamana bağlı ikinci mertebe adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

(3.25), (3.39) ve (3.44) ifadeleri (3.12) de yerlerine konulursa $H_{ij}^{(x)}$ ve $H_{ij}^{(y)}$,

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(x)} &= e \ddot{u}_{ij} + \left(\frac{\gamma}{\beta^2} i^2 + \kappa \beta^2 j^2 \right) u_{ij} + (\nu + \kappa) i j v_{ij} - h_{ij}^{(x)} \\ H_{ij}^{(y)} &= e \ddot{v}_{ij} + (\nu + \kappa) i j u_{ij} + \left(\frac{\kappa}{\beta^2} i^2 + \frac{\beta^2}{\gamma} j^2 \right) v_{ij} - h_{ij}^{(y)} \end{aligned} \quad (3.50)$$

olmak üzere $L_1(u, v, w)$ ve $L_2(u, v, w)$ ifadeleri

$$\begin{aligned} \frac{c}{\pi Eh} L_1(u, v, w) &= -e \left[\ddot{r}_U - \frac{1}{\beta} \ddot{r}_D \left(y - \frac{\pi}{2} \right) + \ddot{\alpha}_D U_D \right] - \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(x)} \sin ix \cos jy \\ \frac{c}{\pi Eh} L_2(u, v, w) &= -e \left[\ddot{r}_V + \beta \ddot{r}_D \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \ddot{\alpha}_D V_D \right] - \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(y)} \cos ix \sin jy \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde edilir. Gerilme fonksiyonundan elde edildiği için $U_S V_S$, U_D , V_D li terimler, (3.15) hareket denklemlerinden ilk ikisini statik halde Kirchhoff plağı için sağlar. Bundan dolayı yukarıdaki ifadelerde α_S ve α_D li terim yoktur. Sadece $\ddot{\alpha}_D$ li terim vardır.

(3.25), (3.39), (3.44) ifadeleri (3.17) de yerlerine konulursa $H_{ij}^{(1)}$, $H_{ij}^{(2)}$, $H_{ij}^{(3)}$;

$$\begin{aligned} H_{ij}^{(1)} &= \frac{\gamma}{\beta} i u_{ij} + \nu \beta j v_{ij} + \frac{\gamma}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \nu \beta^2 h_{ij}^{(2)} \\ H_{ij}^{(2)} &= \frac{\nu}{\beta} i u_{ij} + \frac{\beta}{\gamma} j v_{ij} + \frac{\nu}{\beta^2} h_{ij}^{(1)} + \frac{\beta^2}{\gamma} h_{ij}^{(2)} \\ H_{ij}^{(3)} &= -\kappa \beta j u_{ij} - \frac{\kappa}{\beta} i v_{ij} + \kappa h_{ij}^{(3)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

olmak üzere $L_3(u, v, w)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
 & \frac{c}{\pi Eh} L_3(u, v, w) = \\
 & -e \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \ddot{f}_{mn} \left[x_m y_n - \bar{c} \left(\frac{1}{\beta^2} x_{m,xx} y_n + \beta^2 x_{m,yy} y_n \right) \right] \\
 & -\bar{c} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M (f_{mn} - g_{mn}) \left[\frac{\gamma}{\beta^4} x_{m,xxxx} y_n + 2(v+2k) x_{m,xx} y_n, yy + \frac{\beta^4}{\gamma} x_{m,yy} y_n, yyyy \right] \\
 & + \frac{e}{\beta} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M f_{mn} x_{m,x} y_n \left[\ddot{r}_U - \frac{1}{\beta} \ddot{r}_D (y - \frac{\pi}{2}) + \ddot{\alpha}_D U_D + \sum_i^N \sum_j^N \ddot{u}_{ij} \sin ix \cos jy \right] \\
 & + e\beta \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M f_{mn} x_{m,y} y_n \left[\ddot{r}_V + \beta \ddot{r}_D (x - \frac{\pi}{2}) + \ddot{\alpha}_D V_D + \sum_i^N \sum_j^N \ddot{v}_{ij} \cos ix \sin jy \right] \\
 & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M f_{mn} x_{m,xx} y_n \left\{ \frac{1}{\beta^2} \left[\alpha_S \sigma_{xx}^{(S)} + \alpha_D \sigma_{xx}^{(D)} \right] + \frac{1}{\beta^2} \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(1)} \cos ix \cos jy \right\} \\
 & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M f_{mn} 2x_{m,x} y_n, y \left\{ \left[\alpha_S \sigma_{xy}^{(S)} + \alpha_D \sigma_{xy}^{(D)} \right] + \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(3)} \sin ix \sin jy \right\} \\
 & + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M f_{mn} x_{m,y} y_n, yy \left\{ \beta^2 \left[\alpha_S \sigma_{yy}^{(S)} + \alpha_D \sigma_{yy}^{(D)} \right] + \beta^2 \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(2)} \cos ix \cos jy \right\}
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.53)

(3.19), (3.51), (3.53) ifadeleri (3.49) da yerlerine konulursa, (3.21) iç çarpımı nedeniyle karşılaşılan integraller, trigonometrik fonksiyonların veya polinomlarla çarpımlarının Tablo-3.2 deki integralleridir.

Bu integrallerin sonuçları parça parça integrasyonla kolayca elde edilebilir.

(3.19), (3.22), (3.46), (3.48), (3.51), (3.53) tanım ve ifadeleri ve Tablo 3.2 integralleri (3.49) v.i.b. nda yerlerine konulduktan sonra δr_U , δr_V , δr_D , δu_{ij} , δv_{ij} , δf_{ij} lerin katsayıları sıfır eşitlenirse sadece zamana bağlı

Tablo-3.2. (3.54)-(3.57) de geçen aşağıdaki integraller
 $[0, \pi]$ aralığında hesaplanacaktır.

$I^O = \frac{1}{\pi} \int dx = 1$	$I^{OUI} = \frac{1}{\pi^2} \iint u^{(i)} dx dy$
$I^1 = \frac{1}{\pi} \int (x - \frac{\pi}{2}) dx = 0$	$I^{1UI} = \frac{1}{\pi^2} \iint u^{(i)} (y - \frac{\pi}{2}) dx dy$
$I^2 = \frac{1}{\pi} \int (x - \frac{\pi}{2})^2 dx = \frac{1}{12}$	$I_{mn}^{Ui} = \frac{1}{\pi^2} \iint u^{(i)} \sin mx \cos ny dx dy$
$I_i^{os} = \frac{1}{\pi} \int \sin ix dx$	$I^{OVi} = \frac{1}{\pi^2} \iint v^{(i)} dx dy$
$I_i^{oc} = \frac{1}{\pi} \int \cos ix dx$	$I^{1Vi} = \frac{1}{\pi^2} \iint v^{(i)} (-\frac{\pi}{2}) dx dy$
$I_i^{1c} = \frac{1}{\pi} \int (x - \frac{\pi}{2}) \cos ix dx$	$I_{mn}^{Vi} = \frac{1}{\pi^2} \iint v^{(i)} \cos mx \sin ny dx dy$
$I_{im}^{ss} = \frac{1}{\pi} \int \sin ix \sin mx dx$	$I_{klmn}^U = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, X_n U_D dx dy$
$I_{im}^{cc} = \frac{1}{\pi} \int \cos ix \cos mx dx$	$I_{klmn}^V = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, Y_n V_D dx dy$
$X_{km}^O = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m dx$	$I_{klmn}^{S1} = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, XX_n \sigma_{xx}^{(S)} dx dy$
$X_{km}^1 = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m, x dx$	$I_{klmn}^{D1} = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, XX_n \sigma_{xx}^{(D)} dx dy$
$X_{km}^2 = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m, xx dx$	$I_{klmn}^{S2} = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, YY_n \sigma_{yy}^{(S)} dx dy$
$X_{km}^4 = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m, xxxx dx$	$I_{klmn}^{D2} = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, YY_n \sigma_{yy}^{(D)} dx dy$
$Y_{ln}^O = \frac{1}{\pi} \int Y_l Y_n dy$	$I_{klmn}^{S3} = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, XY_n \sigma_{xy}^{(S)} dx dy$
$Y_{ln}^1 = \frac{1}{\pi} \int Y_l Y_n, y dy$	$I_{klmn}^{D3} = \frac{1}{\pi^2} \iint X_k Y_l X_m, XY_n \sigma_{xy}^{(D)} dx dy$
$Y_{ln}^2 = \frac{1}{\pi} \int Y_l Y_n, yy dy$	$Y_{ln}^{O1} = \frac{1}{\pi} \int \int Y_l Y_n (y - \frac{\pi}{2}) dy$
$Y_{ln}^4 = \frac{1}{\pi} \int Y_l Y_n, yyyy dy$	$Y_{lnj}^{1s} = \frac{1}{\pi} \int \int Y_l Y_n \sin jy dy$
$X_{km}^{o1} = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m (x - \frac{\pi}{2}) dx$	$Y_{lnj}^{oc} = \frac{1}{\pi} \int \int Y_l Y_n \cos jy dy$
$X_{kmi}^{1s} = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m, x \sin ix dx$	$Y_{lnj}^{2c} = \frac{1}{\pi} \int \int Y_l Y_n, yy \cos jy dy$
$X_{kmi}^{oc} = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m \cos ix dx$	
$X_{kmi}^{2c} = \frac{1}{\pi} \int X_k X_m, xx \cos ix dx$	

$$-\left\{ e \ddot{r}_U + e \ddot{\alpha}_D \sum d_i I^{OVi} + \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(x)} I_i^{os} I_j^{oc} \right\} = 0 \quad (3.54)$$

$$-\left\{ e \ddot{r}_V + e \ddot{\alpha}_D \sum d_i I^{OVi} + \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(y)} I_i^{oc} I_j^{os} \right\} = 0$$

$$-\left\{ + \frac{1}{\beta^2} e \ddot{r}_D \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{\beta} e \ddot{\alpha}_D \sum d_i I^{1Ui} - \frac{1}{\beta} \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(x)} I_i^{os} I_j^{1c} \right.$$

$$\left. + \beta^2 e \ddot{r}_D \frac{\pi^2}{12} + \beta e \ddot{\alpha}_D \sum d_i I^{1Vi} + \beta \sum_i^N \sum_j^N H_{ij}^{(y)} I_i^{1c} I_j^{os} \right\} = 0 \quad (3.55)$$

$$-\left\{ + e \ddot{r}_U I_m^{os} I_n^{oc} - \frac{1}{\beta} e \ddot{r}_D I_m^{os} I_n^{1c} + e \ddot{\alpha}_D \sum d_i I_{mn}^{Ui} + \sum_i \sum_j H_{ij}^{(x)} I_{im}^{ss} I_{jn}^{cc} \right.$$

$m=1, 2, 3, \dots, N$

$n=0, 1, 2, \dots, N$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N_D} \lambda_k \frac{\partial D_k}{\partial u_{mn}} \right\} = 0 \quad (3.56)$$

$$-\left\{ + e \ddot{r}_V I_m^{oc} I_n^{os} + \beta e \ddot{r}_D I_m^{1c} I_n^{os} + e \ddot{\alpha}_D \sum d_i I_{mn}^{Vi} + \sum_i \sum_j H_{ij}^{(y)} I_{im}^{cc} I_{jn}^{ss} \right.$$

$m=0, 1, 2, \dots, N$

$n=1, 2, 3, \dots, N$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N_D} \lambda_k \frac{\partial D_k}{\partial v_{mn}} \right\} = 0$$

$$-e \sum_m^M \sum_n^M \ddot{f}_{mn} \left[x_{km}^o y_{ln}^o - \bar{c} \frac{1}{\beta^2} x_{km}^2 y_{ln}^o + \beta^2 x_{km}^o y_{ln}^2 \right]$$

$$- \bar{c} \sum_m^M \sum_n^M (f_{mn} - g_{mn}) \left[\frac{\gamma}{\beta^2} x_{km}^4 y_{ln}^o + 2(v+2\kappa) x_{km}^2 y_{ln}^2 + \frac{\beta^4}{\gamma} x_{km}^o y_{ln}^4 \right]$$

$$+ \sum_m^M \sum_n^M f_{mn} \left\{ \frac{e}{\beta} \left[\ddot{r}_U x_{km}^1 y_{ln}^o - \frac{1}{\beta} \ddot{r}_D x_{km}^1 y_{ln}^{o1} + \ddot{\alpha}_D I_{klmn}^U + \sum_i^N \sum_j^N \ddot{v}_{ij} x_{kmi}^{1s} y_{lnj}^{oc} \right] \right\}$$

$$+ e \beta \left[\ddot{r}_V x_{km}^o y_{ln}^1 + \beta \ddot{r}_D x_{km}^{o1} y_{ln}^1 + \ddot{\alpha}_D I_{klmn}^V + \sum_i^N \sum_j^N \ddot{v}_{ij} x_{kmi}^{oc} y_{lnj}^{1s} \right]$$

$$+ \alpha_S \sum_m^M \sum_n^M f_{mn} \left\{ \frac{1}{\beta^2} I_{klmn}^{S1} + 2 I_{klmn}^{S3} + \beta^2 I_{klmn}^{S2} \right\}$$

$$+ \alpha_D^{(t)} \sum_m^M \sum_n^M f_{mn} \left\{ \frac{1}{\beta^2} I_{klmn}^{D1} + 2 I_{klmn}^{D3} + \beta^2 I_{klmn}^{D2} \right\} \quad (3.57)$$

$$+ \sum_m^M \sum_n^M f_{mn} \left\{ \sum_i^N \sum_j^N \left[\frac{1}{\beta^2} H_{ij}^{(1)} x_{kmi}^{(2c)} y_{lnj}^{oc} + \beta^2 H_{ij}^{(2)} x_{kmi}^{oc} y_{lnj}^{2c} + 2 H_{ij}^{(3)} x_{kmi}^{1s} y_{lnj}^{1s} \right] \right\}$$

$$+ \sum_{r=1}^{N_D} \lambda_r^2 \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \left[-x_{kmi}^{(1)} y_{nlj}^{(1)} \frac{\partial D_r}{\partial h_{ij}^{(1)}} - x_{kmi}^{(2)} y_{nlj}^{(2)} \frac{\partial D_r}{\partial h_{ij}^{(2)}} \right] = 0$$

$k=1, 2, \dots, M$
 $\ell=1, 2, \dots, M$

adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

3.6. DENKLEMLERİN MATRİS BİÇİMİNDE GÖSTERİLMESİ VE LAGRANGE ÇARPANLARININ YOK EDİLMESİ

(3.54), (3.55), (3.56) ve (3.57) diferansiyel denklemleri ve (3.46) kısıtlayıcı denklemleri, matris biçimde aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\begin{bmatrix} E_7 & E_5 & E_6 \\ E_8 & E_1 & E_2 \\ E_9 & E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_r \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_5 & F_6 \\ F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_3^T \\ G_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} + \ddot{\alpha}_D \begin{bmatrix} y_r \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_r(f, g) \\ h_1(f, g) \\ h_2(f, g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$Af + Bf - Bg + C(\ddot{z})f - \alpha_S Sf - \alpha_D(t)Df + Z(z)f + L(\lambda)f + H(f, g)f = 0 \quad (3.59)$$

$$\begin{bmatrix} G_3 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + h_o(f, g) = 0 \quad (3.60)$$

Burada kalın yazılmış büyük harfler matrisleri, kalın yazılmış küçük harfler vektörleri gösterir. f ve z vektörleri

$$\begin{aligned} f &= [f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1M}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2M}, \dots, f_{M1}, f_{M2}, \dots, f_{MM}]^T \\ z_r &= [r_U, r_V, r_D]^T \\ z_2 &= [u_{N-1,0}, u_{N-1,1}, u_{N-1,2}, \dots, u_{N-1,N}, u_{N0}, u_{N1}, u_{N,2}, \dots, u_{NN}, \\ &\quad v_{0,N-1}, v_{1,N-1}, v_{2,N-1}, \dots, v_{N,N-1}, v_{0N}, v_{1N}, v_{2N}, \dots, v_{NN}]^T \\ z_1 &= [u_{10}, u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1N}, u_{20}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2N}, \\ &\quad \dots, u_{N-2,0}, u_{N-2,1}, u_{N-2,2}, \dots, u_{N-2,N}, \\ &\quad v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0,N-2}, v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1,N-2}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2,N-2}, \\ &\quad \dots, v_{N-2,1}, v_{N-2,2}, \dots, v_{N-2,N-2}, \\ &\quad v_{N-1,1}, v_{N-1,2}, \dots, v_{N-1,N-2}, v_{N1}, v_{N2}, \dots, v_{N,N-2}]^T \end{aligned} \quad (3.61)$$

zamana bağlı hesaplanması gereken bilinmeyen fonksiyonlardan oluşmaktadır. Bunlardan z_2 vektörü (3.59) da Fourier serilerinde geçen u_{ij} ve v_{ij} ler arasında indisleri aşağıdaki tabloda çerçeveye içinde gösterilenlerle kurulmuştur. Diğer u_{ij} ve v_{ij} ler z_1 vektörüne konulmuştur.

u_{ij} lerin indisleri	v_{ij} lerin indisleri
10 11 1N	01 02 0,N-2 0,N-1 ON
20 21 2N	11 12 1,N-2 1,N-1 1N
N-2,0 N-2,1 N-2,N	21 22 2,N-2 2,N-1 2N
N-1,0 N-1,1 N-1,N N0 N1 NN	N1 N2 N,N-2 N,N-1 NN

g vektörü, (3.25) de önsehimin seri açılımındaki katsayılarının; λ vektörü ise (3.46) kısıtlayıcı denklemlerine karşılık gelen Lagrange çarpanlarının oluşturduğu

$$g = [g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1M}, g_{21}, g_{22}, \dots, g_{2M}, \dots, g_{M1}, g_{M2}, \dots, g_{MM}]^T$$

$$\lambda = [\lambda_0^{(a)}, \lambda_1^{(a)}, \dots, \lambda_N^{(a)}, \lambda_0^{(b)}, \lambda_1^{(b)}, \dots, \lambda_N^{(b)}, \lambda_0^{(c)}, \lambda_1^{(c)}, \dots, \lambda_N^{(c)}, \lambda_0^{(d)}, \lambda_1^{(d)}, \dots, \lambda_N^{(d)}]^T \quad (3.62)$$

vektörleridir. $E_1, E_9, F_1, F_6, G_3, G_4, A, B, C, S, D, Z, H, L$ matrisleri ile h_r, h_0, h_1, h_2 vektörlerinin elemanları ise (3.58)–(3.60) denklemleri ile (3.54)–(3.57) denklemlerinin karşılaştırılmamasından elde edilir.

(3.58)–(3.60) daki matrislerden ve vektörlerden bir kısmı sabit oldukları halde, bir kısmının elemanları ise z, f, g veya λ nin bileşenlerinin birer fonksiyonudurlar. Denklemlerde parantez içinde bu belirtildmiştir. H matrisi ve h_0, h_1, h_2, h_r vektörlerinin elemanları, f_{ij} ve g_{ij} lerin kuadratik fonksiyonlarıdır.

