İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL YÖNTEMİNE TERS OPTİMAL KONTROL YAPISININ KATILMASI

DOKTORA TEZİ

Lütfi ULUSOY

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

AĞUSTOS 2021

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL YÖNTEMİNE TERS OPTİMAL KONTROL YAPISININ KATILMASI

DOKTORA TEZİ

Lütfi ULUSOY
(504122103)

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA

AĞUSTOS 2021

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün 504122103 numaralı Doktora Öğrencisi Lütfi Ulusoy, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL YÖNTEMİNE TERS OPTİMAL KONTROL YAPISININ KATILMASI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. İbrahim EKSİN** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Cevat ERDAL ....
Namık Kemal Üniversitesi

Doç. Dr. Gülay ÖKE GÜNEL ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Taner ARSAN ....
Kadir Has Üniversitesi

Teslim Tarihi : 28 Haziran 2021
Savunma Tarihi : 02 Ağustos 2021

Annem Mihriban, Babam Zeynal, Eşim Nilüfer ve Kızım Doğa'ya

ÖNSÖZ

Doktora programına başladığım andan itibaren, uzun ve zorlu çalışma dönemi boyunca bilgisi, emeği, yardımları ve sabırla her an yanımda olan birlikte çalışmaktan zevk aldığım ve birlikte çalışmaya devam etmek istediğim sevgili hocam Prof. Dr. Müjde GÜZELKAYA'ya, her çalışmamızda bilgi, tecrübe, emek ve yol göstericiliğiyle yanımızda olan ve birlikte çalışmaktan keyif aldığım kıymetli hocam İbrahim EKSİN'e çok teşekkür ederim.

Namık Kemal Üniversitesi, Çorlu Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümünde çalışma dönemim boyunca, bilgisi, tecrübesi ve manevi desteğiyle yardımcı olan Prof. Dr. Cevat ERDAL'a, başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Hafız ALİSOY hocam olmak üzere, bölüm hocalarıma, birlikte çalıştığım araştırma görevlisi arkadaşlarıma ve daha öncesinde birlikte çalıştığımız bölümümüzden ayrılmış olan arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Doktorada derslerini aldığım ve dışardan takip ettiğim, tezime, ufkuma ve bilgime katkı sunan İTÜ Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği bölüm hocalarıma, başta kapısını aşındırmaktan çekinmediğim Dr. Öğr. Üyesi Musa Nurullah YAZAR olmak üzere, eğitim süresince yardımcı olan daha önce çalışmış ve şuan çalışmakta olan araştırma görevlisi arkadaşlarım ve dostlarıma teşekkür ederim.

Lisans ve Lisansüstü eğitimim boyunca yardımcı olan, kontrol alanında çalışmaya beni teşvik eden, yol gösteren ve bu bölümde doktora yapabilmeme katkı sunan Prof. Dr. Serdar İPLİKÇİ, Prof. Dr. Sezai TOKAT hocalarıma, bir telefon kadar uzağımda ve ihtiyacım olduğunda bilgisi ve desteğiyle yardımcı olan Doç. Dr. Meriç ÇETİN hocama teşekkür ederim.

Göstermiş olduğu sabır, emek, özveri ve yardımla her an destek olan, yorulduğumda, bıktığımda, bıkmadan usanmadan beni tekrar tekrar çalışmaya teşvik eden sevgili eşim Nilüfer Candan ULUSOY'a, doktora sürecimin zorlu zamanlarında hayatımıza katılan neşe kaynağımız güzel kızım Zeynep Doğa'ya, tüm eğitim hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen, çalışmaya teşvik eden, zorlu süreç boyunca yanımda olan aileme ve geniş ailemizin her bir bireyine, burada tek tek ismini yazamadığım, hayatıma dokunuşlarıyla katkı sunan arkadaşlarıma, dostlarıma, kardeşlerime ve tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ağustos 2021 Lütfi ULUSOY
(Yüksek Mühendis)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

HJB	: Hamilton-Jacobi-Bellman
MÖK	: Model Öngörülü Kontrol
TOK	: Ters Optimal Kontrol
KMÖK	: Klasik Model Öngörülü Kontrol
RKMÖK	: Runge-Kutta tabanlı Model Öngörülü Kontrol
KLF	: Kontrol Lyapunov Fonksiyonu
BP-BÇ	: Büyük-Patlama Büyük-Çöküş
DMÖK	: Doğrusal Model Öngörülü Kontrol
DOMÖK	: Doğrusal Olmayan Model Öngörülü Kontrol
EKF	: Extended Kalman Filter (Genişletilmiş Kalman Filtresi)
QP	: Quadratic Programing (Karesel Programlama)
RK	: Runge-Kutta
PMP	: Pontryagin'in Maksimum Prensibini
KKT	: Karush-KuhnTucker
SSE	: Sum of Squared Error (Hata Kareleri Toplamı)
SSSE	: Sum of Squared Error multiplied by Step (Hata karelerinin adımla çarpımının toplamı)
TV	: Total Variation (Toplam değişim)
ISE	: Integral of Squared Error (Hata kareleri integrali)
ITSE	: Integral Time Squared Error (Hata karelerinin zamanla çarpılmış integrali)
IAE	: Integral Absolute Error (Mutlak hata integrali)
ITAE	: Integral Time Absolute Error (Mutlak hatanın zamanla çarpılmış integrali)
TOMÖK	: Ters Optimal Model Öngörülü Kontrol
LKR	: Lineer (doğrusal) Karesel Regülatör

SEMBOLLER

$\mathbf{x}_k$	: Zaman indeksi k' deki durum değişkenleri vektörü
$\mathbf{u}_k$	: Zaman indeksi k' deki giriş vektörü
$\mathbf{y}_k$	: Zaman indeksi k' deki sistem çıkış vektörü
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$f(\cdot), h(\cdot)$	: Ayrık-zamanlı doğrusal olmayan fonksiyonlar
K_x, K_y	: Öngörü ufku
kp	: Öngörü adımı
$\hat{\mathbf{x}}_{k+kp\|k}$	: Öngörü durum değişkenleri vektörü
$\hat{\mathbf{u}}_{k+kp\|k}$	: Aday kontrol girişleri
$\hat{\mathbf{y}}_{k+kp\|k}$	: Öngörü çıkış vektörü
$J(\cdot)$	: Amaç fonksiyonu
R	: Kontrol girişleri ağırlık (ceza) parametresi
K_u	: Kontrol ufku
$\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}$	: Sistem durum değişkenleri kısıtları
$\mathbf{u}_{min}, \mathbf{u}_{max}$	: Sistem kontrol girişi kısıtları
$\mathbf{x}^d_{k+kp\|k}$	: Önceden tanımlanmış (en azından öngörü ufku boyunca önceden belirlenmiş) referans yörüngesi,
$\hat{\mathbf{u}}^*_{k\|k}$	: Optimal öngörü kontrol giriş vektörü
$g(\cdot)$	: Ayrık-zamanlı doğrusal olmayan fonksiyon
$\ell(\cdot)$	: Yarı pozitif tanımlı fonksiyon
$\mathbf{R}$	: Simetrik pozitif tanımlı kontrol işareti ağırlık matrisi
$J^*(\cdot)$	: Aday karesel Kontrol Lyapunov Fonksiyonu
$\mathbf{P}$	: Simetrik pozitif tanımlı matris
$H(\cdot)$	: Ayrık-zamanlı Hamiltonian
$\mathbf{u}^*_k$	: Optimal kontrol kuralı
$\bar{J}$	: Amaç fonsiyonu ve kontrol işaretine bağlı eşitsizlik
$\mathbf{z}_k$	: Referans takip hatası
$V(\mathbf{z}_k)$	: Takip problemi Kontrol Lyapunov fonksiyonu
$R(\cdot), R_{i,j}(\cdot)$	: Kontrol işareti ağırlık fonksiyonu
ε	: Sıfıra yakın pozitif reel sayı
	: Kontrol işareti ağırlık matrisi fonksiyonu
$r^c_{i,j}, r^c$	: Kontrol işareti ağırlık fonksiyonunun genliği
$r^s_{i,j}, r^s$	: Sigmoid fonksiyon eğim parametresi
$\mathbf{R}(\cdot)$	: Kontrol işareti ağırlık matrisi fonksiyonu
T_s	: Örnekleme zamanı
$\mathbf{P}_k$	: Zaman indeksi k'daki pozitif tanımlı matris
$\mathbf{P}^*$	: Uygun (optimal) pozitif tanımlı matris
f^i	: Uygunluk (*fitness*) fonksiyonu
$\mathbf{P}_a$	: Aday pozitif tanımlı matris
m_c	: BP-BÇ çatırdama-kırılma noktası
$\mathbf{x}_f$	: Denge noktası

$\mathbf{Q}$	: Köşegen ağılık matrisi
$\mathbf{P}^{çd}$	: Çevrim dışı bulunan pozitif tanımlı simetrik matris
$J_{MÖK}(\cdot)$	: MÖK amaç fonksiyonu
$J_{LKR}(\cdot)$	: LKR amaç fonksiyonu
$\mathbf{K}_{LKR}$	: LKR durum geri besleme kazancı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL YÖNTEMİNE TERS OPTİMAL KONTROL YAPISININ KATILMASI

ÖZET

Optimal kontrol probleminin amacı, bazı kontrol ve durum kısıtlamalarını sağlayacak ve bir başarım kriterini optimize edecek şekilde bir kontrol giriş fonksiyonu veya kontrol kuralı elde etmektir. Buna rağmen, optimal kontrol kuralı, kısıtsız ve doğrusal durumlarda bile oldukça kolay ve analitik olarak bulunamaz. Optimal kontrol kuralının çözümünün Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemini çözmeyi gerektirdiği iyi bilinen bir gerçektir ki bu son derece zordur. Dahası, doğrusal olmayan sistemlerin çoğu için analitik bir HJB çözümü mevcut değildir. Sistem doğrusal olduğunda ve başarım kriteri ikinci dereceden olduğunda, HJB, belirli durumlarda analitik olarak çözülmesi zor olabilen bir Riccati denklemi olarak ortaya çıkar. Bu zorlukların üstesinden gelmek amacıyla önceden belirlenmiş bir sonlu ufuk için mevcut sistem durumunu, başlangıç durumu olarak atayarak, sistem modeli yardımıyla optimal kontrol problemini tekrar tekrar ve ardışıl olarak çözmek düşünülmüştür. Bu stratejiyi kullanan kontrol yaklaşımları, Model Öngörülü Kontrol (MÖK) olarak adlandırılır. Bu yaklaşımda, sistemin gelecekteki davranışı, sistem modeli kullanılarak tahmin edilir ve kontrol işareti, anlık sistem durumlarına göre her kontrol ufku için tekrar tekrar yenilenir.

Öte yandan, HJB problemini çözmek yerine bize farklı bir bakış açısı sağlayan bir başka yaklaşım ise Ters Optimal Kontrol (TOK) teorisidir. TOK, HJB denklemini çözmenin zahmetli görevinden kaçınarak, doğrusal olmayan optimal kontrol problemini çözmek için alternatif bir yaklaşımdır. Son yıllarda, birçok gerçek zamanlı uygulamada doğrusal olmayan optimal kontrol problemlerini çözmek için ters optimizasyon yaklaşımı giderek daha fazla kullanılmaktadır.

Tezde, ilk olarak model öngörülü kontrol yaklaşımının optimal kontrol problemini ele alış biçimi anlatılmıştır. Önerilecek yöntem ile karşılaştırabilmek amacıyla, klasik model öngörülü yaklaşımlarından, doğrusal sistem modelini kullanan gradyant tabanlı MÖK ve doğrusal olmayan sistem modeli Runge-Kutta tabanlı MÖK (RKMÖK) yaklaşımları verilmiştir. Daha sonra ters optimal kontrol (TOK) yaklaşımları incelenmiş ve ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için TOK problemini Kontrol Lyapunov Fonksiyonu (KLF) bulma problemine dönüştürerek çözen TOK yaklaşımı anlatılmıştır. TOK yaklaşımı için takip probleminde karşılaşılabilecek sorunlar üzerinde durulmuştur. Bu tezde ilk olarak, takip problemi sorunlarını çözebilmek amacıyla kontrol işareti ağırlık matrisinin her bir elemanı için sistem durum değişkenlerine bağlı bir sigmoid fonksiyon önerilmiştir. Önerilen yaklaşımın başarımını gösterebilmek için klasik TOK yaklaşımıyla karşılaştırma yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında, ayrıca girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için MÖK ve TOK yaklaşımları birleştirilerek yeni bir optimal kontrol yöntemi önerilmektedir. Gerçek

hayatta ve literatürde karşılaşılan doğrusal olmayan sistemlerin ve sistem modellerinin çoğu, bazı doğrusal olmayan azaltma yöntemleri ile girişte-afin biçime dönüştürülebilir. Önerilen yöntemin temel özelliği, her kayan ufuk ve sonuç olarak yeni bir başlangıç koşulu için çözülmesi gereken MÖK optimizasyon problemini TOK problemi olarak ele alıp, bu TOK problemini tekrar tekrar çözmesidir. Bu yaklaşımda, sistemin gelecekteki davranışının tahminini elde etmek için sistem modeli kullanılır ve önceden belirlenmiş bir kontrol ufku için TOK yönteminden elde edilen kontrol işareti sisteme uygulanır. TOK probleminin çözümü aşamasında, belirlenmesi gereken aday kontrol Lyapunov fonksiyon matrisinin parametreleri, evrimsel Büyük Patlama-Büyük Çöküş (BP-BÇ) optimizasyon arama algoritması kullanılarak çevrim içi bir şekilde tahmin edilir. Önerilen kontrol yapısında, MÖK yaklaşımında her kontrol ufku için uygun bir KLF matrisinin aranması ile optimal kontrol problemi çözülmektedir. Diğer bir bakış açısından ise, MÖK yapısı TOK problemine dahil edilerek TOK problemi, her kayan ufkun başlangıcındaki farklı başlangıç koşulları kullanılarak tekrar tekrar çözülmekte ve böylece, TOK için çevrim içi bir düzeltme mekanizması elde edilmektedir. Bu yaklaşım ve literatürdeki diğer yöntemler kullanılarak top ve çubuk kontrol sistemi üzerinde benzetim çalışmaları ve gerçek zamanlı uygulama yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar bazı kontrol başarım ölçütlerine karşılaştırılmış ve önerilen yaklaşımın başarımı değerlendirilmiştir.

INJECTION OF INVERSE OPTIMAL CONTROL STRUCTURE TO MODEL PREDICTIVE CONTROL METHOD FOR NON-LINEAR SYSTEMS

SUMMARY

The aim of optimal control problem is to form a control input function or control law such that a performance criterion is minimized while satisfying some control and state constraints. However, the optimal control law cannot be found quite easily and analytically even in the unconstrained and linear cases. It is a well-known fact that the solution for optimal control law requires solving Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation which is extremely difficult. Moreover, an analytical solution of HJB does not exist for most nonlinear systems. When the system is linear and the performance criterion is quadratic, HJB turns out to be a Riccati equation which may also be difficult to solve analytically for certain cases. One approach to overcome these difficulties is to solve the optimal control problem repeatedly and sequentially using the system model and assigning the current system state as the initial state for a predetermined finite horizon. The out-coming control sequence that corresponds to a predetermined control horizon is then applied to the real-time system. Control approaches using this strategy are referred to as Model Predictive Control (MPC). In this approach, the future behavior of the system is predicted using the system model and the control signal is renewed repeatedly by the current system states for each control horizon.

The model of the system plays a crucial role in all MPC techniques. The methods in which the original nonlinear model is linearized around an operating point are referred to be Linear MPC methods. These methods have been used as effective and robust tools for controlling many industrial processes. However, the effect of linearization operation may degrade for the systems that possess high nonlinearity and for the operating conditions that require the whole operating region. Various Nonlinear MPC (NMPC) approaches are presented and their reviews have been given in literature. Modeling strategies for model building, model reduction and stability have still been active working topics for NMPC approaches. The computational burden and the need for an efficient optimization approach is another issue associated with the solution of the NMPC optimization problem. Although different techniques are proposed for MPC, the MPC loop approach repeated in all sampling intervals in all MPC methods is basically the same as the basis of MPC is based on the receding horizon principle. The repeated MPC loop processes for the horizon moving towards the future in each sampling interval can be summarized as follows:

- Using the model of the system to be controlled, the future outputs or states are calculated depending on the past input, output and / or system state variables and the input values planned to be implemented in the future.

- By solving a finite-horizon open-loop optimization problem that is determined to converge the system state variables or output to the desired reference value and to minimize the cost function, a set of future control signals are obtained.
- As the control signal obtained along the control horizon, the first element of the sequence is applied to the system. This is the receding horizon strategy, a concept of predictive control.

On the other hand, Inverse Optimal Control (IOC) theory provides us a different perspective for solving HJB problem. Therefore, IOC is an alternative approach to solve nonlinear optimal control problem while avoiding the tedious task of solving the HJB equation.

The perspective of the inverse optimal control problem was put forward by Kalman (1964) in the early 1960s. Kalman stated that when a dynamic system and a feedback control law are given and the closed-loop system is asymptotically stable, the inverse problem is to seek the most general performance index for which this control law is optimal. In fact, the IOC can be seen as an approach rather than a methodology that perceives the optimal control problem from the opposite side. In IOC method when the controller is desired to be optimal according to stable and meaningful objective functions, the control Lyapunov function (CLF) based approaches are widely used. The formulation of CLF, which provides the design of an optimal feedback controller for typical classes of systems, has been discussed in the literature. The existence of CLF implies stabilizability. Thus, the distinguishing aspect of this approach is that the performance measure corresponding to the stabilizing feedback control is determined posteriori. Since there exists no explicit technique for the determination of CLF for general nonlinear systems, the most challenging aspect of IOC via CLF is the determination of CLF itself. Another point that should be mentioned is that currently there exists no adequate work for the optimal control of nonlinear systems. Especially the Hamilton-Jacobi- Bellman (HJB) equations related to the non-affine in control nonlinear systems are difficult to solve. The affine-in-input systems are preferred in optimal control studies because there is an explicit solution for the input as a function of derivatives of the value function when the aim is quadratic and dynamics are "affine-in-input". Thus, studies in IOC, as in optimal control problems, were generally carried out for affine-in-input nonlinear systems.

In recent years, the inverse optimality approach has been increasingly used for solving the nonlinear optimal control problems in many real-time applications. The main theorem used in this thesis for IOC is related to the discrete-time affine-in-input nonlinear systems. The necessary conditions needed to construct a discrete quadratic Control Lyapunov Function CLF has been presented in establishing the control law.

In this thesis, firstly, MPC method is discussed. Gradient-based classical MPC method for linear system models and Runge-Kutta-based MPC method proposed for nonlinear system models are explained in order to compare them with the method that is proposed in this thesis. Secondly, IOC approach is explained. The IOC approach that solves the problem for affine-in-input nonlinear systems and converts the IOC problem into the appropriate CLF finding problem is described. The IOC approach is explained for both the regulator and tracking cases. The problem that may be encountered in the tracking case is addressed. In this thesis, a sigmoid function that depends on the system state variables is proposed for each element of the control signal weight matrix in order to solve the problem that may arise in tracking case. A comparison with the classical IOC approach is made to show the success of the proposed approach using the coupled water tank level control problem. The performance criteria are selected as number of step, Sum of Suquared Error (SSE), Sum of Squared Error multiplied by Step (SSSE), Total Variation (TV), maximum input value.

Another and more important contribution is that the thesis propose an optimal control method in which the MPC and IOC approaches are merged with each other for discrete-time affine-in-input nonlinear system models. Most of the nonlinear systems and system models encountered in real life and literature may be converted to affine-in-input form by some nonlinearity reduction procedures. Therefore, the proposed method has an intrinsic advantage over the classical MPC methods that may require linearization. The key feature in this approoasach is to solve the IOC problem repeatedly for each receding horizon and consequently for a new initial condition. Thus, we use the system model to obtain the prediction of the future behavior of the system and apply the out-coming control signal, which has been obtained from IOC procedure for a pre-determined control horizon. In the solution phase of IOC, the parameters of the candidate control Lyapunov function matrix are estimated using the global evolutionary Big Bang-Big Crunch (BB-BC) optimization search algorithm in an on-line manner. The proposed control structure thus solves the optimal control problem in classical MPC approach to the search of an appropriate CLF matrix for each control horizon. From another perspective, MPC structure is inserted to IOC problem and thus, the IOC problem is solved repeatedly using different initial conditions at the beginning of each receding horizon. Therefore, IOC gains an on-line correction mechanism via this new approach.

In order to understand the effectiveness of the proposed optimal control method it is compared with other control methods via simulations and a real time application done on Quanser ball and plate system. The control structures used to compare the performance of the proposed approach are gradient-based classical MPC method for linear system models, Runge-Kutta-based MPC for nonlinear systems, linear quadratic regulator and classical inverse optimal control structure. The performance criteria are selected as overshoot, settling time, rise time, integral square error (ISE), integral time square error (ITSE), integral absolute error (IAE), integral time square error (ITAE) and total variation (TV). The real-time application and simulations show that the proposed control structure provides better results in terms of almost all classical time domain criteria when compared with other related control methods.

1. GİRİŞ

Optimal kontrol probleminin amacı, bazı kontrol ve durum kısıtlamalarını sağlayacak ve bir başarım ölçütünü minimize edecek şekilde bir kontrol giriş fonksiyonu veya kontrol kuralı elde etmektir. Buna rağmen, optimal kontrol kuralı, kısıtsız ve doğrusal durumlarda bile oldukça kolay ve analitik olarak bulunamaz. Optimal kontrol kuralının çözümünün Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denklemini çözmeyi gerektirdiği iyi bilinen bir gerçektir ki bu son derece zordur. Dahası, doğrusal olmayan sistemlerin çoğu için analitik bir HJB çözümü mevcut değildir [1,2]. Sistem doğrusal olduğunda ve başarı ölçütleri ikinci dereceden olduğunda, HJB, belirli durumlarda analitik olarak çözülmesi zor olabilen bir Riccati denklemi olarak ortaya çıkar. Bu zorlukların üstesinden gelmek için bir yaklaşım, mevcut sistem durumu önceden belirlenmiş bir sonlu ufuk için başlangıç durumu olarak atanarak ve sistem modeli kullanılarak oluşturulan optimal kontrol problemini tekrar tekrar ve ardışıl olarak çözmektir. Daha sonra önceden belirlenmiş bir kontrol ufku için elde edilen kontrol işareti dizisinin ilk elemanını gerçek zamanlı sisteme uygulamaktır. Bu stratejiyi kullanan kontrol yaklaşımları, Model Öngörülü Kontrol (MÖK) olarak adlandırılır [3]. Bu yaklaşımda, sistemin gelecekteki davranışı, sistem modeli kullanılarak tahmin edilir ve kontrol işareti, anlık sistem durumlarına göre her kontrol ufku için tekrar tekrar yenilenir.

MÖK'nin [4] ilk defa sunuluşundan bu yana, birçok araştırmacı farklı MÖK yöntemleri [5–11] önermiştir. Bu yöntemler, geniş bir uygulama alanı yelpazesi bulmuştur [12–17]. Sistemin modeli, tüm MÖK tekniklerinde çok önemli bir rol oynar. Orjinal (Özgün) doğrusal olmayan modelin bir çalışma noktası etrafında doğrusallaştırıldığı yöntemler, Doğrusal MÖK (DMÖK) yöntemleri olarak adlandırılır. Bu yöntemler, birçok endüstriyel süreçlerin kontrolünde etkili ve dayanıklı araçlar olarak kullanılmıştır [12,13,18,19]. Ancak, doğrusallaştırma işleminin etkisi, yüksek doğrusallığa sahip olmayan sistemlerde ve çalışma bölgesinin tamamını kapsayan çalışma koşullarında azalabilir. Çeşitli Doğrusal Olmayan MÖK (DOMÖK) yaklaşımları sunulmuş ve bunların incelemeleri literatürde verilmiştir [18–21]. DOMÖK'nin kararlılığı birkaç araştırmacı tarafından ele alınmıştır [19–24].

DOMÖK için model oluşturmaya yönelik modelleme stratejilerinin tartışılması ve model indirgeme [24]'te incelenmiştir. Hesaplama yükü ve verimli bir optimizasyon yaklaşımına duyulan gereksinim, DOMÖK optimizasyon probleminin [25] çözümü ile ilişkili başka bir konudur. Sürekli-zamanlı versiyonları olsa da MÖK' nin esasında her adımda çevrim içi (online) açık-çevrim optimal kontrol problemini çözerek dolaylı ama optimize edilmiş bir geribesleme sağlayan bir ayrık-zamanlı kontrolör olduğu söylenebilir.

HJB problemini çözmek için diğer bir yaklaşım da optimizasyon problemini ele alış biçimiyle bize farklı bir bakış açısı sağlayan Ters Optimal Kontrol (TOK) teorisidir. TOK, HJB denklemini çözmenin zahmetli görevinden kaçınarak doğrusal olmayan optimal kontrol problemini çözmek için kullanılan alternatif bir yaklaşımdır. Aslında, optimal kontrol problemini ters yönden algılayan bir yaklaşım olarak da görülebilir. Ters optimal kontrol probleminin bakış açısı 1960'ların başlarında ortaya atılmıştır [26]. Altmışlı yıllarda optimal kontrol ve ters optimal gibi yaklaşık çözümler üzerinde çalışmaların çoğunda havacılık uygulamaları tarafından yönlendirilen doğrusal ikinci dereceden problemlere odaklanılmıştır [27]. Ters optimal yaklaşımında; lineer zamanla değişmeyen tek girişli sistemler için bu ters problemin çok hassas bir formülasyonu düşünülmüş ve lineer karesel (kuadratik) regülatörler için güzel bir sonuç ortaya konmuştur [28]. Doğrusal olmayan sistemler düşünülerek yapılan çalışmalarda [29] çalışması öncü bir makale olarak kabul edilebilir. Ters optimal yaklaşımı [30–32] çalışmalarında doğrusal olmayan sistemlere uygulansa da, ters optimallik yöntemi, [1] ve [33]'te dayanıklı (robust) doğrusal olmayan kontrolörlerin tasarımı için yeniden gündeme getirilinceye kadar çok fazla çalışılmamıştır [34]. Özellikle [33] tarafından geliştirilen ters optimallik yaklaşımının ana katkısı, optimal bir amaç fonksiyonu olarak bir kontrol Lyapunov fonksiyonu oluşturmak ve daha sonra bu amaç fonksiyonuna göre optimal olan bir kararlı kontrol yasası türetmektir. Son yıllarda, birçok gerçek zamanlı uygulamada doğrusal olmayan optimal kontrol problemlerini çözmek için ters optimal kontrol yaklaşımı giderek daha fazla kullanılmaktadır [34–38]. Ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için TOK problemiyle ilgili bir ana teorem [39]'da verilmiştir. Burada, kontrol kuralının türetilmesinde kullanılan ayrık bir kuadratik Kontrol Lyapunov Fonksiyonu (KLF) tanımlamak için gerekli koşullar sunulmuştur. [40]'da, ayrık kuadratik Lyapunov fonksiyonunu tanımlayan tek bir zaman değişken parametresini ayarlamak için bir hızlı-gradyant (speed-gradient) algoritması kullanılmıştır. Ayrıca genişletilmiş Kalman filtresi (EKF) algoritmasına dayalı TOK yaklaşımı, ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistemlerin optimal kontrol problemini çözmek için önerilmektedir [41,42]. Dahası, literatürde, farklı MÖK şemalarının kararlılık ispatlarını birleştirmek için ters optimallik kavramının kullanıldığı gözlenmiştir [19,43–45]. [46]'da TOK, doğrusal zamanla değişmeyen sistem modelleri için MÖK' deki Riccati denklemini çözmek için bir alternatif olarak kullanılmıştır.

Bu tezde, öncelikle model öngörülü kontrol ve ters optimal kontrol yaklaşımları ele alınmıştır. Model öngörülü kontrol yaklaşımının kontrol problemini ele alış biçimi anlatılmıştır. Klasik model öngörülü yaklaşımlarından doğrusal sistem modelini kullanan gradyant tabanlı klasik MÖK (KMÖK)[7] ve doğrusal olmayan sistem modeli runge-kutta tabanlı MÖK (RKMÖK)[8] yaklaşımları verilmiştir. Daha sonra HJB denklemini çözmek yerine kontrol problemini farklı bir biçimde ele alan ters optimal kontrol (TOK) yaklaşımları incelenmiştir. Bu yaklaşımlardan girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için TOK problemini Kontrol Lyapunov Fonksiyonu (KLF) bulma problemine dönüştürerek çözen, [2] ve [39]'da regulatör problemi için önerilmiş ve [2,47–52]'de takip problemi için genişletilmiş TOK yaklaşımı anlatılmıştır.

Bu tezde iki yaklaşım önerilmiştir. İlk olarak bu yaklaşım için takip problemi ele alnındığında karşılaşılabilecek sorunlar üzerinde durulmuş ve bu sorunları çözebilmek için yeni bir yaklaşım önerilmiştir. Kolay olması ve bazı durumlarda takip probleminin regülatör problemine dönüştürlebilmesi nedeniyle ilk olarak regulatör kontrol problemi ve daha sonra takip problemi ele alınmıştır. Önerilen yaklaşımın başarımını gösterebilmek için TOK yaklaşımı [2] ve [39] ile karşılaştırılmıştır. Kontrol yaklaşımlarında kullanılan ve belirlenmesi gereken parametreler daha önceki çalışmalardakiyle ortak alınabiliyorsa ortak alınmış ortak alınamadığı durumlarda ise hata kareleri integralini veya hata karaleri toplamını minimize edecek şekilde Büyük-Patlama Büyük-Çöküş (BP-BÇ) optimizasyon yöntemiyle [53] belirlenmiştir.

Bu tezde ikinci olarak girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için MÖK ve TOK yaklaşımları birbiriyle birleştirilerek yeni bir optimal kontrol yöntemi önerilmiştir. Gerçek hayatta ve literatürde karşılaşılan doğrusal olmayan sistemlerin ve sistem modellerinin çoğu, bazı doğrusal olmayan azaltma prosedürleri ile girişte-afin formuna dönüştürülebilir. Bu nedenle önerilen yöntemin, doğrusallaştırma gerektirebilecek klasik MÖK yöntemlerine göre kendine özgü bir avantajı vardır. Bu yaklaşımın temel özelliği, her kayan ufuk için ve sonuç olarak yeni bir başlangıç koşulu için çözülmesi gereken MÖK optimizasyon problemini TOK problemi olarak ele alıp, bu TOK problemini tekrar tekrar çözmesidir. Bu yaklaşımda, sistemin gelecekteki davranışının tahminini elde etmek için sistem modeli kullanılır ve önceden belirlenmiş bir kontrol ufku için TOK prosedüründen elde edilen kontrol sinyali sisteme uygulanır. TOK probleminin çözümü aşamasında, belirlenmesi gereken aday kontrol Lyapunov fonksiyon matrisinin parametreleri, küresel evrimsel Büyük Patlama-Büyük Çöküş (BP-BÇ) optimizasyon arama algoritması [53] kullanılarak çevrim içi bir şekilde tahmin edilir. Önerilen kontrol yapısı, MÖK yaklaşımında her kontrol ufku için uygun bir KLF matrisinin aranmasına yönelik optimal kontrol problemini çözer. Başka bir açısından, MÖK yapısı TOK problemine dahil edilir ve böylece TOK problemi, her kayan ufkun başlangıcındaki farklı başlangıç koşulları kullanılarak tekrar tekrar çözülür. Böylece, bu yeni yaklaşımla TOK için çevrim içi bir düzeltme mekanizması elde edilir. Bu yeni yaklaşım bir optimizasyon arama algoritması içerdiğinden, hesaplama süresi çok yüksek hızlı pratik uygulamalar için zorluklara neden olabilir. Bu yaklaşım ile Top ve Çubuk kontrol sistemi üzerinde benzetim çalışmaları ve gerçek zamanlı uygulama yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar bazı kontrol başarım ölçütlerine göre literatürdeki diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak değerlendirilmiştir.

Bu tez çalışması aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2'de, MÖK yöntemlerinin kontrol problemini ele alış biçimi anlatılmıştır. KMÖK ve RKMÖK yöntemleri verilmiştir. Bölüm 3'te HJB denklemini çözmek yerine kontrol problemini farklı bir biçimde ele alan ters optimal kontrol (TOK) yaklaşımları incelenmiştir. Bu yaklaşımlardan girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için TOK problemini Kontrol Lyapunov Fonksiyonu (KLF) bulma problemine dönüştürerek çözen TOK yaklaşımı [39] anlatılmıştır. Bölüm 4'te TOK yaklaşımı [39]'da takip probleminde karşılaşılabilecek sorunlar üzerinde durulmuştur. Bu özel durumlarda karşılaşılabilecek sorunları çözebilmek için yeni bir yaklaşım önerilmiştir. Önerilen kontrol yaklaşımının hem regülatör hemde takip problemi için benzetim çalışmaları yapılmış ve TOK yaklaşımı [39] ile karşılaştırılmıştır. Bölüm 5'te, ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistem modelleri için önerilen, TOK ve MÖK yaklaşımlarının birleştirilmesiyle elde edilen kontrol yöntemi açıklanmaktadır.

Önerilen yöntemin top ve çubuk kontrol sistemi modeli için benzetim çalışmaları yapılmış ve diğer kontrol yöntemleriyle karşılaştılması verilmiştir. Bölüm 6'da, önerilen yöntemin top ve çubuk kontrol sistemi gerçek zamanlı uygulamasını sunmaktadır. Önerilen yöntemin gerçek zamanlı uygulama için diğer kontrol yöntemleriyle karşılaştırılması da aynı bölümde verilmiştir. Son olarak, Bölüm 7'de, bu tezde önerilen ve karşılaştırılan yaklaşımların sonuçlarını ve tartışmaları kapsamaktadır.

2. MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL

Model Tabanlı Öngörülü Kontrol (MÖK) (Model-Based Predictive Control) teknikleri, literatürde ilk [4] tarafından Model Öngörülü Deneysel Kontrol (Model Predictive Heuristic Control) adıyla ve klasik kontrol yöntemleri ile kontrol edilmesi zor olan sistemlerde kontrol parametrelerinin kolayca ayarlanması için önerilmiştir. Daha sonra özellikle açık-çevrimi kararsız sistemlerin, parametreleri ve/veya ölü-zamanları zamanla-değişen sistemlerin [54,55] kontrolünde güçlü ve dayanıklı olduğu kanıtlanan MÖK teknikleri, endüstriyel süreçlerin [56,57] yanı sıra kimyadan havacılığa çok değişik alanlarda kontrol amaçlı kullanılmışlardır [8,9,12,14,23,25,58]. MÖK' de, Dinamik Matris Kontrolü (Dynamic Matrix Control), Genelleştirilmiş Öngörülü Kontrol (Generalized Predictive Control) ve Kayan ufuk Kontrolü (Receding Horizon Control) ile isimlendirilen yaygın olarak kullanılan yöntemlerin yanı sıra kullanılan model ve optimizasyon algoritmalarına bağlı olarak birçok yöntem bulunmakta ve bu yöntemlere göre farklı isimler kullanılabilmektedir. MÖK için farklı teknikler önerilmesine rağmen, MÖK' nin temeli kayan ufuk prensibine dayandığından tüm MÖK yöntemlerinde her örnekleme aralığında tekrarlanan MÖK döngüsü yaklaşımı temelde aynıdır. Her örnekleme aralığında geleceğe doğru hareket eden ufuk için tekrarlanan MÖK döngüsü işlemleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Kontrolü yapılacak sistemin modelini kullanarak geçmişteki giriş, çıkış ve/veya sistem durum değişkenlerine ve gelecekteki uygulanması planlanan giriş değerlerine bağlı gelecekteki çıkış veya durumlar hesaplanır.
- Sistem durum değişkenlerini veya çıkışını istenilen referans değerine yaklaştıracak ve amaç (maliyet) fonksiyonunu minimize edecek şekilde belirlenen sonlu-ufuklu açık-çevrimli bir optimizasyon problemi çözülerek, gelecekte uygulanacak bir dizi kontrol işareti elde edilir.
- Kontrol ufku boyunca elde edilen dizinin ilk elemanı, kontrol işareti olarak sisteme uygulanır. Bu, öngörülü kontrolün bir kavramı olan kayan ufuk (receding horizon) stratejisidir [59].

Bu işlem genellikle öngörülen ile istenilen gelecek çıkış arasındaki hatanın karesinin işlevi olan bir amaç (maliyet) işlevini minimize etme yoluyla yapılmaktadır. Öngörülü kontrolde bir diğer kavram ise, kayan ufuk stratejisidir; belirli bir anda hesaplanan öngörülen gelecek girişin sadece o andaki değeri sisteme uygulanır, geri kalanı kullanılmaz. Her örnekleme aralığında işlemler tekrarlandığından ufuk geleceğe doğru hareket etmektedir.

Sistemin modeli tüm MÖK tekniklerinde çok önemli bir rol oynar. Literatürde MÖK teknikleri, kullanılan doğrusal veya doğrusal olmayan sistem modellerine göre de sırasıyla doğrusal MÖK (DMÖK) ve doğrusal olmayan MÖK (DOMÖK) adlandırılmaktadır. DMÖK yöntemleri, doğrusal olmayan sistem modelini bir çalışma noktası etrafında doğrusallaştırılarak elde edilen modelleri kullanır. Bununla birlikte, doğrusallaştırılmış sistem modelleri, yüksek doğrusal olmayan sistemleri ve / veya tüm işletim bölgesini gerektiren koşulları temsil etmekte başarısız olabilir. Bu tür durumlar DOMÖK tekniklerinin kullanılmasını gerektirir. Sürekli-zamanlı versiyonları olsa da MÖK' nin esasında her adımda çevrim içi (online) açık-çevrim optimal kontrol problemini çözerek dolaylı ama optimize edilmiş bir geribesleme sağlayan bir ayrık-zamanlı kontrolör olduğu söylenebilir.

Doğrusal olmayan bir sistemin kontrol problemi ele alındığında, bu sistemin ayrık-zamanlı doğrusal olmayan durum uzayı gösterimi aşağıdaki denklemlerle verilebilir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Burada, k örnekleme periyodu T_s ile verildiğinde $t=kT_s$' deki örnekleme anını gösterir. $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{nx1}$, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{qx1}$ ve $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{mx1}$ sırasıyla zaman indeksi k' deki durum değişkenleri, çıkış ve giriş vektörleridir. $f: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ve $h: \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^q$ ayrık-zamanlı doğrusal olmayan fonksiyonlardır. MÖK' deki kontrol işaretleri öngörü ufku K_x için uygulanan (tanımlanan, oluşturulan) optimizasyon probleminin çözülmesiyle elde edilir. Öngörü ufku K_x, boyunca her bir öngörü adımı *kp* olarak tanımlanarak, doğrusal olmayan sistem denklemi (2.1), herhangi bir bozucu etkisinin, modelleme hatasının ve ölçüm gürültüsünün olmadığı varsayılarak, *kp* öngörü adımını içerecek şekilde (2.2) 'deki gibi yeniden yazılabilir.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} = f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}\right)$$
$$\hat{\mathbf{y}}_{k+kp|k} = h\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right) \qquad (2.2)$$

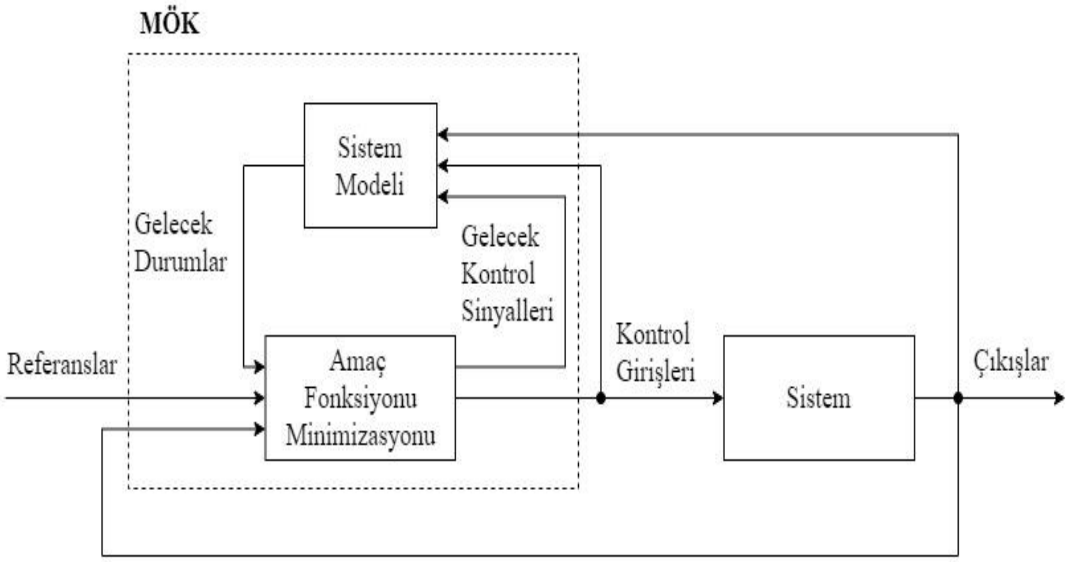
Bu gösterimde $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}$ öngörü durum değişkenleri vektörü, $\hat{\mathbf{y}}_{k+kp|k}$ öngörü çıkış vektörü ve $\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}$ *kp* öngörü adımlarındaki bir amaç fonksiyonunu minimize etmesi amaçlanan aday kontrol girişleridir. Burada *kp*=0 için $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} = \mathbf{x}_k$ şeklindedir. MÖK problemlerinde genel olarak kullanılan sistem durum değişkenlerinin ve kontrol girişinin karesel ifadesini içeren amaç fonksiyonu

$$J\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}\right) = \sum_{kp=0}^{K_x} \left\|\mathbf{x}^d_{k+kp+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k}\right\|^2 + $$
$$+ \sum_{kp=0}^{K_u} R\left\|\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}\right\|^2 \qquad (2.3)$$
$$Kısıtlar$$
$$\mathbf{x}_{min} < \hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} < \mathbf{x}_{max}$$
$$\mathbf{u}_{min} < \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} < \mathbf{u}_{max}$$

ile verilebilir. Burada $\|\cdot\|$ Öklid normunu (Euclidean norm) ifade etmektedir ve $R \geq 0$ kontrol girişleri için bir ağırlık (ceza) parametresidir ve kontrol girişi cezalandırılmak istenmiyorsa sıfır olarakta seçilebilir [23]. "$\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}$" ve "$\mathbf{u}_{min}, \mathbf{u}_{max}$" sırasıyla sistem durum değişkenleri ve kontrol girişi kısıt sınırlarıdır. $\mathbf{x}^d_{k+kp|k}$ önceden tanımlanmış (en azından öngörü ufku boyunca önceden belirlenmiş) referans yörüngesi, K_u kontrol ufkudur. Her bir *k* adımındaki MÖK prosedürü şekil 2.1' de blok diyagram olarak verilmiştir.

Önceden tanımlanmış K_u değerine bağlı optimal kontrol problemi çözülerek optimal öngörü kontrol giriş vektörü $\left[\hat{\mathbf{u}}^*_{k|k}, \cdots, \hat{\mathbf{u}}^*_{k+K_u|k}\right]$ elde edilir. Optimal öngörü kontrol girişi vektörünün ilk elemanı $\hat{\mathbf{u}}^*_{k|k}$ sisteme *k*. adımda kontrol girişi olarak uygulanır. Bu optimizasyon döngüsü her *k=k+1* adımı için tekrarlanır. Her bir *k* adımındaki MÖK prosedürü şekil 2.1' de blok diyagram olarak verilmiştir.

Burada eğer denklem (2.3)' teki $\mathbf{x}^d_{k+kp+1|k} = \mathbf{0}$ alınırsa MÖK referans takip problemi, MÖK regülatör problemine dönüşür. Literatürde, $\hat{\mathbf{u}}^*_{k|k}$ optimal kontrol işaretini bulabilmek için çeşitli optimizasyon yöntemleri kullanılmıştır [7–11,23,25]. Kullanılacak optimizasyon yöntemi, kullanılan öngörü modeli ve oluşan optimizasyon problemini ele alış şekline göre farklılıklar göstermektedir. Bu yöntemlerden DMÖK optimizasyon problemlerinde yaygın olarak kullanılan ve Klasik MÖK (KMÖK) olarak ifade edilen yöntemde optimal kontrol işaretinin nasıl elde edileceği Bölüm 2.1' de kısaca anlatılmıştır. Doğrusal olmayan model kullanılan DOMÖK yöntemlerinde kullanılan optimizasyon yöntemlerinden biri olan Runge-Kutta model tabanlı MÖK (RKMÖK) [8] Bölüm 2.2' de anlatılmıştır.



Şekil 2.1 : Model Öngörülü Kontrol (MÖK) blok diyagramı

2.1 Doğrusal Model Tabanlı Klasik Model Öngörülü Kontrol

DMÖK yönteminde ele alınan sistemin doğrusallaştırılmış veya doğrusal ayrık modeli kullanılmaktadır. Ayrık-zamanlı tek-girişli tek-çıkışlı doğrusal bir sistemin durum uzayı gösterimi aşağıdaki denklemlerle verilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k \\ y_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k \end{aligned} \tag{2.4}$$

burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

ve $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{nx1}$ ve $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1xn}$ sırasıyla sistem, giriş ve çıkış matrisleridir. Zaman indeksi *k'* deki $\mathbf{x}_k$ sistem durum değişkenleri, y_k sistem çıkışı ve u_k sistem girişidir. Kontrol edilecek sistemde herhangi bir bozucu etkisinin, modelleme hatasının ve ölçüm gürültüsünün olmadığı varsayılsın. MÖK' de kullanılacak tek girişli ve tek çıkışlı ele alınan *kp* indeksli doğrusal ayrık öngörü modeli

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} + \mathbf{B}\hat{u}_{k+kp|k} \\ \hat{y}_{k+kp|k} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu gösterimde $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}$ öngörü durum vektörü, $\hat{y}_{k+kp|k}$ öngörü çıkışı ve $\hat{u}_{k+kp|k}$ *kp* öngörü adımlarındaki bir amaç fonksiyonunu minimize etmesi amaçlanan aday kontrol girişidir. Öngörü durumu *kp*=0 da *k*. adımda ölçülen sistem durumuna eşit alınmaktadır $\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k}$.

Burada sistemin öngörü modeli [7]' deki gibi aşağıdaki tanımlamalar yapılırsa

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{x}}^{ag}_{k+kp+1|k} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} \\ \hat{y}_{k+kp|k} \end{bmatrix}, \qquad \Delta\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} \\ \Delta\hat{u}_{k+kp+1|k} = \hat{u}_{k+kp|k} - \hat{u}_{k+kp-1|k} \\ \mathbf{A}_{ag} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & o_m^T \\ \mathbf{CA} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_{ag} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{CB} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_{ag} = [o_m \quad 1] \\ o_m = [0 \quad \cdots \quad 0], \qquad o_m \in \mathbb{R}^{1xN} \end{gathered} \tag{2.7}$$

doğrusal sistem modeli (2.6) ve (2.7)'deki tanımlar kullanılarak genişletilmiş (augmented) sistem modeli aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^{ag}_{k+kp+1|k} &= \mathbf{A}_{ag}\hat{\mathbf{x}}^{ag}_{k+kp|k} + \mathbf{B}_{ag}\Delta\hat{u}_{k+kp|k} \\ \hat{y}_{k+kp|k} &= \mathbf{C}_{ag}\hat{\mathbf{x}}^{ag}_{k+kp|k} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sistem çıkışı öngörü ufkunu K_y ve kontrol ufkunu K_u ile ifade edersek aşağıdaki çıkış ve kontrol işareti değişimleriyle ilgili vektörleri elde ederiz.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1|k} & \hat{y}_{k+2|k} & \cdots & \hat{y}_{k+K_y|k} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}} \\ \Delta\mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \Delta\hat{u}_{k|k} & \Delta\hat{u}_{k+1|k} & \cdots & \Delta\hat{u}_{k+K_u|k} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Burada (2.7), (2.8) ve (2.9) kullanılarak, sistem öngörü çıkışları kompakt biçimde

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}^{ag}_{k+kp+1|k} + \varphi\Delta\mathbf{U} \tag{2.10}$$

gösterilebilir. Buraki **F** ve φ matrisleri

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag} \\ \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag}^{2} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag}^{K_y} \end{bmatrix},$$
$$\varphi = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ag}\mathbf{B}_{ag} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag}\mathbf{B}_{ag} & \mathbf{C}_{ag}\mathbf{B}_{ag} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag}^{K_y-1}\mathbf{B}_{ag} & \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag}^{K_y-1}\mathbf{B}_{ag} & \cdots & \mathbf{C}_{ag}\mathbf{A}_{ag}^{K_y-K_u}\mathbf{B}_{ag} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

şeklinde genişletilmiş sistem matrislerinden elde edilen kompakt matrisleridir. Ele alınan kontrol probleminde kısıtların olmadığı varsayılırsa, (2.3) amaç fonksiyonu çıkış referans izleme hatası ve kontrol işareti değişimlerine bağlı şekilde

$$\begin{aligned} J(\hat{y}_{k+kp|k}, \Delta\hat{u}_{k+kp|k}) &= \sum_{kp=1}^{K_y} \left\| y_{k+kp|k}^{d} - \hat{y}_{k+kp|k} \right\|^2 + \cdots \\ &+ \sum_{kp=0}^{K_u} R\left\| \Delta\hat{u}_{k+kp|k} \right\|^2 \\ \Delta\hat{u}_{k+kp|k} &= \hat{u}_{k+kp|k} - \hat{u}_{k+kp-1|k} \end{aligned} \tag{2.12}$$

olarak tanımlanabilir. Burada $y_{k+kp|k}^{d}$ önceden tanımlanmış referans çıkışları R kontrol işareti değişimi ağırlık (ceza) parametresidir. Optimizasyon penceresinde öngörü ufku boyunca k. adımdaki referans işareti $y_{k+1|k}^{d}$' in sabit kaldığı varsayılırsa, ele alınan optimizasyon problemini $y_{k+1|k}^{d}$ referans denge noktasına ulaşma olarak tanımlamak için

$$\mathbf{Y}^{d} = \begin{bmatrix} y_{k+1|k}^{d} & y_{k+1|k}^{d} & \cdots & y_{k+1|k}^{d} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}, \qquad \mathbf{Y}^{d} \in \mathbb{R}^{K_y x 1} \tag{2.13}$$

vektörü tanımlanarak amaç fonksiyonu

$$J(\hat{y}_{k+kp|k}, \Delta\hat{u}_{k+kp|k}) = (\mathbf{Y}^{d} - \mathbf{Y})^{T}(\mathbf{Y}^{d} - \mathbf{Y}) + \Delta\mathbf{U}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{R}_{\boldsymbol{ag}}\Delta\mathbf{U} \tag{2.14}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{K_u x K_u}$ birim matris olmak üzere $\mathbf{R}_{\boldsymbol{ag}} = R\mathbf{I}$ şeklinde diyagonal matristir. Amaç fonksiyonu karesel (quadratic) hale geldiği için problem gradyant temelli bir yaklaşım kullanarak çözülebilir ve kontrol işareti değişim vektörü

$$\Delta\mathbf{U} = \left(\varphi^T\varphi + \mathbf{R}_{ag}\right)^{-1}\varphi^T(\mathbf{Y}^d - \mathbf{F}\mathbf{x}_k) \tag{2.15}$$

şeklinde elde edilebilir. Böylece her adımda $\Delta\mathbf{U}$ vektörünün ilk elemanı $\Delta\hat{u}_{k|k}$ kullanılarak sisteme uygulanacak optimal u_k kontrol işareti

$$u_k = u_{k-1} + \Delta\hat{u}_{k|k} \tag{2.16}$$

olarak elde edilir. Gerçek zamanlı uygulama işaretinde bir kısıt bulunuyorsa kontrol işareti kısıtlarını sağlayacak bir satürasyon fonksiyonuna tabi tutularak sisteme uygulanabilir. Kontrol probleminin kısıtlı veya kısıtsız olarak ele alınmasına göre farklı optimizasyon yöntemleri kullanılabilmektedir. Optimizasyon problemine kısıtlar eklendiğinde ele alınan kısıtlı optimizasyon problemi, amaç fonksiyonu karesel olduğu için karesel programlama problemine dönüşecektir. Bu şekilde verilen MÖK problemini doğrudan çözmeye çalışan "Trust Region ve Interior Point" gibi algoritmalar kullanılabilir. Burada her adımda global minimumu bulunduğundan her adımda bir hesaplama yükü oluşacaktır. Bu hesaplama yükünden kurtulmak için $J\left(\hat{y}_{k+kp|k}, \Delta\hat{u}_{k+kp|k}\right)$'yi her adımda azaltacak yani $J\left(\hat{y}_{k+kp-1|k}, \Delta\hat{u}_{k+kp|k}\right) < J\left(\hat{y}_{k+kp-1|k}, \Delta\hat{u}_{k+kp-1|k}\right)$ olacak şekilde ve kısıtları da sağlayacak şekilde $\Delta\hat{u}_{k+kp|k}$ değerleri bulunabilirse [60]'da belirtildiği gibi yeterli bir kontrol başarımı elde edilebilir.

2.2 Runge-Kutta Model Tabanlı Model Öngörülü Kontrol

DOMÖK algoritmalarının veya yöntemlerinin sürekli-zamanlı teorik versiyonları olsa da DOMÖK' ün uygulanması genellikle ayrık zamanda yapılmaktadır. DOMÖK' de diğer tüm MÖK algoritmalarında olduğu gibi sistemin modeli oldukça önemlidir. RKMÖK' de doğrusal olmayan sürekli-zamanlı sistemlerin kontrolünde öngörü modeli için ayrık-zamanlı doğrusal olmayan matematiksel model kullanan bir yöntemdir. Sürekli-zamanlı doğrusal olmayan sistemlerin ayrıklaştırılmasında veya ayrık-zamanlı matematiksel modeli (2.1) ve öngörü modeli (2.2)' nin elde edilmesinde dördüncü mertebeden Runge-Kutta (RK) integrasyon algoritması kullanılır. Bu integrasyon yönteminin tercih edilmesinin sebebi ise doğrusal olmayan sürekli-zamanlı sistemlerin integrasyonunda yüksek doğruluk performansı ve kararlılık özelliklerinin üstün olmasıdır [8,61]. Tek-girişli tek-çıkışlı doğrusal olmayan sistemlerin kontrol problemi ele alındığında referans işareti $y^d_{k+kp|k}$ değerlerinin K_y ufku boyunca bilindiği varsayıldığına her adımda minimize edilmeye çalışılan amaç fonksiyonu (2.12)' dekine benzer

$$
\begin{aligned}
J(\hat{y}_{k+kp|k}, \hat{u}_{k+kp|k}) = \sum_{kp=1}^{K_y} \left\| y^d_{k+kp|k} - \hat{y}_{k+kp|k} \right\|^2 + \cdots \\
+ \sum_{kp=0}^{K_u} R \left\| \hat{u}_{k+kp|k} - \hat{u}_{k+kp-1|k} \right\|^2
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

ile verilebilir. Bu amaç fonksiyonun (2.12)'den farkı olan $\hat{y}_{k+kp|k}$ öngörü çıkışlarının ve (2.2)'de verilen $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k}$ öngörü durumlarının RK modeli kullanılarak elde edilmesidir. RK öngörü modelinin kapalı biçimdeki ifadesi ise

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}, \hat{u}_{k+kp|k}) \\
\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} + \mathbf{k}_{k+kp|k} \\
\hat{y}_{k+kp|k} &= h(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

şeklinde verilebilir. Burada $\mathbf{k}_{k+kp|k} \in \mathbb{R}^{nx1}$ vektörü

$$
\mathbf{k}_{k+kp|k} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} k^1_{1,k+kp|k} + 2k^2_{1,k+kp|k} + 2k^3_{1,k+kp|k} + k^4_{1,k+kp|k} \\ k^1_{2,k+kp|k} + 2k^2_{2,k+kp|k} + 2k^3_{2,k+kp|k} + k^4_{2,k+kp|k} \\ \vdots \\ k^1_{n,k+kp|k} + 2k^2_{n,k+kp|k} + 2k^3_{n,k+kp|k} + k^4_{n,k+kp|k} \end{bmatrix}
\tag{2.19}
$$

şeklinde RK integrasyonunda kullanılan RK bileşenleridir [8,61]. RK modeli kullanarak elde edilen öngörü çıkışları (2.9)' daki gibi **Y** vektörüyle ifade edilir, referans işaretleri ve optimize edilmek istenen kontrol işaretleri sırasıyla

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}^d &= \begin{bmatrix} y^d_{k+1|k} & y^d_{k+2|k} & \cdots & y^d_{k+K_y|k} \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{Y}^d \in \mathbb{R}^{K_y x1} \\
\mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \hat{u}_{k|k} & \hat{u}_{k+1|k} & \cdots & \hat{u}_{k+K_u|k} \end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(K_u+1)x1}
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

vektörüyle ifade edilirse (2.17) optimizasyon problemi kısıtlı bir optimizasyon problemi şeklinde ve vektörel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$
\begin{gathered}
J(\mathbf{Y},\mathbf{U}) = (\mathbf{Y}^d - \mathbf{Y})^T(\mathbf{Y}^d - \mathbf{Y}) + R\mathbf{U}^T\mathbf{L}\mathbf{U} - 2R\hat{u}_{k|k}\hat{u}_{k-1|k} + \\
+(\hat{u}_{k-1|k})^2 \\
Kısıtlar \\
\mathbf{x}_{min} < \hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} < \mathbf{x}_{max} \\
u_{min} < \hat{u}_{k+kp|k} < u_{max} \\
\left|\hat{u}_{k+kp|k} - \hat{u}_{k+kp-1|k}\right| < \Delta u_{max}
\end{gathered} \tag{2.21}
$$

Burada, $\hat{u}_{k-1|k} = u_{k-2}$, $\hat{u}_{k|k} = u_{k-1}$ ve $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(K_u+1)x(K_u+1)}$ matrisi

$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \tag{2.22}
$$

şeklindedir. Kısıtlı optimizasyon problemi (2.17), burada belirtilen kısıtlar sağlanacak ve aynı zamanda $J(\mathbf{Y},\mathbf{U})$ amaç fonksiyonunu azaltacak, yani $J(\mathbf{Y},\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}) < J(\mathbf{Y},\mathbf{U})$ eşitsizliğini sağlayacak, şekilde $\Delta\mathbf{U}$ bulma problemine dönüştürülebilir. Bu problemi çözmek için gradyant tabanlı bir yaklaşım kullanılabilir. Amaç fonksiyonu (2.21)'i minimize edecek $\Delta\mathbf{U}$ terimini bulmak için ilk olarak $J(\mathbf{Y},\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U})$ ile ifade edilen amaç fonksiyonunun 2. mertebeden Taylor yaklaşımı

$$
\begin{gathered}
J(\mathbf{Y},\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}) = -J(\mathbf{Y},\mathbf{U}) + \left(\frac{\partial J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right)^T \Delta\mathbf{U} \\
+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{U}^{T}\left(\frac{\partial^2 J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^2}\right)\Delta\mathbf{U}
\end{gathered} \tag{2.23}
$$

elde edilir. Burada $\left(\frac{\partial J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right)$ gradyant vektörü ve $\left(\frac{\partial^2 J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^2}\right)$ ise Hessian matrisidir. Daha sonra amaç fonksiyonu Taylor yaklaşımı (2.23)'ün $\Delta\mathbf{U}$' ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek

$$
\frac{\partial J(\mathbf{Y},\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U})}{\partial \Delta\mathbf{U}} = \left(\frac{\partial J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right) + \left(\frac{\partial^2 J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^2}\right)\Delta\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{2.24}
$$

ifadesi bulunur ve $\Delta\mathbf{U}$ ifadesi Newton yönünde

$$\Delta\mathbf{U} = -\left(\frac{\partial^2 J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right) \tag{2.25}$$

ile tanımlanır. Taylor yaklaşımı (2.23)'de yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse Hessian matrisinin pozitif olması durumunda Newton yönü bir yerel minimum noktasına karesel yakınsamayı garanti edecektir. Hessian matrisi pozitif tanımlı değilse, **I** uygun boyutlu birim matris olmak üzere, Hessian matrisine makul değerde $\gamma\mathbf{I}$ teriminin eklenmesiyle pozitif tanımlı olması sağlanır [8,61]. Optimal kontrol işareti değişimi $\Delta\mathbf{U}$ (2.25)' i belirlemek için gerekli olan Gradyant vektörü

$$\frac{\partial J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} = -2\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T(\mathbf{Y}^d - \mathbf{Y}) + 2R\mathbf{L}\mathbf{U} - 2\begin{bmatrix} R\hat{u}_{k-1|k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

ve Hessian matrisi

$$\frac{\partial^2 J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^2} = -2\left(\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}^2}\right)^T(\mathbf{Y}^d - \mathbf{Y}) + 2\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right) + 2R\mathbf{L} \tag{2.27}$$

şeklindedir. Burada $-2\left(\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}^2}\right)(\mathbf{Y}^d - \mathbf{Y})$ ifadesinin çoğu zaman ihmal edilebilecek kadar küçük olacağı için bu terim ihmal edilerek

$$\frac{\partial^2 J(\mathbf{Y},\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}^2} = 2\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right) + 2R\mathbf{L} \tag{2.28}$$

şeklinde Jacobian yaklaşığı kullanılabilir. Böylece (2.25) **ΔU'** yu belirlemek için gerekli olan (2.26) ve (2.28)'deki, aynı zamanda Jakobian matrisi olan $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{y}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k+1|k}} & \cdots & \frac{\partial \hat{y}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k+K_u|k}} \\ \frac{\partial \hat{y}_{k+2|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+2|k}}{\partial \hat{u}_{k+1|k}} & \cdots & \frac{\partial \hat{y}_{k+2|k}}{\partial \hat{u}_{k+K_u|k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k+1|k}} & \cdots & \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k+K_u|k}} \\ R & R & \cdots & R \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Bu ifadenin genelleştirilmiş hali

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{y}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \hat{y}_{k+2|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+2|k}}{\partial \hat{u}_{k+1|k}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial \hat{y}_{k+3|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+3|k}}{\partial \hat{u}_{k+1|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+3|k}}{\partial \hat{u}_{k+2|k}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k+1|k}} & \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k+2|k}} & \cdots & \frac{\partial \hat{y}_{k+K_y|k}}{\partial \hat{u}_{k+K_u|k}} \\ R & R & R & \cdots & R \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

şeklindedir. Çıkış vektörünün giriş vektörüne göre kısmi türevi (2.30) ile Hessian matrisi ve Gradyant vektörünün Jacobian yaklaşıklıkları kullanılarak (2.25) $\Delta\mathbf{U}$

$$\Delta\mathbf{U} = \mu\left(\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right) + R\mathbf{L}\right)^{-1} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}\right)^T (\mathbf{Y}^d - \mathbf{Y}) - R\mathbf{L}\mathbf{U} + \begin{bmatrix} R\hat{u}_{k-1|k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) \tag{2.31}$$

şeklinde yazılabilir. Her k adımı için eşitlik (2.31) ile hesaplanan $\Delta\mathbf{U}$ terimi ile bir $\mathbf{U}^*$ çözümü bulunur. Burada $0 < \mu \leq 1$ skaleri $\left|\hat{u}_{k+kp|k} - \hat{u}_{k+kp-1|k}\right| < \Delta u_{max}$ kısıtlarını sağlayacak şekilde seçilen bir parametredir. Bulunan $\mathbf{U}^* = \left[\hat{u}^*_{k|k} \quad \hat{u}^*_{k+1|k} \quad \cdots \quad \hat{u}^*_{k|k+K_u|k}\right]^{\boldsymbol{T}}$ vektörünün ilk elemanı $\hat{u}^*_{k|k}$ kontrol işareti $u_k = \hat{u}^*_{k|k}$ olarak sisteme uygulanır. Sisteme uygulanan bu $u_k = \hat{u}^*_{k|k}$ işaretinin aynı zamanda olurlu olması yani tüm kısıtları sağlaması gerekmektedir. Burada $\Delta\mathbf{U}$ terimi hesaplanmasında ihtiyaç duyulan $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}$ matrisinin elde edebilme şekli önem kazanır. Sistemin öngörü çıkışları için RK modeli kullanıldığından $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}$ matrisini bulmak için her bir terim için gerekli tüm ara işlemler ve ifadeler RK modeline uygun şekilde düzenlenerek $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{U}}$ matrisi elde edilir [8,61]. Örneğin $\frac{\partial \hat{y}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}}$ terimi sistemin öngörü modeli kullanarak aşağıdaki ifadeyle gösterilebilir:

$$\frac{\partial \hat{y}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} = \left[\left(\frac{\partial h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \right)^T \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} \right) \right] \Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ u=\hat{u}_{k-1|k}}} \tag{2.32}$$

Buradaki $\frac{\partial h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}$ terimi, ölçüm dinamikleri doğrusal değişen sistemler için bir vektör, doğrusal olmayan sistemler için değişken bir vektör olur. Bu durumda (2.32)'de her adımda asıl hesaplanması gereken $\frac{\partial \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}}$ ifadesidir. Jocabian hesaplmalarında gerekli türevlerde kullanılmak üzere bu terimi hesaplamak için, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ durum vektöründeki her bir durum $\hat{x}_{i,k+1|k}$ ile gösterilirse

$$\frac{\partial \hat{x}_{i,k+1|k}}{\partial \hat{u}_{k|k}} = \frac{\partial k_{i,k|k}^1}{\partial \hat{u}_{k|k}} + 2\frac{\partial\, k_{i,k|k}^2}{\partial \hat{u}_{k|k}} + 2\frac{\partial k_{i,k|k}^3}{\partial \hat{u}_{k|k}} + \frac{\partial k_{i,k|k}^4}{\partial \hat{u}_{k|k}} \tag{2.33}$$

şeklindeki kısmı türevlerin hesaplanması gerekir. Burada i indisi $i = 1, 2, \ldots, n$ şeklindedir. RKMÖK' de kullanılacak olan RK parçalı türevleri asenkron biçimde aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_{i,k|k}^1}{\partial \hat{u}_{k|k}} &= \frac{\partial f_i}{\partial u}\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ u=\hat{u}_{k|k}}} \\
\frac{\partial k_{i,k|k}^2}{\partial \hat{u}_{k|k}} &= \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial k_{j,k|k}^1}{\partial \hat{u}_{k|k}} + \frac{\partial f_i}{\partial u}\right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}+0.5k_{i,k|k}^1 \\ u=\hat{u}_{k|k}}} \\
\frac{\partial k_{i,k|k}^3}{\partial \hat{u}_{k|k}} &= \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial k_{j,k|k}^2}{\partial \hat{u}_{k|k}} + \frac{\partial f_i}{\partial u}\right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}+0.5k_{i,k|k}^2 \\ u=\hat{u}_{k|k}}} \\
\frac{\partial k_{i,k|k}^4}{\partial \hat{u}_{k|k}} &= \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial k_{j,k|k}^3}{\partial \hat{u}_{k|k}} + \frac{\partial f_i}{\partial u}\right]\Bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k}+k_{i,k|k}^3 \\ u=\hat{u}_{k|k}}}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Burdaki f_i terimleri her bir $\hat{x}_{i,k+1|k}$ ifadesinin eldesinde kullanılan (2.2) $f(\cdot)$ fonksiyonun i. fonksiyonu temsil etmektedir. Elde edilen ifadelerle her adımda aday kontrol işaretlerine eklenerek $\mathbf{U}^{*}$' ların elde edilmesini sağlayan $\Delta\mathbf{U}$ ile ilgili tüm hesaplamalar yapılabilir. Dolayısıyla RKMÖK ile her adımda sisteme uygulanacak kontrol işareti $u_k = \hat{u}_{k|k}^{*}$ elde edilmiş olur.

3. TERS OPTİMAL KONTROL

Kökenleri varyasyonlar teorisi ile ilişkili olan optimal kontrol teorisi, bir dinamik sistem için önceden belirli bir başarım ölçütünü en aza indirecek kararlı bir kontrol kuralını bulmaya çalışan bir matematiksel optimizasyon yöntemidir. Bu ölçüt genellikle durum ve kontrol değişkenlerinin bir fonksiyonu olan bir amaç fonksiyonu olarak formüle edilir. Optimal kontrol problemleri, sistemin doğasına (doğrusal, doğrusal olmayan), zaman alanının türüne (sürekli, ayrık), başarım ölçütüne ve kısıtlamaların farklı türlerine, vb. bağlı olarak farklılıklar göstermektedir [62] .

