

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**MALZEME ÖZELLİKLERİ SICAKLIĞA BAĞLI
OLAN BİR PİEZOELEKTRİK PLAĞIN STATİK
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Selen BAYAR

Anabilim Dalı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

Programı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

TEMMUZ 2007

**MALZEME ÖZELLİKLERİ SICAKLIĞA BAĞLI
OLAN BİR PİEZOELEKTRİK PLAĞIN STATİK
ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Uzay Müh. Selen BAYAR
511051023

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Temmuz 2007

Tezin Savunulduğu Tarih: 27 Temmuz 2007

Tez Danışmanı: Prof. Dr.Zahit Mecitoğlu

Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Erol Şenocak (İTÜ)

Yrd. Doç. Dr. Vedat Ziya Doğan (İTÜ)

TEMMUZ 2007

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ve bu tez çalışması süresince çok değerli fikirleriyle beni yönlendiren, desteğini ve güvenini esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Zahit Mecitoğlu'na en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Zorlu bir dönemi geride bırakıp, bir başka zorlu ama bir o kadar da önemli bir döneme gireceğim bu günlerde; yanımda olan, bana maddi ve manevi destek veren herkese çok teşekkür ederim. Umarım yüksek lisans hayatından daha başarılı işleri doktora eğitimim süresince gerçekleştireyim ve eğitim hayatım boyunca üzerimde çok emeği olan saygıdeğer hocalarıma ve aileme övünç kaynağı olurum.

Son olarak öğrenim hayatım boyunca bana her zaman ve her şart altında sınırsız destek veren, her zaman yanımda olan sevgili aileme benim için yaptıkları her şey için minnetlerimi sunarım.

Temmuz 2007

Selen BAYAR

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
TABLO LİSTESİ.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
ÖZET.....	ix
SUMMARY	xi
1 GİRİŞ	1
2 PİEZOELEKTRİK MALZEMELER.....	5
2.1 PİEZOELEKTRİĞİN TARİHÇESİ.....	5
2.2 PİEZOELEKTRİK MALZEMELERİN ÖZELLİKLERİ.....	6
2.2.1 Elektrik polarizasyonun kaynakları.....	7
2.2.2 Piezoelektrik malzemelerin kullanım alanları.....	8
2.2.3 Ferroelektrik seramikler	8
2.2.4 Polimerler.....	9
3 TERMO-PİEZOELEKTRİK PLAKLAR.....	10
3.1 PLAKLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ.....	10
3.2 PLAK TEORİLERİ	11
3.3 PLAK TEMEL DENKLEMLERİ	12
3.3.1 Kinematik denklemler.....	12
3.3.2 Bünge denklemleri	14
3.3.3 Enerji denklemleri.....	16
4 PLAK GEOMETRİSİ VE MALZEME ÖZELLİKLERİ	22
5 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZ.....	28
5.1 SONLU ELEMANLAR MODELİ	28
5.1.1 KATI 5 Elemanı.....	28

5.1.2	KATI 70 Elemanı	29
5.1.3	KATI 45 Elemanı	29
5.1.4	Plağın sonlu elemanlar modeli	29
5.1.5	ANSYS v10.0 Analiz sonuçları	31
6	RİTZ METODU	42
6.1	NAVIER YAKLAŞIMI İLE U,V,W YER DEĞİŞTİRME DENKLEMİNİN BELİRLENMESİ	42
6.2	PLAĞIN TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ İFADESİNİN ELDE EDİLMESİ	46
7	SONUÇLAR VE TARTIŞMA	53
EK-A		58
EK-B		60
EK- C		61
EK-D		64
EK-E		67
ÖZGEÇMİŞ		77

TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1	PZT 5A malzemesine ait malzeme özellikleri	23
Tablo 4.2	Sadece piezoelektrik malzemelerde olan özellikler	24
Tablo 5.1	Sadece potansiyel fark etkisinde elde edilen sonuçlar	32
Tablo 5.2	Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C iken elde edilen analiz sonuçları	32
Tablo 5.3	Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 20°C iken elde edilen analiz sonuçları	33
Tablo 5.4	Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C iken elde edilen analiz sonuçları	39
Tablo 5.5	Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 20°C iken elde edilen analiz sonuçları	40
Tablo 6.1	393 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)	47
Tablo 6.2	543 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)	48
Tablo 6.3	1851 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)	48
Tablo 6.4	393 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 20°C)	49
Tablo 6.5	543 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)	50
Tablo 6.6	1851 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)	50
Tablo 6.7	393 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (100 V)	52
Tablo 6.8	543 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (100 V)	52
Tablo A.1	Sıcaklığın etkisi dikkate alınarak hesaplanan malzeme özelliklerinin yeni değerleri	58
Tablo B.1	k' 'nın sıcaklığa bağlı denkleminin elde edilmesinde kullanılan MATLAB kodu	60
Tablo B.2	α' 'nın sıcaklığa bağlı denkleminin elde edilmesinde kullanılan MATLAB kodu	60