(3.60) kısıtlayıcı denklemlerinden z_2 , (3.58) diferansiyel denklemının birinci satırından \ddot{z}_r , üçüncü satırından λ vektörleri; z_1 ve f bilinmeyenlerine bağlı olarak

$$z_2 = K^{(2)} z_1 + K^{(4)} h_0 \quad (3.63)$$

$$\ddot{z}_r = R^{(1)} z_1 + R^{(2)} z_1 + R^{(3)} \ddot{h}_0 + R^{(4)} h_0 + R^{(5)} h_r + \ddot{\alpha}_D R^{(5)} y_r \quad (3.64)$$

$$\lambda = L^{(1)} \ddot{z}_1 + L^{(2)} z_1 + L^{(3)} \ddot{h}_0 + L^{(4)} h_0 + L^{(5)} h_r + L^{(6)} h_2 + \ddot{\alpha}_D [L^{(5)} y_r + L^{(6)} y_2] \quad (3.65)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki matrisler

$$\begin{aligned} K^{(2)} &= -G_4^{-1} G_3 & L^{(1)} &= -G_4^{-T} [E_3 + E_4 K^{(2)} + E_9 R^{(1)}] \\ K^{(4)} &= -G_4^{-1} & L^{(2)} &= -G_4^{-T} [F_3 + F_4 K^{(2)} + E_9 R^{(2)}] \\ R^{(1)} &= -E_7^{-1} [E_5 - E_6 G_4^{-1} G_3] & L^{(3)} &= -G_4^{-T} [E_4 K^{(4)} + E_9 R^{(3)}] \\ R^{(2)} &= -E_7^{-1} [F_5 - F_6 G_4^{-1} G_3] & L^{(4)} &= -G_4^{-T} [F_4 K^{(4)} + E_9 R^{(4)}] \\ R^{(3)} &= E_7^{-1} E_6 G_4^{-1} & L^{(5)} &= -G_4 E_9 E_7^{-1} \\ R^{(4)} &= E_7^{-1} F_6 G_4^{-1} & L^{(6)} &= -G_4^{-T} \\ R^{(5)} &= -E_7^{-1} \end{aligned} \quad (3.66)$$

olur. (3.63)-(3.66) ifadeleri (3.58) diferansiyel denkleminin ikinci satırında yerlerine konulursa sadece (3.61) deki f ve z_1 bilinmeyenlerine bağlı matris biçiminde

$$E \ddot{z}_1 + F z_1 + \ddot{\alpha}_D y + h = 0 \quad (3.67)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada y ve h vektörleri

$$y = Y^{(5)} y_r + Y^{(6)} y_2 + y_1 \quad (3.68)$$

$$h = Y^{(3)} \ddot{h}_0 + Y^{(4)} h_0 + Y^{(5)} h_r + Y^{(6)} h_2 + h_1$$

şeklinde, E , F , $Y^{()}$ sabit matrisleri ise

$$E = E_1 + E_8 R^{(1)} + G_3^T L^{(1)} + E_2 K^{(2)}$$

$$F = F_1 + E_8 R^{(2)} + G_3^T L^{(2)} + F_2 K^{(2)}$$

$$Y^{(3)} = E_8 R^{(3)} + G_3^T L^{(3)} - E_2 G_4^{-1} \quad (3.69)$$

$$Y^{(4)} = E_8 R^{(4)} + G_3^T L^{(4)} - F_2 G_4^{-1}$$

$$Y^{(5)} = G_3^T L^{(5)} - E_8 E_7^{-1}$$

$$Y^{(6)} = -G_3^T G_4^{-T}$$

olur.

(3.59) ve (3.67) diferansiyel denklemlerinden f ve z_1 vektörleri hesaplandıktan sonra (3.63), (3.64) ve (3.65) ifadelerinden \ddot{z}_r , z_2 , λ vektörleri hesaplanabilir.

Bu çalışmada $t=0$ başlangıç anında plak, statik kenar yükleri ile yüklü alınmıştır. (3.67) diferansiyel denkleminin statik halde

$$F z_1 = -h$$

olduğu düşünülürse aşağıdaki sonuçlar çıkarılır. Kirchhoff plaqında $h = 0$ olup z_1 vektörü sıfır olarak elde edilir. Bunun sonucu olarak (3.39) dan düzlem içi yer değiştirmeler ve hızlar

$$u = \alpha_S U_S, \quad v = \alpha_S V_S, \quad \dot{u} = \dot{v} = 0$$

olarak hesaplanır. Bunlar kullanılır ve (3.39) ifadelerinde bütün terimler Fourier serilerine açılırsa $t=0$ başlangıç anında

$$\begin{aligned} u_{ij}(0) &= -K\alpha_D(0) \sum_{r=a,b,c,d} I_{ij}^{Ur} \\ \dot{u}_{ij}(0) &= -K\dot{\alpha}_D(0) \sum_r I_{ij}^{Ur} \quad (3.70) \\ v_{ij}(0) &= -K\alpha_D(0) \sum_r I_{ij}^{Vr} \\ \dot{v}_{ij}(0) &= -K\dot{\alpha}_D(0) \sum_r I_{ij}^{Vr} \end{aligned}$$

başlangıç koşulları elde edilir. Burada i veya j den biri sıfır ise $K=2/\pi^2$ aksi halde $K=4/\pi^2$ şeklindedir.

Von Kármán plağında ise $h \neq 0$ olup z_1 vektörü sıfırdan farklıdır. Bundan dolayı (3.70) başlangıç koşulları geçerli olmayıp Bölüm 4.3.2 de açıklanacak olan iterasyondan faydalananarak elde edilen (4.22) başlangıç koşulları kullanılmalıdır.

Düzlem dışı yer değiştirmeye ve hız bileşenleri için başlangıç koşulları yeri geldikçe belirtilecektir. Ancak kenar yükleri olmayan plakta (3.25) ifadeleri gözönüne alınırsa

$$w = w_o, \quad f_{ij} = g_{ij} \quad (3.71)$$

olduğu bilinmektedir.

3.7. ORTOTROP DİKDÖRTGEN LEVHALARIN DÜZLEM İÇİ TİTREŞİMLERİ

3.7.1. Giriş

Bu bölümde ortotrop malzemeden yapılmış ince dikdörtgen levhaların düzlem içi doğrultularda serbest ve zorlanmış titreşimleri incelenmiştir. Bunun için yukarıda elde edilen denklemler kullanılmış olup u , v düzlem içi yer değiştirmeleri (3.39) daki gibi seçilmiştir. Bu ifadelerde U_S , V_S , U_D , V_D li terimler, (2.50) sınır koşullarının, \bar{N} , \bar{K} kenar yüklerine ait kısmını sağlarlar. Şekil-2.7 de gösterilen kenar yükleri, Şekil-2.4 deki kenar yüklerinin herhangi bir doğrusal toplamı olup, (3.4) de boyutsuz hale getirilmiştir. (3.41) de statik ve dinamik kenar yükleri olmak üzere iki kısma ayrılmıştır. U_S ve V_S , statik kenar yüklerine karşılıktır. U_D ve V_D ise dinamik kenar yüklerine karşılıktır.

(3.25) ifadelerinde görülen w_o önsehimi ve düzlem dışı w yer değiştirmesi, levha probleminde sıfır alınır. Bunun sonucu olarak (3.44) gerilme ifadelerinde $h_{ij}^{(1)}$, $h_{ij}^{(2)}$, $h_{ij}^{(3)}$ terimleri, (3.63), (3.64), (3.65) ifadelerinde \ddot{h}_o , h_o , h_1 , h_2 vektörleri sıfır olur. (3.67) diferansiyel denklemi, $\dot{h} = 0$ konulursa

$$E\ddot{z}_1 + Fz_1 = -\ddot{\alpha}_D y \quad (3.72)$$

şeklini alır. Burada y sabit bir vektör, $\alpha_D(t)$ yüklemenin zamana

bağlılığını belirten bir fonksiyondur. z_1 ise u_{ij} ve v_{ij} bilinmemenlerinin bir kısmı ile (3.61) deki gibi kurulan ve (3.70) başlangıç koşulları altında (3.72) diferansiyel denkleminden hesaplanması gereken zamana bağlı bilinmeyen vektördür. E, F matrisleri pozitif definit ve simetrik olan matrislerdir.

3.7.2. Serbest Titreşimler

Yüksüz levhada $y=0$ olacağı için (3.71) diferansiyel denklemi

$$E \ddot{z}_1 + F z_1 = 0 \quad (3.73)$$

homogen halini alır. z_1 vektörü için

$$z_1(t) = q \cos \omega(t-t_0)$$

çözümü önerilir [72] ve bu çözüm (3.73) de yerine konulursa

$$(-\omega^2 E + F) q = 0 \quad (3.74)$$

cebrik denklemi elde edilir. Homogen olan bu denklemi $q = 0$ vektörü sağlar. (3.74) denkleminin sıfırdan farklı q_i , ($i=1, 2, \dots, N_1$) çözümlerinin araştırılması, matris cebrinden biliindiği gibi bir genel özdeğer problemidir. E ve F matrislerinin boyutu olan N_1 inci dereceden

$$\det(-\omega^2 E + F) = 0 \quad (3.75)$$

polinom denklemini sağlayan N_1 tane ω_i açısal frekans değeri ve bunlara karşılık N_1 tane (3.74) denkleminin çözümü olan sıfırdan farklı q_i vektörleri vardır. q_i vektörlerine bu genel özdeğer probleminin sağ özvektörleri, bunlara karşılık olan ω_i sayılarına ise özdeğerleri denir. q_i lerin birer skalerle çarpımı da (3.74) denkleminin çözümüdür. Özdeğerler ve özvektörler

$$\Omega^2 = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{N_1}^2) \quad (3.76)$$

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_{N_1}]$$

matrisleri ile gösterilsin. Sol özvektörler ise

$$(-\omega^2 E^T + F^T) p = 0 \quad (3.77)$$

cebrik denkleminin sıfırdan farklı p_i çözümüdür. Bunların oluştuğu

$$P = [p_1, p_2, \dots, p_{N_1}] \quad (3.78)$$

matrisi, simetrik E ve F matrisleri halinde Q ya eşittir (bu çalışmada $P=Q$ dur). P ve Q matrisleri

$$P^T E Q = I, \quad P^T F Q = \Omega^2 \quad (3.79)$$

bağıntıları ile normalleştirilebilir.

(3.73) diferansiyel denklemi soldan P^T ile çarpılır ve

$$z_1 = Q \bar{z}, \quad \bar{z} = P^T E z_1 \quad (3.80)$$

değişken dönüşümü yapılrsa titreşimin

$$\ddot{\bar{z}}_i + \omega_i^2 \bar{z}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (3.81)$$

şeklindeki modal denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümü

$$\bar{z}_i = a_i \sin \omega_i t + b_i \cos \omega_i t \quad (3.82)$$

şeklindedir. Burada a_i ve b_i ler; $z_1(0)$ ve $\dot{z}_1(0)$ başlangıç koşulları verildiğinde

$$b_i = \bar{z}_i(0) = P_i^T E z_1^{(0)} \quad (3.83)$$

$$a_i = \frac{1}{\omega_i} \dot{\bar{z}}_i(0) = \frac{1}{\omega_i} P_i^T E \dot{z}_1(0)$$

şeklinde hesaplanırlar. (3.70) başlangıç koşulları, zorlanmış titreşimler incelenirken kullanılacaktır.

(3.39) ifadeleri, i ve j indislerinin N ile sınırlaması dolayısıyla yaklaşık ifadelerdir. Yakınsama, N nin büyük alınması oranında artar [70]. Buna bağlı olarak da ω_i serbest titreşim frekansları ve bu frekanslara karşılık olan q_i titreşim modları daha doğru hesaplanabilir. Bu yakınsama bir örnek üzerinde biraz sonra gösterilecektir.

Şimdi simetrik ve antisimetrik yer değiştirmeler üzerinde duralım.

(3.39) Fourier serilerindeki terimler levha merkezinden kenarlara

paralel olarak çizilen eksenlere göre, i ve j indislerinin tek veya çift olmalarına bağlı olarak simetrik veya antisimetrik yer değiştirmeleri belirtmektedir. Bu simetri durumlarının σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} gerilmeleri ile u ve v yer değiştirmeleri için farklı olduğu Tablo-3.3 de görülmektedir. Bu çalışmada simetri durumları için σ_{xx} ve σ_{yy} ye ait sütundaki adlandırma kullanılmıştır.

Tablo-3.3 (3.39) ve (3.44) ifadelerinde Fourier serilerindeki terimlerin, i ve j indislerinin değerlerine göre simetri durumları

$i=tek$	$j=tek$	σ_{xx} ve σ_{yy}	σ_{xy}	u	v
		AA	SS	SA	AS
$i=tek$	$j=\text{çift}$	AS	SA	SS	AA
$i=\text{çift}$	$j=tek$	SA	AS	AA	SS
$i=\text{çift}$	$j=\text{çift}$	SS	AA	AS	SA

Fourier dizisi terimlerinin diklik özelliği dolayısıyla Tablo-3.2 deki integraller, bazı indisler için sıfır olmakta ve (3.73)deki E ve F matrislerinin bazı terimleri sıfır olarak elde edilmektedir. Sıfır olan bu terimler, matris biçimde (3.72) deki gibi yazılmış diferansiyel denklem sisteminde yapılacak satır ve sütun değiştirmeleri sonunda bir araya toplanabilmektedir. Bunun sonucu olarak E ve F matrislerinin herbiri

$$E = \begin{bmatrix} E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{t\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\zeta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\zeta\zeta} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{t\zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\zeta t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

şeklinde diyagonalde sıralanmış dört alt matris halini almaktadır. Bu alt matrisler yardımıyla yukarıda belirtilen dört simetri durumuna ait titreşimler, birbirlerinden bağımsız olarak hesaplanabilmektedir [11]. Böylece bilgisayarda büyük ölçüde bellek ve zaman kazanılmaktadır.

Aşağıdaki örnekte, Boron-Epoxy'dan yapılmış boyutları ve malzeme özelliklerini

$$a = 0,5 \text{ m}$$

$$c = \sqrt{ab} = 0,4472 \text{ m}$$

$$b = 0,4 \text{ m}$$

$$\beta = \sqrt{a/b} = 1.118$$

$$h = 1 \text{ mm}$$

$$\nu = \sqrt{\nu_{12} \nu_{21}} = 0,07906$$

$$\rho = 1618,35 \text{ kg/m}^3$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}} = 3,1623 \quad (3.85)$$

$$\nu_{12} = 0,25$$

$$E = \frac{\sqrt{E_{11} E_{22}}}{1-\nu^2} = 87,764 \text{ GPa}$$

$$\nu_{21} = 0,025$$

$$\kappa = G_{12}/E = 0,1178$$

$$E_{11} = 275,8 \text{ GPa}$$

$$Eh = 87,764 \text{ MN/m}$$

$$E_{22} = 27,58 \text{ GPa}$$

$$e = 0,3713 \times 10^9 \text{ saniye}^2$$

$$G_{12} = 10,3425 \text{ GPa}$$

olan bir levhanın düzlem içi serbest titreşim frekansları, dört ayrı simetri durumu için ayrı ayrı hesaplanmış* ve (3.39) da N nin artmasına bağlı olarak yakınsadığı gösterilmiştir (Şekil- 3 .2). Tablo- 3 .4 de ise N=4 için her simetri durumuna ait titreşim frekansları ve onlara karşılık olan özvektörler (titreşim modları) verilmiştir. Serbest titreşim modlarında levha kenarlarında normal ve kayma gerilmeleri sıfır olmaktadır.

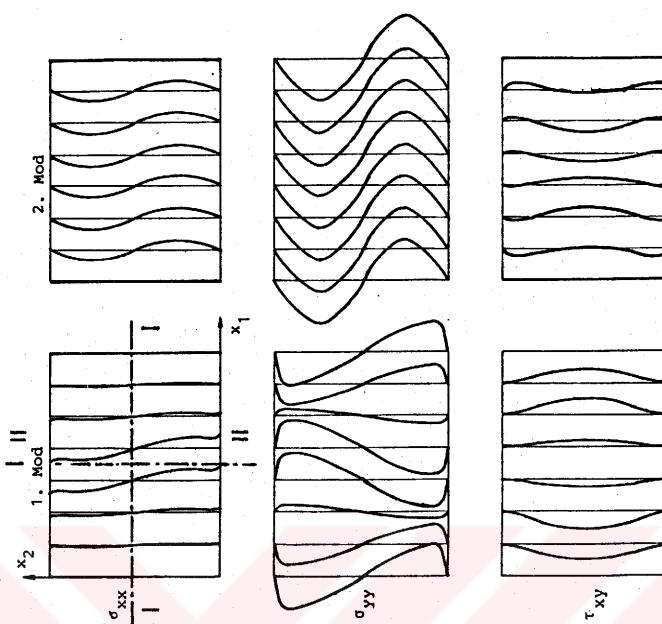
Seçilen bir moddaki titreşimde gerilme dağılımını belirlemek için o modu belirleyen q_i özvektörü z_1 vektörü olarak alınmıştır ($z_1=q_i$). z_2 vektörü (3.63) yardımıyla hesaplanmıştır. (3.61) den görüleceği üzere bu iki vektörün elemanları, (3.39) yer değiştirmeye ifadelerindeki katsayılardır. Serbest titreşimlerin incelenmesinde kenar yükleri sıfır olacağından $\alpha_S=\alpha_D=0$ dır. Bunlar (3.39) da yerine konularak q_i titreşim modundaki yer değiştirmeye biçimini belirlenmiştir. Gerilme durumu ise (3.44) ifadeleri yardımıyla hesaplanmıştır.

i ve j indisleri için N=14 sınırı kullanılarak i=çift, j=tek simetri durumuna ait ilk ve ikinci modlardaki titreşimlerde levhada ki gerilme dağılımı Şekil- 3.3 de çizilmiştir.

* Bu çalışmada özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması [78] daki bilgisayar programlarından yararlanılmıştır.



Sekil 3.2 : Düzlem içi serbest titresim frekansları (3.39) ifade edenindeki terim sayısı artırıldıkça gerçek değerlerin yakınsaması tır. Levhaın simetrik ve antisimetrik titresimleri birbirinden bağımsız olarak incelenmiştir. Sekilde görülen AA, AS, SA, SS harfleri dur. Gerçekten σ_{xx} ve σ_{yy} ye ait sekillerde levha merkezinden kenarlara paralel olarak çizilen eksene göre simetri, II-III eksene göre antisimetri olduğunu söylemektedir.



Sekil 3.3 : Bir titresim modundaki titresim sırasında levha kenarlarında normal ve kayna gerilmeleri sıfır olmaktadır. (3.39) ifade eden N sinirinin N=14 olması halinde iki titresim modundaki gerilme dödilimi yukarıda sekilde gösterilmiştir (2. mode alt t_xy gerilmeleri 100 kat büyütülmüş琪lmistir). Bu sinetri durumundaki ilk titresim modu. Gerçekte σ_{xy} ve σ_{yy} ye ait sekillerde levha merkezinden kenarlara paralel olarak çizilen eksene göre simetri, II-III eksene göre antisimetri olduğunu görelmektedir.