Genel bir kontrol problemiyle karşı karşıya kalındığında ve bu problem optimal kontrol çerçevesinde formüle etmek istenildiğinde, ilk zorluk, fiziksel öneme sahip bir kontrol çözümü sağlayacak en uygun maliyetin (amaç fonksiyonunun) seçilmesidir. Bu zor bir seçim olmasına rağmen, tasarım için genellikle aşağıdaki üç özellik gereklidir[27]:

1. Kapalı-çevrim sistem, istenen denge noktasında asimptotik olarak kararlı olmalıdır.
2. Sistem, yörüngelerin istenen denge noktası etrafında yerleşmesinin çok uzun sürmemesi için yeterli sönümlemeye sahip olmalıdır.
3. Aktüatörleri doyurabilecek yüksek kontrol girişlerinden kaçınmak için kontrol enerjisi cezalandırılmalıdır.

Genellikle giriş üzerindeki ikinci dereceden bir amaçla (maliyetle) temsil edilen kontrol enerjisi gereksinimi dışında, amaca(maliyete) dahil olan belirli fonksiyonlar genellikle önceden tanımlanmamıştır. Burada bir kontrolör ve birlikte 1-3 arasındaki gereksinimleri karşılayan bir amaç fonksiyonu bulmaya ve kontrol işaretini bu amaç fonksiyonuna göre en uygun hale getirmeye çalışılır. Bu amaçla, belirlenecek amaç fonksiyonunda sistem durum değişkenleriyle ilgili bilinmeyen bir terim olacak ve bilinmeyen bu terimin belirlenmesi gerekecektir [27].

Optimal kontrolde diğer bir husus da kararlılık ve optimallik arasındaki ilişkidir. Bu ilişki, kararlı durum Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) denkleminin ortaya çıkışından bu yana, önemli bir konudur. Optimal geri besleme sistemleri, ilişkili amaç fonksiyonuna durum ve kontrol için uygun ceza verilmesi koşuluyla, karalılığın ötesinde birçok arzu edilen özelliğe sahiptir [33]. Doğrusal karesel optimal kontrol sistemlerinde uygun kazanç ve faz sınırları ve azaltılmış duyarlılık gibi bazı dayanıklılık özelliklerinin, anlamlı amaç fonksiyonları için optimal olan doğrusal olmayan optimal kontrol sistemlerinde de geçerli olduğu gösterilmiştir [63]. Optimal doğrusal olmayan kontrolün geleneksel çözümü için en büyük dezavantaj, önemli bir hesaplama yükü oluşturan ve şu anda genel doğrusal olmayan sistemler için analitik bir çözüm bulunmayan ilgili HJB denklemini çözme gereksinimidir. Doğrusal olmayan sistemler için bir sentez aracı olarak kullanışlılığı, bu HJB denklemi ile ilişkili gereksinim ve hesaplama yükü tarafından engellenmektedir. Bu yükten kurtulmak için başvurulan yöntem, HJB denklemini çözmek yerine bu çözüme ihtiyaç duymayan Ters Optimal Kontrol (TOK) yaklaşımıdır. Ters optimal kontrol yaklaşımının yararı, optimal amaç fonksiyonu bilindiğinde (yani verilerden çıkartıldığında) HJB denklemini çözme yükünü ortadan kaldırması, açık bir formül haline gelmesi ve anlamlı bir amaç fonksiyonuna göre en uygun kontrolör ile sonuçlanmasıdır [34].

3.1 Ters Optimal Kontrol Tanımı

Ters optimal kontrol probleminin bakış açısı 1960'ların başlarında Kalman [26] tarafından ortaya atılmıştır. Bu bakış açısı: “Bir dinamik sistem ve kapalı-çevrim sistemi asimptotik olarak kararlı kılan bir geribesleme kontrol yasası göz önüne alındığında, ters problem, bu kontrol yasasının optimal olduğu en genel başarım ölçütünü aramaktır. ” şeklinde özetlenebilir.

Literatürde “Ters optimal kontrol” ile ilgili çalışmalar birbirine benzese de ufak farklılıkları olan iki farklı problem ele alış biçimi vardır. Bunlar şöyle özetlenebilir:

i. Ölçümlerden kısmen bilinen bir çözümü en iyi şekilde üreten amaç fonksiyonun ve dinamik modelde potansiyel olarak bilinmeyen kısımların belirlenmesi [64]. Diğer bir deyişle, bilinen sistem dinamikleri için en uygun yörüngelerin veya kontrol girişlerinin gözlemleri göz önüne alındığında, amaç fonksiyonu için "tersine mühendislik" etmek [65].)

ii. İlk önce kararlı kontrol kuralının belirlenmesi, daha sonra bu kontrol kuralının optimal olduğu “anlamlı-maliyet (amaç)” olarak adlandırılan amaç fonksiyonunun elde edilmesi.

Bu iki ele alış biçimi için ters optimal kontrol yaklaşımları bölüm 3.2’de verilmiştir.

3.2 Ters Optimal Kontrol Yaklaşımları

Altmışlı yıllarda optimal kontrol ve ters optimal gibi yaklaşık çözümler üzerinde çalışmaların çoğunda havacılık uygulamaları tarafından yönlendirilen doğrusal ikinci mertebeden problemlere odaklanılmıştır [27]. Ters optimal yaklaşımında; lineer zamanla değişmeyen tek girişli sistemler için bu ters problemin çok hassas bir formülasyonu düşünülmüş ve lineer karesel (kuadratik) regülatörler için güzel bir sonuç ortaya konmuştur [28]. Doğrusal olmayan sistemler düşünülerek yapılan çalışmalarda [29] öncü bir makale olarak kabul edilebilir. Bu makalede dinamikte birinci dereceden terimlerden ve amaçta (maliyette) ikinci dereceden terimlerden başlayarak, Taylor serisi yardımıyla elde edilen analitik fonksiyonlarla optimal kontrol probleminin çözümü tahmin edilmektedir.

Ters optimal yaklaşımı [30–32] çalışmalarında doğrusal olmayan sistemlere uygulansa da, ters optimallik yöntemi, [34]’te belirtildiği gibi , [1] ve [33]’te dayanıklı (robust) doğrusal olmayan kontrolörlerin tasarımı için yeniden gündeme getirilinceye kadar çok fazla çalışılmamıştır. [1] ve [33]’te belirli bir amaç (maliyet) fonksiyonu için bir kontrolör tasarlamak yerine, bazı anlamlı-amaç(maliyet) fonksiyonlarını optimize eden bir kontrolör aramakla ilgilenilmiştir. Özellikle [33] tarafından geliştirilen ters optimallik yaklaşımının ana katkısı, optimal bir amaç fonksiyonu olarak bir kontrol Lyapunov fonksiyonu oluşturmak ve daha sonra bu amaç fonksiyonuna göre optimal olan bir kararlı kontrol yasası türetmektir. Bu yaklaşım daha sonra [35] ve [66]'da doğrusal olmayan sistemlerin bir sınıfının ters optimal kararlılığını sağlayan ve anlamlı bir amaç fonksiyonu açısından optimal bir kontrol kuralı oluşturmada kullanılır. [67]’de, daha önce [68]'de giriş-durum kararlı kontrolörlerin tasarımı için kullanılan Young eşitsizliği, doğrusal olmayan optimal kontrol problemlerinin bir sınıfının çözümünde analitik bir ifade bulmak için kullanılmış ve kontrolörü optimal yapan bir amaç fonksiyonu ifadesi de bulunmuştur. [68] ve [69]’da katı-geribeslemeli (strict-feedback) doğrusal olmayan sistemler üzerine çalışılmıştır.

Ters optimal kontrol konusu literatürde büyük ilgi görmüştür. Odaklanmanın çoğu, özellikle son yıllarda, doğrusal olmayan dinamiklere sahip sistemler olmuştur. [65]’te sürekli sonlu zaman ufkun ele alınmakta, optimallik koşulları analiz edilerek, bu koşulların ihlalini en aza indirmek için bir yöntem önerilmektedir. Ayrık-zamanlı sonlu zaman-ufuk durumu için [70] ve [71]’de benzer fikirler kullanılmaktadır. [72]’de istatistiksel olarak tutarlı bir formülasyon sunulmakta, ancak bu formülasyon zor bir optimizasyon problemi ile sonuçlanmaktadır. [73] ve [74]’te ayrık sonlu zaman ufku durumunu ele alınmaktadır. Optimal kontrol problemi için Pontryagin'in Maksimum Prensibini (PMP) dikkate alırlar ve kısıtlamaları PMP' nin üç koşulundan ikisi olan bir optimizasyon problemi oluştururlar; daha sonra üçüncü PMP koşulun arta kalanını en aza indirirler. [75]'te sürekli sonlu zaman-ufuk durumu dikkate alınmıştır. Yazarlar sorunu hiyerarşik doğrusal olmayan kısıtlı bir optimizasyon problemi olarak formüle etmiş ve PMP ve Karush-KuhnTucker (KKT) koşullarına dayanan iki yaklaşım önermişlerdir. Problemi bir polinom optimizasyon problemi olarak ifade eder ve çözerler.

Aslında, TOK, optimal kontrol problemini ters yönden algılayan bir metodoloji yerine bir yaklaşım olarak da görülebilir. Kontrolörümüzün kararlı ve anlamlı amaç fonksiyonlarına göre optimal olması istenildiğinde ters optimal yaklaşımında kontrol Lyapunov fonksiyonu (KLF) tabanlı yaklaşımlar yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Tipik sistem sınıfları için optimal bir geri besleme kontrolörünün tasarımını sağlayan KLF' nin formülasyonu literatürde tartışılmıştır [2,52,76–82]. Burada KLF' nin varlığı kararlı kılınabilirliği ima eder ve her KLF bir amaç fonksiyonu olarak düşünülebilir [76]. Dolayısıyla, bu yaklaşımın ayırt edici yönü, karalı kılabilen geri besleme kontrolüne karşılık gelen başarım ölçütünün soncul (posteriori) olarak belirlenmesidir. Geribesleme kararlılığında bir kilometre taşı olan evrensel formül [77]’de, tanıtılmış, [83] tarafından, homojen kontrolörlerin kararlı hale getirilmesi için KLF tabanlı bir yöntem önerilmiştir. Bilinen KLF'lere sahip tipik doğrusal olmayan sistemler için KLF tabanlı TOK tasarımı denenmiştir [84,85]. Bununla birlikte, KLF yoluyla TOK' nin en zorlayıcı yönü, genel doğrusal olmayan sistemler için KLF' nin belirlenmesidir. Bir diğer noktada da hâlihazırda, doğrusal olmayan sistemlerde HJB denklemlerinin çözülmesi zor olduğundan ve getirdiği hesaplama yükünden ötürü az sayıda optimal kontrol çalışması bulunmaktadır [86–88]. Optimal kontrol çalışmalarında girişte-afin (affine-in-input) sistemlerin tercih edilmesinin sebebi, amaç ikinci dereceden ve dinamikler "girişte-afin" olduğunda, amaç fonksiyonunun türevlerinin bir fonksiyonu olarak giriş için açık bir çözümün olmasıdır [27]. Bu nedenle optimal kontrol problemlerinde olduğu gibi TOK'de çalışmalar genellikle girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için yapılmıştır.

Sürekli zaman kontrol tasarımlarının örnekleme işleminden sonra dengesiz hale gelebilmesi nedeniyle bu tezde ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistemlerin optimal kontrol problemi ele alınmıştır.

3.3 Girişte-Afin Sistemler İçin Ters Optimal Kontrol Yaklaşımı

Bir ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistem modeli

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f(\mathbf{x}_k) + g(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

ile gösterilebilir. Burada $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ ve $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$ sırasıyla sistem durum değişkenleri, girişleri ve çıkışlarıdır. $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{nxm}, h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ doğrusal olmayan fonksiyonlar, $f(0)=0$ ve $g(\mathbf{x}_k) \neq 0, \forall \mathbf{x}_k \neq 0$ şeklindedir. Regülatör problemi için amaç fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$J(\mathbf{x}_k) = \sum_{n=k}^{\infty} (\ell(\mathbf{x}_n) + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n) \tag{3.2}$$

Burada $\ell\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ yarı-pozitif tanımlı fonksiyon, $\mathbf{x}_k$ durum vektörü ve $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{mxm}$ simetrik pozitif tanımlı kontrol işareti ağırlık matrisidir.

Optimallik ilkesinin uygulanabilmesi için denklem (3.2) özyinelemeli biçimde

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_k) &= \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (\ell(\mathbf{x}_n) + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n) \\ J(\mathbf{x}_k) &= \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + J(\mathbf{x}_{k+1}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde yeniden yazılabilir ve "Dinamik Programlama" yöntemi kullanılarak

$$J^*(\mathbf{x}_k) = \min_{\mathbf{u}_k} \left\{ \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + J^*(\mathbf{x}_{k+1}) \right\} \tag{3.4}$$

denklemi elde edilebilir. Burada sonsuz ufuklu optimizasyon durumu için $J^*(\mathbf{x}_k)$ zamanla değişmezdir ve ayrık-zaman Belman denklemini sağlar. Optimal kontrol kuralını elde edebilmek için ayrık-zamanlı Hamiltonian denklemi $H(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$

$$H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^{\boldsymbol{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}_k + J^*(\mathbf{x}_{k+1}) - J^*(\mathbf{x}_k) \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu denklemi minimize edecek kontrol kuralı

$$\min_{\mathbf{u}_k} H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)\ = H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*) \tag{3.6}$$

ile verilebilir ve bu optimal geri besleme kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$**'** ın sağlaması gereken gerek koşul ise

$$H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*) = 0 \tag{3.7}$$

olacaktır. Denklem (3.5)'in sağ tarafının $\mathbf{u}_k$**'**ya göre kısmi türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial\left\{\ell(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^{\boldsymbol{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}_k + J^*(\mathbf{x}_{k+1})\right\}}{\partial\mathbf{u}_k} = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

ve buradan

$$\frac{\partial\{\ell(\mathbf{x}_k)\}}{\partial\mathbf{u}_k} = \mathbf{0}\,, \quad \frac{\partial\left\{\mathbf{u}_k^{\boldsymbol{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}_k\right\}}{\partial\mathbf{u}_k} = \mathbf{2R}\mathbf{u}_k,$$
$$\frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial\mathbf{u}_k} = \frac{\partial\mathbf{x}_{k+1}}{\partial\mathbf{u}_k}.\frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial\mathbf{x}_{k+1}}\,, \qquad \frac{\partial\mathbf{x}_{k+1}}{\partial\mathbf{u}_k} = g(\mathbf{x}_k)$$

elde edilir. Amaç fonksiyonu (3.2)' yi minimize eden $\bar{u}(0) = 0$ optimal kontrol kuralı

$$\mathbf{u}_k^* = \bar{u}(\mathbf{x}_k) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}g^T(\mathbf{x}_k)\frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial\mathbf{x}_{k+1}} \tag{3.9}$$

olacaktır. Böylece (3.2) eşitliğindeki $J(0) = 0$ sınır koşulu ve $J(\mathbf{x}_k)$ için (3.3) eşitliği sağlanacaktır ve $J(\cdot)$ fonksiyonu Lyapunov fonksiyonuna dönüşecektir. Burada $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ ve $H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*)$, $\mathbf{u}_k$'ya göre karesel ise aşağıda verilen (3.10) optimallik yeter koşulu sağlanır ve denklem (3.9)' daki optimal kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$**,** $H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*)$'yı ve amaç fonksiyonu (3.2)' yi global minimize eder.

$$\frac{\partial^2 H\ (\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k^*)}{\partial\mathbf{u}_k^{\mathbf{2}}} = 0 \tag{3.10}$$

Optimal kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$ (3.9) **,** (3.4)'de yazılırsa $J^*(\mathbf{x}_k)$ elde etmek için çözülecek ayrık-zamanlı Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) diferansiyel denklemi aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
&J^*(\mathbf{x}_k)\ell(\mathbf{x}_k) + J^*(\mathbf{x}_{k+1}) + \cdots \\
&+ \frac{1}{4}\left[\frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}}\right]^T g(\mathbf{x}_k)\mathbf{R}^{-1}g^T(\mathbf{x}_k)\frac{\partial J^*(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} = 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Doğrusal olmayan sistemler için HJB denkleminin çözümü oldukça zor ve prosedürü çok zahmetli bir iştir. Doğrusal regülatör problemi için ise bu denklem Riccati denklemine indirgenir. Optimal kontrol probleminde HJB denklemini veya doğrusal sistemler için Riccati denklemini çözmek yerine bu çözümlere ihtiyaç duymayan Bölüm 3.3.1'de anlatılan ters optimal kontrol yaklaşımı kullanılabilir.

3.3.1 Regülatör Problemi İçin Ters Optimal Kontrol Yaklaşımı

Optimal kontrol denilince akla ilk gelen problem regülatör problemidir. Doğrusal olmayan girişte-afin sistem (3.1)'de, amaç fonksiyonu (3.2) için optimal kontrol kuralını tanımlamak için HJB diferansiyel denklemini çözmek gereklidir. Bu problemi çözmek yerine ters optimal yaklaşımı kullanılabilir [2,38,39]. Bu yaklaşım için tanım aşağıda verilmiştir.

• **Tanım 3.1:** [2]

Denklem (3.5)'te verilen kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$

i. Sistem (3.1)'i global üstel kararlı denge noktası $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$'a ulaştırmak,

ii. Amaç fonksiyonu (3.2)'de $\ell(\mathbf{x}_k) = -\bar{J}|_{\mathbf{u}_k^*}$,

$$\bar{J} := J(\mathbf{x}_{k+1}) - J(\mathbf{x}_k) + \mathbf{u}_k^{*T}\mathbf{R}\mathbf{u}_k^* \leq 0 \tag{3.12}$$

olmak üzere amaç fonksiyonu (3.2)' yi minimize eden ters optimal kontrol kuralı olarak tanımlanabilir.

Ters optimal kontrol problemi çözümü için $J^*(\mathbf{x}_k)$ bilgisine ihtiyaç duymaktadır. Bu nedenle Tanım 3.1 i ve ii koşullarını sağlayan bir aday karesel Kontrol Lyapunov Fonksiyonu

$$J^*(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_k^T\mathbf{P}\mathbf{x}_k \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{nxn}$'nin pozitif tanımlı ve simetrik olduğu varsayılmaktadır. Sonuç olarak kararlılık koşullarını sağlayan ve amaç fonksiyonu (3.2)' yi minimize eden ters optimal kontrol kuralı uygun bir **P** matrisi seçilerek bulunabilir. Böylece durum geri besleme kontrol kuralı

$$\mathbf{u}_k^* = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{R} + g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}g(\mathbf{x}_k)\right)^{-1} g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}f(\mathbf{x}_k) \tag{3.14}$$

şeklinde yazılabilir. Aşağıdaki Teorem, Tanım 3.1'in koşullarının sağlanması için gerekli koşulları vermektedir.

Teorem 3.1 [2,38]:

Doğrusal olmayan sistem (3.1) ele alınsın. Eğer

$$J_f(\mathbf{x}_k) \triangleq J\big(f(\mathbf{x}_k)\big) - J(\mathbf{x}_k)\ ,\ J\big(f(\mathbf{x}_k)\big) \triangleq \tfrac{1}{2} f^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}f(\mathbf{x}_k),\ \zeta_Q > 0$$

ve

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k) \triangleq g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}f(\mathbf{x}_k), \qquad \mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k) \triangleq \tfrac{1}{2} g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}g(\mathbf{x}_k)\ .$$

olmak üzere

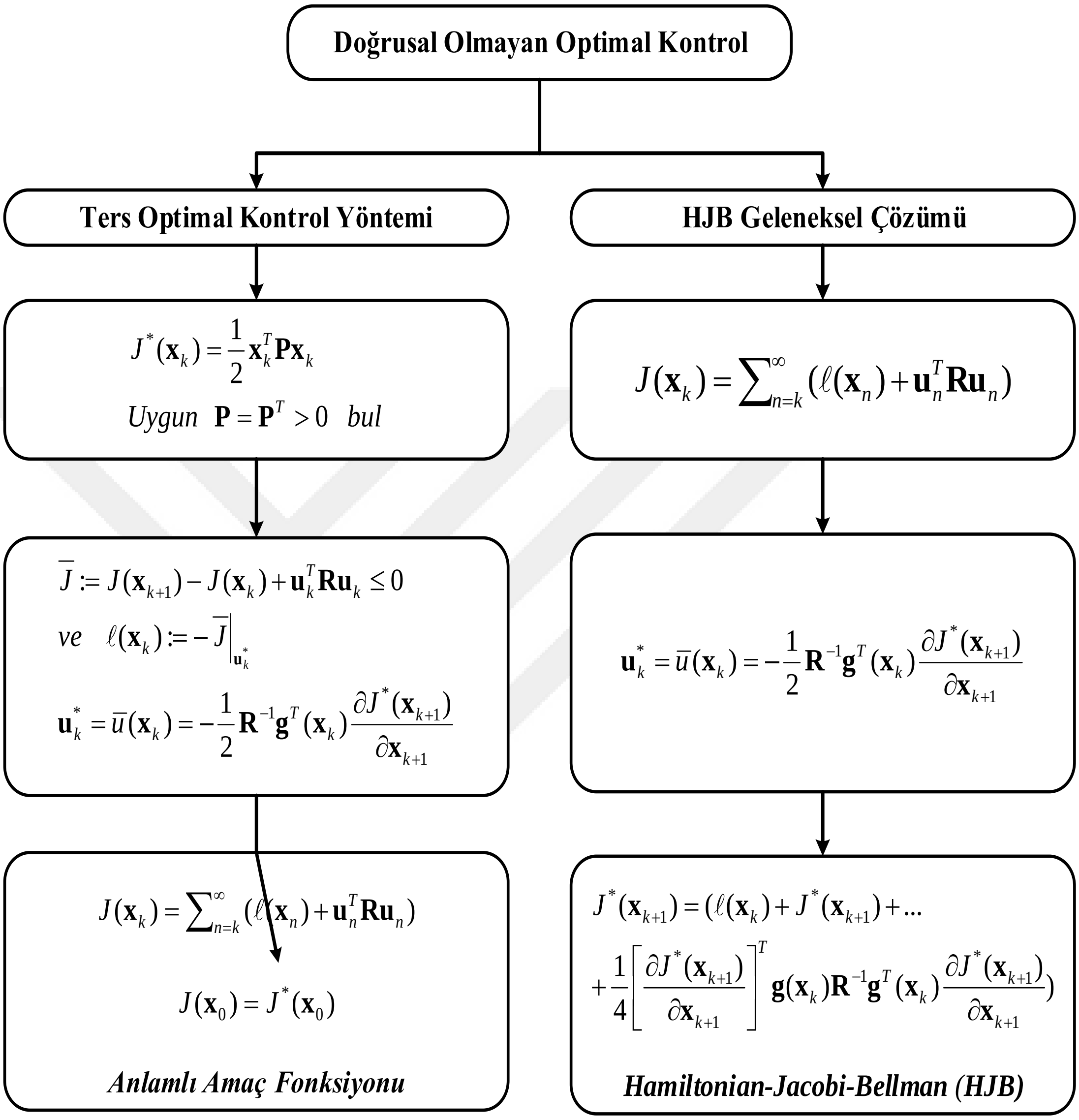
$$J_f(\mathbf{x}_k) - \tfrac{1}{4}\mathbf{P}_1^T(\mathbf{x}_k)\big(\mathbf{R} + \mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k)\big)^{-1}\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k) \le \zeta_Q \|\mathbf{x}_k\|^2 \tag{3.15}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > \mathbf{0}$ matrisi varsa kontrol kuralı (3.14), sistem (3.1)'in denge noktasını $(\mathbf{x}_k = 0)$ global üstel kararlı kılabilir. Böylece bu kontrol kuralı $\ell(\mathbf{x}_k) = -\bar{J}|_{\mathbf{u}_k^*}$ ile (3.2)'de verilen amaç fonksiyonunu minimize eden ters optimal kontrol kuralı ve optimal amaç fonksiyonu da $J^*(\mathbf{x}_0) = J(\mathbf{x}_0)$ olur.

Bu teoremin ispatı [2,38] verilmiştir. Bu teoremle ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için ters optimal kontrol problemi, uygun **P** matrisi bulma problemine dönüştürülmüştür [40–42]. Doğrusal olmayan sistemler için kullanılan geleneksel çözüm ile bu **P** matrisi tanımına dayalı ters optimal kontrol kuralı yaklaşımı, aşağıdaki tanımlarla ve Şekil 3.1 ile gösterilebilir [42].

- Optimal kontrol için $\ell(\mathbf{x}_k) > 0$ ve **R**>0 öncül olarak verilir. Ayrık-zamanlı HJB denklem çözümü aracılığıyla bunlar $\mathbf{u}_k^*$ ve $J^*(\mathbf{x}_k)$'yi belirlemek için kullanılırlar.

- Ters optimal kontrol için KLF $J^*(\mathbf{x}_k) > 0$ ve **R**>0 öncül olarak verilir. Bu fonksiyonlar, $\mathbf{u}_k^*$ ve anlamlı bir amaç fonksiyonu oluşturulmasında kullanılan $\ell(\mathbf{x}_k)$ ifadesini hesaplamak için kullanılır.



Şekil 3.1 : Doğrusal olmayan sistemler için Ters optimal yaklaşımı ve geleneksel HJB problemi çözümü ([42]'den uyarlanmıştır.)

3.3.2 Takip problemi İçin Ters Optimal Yaklaşımı

Bir önceki bölümde regülatör problemi için verilen TOK yaklaşımı izleme problemi için yeniden düzenlenebilir [2,47–52]. Ayrık-zamanlı doğrusal olmayan sistem (3.1) için önceden bilindiği varsayılan referans durumlarının *k*. adımdaki ifadesi $\mathbf{x}_k^d$ ile verilebilir. Takip hatası $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^d$ şeklinde ifade edilirse, takip problemi için amaç fonksiyonu

$$J(\mathbf{z}_k) = \sum_{n=k}^{\infty} (\ell(\mathbf{z}_n) + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n) \tag{3.16}$$

olarak yazılabilir. Burada $\ell: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$yarı pozitif tanımlı fonksiyon, $\mathbf{x}_k$, durum vektörü ve $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{mxm}$ simetrik pozitif tanımlı kontrol işareti ağırlık matrisidir. Burada $\mathbf{R}$ matrisi sabit ya da kontrol işaretini sistem durum değişkenlerine bağlı ağırlıklandırmak için durumlara bağlı bir fonksiyon olarak tanımlanabilir [89]. Burada $J(\mathbf{z}_k)$ değerinin minimum değeri olan optimal amaç fonksiyonu $J^*(\mathbf{z}_k)$ ile ifade edilebilir ve bu fonksiyon için bir kontrol Lyapunov Fonksiyonu yani $J^*(\mathbf{z}_k) \triangleq V(\mathbf{z}_k)$ olarak tanımlanabilir [90].

Optimallik ilkelerine uygulanabilmesi için denklem (3.16) özyinelemeli biçimde aşağıdaki gibi

$$\begin{gathered} V(\mathbf{z}_k) = \ell(\mathbf{z}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} (\ell(\mathbf{z}_n) + \mathbf{u}_n^T \mathbf{R} \mathbf{u}_n) \\ V(\mathbf{z}_k) = \ell(\mathbf{z}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + V(\mathbf{z}_{k+1}) \end{gathered} \tag{3.17}$$

yazılabilir. Burada $V(\mathbf{z}_k)$'nın bir Lyapunov fonsiyonu olabilmesi için $V(0) = 0$ sınır koşulu gereklidir. Bellman optimallik ilkesinden [91,92], sonsuz ufuk optimizasyonu durumunda $V(\mathbf{z}_k)$ amaç fonksiyonunun zamanla değişmez hale geldiği ve ayrık-zamanlı Bellman denklemini karşıladığı bilinmektedir [91,93–95]. Takip probleminde optimal kontrol kuralını elde edebilmek için ayrık-zamanlı Hamiltonian denklemi $H(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k)$

$$H\,(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k) = \ell(\mathbf{z}_k) + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k + V(\mathbf{z}_{k+1}) - V(\mathbf{z}_k) \tag{3.18}$$

tanımlanabilir. Bu optimal kontrol kuralının sağlaması gereken gerek koşul

$$\frac{\partial H\,(\mathbf{z}_k, \mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{u}_k} = \mathbf{0} \tag{3.19}$$

ile ifade edildiğinde, $V(0) = 0$ sınır koşuluyla referansı takip edecek optimal kontrol kuralı

$$\mathbf{u}_k^* = \bar{u}(\mathbf{z}_k) = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} g^T(\mathbf{x}_k) \frac{\partial V(\mathbf{z}_{k+1})}{\partial \mathbf{z}_{k+1}} \tag{3.20}$$

olarak hesaplanabilir. Referans takibi ters optimal kontrol kuralını belirlemek için aşağıdaki Tanım 3.2 verilebilir [52,96].

•Tanım 3.2: Takip problemi için Ters Optimal Kontrol Kuralı [2,47–52]

Takip hatası $\mathbf{z}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^d$ ve $\mathbf{x}_k$ için referans yörüngesi $\mathbf{x}_k^d$ olarak ifade edilirse

i. Kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$, $\mathbf{x}_k^d$ referans boyunca, sistemi asimptotik (global) kararlı $\mathbf{z}_k = \mathbf{0}$ denge noktasına ulaştırabiliyorsa

ii. $V(\mathbf{z}_k)$ aşağıda verilen eşitsizliği sağlayan (radyal olarak sınırsız) pozitif tanımlı bir fonksiyonsa

$$\bar{V} := V(\mathbf{z}_{k+1}) - V(\mathbf{z}_k) + \mathbf{u}_k^{*T}\mathbf{R}\mathbf{u}_k^* \leq 0 \qquad (3.21) \quad (19)$$

kontrol kuralı $\mathbf{u}_k^*$**,** referans yörünge $\mathbf{x}_k^d$ boyunca ters optimal kararlıdır. Burada $\ell(\mathbf{z}_k) \coloneqq -\bar{V}$ seçildiğinde $V(\mathbf{z}_k)$ denklem (3.17) için bir çözüm olur ve amaç fonksiyonu (3.16) minimize edilir.

Tanım 3.2'de verilen referans takip ters optimal kontrol kuralı, $V(\mathbf{z}_k)$' nın bilinmesine bağlıdır. Burada $V(\mathbf{z}_k)$ için denklem (3.17)'i çözmek yerine, izleme hatası $\mathbf{z}_k$**'**nın kararlılığını sağlamak için denklem (3.20)'deki $V(\mathbf{z}_k)$ (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir aday karesel KLF

$$V(\mathbf{z}_k) = \frac{1}{2}\mathbf{z}_k^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\mathbf{z}_k \qquad (3.22)$$

olarak önerilebilir. Böylece (3.22) ile ters optimal kontrol kuralı (3.20) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k^* &= -\frac{1}{4}\mathbf{R}g^T(\mathbf{x}_k)\frac{\partial \mathbf{z}_{k+1}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{P}\mathbf{z}_{k+1}}{\partial \mathbf{z}_{k+1}} = -\frac{1}{2}\mathbf{R}g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}\mathbf{z}_{k+1} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\mathbf{R} + g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}g(\mathbf{x}_k)\right)^{-1} g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}\left(f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_{k+1}^d\right)\end{aligned} \qquad (3.23)$$

Teorem 3.2, Tanım 3.2'in gereksinimlerinin (koşullarının) sağlanması için gerekli koşulları vermektedir.

Teorem 3.2 [2,38,52]:

Doğrusal olmayan sistem (3.1) ele alınsın (düşünülsün). Eğer

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{d}}) \triangleq g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}\left(f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{x}_{k+1}^d\right) \text{ ve } \mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k) \triangleq \frac{1}{2}g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}g(\mathbf{x}_k)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2}f^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}f(\mathbf{x}_k)+\frac{1}{2}(\mathbf{x}_{k+1}^{d})^T\mathbf{P}\mathbf{x}_{k+1}^{d}-\frac{1}{2}\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{P}\mathbf{x}_k-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_k^d)^T\mathbf{P}\mathbf{x}_k^d-$$
$$\frac{1}{4}\mathbf{P}_1^T(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_k^d)\left(\mathbf{R}+\mathbf{P}_2(\mathbf{x}_k)\right)^{-1}\mathbf{P}_1(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_k^d)\le-\frac{1}{2}\|\mathbf{P}\|\|f(\mathbf{x}_k)\|^2- \tag{3.24}$$
$$\frac{1}{2}\|\mathbf{P}\|\left\|\mathbf{x}_{k+1}^d\right\|^2-\frac{1}{2}\|\mathbf{P}\|\|\mathbf{x}_k\|^2-\frac{1}{2}\|\mathbf{P}\|\left\|\mathbf{x}_k^d\right\|^2$$

eşitsizliklerini sağlayacak bir $\mathbf{P}=\mathbf{P}^T>\mathbf{0}$ matrisi varsa kontrol kuralı (3.22), sistem (3.1)'in referans yörünge $\mathbf{x}_k^d$ boyunca asimptotik yörünge takipini garanti eder.

Bu teoremin ispatı [52]'de verilmiştir. Bu teoremle girişte-afin ayrık-zamanlı doğrusal olmayan sistemler için referans takip ters optimal kontrol problemi, regülatör probleminde olduğu gibi uygun KLF yani diğer bir deyişle **P** matrisi bulma problemine dönüştürülebilir.

Burada takip probleminde hata $\mathbf{z}_k$ her adımda sıfıra doğru yaklaştıkça, kontrol işareti $\mathbf{u}_k^*$ sıfıra gitmiyorsa yukarıda verilen Tanım 3.2 ii. koşul (üstel kararlılık ve $\ell:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^+$ yarı-pozitif tanımlı fonksiyon olma şartı) sağlanamamaktadır. Literatürde bu sorunu çözmek için bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak verilen farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu çalışmada literatürde bulunan bu yöntemlerden farklı olarak, kontrol işareti ağırlık matrisi **R**'nin sistem durum değişkenlerine bağlı sigmoid fonksiyonla tanımlandığı özel amaç fonksiyonlu ters optimal yaklaşımı önerilmiştir. Önerilen yaklaşımın hem takip problemi hem de regülatör problemi kontrol başarımına katkısı incelenmiştir.