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 4.1 : Plağın boyutları	22
Şekil 4.2 : Isı iletim katsayısının (k_{11}), sıcaklık ile değişimi	25
Şekil 4.3 : Isıl genleşme katsayısının (α_{11}), sıcaklık ile değişimi	26
Şekil 4.4 : Isı iletim katsayısının (k_{11}) denklemine ait eğri	27
Şekil 4.5 : Isıl genleşme katsayısının (α_{11}) denklemine ait eğri	27
Şekil 5.1 : KATI 5 elemanı	29
Şekil 5.2 : KATI 70 elemanı	29
Şekil 5.3 : KATI 45 elemanı	30
Şekil 5.4 : Plağın sonlu elemanlar modeli	30
Şekil 5.5 : Basit mesnetli plak	31
Şekil 5.6 : Kenarların ortasındaki düğüm noktalarından mesnetlenme durumu	31
Şekil 5.7 : 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, x yönünde meydana gelen yer değiştirme değerleri	34
Şekil 5.8 : 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, y yönünde meydana gelen yer değiştirme değerleri	34
Şekil 5.9 : 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, z yönünde meydana gelen yer değiştirme değerleri	35
Şekil 5.10 : 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, x yönünde meydana gelen gerilme (σ_x)değerleri	36
Şekil 5.11 : 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, y yönünde meydana gelen gerilme (σ_y)değerleri	37
Şekil 5.12 : Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde x yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri	38
Şekil 5.13 : Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_x (MPa) değerleri	39
Şekil 5.14 : Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde x yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri (sıcaklık etkileri)	40
Şekil 5.15 : Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_x (MPa) değerleri	41
Şekil 6.1 : Dörtte biri alınacak olan plağın koordinat düzleminin konumu	43
Şekil 6.2 : w yer değiştirme ifadesinin (a) x'e göre, (b) y'ye göre değişimi	43

Şekil 6.3	: u yer değiştirme ifadesinin (a) x'e göre, (b) y'ye göre değişimi	44
Şekil 6.4	: v yer değiştirme ifadesinin (a) x'e göre, (b) y'ye göre değişimi	44
Şekil 6.5	: Dört farklı sıcaklık aralığında, iki farklı yöntem ile elde edilen (a) u(x,y), (b) v(x,y) ve (c) w(x,y) değerleri	49
Şekil 6.6	: Dört farklı sıcaklık aralığında, iki farklı yöntem ile elde edilen (a) u(x,y), (b) v(x,y) ve (c) w(x,y) değerleri	51
Şekil C.1	: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, z yönünde meydana gelen gerilme (σ_z)değerleri	61
Şekil C.2	: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, x yönünde meydana gelen gerilme (S_x)değerleri	62
Şekil C.3	: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, y yönünde meydana gelen gerilme (S_y)değerleri	62
Şekil C.4	: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, z yönünde meydana gelen gerilme (S_z)değerleri	63
Şekil D.1	: Plâğın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde y yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri	64
Şekil D.2	: Plâğın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde z yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri	64
Şekil D.3	: Plâğın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_y (MPa) değerleri	65
Şekil D.4	: Plâğın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde y yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri (sıcaklık etkileri)	65
Şekil D.5	: Plâğın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde z yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri (sıcaklık etkileri)	66
Şekil D.6	: Plâğın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C' de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_y (MPa) değerleri	66

SEMBOL LİSTESİ

$[c^E]$	:	Katılık matrisi
$[d]$	:	Piezoelektrik sabitler matrisi
$[d]$	:	Piezoelektrik katsayı matrisi
$[e]$	:	Piezoelektrik matrisi
$[g]$	:	Piezoelektrik sabitler matrisi
$[s]$	:	Katılık modülü
$[s^E]$	:	Esneklik matrisi
$[\beta]$	:	Dielektrik sabitler matrisi
$[\epsilon]$	:	Dielektrik katsayısı matrisi ($\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$)
$\{D\}, D_i$	:	Elektrik alan yer değiştirme vektörü
$\{E\}$	:	Elektrik alan
$\{F_v\}$	:	Bünye yükleri
$\{F_\Omega\}$	:	Tekil kuvvetler
$\{M\}$	:	Düzlem içi momentler
$\{N\}$	:	Düzlem içi kuvvetler
$\{S\}$	:	Gerinme vektörü
$\{T\}$	:	Gerilme vektörü
$\{u\}$	:	Yer değiştirme vektörü
ΔT	:	Sıcaklık farkı
a	:	Plak eni
A_{mn}, B_{kl}, C_{ij}	:	Bilinmeyen katsayılar
b	:	Plak genişliği
D	:	Plağın eğilme rijitliği
E	:	Elastisite modülü
G	:	Kayma modülü
h	:	Plak kalınlık
k	:	Isı iletim katsayısı
Q	:	Uygulanan tekil elektrik yükü
u	:	x yönündeki yer değiştirme
U_b	:	Eğilme gerinme enerjisi