Tablo-3.4 : Düzlem içi serbest titreşim frekansları ve onlara karşılık gelen titreşim modları [(3.39) ifadelerinde N=4 sınırı kullanılmıştır].

M O D L A R :

(AA) SİMETRİ DURUMU

$$\sqrt{e} \omega_i = \begin{matrix} & 1.1017 & 1.2432 & 2.3933 & 2.7504 \\ \left[\begin{matrix} u_{11} \\ u_{13} \\ v_{11} \\ v_{31} \end{matrix} \right] = & \left[\begin{matrix} 0.0155 \\ 0.1256 \\ 2.2823 \\ -0.2869 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.1325 \\ 0.0060 \\ 0.4053 \\ 1.8744 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -0.5751 \\ 1.8109 \\ -0.0161 \\ 0.0913 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 2.3282 \\ 0.5686 \\ -1.2312 \\ -0.1656 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

(AS) SİMETRİ DURUMU

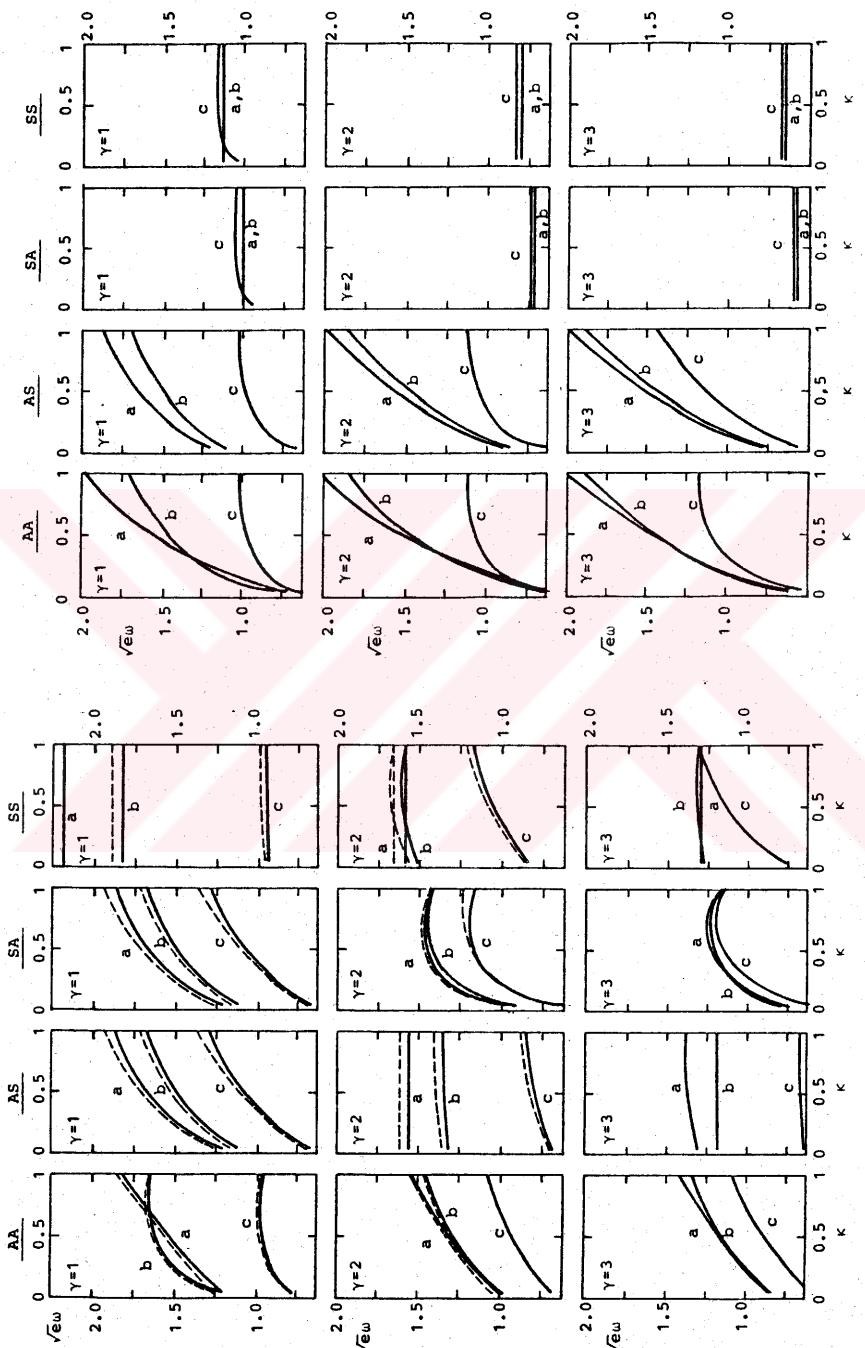
$$\sqrt{e} \omega_i = \begin{matrix} & 1.5789 & 1.8080 & 2.2922 & 2.6152 & 3.2762 \\ \left[\begin{matrix} u_{10} \\ u_{12} \\ u_{14} \\ v_{12} \\ v_{32} \end{matrix} \right] = & \left[\begin{matrix} 0.0219 \\ 0.3867 \\ -0.1629 \\ -1.7487 \\ 0.1070 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.0211 \\ 0.2482 \\ -0.0442 \\ 0.1522 \\ 1.7679 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.0038 \\ -1.8312 \\ -0.1881 \\ 0.2819 \\ 0.2240 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -0.0400 \\ 0.1513 \\ -1.8767 \\ 0.2041 \\ -0.1223 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 2.0564 \\ -0.0077 \\ -0.0413 \\ -0.0193 \\ 0.0188 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

(SA) SİMETRİ DURUMU

$$\sqrt{e} \omega_i = \begin{matrix} & 1.0313 & 1.2970 & 1.4813 & 3.9650 & 4.1314 \\ \left[\begin{matrix} u_{21} \\ u_{23} \\ v_{01} \\ v_{21} \\ v_{41} \end{matrix} \right] = & \left[\begin{matrix} 0.0669 \\ -0.0395 \\ -0.0125 \\ -1.8969 \\ 0.0126 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.0164 \\ -0.0160 \\ -2.0611 \\ 0.0121 \\ -0.0130 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.0389 \\ -0.0109 \\ -0.0139 \\ 0.0123 \\ 1.8976 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -1.5419 \\ -0.8227 \\ -0.0054 \\ 0.0544 \\ -0.0605 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -0.8593 \\ 1.5632 \\ -0.0158 \\ -0.0898 \\ 0.0667 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$

(SS) SİMETRİ DURUMU

$$\sqrt{e} \omega_i = \begin{matrix} & 1.5916 & 1.6772 & 1.9867 & 4.0063 & 4.0721 & 4.2642 \\ \left[\begin{matrix} u_{20} \\ u_{22} \\ u_{24} \\ v_{02} \\ v_{22} \\ v_{42} \end{matrix} \right] = & \left[\begin{matrix} -0.0003 \\ -0.0253 \\ 0.0224 \\ 1.2640 \\ 0.0593 \\ 0.0089 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.0100 \\ 0.1307 \\ -0.0822 \\ 0.0430 \\ -1.7839 \\ 0.0447 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -0.0105 \\ -0.0724 \\ 0.0262 \\ 0.0070 \\ -0.0466 \\ -1.7877 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -1.1757 \\ -0.5314 \\ -0.3138 \\ -0.0014 \\ 0.0443 \\ -0.0469 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} 0.4373 \\ -1.6197 \\ -0.3871 \\ -0.0070 \\ -0.0254 \\ -0.0030 \end{matrix} \right] & \left[\begin{matrix} -0.1281 \\ -0.4815 \\ 1.7042 \\ -0.0106 \\ -0.1448 \\ 0.1061 \end{matrix} \right] \end{matrix}$$



Sekil-3.4 Her simetri durumu için ilk titresim frekansının ortotrop malzeme parametrelerine bağlı olarak değişimini (Kare plak: $\beta=\sqrt{a/D} = 1.0$)
 (a) $v=0.05$, (b) $v=0.3$, (c) $v=0.8$, $N=4$
 [bakiniz (3.39) ifadeleri], $N=6$.

Sekil-3.5 : Her simetri durumu için ilk titresim frekansının ortotrop malzeme parametrelerine bağlı olarak değişimini (dikdörtgen plak: $\beta=\sqrt{a/D} = 0.5$). Burada $N=4$ sınırı kullanılmıştır.
 (a) $v=0.05$, (b) $v=0.3$, (c) $v=0.8$

Şekil-3.4 , 3.5 de ise titreşim frekanslarının ortotrop malzeme parametrelerine ve dikdörtgen levhanın kenarlarının oranına bağlı olarak değişimleri gösterilmiştir.

3.7.3. Zorlanmış Titreşimler

(3.72) diferansiyel denklemi soldan P^T ile çarpılır ve (3.80) dönüşümü kullanılırsa titreşimin

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 \ddot{z}_i = -\ddot{\alpha}_D P_i^T y, \quad i=1, 2, \dots, N_1 \quad (3.86)$$

modal denklemeleri elde edilir. Bu diferansiyel denklemelerin homogen kısmının çözümü (3.82) de verilmiştir. Sağ taraflı denklemin özel çözümü

$$\ddot{z}_i = -\frac{P_i^T y}{\omega_i} t - \int_0^t \ddot{\alpha}_D(\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (3.87)$$

Duhamel integrali [72] yardımıyla hesaplanır. (3.86) diferansiyel denklemelerinin genel çözümü ise homogen ve özel çözümlerinin toplamı ile

$$\ddot{z}_i = a_i \sin \omega_i t + b_i \cos \omega_i t + \int_0^t \frac{-P_i^T y}{\omega_i} \ddot{\alpha}_D(t-\tau) \sin \omega_i(t-\tau) d\tau \quad (3.88)$$

Şeklinde elde edilir. z_1 ve z_2 bilinmeyenleri ise daha sonra (3.80) ve (3.63) ifadeleri yardımıyla

$$\begin{aligned} z_1 &= Q \bar{z} = \sum_{i=1}^{N_1} \bar{z}_i q_i \\ z_2 &= K^{(2)} z_1 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Şeklinde hesaplanmaktadır. z_1 ve z_2 vektörlerinin elemanları (3.61) de görüldüğü üzere $u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ fonksiyonlarıdır. Seçilen bir t anında levhada yer değiştirme ve gerilme alanı (3.39) ve (3.44) ifadeleri yardımıyla bulunur. Sonra (3.3) ve (3.4) den yararlanarak ters dönüşümle gerçek yer değiştirme ve gerilme alanı elde edilir.

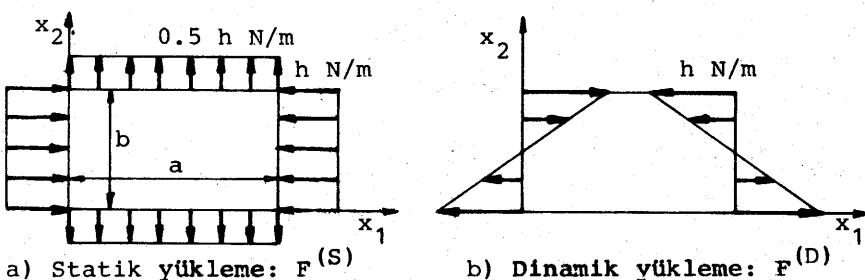
Bir örnek olarak (3.85) de malzeme özellikleri ve boyutları verilen dikdörtgen levha ele alınarak Şekil-3.6 daki yükler etkisindeki davranışını incelenmiştir.

Buna göre (2.71) ifadeleri

$$\begin{aligned} u_s &= \frac{1}{E} \left[-\frac{\beta}{\gamma(1-\nu^2)} - 0,5 \frac{\nu\beta}{1-\nu} \right] (x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{0,40025}{E} (x - \frac{\pi}{2}) \\ v_s &= \frac{1}{E} \left[+\frac{\nu}{\beta(1-\nu^2)} + 0,5 \frac{\gamma}{\beta(1-\nu^2)} \right] (y - \frac{\pi}{2}) = +\frac{1,49425}{E} (y - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{1}{E} \left[-\frac{2\beta}{\gamma(1-\nu^2)\pi} \right] (x - \frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) = -\frac{0,22649}{E} (x - \frac{\pi}{2})(y - \frac{\pi}{2}) \\ v_d &= \frac{1}{E} \frac{1}{(1-\nu^2)\pi} \left[\frac{\beta^3}{\gamma} (x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{\nu}{\beta} (y - \frac{\pi}{2})^2 \right] = \frac{0,14155}{E} (x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{0,02265}{E} (y - \frac{\pi}{2})^2 \end{aligned} \quad (3.91)$$

şeklinde hesaplanır. (2.7) deki α_s değeri $\alpha_s = 4 \times 10^{-4} E$ alınmıştır. $\alpha_d(t)$ fonksiyonunu belirleyen α değeri ise (bkz. Şekil 2.5) $\alpha = 6 \times 10^{-4} E$ olarak seçilmiştir. (3.39) ifadelerinde levhanın rıjit hareketini tanımlayan r_u , r_v , r_d ; $t=0$ anında sıfırdır. Seçilen yükler kendi aralarında daima dengede olduğu için rıjit yer değiştirmeye ortaya çıkmaz. (3.39) da $u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ bilinmeyen fonksiyonları ise $\alpha_d(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak (3.89) ifadeleri yardımıyla aşağıdaki gibi belirlenir.



Şekil-3.6. Uygulama için seçilen örnek yükleme;

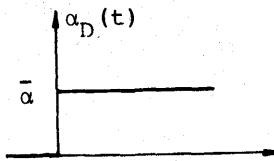
Bu yüklemeye göre (2.6) ifadesi ve Şekil-2.4 dikkate alınırsa $s_1 = -1$, $s_2 = 0.5$, $d_4 = 1$, $s_3 = s_4 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$ olduğu görülür.

3.7.3.1. $\alpha_D(t)$ nin Basamak Fonksiyonu Olması Hali

Bu halde $\ddot{\alpha}_D(t)=0$ olduğu için (3.87) Duhamel integrali sıfır olur. Sadece (3.86) modal denklemlerinin homogen kısmının (3.82) deki çözümü kalır. (3.91) ifadeleri ve

$$\alpha_D(0) = \bar{\alpha} = 6 \times 10^{-4} E \quad (3.92)$$

$$\dot{\alpha}_D(0) = 0$$



Sekil-3.7. Basamak fonksiyonu

değerleri (3.70) başlangıç koşullarında yerine konularak $u_{ij}(0)$, $v_{ij}(0)$, $\dot{u}_{ij}(0) = \dot{v}_{ij}(0) = 0$ başlangıç koşulları elde edilmiştir. (3.91) ifadelerinin simetri durumundan dolayı sadece $i = \text{çift}$ $j = \text{tek}$ indisler için başlangıç koşulları sıfırdan farklıdır. Tablo 3.3 de σ_{xx} ve σ_{yy} sütunundaki adlandırmaya göre SA simetri durumundaki titreşimler doğacak, diğer simetri durumlarında titreşimler ortaya çıkmayacaktır. u_{ij} ve v_{ij} lerin indislerinin $N=4$ ile sınırlanması halinde SA simetri durumunda titreşim frekansları ve titreşim modları Tablo 3.5 de gösterilmiştir (bkz. Tablo 3.4).

Tablo 3.5 N=4 için SA simetri durumunda serbest titreşimlerin açısal frekansları ve modları

$\sqrt{\omega_i}$	i=1 1.0313	i=2 1.2970	i=3 1.4813	i=4 3.965	i=5 4.1314
u_{21}	+0.0669	+0.0164	+0.0389	-1.5419	-0.8593
u_{23}	-0.0395	-0.0160	-0.0109	-0.8227	+1.5632
v_{01}	-0.0125	-2.0611	-0.0139	-0.0054	-0.0158
v_{31}	-1.8969	+0.0121	+0.0123	+0.0534	-0.0898
v_{51}	+0.0126	-0.0130	+1.8976	-0.0605	+0.0667

(3.61) deki z_1 vektörü için yukarıda elde edilen başlangıç koşulları (3.83) de yerlerine konulursa $\dot{z}_1(0)=0$ olduğu için a_i ler sıfır olarak elde edilir. (3.88) ifadesi

$$\bar{z}_i = b_i \cos \omega_i t \quad i=1, 2, \dots, N_1 \quad (3.93)$$

şeklini alır. $N=4$ sınırı için $N_1=20$ olup sadece SA simetri durumındaki titreşim modları için b_i katsayıları (yani beş tanesi) sıfırdan farklıdır. Bunlar, Tablo 3.5 deki ω_i ve q_i ler (3.83) değerlerine konularak hesaplanmış ve Tablo 3.6 da gösterilmiştir.

Tablo 3.6 b_i Katsayıları

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$\frac{10^{-4}}{\sqrt{e}} b_i$	0.11484	0.09539	-0.03076	-0.09082	-0.03168

(3.93), (3.89) ifadeleri ve Tablo 3.5 deki q_i özvektörleri kullanılırsa $u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi belirlenir.

$$z_1(t) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{23} \\ v_{01} \\ v_{21} \\ v_{41} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \\ \bar{z}_3(t) \\ \bar{z}_4(t) \\ \bar{z}_5(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0.067 \\ -0.040 \\ -0.013 \\ -1.897 \\ +0.013 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0.016 \\ -0.016 \\ -2.061 \\ +0.012 \\ -0.013 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0.039 \\ -0.011 \\ -0.014 \\ -0.012 \\ +1.898 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.542 \\ -0.823 \\ +\bar{z}_4(t) \\ +0.053 \\ -0.061 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.859 \\ +1.563 \\ -0.016 \\ -0.090 \\ +0.067 \end{pmatrix}$$

$$z_2(t) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{bmatrix} u_{41} \\ u_{43} \\ v_{03} \\ v_{23} \\ v_{43} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \\ \bar{z}_3(t) \\ \bar{z}_4(t) \\ \bar{z}_5(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.019 \\ 0.005 \\ 0.004 \\ 0.629 \\ -0.001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.008 \\ -0.008 \\ 0.687 \\ -0.004 \\ 0.004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.034 \\ 0.020 \\ 0.005 \\ -0.008 \\ -0.628 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.771 \\ 0.411 \\ 0.002 \\ 0.297 \\ -0.295 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.430 \\ -0.782 \\ 0.005 \\ -0.064 \\ 0.072 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

3.7.3.2. $\alpha_D(t)$ nin Darbe Fonksiyonu Olması Hali

Şekil 3.8 de görülen darbe fonksiyonunun altında kalan alanın değeri $\bar{\alpha}$ olacak şekilde

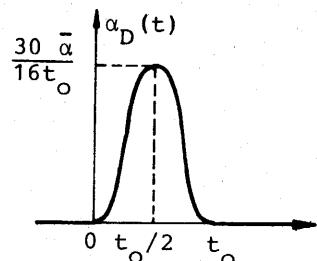
$$\alpha_D(t) = \begin{cases} \frac{30}{t_0} \bar{\alpha} (t/t_0)^2 (1-t/t_0)^2 & \dots \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & \dots \quad t < 0 \text{ ve } t > t_0 \end{cases} \quad (3.95)$$

olarak seçilmistiir. Sayisal sonuclar için t_0

$$t_0 = 2\pi/\omega_{\max} \quad (3.96)$$

almiistir. Buna göre $t=0$ aninda

$\alpha_D(0) = \dot{\alpha}_D(0) = 0$ olacagi icin (3.70) baslangic koysiulari ve dolayisiyla (3.83) de a_i ve b_i katsayıları sıfır olur. Bunun sonucu olarak (3.88) ifadesinde sadece Duhamel integrali kalır. Bu integralin değeri $0 \leq t \leq t_0$ aralığı için



Şekil-3.8 Darbe fonksiyonu

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= - \frac{p_i^T y}{\omega_i} \frac{60}{t_0} \bar{\alpha} \int_0^{t_0} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{6\tau}{t_0^3} + \frac{6\tau^2}{t_0^4} \right) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau \\ &= A_i \left[6 \left(-\frac{t}{t_0} + \frac{t^2}{t_0^2} \right) + B_i (1 - \cos \omega_i t) + C_i \sin \omega_i t \right], \quad i=1,2,\dots,N_1 \end{aligned} \quad (3.97)$$

ve $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= - \frac{p_i^T y}{\omega_i} \frac{60}{t_0} \bar{\alpha} \int_0^{t_0} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{6\tau}{t_0^3} + \frac{6\tau^3}{t_0^4} \right) \sin \omega_i (t-\tau) d\tau \\ &= D_i \sin \omega_i t + E_i \cos \omega_i t, \quad i=1,2,\dots,N_1 \end{aligned} \quad (3.98)$$

şeklinde hesaplanır. Burada A_i , B_i , C_i , D_i , E_i sabitleri

$$A_i = - \frac{60\bar{\alpha}}{\omega_i^2 t_0} p_i^T y, \quad B_i = 1 - \frac{12}{\omega_i^2 t_0^2}, \quad C_i = \frac{6}{\omega_i t_0} \quad (3.99)$$

$$D_i = A_i [B_i \sin \omega_i t_0 + C_i (1 + \cos \omega_i t_0)]$$

$$E_i = A_i [-B_i (1 - \cos \omega_i t_0) - C_i \sin \omega_i t_0]$$

şeklindedir. Tablo 3.5 deki titresim frekansları ve modlari kullanilarak sayisal degerleri elde edilmiş ve Tablo 3.7 de gösterilmistiir.