4. REGULATÖR VE TAKİP PROBLEMİ İÇİN ÖZEL AMAÇ FONKSİYONU İLE TERS OPTİMAL YAKLAŞIMI

Ters optimal kontrol yöntemi [2,38,47–52] çalışmalarında amaç fonksiyonu (3.2) ya da (3.16) için **R** matrisinin sabit ya da kontrol işaretini sistem durum değişkenlerine bağlı ağırlıklandırmak için durumlara bağlı bir fonksiyon olarak tanımlanabileceği şeklinde olabileceği not düşülmüştür. Fakat [51] dışındaki diğer çalışmaların tamamında **R** değeri sabit alınmıştır. [51]'de **R** değeri için sistem durum değişkenlerine ve referans işaretine bağlı

$$R(\mathbf{z}_k) = \frac{\mathbf{x}_k^T \boldsymbol{r} \mathbf{x}_k}{\left\| \mathbf{x}_{k+1}^d \right\|}$$

şeklinde bir fonksiyon kullanılmıştır. Burada $\mathbf{x}_k$, sistem durum değişkenleri, $\mathbf{x}_k^d$, referans işareti ve $\boldsymbol{r}$ pozitif tanımlı matris olarak verilmiştir. $R(\mathbf{z}_k) \in \mathbb{R}^{1x1}$ fonksiyonundan anlaşılabileceği gibi sistem durum değişkenlerinin ağırlıklı hata kareleri toplamının referans işaretinin normuna oranı şeklindedir. Bu çalışmalardaki sabit R değeri veya [51] çalışmasındaki $R(\mathbf{z}_k)$ fonksiyonu seçildiğinde TOK takip problemi için (Bölüm 3.3.2'de) verilen tanım 3.2 ii. koşulda aşağıda tanımlanan sorunlarla karşılaşılmaktadır:

- *Sorun 1:* $\mathbf{z}_k \to 0$ olduğunda optimal kontrol işareti $\mathbf{u}_k^*$ değeri sıfıra yaklaşmıyorsa Tanım 3.2 ii. koşul (3.21) ($V(\mathbf{z}_{k+1}) - V(\mathbf{z}_k) + \mathbf{u}_k^{*T} \mathbf{R} \mathbf{u}_k^* \leq 0$) sağlanamamaktadır.
- *Sorun 2:* Uygulamada, $\mathbf{z}_k \to 0$' a gitmeyeceği ve belli hata yaklaşıklıkları ($|\mathbf{z}_k| < \varepsilon$) kullanılacağı düşünülebilir (Burada ε sıfıra yakın pozitif reel sayıdır). Bu durumda da ii. koşulun sağlanması için **P** matrisinin elemanlarının değerlerinin büyüklüğü, tanımlı **R** matrisi elemanlarının değerlerinin büyüklüğüne göre tanımlanmalıdır. **R** matrisi elemanlarının değerlerinin büyüklüğüne göre ayarlanmazsa *Sorun 1*'de olduğu gibi Tanım 3.2 ii. koşul sağlanamamaktadır.

Burada verilen ilk sorun düşünüldüğünde $\mathbf{z}_k \rightarrow 0$' a giderken $\mathbf{u}_k^{*T}\mathbf{R}\mathbf{u}_k^*$ terimi sıfıra gitmesi yani $\mathbf{u}_k^* \rightarrow 0$'a gitmesi gerekmektedir. Bu sağlanamıyorsa Tanım 3.2 ii. koşul, yani üstel kararlılık ve $\ell: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ yarı-pozitif tanımlı fonksiyon olma şartı sağlanamaz. İkinci sorunda ise ε, eğer sıfıra çok yakın seçilirse yine ilk sorunla karşılaşılacaktır. Bu sorunu aşmak yani kontrol kuralı üstel kararlılık koşulunun sağlanması için (3.16) amaç fonksiyonunda çok küçük **R** değerleri kullanılabilir. Bu durumda da ilk probleme benzer şekilde optimal kontrol işareti $\mathbf{u}_k^*$ değeri sıfıra yaklaşmıyorsa ve $\mathbf{z}_k \rightarrow 0$' a mümkün olduğunca yaklaşması istendiğinde yine bu koşul sağlanamayacaktır. Ayrıca **R** değerleri çok küçük seçildiğinde $\mathbf{u}_k^*$ optimal değeri, özellikle hatanın büyük olduğu yerlerde çok büyük genlikli olabilecektir. Bu da, kontrol işaretinde kısıt olan problemlerde veya mümkün olduğunca küçük genlikli $\mathbf{u}_k^*$ optimal işaretleri ile problem çözülmek istendiğinde istenilen başarım ölçütlerine ulaşılmasına engel olacaktır. Büyük **R** değerleri seçildiğinde, başlangıçta hata da büyük olacağından, bu koşulun sağlanmasında problem olmasa da, hata değeri azaldığında bu koşulun sağlanabilmesi için çok büyük **P** değerlerine ihtiyaç duyulur. **P** değerleri büyük seçildiğinde ise kontrol kuralı (3.23) matris tersinde bulunan $g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}g(\mathbf{x}_k)$ ve çarpım durumunda $g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}$ ifadelerinin ağırlıkları artar ve kontrol kuralı (3.23)'de **R** parametresinin etkisini azaltır. Yine başlangıçta büyük genlikli $\mathbf{u}_k^*$ değerlerine sebep olacak istenilen küçük genlikli kontrol işaretleriyle problemi çözme kontrol başarımını azaltabilecektir. Ayrıca burada bir dezavantajda bu koşul ve bahsedilen kontrol başarımları göz önünde bulundurulduğunda **P** ve **R** parametresinin esnek olarak belirlenebilmesini ve aynı zamanda ters optimal kontrol probleminin çözümü olan uygun KLF (3.22) bulunmasını zorlaştırmasıdır.

4.1 Takip Problemi için Özel Amaç Fonksiyonu Kullanılan Ters Optimal Kontrol Yaklaşımı

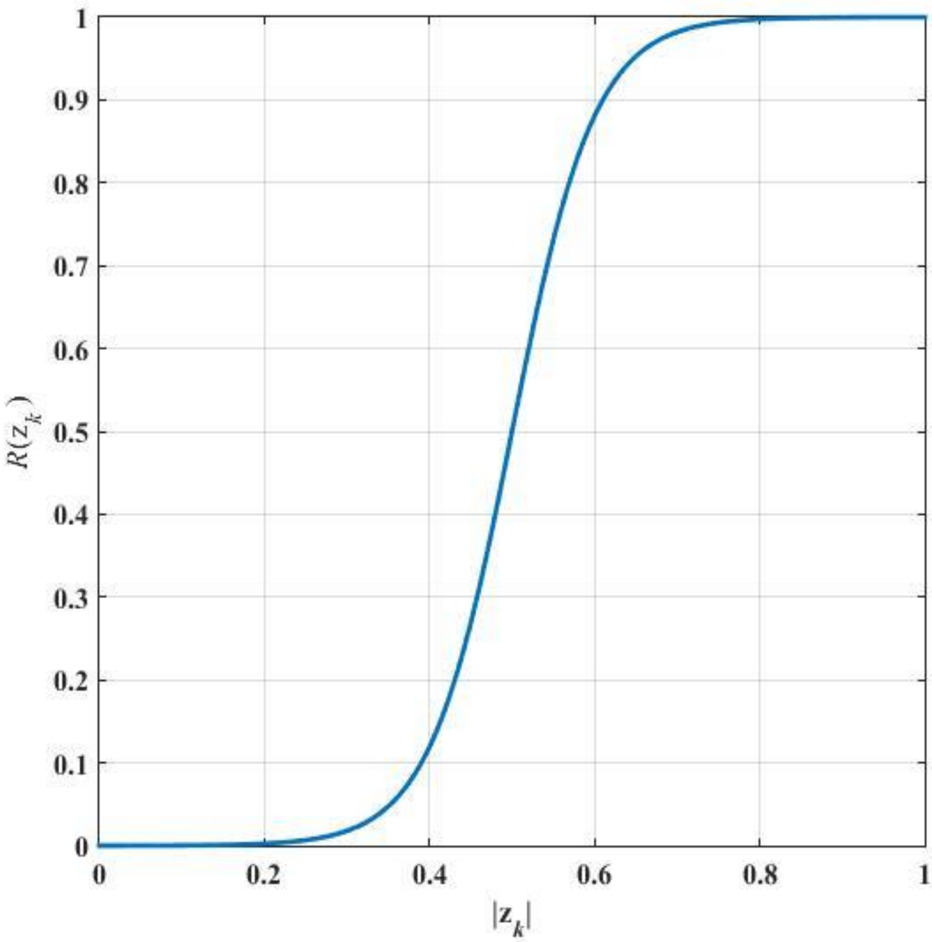
Takip problemi optimal kontrol kuralında, Tanım 3.2 ii. koşulun sağlanma problemiyle ve yukarıda bahsedilen kısıtlarla karşılaşmamak için [46,52,96–100] çalışmalarında sistem denklemlerinde düzenlenmeler yapılmıştır. Bu düzenlemelerle takip problemi, ters optimal kontrol kuralı sıfıra gidecek şekilde düzenlemiş sistem denklemleri yeniden elde edilmiştir. [46]'da kontrol edilecek sistemin doğrusal modeli elde edilmiş ve bu doğrusal model yerine doğrusal genişletilmiş model kullanılarak referans takip problemi regülatör problemine dönüştürülmüştür. [96,97,100] çalışmalarında doğrusal olmayan sistem denklemleri doğrusal olmayan blok kontrol edilebilir biçimde ifade edilebilen ya da bu biçime dönüştürülebilen sistemlerin kontrol problemi ele alınmıştır. Bu gösterimle elde edilen kontrol kuralı tasarımı iki kısımdan oluşur. Kısımlardan birisi sistem denklemlerinin yeniden düzenlenerek regülatör problemine dönüştürülen problemin ters optimal kontrol yaklaşımıyla çözülmesiyle elde edilir. İkinci kısım ise dönüşümün içinde olan regülatör kısmına dahil edilemeyen problemin, sistem denklemlerine, sistem durumuna ve referans işaretine bağlı geri besleme kontrol kuralı çözümüdür. Burada, ters optimal kontrol yaklaşımı sadece indirgenmiş durumların bir kısmına uygulanabilmektedir. Benzer bir yaklaşım [98]'de yine bir kontrol probleminde sistem denklemleri hataya göre yeniden düzenlenmiştir. Burada da kontrol kuralı iki kısımdan oluşur. Yine regülatör problemine dönüştürülebilen kısım için ters optimal kontrol yaklaşımı dönüştürülemeyen kısım için geri besleme kontrol kuralı uygulanır. Bu yaklaşımlarda sisteme uygulanan kontrol (kuralı) işareti ise bu iki kısmın toplanmasıyla elde edilmektedir. Sistem denklemlerini düzenleyen iki yaklaşımın temel problemi, optimizasyon probleminin regülatör problemine dönüştürülen kısmının çözümünde ters optimal kontrol yaklaşımından yararlanılması, ters optimal kontrol yaklaşımı kullanılmadan elde edilen kısımda optimal kontrolün kazandıracağı avantajlardan yararlanılmamasıdır.

Takip problemi için [2]'de verilen ters optimal yaklaşımının kullanıldığı [47–51,90,95,101] çalışmalarında ise $\mathbf{u}_k^*$' ın ya sıfıra gittiği problemler ele alındığı ya da bu Tanım 3.2 ii. koşulun sağlanması koşulunun dikkate alınıp alınmadığının belirtilmediği gözlenir.

Bu tezde, [2,52]'de takip problemi için verilen ters optimal yaklaşımı, genel kontrol kuralı tasarımını kısımlara ayırmadan ve Tanım 3.2 ii. koşulu sağlayacak şekilde çözülmek istenmiştir. Bunun için bu çalışmalardan farklı olarak amaç fonksiyonu (3.16) kontrol işareti ağırlık matrisi **R'** nin her bir elemanı için sistem durum değişkenlerine bağlı

$$R_{i,j}(\mathbf{z}_k) = r_{i,j}^c \frac{1}{1+e^{-r_{i,j}^s\left(|\mathbf{z}_k| - \frac{\mathbf{z}_{max}}{2}\right)}} - r_{i,j}^c \frac{1}{1+e^{-r_{i,j}^s\left(-\frac{\mathbf{z}_{max}}{2}\right)}} \tag{4.1}$$

şeklinde bir sigmoid fonksiyon önerilmiştir. Burada $|\mathbf{z}_k| = \sum_{i=1}^{n} |z_{i,k}|$, $r_{i,j}^c$ kontrol işareti ağırlık fonksiyonunun genliği, $\mathbf{z}_{max}$ maksimum takip hatası ($z_{i,max}$) değerleri mutlak değerleri toplamı ($\mathbf{z}_{max} = \sum_{i=1}^{n} |z_{i,max}|$), $r_{i,j}^s$ ise sigmoid fonksiyonun eğim parametresidir. Bu $r^c_{i,j}$ ve $r^s_{i,j}$ parametreleri sayesinde sigmoid fonksiyon ile $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{z}_k)$ matrisi elemanlarının anlık değerleri hataya göre ağırlıklandırılmaktadır. Örnek bir $R(\mathbf{z}_k) = R_{1,1}(\mathbf{z}_k)$ fonksiyonu $r^c_{1,1}$=1 ve $r^s_{1,1}$=20 için şekil 4.1'de verilmiştir. Burada önceden belirlenen $r^c_{i,j}$ ve $r^s_{i,j}$ parametreleri ile hata maksimum değerde iken uygun maksimum $R_{i,j}(\mathbf{z}_k)$ değerleri, hata sıfıra yaklaştığında ise sıfıra yakın $R_{i,j}(\mathbf{z}_k)$ değerleri sağlanabilir. Böylece büyük **R** değerleri ile kontrol işaretinin çok büyük değerler alması engellenebilirken, optimal kontrol kuralı $\mathbf{u}^*_k$ sıfır olmayan optimal değerine yaklaştığında büyük değerlere ihtiyaç duyulmayan değerler azaltılarak küçük değerli **R** ile ii. koşulun sağlanmama problemi çözülmektedir. Takip problemi için $\mathbf{u}_k$ kontrol işaretinin sıfıra gitmediği durumlarda hata sıfıra yaklaştığında, hataya bağlı olarak $R_{i,j}(\mathbf{z}_k)$ değerleri sıfıra yaklaşarak $\bar{V} := V(\mathbf{z}_{k+1}) - V(\mathbf{z}_k) + \mathbf{u}^{*T}_k \mathbf{R} \mathbf{u}^*_k \leq 0$ koşulunu, yani üstel asimptotik kararlılık koşulunu ve $\ell: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ yarı-pozitif tanımlı fonksiyon olma şartını sağlanmaktadır.



Şekil 4.1 : Normalize hata $\mathbf{z}_k$ için $R(\mathbf{z}_k)$ değerleri.

4.2 Regulatör Problemi için Özel Amaç Fonksiyonu Kullanılan Ters Optimal Yaklaşımı

Amaç fonksiyonu (3.16)'da $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{z}_k)$ matrisini kullanma yaklaşımı regülatör probleminde de kullanılabilir. Regülatör probleminde sistem durum değişkenlerinin denge noktasına hızlı bir şeklide ulaşması istenilebilir. Bu durumda özelikle başlangıçta sistem durum değişkenlerinin denge noktasından uzaklığına bağlı büyük genlikli kontrol işaretlerine ihtiyaç duyulacaktır. İdealde çok büyük genlikli kontrol işareti uygulanırsa sistem denge noktasına daha hızlı yaklaşılabilir ama gerçek zamanlı uygulamada bu her zaman mümkün olmamakta ya da kontrol işaretine ilişkin fiziksel sınır aşılamamaktadır. Ayrıca mümkün olduğunca küçük genlikli kontrol işaretleriyle sistem durum değişkenlerinin denge noktasına ulaşması da istenebilir. Bu durumda kontrol işaretinin genliğini azaltabilmek için başlangıçta büyük değerli **R** matrisine ihtiyaç olacaktır. Denge noktasına yaklaşıldığında ise kontrol işaretinin büyüklüğündeki değişim azalacağı ve hatta kontrol işareti sıfıra yakınsayacağı için amaç fonksiyonunda **R** matrisinin önemi azalacak ve büyük değerlere ihtiyaç olmayacaktır. Önerilen $R_{i,j}(\mathbf{z}_k)$ (4.1) fonksiyonu, amaç fonksiyonu (3.2) için

$$R_{i,j}(\mathbf{x}_k) = r_{i,j}^c \frac{1}{1 + e^{-r_{i,j}^s \left(|\mathbf{x}_k| - \frac{|\mathbf{x}_0|}{2}\right)}} - r_{i,j}^c \frac{1}{1 + e^{-r_{i,j}^s \left(- \frac{|\mathbf{x}_0|}{2}\right)}} \tag{4.2}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Burada $|\mathbf{x}_k| = \sum_{i=1}^{n} |x_{i,k}|$, $r_{i,j}^c$ kontrol işareti ağırlık fonksiyonunun genliği, $\mathbf{x}_0$ başlangıç durum değişkenleri, $r_{i,j}^s$ ise sigmoid fonksiyonun eğim parametresidir. Bu $r_{i,j}^c$ ve $r_{i,j}^s$ parametrelerine ve sistem durum değişkenlerine bağlı sigmoid fonksiyonla her adımda $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$ matrisi $R_{i,j}(\mathbf{x}_k)$ değerleri anlık ağırlıklandırılmaktadır.

4.3 Özel Amaç Fonksiyonu Kullanarak Ters Optimal Yaklaşımına İlişkin Benzetim Çalışmaları

Bu bölümde, takip problemine göre daha kolay olduğu için benzetim çalışmalarına regülatör problemi ele alınarak başlanılmıştır. Amaç fonksiyonu (3.2)' de önerilen $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$ ile yeniden düzenlenen ters optimal yaklaşımı Bölüm 4.3.1'de, [2,39]'daki regülatör problemine uygulanmış ve farklı $r_{i,j}^c$ ve $r_{i,j}^s$ değerleri için kontrol başarımları incelenmiştir. Bölüm 4.3.2'de ise takip problemi için ikili su tankı seviye kontrol problemi ele alınmıştır. $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{z}_k)$ ile yeniden düzenlenen ters optimal yaklaşımı kullanılarak problem çözülmüş ve farklı $r_{i,j}^c$ ve $r_{i,j}^s$ değerleri için kontrol başarımları incelenmiştir.

Bu çalışmalarda eş bir karşılaştırma yapabilmek için kontrolör parametreleri ele alınan sisteme göre belirlenmiştir. Ele alınan sistem [2,39] çalışmalarındaki sistem seçildiğinde bu çalışmalarda tanımlanmış olan parametreler kullanılmıştır. Bu çalışmalardakilerden farklı sistemlere ele alındığında ise bu parametreler Büyük Patlama- Büyük Çöküş (BP-BÇ) algoritması [53] kullanılarak hata kareleri toplamını minimize edecek şekilde bulunmuştur.

Önerilen yaklaşımla TOK'de hem regülatör problemi için hem de takip problemi için sonuçlar değerlendirilmiştir. Bu sonuçlara göre regülatör probleminde kontrol başarımı en düşük maksimum kontrol işareti ile en hızlı denge noktasına ulaşma olarak düşünüldüğünde kontrol başarımının iyileştirilebileceği görülmüştür. Takip probleminde benzer şekilde bazı kontrol başarım ölçütleri için uygun parametre seçilerek kontrol başarımının iyileştirilebileceği, uygun **P** bulunmasında esneklik sağlayacağı ve ii. koşulun sağlanmama probleminin çözülebileceği görülmüştür. Ayrıca kontrol ceza parametresinin önerilen $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$ veya $\mathbf{R}(\mathbf{z}_k)$ ile daha geniş aralıklardaki **P** değerleri ile TOK problemi çözülebilmekte yani TOK problemi çözümü için daha geniş ve başarım ölçütü daha iyi çözüm olanağı sağlanabilmektedir.

4.3.1 Regülatör Problemi

Ayrık-zamanlı doğrusal olmayan tek-girişli tek-çıkışlı

$$\begin{bmatrix} x_{1,\mathrm{k}+1} \\ x_{2,\mathrm{k}+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,\mathrm{k}} x_{2,\mathrm{k}} - 0.8 x_{2,\mathrm{k}} \\ {x_{1,\mathrm{k}}}^2 + 1.8 x_{2,\mathrm{k}} + (-2 + \cos(x_{2,\mathrm{k}}))\mathrm{u}_\mathrm{k} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

sistemi ele alınsın[2] . Denklem (4.3), denklem (3.1)'e göre yeniden düzenlenirse

$$f(\mathbf{x}_\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} x_{1,\mathrm{k}} x_{2,\mathrm{k}} - 0.8 x_{2,\mathrm{k}} \\ {x_{1,\mathrm{k}}}^2 + 1.8 x_{2,\mathrm{k}} \end{bmatrix} \qquad g(\mathbf{x}_\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 + \cos(x_{2,\mathrm{k}}) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Sistemin başlangıç koşulu $\mathbf{x}_0 = [2 \quad -2]^T$ olarak alınmıştır. Ulaşılmak istenen denge noktası $\mathbf{x}_\mathrm{f} = [x_{1,\mathrm{f}}, \quad x_{2,\mathrm{f}}]^T$için, $[0 \quad 0]^T$ noktasının $\varepsilon = 10^{-8}$ hassasiyette yakınsaklığı seçilmiştir ve bu yakınsaklık için $|x_{1,\mathrm{f}}|, |x_{2,\mathrm{f}}| \leq 10^{-8}$ eşitsizliği kullanılabilir. Burada sistem tek girişli olduğu için (3.2)'de $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{1x1}$

olacağından R ile gösterilebilir. Amaç fonksiyonu (3.2)' yi minimize edecek şekilde, bir karesel KLF $J^*(\mathbf{x}_k)$ (3.13) tanımlayarak elde edilen ters optimal kontrol kuralı (3.14)

$$u_k^* = -\frac{1}{2}\left(R + g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}g(\mathbf{x}_k)\right)^{-1} g^T(\mathbf{x}_k)\mathbf{P}f(\mathbf{x}_k) \tag{4.4}$$

şeklindedir. Buradaki pozitif tanımlı **P** matrisi [2]'de olduğu gibi

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

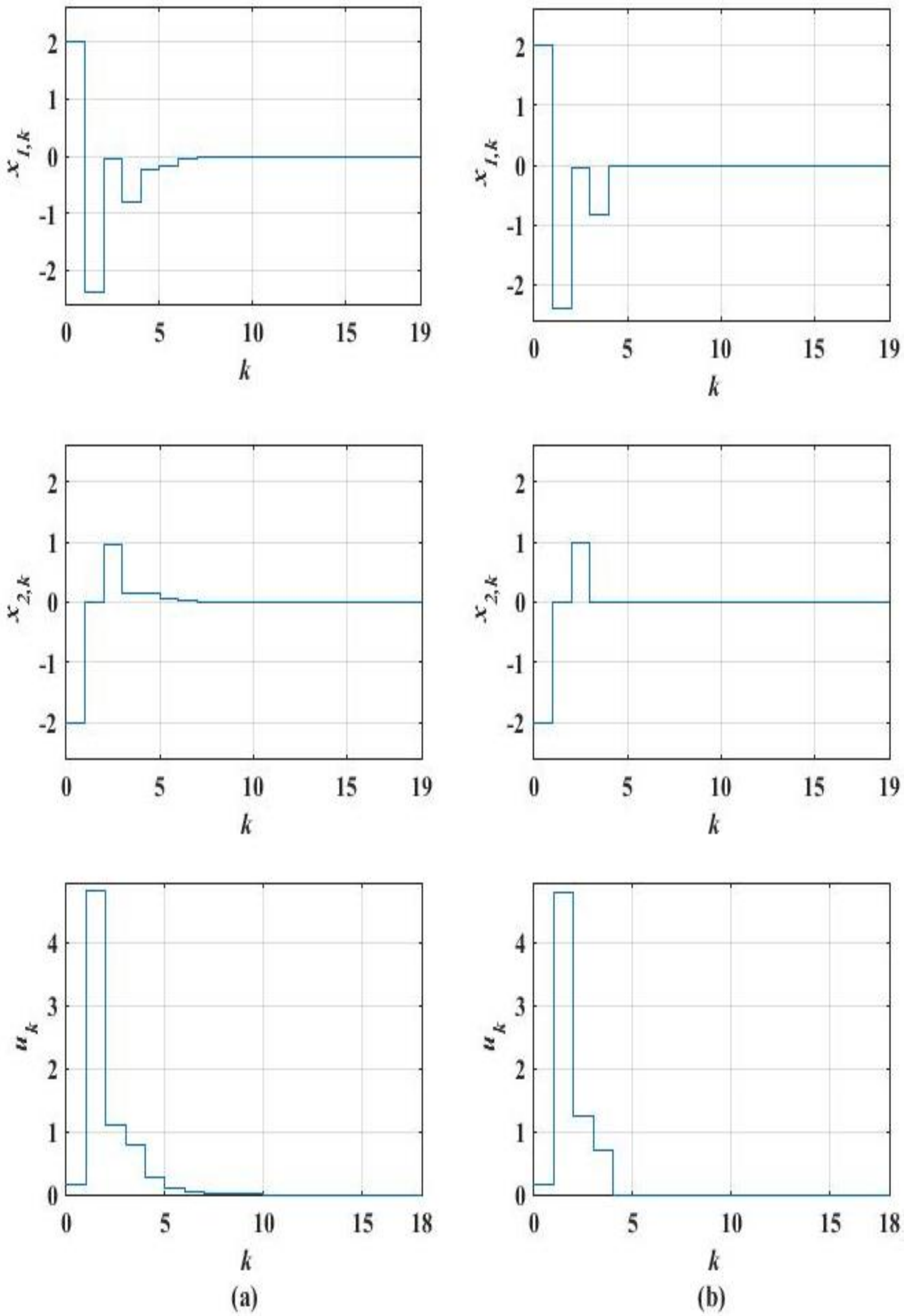
ve R=1 olarak alınmıştır. Bu değerden daha küçük değerler için kontrol işareti maksimum değeri($u_{\max}$) büyük değerler almakta, daha büyük R değerleri için bölüm 3.3.1 Tanım 3.1 ii. kararlılık koşulu (k=3'de) sağlanamamaktadır. TOK' de R=1 için elde edilen sonuçlar Şekil 4.2 (a)'da verilmiştir. Tanımlı **P** matrisi ile elde edilen (3.13) $J^*(\mathbf{x}_k)$ KLF fonksiyonu yardımıyla anlık hesaplanan $J(\mathbf{x}_k)$ amaç fonksiyonu değerleri ise Şekil 4.3 (a)'da verilmiştir.

Önerilen sistem durum değikenlerine bağlı sigmoid fonksiyonu $R_{i,j}(\mathbf{x}_k)$ değerleri ile elde edilen $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$ tek girişli (4.3) sistemi için

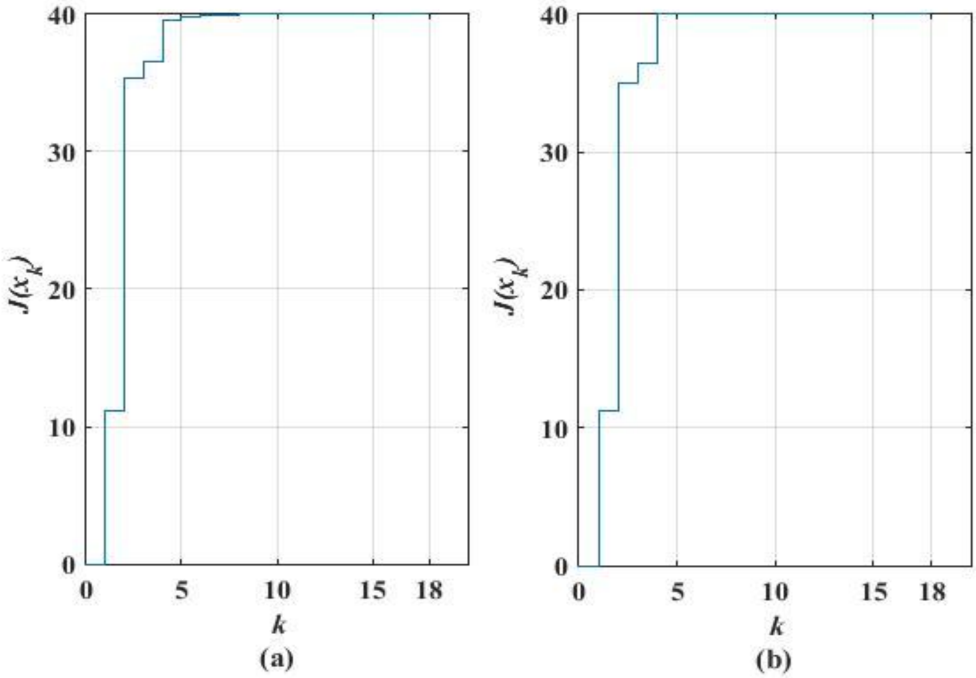
$$R(\mathbf{x}_k) = r^c \frac{1}{1 + e^{-r^s\left(|\mathbf{x}_k| - \frac{|\mathbf{x}_0|}{2}\right)}} - r^c \frac{1}{1 + e^{-r^s\left(-\frac{|\mathbf{x}_0|}{2}\right)}} \tag{4.5}$$

şeklinde yeniden düzenlenmiş ve burada $r^c = 1.039$ ve $r^s = 20$ seçilmiştir ($R(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^{1x1}$). Buna göre sistem durum değişkenleri ve kontrol işareti Şekil 4.2 (b)'de, anlık amaç fonksiyonu hesabı $J(\mathbf{x}_k)$ ise Şekil 4.3 (b)'de, her adımda sistem durum değişkenlerine bağlı elde edilen $R(\mathbf{x}_k)$ değerleri Şekil 4.5'te verilmiştir.

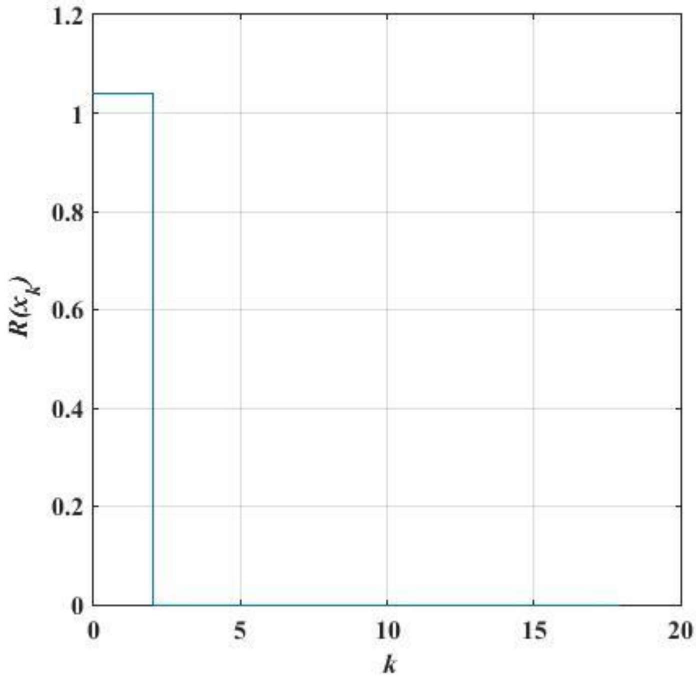
Burada Şekil 4.2 (a) ve (b) grafikleri incelendiğinde kontrol işareti ağırlık parametresi için (4.2) $R(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonu kullanıldığında sistem (4.3) durum değişkenleri $\mathbf{x}_\mathrm{f}$ denge noktasına 4 adımda ulaşırken, R=1 seçildiğinde $\mathbf{x}_\mathrm{f}$ denge noktasına 19 adımda ulaşabilmektedir. Bu kadar hızlı yaklaşabilmesine rağmen kontrol işaretinin maksimum değerleri incelendiğinde, önerilen fonksiyonlu yaklaşımda $u_{\max}$ değeri, R=1'deki $u_{\max}$ değerinden daha küçüktür.



Şekil 4.2 : (a) Sabit R=1 için Sistem (4.3)'e ilişkin durum değişkenleri ve kontrol işareti **(b)** Denklem (4.5) $R(\mathbf{x}_{\boldsymbol{k}})$ fonksiyonunda $r^c = 1.039$ ve $r^s = 20$ seçildiğinde Sistem (4.3) için durum değişkenleri ve kontrol işareti.



Şekil 4.3 : **(a)** Sabit R=1 için anlık amaç fonksiyonu **(b)** Denklem (4.5) $R(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonunda $r^c = 1.039$ ve $r^s = 20$ için anlık amaç fonksiyonu.



Şekil 4.4 : Denklem (3.29) $R(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonunda $r^c = 1.039$ ve $r^s = 20$ seçildiğinde her bir adımdaki R değerleri.

Kontrol başarımları için, maksimum adım sayısı, hata kareleri toplamı (Sum Squared Error-“SSE”), hata karelerinin adımla çarpımının toplamı (Sum Squared Error multiplied by Step -“SSSE”), kontrol giriş işareti değişimlerinin mutlak değeri toplamı (Toplam Değişim, Total Variation- “TV”) ve maksimum u değeri “u_{max}” başarım ölçütleri kullanılabilir. Bu başarım ölçütleri verilen Çizelge 4.1’ deki tüm değerler incelendiğinde, önerilen $R(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonu kullanılan ters optimal yaklaşımın kontrol başarımının daha iyi olduğu gözükmektedir. Burada SSE, SSSE, TV ve u_{max} değerlerindeki fark az olmasına rağmen, özellikle denge noktasına ulaşma hızı, sabit R=1 seçildiğindeki denge noktasına ulaşma hızının 4 katından fazladır. Optimal kontrol probleminde bazı başarım ölçütlerini artırabilmek için diğer başarım ölçütlerinden genellikle ödün verilmesi gerekmektedir. Bu yeni yaklaşımla tablodan da anlaşılabileceği gibi sabit R değerine göre diğer başarım ölçütlerinden ödün vermeden, adım sayısında iyileşme sağlanabilmiştir.