Tablo 3.7 A_i, B_i, C_i, D_i, E_i Değerleri

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$\frac{10^{-9}}{\sqrt{e}} A_i$	6.0358	3.3950	-0.7127	-0.1013	-0.0070
B_i	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
C_i	0.11210	0.08914	0.07804	0.02915	0.02798
$\frac{10^{-9}}{\sqrt{e}} D_i$	0.6486	-2.9329	-0.7605	0.0984	-0.0050
$\frac{10^{-9}}{\sqrt{e}} E_i$	-11.9523	-3.8778	0.7047	0.0977	0.0022

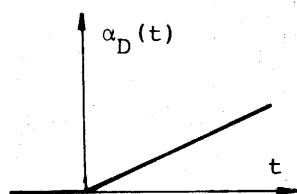
$u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ fonksiyonlarını belirlemek için t nin t_0 dan küçük veya büyük olmasına bağlı olarak (3.97) veya (3.98) ifadesi ile hesaplanan $\bar{z}_i(t)$ fonksiyonları (3.94) de yerlerine ko-nulmalıdır. Çünkü (3.87) Duhamel integralinde geçen y vektörünün (3.68) deki ifadesi ve Tablo-3.2 deki integraller gözönünde tutulursa (3.91) fonksiyonları dolayısıyla y vektörünün sadece SA simetri durumuna ait elemanları sıfırdan farklıdır. Yani $i=\text{çift}$, $j=\text{tek}$ indisli u_{ij} ve v_{ij} fonksiyonları ortaya çıkmakta ve bu simetri durumundaki titreşimler başlamaktadır. (3.94) ifadelerinde SA simetri durumuna ait modlar kullanılmıştır.

3.7.3.3. $\alpha_D(t)$ nin Rampa Fonksiyonu Olması Hali

Sekil 3.9 de görülen rampa fonksiyonu

$$\alpha_D(t) = \bar{\alpha}t \quad t \geq 0 \quad (3.100)$$

olarak seçilmiştir. $\ddot{\alpha}_D(t)=0$ olacağı için (3.87) Duhamel integrali sıfır olur. $t=0$ için $\alpha_D(0)=0$, $\dot{\alpha}_D(0)=\bar{\alpha} \neq 0$ dır. Bunun sonucu olarak (3.70) başlangıç koşulları $z_1(0)=0$, $\dot{z}_1(0) \neq 0$ elde edilir. (3.83) ifadelerinde b_i katsayıları sıfır olur. Bu bilgiler kullanılırsa (3.88) ifadesi



Sekil-3.9 Rampa fonksiyonu

$$\bar{z}_i = a_i \sin \omega_i t, \quad i=1, 2, \dots, N_1 \quad (3.101)$$

şeklini alır. Gene SA simetri durumundaki titreşimler ortaya çıkmaktadır. Burada a_i katsayıları, Tablo 3.5 deki değerler yarıdimıyla hesaplanmış ve Tablo 3.8 de gösterilmiştir. $u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ fonksiyonlarını belirlemek için (3.101) ifadeleri (3.94) de yerlerine konulmalıdır.

Tablo 3.8 a, Katsayıları

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
$\frac{10^{-9}}{\sqrt{e}} a_i$	0.21455	0.14171	-0.04001	-0.00441	-0.01477

3.7.3.4. $\alpha_D(t)$ nin Harmonik Fonksiyon Olması Hali

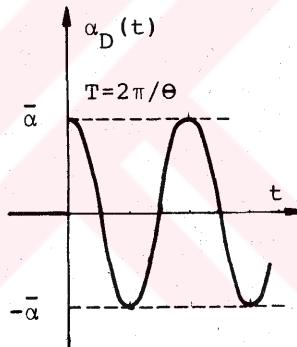
Yüklerin Θ açısal frekansı ile

$$\alpha_D(t) = \bar{\alpha} \cos \theta t \quad (3.102)$$

harmonik fonksiyonuna göre etkili-
mesi halinde $\ddot{\alpha}_D(t)$ ifadesi ve $\dot{\alpha}_D(0)$,
 $\ddot{\alpha}_D(0)$ değerleri

$$\ddot{\alpha}_D(t) = -\theta^2 \bar{\alpha} \cos \theta t \quad (3.103)$$

$$\alpha_B(0) = \bar{\alpha}, \quad \dot{\alpha}_B(0) = 0 \quad (3.104)$$



Sekil-3.10 Harmonik Fonk.

olarak elde edilir. Bunlar (3.70) de yerlerine konulursa $z_1(0)=0$, $\dot{z}_1(0)\neq 0$ ve dolayısıyla (3.83) ifadelerinde $a_i=0$, $b_i\neq 0$ olarak hesaplanır. Buna göre (3.88) ifadesi

$$\bar{z}_i(t) = b_i \cos \omega_i t + A_i \frac{(\Theta/\omega_i)^2}{1 - (\Theta/\omega_i)^2} (\cos \Theta t - \cos \omega_i t) \\ A_i = \bar{\alpha} p_i^T y, \quad i=1, 2, \dots, N_1 \quad (3.105)$$

şeklini alır. Gene SA simetri durumundaki titreşimler ortaya çıkmaktadır. A_i katsayıları, Tablo 3.5 deki değerler yardımıyla

hesaplanmış ve Tablo 3.9 de gösterilmiştir. $u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ fonksiyonlarını belirlemek için (3.105) ifadeleri (3.94) de yerlerine konulmalıdır.

Tablo 3.9 b_i ve A_i Katsayıları

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$\frac{10^{-4}}{\sqrt{e}} b_i$	0.11484	0.09539	-0.03076	-0.09082	-0.03168
$\frac{10^{-4}}{\sqrt{e}} A_i$	-2.8818	-2.5638	0.7021	0.7151	0.0533

Yük frekansı ile serbest titreşim frekansı arasındaki

$$\frac{\Theta}{\omega_i} \quad (3.106)$$

oranının bir civarında olması halinde rezonans olayı meydana gelir. Bu durumda (3.105) ifadesinde ikinci terim,

$$A_i \frac{(\Theta/\omega_i)^2}{1+\Theta/\omega_i} \omega_i t \sin [(\omega_i + \Theta)t/2] \quad (3.107)$$

şeklinde genliği zamanla doğrusal olarak artan bir titreşim hareketi belirtir. Bu olay rezonans olayı adını alır. (3.106) oranının sıfıra yaklaşması halinde (3.105) ifadesindeki ikinci terim azalarak sıfır olur.

BÖLÜM 4

ORTOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLARIN DİNAMİK STABİLİTESİ

4.1. GİRİŞ

Düzlemi içinde dinamik kenar yükleri etkisindeki ortotrop dikdörtgen plakların incelenmesi için 2. Bölümde temel denklemler verilmiştir. 3. Bölümde ise varyasyon ilkelerine dayanan Lagrange çarpanları yöntemi kullanılarak bir çözüm geliştirilmiştir. Geliştirilen bu çözüm için bir uygulama olmak üzere, aynı bölümün sonunda, ortotrop dikdörtgen levhaların düzlemi içinde yapacağı serbest ve zorlanmış titreşimler incelenmiştir.

Bu bölümde ise ortotrop dikdörtgen plakların düzlem içi dinamik kenar yükleri etkisindeki davranışının incelenmesi; ve bu incelemede düzlem içi zorlanmış titreşim hareketinin göz önüne alınmasıdır. Bundan dolayı önceki bölümün sonunda elde edilen ortotrop levhaların düzlem içi serbest titreşim frekansları, titreşim modları, zorlanmış titreşimleri ve rezonans durumları burada kullanılacaktır.

3. Bölümde yer değiştirmeler ve gerilmeler (3.3) ve (3.4) de boyutsuz olarak tanımlanmıştır. (3.39) daki u ve v düzlem içi yer değiştirmeleri, (3.25) deki w sehimini w_0 önsehimini seçilmiş olup bu ifadelerdeki zamana bağlı u_{ij} , v_{ij} , f_{ij} bilinmeyen fonksiyonlarının sağlayacağı (3.58) ve (3.59) diferansiyel denklemleri ve (3.60) kısıtlayıcı denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra Lagrange çarpanları yok edilmiş olup böylece (3.58) diferansiyel denklemindeki matrislerin boyutları, Lagrange çarpanlarının sa-

yısı kadar küçültülmüş ve (3.67) diferansiyel denklemi elde edilmiştir. (3.67) diferansiyel denklemi için başlangıç koşulları Kirchhoff plağında (3.70) deki gibidir. Von Kármán plağında ise ileride açıklanacağı üzere (4.22) deki gibidir. (3.67) diferansiyel denkleminin çözümünden u_{ij} ve v_{ij} bilinmeyenlerinin bir kısmı elde edilmektedir [(3.61) de z_1 'e bakınız]. Diğer kısmı ise (3.63) yardımıyla elde edilir. (3.64) yardımıyla rijit yer değiştirmeye bileşenlerine ait \ddot{r}_u , \ddot{r}_v , \ddot{r}_D ivmeleri, (3.65) yardımıyla da $\lambda_i^{(.)}$ Lagrange çarpanları hesaplanır.

Birbirine ait bilinmeyenleri kapsadığı için (3.59) ve (3.67) diferansiyel denklemleri arasında etkileşim vardır; ve birlikte çözülmelidir. Ancak Kirchhoff plak varsayımları halinde (3.67) diferansiyel denklemi, sehimlerden bağımsız olarak çözülebilir. Bölüm 3.7 de verilen bu çözüm (3.59) da yerine konularak bu diferansiyel denklemin çözümü yapılabilir. Von Kármán plak varsayımları halinde ise bölüm 3.7 de verilen çözüme

$$E \ddot{z}_1 + F z_1 = -h \quad (4.1)$$

diferansiyel denkleminin özel çözümü de eklenmelidir. (3.68) deki gibi tanımlanan h ; f , \dot{f} ve \ddot{f} ye bağlıdır. Bunlar ise (3.59) diferansiyel denklemin çözümünden elde edilecektir. O halde (3.67) ve (3.59) diferansiyel denklemleri etkileşimli olarak çözülmek zorundadır.

4.2. NEWMARK YÖNTEMİ İLE (3.67) DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bölüm 3.7 de $h = 0$ hali için (3.67) diferansiyel denklemi mod süperpozisyonu yöntemi kullanılarak çözülmüştür. $h \neq 0$ halinde ise Bölüm 3.7 deki çözüme (4.1) diferansiyel denkleminin özel çözümü de eklenmelidir. Bu özel çözüm (3.87) ye benzer olarak

$$\bar{z}_i(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t p_i^T h(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau, \quad i=1, 2, \dots, N_1 \quad (4.2)$$

Duhamel integrali ile hesaplanabilir. Daha sonra açıklanacak olan (3.59) diferansiyel denkleminin çözümü adım adım integrasyon ile yapılabildiği için bunun çözümüne bağlı olarak hesapla-

nan \mathbf{h} vektörü de Δt zaman aralıkları ile belirlenmektedir.

(4.2) Duhamel integrali de aynı Δt aralıklarıyla hesaplanmalıdır. Bu çalışmada doğrudan integrasyon yöntemlerinden olan Newmark yöntemi kullanılmıştır [71-76].

(3.67) diferansiyel denklemi soldan \mathbf{P}^T ile çarpılır ve (3.80) değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\ddot{\bar{z}} + \Omega^2 \bar{z} = -\mathbf{P}^T [\ddot{\alpha}_D(t) \mathbf{y} + \mathbf{h}] \quad (4.3)$$

modal denklemeleri elde edilir ($\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \Omega^2$ için Bölüm 3.7.2 ye bakınız). $t=0$ anında $\dot{\bar{z}}(0)$ ve $\ddot{\bar{z}}(0)$ başlangıç koşulları Kirchhoff plağı halinde (3.70) deki gibidir. Von Kármán plağı halinde ise daha sonra açıklanacaktır. $\ddot{\bar{z}}(0)$ vektörü (4.3) yardımıyla

$$\ddot{\bar{z}}(0) = -\Omega^2 \bar{z}(0) - \mathbf{P}^T [\ddot{\alpha}_D(0) \mathbf{y} + \mathbf{h}(0)] \quad (4.4)$$

şeklinde hesaplanır.

4.2.1. Newmark Yöntemi

İkinci mertebeden matris biçimde bir diferansiyel denklem sistemi

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\mathbf{x} = \mathbf{r}(t) \quad (4.5)$$

olsun (buradaki gösterimlerin diğer bölümlerle ilgisi yoktur).

(4.3) diferansiyel denklem sistemi için $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{x}, \mathbf{r}$ nin

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{B}(t) &= \Omega^2 = \text{diag } (\omega_i^2) \\ \mathbf{x}(t) &= \bar{z}(t) \\ \mathbf{r}(t) &= -\mathbf{P}^T [\ddot{\alpha}_D(t) \mathbf{y} + \mathbf{h}(t)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

olduğu açıklar. (4.5) diferansiyel denklemının herhangi bir t_0 anındaki çözümü

$$\mathbf{x}_{(0)} = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_{(0)} = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad \ddot{\mathbf{x}}_{(0)} = \ddot{\mathbf{x}}(t_0) \quad (4.7)$$

bilinmekte olup $t_1 = t_0 + \Delta t$ anındaki

$$\mathbf{x}_{(1)} = \mathbf{x}(t_1), \quad \dot{\mathbf{x}}_{(1)} = \dot{\mathbf{x}}(t_1), \quad \ddot{\mathbf{x}}_{(1)} = \ddot{\mathbf{x}}(t_1) \quad (4.8)$$

vektörlerini hesaplamak için Newmark yönteminde aşağıdaki ifadeler kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{(1)} &= \dot{x}_{(0)} + (\Delta t) [(1-\delta)\ddot{x}_{(0)} + \delta\ddot{x}_{(1)}] \\ x_{(1)} &= x_{(0)} + (\Delta t)\dot{x}_{(0)} + (\Delta t)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_{(0)} + \alpha\ddot{x}_{(1)} \right]\end{aligned}\quad (4.9)$$

Burada $\delta=0.5$ ve $\alpha=0.25$ değerleri en çok kullanılan değerler olup bunlar için Newmark yöntemi kararlıdır [71]. (4.9) ifadeleri ivmenin doğrusal olarak değişmesine dayanmaktadır. (4.9) daki iki denklem $x_{(1)}$, $\dot{x}_{(1)}$, $\ddot{x}_{(1)}$ nin hesaplanması yetmez. Üçüncü denklem (4.5) de $t=t_1$ konularak elde edilir.

$$A\ddot{x}_{(1)} + B_{(1)}x_{(1)} = r_{(1)} \quad (4.10)$$

(4.9) ve (4.10) dan \dot{x}_1

$$\ddot{x}_{(1)} = [A + \alpha(\Delta t)^2 B_{(1)}]^{-1} \{ r_{(1)} - B_{(1)} [x_{(0)} + (\Delta t)\dot{x}_{(0)} + (\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{x}_{(0)}] \} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Daha sonra (4.9) dan $\dot{x}_{(1)}$ ve $x_{(1)}$ belirlenir. Böylece t_1 anında (4.5) diferansiyel denkleminin çözümü elde edilir. Bundan sonra yeni integrasyon adımlına geçilir. Önceki t_1 anı simdi t_0 olarak kullanılır.

(4.5) diferansiyel denkleminde B ve r nin $t=t_1$ anındaki değerleri hesaplanacak olan (4.8) vektörlerine bağlısa, (4.8) vektörlerini belirlemek için iterasyon yapılmalıdır. Bu iterasyon aşağıdaki işlemlerle uygulanır:

1. Başlangıçta $B_{(1)}$ ve $r_{(1)}$ tahmin edilir. (4.11) ve (4.9) hesaplanarak (4.8) deki vektörler belirlenir.
2. Elde edilen (4.8) deki vektörlere bağlı olarak $B_{(1)}$ ve $r_{(1)}$ hesaplanır. (4.11) ve (4.9) ifadeleri kullanılarak (4.8) vektörleri yeniden belirlenir.
3. 2. işlem tekrarlanarak iterasyon yapılır. Ardışık iki iterasyonda elde edilen değerlerin farkının istenilen küçüklüğün

altına düşmesine kadar devam edilir.

- Sonra yeni integrasyon adımlına geçmek üzere t_1 anı t_0 olarak alınır.