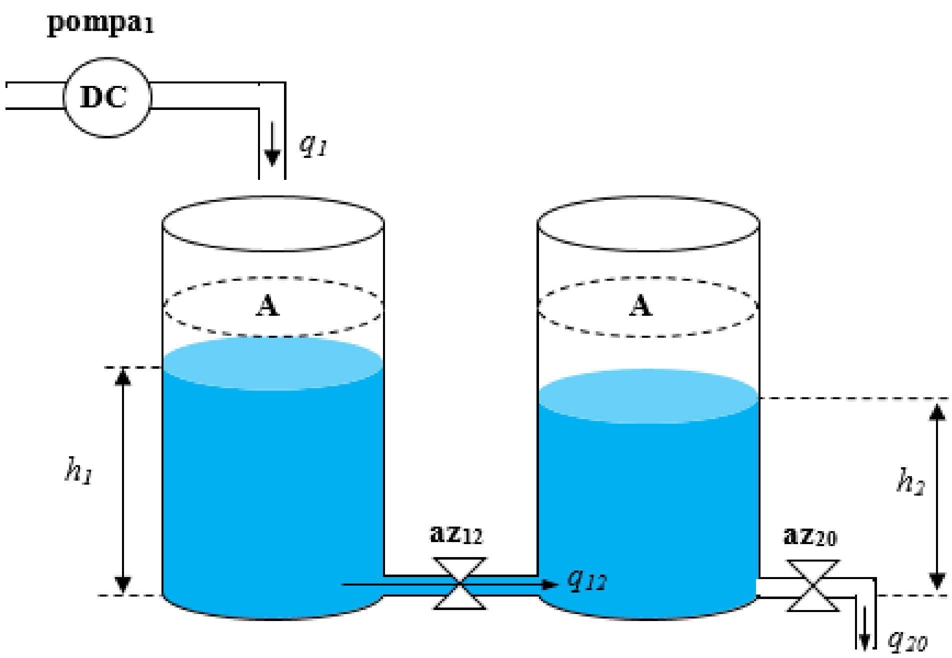
Çizelge 4.1 : Başarım Ölçütleri Tablosu.

R değeri	***Adım Sayısı***	**SSE**	**SSSE**	**TV**	u_{max}
R=1	19	15.4925	10.7239	9.4791	4.8196
$R(\mathbf{x}_k)$, $r^c = 1.039$, $r^s = 20$	4	15.4570	7.0106	9.4189	4.7894

Sabit R’ li TOK yaklaşımında aynı **P** matrisi için denge noktası $\mathbf{x}_f$ ulaşma adım sayısı azaltılmak istenirse küçük R değerleri seçilebilir. Ancak R değerleri küçük değerler seçildiğinde ise u_{max} değerleri büyük değerler alacaktır. Regülatör problemi için, eğer en az adımda, en küçük u_{max} değeri ve en az kontrol işareti değişimi TV değeri ile çözülmek istenirse önerilen $R(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonunda $r^c = 1.039$ ve $r^s = 20$ seçilmesi yeterli olacaktır. Buradan da önerilen $R(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonlu ters optimal yaklaşımı ile r^c ve r^s uygun değerler seçilerek, istenilen kontrol başarımını arttıracak ve diğer kontrol başarımlarını da az etkileyecek şekilde regülatör problemi çözülebilecektir.

4.3.2 Takip Problemi

Şekil 4.5 ile verilmiş olan doğrusal olmayan tek girişli tek çıkışlı çiftli su tankı sisteminde sıvı seviyesi kontrol problemi ele alınsın.



Şekil 4.5 : İkili Tank Sisteminin Şematik Gösterimi.

Sistemin sürekli zamanlı doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri ve çıkış denklemi

$$\dot{h_1}(t) = \frac{1}{A}[q_1(t) - q_{12}(t)]$$
$$\dot{h_2}(t) = \frac{1}{A}[q_{12}(t) - q_{20}(t)] \tag{4.6}$$
$$y(t) = h_2(t)$$

olarak ifade edilir. Burada

$$q_{12}(t) = az_{12}S_n sgn\big(h_1(t) - h_2(t)\big)\sqrt{2g|h_1(t) - h_2(t)|}$$
$$q_{20}(t) = az_{20}S_n\sqrt{2gh_2(t)} \tag{4.7}$$

şeklinde olup $sgn(\cdot)$ işaret (signum) fonksiyonu, $|\cdot|$ ise mutlak değer fonksiyonudur. Sistem değişkenlerinin ne olduğu ve değerleri Çizelge 4.2’de verilmiştir. Bu sistem için giriş akış debisi sınırları $q_{1min}(t) = 0, q_{1max}(t) = 0.0001m^3/s$ ve tank sıvı seviyesi yükseklik sınırları $h_{1min} = h_{2min} = 0.001m, h_{1max} = h_{2max} = 0.95m$ şeklindedir.

Çizelge 4.2 : Su tankı sistemi parametre değerleri ve tanımları.

Parametreler	Değer/tanım
$h_1(t)$: $tank_1$ deki sıvı seviyesi	(m)
$h_2(t)$: $tank_2$ deki sıvı seviyesi	Çıkış (m)
$q_1(t)$: $pompa_1$ akış debisi	Giriş (m^3/s)
az_{12} : $tank_1$ ve $tank_2$ arasındaki sıvı akış katsayısı	0.3
az_{20} : $tank_2$' den ana hazneye sıvı akış katsayısı	0.27
A : Silindirlerin kesit alanı	0.0154 (m^2)
S_n : Bağlantı borularının kesit alanı	5x10^{-5} (m^2)
g : Yer çekimi ivmesi	9.81 (m/s^2)

Bu sistemin ters optimal kontrol yaklaşımında kullanılacak doğrusal olmayan ayrık-zamanlı dinamik denklemleri ise Euler yaklaşımı kullanılarak

$$\begin{aligned} h_{1,k+1} &= h_{1,k} + \frac{T_s}{A}\left[q_{1,k} - q_{12,k}\right] \\ h_{2,k+1} &= h_{2,k} + \frac{T_s}{A}\left[q_{12,k} - q_{20,k}\right] \\ y_k &= h_{2,k} \end{aligned} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} q_{12,k} &= az_{12} S_n sgn\left(h_{1,k} - h_{2,k}\right)\sqrt{2g\left|h_{1,k} - h_{2,k}\right|} \\ q_{20,k} &= az_{20} S_n \sqrt{2g h_{2,k}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Şeklindedir ve T_s örnekleme zamanıdır. Bu ayrık-zamanlı dinamik denklemde sistem durum değişkenleri $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \quad x_{2,k}]^T = [h_{1,k} \quad h_{2,k}]^T$ ve kontrol girişi $u_k = q_{1,k}$ ile ifade edilirse, Denklem (3.1) $f(\mathbf{x}_k)$ ve $g(\mathbf{x}_k)$ fonksiyonları

$$f(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} - \frac{T_s}{A} az_{12} S_n sgn\left(x_{1,k} - x_{2,k}\right)\sqrt{2g\left|x_{1,k} - x_{2,k}\right|} \\ \frac{T_s}{A} az_{12} S_n sgn\left(x_{1,k} - x_{2,k}\right)\sqrt{2g\left|x_{1,k} - x_{2,k}\right|} - az_{20} S_n \sqrt{2g x_{2,k}} \end{bmatrix},$$

$$g(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{T_s}{A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak edilir. Bu sistem için örnekleme zamanı $T_s = 1s$ seçilmiştir. Benzetim çalışmasında (4.6) ve (4.7) ile tanımlı durum denklemleri çözümünde 4. Mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Takip edilmesi istenen çıkış sıvı seviyesi 0.2m seçilmiştir. Buna göre sistem durum değişkenleri için denge noktası $\mathbf{x}_k^d = [0.362 \quad 0.2]^T$ olarak hesaplanmıştır.

Amaç fonksiyonu (3.16)' yı minimize edecek şekilde, bir karesel kontrol Lyapunov fonksiyonu $V(\mathbf{z}_k)$ (3.22) tanımlayarak elde edilen optimal kontrol kuralı (3.23)

$$u_k^* = -\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_\mathrm{k})\mathbf{P}\mathrm{g}(\mathbf{x}_\mathrm{k})\right)^{-1} \mathrm{g}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_\mathrm{k})\mathbf{P}(\mathrm{f}(\mathbf{x}_\mathrm{k}) - \mathbf{x}_{\boldsymbol{k+1}}^{\boldsymbol{d}})$$

şeklindedir. Burada sistem tek girişli olduğu için $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{1x1}$ olacağından R ile gösterilmiştir ve sabit R değeri ise 40000 alınmıştır [46]. Tanım 3.2 ii. koşulu sağlanması göz ardı edilerek, BP-BÇ algoritması [53] yardımıyla sistem çıkışının en küçük hata kareleri integraline (ISE'ye) göre sabit **P** matrisi

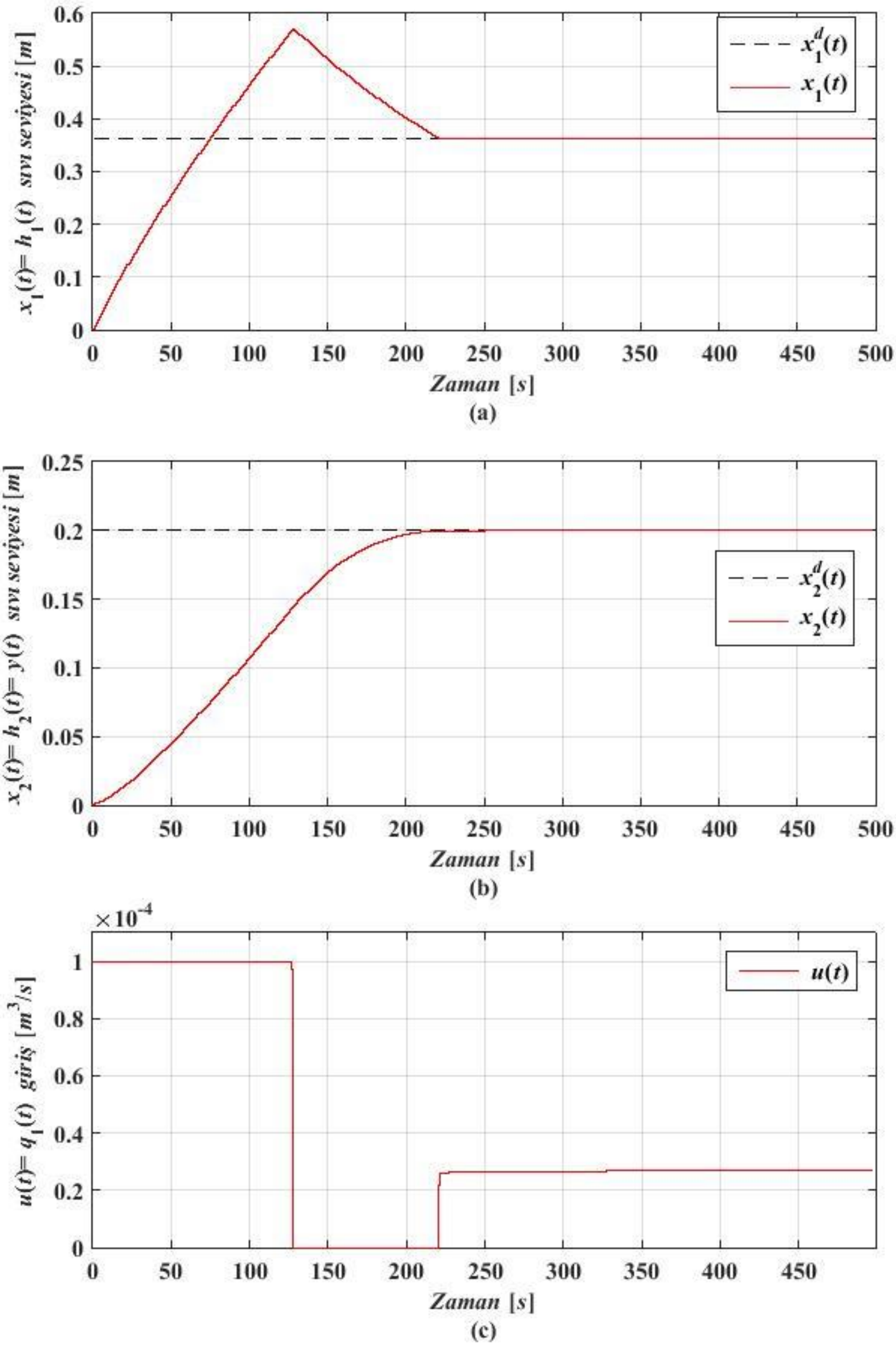
$$\mathbf{P}^{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 495.3258 & 1876.1522 \\ 1876.1522 & 8589.3882 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunmuştur. Bu değerle benzetim çalışması yapıldığında 223. adımda ve sonrasında optimal $u_{\boldsymbol{k}}^*$ değeri sıfıra gitmediği için $\mathbf{z}_{\boldsymbol{k}}$ değeri sıfıra yaklaştığında $\mathbf{V}(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k+1}}) - \mathbf{V}(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k}})$ değeri negatif olduğu halde $\mathbf{u}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}_{\boldsymbol{k}}$ değeri eklendiğinde Denklem (3.21) $\mathbf{V}(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k+1}}) - \mathbf{V}(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k}}) + \mathbf{u}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}_{\boldsymbol{k}} < \mathbf{0}$ eşitsizliği ile verilen (üstel asimptotik kararlılık) koşulu sağlanamaz. Elde edilen sonuçlar Şekil 4.6' da verilmiştir. Her adımda hata değeri küçülse ve sistem durum değişkenleri referans durumlarına pratikte yaklaşsa da 223. adımda ve sonrasında Denklem (3.21) eşitsizliği sağlanmadığı için gerçekte Tanım 3.2 ile verilen üstel kararlılık koşulu sağlanamamaktadır. Ayrıca minimum 500 adım yani 500s sonra $|\mathbf{z}_{\mathbf{500}}|$ değeri 10^{-5}'li değerlere düşebilmektedir.

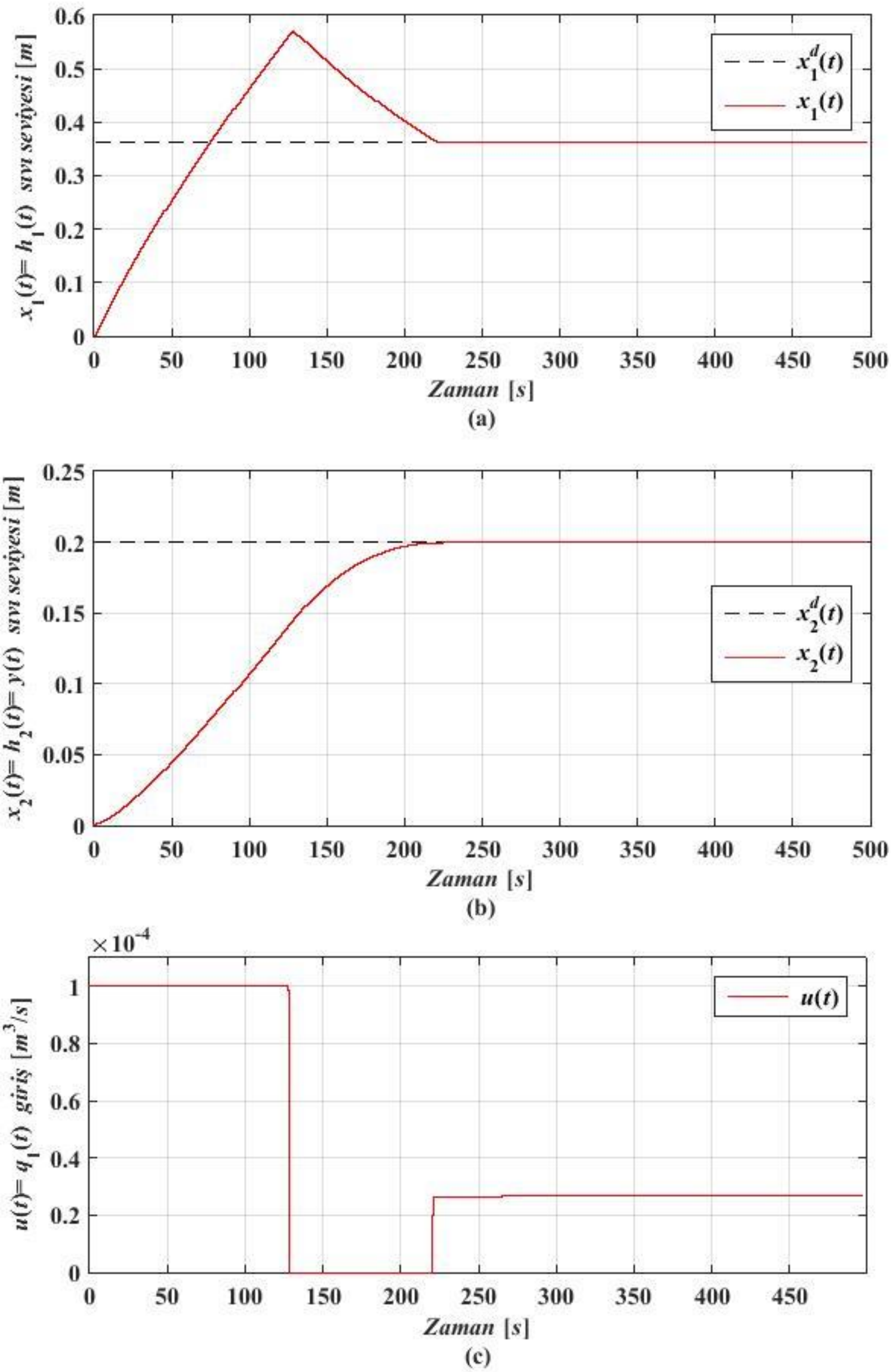
Ele alınan sistem tek girişli olduğu için $R_{i,j}(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k}})$ değerleri ile elde edilen $\mathbf{R}(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k}}) \in \mathbb{R}^{1x1}$

$$R(\mathbf{z}_k) = r^c \frac{1}{1 + e^{-r^s\left(|\mathbf{z}_k| - \frac{|\mathbf{z}_{\max}|}{2}\right)}} - r^c \frac{1}{1 + e^{-r^s\left(-\frac{|\mathbf{z}_{\max}|}{2}\right)}} \tag{4.10}$$

olarak belirlenmiştir. Daha sonra, Tanım 3.2 ii. koşulu sağlanacak şekilde bu $R(\mathbf{z}_k)$ fonksiyonunda $r^c = 400000$ ve $r^s = 150$ seçilmiş ve elde edilen sonuçlar Şekil 4.7 ile verilmiştir. Burada 500 adım yani 500s sonra hata $|\mathbf{z}_{500}|$ değeri 10^{-7} 'li değerlere düşmektedir.



Şekil 4.6 : $\mathbf{P}^1$ matrisi ve sabit R=40000 için sistem (4.6)'ya ilişkin sistem durum değişkenleri (a) $x_1(t) = h_1(t)$, (b) $x_2(t) = h_2(t) = y(t)$ ve kontrol işareti $u(t) = q_1(t)$.



Şekil 4.7 : $\mathbf{P^1}$ matrisi ve Denklem (4.10) $R(\mathbf{z}_{\boldsymbol{k}})$ fonksiyonunda $r^c = 400000$ ve $r^s = 150$ seçildiğinde sistem (4.6)'ya ilişkin sistem durum değişkenleri (a) $x_1(t) = h_1(t)$, (b) $x_2(t) = h_2(t) = y(t)$ ve kontrol işareti $u(t) = q_1(t)$.

Belirli bir adım sonra ulaşılan hatadaki iyileşmenin yanı sıra önerilen yaklaşımın kontrol başarımını ölçebilmek için aşağıdaki başarım ölçütleri kullanılabilir.

- En büyük aşım yüzdesi (%Aşım),
- Yerleşme zamanı (t_{yer}),
- Yükselme zamanı ($t_{\text{yük}}$),
- Hata kareleri integrali (*Integral of Squared Error*– "ISE"),
- Hata karelerinin zamanla çarpılmış integrali (*Integral Time Squared Error* – "ITSE"),
- Mutlak hata integrali (*Integral Absolute Error* -"IAE"),
- Mutlak hatanın zamanla çarpılmış integrali (*Integral Time Absolute Error*- "ITAE")
- Toplam kontrol girişi değişimleri gösteren toplam değişim (*Total Variation* – "TV")

Amaç fonksiyonu (3.16)'da

- sabit R=40000 kullanıldığı durum: "*Durum1*"
- $r^c = 400000$ ve $r^s = 150$ seçilerek $R(\mathbf{z}_k)$ kullanıldığı durum: "*Durum2***"**

ile belirtilerek yukarıda verilen başarım ölçütü değerleri Çizelge 4.3' de verilmiştir. Bu başarım ölçütleri değerlerine bakıldığında, kontrol başarımındaki iyileşmeler görülebilmektedir. Önerilen yaklaşımla hem kontrol başarımında iyileşme sağlanırken hem de tanım gereği verilen üstel karalılık koşulu sistem denklemlerinde değişiklik yapılmadan sağlanabilmektedir.

Çizelge 4.3 : $\mathbf{P}^1$ matrisi için başarım ölçütleri çizelgesi

Durum	%Aşım	t_{yer} $[s]$	$t_{\text{yük}}$ $[s]$	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TV
Durum1	0	204.370	135.454	2.648	118.229	19.049	1155.568	$1.2\text{x}10^{-4}$
Durum2	0	204.259	135.440	2.647	118.225	19.044	1154.082	$1.2\text{x}10^{-4}$

Yukarıda belirtildiği gibi amaç fonksiyonu (3.16)' da (4.11) $R(\mathbf{z}_k)$ kullanıldığında elde edilen bir diğer katkıda TOK probleminin daha geniş aralıkta çözülebilmesi yani uygun **P** bulunmasına esneklik sağlanmasıdır. Bunu gösterebilmek için sabit R değeri için uygun **P** matrisi bulmak yerine (4.11) $R(\mathbf{z_k})$ fonksiyonunda $r^c = 400000$ ve $r^s = 50$ seçilerek ISE değerini en az yapacak şekilde BP-BÇ algoritması kullanarak yeniden bir **P** matrisi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\mathbf{P^2} = \begin{bmatrix} 2444.4739 & 10865.5046 \\ 10865.5046 & 69253.8194 \end{bmatrix}$$

Belirlenen bu $\mathbf{P^2}$ değeri ile amaç fonksiyonu (3.16)'da $R(\mathbf{z_k})$ fonksiyonu yerine sabit *R*=40000 kullanıldığında aşağıdaki iki sorunla karşılaşılmaktadır:

- Belirli bir adımdan sonra (*331. Adımdan sonra*) $\mathbf{z}_k$ değeri küçüldükçe Tanım 3.2 ii. koşulu sağlanamamaktadır.
- İşleme devam edildiğinde daha küçük $\mathbf{z}_k$ değerlerinde ise $\mathrm{V}(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathrm{V}(\mathbf{z}_k) > 0$ olmakta yani Kontrol Lyapunov kararlılık koşulu ($\mathrm{V}(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathrm{V}(\mathbf{z}_k) < 0$) da sağlanamamaktadır.

Bu sorunlardan anlaşılacağı gibi sistem referans işaretine yaklaşsa da belirli bir hata değerinden sonra, $R(\mathbf{z_k})$ fonksiyonunda $r^c = 400000$ ve $r^s = 50$ seçilerek sağlanabilen kararlılık koşulları *R*=40000 seçildiğine sağlanamamaktadır. Tanım gereği verilen kararlılık koşulunun ve/veya Kontrol Lyapunov kararlılık koşulunun sağlanamaması kontrol sistemlerde istenilmeyen bir durumdur.

Önerilen yaklaşım kontrol sistemi başarımında ISE değerinde biraz artış olmasına göz yumulur ve (4.5) $R(\mathbf{z_k})$' da $r^c = 300000000$ ve $r^s = 50$ seçilirse bazı başarım ölçütlerinde kayda değer bir iyileşme sağlanabilir. Bu yeni parametrelerle elde edilen sonuçları, sabit *R*=40000 ve $R(\mathbf{z_k})$ fonksiyonunda $r^c = 400000$ ve $r^s = 50$ seçildiğinde elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak için Şekil 4.3 ve Çizelge 4.3 verilmiştir. Bu şekilde ve çizelgede

- Sabit *R*=40000 kullanıldığı durum "*Durum1*" ve sistem durum değişkenleri için $[x_1^{sR}(t), x_2^{sR}(t)]$, kontrol girişi için $u^{sR}(t)$;
- $r^c = 400000$ ve $r^s = 50$ seçilerek $R(\mathbf{z}_k)$ fonksiyonu kullanıldığı durum "*Durum2*" ve sistem durum değişkenleri "$[x_1^{fR1}(t), x_2^{fR1}(t)]$", kontrol girişi "$u^{fR1}(t)$"
- $r^c = 300000000$ ve $r^s = 50$ seçilerek $R(\mathbf{z}_k)$ fonksiyonu kullanıldığı durum "*Durum3*" ve sistem durum değişkenleri $[x_1^{fR2}(t), x_2^{fR2}(t)]$, kontrol girişi $u^{fR2}(t)$

ile belirtilmiştir. Sistem durum değişkenlerinin ve kontrol işaretlerinin verildiği Şekil 4.8'deki aynı zamanda sistem çıkışlarını temsil eden Şekil 4.8 (b)'ye bakıldığında, *Durum3*'de yerleşme zamanının ve aşımın diğer iki duruma göre oldukça azaldığı görülebilmektedir. Daha detaylı inceleme yapabilmek için Çizelge 4.4' deki değerlere bakılabilir. Sonuçlardan da görüldüğü gibi *Durum3*'de yükselme zamanı ($t_{\text{yük}}$), ISE ve ITSE değerlerinde biraz artmış olmasına rağmen, diğer başarım ölçütlerindeki iyileşme görülebilmektedir. Özellikle t_{yer} ve %Aşım değerlerinde kayda değer azalma sağlanmıştır.

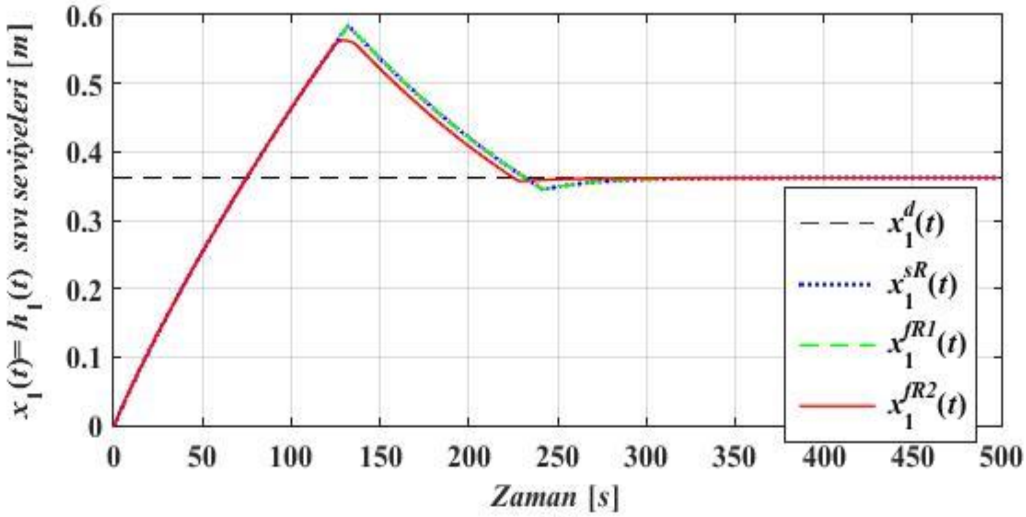
Çizelge 4.4 : $\mathbf{P^2}$ matrisi için başarım ölçütleri tablosu.

Durum	%Aşım	$t_{\text{yer}}\ [s]$	$t_{\text{yük}}\ [s]$	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TV
Durum1	2.483	261.180	132.545	2.644	117.773	19.129	1185.981	$1.4x10^{-4}$
Durum2	2.472	261.022	132.554	2.644	117.773	19.128	1185.847	$1.4x10^{-4}$
Durum3	0.612	198.019	134.596	2.646	118.053	19.014	1150.128	$1.3x10^{-4}$

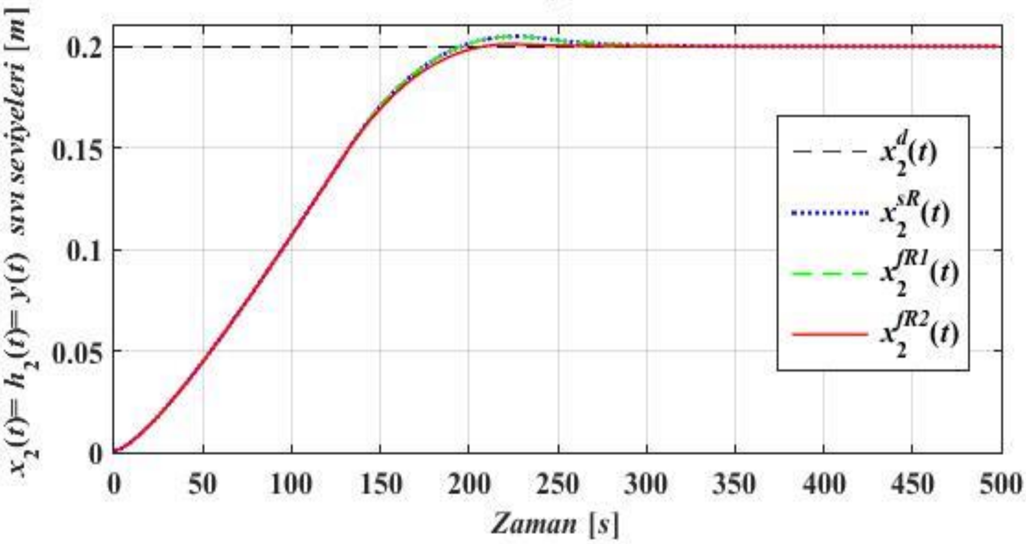
Burada TOK'de sabit $\mathbf{P^2}$ ve amaç fonsiyonu (1.2)'de farklı sabit R değerleri kullanılarak kontrol başarımında iyileşme sağlanıp sağlanamayacağı araştırılmak istenebilir. Bu araştırmalarda ilk olarak %Aşım değeri *Durum3*'teki gibi azaltılmak istenildiğinde $(R = 6x10^7\ gibi)$ çok büyük R değerlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu büyük değerlerde ise

- Tanım 3.2 ii. koşul yukarıda bahsedildiği gibi sağlanamamakta,
- %Aşım *Durum3*' teki kadar azaltılmak istediğinde ise sistem çıkışı referans noktasına ulaşamamakta yani sürekli hal hatası oluşmaktadır.

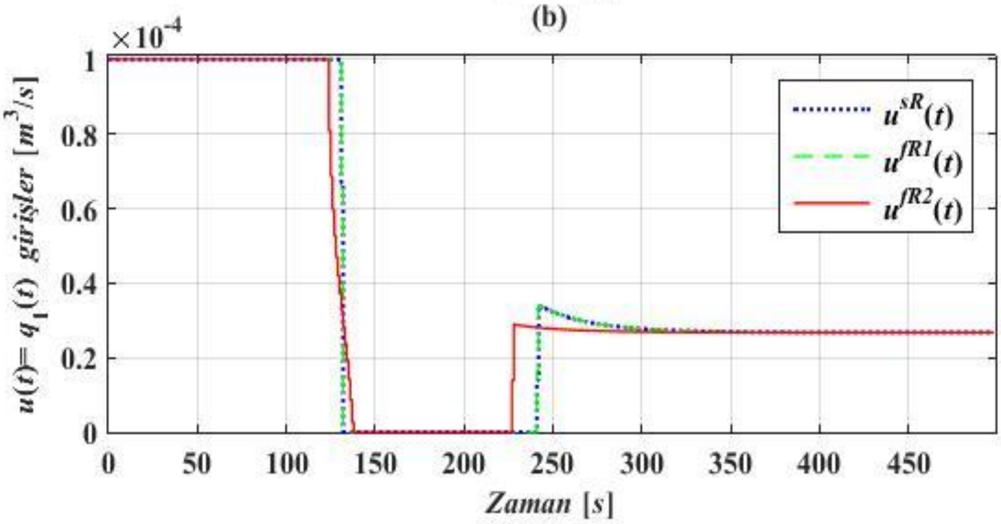
Diğer bir araştırma ise sabit R değeri ile ii. koşulun sağlanamama probleminin çözülüp çözülememesi olabilir. Belirli süre (örneğin 500 saniye) boyunca ii. koşulun sağlanması için ($R \leq 0.5$ gibi) küçük R değerleri seçilebilir. Bu durumda belirli bir süre boyunca ii. koşul sağlanır ama yukarıdaki başarım ölçütlerine göre %Aşım, $t_{\text{yük}}$, ISE, IAE, ITAE ve TV değerleri artmakta yani kontrol başarımı düşmektedir. Diğer bir deyişle kontrol başarımına bir katkısı olmamaktadır.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.8 : *Durum1*, *Durum2* ve *Durum3* için sistem (4.6)'ya ilişkin sistem durum değişkenleri (a) $x_1(t) = h_1(t)$, (b) $x_2(t) = h_2(t) = y(t)$ ve kontrol işareti $u(t) = q_1(t)$.

Kontrol sistemlerinde karşılaşılabilecek bir problemde sistem çıkışında oluşabilecek bozucu etkisidir. *Durum1, Durum2* ve *Durum3*' de TOK'nin bozucu etkisine karşı davranışını görebilmek için sistem çıkışına ($y(t)$ yani $x_2(t)$'ye) 230. saniyede 0.02m'lik birim bozucu etkisi eklenmiştir. *Durum1, Durum2* ve *Durum3* için sonuçlar Şekil 4.9'da verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi *Durum3*'te sistem durum değişkenleri *Durum1* ve *Durum2'*deki durum değişkenlerine göre daha hızlı referans değerine ulaşmıştır. Burada *Durum3*'teki ulaşma hızının daha yüksek olmasının en önemli sebeplerinden biri diğer iki duruma göre daha az aşım yapmasıdır.