4.2.2. (4.3) Diferansiyel Denklem Sistemi İçin İterasyon Yapılması

(4.6) daki r nin $t=t_1$ anındaki

$$r_{(1)} = r(t_1) = -P^T [\ddot{a}_D(t_1)y + h(t_1)] \quad (4.12)$$

değerinin hesaplanabilmesi için $h(t_1)$ in hesaplanmış olması gereklidir. h vektörü, (3.59) diferansiyel denkleminin çözümü olan f , \dot{f} , \ddot{f} lere bağlıdır. (3.59) diferansiyel denklem sisteminde ise z_1 , \dot{z}_1 , \ddot{z}_1 geçmektedir. Bu vektörler de (3.80) dönüşümü nedeniyle \bar{z} , $\dot{\bar{z}}$, $\ddot{\bar{z}}$ lere bağlıdır. Bölüm 4.2.1 in sonunda belirtildiği gibi bu durumda (4.3) diferansiyel denkleminin Newmark yöntemi ile çözümünde iterasyon gereklidir. Bu iterasyon aşağıdaki işlemlerle uygulanır:

- (3.59) diferansiyel denklem sisteminin $t=t_1$ anındaki çözümü,

$$t_i = t_0 + i \Delta t, \quad i = \dots, -2, -1, 0 \quad (4.13)$$

anlarındaki çözümler yardımıyla sonlu fark denklemlerinden faydalananarak başlangıçta tahmin edilir [77].

$$\begin{aligned} f_{(1)} &= f_{(0)} + \Delta t \dot{f}_{(0)} + (\Delta t)^2 \left\{ \frac{1}{2} f_{(0)} + \frac{1}{6} [f_{(0)} - f_{(-1)}] + \frac{1}{8} [\ddot{f}_{(0)} - 2\ddot{f}_{(-1)} + \ddot{f}_{(-2)}] \right\} \\ \dot{f}_{(1)} &= \dot{f}_{(0)} + \Delta t \left\{ \ddot{f}_{(0)} + \frac{1}{2} [\ddot{f}_{(0)} - \ddot{f}_{(-1)}] + \frac{5}{12} [\ddot{f}_{(0)} - 2\ddot{f}_{(-1)} + \ddot{f}_{(-2)}] \right\} \\ \ddot{f}_{(1)} &= \ddot{f}_{(0)} + [\ddot{f}_{(0)} - \ddot{f}_{(-1)}] + \frac{1}{2} [\ddot{f}_{(0)} - 2\ddot{f}_{(-1)} + \ddot{f}_{(-2)}] \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Elde edilen $f_{(1)}$, $\dot{f}_{(1)}$, $\ddot{f}_{(1)}$ ler yerlerine konularak (3.33), (3.68) ve (3.54)-(3.58) formülleri yardımıyla $h(t_1)$ hesaplanır. (4.12) den $r_{(1)}$ hesaplanır.
- (4.6), (4.12), (4.11) ve (4.9) yardımıyla $\bar{z}_{(1)}$, $\dot{\bar{z}}_{(1)}$, $\ddot{\bar{z}}_{(1)}$ ler hesaplanır.

4. $z_1, \dot{z}_1, \ddot{z}_1$ ler (3.80) dönüşümü ile, $\ddot{z}_r, z_2, \dot{z}_2, \ddot{z}_2, \lambda$ lar (3.63), (3.64) ve (3.65) yardımıyla belirlenir. $t=t_1$ anı için hesaplanmış bulunan bu değerler kullanılarak (3.59) diferansiyel denklem sistemi çözülür*. Ve $f_{(1)}, \dot{f}_{(1)}, \ddot{f}_{(1)}$ ler yeniden elde edilir.
5. 2., 3. ve 4. işlemler tekrarlanarak iterasyon yapılır. Ardından iki iterasyonda elde edilen değerlerin farkının istenilen küçüklüğün altına düşmesine kadar devam edilir.
6. Sonra yeni iterasyon adımlına geçmek üzere t_1 anı t_0 olarak alınır.

4.3. STATİK KENAR YÜKLERİ ETKİSİNDE ORTOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLAR

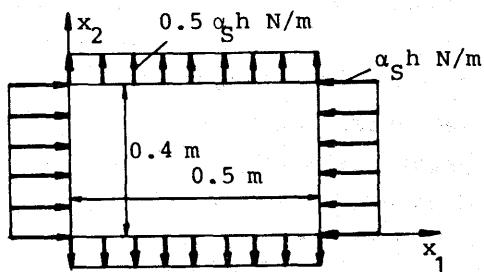
Statik burkulma yükleri, burkulma modları, burkulma yükünün üzerindeki yüklerde denge konumlarına ait yük-sehim ilişkisi, statik kenar yükleri etkisindeki plağın düzlem dışı serbest titreme frekansları ve modları, titreşimlerin kararlılığı aşağıda bir örnek üzerinde özetlenmiştir. Örnek olarak, boyutları ve malzeme özellikleri (3.85) de verilen ortotrop dikdörtgen plak Şekil-4.1 deki statik kenar yüklerinin etkisinde göz önüne alınmıştır.

(2.6) ifadesi ve Şekil-2.4 dikkate alınırsa Şekil-4.1 deki kenar yükleri için

$$s_1 = -1, s_2 = 0,5,$$

$$s_3 = s_4 = d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$$

olduğu görülür. $\alpha_D(t) = 0$ dır. Ayrıca bu örnekte plağın dört kenarı kayıcı ankastre alınmıştır (Şekil-2.3).



Şekil-4.1. Statik yükleme:
 $\alpha_S^F(S)$

* (3.59) diferansiyel denklem sisteminin çözümü Bölüm 4.4 de verilmiştir.

4.3.1. Burkulma Yükleri ve Burkulma Modları

Kirchhoff plak varsayımları halinde (3.59) diferansiyel denklemi önsehimsiz bir plak için

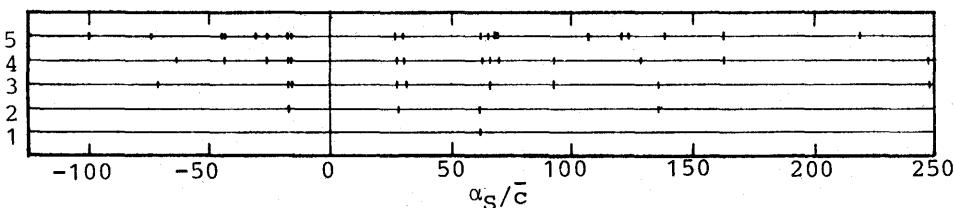
$$(B - \alpha_S S) f = 0 \quad (4.15)$$

şeklini alır. Statik burkulma incelendiği için $f = \dot{f} = 0$ dır. (3.61) de f_{ij} bileşenleri cinsinden verilen f vektörünün boyutu; $i, j \leq M$ sınırlaması halinde M^2 dir. Homogen olan (4.15) cebrik denkleminin sıfırdan farklı f_k , ($k=1, 2, \dots, M^2$) çözümlerinin araştırılması, matris cebrinden bilindiği gibi bir genel özdeğer problemidir. B ve S matrislerinin boyutu olan M^2 yinci dereceden

$$\det(B - \alpha_S S) = 0 \quad (4.16)$$

karakteristik denklemini sağlayan M^2 tane α_k kritik yük değeri ve bunlara karşılık M^2 tane (4.15) denkleminin çözümü olan f_k vektörleri vardır. α_k lar bu genel özdeğer probleminin özdeğerleri, f_k lar ise sağ özvektörlerdir. f_k ların birer skalerle çarpımı da (4.15) denkleminin çözümüdür. α_k kritik yük değerlerine, seçilen kenar yükleri için burkulma katsayıları denir [12, 13]. Bunlara karşılık gelen f_k vektörlerine ise burkulma modları denir.

α_k ların bir kısmı artı işaretli bir kısmı eksi işaretli olabilir. Eksi işaretli α_k lar, yüklemenin ters yönde uygulanacağını ifade eder. Şekil-4.1 deki örnekte $M^2=4$ için 3 tane artı, 1 tane eksi; $M^2=9$ için 6 tane artı 3 tane eksi işaretli α_k burkulma katsayısı belirlenmiştir. M^2 artırıldıkça yeni burkulma modları ortaya çıkmaktır ve küçük burkulma katsayıları gerçek değerlerine daha yakın olarak elde edilmektedir (Şekil-4.2).



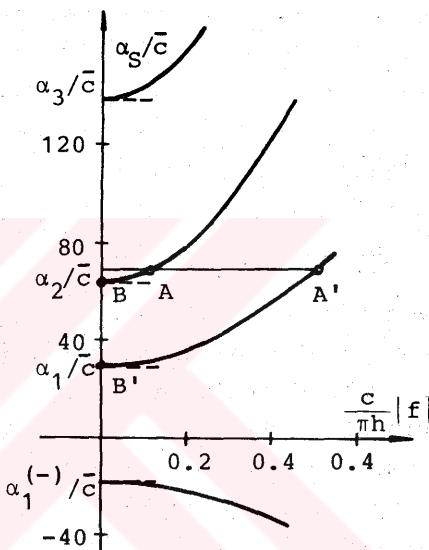
Şekil-4.2 (3.25) de alınan terim sayısına bağlı olarak burkulma katsayılarının yakınsaması

f vektörünün büyüklüğünü

$$|f| = \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (4.17)$$

şeklinde hesaplanan norm yardımıyla bir skalerle gösterelim. α_S ile $|f|$ arasındaki ilişki Kirchhoff plağı için Şekil-4.3 de

kesikli çizgi ile gösterilmiştir. $\alpha_S \neq \alpha_k$ için sadece $f = 0$ çözümü olduğu halde, α_k değerlerinde $f = 0$ dan başka $f = f_k$ vektörünün ve bu vektörün herhangi bir skaler ile çarpımının da çözüm olmasından dolayı Şekil-4.3 deki grafik, α_i burkulma katsayılarında dallanma gösterir. Bu noktalara dallanma noktaları denir.



Şekil-4.3:Dallanma noktaları ($M^2=4$ için çizilmiştir).

4.3.2. Von Kármán Plağı ve Yük-Sehim İlişkisi

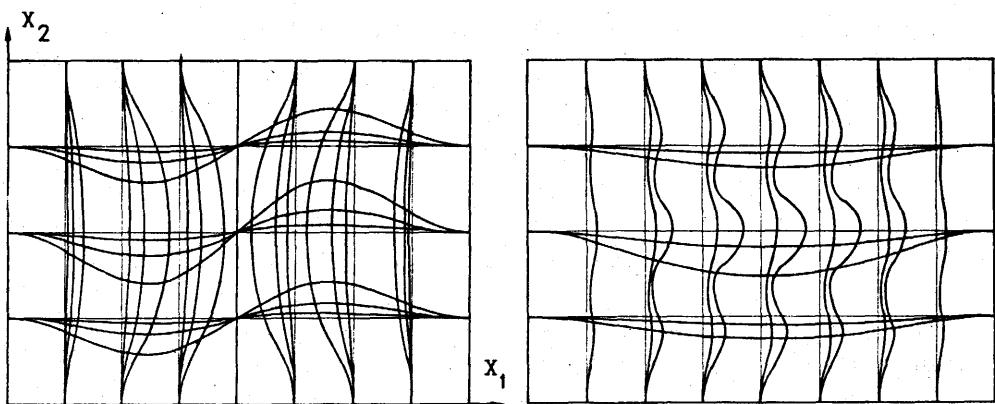
Kirchhoff varsayımlarında sehimler sonsuz küçük olarak sınırlanmıştır. Şekil-4.3 de kesikli çizgiler $|f|$ nin küçük değerleri için çizilmiştir. Sonlu plak sehimleri için von Kármán plak varsayımları kullanılmalıdır. Şekil-4.3 de sürekli çizgi ile çizilen grafik aşağıdaki gibi özetlenebilir.

α_S ve α_k nin değerleri işaretleriyle birlikte yerine konulmak üzere α_S/α_k oranı

$$\frac{\alpha_S}{\alpha_k} < +1.0 \quad (4.18)$$

bağıntısını sağlarsa kinci burkulma moduna ait sehimler ortaya çıkmaz. Bu oranın +1.0 den büyük olması halinde kinci burkulma moduna ait sehimler, bu oranın büyüklüğüne bağlı olarak belirli bir değere kadar artar. Şekil-4.3 de burkulma modlarından iki tanesi için bu değerler belirtilmiştir. Bunun için α_S ye α_2 den büyük bir değer verilmiştir. ikinci burkulma modunda olmak üzere plağın düzlemden çok küçük saptırılması sonucunda bu moddaki sehimler ortaya çıkarak Şekil-4.3 de belirtilen A noktasına ulaşmıştır. Aynı α_S değeri için birinci burkulma modundaki sehimlerin ortaya çıkması sağlandığında ise sehimler A' noktasına ulaşmıştır. α_S/α_k oranı küçültülverek +1.0 değerine dönüştürülüğünde kinci burkulma moduna ait sehimler azalarak sıfır olmuştur (Şekil-4.3 de ikinci burkulma modu için B noktası, birinci burkulma modu için B' noktası).

Von Kármán plağında kinci burkulma modunun biçimini sehimlerin büyüklüğüne bağlı olarak değişir. Küçük sehimler halinde Kirchhoff plağında hesaplanan kinci mod ile çakışır. Sehimlerin büyüklüğüne bağlı olarak burkulma modunun değişimini incelemek için AKIŞ DİYAGRAMI esas alınarak hazırlanan bilgisayar programından faydalılmıştır. Burkulma incelenirken g önsehimini sıfırdır. $\alpha_S/\alpha_k > +1.0$ olmak üzere bir α_S değeri seçilir. f vektörü için, f_k Kirchhoff plağında kinci burkulma modu olmak üzere $f = \epsilon f_k$ seçilir. ϵ küçük bir skaler sayı olup ϵf_k , kinci burkulma moduna uygun olarak düzlemden küçük bir sapmayı belirtmektedir. f nin seçilen bu ilk değeri ile başlayan iterasyon sonunda hem Şekil-4.3 deki sürekli çizgi ile belirtilen kinci burkulma moduna ait denge konumları (A ve A' noktaları) istenilen bir duyarlılık elde edilmektedir, hem de sehimin bu değerine karşılık burkulma modunun biçimini belirlenmektedir. Şekil-4.3 bu iterasyonlar yapılarak çizilmiştir. $M^2=9$ için $\alpha_1^{(-)}$ ve α_1 burkulma yüklerine karşılık olan burkulma modlarının sehimlere bağlı olarak değişimi Şekil-4.4 de gösterilmiştir.



Şekil-4.4 İlk burkulma modlarının burkulma sonrası sehimlerin büyüküğüne bağlı olarak değişimi. Burada $\alpha_1^{(-)}$, ters yönlü yükleme için ilk burkulma katsayısidır. (3.25) ifadelerinde $M=3$ sınırı (3.39) ifadelerinde ise $N=8$ sınırı kullanılmıştır. $\alpha_S/\alpha_1^{(-)}$ oranının 1.01 , 1.1 , ve 1.5 değerleri için $\alpha_S/\alpha_1^{(-)}$ oranının ise 1.01 ve 1.1 değerleri için sehimler gösterilmiştir.

k inci burkulma modu için iterasyona başlarken $\alpha_S/\alpha_k > +1.0$ seçileceği yukarıda belirtildi. Bu oranın oldukça büyük değerleri için iterasyonun yakınsaması bozularak f sonsuza gitmektedir. Bunun nedeni sayısal işlemlerdeki kesme hatalarının iterasyonlar sırasında birikerek diğer modlara ait sehimlerin gelişmesine yol açmasıdır. Aynı oranın eksi işaretli değerleri için plaşa k inci burkulma moduna uygun olarak düzlemden küçük bir sapma verilirse eğer bu oran yaklaşık olarak -1.0 den büyükse f nin her iterasyonda giderek sıfıra yakınsadığı aksi halde büyütürek sonsuza gittiği görülmektedir. Bu durum iterasyon için kullanılan formülinden dolayıdır (bkz. AKIŞ DİYAGRAMI).

(3.39) ifadelerindeki N sınırının artırılması Şekil-4.3 de $|f|$ nin büyümesine neden olmaktadır. N nin 4 den 6 ya çıkarılması halinde bu büyümeye %6 civarında 6 dan 8 e çıkarılması halinde %2 civarındadır. Şekil-4.3 , $N=6$ için çizilmiştir.

Seçilen bir α_S değeri ile belirlenebilen herhangi bir siddette statik kenar yükü için denge konumuna ait sehimler, önsehimli bir plakta da aynı programla belirlenebilir. Bu durumda \mathbf{g} vektörü sıfırdan farklıdır. İterasyona herhangi bir \mathbf{f} vektörü ile başlanabilir. Bu çalışmada $\mathbf{f}_{\text{ilk}} = \mathbf{0}$ alınmıştır. İterasyon sonunda elde edilen \mathbf{f}_S vektörü statik kenar yükleri etkisinde bulunan önsehimli plaktaki sehimleri belirler.

Bu çalışmada göz önüne alınan dinamik problemlerde $t=0$ başlangıç anında plağın statik kenar yükleri ile yüklü olduğu varsayılmıştır. Yani başlangıç koşulları önsehimli bir plakta yukarıdaki iterasyon sonunda elde edilen \mathbf{f}_S vektörüne bağlı olarak

$$\mathbf{f}_o = \mathbf{f}(0) = \mathbf{f}_S, \quad \dot{\mathbf{f}}_o = \dot{\mathbf{f}}(0) = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

şeklindedir. Aynı iterasyonda elde edilen \mathbf{z}_1 ve \mathbf{z}_2 vektörleri

$$\mathbf{z}_1^{(S)}, \quad \mathbf{z}_2^{(S)}$$

şeklinde ve bu vektörlerin elemanları ise

$$u_{ij}^{(S)}, \quad v_{ij}^{(S)}, \quad i,j=1,2,\dots,N \quad (4.20)$$

olarak gösterilsin. Buna göre $t=0$ anında düzlem içi u ve v yer değiştirmeleri

$$u = \alpha_S U_S + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m u_{ij}^{(S)} \sin ix \cos jy \quad (4.21)$$

$$v = \alpha_S V_S + \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n v_{ij}^{(S)} \cos ix \sin jy$$

olacaktır. Bunlar (3.39) da yerlerine konulur ve bütün terimler Fourier serilerine açılırsa $t=0$ başlangıç anında

$$\begin{aligned} u_{ij}^{(V)(0)} &= u_{ij}^{(S)} + u_{ij}^{(K)(0)}, \quad \dot{u}_{ij}^{(V)(0)} = \dot{u}_{ij}^{(K)(0)} \\ v_{ij}^{(V)(0)} &= v_{ij}^{(S)} + v_{ij}^{(K)(0)}, \quad \dot{v}_{ij}^{(V)(0)} = \dot{v}_{ij}^{(K)(0)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

başlangıç koşulları elde edilir. Burada (K) harfi, Kirchhoff plağı için elde edilmiş bulunan (3.70) başlangıç koşullarını belirtmektedir.

4.3.3. Serbest Titreşim Frekansları ve Titreşim Modları

Kirchhoff plak varsayımları halinde (3.59) diferansiyel denklemi, kenar yükleri statik olduğundan dolayı

$$A\ddot{f} + Bf - Bg - \alpha_S Sf = 0 \quad A, B, S : \text{simetrik} \quad (4.23)$$

şeklini alır. f sehim, statik kenar yüklerinin uygulanmasından önce g önsehimine eşittir. Kenar yükleri etkiltilince (4.23) den titreşimsiz halde hesaplanan

$$f_0 = [B - \alpha_S S]^{-1} Bg \quad (4.24)$$

değerine ulaşır. Büyük sehimler halinde f_0 vektörü (4.19) daki gibi alınır. Bu bölümde (Bölüm 4.3.3) Kirchhoff plağının titreşimleri incelendiği için (4.24) formülü kullanılmıştır.

(4.23) diferansiyel denkleminin çözümü

$$f = f_0 + q(c_f \cos \omega t + s_f \sin \omega t) \quad (4.25)$$

şeklinde seçilir ve bu çözüm (4.23) de yerine konulursa

$$(-\omega^2 A + B - \alpha_S S) q = 0 \quad (4.26)$$

cebrik denklemi elde edilir. Homogen olan bu denklemi $q=0$ vektörü sağlar. Bu denklemi sıfırdan farklı q_i , ($i=1, 2, \dots, M^2$) çözümleriinin araştırılması, bir genel özdeğer problemidir. A, B ve S matrislerinin boyutu olan M^2 yinci dereceden

$$\det(B - \alpha_S S - \omega^2 A) = 0 \quad (4.27)$$

karakteristik denklemi sağlayan M^2 tane ω_k^2 özdeğeri ve ayrık izeseler bunlara karşılık M^2 tane q_k sağ özvektörü vardır. ω_k lara titreşimin açısal frekansları, q_k lara ise titreşim modları denir.

(4.16) ve (4.27) denklemleri karşılaştırılırsa şu sonuca varılır: $\alpha_S = \alpha_k$ için (4.16) denklemi sağlanacağından $\omega^2 = 0$ değeri (4.27) yi sağlar. Yani burkulma yüklerinden biri uygulandığında titreşim frekanslarından biri sıfır olur.

Ave B pozitif definit ve simetrik matrislerdir. Bu nedenle ω_k^2 , ($k=1, 2, \dots, M^2$) özdeğerlerinin işaretleri (4.27) de görülen

$$B - \alpha_S S \quad (4.28)$$

matrisine bağlıdır. α_S nin $\alpha_1^{(-)} < \alpha_S < \alpha_1$ aralığındaki değerleri için (bakınız Şekil-4.3) bu matris pozitif definitliğini korumakta ve bütün özdeğerleri pozitif olmaktadır. Tablo-4.1 de (4.28) matrisinin eksi işaretli özdeğerlerinin sayısı α_S ye bağlı olarak belirtilmiştir. Bunlar aynı zamanda eksi işaretli ω_k^2 özde-

Tablo-4.1: $B - \alpha_S S$ matrisinin eksi işaretli özdeğerlerinin sayısı

$\alpha_1^{(-)} < \alpha_S < \alpha_1$	için 0 tane
$\alpha_2^{(-)} < \alpha_S < \alpha_1^{(-)}$ veya $\alpha_1 < \alpha_S < \alpha_2$	için 1 tane
$\alpha_3^{(-)} < \alpha_S < \alpha_2^{(-)}$ veya $\alpha_2 < \alpha_S < \alpha_3$	için 2 tane
.....

gerlerinin de sayısıdır. ω_k^2 , eksi ise ω_k açısal frekansı için sanal değer verir. (4.23) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$f = f_o + \sum_{k=1}^{M^2} q_k (c_k \cos \omega_k t + s_k \sin \omega_k t) \quad (4.29)$$

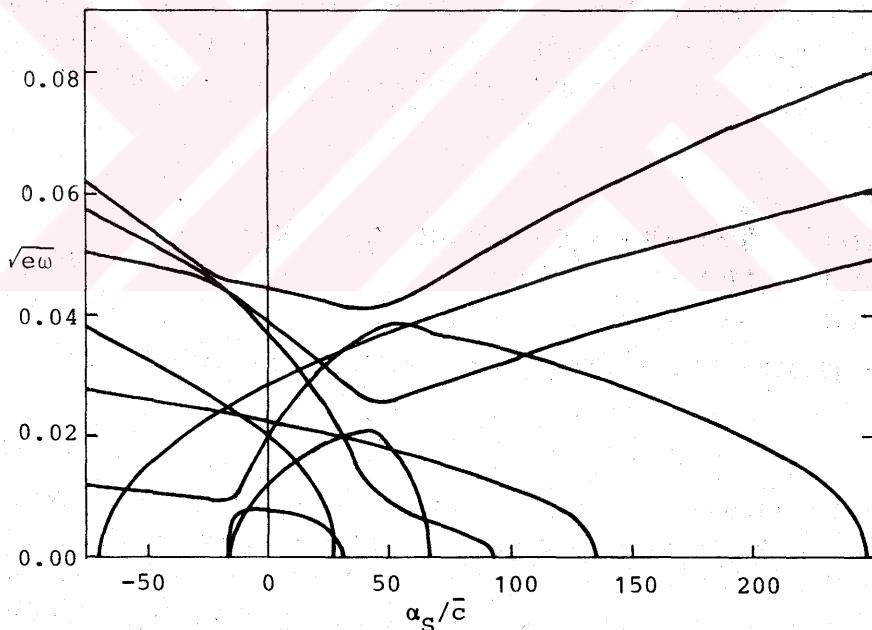
yazılırsa sanal ω_k lar için parantez içindeki ifade

$$c_k \cosh \omega_k^{(r)} t + s_k^{(r)} \sinh \omega_k^{(r)} t \quad (4.30)$$

şeklinde olacaktır. Burada $c_k^{(r)} = \sqrt{-1} \omega_k$ ve $s_k^{(r)} = \sqrt{-1} s_k$ değerleri geçeldir. O halde eğer ω_k sanal ise kinci titreşim modunda verilecek c_k başlangıç yer değiştirmesi veya $\omega_k s_k$ başlangıç hızı, bu modda (4.30) ifadesine göre zamanla üstel fonksiyon sek-

linde artan bir hareket başlatır. Bu ise istenmeyen bir harekettir. Bu nedenle α_S nin değeri $(\alpha_1^{(-)}, \alpha_1)$ aralığında alınmalıdır; ve böylece en küçük burkulma yükünden daha az statik kenar yükü kullanılmalıdır.

Burkulma ve serbest titreşim modları arasında bir geçiş vardır. α_S nin artması serbest titreşim frekanslarının ve modlarının değişmesine yol açar. $\alpha_S = \alpha_k$ değerine ulaştığında titreşim frekanslarından birinin sıfır olacağı yukarıda belirtildi. İlgili titreşim modunun da (4.15) ve (4.26) denklemleri karşılaştırıldığında k yinci burkulma moduna dönüşeceği anlaşılır. Şekil 4.5, kenar yüklerinin şiddetine bağlı olarak titreşim frekanslarının değişmesini göstermektedir.



Şekil-4.5 Statik kenar yükünün şiddetine bağlı olarak titreşim frekanslarının değişmesi (9 mod göz önüne alınmıştır. Yükleme için Şekil-4.1 e bakınız).

4.3.4. Von Kármán Plağında Plak Titreşimleri

Büyük genlikli titreşimlerde yukarıda hesaplanan titreşim frekansları ve modları genliklerin büyüklüğüne bağlı olarak biraz değişirler. Bu değişikliği belirlemek için von Kármán plak teorisi kullanılmalıdır. (3.59) diferansiyel denklemi incelenirse büyük genlikler halinde H matrisi ihmali edilemez. Ayrıca (3.60) kısıtlayıcı denklemelerinde büyük genlikler yer almaktır ve (3.59) daki L matrisi ortaya çıkmaktadır. Gene (4.1) diferansiyel denkleminde h vektörü büyük genlikler halinde sıfırdan farklıdır. Ve düzlem içi yer değiştirmeler üzerinde etkili olur. (3.59) da C ve Z matrisleri düzlem içi yer değiştirmelere bağlıdır. Düzlem içi atalet kuvvetlerinin ihmali edilmesi halinde C matrisi sıfır olmaktadır.

Plak titreşimlerinin incelenmesinde de Bölüm 4.2.1 de anlatılan Newmark yöntemi kullanılmıştır. (4.5) ve (3.59) diferansiyel denklemelerinin karşılaştırılmasından A, B, x, r nin karşılıklarının

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \\ B(t) &\rightarrow \bar{B}(t) = B - \alpha_S S - \alpha_D(t) D + C + Z + H + L \\ x(t) &\rightarrow f(t) \\ r(t) &\rightarrow Bg \end{aligned} \quad (4.31)$$

olduğu görülür. Kenar yüklerinin statik olması halinde α_D fonksiyonu

$$\alpha_D(t) = 0 \quad (4.32)$$

dir. $t=0$ başlangıç anında plak statik kenar yükleri ile yüklü olup (4.19) başlangıç koşulları elde edilmiştir. Bu başlangıç koşulları, plaqın statik kenar yükleri etkisindeki denge konumunu ifade etmektedir. Statik kenar yükleri ile yüklü plaqın titreşim yapabilmesi için (4.19) dan farklı olan aşağıdaki başlangıç koşullarından biri kullanılmalıdır:

$$\left[\begin{array}{l} f(0) \neq f_S \\ \dot{f}(0) = 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} f(0) = f_S \\ \dot{f}(0) \neq 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} f(0) \neq f_S \\ \dot{f}(0) \neq 0 \end{array} \right] \quad (4.33)$$

Bölüm 4.2.1. in sonunda belirtildiği gibi (4.31) deki $\bar{B}(t)$ matrisinin $t=t_1$ anındaki değerinin, hesaplanması gereken

$$f_{(1)} = f(t_1), \quad \dot{f}_{(1)} = \dot{f}(t_1), \quad \ddot{f}_{(1)} = \ddot{f}(t_1) \quad (4.34)$$

vektörlerine bağlı olması halinde iterasyon yapmak gereklidir. Bu iterasyonun nasıl yapılacağı AKIS DİYAGRAMI'nda görülmektedir. Statik kenar yüklerinin etkisindeki plak titreşimlerinin incelenmesi için bu akış diyagramına göre hazırlanan bilgisayar programı kullanılmıştır.

Bölüm 4.3.3. de Kirchhoff plağı için serbest titreşim frekansları ve modları elde edilmiştir. (4.24) formülünde geçen g önsehimini Kirchhoff plak varsayımlarından dolayı küçük önsehimdir. Titreşim frekans ve modlarının genliklerin büyümeye bağlı olarak nasıl değişeceğini aşağıdaki gibi incelenmiştir. g önsehimini gene küçük alıp statik kenar yükleri halinde denge konumu (4.24) ifadesiyle belirlenmektedir. Başlangıç koşulları (4.33) deki ikinci türden olmak üzere

$$f(0) = [B - \alpha_S S]^{-1} B g \quad (4.35)$$

$$\dot{f}(0) = G_{\omega_i} \frac{q_i}{|q_i|} \quad (4.36)$$

şeklinde seçilmiştir. (4.35) de (4.24) ifadesi kullanılmıştır. (4.36) da ise Bölüm 4.3.3. de hesaplanmış bulunan i inci serbest titreşim modundan ve frekansından faydalanyılmıştır. Yani titreşim sırasında statik denge konumuna yaklaşıldığından titreşim modunun Kirchhoff plağında hesaplanan q_i moduna eşit olacağını faydalanyılmıştır. (4.35) de geçen G değeri,

$$|f| = \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M f_{ij}^2(t) \right]^{1/2}, \quad t > 0 \quad (4.37)$$

normunun maksimum değeri ile

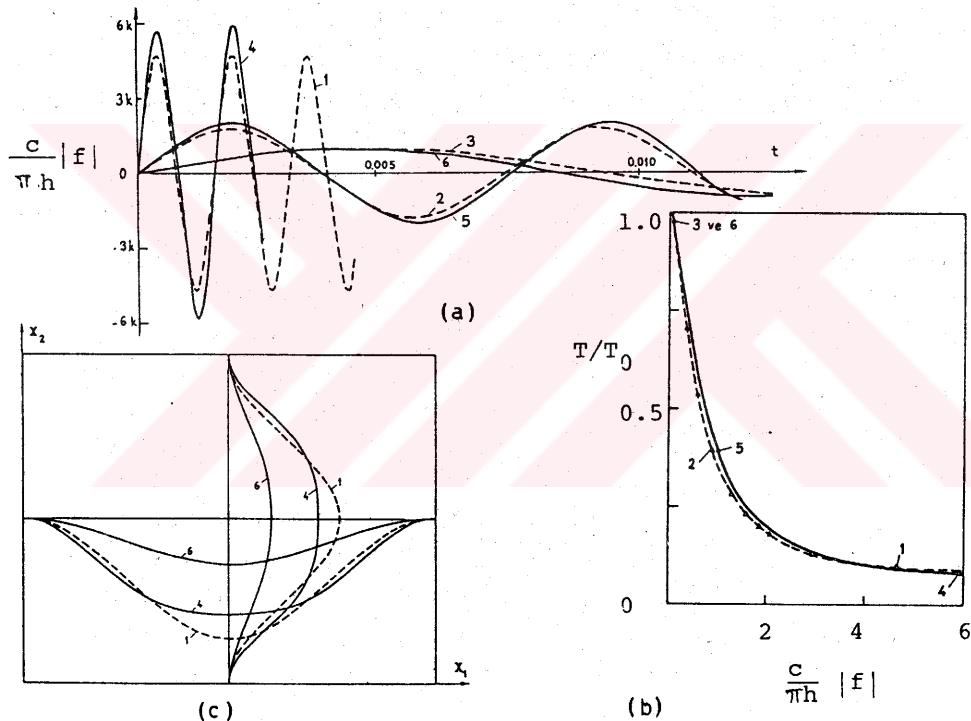
$$\text{maks}|f| \approx |f(0)| + G \quad (4.38)$$

şeklinde ilişkilidir. Kirchhoff plağı halinde (4.38) ifadesi eşittiktir. Von Kármán plağında ise yaklaşık olarak eşittir. Bu

durumda G değeri, kabaca seçilen genlik değeridir. Büyük genlikli titreşimde genliğin gerçek değeri Newmark yöntemi ile adım adım integrasyon sırasında elde edilen $|f|$ normları birbirleri ile karşılaştırılarak belirlenen maksimum değer yardımıyla

$$G_{\text{gerçek}} = \max |f| - |f(0)| \quad (4.39)$$

şeklinde elde edilmiştir. Sekil 4.6.; Sekil 4.1. deki statik kenar yüklemesi için $\alpha_s = 0.4 \alpha_1$ olması halinde ilk serbest titreşim modunun genlige ve gözönüne alınan mod sayısına bağlı olarak değişmesini göstermektedir.



Şekil 4.6 Genliklerin büyüklüğüne ve (3.25)de göz önüne alınan terim sayısına bağlı olarak a) ilk maddaki titreşim hareketinin değişimi; b) ilk titreşim moduna ait periyodun değişimi, c) ilk titreşim modunun değişimi. Şekil (a) da düşey eksendeki k ölçek katsayısı (1) ve (4) eğrileri için 1 ; (2) ve (5) eğrileri için 0.5 ; (3) ve (6) eğrileri için 0.1 olaraık alınmıştır. Şekil (c) de (6) eğrisi diğerlerine oranla 20 kere daha çok büyütülerek çizilmiştir. —— 9 terim ($M=3$) , - - - 1 terim ($M=1$) ve $(c/\pi h f)$ değeri (1) 4.695 , (2) 0.894 , (3) 0.09769 , (4) 5.924 , (5) 1.037 , (6) 0.09853 olarak seçilmiştir.

4.4. DİNAMİK KENAR YÜKLERİ ETKİSİNDE ORTOTROP DİKDÖRTGEN PLAKLAR

Bölüm 4.3.3. de statik kenar yükleri etkisinde bulunan bir dikdörtgen plağın serbest titreşim frekansları ve modları incelenerek statik kenar yükünün şiddetine bağlı olarak bu frekans ve modların çok değiştiği görülmüştü. Buna göre dinamik kenar yükleri halinde titreşim frekanslarının zamanla değişken olması gibi bir durumla karşılaşılır; ve plak titreşimleri periyodik diyemeyeceğimiz bir yapıya bürünür. Bu titreşimlerin incelenmesinde Bölüm 4.3.4. de anlatılan yöntem burada da başarıyla kullanılmıştır. Yüklerin zamana bağılılığını belirten $\alpha_D(t)$ fonksiyonu sıfırdan farklı alınmalıdır.

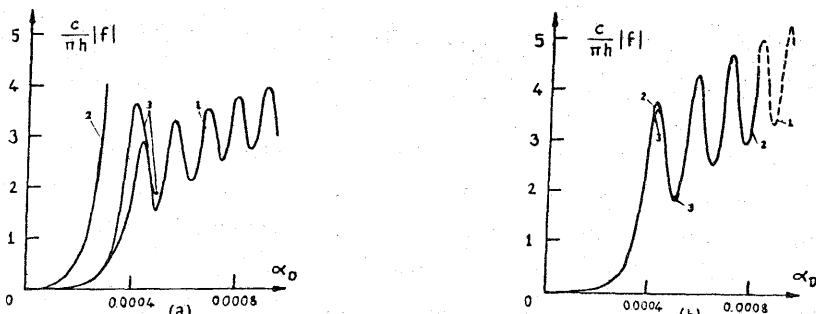
(4.19) başlangıç koşulları statik kenar yükleri etkisinde bulunan plağın denge konumunu belirtmektedir. Bu yükleme üzerine dinamik kenar yüklerinin uygulanması halinde plak titreşimleri ortaya çıkacaktır. Bu titreşimler AKIŞ DİYAGRAMI'na göre hazırlanan bilgisayar programı kullanılarak incelenmiştir.

Önsehimsiz bir plakta düzlem dışı titreşimlerin başlayabilmesi için başlangıç koşullarının (4.19) dan farklı olması yani (4.33) deki gibi seçilmesi gereklidir.

Plağın ön sehimli olup olmadığı haller, sehimler ve hızlar için seçilen değişik başlangıç koşulları ve düzlem içi atalet etkilerinin göz önüne alınıp alınmadığı haller hazırlanan bilgisayar programında göz önünde tutulmuştur. Şekil 4.7. deki sonuçların elde edilmesinde [67] ile aynı kenar yükleri ve mesnet biçimi kullanılmıştır (Şekil 2.4.a ve Şekil 2.3.b). [67] de plak kenarları düzlem içi rıjıt hareket yapmaktadır. Bu çalışmada ise tam olarak serbesttir.

4.5. ZAMANLA PERİYODİK DEĞİŞEN KENAR YÜKLERİ

Bu kenar yükleri Bölüm 4.4. de incelenen dinamik kenar yüklerinin özel bir halidir. Bu halde (3.59) diferansiyel denklemi, önsehimsiz bir plak için



Sekil 4.7 Ünsehimli bir plaqin zamanla doğrusal olarak artan (Sekil 2.5.c) düzlem içi kenar yükleri etkisindeki davranışları. a) Düzlem içi atalet kuvvetlerinin gözönüne alınması hali, b) alınmaması hali. Burada adım adım integrasyon için adım aralığı $\Delta\theta = (2\pi/\omega)/K$ şeklinde seçilmiştir. Yani plaqin düzlem dışı titresim periyodu K aralık sayısına bölünmektedir. K'nın seçilen değerleri, (1) K=100, (2) K=1000, (3) K=10000 dir. K=10000 olması halinde (a) ve (b) deki eğriler hemen hemen aynı olup arasında sehimin büyük değerleri için ≈ 2 kadar fark vardır. Sekil (a) da (1) ve (2) eğrileri için integrasyon kararsızdır. Çünkü adım aralığı bu halde düzlem içi titresim periyotlarının büyüklüğüne ulaşmaktadır.

$$Af + [B - \alpha_S S - \bar{\alpha} \cos \theta t D + C + Z + H + L] f = 0 \quad (4.40)$$

seklini alır. Von Kármán plaqi için yazılmış bulunan bu diferansiyel denklem, plak sehimlerinin sonsuz küçük olarak alındığı Kirchhoff plaqında

$$Af + [B - \alpha_S S - \bar{\alpha} \cos \theta t D + C + Z] f = 0 \quad (4.41)$$

şeklindedir. Düzlem içi atalet kuvvetleri göz önüne alınmıyorsa (4.40) da sadece C matrisi, (4.41) de ise C ve Z matrisleri sıfırdır.