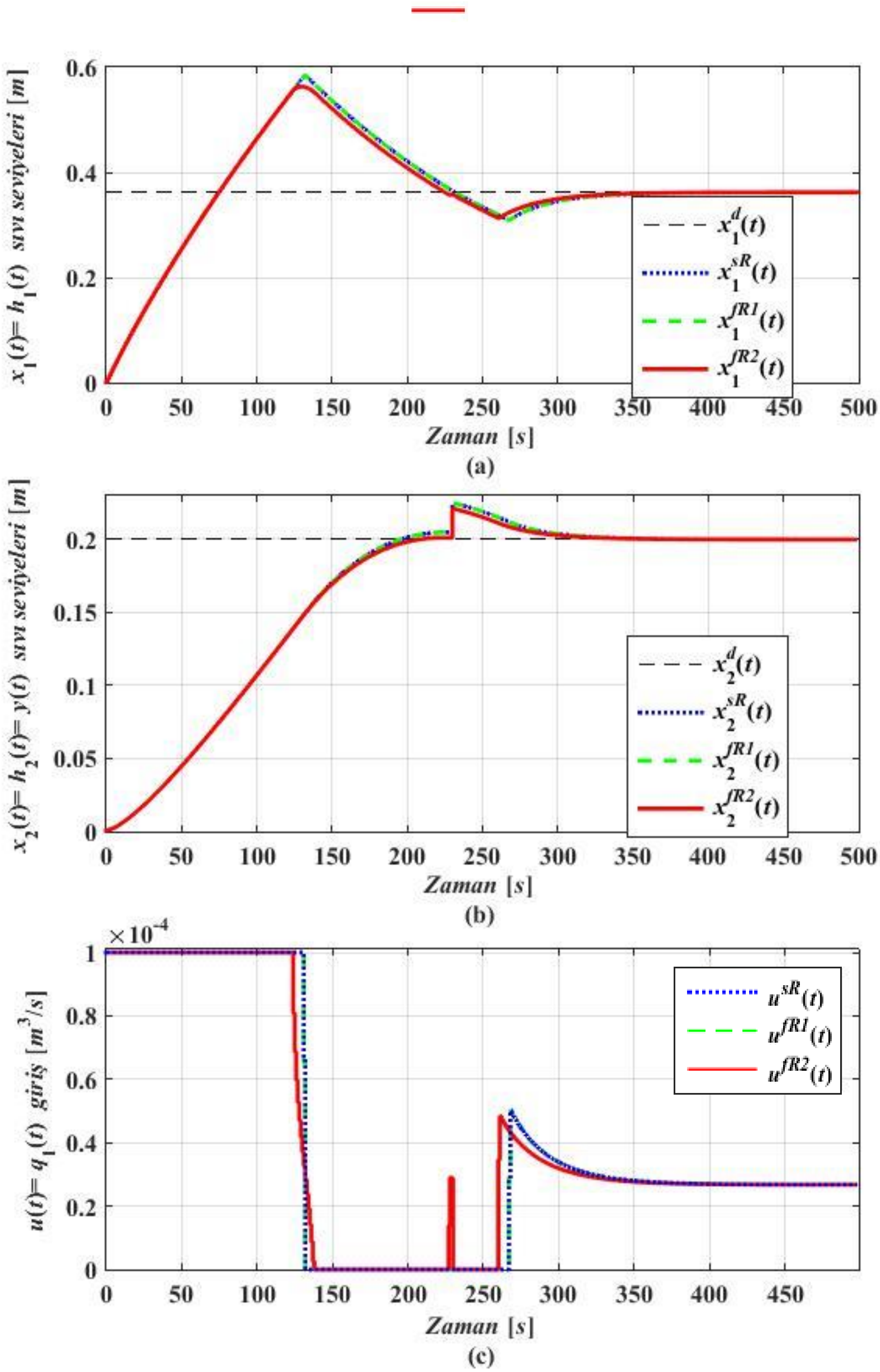
Burada benzetim çalışmalarına devam edildiğinde şekilde çok fazla fark edilemeyeceği için sistem durum değişkenleri ve kontrol işaretleri 500s'ye kadar çizdirilmiştir. Örneğin yukarıda belirtilen başarım ölçütlerine ek olarak ulaşılabilecek minimum hata değerini (ε) görebilmek için benzetim işlemine 700s' ye kadar devam edilebilir. Bu durumda elde edilen sonuçlar belirli *k* değerleri için aşağıda verilmiştir.

- k=500 için $|\mathbf{z}_{500}|$ değeri üç durum içinde 10^{-5}'li değerlerdedir.
- k=600 için $|\mathbf{z}_{600}|$ değeri *Durum1*'de 10^{-6}'lı, *Durum2*'de ve *Durum3*'de 10^{-7}'li değerlere düşmüştür.
- k=700 için $|\mathbf{z}_{700}|$ değeri *Durum1*'de yine 10^{-6}'lı değerlerde kalırken, *Durum2* ve *Durum3*' te 10^{-9}'lu değerlerdedir.

Bu bölümde dinamik denklemleri (4.6) ve (4.7) ile verilen sistemde takip problemi için elde edilen sonuçlar değerlendirildiğinde TOK'de sabit *R* değeri yerine önerilen durum değişkenlerine bağlı $R(\mathbf{z}_k)$ fonksiyonu ile

- Bazı başarım ölçütlerine göre kontrol başarımının arttırılabileceği.
- Özellikle hata değeri azaldıkça $u(t)$ sıfıra gitmediğinde sağlanmayan Tanım 3.2 ii. koşulu veya bazı durumlarda sağlanamayan Kontrol Lyapunov kararlılık koşulunun ($\mathrm{V}(\mathbf{z}_{k+1}) - \mathrm{V}(\mathbf{z}_k) < 0$) sağlanabileceği
- Problem çözümü olan uygun Kontrol Lyapunov Fonksiyonu (3.22) yani **P** matrisinin bulunmasında esneklik sağlayabileceği

görülmüştür.



Şekil 4.9 : Bozucu eklendiğinde *Durum1*, *Durum2* ve *Durum3* için sistem (4.6)'ya ilişkin durum değişkenleri (a) $x_1(t) = h_1(t)$, (b) $x_2(t) = h_2(t) = y(t)$ ve kontrol işareti $u(t) = q_1(t)$.

5. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLER İÇİN MODEL ÖNGÖRÜLÜ KONTROL İLE TERS OPTİMAL KONTROL YÖNTEMLERİNİN BİRLEŞTİRİLMESİ

Doğrusallaştırılmış sistem modelleri, üst seviyede doğrusal olmayan sistemleri ve/veya tüm çalışma bölgesini gerektiren koşulları temsil etmekte başarısız olduğunda DOMÖK tekniklerinin kullanılması gerekir.

Bu bölümde, ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için MÖK ve TOK yaklaşımları birbiri ile birleştirilerek, bu sistem modellerine uygun bir kontrol stratejisi oluşturulmuştur. Bu bağlamda, TOK problemi her kayan ufuk ve yeni başlangıç koşulu için tekrar tekrar çözülür. Sistem modeli, sistemin gelecekteki davranışının tahminini elde etmek için kullanılır. Daha sonra, TOK prosedüründen elde edilen kontrol işareti, önceden belirlenmiş bir kontrol ufku için sisteme uygulanır. TOK'nin çözüm aşamasında, aday kontrol Lyapunov fonksiyon matrisinin parametreleri, global (evrimsel) Büyük-Patlama Büyük-Çöküş (BP-BÇ) optimizasyon algoritması [53] kullanılarak çevrim içi (online) olarak kestirilmektedir.

Önerilen kontrol yapısının faydalarını iki farklı açıdan aşağıdaki gibi açıklayabiliriz:

- Önerilen kontrol yapısı, TOK yaklaşımını kullanarak MÖK'deki optimal kontrol problemini çözer ve optimal kontrol problemini her kontrol ufku için uygun bir KLF matrisi aramaya indirger.
- MÖK yapısı TOK problemine dahil edilir. Her adımda farklı başlangıç koşullarını kullanarak TOK problemini tekrar tekrar çözerek, TOK için çevrim içi bir düzeltme mekanizması elde edilir.

Önerilen TOK ve MÖK yaklaşımlarının birleştirilerek elde edilen Ters Optimal Model Öngörülü Kontrol (TOMÖK) yapısı için matematiksel temeller Bölüm 5.1'de verilmiştir.

5.1 Matematiksel Temelleri

Gerçek hayatta ve literatürde karşılaşılan doğrusal olmayan sistemlerin ve sistem modellerinin çoğu, bazı indirgeme yöntemleri ile girişte-afin biçimine dönüştürülebilir. Ayrık-zamanlı doğrusal olmayan sistem denklemi (2.2), girişte-afin biçiminde (3.1) ile ifade edilebiliyorsa, *kp* öngörü adımını içeren sistem denklemleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) + g(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} \\ \hat{\mathbf{y}}_{k+kp|k} &= h(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Bu gösterimde, *kp*. öngörü adımları için, $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}$ sistem durum değişkenleri öngörüsünü, $\hat{\mathbf{y}}_{k+kp|k}$ çıkış öngörüsünü, $\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}$ bir amaç fonksiyonunu optimze etmesi amaçlanan aday kontrol girişini ifade eder ve *kp*=0 için $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} = \mathbf{x}_k$ alınır. Sistem modelini belirledikten sonra sisteme uygulanacak optimal kontrol işaretini belirmek için her adımda optimize edilmek istenen uygun amaç fonksiyonu belirlenmelidir. Bölüm 3.1'de anlatılan TOK yaklaşımını MÖK problemine uyarlayabilmek için en genel haliyle verilmiş amaç fonksiyonu (2.3) öngörü ufku K_x için

$$J(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}) = \sum_{n=k+kp|k}^{k+K_x|k} (\ell(\hat{\mathbf{x}}_n) + \hat{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}_n) \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\ell: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ pozitif yarı-tanımlı fonksiyon, "$\hat{\mathbf{x}}_n$" 'ler karşılık gelen öngörü ufkundaki durum değişkenleri ve $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{mxm}$ simetrik pozitif tanımlı ağırlık matrisidir.

Öngörü ufku K_x boyunca (5.2) amaç fonksiyonunu minimize eden kontrol kuralı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}^* = \bar{u}(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1} g^T(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) \frac{\partial J^*(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k})}{\partial \mathbf{x}_{k+kp+1|k}} \tag{5.3}$$

Burada Tanım 3.1, sınırlı öngörü ufku (pencere) ve denklem (5.2)'de verilen amaç fonksiyonunu minimize eden kontrol kuralını belirlemek için aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

• Tanım 5.1:

Denklem (5.3)'te verilen kontrol kuralı $\hat{\mathbf{u}}^{*}_{k+kp|k}$

i. Sistem (5.1)'i global üstel kararlı denge noktası $\mathbf{x}_k = 0$' a ulaştırma

ii. Amaç fonksiyonu (5.2)'de $\ell(\mathbf{x}_k) = -\bar{J}|_{\mathbf{u}^*_k}$ ve $J^*(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})$ aşağıda tanım yapılan eşitsizliği sağlayan pozitif tanımlı bir fonksiyon olacak şekilde

$$\bar{J} := J(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k}) - J(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) + \hat{\mathbf{u}}^{*T}_{k+kp|k}\mathbf{R}\hat{\mathbf{u}}^{*}_{k+kp|k} \leq 0$$

Amaç Fonksiyonu (5.2)' yi minimize etme

koşulları sağlanarak kararlı ters optimal kontrol kuralı olarak tanımlanabilir. Burada her k adımında ters optimal kontrol problemi çözümü için $J^*(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})$ bilgisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yaklaşımda öngörü ufku K_x boyunca Tanım 5.1' de verilen koşulları sağlayacak bir aday karesel Kontrol Lyapunov Fonksiyonu (5.4) her adımda aranabilir.

$$J^*(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{x}}^{T}_{k+kp|k}\mathbf{P}_k\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} \tag{5.4}$$

Böylece her adımda elde edilen TOK probleminin çözümü her adımda uygun $\mathbf{P}_k$ matrisi bulmaya dönüştürülebilir**.**

Burada, öngörü ufku boyunca amaç fonksiyonu (5.2)' yi minimize eden TOK kuralı (5.3) uygun $\mathbf{P}_k$ matrisi seçimi ile

$$\hat{\mathbf{u}}^{*}_{k+kp|k} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{R} + g^T(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})\mathbf{P}_k g(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})\right)^{-1} g^T(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k})\mathbf{P}_k f(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}) \tag{5.5}$$

olarak hesaplanabilir. MÖK yapısında (2.3)' te verilen koşulları sağlayacak şekilde de bu $\mathbf{P}_k$ matrisi seçilebilir. Daha sonra kontrol ufku K_u boyunca bulunan $\hat{\mathbf{u}}^* = [\hat{\mathbf{u}}^*_{k|k}, \cdots, \hat{\mathbf{u}}^*_{k+K_u|k}]$'nın ilk kontrol girişi $\hat{\mathbf{u}}^*_{k|k}$, kontrol edilmek istenen sistem (3.1)'e uygulanır ve amaç fonksiyonu (5.2) öngörü penceresi ile yeniden tanımlanır. Yukarıda belirtildiği gibi $K_u \leq K_x$ seçilebilir. Burada her adımda öngörü ufku K_x boyunca TOK kuralının sağlanması için $K_u = K_x$ alınmıştır.

Kontrol yasası $\hat{\mathbf{u}}^*_{k+kp|k}$' ı veren uygun $\mathbf{P}_k$ matrisi, Tanım 5.2' de verilen koşulları ve (2.3) 'teki kısıtlamaları sağlayacak şekilde seçildiği için aşağıdaki koşullar da sağlanır.

K1: $\mathcal{X}_f$' de durum kısıtları sağlanır, $kp = 1, 2, \cdots, K_x$ için $\mathbf{x}_{min} < \hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} < \mathbf{x}_{max}$' dir, yani, $\mathcal{X}_f \subset \mathbb{X}$, $\mathcal{X}_f$ kapalıdır.

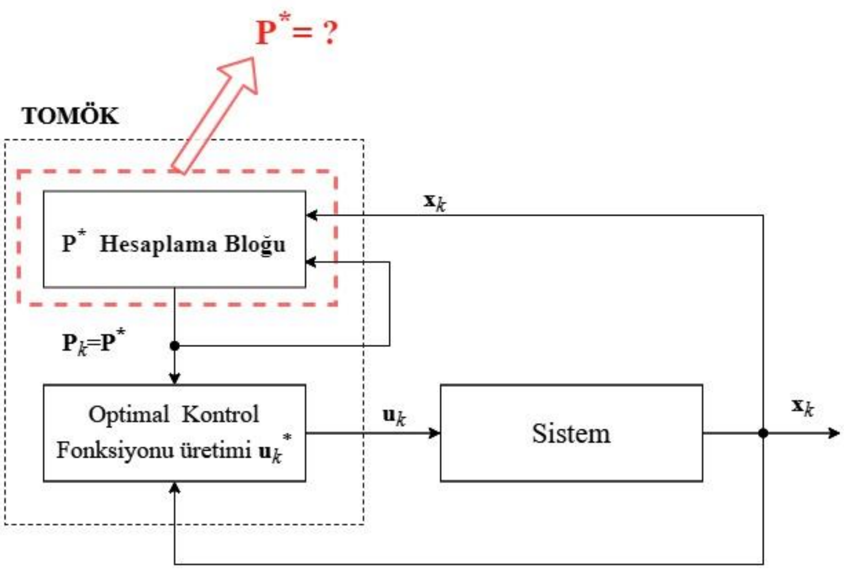
K2: $\mathcal{X}_f$' de $kp = 1, 2, \cdots, K_x - 1$ için kontrol kısıtları $\mathbf{u}_{min} < \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} < \mathbf{u}_{max}$ sağlanır; yani $\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} \in \mathbb{U}$, $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_f$.

K3: $\mathcal{X}_f$, $\hat{\mathbf{u}}'_{k+K_x-1|k}$' ya bağlı olarak pozitif değişmezdir; yani $\forall \hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k} \in \mathcal{X}_f$.

K4: $J(\cdot)$, her tahmin ufku için tanımlanan yerel bir Kontrol Lyapunov Fonksiyonudur, bu nedenle $\mathcal{J}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k|k}) \leq 0$, $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_f$.

Burada $\mathcal{J}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k|k}) = J(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k|k}) - J(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k}, \hat{\mathbf{u}}_{k-1|k})$ ve $\mathcal{X}_f$ varış kısıt kümesidir.

Bu özellikler, kısıtlı MÖK için asimptotik kararlılığı garanti eden [19]'da verilen varsayımlarla örtüşmektedir. Bu nedenle, kapalı-çevrim asimptotik (üstel) kararlılık garanti edilir. Böylece uygun $\mathbf{u}^*_k = \hat{\mathbf{u}}^*_{k|k}$ elde etmek için her adımda çözülmesi gereken MÖK optimizasyon problemi, şekil 5.1'de verilen blok diyagramda görüldüğü gibi uygun $\mathbf{P}_k$ matrisi ($\mathbf{P}^*$) belirleme problemine dönüştürülmüştür. Bu problemi çözmek için Bölüm 5.2'de anlatıldığı gibi gerekli uyarlamalar yapılarak BP-BÇ algoritması kullanılmıştır.



Şekil 5.1 : Önerilen TOMÖK yaklaşımı yapısında uygun $\mathbf{P}_k$ matrisi belirleme problemi.

5.2 Ters Optimal Model Öngörülü Kontrole BP-BÇ Optimizasyon Algoritmasının Uyarlanması

TOMÖK yaklaşımında her bir adımda yinelenen optimizasyon problemi çözümü uygun $\mathbf{P}_k$ matrisi bulmakla ilgili olduğundan, bu matrisi doğru bir şekilde kestirebilmek oldukça önemlidir. Bu kestirim işlemi için BP-BÇ algoritması kullanılabilir. BP-BÇ, çok etkili bir global arama algoritmasıdır. Benzerleriyle karşılaştırıldığında daha hızlıdır ve tasarımcı tarafından daha az parametreye ihtiyaç duyar. BP-BÇ özellikle erken aşamada çok hızlı olduğu için TOMÖK problemi çözümünde her sonlu öngörü ufkunda uygun $\mathbf{P}_k$ matrisini tanımlamak için kullanılmıştır. BP-BÇ optimizasyon algoritmasının genel prosedürü şu şekilde verilmiştir:

Adım 1 *(Büyük Patlama Fazı)* İlk nesil N aday, arama uzayında rastgele üretilir.

Adım 2 Tüm aday çözümlerin uygunluk (*fitness*) fonksiyonu f^i amaç fonksiyonu değerleri hesaplanır.

Adım 3 *(Büyük Çöküş Fazı)* Ya en uygun birey ya da kütle merkezi bir sonraki Büyük Patlama Fazı için en önemli çatırdama-kırılma (crunching point) noktası (m_c) olarak seçilir.

Adım 4 Daha sonra yeni adaylar, yinelemeler geçtikçe değeri azalan rastgele bir sayının eklenmesi veya çıkarılmasıyla Adım 3'te olduğu gibi yeni en önemli (çatırdama-kırılma) noktası (m_c) etrafında hesaplanır.

Adım 5 Durdurma ölçütü sağlanmamışsa Adım 2'ye geri dönülür.

BP-BÇ algoritmasının saf biçiminde "elitist tohum" yoktur. Burada çözülmek istenen her adımda tekrarlanan TOMÖK problemine daha uygun olacağı için, BP-BÇ algoritmasının ilk adımı her pencerede, önceki pencerede elde edilen optimal çekirdek değeri kullanılacak şekilde aşağıdaki gibi değiştirilmiştir:

> "Adım 1: $k \leq 1$ için, arama algoritması rastgele oluşturulan N aday $\mathbf{P}_a$ matrisleri ile başlar. $k > 1$ için, aday $\mathbf{P}_a$ matrislerinden biri $\mathbf{P}_{k-1}$ olarak alınır ve diğerleri (yani N-1 aday) yine rastgele oluşturulur. "

Ayrıca, BP-BÇ algoritmasındaki çatırdama-kırılma noktası (m_c), aşağıdaki gibi tanımlanan uygunluk fonksiyonu f^i'nin (amaç fonksiyonunun) minimum değeri olan aday $\mathbf{P}_a$ matrisi ile elde edilir:

- Aday $\mathbf{P}_a$ matrisi pozitif tanımlı değilse, f^i uygunluk fonksiyonuna önceden belirlenmiş bir maksimum değer F_{max} (devam eden durum için yeterince çok yüksek bir gerçek sayı) atanır.
- Tanım 5.1'de verilen koşullar $kp \leq K_u$ için sağlanmazsa, f^i uygunluk fonksiyonu F_{max}' a eşit olur**.**
- Her bir adımdaki sistem öngörü durumları $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}$ değerleri $[\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}]$ aralığında değilse f^i uygunluk fonksiyonu F_{max}' a eşit olur**.**
- Diğer durumda (Aday $\mathbf{P}_a$ matrisi pozitif tanımlı, Tanım 5.1'de verilen koşullar $kp \leq K_u$ için sağlanıyor ve $\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}$ değerleri $[\mathbf{x}_{min}, \mathbf{x}_{max}]$ aralığında ise) f^i uygunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f^i = f_a(\mathbf{P}_a) = \sum_{kp=0}^{K_x-1} \left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k}\right)^T \mathbf{Q}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k}\right) \tag{5.6}$$

burada $\mathbf{Q}$ köşegen ağırlık matrisidir ve

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+kp+1|k} = f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right) + g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right)\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}$$

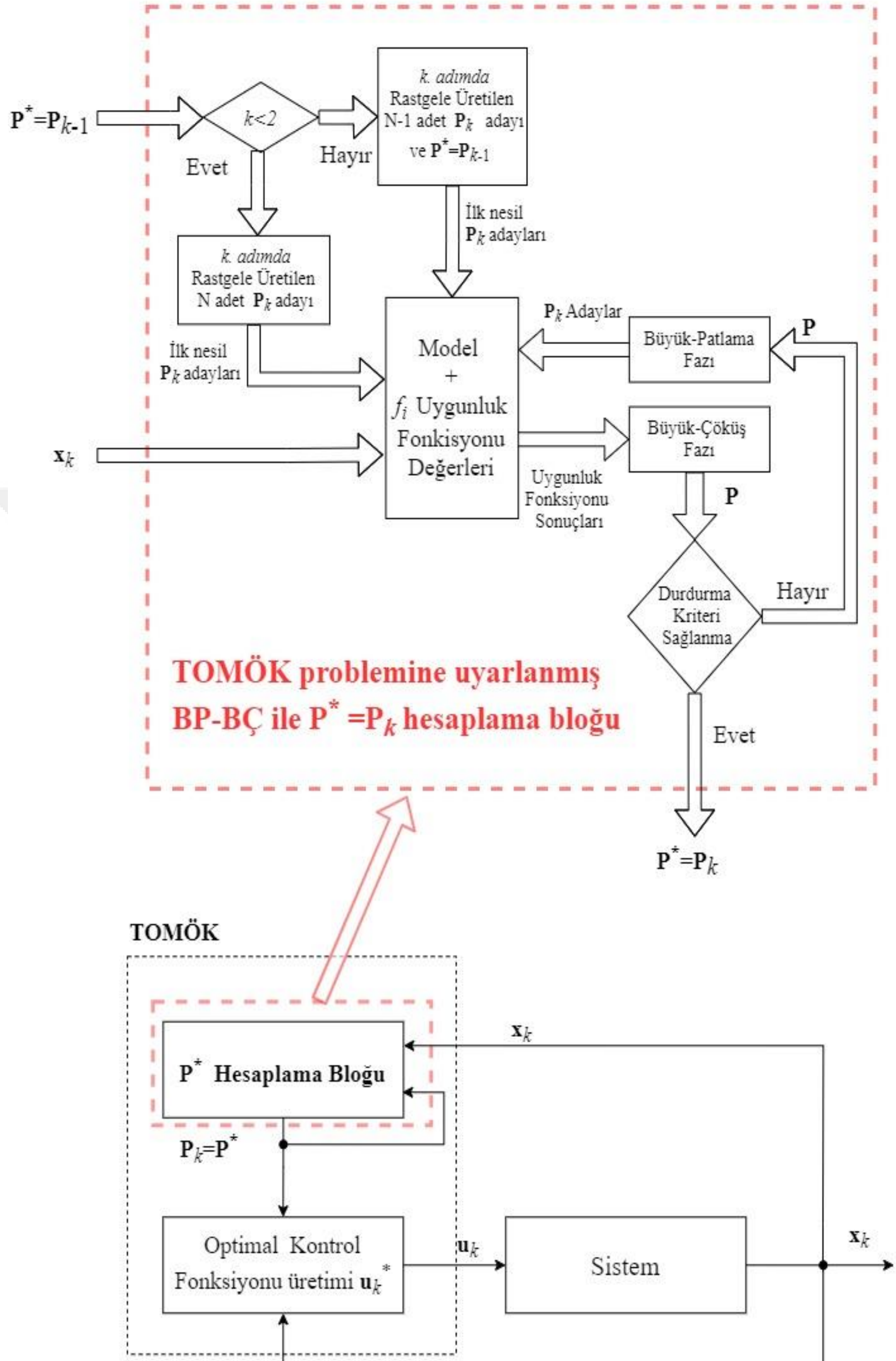
$$\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} = \begin{cases} sat\left(\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}\right) & kp \leq K_u \\ \hat{\mathbf{u}}_{k+kp-1|k} & K_u \leq kp \leq K_x \end{cases}$$

$$sat\left(\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k}\right) = \begin{cases} \mathbf{u}_{max} & \mathbf{u}_{max} \leq \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} \\ \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} & \mathbf{u}_{min} < \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} < \mathbf{u}_{max} \\ \mathbf{u}_{min} & \hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} \leq \mathbf{u}_{min} \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{k+kp|k} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{R} + g^T\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right)\mathbf{P}_a g\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right)\right)^{-1} g^T\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right)\mathbf{P}_a f\left(\hat{\mathbf{x}}_{k+kp|k}\right)$$

şeklindedir. Durdurma kriteri, "ulaşılan minimum değerin, önceden belirlenmiş bir tolerans değerinden düşük olması" veya "önceden belirlenmiş bir maksimum yineleme sayısına ulaşılması" olarak belirlenmiştir.

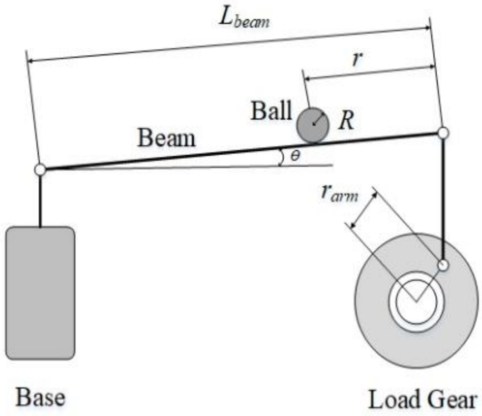
Arama algoritması da tanımlandıktan sonra önerilen kontrol yaklaşımının yapısı Şekil 5.2' de verilmiştir. Önerilen kontrol yapısının başarımını ölçmek için yapılan benzetim çalışmaları ve kontrol başarım ölçütlerine göre değerlendirilmesi Bölüm 5.3'te yapılmış, gerçek zamanlı uygulaması ve önerilen yaklaşımın kontrol başarımının değerlendirmesi ise Bölüm 6'da verilmiştir.



Şekil 5.2 : Önerilen TOMÖK yaklaşımın yapısı.

5.3 Benzetim Çalışması

Benzetim çalışmaları yapılırken Şekil 5.3’ te gösterilen Quanser firmasının top ve çubuk kontrol sisteminin matematiksel modeli kullanılmıştır [102].



Şekil 5.3 : (a)Quanser top ve çubuk kontrol sistemi [103] (b) Top ve çubuk sisteminin şematik yapısı [102].

Gösterimi Şekil 5.3’ te verilen sistemin doğrusal olmayan sürekli-zamanlı matematiksel modeli aşağıdaki gibi alınabilir [102]:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x_1}(t) = x_2(t) \\
&\dot{x_2}(t) = K_{bb}\sin\big(x_3(t)\big) - Hx_1(t)\big(x_4(t)\big)^{\mathbf{2}} \\
&\dot{x_3}(t) = x_4(t) \\
&\dot{x_4}(t) = -\frac{1}{T}x_4(t) + \frac{K_1}{T}V_m \\
&y(t) = x_1(t)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

burada

$$
\begin{aligned}
K_{bb} &= \frac{mr_{arm}gR_b^2}{L_{beam}(mR_b^2 + J_b)}, H = \frac{m}{(m + J_b/R_b^2)} \\
\mathbf{x}(t) &= [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t) \quad x_4(t)]^T = [r \quad \dot{r} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Bu matematiksel modelle ilgili parametrelerin tanımları ve değerleri Çizelge 5.1’ de verilmiştir. Giriş ve çıkış değişkenleri ise sırasıyla $u(t) = V_m$ ve $y(t) = x_1(t)$ olarak tanımlanmıştır.

Denklem (5.7) ile verilen sistemin ayrık-zamanlı durum uzayı gösterimi Euler yaklaşımı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$
\begin{aligned}
x_{1,k+1} &= x_{1,k} + T_s x_{2,k} \\
x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T_s \left(K_{bb} \sin(x_{3,k}) - H x_{1,k} (x_{4,k})^{\mathbf{2}} \right) \\
x_{3,k+1} &= x_{3,k} + T_s x_{4,k} \\
x_{4,k+1} &= x_{4,k} + T_s \left(-\frac{1}{T} x_{4,k} + \frac{K_1}{T} V_m \right) \\
y_k &= x_{1,k}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Çizelge 5.1 : Top ve çubuk kontrol sistemi parametreleri.

Parametreler	Değerler/Tanımlar
θ : Çubuk açısı	(rad)
r : Topun konumu (pozisyonu)	Çıkış (cm)
V_m : Sisteme uygulanan DC motor gerilimi	Giriş (V)
K_1 : Sürekli hal (steady-state) kazancı	1.53 rad /(sV)
T : Zaman-sabiti	0.0248s
L_{beam} : Çubuk uzunluğu	42.55 (cm)
m : Topun kütlesi	0.064 kg
J_b: Topun eylemsizlik (atalet) momenti	4.1290x10^{-2} kg.cm^2
R_b: Topun yarıçapı	1.27cm
r_{arm} : Dönme mili ile motor dişlisi arasındaki mesafe	2.54cm
g : Yer çekimi ivmesi	981cm/s^2

Denklem (5.9)'da verilen sistem modelini girişte-afin biçiminde (3.1) ifade etmek istediğimizde aşağıda verilen fonksiyonları elde ederiz.

$$
f(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_{1,k} + T_s x_{2,k} \\ x_{2,k} + T_s \left(K_{bb} \sin(x_{3,k}) - H x_{1,k} (x_{4,k})^{\mathbf{2}} \right) \\ x_{3,k} + T_s x_{4,k} \\ x_{4,k} + T_s \left(-\frac{1}{T} x_{4,k} \right) \end{bmatrix}; \ g(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_s \left(\frac{K_1}{T} \right) \end{bmatrix}
$$

Burada $\mathbf{x}_k = [x_{1,k} \quad x_{2,k} \quad x_{3,k} \quad x_{4,k}]^T$, $u_k = V_m$ şeklindedir ve örnekleme periyodu $T_s = 0.01s$ alınmıştır. Top ve çubuk sisteminin başlangıç durum vektörü ve ulaşılması istenen denge noktası (son durumu) sırasıyla

$$\mathbf{x}_0 = [-19.50 \quad 0 \quad -0.9774 \quad 0]^T$$
$$\mathbf{x}_f = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

seçilmiştir.

Önerilen yaklaşımın başarımını ölçmek için karşılaştırılan kontrol yapıları aşağıda sıralanmıştır:

- Klasik model öngörülü kontrol (KMÖK) [7]
- Optimal doğrusal lineer karesel regülatör (LKR) [104],
- Sabit **P** matrisi kullanılan TOK yaklaşımı (TOK) [2]
- Runge-Kutta model tabanlı model öngörülü kontrol (RKMÖK) [8].

Burada RKMÖK Bölüm 2.2' de anlatıldığı gibi doğrusal olmayan sistemler için tasarlanmış temelde doğrusal olmayan model öngörülü kontrol yöntemidir. Bölüm 2.1'de anlatıldığı gibi KMÖK [7] ise doğrusal sistem modeli kullanan MÖK yöntemidir ve kullanılan optimizasyon yöntemi gradyant tabanlı optimizasyon yöntemidir.

KMÖK ve LKR yapıları sistemin doğrusal modeline ihtiyaç duyduğundan, denge noktası $\mathbf{x}_f$ civarında doğrusallaştırma yapılarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0.021 & 0 \\ 0 & 1 & 0.418 & 0.002 \\ 0 & 0 & 1 & 0.082 \\ 0 & 0 & 0 & 0.668 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0004 \\ 0.0027 \\ 0.5077 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{5.10}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k \end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir.

KMÖK ve RKMÖK için amaç fonksiyonu aşağıda verilmiştir. Buna göre kontrol tasarım parametreleri öngörü ufku K_y, kontrol ufku K_u ve kontrol işareti değişim ağırlık terimi R' şeklindedir.

$$J_{MÖK}\left(\hat{y}_{k+kp|k}, \Delta\hat{u}_{k+kp|k}\right) = \sum_{kp=1}^{K_y} \left\|\hat{y}_{k+kp|k}\right\|^2 + \sum_{kp=0}^{K_u} R\left\|\Delta\hat{u}_{k+kp|k}\right\|^2$$
$$\Delta\hat{u}_{k+kp|k} = \hat{u}_{k+kp|k} - \hat{u}_{k+kp-1|k} \tag{5.12}$$

İki yöntem arasındaki fark şöyle açıklanabilir: KMÖK'de (5.11) doğrusallaştırılmış sistem modeli kullanılır. RKMÖK yöntemi ise (2.18) ile verilen doğrusal olmayan sistem modelini kullanır. LKR'nin amaç fonksiyonu (5.13)'dür ve bu amaç fonksiyonuyla ilgili tasarım parametreleri, sistem durum değişkenlerinin ağırlık matrisi **Q** ve kontrol girişinin ağırlıklandırma terimi R'dir.

$$J_{LKR}(\mathbf{x}_k, u_{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + R(u_{k-1})^2 \tag{5.13}$$

TOK'nin tasarım parametreleri, (3.13)'de bulunan KLF'deki pozitif tanımlı ve simetrik sabit **P** matrisi ile (3.2) veya (3.14)'deki kontrol girişi ağırlıklandırma terimi R'dir. Adil bir karşılaştırma yapmak için KMÖK, LKR, RKMÖK, TOK ve TOMÖK yaklaşımları için ortak olan bazı kontrolör tasarım parametreleri aynı şekilde alınmıştır. Geri kalan parametrelerin belirlenmesinde farklı seçenekler kullanılabilir. Bu farklı seçenek için, parametrelerin geri kalanı, hata kareleri integralini en aza indirecek şekilde belirlenmiştir.