4.5.1. Düzlem içi Atalet Kuvvetlerinin İhmal Edilmesi Hali

Değişken katsayılı olan (4.40) ve (4.41) diferansiyel denklem sistemlerinde θ yükleme frekansı bir parametre olarak yer alır. Çözümlerin yapısı θ nin değerlerine büyük ölçüde bağlıdır. Düzlem içi atalet kuvvetlerinin göz önüne alınmadığı halde periyodik katsayılı olan bu diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü Bolotin[15]de 14. ve 16. bölümlerde incelenmiştir. θ nin kararsızlık bölgeleri denilen bazı aralıklardaki değerleri için zamanla üstel olarak artan çözümler elde edilmektedir (parametrik rezonans). Kararsızlık bölgelerinin sınırlarının önemli bir özelliği, θ nin bu sınırdaki değerleri için çözümlerin

$$T = \frac{2\pi}{\theta} \quad \text{veya} \quad 2T = \frac{4\pi}{\theta} \quad (4.42)$$

periyotlu vektör değerli bir fonksiyon olmasıdır. θ nin sınır değerlerini belirlemek için bu özellikten faydalananmakta ve $2T$ periyotlu

$$f(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} (a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2}) \quad (4.43)$$

veya T periyotlu

$$f(t) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} (a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2}) \quad (4.44)$$

çözümlerinin ortaya çıkacağı θ frekansları araştırılmaktadır. (4.43) ifadesi (4.41) de yerine konulur ve sinüs ve kosinüslü terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenirse a_k ve b_k , ($k=1,3,\dots$) sabit vektörlerini belirlemek üzere birbirinden bağımsız iki denklem takımı elde edilir. Bunlar yardımcı ile a_k ve b_k vektörleri birbirlerinden bağımsız olarak çözülebilmektedir. Bu vektörlerin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için elde edilen iki denklem takımının da katsayılar determinantı sıfır olmalıdır:

$$\begin{vmatrix} M_1 - M_D & M_D & 0 & \dots \\ M_D & M_3 & M_D & \dots \\ 0 & M_D & M_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} M_1 + M_D & M_D & 0 & \dots \\ M_D & M_3 & M_D & \dots \\ 0 & M_D & M_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

Burada M_D ve M_1, M_3, M_5, \dots matrisleri

$$M_D = -\frac{1}{2} \bar{\alpha} D \quad (4.46)$$

$$M_k = B - \alpha_S S + C + Z - \frac{k^2}{4} \theta^2 A, \quad k=0,1,2,3,\dots$$

şeklinde hesaplanırlar. (4.45) determinantlarını sıfır kılan θ değerleri aşağıda açıklanacağı şekilde birinci, üçüncü, beşinci,... kararsızlık bölgelerinin sınırlarını belirtir.

(4.43) ifadesinde k için sadece bir terim alınması halinde yanı a_1 ve b_1 vektörleri dışındakiler sıfır alınırsa (4.45) determi-

nantlarında sadece köşegen üzerindeki ilk elemanlar kalır:

$$M_1 - M_D = 0, \quad M_1 + M_D = 0 \quad (4.47)$$

(4.41) de f vektörünün ve (4.46) daki M matrislerinin boyutu M^2 olduğu için (4.47) denklemlerinden $2M^2$ tane pozitif θ değeri hesaplanır. Bunlar, M^2 tane olan birinci kararsızlık bölgelerinin alt ve üst sınırlarıdır.

Aynı şekilde (4.43) ifadesinde a_1, a_3, b_1, b_3 vektörleri dışındakiler sıfır alınırsa (4.45) determinantları

$$\begin{vmatrix} M_1 - M_D & M_D \\ M_D & M_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} M_1 + M_D & M_D \\ M_D & M_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.48)$$

şeklini alır. Bu iki denklemden $4M^2$ tane θ değeri hesaplanır. Bunlardan $2M^2$ tanesi birinci kararsızlık bölgelerinin diğer $2M^2$ tanesi üçüncü kararsızlık bölgelerinin alt ve üst sınırlarıdır. Beşinci, yedinci,... kararsızlık bölgelerini belirlemek için (4.43) ifadesinde k için yeni terimler katılmalıdır. Bu durumda alt kararsızlık bölgelerinin sınırları daha duyarlı olarak elde edilir.

İkinci, dördüncü,..., kararsızlık bölgelerinin belirlenmesi için (4.44) ifadesi (4.41) de yerine konulur. Bu denklemi sağlayan sıfırdan farklı a_k ve b_k vektörlerinin varlığı için (4.45) deklere benzer şekilde

$$\begin{vmatrix} M_2 & M_D & 0 & \dots \\ M_D & M_4 & M_D & \dots \\ 0 & M_D & M_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} M_0 & 2M_D & 0 & 0 & \dots \\ M_D & M_2 & M_D & 0 & \dots \\ 0 & M_D & M_4 & M_D & \dots \\ 0 & 0 & M_D & M_6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (4.49)$$

determinantlarının sıfır olması gereklidir. Burada M_D ve M_0, M_2, M_4, \dots , matrisleri (4.46) daki gibidir. (4.44) ifadesinde k için sadece bir terim alınması halinde yani a_2, b_0, b_2 vektörleri dışındakiler sıfır alınırsa (4.49) determinantları

$$\begin{vmatrix} M_2 \\ M_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} M_0 & 2M_D \\ M_D & M_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

şeklinde olur. Bu eşitlikleri sağlayan $2M^2$ tane pozitif θ değeri hesaplanmaktadır. Bunlar, M^2 tane olan ikinci kararsızlık bölgelerinin alt ve üst sınırlarıdır.

(4.44) ifadesinde sadece $k=2$ ve 4 terimleri alınırsa (4.49) determinantlarında M_4 matrisinin altında ve sağında kalan matrisler olmaz. $4M^2$ tane θ değeri elde edilir. Bunların $2M^2$ tanesi ikinci diğer $2M^2$ tanesi dördüncü kararsızlık bölgelerinin alt ve üst sınırlarıdır. Altıncı, sekizinci,..., kararsızlık bölgelerini belirlemek için (4.44) ifadesinde k için yeni terimler katılmalıdır. Bu durumda alt kararsızlık bölgelerinin sınırları daha duyarlılıkla olarak elde edilir.

(4.41) diferansiyel denklem sisteminde α nin küçük değerleri için kararsızlık bölgeleri dar olup herhangi bir bölgenin alt ve üst sınırını belirten θ değerleri birbirine çok yakındır. α büyükçe kararsızlık bölgeleri birbirine taşabilir. Bu durumda iki parametrik rezonans olayı birlikte görülebilir.

Yukarıda (4.41) diferansiyel denkleminde θ nin kararsızlık bölgelerinin sınırları hesaplandı. Von Kármán plağında yani (4.40) diferansiyel denklemi kullanıldığından kararsızlık bölgelerinin nasıl hesaplanacağı ve bu bölgelerin (4.41) 'e göre Kirchhoff plağında hesaplananlar ile yakın ilgisi Bolotin [15] de 16. bölümdeki esaslar içinde incelenebilir. Bunun için gene (4.43) veya (4.44) ifadeleri seçilerek (4.40) diferansiyel denkleminin iterasyon sonunda sağlanılması etkili bir yoldur. Bu durumda C , Z , H , L matrislerini hesaplamak için a_k ve b_k sabit vektörlerini de hesaplamak gerekmektedir. Büyük genlikler θ için kararsızlık bölgelerinin sınır değerlerini biraz değiştirmektedir.

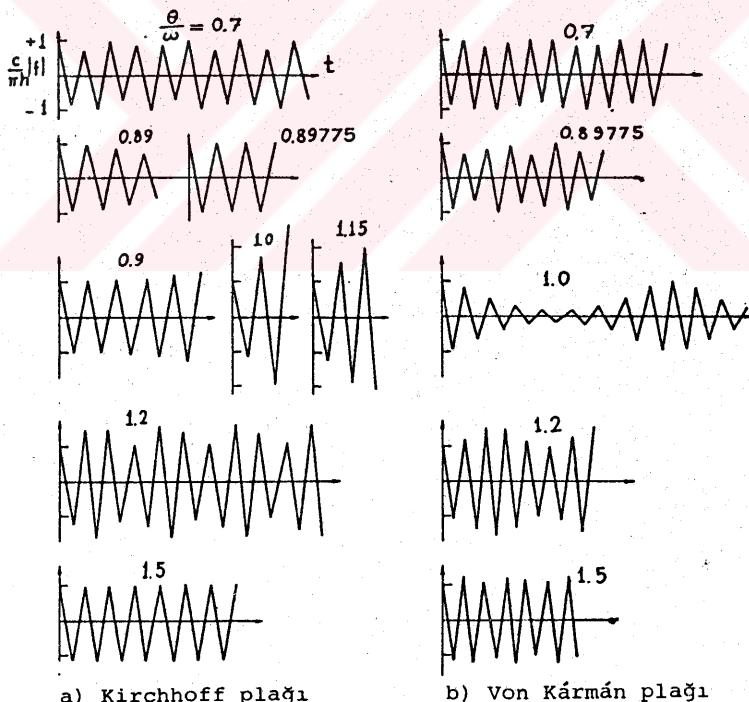
(4.40) diferansiyel denkleminin periyodik olmayan çözümlerinde karşılaşılan vuru olayı (4.43) ifadesi (4.40) da yerine konularak a_k ve b_k vektörlerini zamanın yavaş değişen fonksiyonları şeklinde almak suretiyle incelenebilir. Yavaş değişen fonksiyon-

dan

$$\left| \frac{d(\cdot)}{dt} \right| \frac{2\pi}{\theta} \ll |(\cdot)|, \quad \left| \frac{d^2(\cdot)}{dt^2} \right| \frac{2\pi}{\theta} \ll \left| \frac{d(\cdot)}{dt} \right| \quad (4.51)$$

bağıntılarını sağladığı anlaşılmaktadır. (4.43) ifadesi (4.40) da yerine konulur ve (4.51) bağıntıları kullanılırsa a_k ve b_k vektörlerinin sağlayacağı bir diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem sisteminin adım adım integrasyon yapılarak çözülmesi suretiyle a_k ve b_k vektörlerinin zamana bağlılığı elde edilir [15].

Şekil 4.8. deki sonuçların elde edilmesinde [63] ile aynı kenar yükleri ve mesnet biçimini kullanılmıştır (Şekil 2.4.a ve Şekil 2.3.b). [63] den farklı olarak harmonik yükün şiddeti burkulma yükünün 0.4 katı alınmıştır. Bu oranın daha büyük değerlerinde de sonuçlar başarıyla elde edilmektedir.



Şekil 4.8. Yük frekansı ile titreşim frekansı oranının çeşitli değerleri için plak kalınlığına eşit sehim verilmiş plaçın ilk hızsız olarak yapacağı hareketin incelenmesi.

BÖLÜM .5

S O N U Ç L A R

Bu çalışmada düzlem içi kenar yükleri etkisinde bulunan dikdörtgen ortotrop plakların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri incelenmiştir. Problemin niteliği gereği çözüm sayısal hesaplarla elde ediidiğinden geniş bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Buna ait akış diyagramı tezin sonunda verilmiştir. Bu bilgisayar programı yardımıyla levha titreşimleri, plağın statik burkulması, burkulma sonrasında plak davranışısı, statik kenar yükleri etkisinde plak titreşimleri, titrem modları ve frekansların genlikle değişimi, dinamik kenar yükleri etkisinde önsehimli ve önsehim-siz plakların davranışısı incelenebilmektedir. Problemde düzlem içi atalet kuvvetleri de gözönüne alınabilmektedir. Bu çalışmada incelenen plaklar için Şekil 2.3 deki mesnet durumları ve Şekil 2.4 deki kenar yükleri düşünülmüş olup statik ve dinamik kenar yükleri için ayrı doğrusal toplamlar kullanılmakta ve dinamik kenar yüklerini oluşturmak üzere Şekil 2.5 deki fonksiyonlar çarpan olarak girmektedir. Düzlem içi sınır koşulları gerilmeler cinsinden sağlanmaktadır. Levha titreşimleri halinde 360 mod, plak titreşimleri halinde ise düzlem içi yer değiştirmeler için 166 mod, düzlem dışı titreşimler için 9 mod gözönüne alınabilmektedir. Kirchhoff plağı halinde düzlem dışı 25 mod kullanılabilmektedir. Bu kısıtlamalar bilgisayarın getirdiği hem bellek hem de süre kısıtlamalarıdır. Bilgisayarda yapılan sayısal çalışmalar değerlendirilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Düzlem İçi Titreşimler :

Düzlem içi atalet kuvvetlerinin ihmali edilmesi halinde levhada-ki yer değiştirmeler (3.39) daki α_S ve α_D li terimlerle ifade edilebilir. Ihmal edilmemesi halinde bu yer değiştirmeler üzeri-

ne serbest titreşim modlarının (3.89) daki doğrusal toplamı ile belirlenen $u_{ij}(t)$ ve $v_{ij}(t)$ katsayılarının bulunduğu terimler eklenmektedir.

- Serbest titreşim modlarında kenar gerilmeleri sıfırdır. Levhanın merkezinden kenarlara paralel olarak çizilen eksenlere göre simetrik veya antisimetrik olmak üzere bu modlar dört gruba ayrılarak işlem yapılmaktadır.
- Terim sayısına bağlı olarak serbest titreşim frekansları çok iyi bir yakınsama göstermektedir.
- Her simetri durumunda ilk serbest titreşim frekansının (2.23) deki malzeme parametreleri ile ilgisi, κ ile artması ve v ile azalması şeklindeki şeklidir.

Düzlem Dışı Titreşimler :

- Kirchhoff plak varsayımları halinde düzlem içi yer değiştirmeler levhadaki gibidir.
- Von Kármán plağı halinde düzlem içi atalet kuvvetlerinin ihmal edildiği halde, hatta statik halde de, (3.39) ifadelerinde u_{ij} ve v_{ij} katsayılarının bulunduğu terimler ortaya çıkmaktadır. Bilindiği gibi büyük sehimler, düzlem içi yer değiştirmeye ve gerilmelerin sağlayacağı diferansiyel denklemlere kuadratik ifadeler şeklinde girmektedir. Bu çalışmada bu ifadeler, (3.33) deki $h_{ij}^{(1)}$ katsayıları kullanılarak (3.32) deki serilerle ifade edilmiştir. Bunlar seçilen varyasyon yönteminin uygulanmasında ve düzlem içi sınır koşullarının sajlatılmasında kolaylık getirmiştir.
- Daha önceki benzer çalışmalara paralel olarak statik burkulma yükleri ve düzlem dışı serbest titreşim frekansları mod sayısına bağlı olarak iyi bir yakınsama göstermektedir.
- Burkulma sonrası plak yer değiştirmelerinin hesaplanması için kullanılan iterasyon hızla yakınsamaktadır. Düzlem içi serilerde gözüne alınan terim sayısının artması yakınsanan değeri etkilemeye olup (4.17) de tanımlanan norm, (3.39) daki N sınırının 4 den 6 ya çıkarılması halinde ≈ 6 kadar, 6 dan 8 e çıkarılması halinde ise ≈ 2 kadar artarak düzlem dışı yer değiştirmelerin yakınsamasını daha da hızlandırmaktadır.

- Kenar yüklerinin arttırılmasının düzlem dışı serbest titreşim frekanslarını büyük ölçüde değiştirdiği bilinmektedir. Bu değişim bir örnek olarak (3.85) de seçilen malzeme özellikleri ve plak boyutları için elde edilmiştir (Şekil 4.5).
- Bir serbest titreşim modunun ve frekansının genliklere bağlı olarak değişimi, o modda plağa düzlem dışı bir başlangıç hızı verilerek elde edilmiştir (Şekil 4.6). Adım adım integrasyon yöntemi kullanılarak başlangıç değer problemi çözülmüştür. Verilen başlangıç hızı ile (4.37) normunun maksimum değeri arasında Kirchhoff plağı için bir orantı olmasına karşılık von Kármán plağında yoktur. Aynı başlangıç hızında Kirchhoff ve von Kármán varsayımlarına göre elde edilen $(c/\pi h)_{\max} |f|$ değerleri karşılaşıldığında ilk değerler Kirchhoff plağına ait olmak üzere değişik başlangıç hızları için 0.001-0.001 ; 0.1-0.09853 ; 2.0-1.037 ; 50.0-5.924 olduğu; diğer bir deyimle Kirchhoff plak varsayımlarına göre yapılan hesaplar başlangıç hızı arttıkça von Kármán'dan çok farklı genlikler vermektedir.
- Kenar yüklerinin rampa fonksiyonuna göre zamanla doğrusal olarak arttığı hal için elde edilen sonuçlar [67] deki sonuçlara benzerdir. Tezde ele alınan düzlem içi atalet kuvvetlerinin etkisinin katıldığı birörnekte bu etkinin sehimlerin büyümesi halinde sonuçlara % 2 oranında etkili olabileceği gözlenmiştir. Adım adım integrasyon yönteminin kullanılması gerekmekte olduğundan adım aralığı düzlem içi titreşim periyoduna göre seçilmelidir. Adım aralığı küçük seçilmediği takdirde integrasyonun kararlılığı bozulmaktadır.
- Zamanla harmonik olarak etkiyen kenar yükleri için elde edilen sonuçlar [63] dekilere benzerdir. O çalışmada pertürbasyon serisi kullanılması nedeniyle harmonik yükün şiddetinin burkulma yüküne oranla küçük seçilmesini gerektirmektedir. Aksi halde perturbasyon serisinden çok terim alınması gerekmektedir. Tezde harmonik yükün şiddeti için bir sınırlama söz konusu değildir ; ve düzlem dışı titreşimler çok modlu olarak incelenemektedir (3.25).