KMÖK ve RKMÖK çıkış hata karelerini minimize edecek şekilde tanımlandığından (yani çıkış geri beslemeli gibi kullandığından), (5.6) ve (5.13) 'deki **Q** matrisinin ilk öğesi "1" olarak seçilir ve diğer öğeler bu seçime göre aşağıdaki şekilde normalleştirilir:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

TOMÖK'deki $\mathbf{P}_k$ matrisleri ve TOK'deki $\mathbf{P}^{çd}$ **(**çevrim dışı) matrisi pozitif tanımlı simetrik matrislerdir. $\mathbf{P}_k$ ve $\mathbf{P}^{çd}$ matris elemanlarının aralığı sisteme ve başarım ölçütlerine göre belirlenmiştir. Burada, $\mathbf{P}_k$ ve $\mathbf{P}^{çd}$ matrislerinin elemanlarının aralığı $[10^{-6}, 10^{5}]$ olarak alınmıştır. Çevrim içi $\mathbf{P}_k$ matrisi aramalarında matris elemanlarının aralığı farklı şekilde seçilebilirdi. Bununla birlikte, adil bir karşılaştırma için $\mathbf{P}^{çd}$ ve $\mathbf{P}_k$ aralıkları aynı alınmıştır. Top ve çubuk kontrol sistemi tek girişli olduğundan

(3.2)'deki ve (5.2)'deki kontrol girişlerinin ağırlıklandırma terimi $R \in \mathbb{R}^{1x1}$ olur. Her bir kontrol yapısında başarım ölçütleri farklı *R* değerleri için değişiklik göstermektedir. Bu nedenle *R*=0.01, *R*=100 ve *R*=1000 üç farklı *R* değeri seçilerek kontrol başarımları incelenmiştir. Kontrol işareti ağırlık (ceza) katsayısı için *R*=0.01 oldukça küçük bir değerdir. Bunun sonucu olarak da TOK yaklaşımı kullanan yöntemler haricindeki bahsedilen diğer tüm yöntemler agresif sistem davranışlarına sahiptir.

Tanım 3.1'deki koşulları sağlayan ve ISE'yi en aza indiren TOK için sabit bir **P** matrisi bulmak için BP-BÇ optimizasyon arama algoritması kullanılmıştır. Sabit $\mathbf{P}^{çd}$ matrisleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\mathbf{P}^{çd} = \begin{bmatrix} 81521.5134 & 44881.5337 & 39899.1152 & 3687.9466 \\ 44881.5337 & 63286.3470 & 38194.1304 & 3939.7440 \\ 39899.1152 & 38194.1304 & 98338.0424 & 25295.1283 \\ 3687.9466 & 3939.7440 & 25295.1283 & 7867.1369 \end{bmatrix} \quad R = 0.01 \text{ için}$$

$$\mathbf{P}^{çd} = \begin{bmatrix} 73693.2496 & 56425.2397 & 38162.2216 & 12035.8566 \\ 56425.2397 & 97337.7947 & 63523.6822 & 21858.5454 \\ 38162.2216 & 63523.6822 & 99037.8802 & 45638.4006 \\ 12035.8566 & 21858.5454 & 45638.4006 & 22460.2545 \end{bmatrix} \quad R = 100 \text{ için}$$

Diğer *R*=1000 durumunda ise tanım 3.1' de verilen koşulları sağlayan uygun $\mathbf{P}^{çd}$ matrisi bulunamamıştır.

LKR durum geri besleme kazancı ise farklı *R* değerleri için MATLAB' de "dlqr.m" fonksiyonu kullanılarak aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir.

$$\mathbf{K}_{LKR} = [7.788 \quad 2.5254 \quad 15.5698 \quad 0.6034] \quad R = 0.01 \text{ için}$$
$$\mathbf{K}_{LKR} = [0.0981 \quad 0.1045 \quad 2.3212 \quad 0.0627] \quad R = 100 \text{ için}$$
$$\mathbf{K}_{LKR} = [0.0312 \quad 0.0482 \quad 1.5572 \quad 0.0428] \quad R = 1000 \text{ için}$$

Öngörü ufkunun seçimi K_x, TOMÖK'de çok önemli bir rol oynar. K_x çok büyük seçilirse, her adımda yeni bir TOK problemi çözülmesi gerekecektir. Bu durumda, tanım 5.1' in koşul ii tarafından verilen Lyapunov eşitsizliği karşılanmazsa, sorun çözülemez hale gelebilir. Ayrıca, K_x çok küçükse, çok kısa bir süre için TOK problemi çözülmeye çalışılacağından, kontrol işareti (ve sonunda çıkış işareti) çok agresif hale gelebilir ve tanım 5.1'deki tüm koşullar sağlanamayabilir. LKR, herhangi bir sınırlı ufuk kullanmadan sorunu çözer. Ancak yöntemler arası zaman uyumluluğu açısından sınırlı kontrol ve öngörü ufukları, LKR yönteminin yerleşme zamanı ile ilişkilendirilmiştir. Bu bağlamda, KMÖK ve TOMÖK'nin öngörü ve kontrol ufukları, LKR'de yerleşme zamanının yarısı olarak seçilmiştir ve bunlar, *R* = 0.01 ve *R* = 100 için 200 ve *R* = 1000 için ve 250 olarak ayarlanmıştır. RKMÖK yaklaşımında bu değerlerle kabul edilebilir sonuçlar elde edilemediğinden, ISE ölçütlerine göre R=1000 için tahmin ufku ve kontrol ufku K_y =135 ve K_u = 3 olarak, R = 100 olduğunda bu değerler K_y = 115 ve K_u = 2 olarak bulunmuştur. Ancak, R = 0.01 olduğunda makul sonuçlar üreten bir K_y ve K_u değeri bulunamamıştır. Benzetim çalışmalarında elde edilen sistem çıkışları ve kontrol girişleri Şekil 5.4, Şekil 5.5 ve Şekil 5.6'da verilmiştir. Bu şekillerde KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK ve önerilen yaklaşım (TOMÖK) çıkış ve giriş değerleri sırasıyla "$y^{KMÖK}$ ve $u^{KMÖK}$", "y^{LKR} ve u^{LKR}", "y^{TOK} ve u^{TOK}", "$y^{RKMÖK}$ ve $u^{RKMÖK}$" ve "$y^{TOMÖK}$ ve $u^{TOMÖK}$" ifadeleri ile verilmiştir.

Sistem çıkışı yanıtları, çeşitli başarım ölçütlerine göre R = 0.01, R = 100 ve R = 1000 için analiz edilmiş ve sırasıyla Çizelge 5.2, Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'te de verilmiştir. Bu tablolarda kullanılan başarım ölçütleri, (Bölüm 4.2'de kullanılan) %Aşım, $t_{yer,}$ ISE, ITSE, IAE, ITAE ve TV şeklindedir. Şekil 5.4, R=0.01 için KMÖK ve LKR'de sistem çıkışları, MÖK ve TOMÖK sistem çıkışları ile karşılaştırıldığında aşırı salınımlı olduğunu göstermektedir. KMÖK ve LKR'deki bu salınım nedeniyle çizelge 5.2'deki %Aşım değerleri oldukça büyük değerler almaktadır. Buna göre TOMÖK ve TOK'nin çizelge 5.2'deki sistem yanıtları, kontrol işaretleri ve başarım ölçütleri incelendiğinde, TOK'nin TOMÖK'ye göre aşırı derecede sönümlendiği ve başarım ölçütlerinin daha kötü olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2 : R=0.01 için kontrol yöntemleri başarım ölçütleri.

Kontrol Yöntemleri	%Aşım	t_{yer} [s]	$t_{yük}$ [s]	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TV
KMÖK	66.082	3.077	0.101	74.196	21.528	8.809	5.732	2.271
LKR	72.013	3.971	0.103	96.857	38.929	11.92	10.744	2.512
TOK	0	4.415	2.085	194.096	91.278	19.216	18.196	0.316
RKMÖK	-	-	-	-	-	-	-	-
TOMÖK	0.008	1.976	1.076	135.834	37.314	11.613	5.305	0.608

Tüm kontrol yöntemleri, R = 100 için karşılaştırılabilir sonuçlar sunar. Şekil 5.5 ve çizelge 5.3 incelendiğinde TOK ve TOMÖK'nin aşım yapmadığı görülmektedir. TOMÖK'nin yerleşme zamanı, diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında en azdır. Sonuç olarak aşım yapmadan hızlı bir şekilde denge noktasına ulaştığı için, TOMÖK'nin TV' si, salınımlı sistemi yanıtlarına neden olan KMÖK ve LKR TV değerlerinden daha yüksektir. TOMÖK, en iyi IAE ve ITAE değerlerini sağlar.

Çizelge 5.3 : *R*=100 için kontrol yöntemleri başarım ölçütleri.

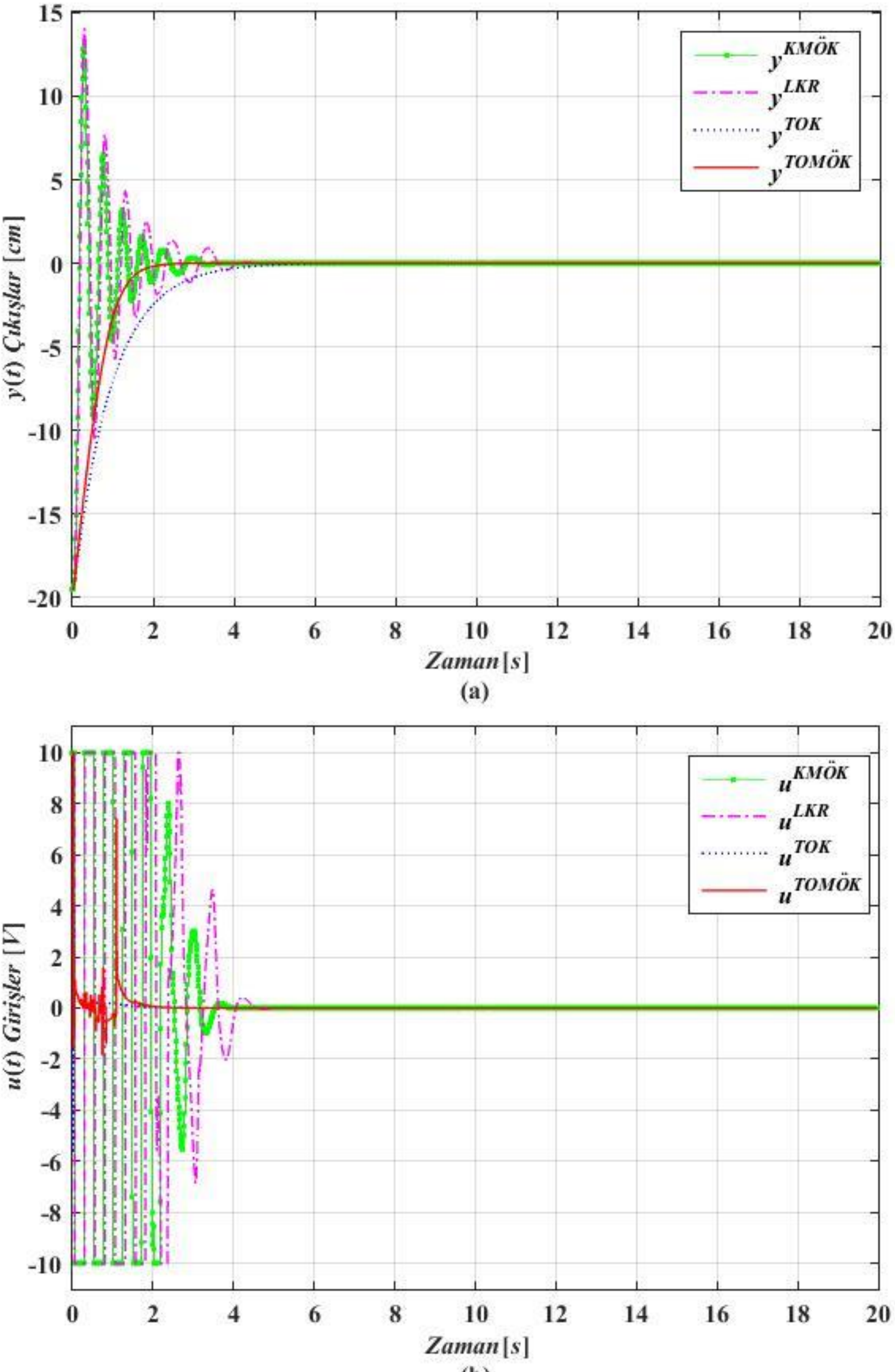
Kontrol Yöntemleri	%Aşım	t_{yer} [s]	$t_{yük}$ [s]	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TV
KMÖK	13.062	4.366	0.787	126.068	37.769	12.98	11.765	0.109
LKR	5.226	4.002	1.004	148.444	42.778	12.942	8.090	0.048
TOK	0	8.243	3.937	354.009	316.281	35.595	63.365	0.423
RKMÖK	5.225	4.038	1.062	162.131	51.168	14.234	10.702	0.438
TOMÖK	0.002	1.891	1.074	139.375	39.165	11.768	5.321	0.358

TOK'de $R = 1000$ olduğunda uygun bir **P** matrisi bulunamadığından, bu *R* değeri için sistem yanıtı değerlendirilemez. Şekil 5.6'daki sistem yanıtları ve çizelge 5.4'teki başarım ölçütleri incelendiğinde TOMÖK yönteminin en iyi %Aşım, t_{yer}, $t_{yük}$, ISE, ITSE, IAE ve ITAE değerlerine sahip olduğu görülmektedir. TOMÖK yöntemi yukarıda bahsedildiği gibi diğer kontrol yapılarına göre daha hızlı bir şekilde denge noktasına ulaştığı ve aşım yapmadığı için daha büyük TV değerine sahiptir

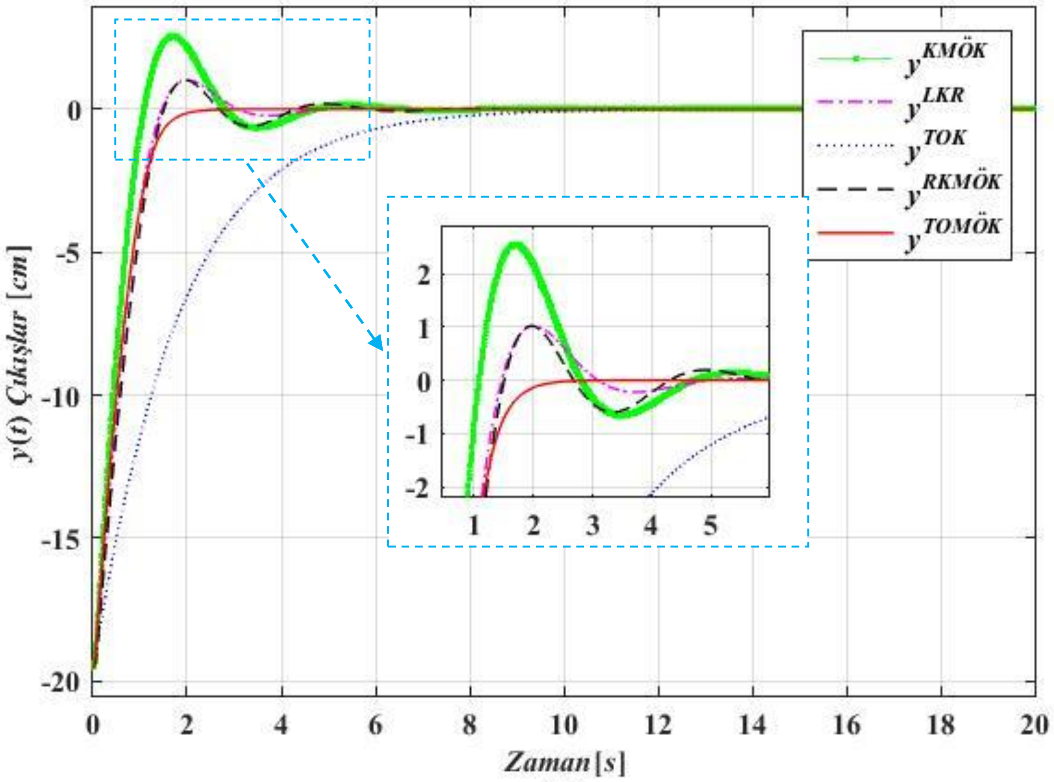
Çizelge 5.4 : *R*=1000 için kontrol yöntemleri başarım ölçütleri.

Kontrol Yöntemleri	%Aşım	t_{yer}[s]	$t_{yük}$ [s]	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TV
KMÖK	3.164	6.235	1.805	224.534	106.794	20.194	19.787	0.101
LKR	2.880	4.901	2.062	292.481	167.760	24.478	24.546	0.023
TOK	-	-	-	-	-	-	-	-
RKMÖK	2.763	4.573	1.247	173.807	59.420	15.166	11.663	0.235
TOMÖK	0	2.306	1.232	146.646	44.618	12.845	6.727	0.491

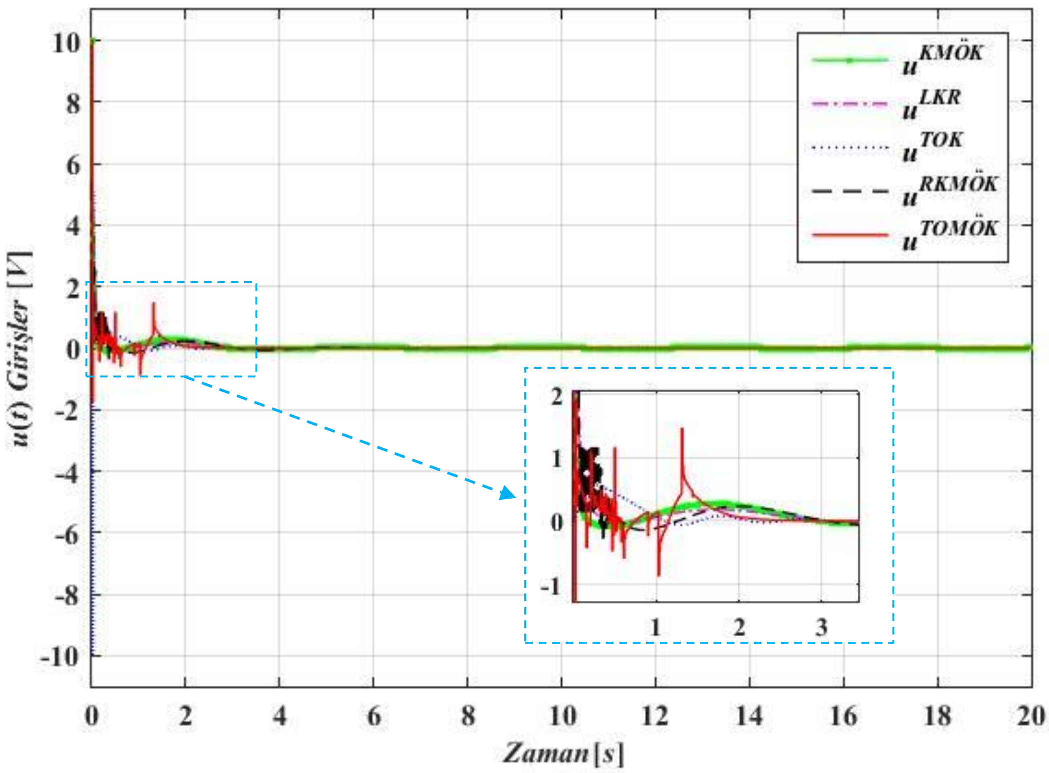
TOMÖK' nin bozucu etkisine karşı başarımı, $R = 100$ için KMÖK, LKR, RKMÖK ve TOK yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Bu amaçla 12. saniyede 0,2 cm' lik bir birim bozucu girişi uygulanmış ve tüm yöntemlerin sistem çıktıları Şekil 5.7'de gösterilmiştir. Şekilden TOMÖK' nin bozucu etkisine karşı en iyi başarıma sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 5.4 : (a) R=0.01 için KMÖK, LKR, TOK ve TOMÖK sistem çıkış işaretleri.
(b) R=0.01 için KMÖK, LKR, TOK ve TOMÖK kontrol işaretleri.

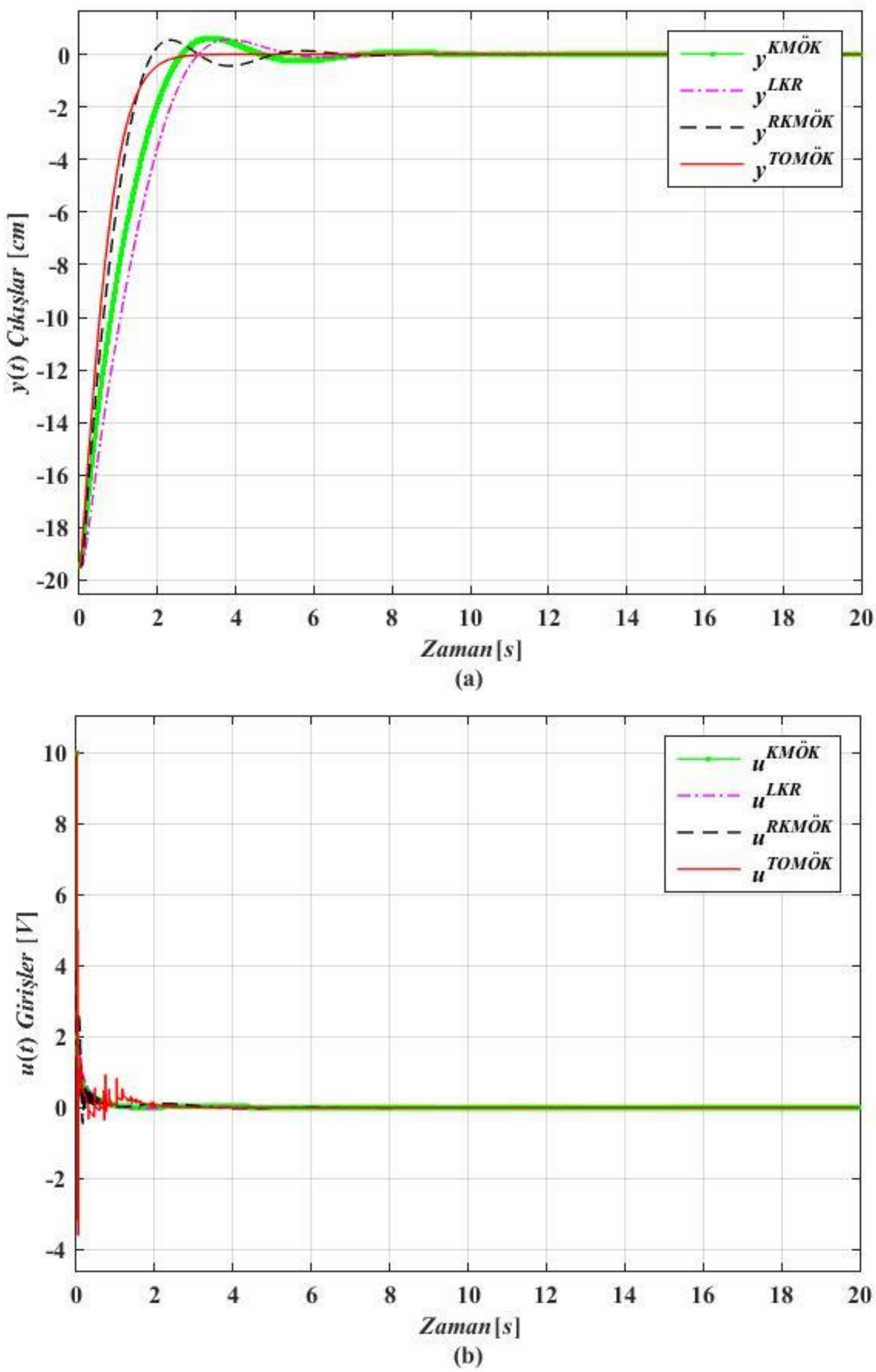


(a)

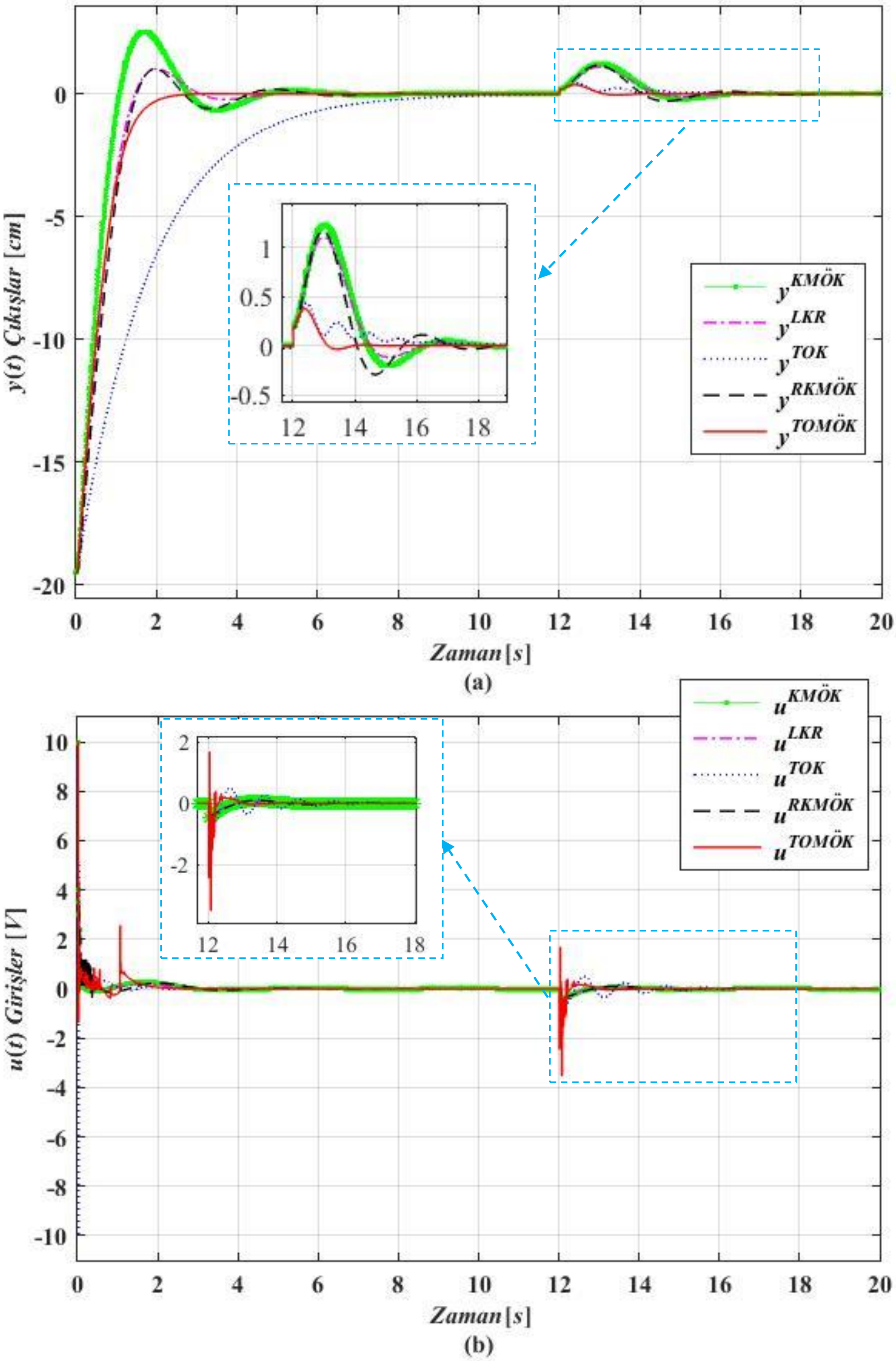


(b)

Şekil 5.5 : (a) *R*=100 için KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK ve TOMÖK sistem çıkış işaretleri. (b) *R*=100 için KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK ve TOMÖK kontrol işaretleri.



Şekil 5.6 : (a) R=1000 için KMÖK, LKR, RKMÖK ve TOMÖK sistem çıkış işaretleri. (b) R=1000 için KMÖK, LKR, RKMÖK ve TOMÖK kontrol işaretleri.

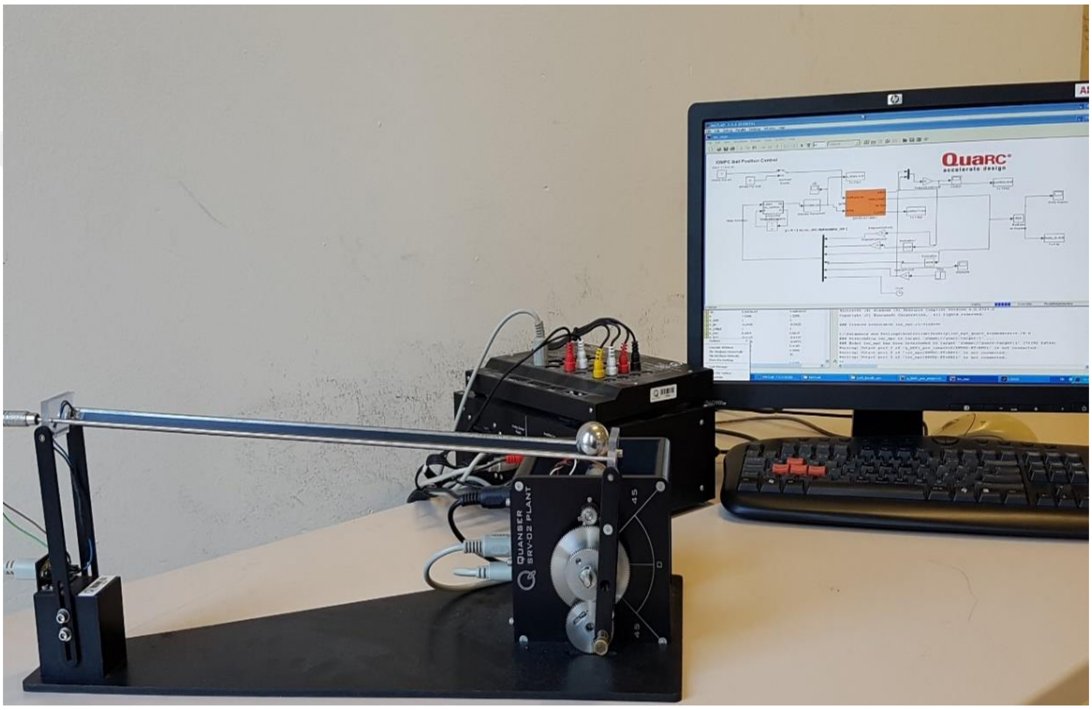


Şekil 5.7 : (a) R=100 ve 12. saniyede çıkış bozucu etkisi için KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK ve TOMÖK sistem çıkış işaretleri. (b) R=100 ve 12. saniyede çıkış bozucu etkisi için KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK ve TOMÖK kontrol işaretleri.

LKR ve TOK yaklaşımları çevrimdışı yöntemlerdir. Bu nedenle, herhangi bir hesaplama maliyeti bu yaklaşımlar için önemsizdir. Ayrıca bu tezde kullanılan KMÖK [7]'de (Bölüm 2.1'de) anlatıldığı gibi gradyant tabanlı yaklaşımla belirlenen çevrim dışı blok matrisler kullanmaktadır. Bu nedenle, bu yöntemin de hesaplama maliyeti yoktur. RKMÖK ve TOMÖK'de (her k adımdaki) hesaplama zamanı önemlidir. TOMÖK'deki maksimum hesaplama sürelerinin, RKMÖK için gereken maksimum hesaplama süresinin iki katı olduğunu gözlemlenmiştir. Her iki hesaplama süresi de birçok pratik uygulama için oldukça yeterlidir.

6. TOP ve ÇUBUK KONTROL SİSTEMİNDE GERÇEK-ZAMANLI UYGULAMA

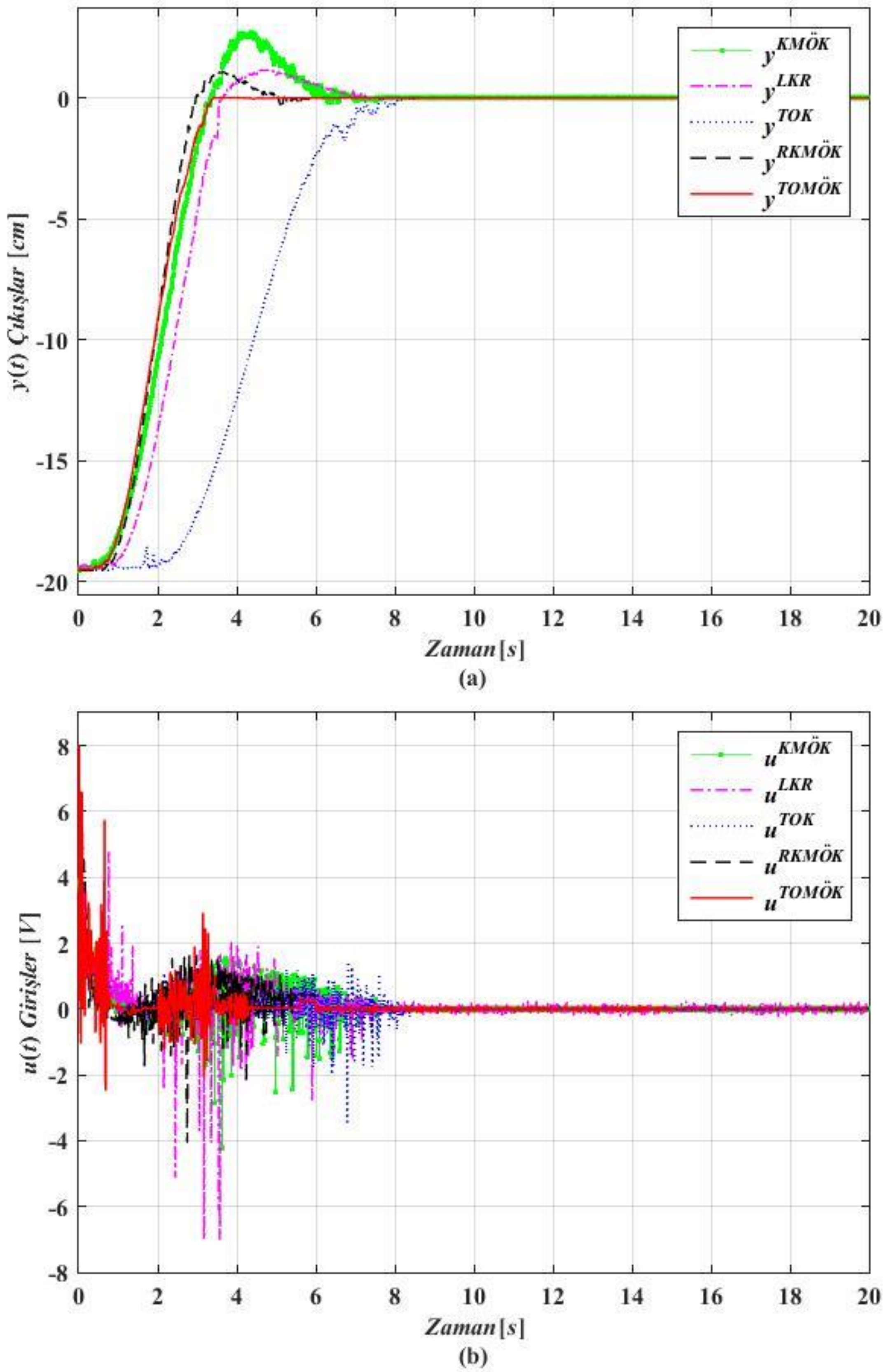
Önerilen kontrol yöntemi TOMÖK ve diğer ilgili kontrol yöntemleri KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK, Şekil 6.1'de gösterilen gerçek zamanlı Quanser top ve çubuk kontrol sistemi üzerinde uygulanmaktadır.



Şekil 6.1 : Gerçek-zamanlı Quanser top ve çubuk kontrol sisteminin uygulama kurulumu.

Quanser top ve çubuk kontrol sisteminin şematik yapısı Şekil 5.2 (b)'de verilmiştir. Giriş gerilimi V_m [V] aralığı [-10, 10] alınmıştır. Çubuk açısı [*rad*] [-0.9774, 0.9774] aralığı içindedir ve top konumu r [*cm*] [-19.50, 19.50] aralığındadır. Diğer ilgili parametreler Çizelge 5.1'de verilen değerlere ayarlanmıştır. KMÖK, LKR, RKMÖK, TOK ve TOMÖK yöntemlerinin kodları "MATLAB R2009B Simulink" programı kullanılarak oluşturulmuş ve daha sonra gerçek zamanlı sisteme uygulanmıştır. Gerçek zamanlı uygulamada, kontrol girişlerinin ağırlıklandırma terimi R = 100 olarak seçilmiştir.

Yapılan gerçek zamanlı uygulamalar sonucu elde edilen sistem çıktıları ve tüm kontrol yöntemleriyle ilgili kontrol girişleri Şekil 6.2' de gösterilmektedir.



Şekil 6.2 : (a) Gerçek zamanlı uygulama için KMÖK, LKR, TOK ve TOMÖK sistem çıkış işaretleri. (b) Gerçek zamanlı uygulama için KMÖK, LKR, TOK ve TOMÖK kontrol işaretleri.

Bu şekilde de KMÖK, LKR, TOK, RKMÖK ve önerilen yaklaşım (TOMÖK) çıkış ve giriş değerleri için sırasıyla “$y^{KMÖK}$ ve $u^{KÖMK}$”, “y^{LKR} ve u^{LKR}”, “y^{TOK} ve u^{TOK}”, “$y^{RKMÖK}$ ve $u^{RKMÖK}$” ve “$y^{TOMÖK}$ve $u^{TOMÖK}$” ifadeleri kullanılmıştır. Kontrol yöntemlerinin başarımını gösterebilmek için daha önceki bölümlerde de kullanılmış olan %Aşım, t_{yer}, $t_{yük}$, ISE, ITSE, IAE, ITAE ve TV başarım ölçüt değerleri kullanılmış ve elde edilen sonuçlar Çizelge 6.1' de verilmiştir.

Çizelge 6.1 : Gerçek zamanlı uygulama için kontrol yöntemleri başarım ölçütleri.

Kontrol Yöntemleri	%Aşım	t_{yer} $[s]$	$t_{yük}$ $[s]$	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TV
KMÖK	13.751	6.723	1.882	354.730	217.757	34.632	47.401	1.577
LKR	5.883	6.961	1.906	421.227	298.257	39.953	68.668	2.603
TOK	0.057	8.042	3.284	794.089	1023.993	70.702	195.038	1.403
RKMÖK	5.431	5.581	1.531	340.100	189.98	31.344	40.640	1.362
TOMÖK	0.055	3.334	1.829	330.528	184.934	30.788	38.316	1.256

Başarım sonuçları ve sistem giriş / çıkış rakamları incelendiğinde, gerçek zamanlı uygulama ile benzetim sonuçları arasında bir uyum olduğunu gözlemlenebilmektedir. Gerçek zamanlı uygulamalarda başarım ölçütleri değerleri ISE, ITSE, IAE, ITAE, TV benzetim çalışmalarında elde edilen benzerlerinden daha yüksektir. Bu sonucun ana nedeni, gerçek zamanlı sistem ile modeli arasındaki ölçüm gürültüsü ve sistem modeline tam olarak dahil edilemeyen sürtünme kuvvetlerinden kaynaklanan tutarsızlıktır. Sonuçlar karşılaştırıldığında Şekil 6.2 ve Çizelge 6.1’den TOK ve TOMÖK yaklaşımlarının diğer kontrol yaklaşımlarına göre çok az aşım yaptığı görülmektedir ve TOMÖK’nin bu başarım ölçütleri değerlerine göre kontrol başarımın daha iyi olduğu söylenebilir. Bunun sebebi ise her adımda o anki sitem durumlarını başlangıç durumu kabul eden yeni bir TOK probleminin çözülmesi ile kontrol kuralının elde edilmesinin getirmiş olduğu kazançtır.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ayrık-zamanlı girişte-afin doğrusal olmayan sistem modelleri için iki yöntem önerilmiştir. Bunlardan birincisinde ele alınan TOK yaklaşımında takip probleminde oluşabilecek sorunlar üzerinde durulmuştur. Daha önce bu tür problemlerle karşılaşmamak için yapılan çalışmalar araştırılmıştır. Bu çalışmalardaki yaklaşımlarda kontrol işareti elde edilirken TOK yaklaşımı doğrudan kullanılamamaktadır. Doğrusal olmayan sistem denklemleri doğrusal olmayan blok kontrol edilebilir biçimde ifade edilebilmeli ya da bu biçime dönüştürülebilmesi gereklidir. Bu biçime getirelen sistem denklemleri için kontrol kuralı iki kısımdan oluşmaktadır. Bu kısımlardan sadece bir tanesi TOK yaklaşımıyla elde edilebilmekte ve diğer kısım için TOK yaklaşımından faydanılamamaktadır. Burada önerilen sistem durumlarına bağlı sigmoid fonksiyonlu kontrol işareti ağırlıklarıyla takip probleminde TOK yaklaşımında hiçbir dönüşüme (doğrusal olmayan blok kontrol edilebilir biçime) gerek kalmadan doğrudan sistemin dinamik denklemleri kullanılabilmektedir. Böylece dönüşüm sırasında karşılaşılabilecek zorluklardan kaçınılabilmekte ve ters optimal kontrol yaklaşımın kazandıracağı avantajlardan yararlanılabilmektedir. Bu yaklaşımın kontrol başarımını gösterebilmek için daha kolay olması nedeniyle ilk olarak regülatör problemi ele alınmıştır. Bu problem için daha önce TOK yaklaşımında kullanılan örnek bir ayrık-zamanlı girişte-afin sistem ele alınmıştır. Bu sistemde kullanılan kontrolör parametreleri TOK yaklaşımı için daha önce kullanılan parametreler seçilmiştir. Önerilen yaklaşım ve klasik TOK yaklaşımla bu sistem üzerinde benzemtim çalışmaları yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar bazı başarım ölçütlerine (SSE, SSSE, TV, $u_{\max}$ ve Adım Sayısına) göre değerlendirildiğinde önerilen yaklaşımın kontrol başarımına katkı sunabileceği görülmüştür. Daha sonra takip problemi için çiftli su tankı seviye kontrol problemi ele alınmıştır. Önerilen yaklaşım ve klasik TOK yaklaşımı için gerekli kontrolör parametreleri elde edilmiştir. Klasik TOK yaklaşımı kontrol parametrelerini elde edebilmek için TOK yaklaşımında tanım gereği sağlanması gereken bazı koşullar göz ardı edilmiştir. Kontrolör parametreleri elde edildikten sonra çiftli su tankı sisteminde benzetim çalışmaları yapılmıştır. Önerilen yaklaşımla sistem dinamik denklemlerinde dönüşüme gerek kalmadan TOK yaklaşımın tanımı gereği verilen tüm koşulların sağlanabildiği, önerilen yaklaşımda bazı parametreler değiştirilerek kontrol başarımda bazı avantajların elde edilebildiği ve TOK yaklaşımında parametre belirlemede esneklik sağlanabileceği görülmüştür.

Bu tez çalışmasında, ayrıca girişte-afin doğrusal olmayan sistemler için MÖK ve TOK yaklaşımları birleştirilerek yeni bir optimal kontrol yöntemi önerilmektedir. Bu birleştirme ile elde edilen yeni kontrol yönteminin faydaları iki farklı bakış açısıyla açıklanabilir. İlk olarak, önerilen kontrol yapısı, TOK yaklaşımını kullanarak MÖK'deki optimal kontrol problemini çözer ve optimal kontrol problemini her kontrol ufku için uygun bir KLF (**P** matrisi) aramaya indirger. İkinci bir bakış açısıyla, MÖK yapısını TOK problemine ekleyerek ve her kayan ufkun başlangıcında farklı başlangıç koşullarını kullanarak elde edilen TOK problemini tekrar tekrar çözerek TOK yaklaşımına çevrim içi bir düzeltme mekanizması kazandırılır. Gerçek hayatta ve literatürde karşılaşılan doğrusal olmayan sistemlerin ve sistem modellerinin çoğu, bazı doğrusal olmayan azaltma prosedürleri ile kolayca girişte-afin formuna dönüştürülebildiğinden, önerilen yöntemin doğrusallaştırma gerektirebilecek klasik MÖK yöntemlerine göre kendine özgü bir avantajı vardır. Önerilen yaklaşım ve diğer ilgili KMÖK, LKR, RKMÖK, TOK yaklaşımları ile top ve çubuk kontrol sisteminde benzetim çalışmaları ve gerçek zamanlı uygulama yapılmıştır. Benzetim çalışmalarında kontrol parametreleri belirlenirken ortak alınabilen tüm parametreler ortak alınmış ortak alınamayan parametreler ise ISE değerini minimum yapacak şekilde BP-BÇ algoritması kullanarak bulunmuştur. Kontrol işareti ağırlıklandırma R değerleri her kontrol yapısında kullanıldığı için ortak ve sabit değerler alınmıştır. Kontrol işareti ağırlıklandırma değerine bağlı olarak bu kontrol yapılarının kontrol başarımında kayda değer farklılıklar görüldüğü için üç farklı R değeri için benzetim çalışmaları yapılmış ve elde edilen sonuçlar bazı başarım ölçütlerine göre değerlendirilmiştir. Önerilen yaklaşımın kontrol başarımı, diğer kontrol yapılarının kontrol başarımlarına göre değerlendirildiğinde farklı R değerleri için daha az değişim göstermiştir. Tüm kontrol yapılarının sorunsuz çalıştığı kontrol işareti ağırlık değeri için bu kontrol yapıları ile top ve çubuk kontrol sistemi üzerinde geçek zamanlı uygulama yapılmış ve sonuçlar değerlendirilmiştir. Yapılan benzetim çalışmalarında ve gerçek zamanlı uygulamada önerilen kontrol yapısının, diğer ilgili kontrol yöntemlerine kıyasla hemen hemen tüm klasik zaman bölgesi başarım ölçütleri açısından daha iyi sonuçlar elde edilebildiği görülmüştür.

Önerilen iki yakalaşım için elde edilen sonuçlar göz önünde bulundurulduğunda özellikle TOK yaklaşımında, genel kontrol başarımının büyük ölçüde giriş ağırlıklandırma terimi *R*'nin seçimine bağlı olduğu görülmüştür. Bu nedenle, bu ağırlıklandırma teriminin bu tezde önerilen yaklaşımdan farklı olarak çevrim içi veya çevrim dışı bir şekilde ayarlanması sağlanabilir. Ayrıca önerilen ikinci yaklaşım bir optimizasyon arama algoritması içerdiğinden, çok yüksek hızlı pratik uygulamalar için hesaplama süresi bazı zorluklara neden olabilir. Bu zorlukları ortadan kaldırmak ve arama algoritmasını hızlandırmak için arama algoritmasında birtakım iyileştirmeler yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Sepulchre, R., Jankovic, M. ve Kokotovic, P. V**. (2012). *Constructive nonlinear control*. Springer Science & Business Media.

[2] **Sanchez, E. N. ve Ornelas-Tellez, F.** (2017). *Discrete-time inverse optimal control for nonlinear systems*. Boca Raton: CRC Press.

[3] **Allgower, F., Findeisen, R. ve Nagy, Z. K.** (2004). Nonlinear model predictive control: From theory to application. *Journal-Chinese Institute Of Chemical Engineers*, *35*(3), 299–316.

[4] **Richalet, J., Rault, A., Testud, J. L. ve Papon, J.** (1978). Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, *14*(5), 413–428.

[5] **Cutler, C. R. ve Ramaker, B. L.** (1980). Dynamic matrix control?? A computer control algorithm. *joint automatic control conference* içinde (s. 72).

[6] **De Keyser, R. M. C. ve Van Cauwenberghe, A. R.** (1985). Extended prediction self-adaptive control. *IFAC Proceedings Volumes*, *18*(5), 1255–1260.

[7] **Wang, L.** (2009). *Model predictive control system design and implementation using MATLAB®*. Springer Science & Business Media.

[8] **Iplikci, S.** (2013). Runge–Kutta model-based adaptive predictive control mechanism for non-linear processes. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, *35*(2), 166–180.

[9] **Çetin, M., Bahtiyar, B. ve Beyhan, S.** (2017). Adaptive uncertainty compensation-based nonlinear model predictive control with real-time applications. *Neural Computing and Applications*. doi:10.1007/s00521-017-3068-7

[10] **Demircioğlu, H. ve Gawthrop, P. J.** (1991). Continuous-time generalized predictive control (CGPC). *Automatica*, *27*(1), 55–74.

[11] **Ronco, E., Arsan, T. ve Gawthrop, P. J.** (1999). Open-loop intermittent feedback control: practical continuous-time GPC. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, *146*(5), 426–434.

[12] **Qin, S. J. ve Badgwell, T. A.** (2003). A survey of industrial model predictive control technology. *Control engineering practice*, *11*(7), 733–764.

[13] **Garcia, C. E., Prett, D. M. ve Morari, M.** (1989). Model predictive control: theory and practice—a survey. *Automatica*, *25*(3), 335–348.

[14] **Bahtiyar, B., Çetin, M., Beyhan, S. ve İplikçi, S.** (2018). An efficient sliding mode observer-based model predictive control: experimental implementation on a DC/DC power converter. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, *40*(8), 2488–2497.

[15] **Essa, M. E.-S. M., Aboelela, M. A. S., Moustafa Hassan, M. A. ve Abdrabbo, S. M.** (2019). Model predictive force control of hardware implementation for electro-hydraulic servo system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, *41*(5), 1435–1446.

[16] **Nawaz, M., Saqib, M. A., Kashif, S. A. R. ve Gul, M.** (2019). Constrained model predictive control for an induction heating load. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, *41*(1), 210–218.

[17] **Gawthrop, P. J., Demircioglu, H. ve Siller-Alcala, I. I.** (1998). Multivariable continuous-time generalised predictive control: A state-space approach to linear and nonlinear systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, *145*(3), 241–250.

[18] **Morari, M. ve Lee, J. H.** (1999). Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering*, *23*(4–5), 667–682.

[19] **Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V ve Scokaert, P. O. M.** (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, *36*(6), 789–814.

[20] **De Nicolao, G., Magni, L. ve Scattolini, R.** (2000). Stability and robustness of nonlinear receding horizon control. Z. A. (eds) (Ed.), *Nonlinear model predictive control* içinde (ss. 3–22). Birkhäuser, Basel: Springer.

[21] **Allgöwer, F., Badgwell, T. A., Qin, J. S., Rawlings, J. B. ve Wright, S. J.** (1999). Nonlinear predictive control and moving horizon estimation—an introductory overview. P. M. Frank (Ed.), *Advances in control* içinde (ss. 391–449). London: Springer.

[22] **Limón, D., Alamo, T., Salas, F. ve Camacho, E. F.** (2006). On the stability of constrained MPC without terminal constraint. *IEEE transactions on automatic control*, *51*(5), 832–836.

[23] **Grüne, L. ve Pannek, J.** (2011). Nonlinear model predictive control. A. Isidori, J. H. van Schuppen, E. D. Sontag, M. Thoma ve M. Krstic (Ed.), *Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms* içinde (ss. 43–66). London: Springer.

[24] **Lee, J. H.** (2000). Modeling and Identification for Nonlinear Model Predictive Control: Requirements, Current Status and Future Research Needs. *Nonlinear Model Predictive Control* içinde (ss. 269–293). Birkhäuser, Basel.

[25] **Mahadevan, R. ve J Doyle III, F.** (2003). Efficient optimization approaches to nonlinear model predictive control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, *13*(3-4), 309–329.

[26] **Kalman, R. E.** (1964). When is a linear control system optimal? *Journal of Basic Engineering*, *86*(1), 51–60.

[27] **Rodrigues, L., Henrion, D. ve Fallah, M. A.** (2011). An inverse optimality method to solve a class of optimal control problems. *arXiv preprint arXiv:1002.2900*.

[28] **Anderson, B. D. O. ve Moore, J. B.** (2007). *Optimal control: linear quadratic methods*. Courier Corporation.

[29] **Lukes, D. L.** (1969). Optimal regulation of nonlinear dynamical systems. *SIAM Journal on Control*, *7*(1), 75–100.

[30] **Thau, F.** (1967). On the inverse optimum control problem for a class of nonlinear autonomous systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *12*(6), 674–681.

[31] **Yokoyama, R. ve Kinnen, E.** (1972). The inverse problem of the optimal regulator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *17*(4), 497–504. doi:10.1109/TAC.1972.1100044

[32] **Moylan, P. ve Anderson, B.** (1973). Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *18*(5), 460–465.

[33] **Freeman, R. A. ve Kokotovic, P. V.** (1996). Inverse Optimality in Robust Stabilization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *34*(4), 1365–1391. doi:10.1137/S0363012993258732

[34] **Li, W., Todorov, E. ve Liu, D.** (2011). Inverse optimality design for biological movement systems. *IFAC Proceedings Volumes*, *44*(1), 9662–9667.

[35] **Krstic, M. ve Tsiotras, P.** (1999). Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *44*(5), 1042–1049.

[36] **Liao, F., Ji, H. ve Xie, Y.** (2016). A nearly optimal control for spacecraft rendezvous with constrained controls. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, *38*(7), 832–845.

[37] **Deng, H. ve Krstić, M.** (1997). Stochastic nonlinear stabilization—II: inverse optimality. *Systems & control letters*, *32*(3), 151–159.

[38] **Ornelas-Tellez, F., Sanchez, E. N., Loukianov, A. G. ve Rico, J. J.** (2014). Robust inverse optimal control for discrete-time nonlinear system stabilization. *European Journal of Control*, *20*(1), 38–44.

[39] **Ornelas, F., Sanchez, E. N. ve Loukianov, A. G.** (2011). Discrete-time nonlinear systems inverse optimal control: A control Lyapunov function approach. *Control Applications (CCA), 2011 IEEE International Conference on* içinde (ss. 1431–1436). IEEE.

[40] **Ornelas-Tellez, F., Sanchez, E. N., Loukianov, A. G. ve Navarro-López, E. M.** (2011). Speed-gradient inverse optimal control for discrete-time nonlinear systems. *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on* içinde (ss. 290–295). Orlando, FL, USA: IEEE.

[41] **Almobaied, M., Eksin, I. ve Guzelkaya, M.** (2015). A new inverse optimal control method for discrete-time systems. *ICINCO 2015 - 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, Proceedings, 21-23 July* içinde (C. 1, ss. 275–280). Colmar, France: IEEE.

[42] **Almobaied, M., Eksin, I. ve Guzelkaya, M.** (2018). Inverse optimal controller based on extended Kalman filter for discrete-time nonlinear systems. *Optimal Control Applications and Methods*, *39*(1), 19–34.

[43] **Magni, L. ve Sepulchre, R.** (1997). Stability margins of nonlinear receding-horizon control via inverse optimality. *Systems & Control Letters*, *32*(4), 241–245.

[44] **De Nicoiao, G. ve Bitmead, R. R.** (1997). Fake Riccati equations for stable receding-horizon control. *Control Conference (ECC), 1997 European* içinde (ss. 3294–3299). Brussels, Belgium: IEEE.

[45] **Bitmead, R. R., Gevers, M. ve Wertz, V.** (1990). Adaptive optimal control : the thinking man's GPC. *Prentice Hall international series in systems and control engineering*.

[46] **Ulusoy, L., Güzelkaya, M. ve Eksin, I.** (2017). Inverse optimal control approach to model predictive control for linear system models. *2017 10th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)* içinde (ss. 823–827). Bursa.

[47] **Antonio-Toledo, M. E., Sanchez, E. N. ve Loukianov, A. G.** (2015). Real-time neural inverse optimal control for position trajectory tracking of an induction motor. *2015 10th System of Systems Engineering Conference (SoSE)* içinde (ss. 193–198). IEEE.

[48] **Elvira-Ceja, S. ve Sanchez, E. N.** (2013). Discrete-time inverse optimal control for stochastic nonlinear systems trajectory tracking. *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2483–2487. doi:10.1109/CDC.2013.6760253

[49] **Quintal, G., Sanchez, E. N., Alanis, A. Y. ve Arana-Daniel, N. G.** (2015). Real-time FPGA decentralized inverse optimal neural control for a Shrimp robot. *2015 10th System of Systems Engineering Conference, SoSE 2015*, 250–255. doi:10.1109/SYSOSE.2015.7151922

[50] **Lopez-Franco, M., Sanchez, E. N., Alanis, A. Y. ve Arana-Daniel, N.** (2013). Real-time decentralized inverse optimal neural control for a Shrimp robot. *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*. doi:10.1109/IJCNN.2013.6706785

[51] **Rios, Y. Y., García-Rodríguez, J. A., Sánchez, O. D., Sanchez, E. N., Alanis, A. Y., Ruiz-Velázquez, E. ve Arana-Daniel, N.** (2018). Inverse optimal control using a neural multi-step predictor for T1DM treatment. *2018 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)* içinde (ss. 1–8). IEEE.

[52] **Sanchez, E. N.** (2018). *Discrete-Time Recurrent Neural Control: Analysis and Applications*. Boca Raton: CRC Press.

[53] **Erol, O. K. ve Eksin, I.** (2006). A new optimization method: big bang–big crunch. *Advances in Engineering Software*, *37*(2), 106–111.

[54] **Camacho, E. F.** (1993). Constrained generalized predictive control. *IEEE transactions on automatic control*, *38*(2), 327–332.

[55] **Clarke, D. W. ve Mohtadi, C.** (1989). Properties of generalized predictive control. *Automatica*, *25*(6), 859–875.

[56] **Richalet, J.** (1993). Industrial applications of model based predictive control. *Automatica*, *29*(5), 1251–1274.

[57] **Clarke, D. W.** (1988). Application of generalized predictive control to industrial processes. *IEEE Control systems magazine*, *8*(2), 49–55.

[58] **Iplikci, S.** (2006). Support vector machines-based generalized predictive control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, *16*(17), 843–862.

[59] **Camacho, E. F. ve Alba, C. B.** (2013). *Model predictive control*. Springer Science & Business Media.

[60] **Maciejowski, J. M.** (2002). *Predictive control: with constraints*. Pearson education.

[61] **Çetin, M.** (2015). *Runge-Kutta model-tabanlı uyarlanabilir kestirim ve kontrol*. Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[62] **Almobaied, M.** (2017). *Inverse optimal control for nonlinear systems*. İstanbul Teknik Üniversitesi.

[63] **Glad, S. T.** (1987). Robustness of nonlinear state feedback—a survey. *Automatica*, *23*(4), 425–435.

[64] **Menner, M., Neuner, L., Lünenburger, L. ve Zeilinger, M. N.** (2020). Using human ratings for feedback control: A supervised learning approach with application to rehabilitation robotics. *IEEE Transactions on Robotics*, *36*(3), 789–801.

[65] **Johnson, M., Aghasadeghi, N. ve Bretl, T.** (2013). Inverse optimal control for deterministic continuous-time nonlinear systems. *52nd IEEE Conference on Decision and Control* içinde (ss. 2906–2913). IEEE.

[66] **Guojun, J.** (2007). Inverse optimal stabilization of a class of nonlinear systems. *2007 Chinese Control Conference* içinde (ss. 226–230). IEEE.

[67] **Margaliot, M. ve Langholz, G.** (2001). Some nonlinear optimal control problems with closed-form solutions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, *11*(14), 1365–1374.

[68] **Krstic, M. ve Li, Z.-H.** (1998). Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *43*(3), 336–350.

[69] **Pan, Z., Ezal, K., Krener, A. J. ve Kokotovic, P. V**. (2001). Backstepping design with local optimality matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *46*(7), 1014–1027.

[70] **Keshavarz, A., Wang, Y. ve Boyd, S.** (2011). Imputing a convex objective function. *2011 IEEE international symposium on intelligent control* içinde (ss. 613–619). IEEE.

[71] **Bertsimas, D., Gupta, V. ve Paschalidis, I. C.** (2015). Data-driven estimation in equilibrium using inverse optimization. *Mathematical Programming*, *153*(2), 595–633.

[72] **Aswani, A., Shen, Z.-J. ve Siddiq, A.** (2018). Inverse optimization with noisy data. *Operations Research*, *66*(3), 870–892.

[73] **Molloy, T. L., Tsai, D., Ford, J. J. ve Perez, T.** (2016). Discrete-time inverse optimal control with partial-state information: A soft-optimality approach with constrained state estimation. *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)* içinde (ss. 1926–1932). IEEE.

[74] **Molloy, T. L., Ford, J. J. ve Perez, T.** (2018). Finite-horizon inverse optimal control for discrete-time nonlinear systems. *Automatica*, *87*, 442–446.

[75] **Hatz, K., Schloder, J. P. ve Bock, H. G.** (2012). Estimating parameters in optimal control problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *34*(3), A1707–A1728.

[76] **Primbs, J. A., Nevistić, V. ve Doyle, J. C.** (1999). Nonlinear optimal control: A control Lyapunov function and receding horizon perspective. *Asian Journal of Control*, *1*(1), 14–24.

[77] **Sontag, E. D.** (1983). A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability. *SIAM journal on control and optimization*, *21*(3), 462–471.

[78] **Freeman, R. A. ve Primbs, J. A.** (1996). Control Lyapunov functions: new ideas from an old source. *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, *4*(December), 3926–3931. doi:10.1109/CDC.1996.577294

[79] **Freeman, R. A. ve Kokotovic, P. V**. (1995). Optimal nonlinear controllers for feedback linearizable systems. *Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95* içinde (C. 4, ss. 2722–2726). IEEE.

[80] **Galloway, K., Sreenath, K., Ames, A. D. ve Grizzle, J. W.** (2015). Torque saturation in bipedal robotic walking through control Lyapunov function-based quadratic programs. *IEEE Access*, *3*, 323–332.

[81] **Shamma, J. S. ve Cloutier, J. R.** (2003). Existence of SDRE stabilizing feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *48*(3), 513–517.

[82] **Yang, Y. ve Lee, J. M.** (2012). Design of robust control Lyapunov function for non-linear affine systems with uncertainty. *IET Control Theory & Applications*, *6*(14), 2248–2256.

[83] **Zhang, J., Han, Z. ve Huang, J.** (2014). Homogeneous feedback control of nonlinear systems based on control L yapunov functions. *Asian Journal of Control*, *16*(4), 1082–1090.

[84] **Horri, N. M., Palmer, P. ve Roberts, M.** (2012). Gain-scheduled inverse optimal satellite attitude control. *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, *48*(3), 2437–2457.

[85] **Vega, C. ve Alzate, R.** (2014). Inverse optimal control on electric power conversion. *2014 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)* içinde (ss. 1–5). IEEE.

[86] **Pereira da Silva, P. S. ve Batista, S.** (2010). On state representations of nonlinear implicit systems. *International journal of control*, *83*(3), 441–456.

[87] **Wang, H., Tian, Y. ve Vasseur, C.** (2015). Non-affine nonlinear systems adaptive optimal trajectory tracking controller design and application. *Studies in Informatics and Control, 24*(1), 5–12.

[88] **Song, Y.-D. ve Song, Q.** (2011). Survey of the latest developments in control of non-affine systems. *Proceedings of the 30th Chinese Control Conference* içinde (ss. 785–790). IEEE.

[89] **Kirk, D. E.** (2004). Optimal Control Theory: An Introduction. *Dover Books on Electrical Engineering Series*. New York: Dover Publications. doi:10.1109/TAC.1972.1100008

[90] **Antonio-Toledo, M. E., Sanchez, E. N. ve Alanis, A. Y.** (2019). Neural Inverse Optimal Control Applied to Quadrotor UAV. *2018 IEEE Latin American Conference on Computational Intelligence, LA-CCI 2018*, 1–8. doi:10.1109/LA-CCI.2018.8625204

[91] **Başar, T. ve Olsder, G. J.** (1999). Dynamic Noncooperative Game Theory, vol. 23. *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).*

[92] **Lewis, F. L. ve Syrmos, V. L.** (1995). Optimal Control, John-Wiley&Sons. *New York*.

[93] **Al-Tamimi, A., Lewis, F. L. ve Abu-Khalaf, M.** (2008). Discrete-time nonlinear HJB solution using approximate dynamic programming: Convergence proof. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics), 38*(4), 943–949.

[94] **Ohsawa, T., Bloch, A. M. ve Leok, M.** (2010). Discrete Hamilton-Jacobi theory and discrete optimal control. *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* içinde (ss. 5438–5443). IEEE.

[95] **Muñoz, F., Sanchez, E. N., Xia, Y. ve Deng, S.** (2017). Real-time neural inverse optimal control for indoor air temperature and humidity in a direct expansion (DX) air conditioning (A/C) system. *International journal of Refrigeration, 79*, 196–206.

[96] **Elvira-Ceja, S. ve Sanchez, E. N.** (2018). Inverse optimal control for asymptotic trajectory tracking of discrete-time stochastic nonlinear systems in block controllable form. *Optimal Control Applications and Methods, 39*(5), 1702–1715.

[97] **Ornelas-Tellez, F., Sanchez, E. N. ve Loukianov, A. G.** (2012). Discrete-time inverse optimal control for block control form nonlinear systems. *World Automation Congress 2012* içinde (ss. 1–6). IEEE.

[98] **Ruiz-cruz, R., Member, S., Sanchez, E. N., Member, S., Ornelas-tellez, F., Member, S., … Harley, R. G.** (2013). Particle Swarm Optimization for Discrete-Time Inverse Optimal Control of a Doubly Fed Induction Generator, *43*(6), 1698–1709.

[99] **Lastire, E. A., Sanchez, E. N., Alanis, A. Y. ve Ornelas-Tellez, F.** (2016). Passivity analysis of discrete-time inverse optimal control for trajectory tracking. *Journal of the Franklin Institute, 353*(13), 3192–3206. doi:10.1016/j.jfranklin.2016.05.016

[100] **Lopez, V. G., Sanchez, E. N., Alanis, A. Y. ve Rios, J. D.** (2017). Real-time neural inverse optimal control for a linear induction motor. *International Journal of Control*, *90*(4), 800–812. doi:10.1080/00207179.2016.1213424

[101] **Leon, B. S., Alanis, A. Y., Sanchez, E. N., Ornelas-Tellez, F. ve Ruiz-Velazquez, E.** (2013). Neural inverse optimal control applied to type 1 diabetes mellitus patients. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, *76*(3), 343–352. doi:10.1007/s10470-013-0109-8

[102] **Koo, M. S., Choi, H. L. ve Lim, J. T.** (2012). Adaptive nonlinear control of a ball and beam system using the centrifugal force term. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, *8*(9), 5999–6009.

[103] **Incorporation, Q.** (2011). Quanser ball and beam user manual. Ontario, Canada: Author.

[104] **Kirk, D. E.** (2012). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Lütfi Ulusoy

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2008, Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği
- **Yükseklisans** : 2012, Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik-Elektronik Mühendisliği
- **Doktora** : 2021, İstanbul Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2008-2010 yılları arasında Bursiyer, Tübitak 107E186 numaralı proje, Pamukale Üniversitesi
- Araştırma Görevlisi, Çorlu Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Ulusoy, L.,** Güzelkaya, M., Eksin, İ. Inverse optimal control approach to model predictive control for linear system models. *2017 10th International Conference on Electrical and Electronics Engineering (ELECO)* içinde (ss. 823–827), Kasım 30-Aralık 2, 2017, Bursa.
- **Ulusoy, L.,** Güzelkaya, M., Eksin, İ. 2020. Fusion of inverse optimal and model predictive control strategies. *Transactions of the Institute of Measurement and Control, 42*(6), 1122-1134.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Tokat S., İplikçi S., **Ulusoy L.** 2010. Observer Gain Adaptation of Output Feedback Sliding Mode Controller with Support Vector Machine Regression, *World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS) Transactions on Systems and Control*, *5*(2), 112-122
- Tokat S., **Ulusoy L.** 2010. Output Feedback Slıdıng Mode Controller wıth Improved Trackıng Performance, *International Association of Science and Technology for Development (IASTED) Modelling, Identification and Control (MIC)* Ocak 15-17,2010 Innsbruck, Avusturya,
- Tokat S., İplikçi S., **Ulusoy L.,** 2009**.** Output Feedback Sliding Mode Control with Support Vector Machine Based Observer Gain Adaptation, *Proceedıngs Of The 8th Wseas Internatıonal Conference On Cırcuıts,Systems, Electronıcs, Control & Sıgnal Processıng (CSECS΄09)* Aralık 14-16,2009 Puerto De La Cruz, Kanarya Adaları, İspanya
- Tokat S., **Ulusoy L.,** 2009. Genetic algorithms applied to initial condition adaptation of a sliding mode controller with a time-varying sliding surface. *International Symposium on INnovations in Intelligent SysTems and Applications, INISTA 2009* (ss. 5-11), 29 Haziran-1 Temmuz, 2009, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon
- Tokat S., İplikçi S., **Ulusoy L.** 2009. Performance based sliding mode controller using support vector machines, *The 2nd IFAC (The International Federation of Automatic Control) International Conference on Intelligent Control Systems and Signal Processing (ICONS'09)* (ss. 225-230) 21-23 Eylül 2009, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul
- Ulusoy L., İplikçi S., **Tokat S.** 2012**.** Destek Vektör Makineleri Tabanlı Ayrık Zamanlı Kayma Kipli Kontrolör Tasarımı, *Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi 2012 Ulusal Toplantısı* 11-13 Ekim 2012, Niğde.
- Tokat S., İplikçi S., **Ulusoy L.** 2010. Ayrık zamanlı Kayma Kipli Kontrolörde Bozucu Gözleyici Kazancının Destek Vektör Makineleri ile Ayarlanması, *Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi 2010 Ulusal Toplantısı*, 21-23 Eylül 2010, Gebze