KAYNAKLAR

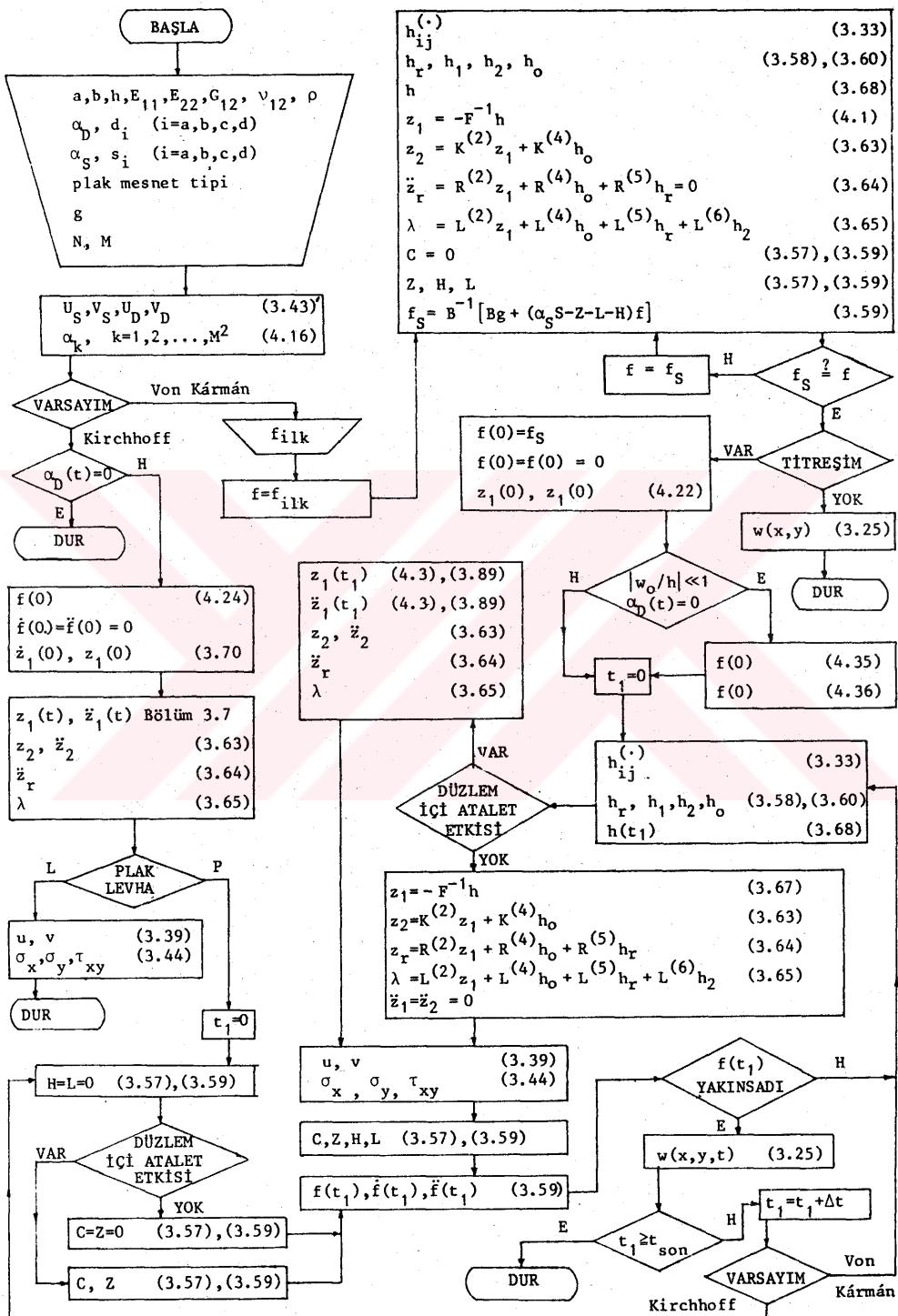
1. ERİNGEN, A.C., "Nonlinear Theory of Continuous Media", McGraw-Hill, (1962).
2. FUNG, Y.C., Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, (1965).
3. NAYFEH, A.H. and MOOK, D.T., "Nonlinear Oscillations", John Wiley & Sons, (1979).
4. LEKHNTSKII, S.G., "Anisotropic Plates" Translated from the Second Russian Edition by S.W. Tsai and T.Cherion, Gordon and Breach, (1968).
5. TIMOSHENKO, S.P., "Plak ve Kabuklar Teorisi", Çevirenler: İnan, M. ve Sönmez, F., İ.T.U. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul, (1964).
6. WASHIZU, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, (1968).
7. CHIA, C.Y., "Nonlinear Analysis of Plates", McGraw-Hill, (1980).
8. GIRKMANN, K., "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler", Çeviren: Tameroğlu, S.S., Matbaa Teknisyenleri Basımevi, Divanyolu, Biçkiyurdu Sokak 12, İstanbul, (1965).
9. İNAN, M., "Düzlemden Elastisite Teorisi", Matbaa Teknisyenleri Basımevi, Divanyolu, Biçkiyurdu Sokak 12, İstanbul, (1969).
10. AKÖZ, Y., "Ortotrop Levhada Gerilme Sınır Değer Problemi", İ.T.U. İnşaat Fakültesi Teknik Rapor No:38, (1980).
11. UZMAN, U., "Ortotrop Dikdörtgen Levhaların Düzlemlenme Titreşimleri", ikinci Ulusal Mekanik Kongresi-Bildiriler, İstanbul, (1982).
12. TIMOSHENKO, S.P., "Elastik Stabilite Teorisi", Çevirenler: Şuhubi, E., Deren, H., Teknik Üniversite Matbaası, İstanbul, (1963).
13. PFLÜGER, A., "Elastostatigin Stabilite Problemleri", Çevirenler: Tameroğlu, S.S. Cinemre, V. ve Özbeğ, T., Matbaa Teknisyenleri Basımevi, Divanyolu, Biçkiyurdu Sokak 12, İstanbul, (1970).
14. BRUSH, D.O., ALMROTH, B.O., "Buckling of Bars, Plates and Shells", McGraw-Hill, (1975).
15. BOLOTIN, V.V., "The Dynamic Stability of Elastic Systems", Translated by V.I. Weingarten, L.B. Greszczuk, K.N. Trirogoff and K.D. Gallegos, Holden Day, (1964).
16. HERRMANN, G. (editör), "Dynamic Stability Of Structures", Pergamon Press, (1967).
17. LEIPHOLZ, H.H.E., "Stability of Elastic Plates via Liapunov's Second Method", Ing.-Arch., Vol.45 (1976) s.237-345.
18. BAKER, G., PAVLOVIĆ, M.N., "Elastic Stability of Simply Supported Rectangular Plates Under Locally Distributed Edge Forces", J. Appl. Mech., Vol.49, (1982), s. 177-179.
19. CHAMIS, C.C., "Buckling of Anisotropic Composite Plates", ASCE, J. Struct. Div. Vol. 95, (1969), s. 2119-2139.
20. HARRIS, G.Z., "The Buckling of Orthotropic Rectangular Plates, Including the Effect of Lateral Edge Restraint", Int. J. Solids Struct., Vol.11, (1975), s. 877-885.
21. HOUSNER, J.M., STEIN, M., "Numerical Analysis and Parametric Studies of the Buckling of Composite Orthotropic Compression and Shear Panels", NASA TN D-7996, Oct (1975), 102 s.
22. BRUNELLE, E.J., OYIBO, G.A., "Generic Buckling Curves for Specially Orthotropic Rectangular Plates", AIAA J., Vol.21, (1982), s. 1150-1156.
23. KNIGHTLY, G.H., SATHER, D., "Nonlinear Buckled States of Rectangular Plates", Arch. Rat. Mech. Anal., Vol.54, (1973), s. 356-372.

24. RHODES, J., HARVEY, J.M., "Examination of Plate Post-Buckling Behavior", ASCE, J. Eng. Mech. Div., Vol.103, (1977), s. 461-478.
25. SHYE, K.Y., COLVILLE, J., "Post-Buckling Finite Element Analysis of Flat Plates", ASCE, J. Struct. Div., Vol.105, (1979), s. 297-311.
26. CHANDRA, R., RAJU, B.B., "Postbuckling Analysis of Rectangular Orthotropic Plates", Int. J. Mech. Sci., Vol.15, (1973), s. 81-97.
27. HARRIS, G.Z., "Buckling and Postbuckling of Orthotropic Plates", AIAA, J., Vol. 14, (1976), s. 1505-1506.
28. KURASHIGE, M., "Instability of a Fiber-Reinforced Elastic Slab Subjected to Axial Loads", J. Appl. Mech., Vol.46, (1979), s.839-843.
29. ZIEGLER, H., "The Influence of Inplane Deformation on the Buckling Loads of Isotropic Elastic Plates", Ing.-Arch., Vol.53, (1983), s.61-72.
30. CHEN, L.W., DOONG, J.L., "Postbuckling Behavior of a Thick Plate", AIAA, J., Vol.21, (1983), s.1157-1161.
31. ODEN, J.T., REDDY, J.N., "Variational Methods in Theoretical Mechanics", Springer-Verlag, (1976).
32. LANCZOS, C., "The Variational Principles of Mechanics", University of Toronto Press, (1970).
33. KIELB, R.E., HAN, L.S., "Vibration and Buckling of Rectangular Plates under In-Plane Hydrostatic Loading", J. Sound Vib. Vol.70, (1980), 543-555.
34. BASSILY, S.F., DICKINSON, S.M., "Vibration of Plates Subject to Arbitrary In-Plane Loads-A Perturbation Approach", J. Appl. Mech., Vol.40, (1973), s.1023-1028.
35. BRADFORD, L.G., DONG, S.B., "Elastodynamic Behavior of Laminated Orthotropic Plates Under Initial Stress", Int. J. Solids Struct., Vol.11,(1975),s.213-230.
36. AKSU, G., "Finite Difference Energy Method for Vibration of Orthotropic Plates", METU J. Pure and Appl. Sci., Vol.10, (1977), s.65-88.
37. MARKUŠ, Š., NÁNÁSI, T., "Significance of In-Plane Inertia Forces in the Vibration Analysis of Three-Layered Circular Plates", J. Sound Vib., Vol.76, (1981), s.421-441.
38. AKSU, G., "Free Vibration Analysis of Stiffened Plates by Including the Effect of Inplane Inertia", J. Appl. Mech., Vol.49, (1982), s.206-212.
39. CHÜ, H.N., HERRMAN, G., "Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates", J. Appl. Mech., Vol.23,(1956),s1-9.
40. RAJU, I.S., RAO, G.V., RAJU, K.K., "Effect of Longitudinal or Inplane Deformation and Inertia on the Large Amplitude Flexural Vibrations of Slender Beams and Thin Plates", J. Sound Vib., Vol.49, (1976) s.415-422.
41. PRATHAP, G., "Comments on Effect of Longitudinal or In-Plane Deformation and Inertia on the Large Amplitude Flexural Vibrations of Slender Beams and Thin Plates", J. Sound Vib., Vol.55, (1977), s. 308-311.
42. MEI, C., "Response of Nonlinear Aircraft Structural Panels to High Intensity Noise", Presented at The Aerospace Conference, California, Aug. (1980).
43. YANG, T.Y., HAN, A.D., "Buckled Plate Vibrations and Large Amplitude Vibrations Using High Order Triangular Elements", AIAA J., Vol.21, (1982), s.758-766.
44. PASIC, H., HERRMAN, G., "Non-Linear Free Vibrations of Buckled Plates With Deformable Loaded Edges", J. Sound Vib., Vol.87, (1983), s.105-114.
45. VENDHAN, C.P., "Modal Equations for the Nonlinear Flexural Vibrations of Plates", AIAA J., Vol.13, (1975), s.1092-1094.

46. VENDHAN, C.P., DAS, Y.C., "Application of Rayleigh-Ritz and Galerkin Methods to Non-Linear Vibration of Plates", *J. Sound Vib.*, Vol.39, (1975), s.147-157.
47. CHANDRA, R., "Large Deflection Vibration of Cross-Ply Laminated Plates with Certain Edge Conditions", *J. Sound Vib.*, Vol.47 (1976), s.509-514.
48. HARARI, A., "Generalized Non-Linear Free Vibrations of Prestressed Plates and Shells", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.11, (1976), s.169-181.
49. PRATHAP, G., VARADAN, T.K., "On the Non-Linear Vibrations of Rectangular Plates", *J. Sound Vib.*, Vol.56, (1978), s.521-530.
50. VENDHAN, C.P., "An Investigation into Non-Linear Vibrations of Thin Plates", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.12, (1977), s.209-221.
51. CHIA, C.Y., PRABHAKARA, M.K., "A General Mode Approach to Nonlinear Flexural Vibrations of Laminated Rectangular Plates", *J.Appl. Mech.*, Vol.45, (1978), s. 623-628
52. PRATHAP, G., PANDALAI, K.A.V., "Non-Linear Vibrations of Transversely Isotropic Rectangular Plates", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.13, (1979) s. 285-294.
53. NIYOGI, A.K., MEYERS, B.L., "A Perturbation Solution of Non-Linear Vibration of Rectangular Orthotropic Plates", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.16 (1981), s. 401-408.
54. REDDY, J.N., CHAO, W.C., "Nonlinear Oscillations of Laminated, Anisotropic, Rectangular Plates", *J. Appl. Mech.*, Vol.49), (1982), s.396-402.
55. HUTT, J.M., SALAM, A.E., "Dynamic Stability of Plates by Finite Elements", *ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, Vol.97, (1971), s. 879-898.
56. ZAJACZKOWSKI, J., YAMADA, G., "Instability of a Periodically Moving Plate", *J. Sound Vib.*, Vol.68, (1980), s. 181-186.
57. DUFFIELD, R.C., WILLEMS, N., "Parametric Resonance of Stiffened Rectangular Plates", *J. Appl. Mech.*, Vol.39, (1972), s. 217-226.
58. MERRITT, R.G., WILLEMS, N., "Parametric Resonance of Skew Stiffened Plates", *J. Appl. Mech.*, Vol.40, (1973), s. 439-444.
59. MORTIMER, R.W., CHOU, P.C., RODINI, B.T., "In-Plane and Shear-Bending Impact of Laminated Composite Plates", *J.Appl. Mech.*, Vol.43,(1976),s.275-280
60. BODUROĞLU, H., UZMAN, Ü., "Ortotrop Dikdörtgen Plakların Dinamik Stabilitesi", 1. Ulusal Mekanik Kongresi-Bildiriler-, (1980), s.106-115.
61. SOMERSET, J.H., EVAN-IWANOWSKI, R.M., "Influence of Non-Linear Inertia on the Parametric Response of Rectangular Plates", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.2, (1967), s.217-232.
62. SOMERSET, J.N., EVAN-IWANOWSKI, R.M., "Experiments on Large Amplitude Parametric Vibration of Rectangular Plates", *Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Proceeding of the Third Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.3, s.331-355, Program Press, Ltd. London, (1966).
63. KISLIAKOV, S.D., "On the Non-Linear Dynamic Stability Problem for Thin Elastic Plates", *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol.11, (1976), s.219-228.
64. SHIVAMOGGI, B.K., "Dynamic Buckling of a Thin Elastic Plate: Non-Linear Theory", *J. Sound Vib.*, Vol.54, (1977), s.75-82.
65. RAJAPPA, N.R., "Comments on Dynamic Buckling of a Thin Elastic Plate: Non-Linear Theory", *J. Sound Vib.*, Vol.61, (1978), s.471-471

66. TYLIKOWSKI, A., "Stability of a Nonlinear Rectangular Plate", *J. Appl. Mech.*, Vol.45, (1978), s. 583-585.
67. EKSTROM, R.E., "Dynamic Buckling of a Rectangular Orthotropic Plate", *AIAA J.*, Vol.11, (1973), s. 1655-1659.
68. BENVENISTE, Y., ABOUDI, J., "The Dynamic Response of a Laminated Plate under Large Deformations", *J. Sound Vib.*, Vol.38, (1975), s.425-436.
69. Adi MURTHY, N.K., ALWAR, R.S., "Nonlinear Dynamic Buckling of Sandwich Panels", *J. Appl. Mech.*, Vol.43, (1976), s.459-463.
70. CHURCHILL, R.V., "Fourier Series and Boundary Value Problems", McGraw-Hill, (1963).
71. BATHE, K-J., WILSON, E.L., "Numerical Methods in Finite Analysis", Prentice-Hall, Inc., (1976).
72. CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, (1975).
73. FAIR WEATHER, G., "Galerkin Methods for Vibration Problems in Two Space Variables", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.9, (1972), s.702-714.
74. TRUJILLO, D.M., "Stability Anayysis of an Extrapolated Force Correction Method for Nonlinear Structural Dynamics", *J.Appl. Mech.*, Vol.49, (1982), s. 203-205.
75. THURSTON, G.A., "Implicit Numerical Integration for Periodic Solution of Autonomous Nonlinear Systems", *J. Appl. Mech.*, Vol.49, (1982),s.861-866.
76. HUGHES, T.J.R., BELEYTSCHKO, T., "A Precis of Developments in Computational Methods for Transient Analysis", *J.Appl.Mech.*, Vol.50, (1983), s.1033-1041.
77. COLLATZ, L., "The Numerical Treatment of Differential Equations", Springer-Verlag, (1966).
78. GOOS, G., HARTMANIS, J. (editors), "Lecture Notes in Computer Science, Vol.6 (Smith, B.T., Boyle, J.M., Dongarra, J.J., Garbow, B.S., Ikebe, Y., Klema, V.C., Moler, C.B., Matrix Eigensystem Routines-Eispack Guide)", Springer-Verlag, (1976).

EK : AKIŞ DİYAGRAMI



TEŞEKKÜR

Yazar, çalışmanın her aşamasında yakın ilgileri, değerli katkıları ve yardımları için doktora yöneticisi Sayın Prof. Dr. Hasan Boduroğlu'na sonsuz minnet ve teşekkürlerini sunar.

Yakın ilgileri ve tartışmaları ile çalışmaya çok değerli yardımları geçen Sayın Prof. Dr. Vural Cinemre'ye, Sayın Doç. Dr. Ragıp Erdöl'e, Sayın Doç. Dr. Osman Çakıroğlu'na pek çok teşekkür eder.

Sürekli yardımlarını esirgemeyen K.Ü. ve İ.T.Ü. Bilgi İşlem Merkezi personeline, tezi titizlikle daktilo eden Sayın Temel Tosun'a pek çok teşekkür eder.

Bu çalışma başladığında hayatı iken teşvik ve desteğini gördüğü merhum Doç. Dr. Necip Yaman'ı saygı ile anar.

ÖZGEÇMİŞ

Ümit Uzman 1952 yılında Gümüşhane'nin Bağlarbaşı Mahallesinde doğmuştur. İlk öğrenimini Gümüşhane Fevzipaşa İlkokulu'nda (1958-1963), orta öğrenimini Gümüşhane Lisesi'nde (1963-1969) görmüştür. Yüksek öğrenimini K.T.Ü. İnşaat-Mimarlık Fakültesi'nde (1969-1974) yapmış; ve bu fakültenin İnşaat Bölümü Betonarme kolu'ndan mezun olmuştur.

18 ay olarak yaptığı askerlik hizmetini tamamladıktan sonra Sakarya D.M.M. Akademisi İnşaat Bölümü Mekanik Kürsüsü'ne asistan olarak girmiştir (Eylül 1976). Haziran 1978 de naklen K.T.Ü. İnşaat-Mimarlık Fakültesi İnşaat Bölümü, Teknik Mekanik ve Genel Mukavemet Kürsüsü'ne asistan olarak atanmıştır.

Halen Karadeniz Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmektedir. Evlidir ve bir kızı vardır.

**T. C.
Yüksekokul Kurulu
Dolmabahçe von Merkez**