U_m	:	Membran gerinme enerjisi
v	:	y yönündeki yer değiştirme
W	:	Plak üzerinde yapılan iş
w	:	z yönündeki yer değiştirme
w_{maks}	:	Çökme miktarı
α	:	Isıl genleşme katsayısı
$\gamma_{x,y,z}$	:	Kayma-gerinmeleri (x, y, z yönlerinde)
$\epsilon_{x,y,z}$	:	Normal gerinmeler (x, y, z yönlerinde)
Π	:	Toplam potansiyel enerji
ρ	:	Yüzey yükü
σ	:	Normal gerilme
τ	:	Kayma gerilmesi
ν	:	Poisson oranı
Φ	:	Elektrik potansiyeli
Ω	:	Yüzey alanı

ÖZET

Günümüzde, akıllı yapılar geniş kullanım alanlarına sahipler. Kullanım alanlarının gün geçtikçe artıyor olması bu yapıları gelişmeye açık bir konu durumuna getirmiştir. Bu nedenle, akıllı malzemeler üzerine bir çok araştırma yapılmaktadır.

Bugüne kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde, aralarında ısı kuvvetlere maruz kalan yapılar veya malzemeler ile ilgili çalışmalar da bulunmaktadır. Ancak bu ısı kuvvetlerin yer aldığı çalışmalarda sıcaklığın malzemeye etkileri (genel olarak) ihmal edilmektedir. Havacılık ve uzay teknolojilerinde, geniş kullanım alanına sahip piezoelektrik malzemelere sıcaklığın etkisi büyük önem taşımaktadır. Bu bilgilerin ışığında, bu çalışmada eyleyici olarak kullanılması planlanmış piezoelektrik bir plağın, sıcaklığın etkilerinin ihmal edildiği ve edilmediği durumlardaki statik analizleri gerçekleştirilmiştir.

Yapılan bu çalışmada, piezoelektrik plağın ısı ve elektrik yükleri altındaki yapısal-statik analizleri iki farklı yöntem kullanılarak ele alınmıştır. Birinci yöntem olarak, sonlu elemanlar metoduna dayalı bir çözüm sunan ANSYS 10.0 paket programı kullanılmıştır. Burada ilk olarak, (sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisi ihmal edilerek) sabit elektrik potansiyeli fakat farklı sıcaklık değerlerinde plağın statik analizi gerçekleştirilmiştir. Daha sonra, aynı şartlar altında, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisi dikkate alınmış, plağın statik analizleri tekrarlanmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmadan elde edilen verilere göre, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin önemi hakkında değerli bilgiler edinilmiştir.

İkinci yöntem olarak, Ritz enerji metodu kullanılmıştır. Ritz enerji metodu için gerekli hesaplamalara başlamadan önce, plağın sınır şartlarına uygun olarak u , v ve w yer değiştirme denklemlerinin seri açılımı ifadeleri belirlenmiştir. Bu aşamadan sonra, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin ihmal edildiği durum için, eğilme birim uzama enerjisi, membrane birim uzama enerjisi, ısı yük ve elektrik yüklerinin yaptığı işler ile ilgili temel denklemler kullanılarak plağa ait toplam potansiyel enerji ifadesi elde edilmiştir. Aynı işlemler sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin ihmal edilmediği durum için de gerçekleştirilmiştir.

Elde edilen toplam potansiyel enerji ifadeleri ve Ritz enerji metodu kullanılarak yer değiştirme denklemlerindeki bilinmeyen katsayı ifadelerinin değerleri belirlenmiştir.

Bu ifadeler yardımı ile plağın belirli noktalarında meydana gelen yer değiştirme ve gerilme değerleri elde edilmiştir.

İki yöntem sonucunda elde edilen tüm değerler karşılaştırılarak, kullanılan metodların ve belirlenen denklemlerin uygunluğu hakkında bilgi edinilmiştir.

SUMMARY

In recent years, smart materials have been widely used in several applications. The increasing and common usage of smart materials has also raised their potential and boosted the development of smart materials/structures. And because of this reason, several studies have been conducted on smart materials.

If the literature is going to be scanned for the studies conducted with smart materials, it is likely to see that there are several researches conducted on structures/materials which are also experiencing thermal forces. But in the studies, where the thermal forces are considered, the effect of temperature on the materials has been neglected. But thermal effects occurring in piezoelectric materials have a significant importance in aerospace technologies. For that reason, in this study, static analysis of a piezoelectric plate, which has been considered to be used as an actuator, has been performed considering both ‘thermal effects neglected case’ and ‘thermal effects included case’.

In the thesis, static analysis of piezoelectric plate under thermal and electrical forces has been conducted using two different methods. As a first method, ANSYS v10.0 has been used for analysis purposes, which produces results based on the Finite Elements Method (FEM). As a first step, by simply neglecting the thermal effects on the material properties, a static analysis has been conducted under constant electric potential and different temperature values. Afterwards, under the same conditions, static analysis has been performed by including the thermal effects and obtained results have been given in comparison together with the results obtained from the ‘thermal effects neglected’ case. As a result of the comparison, valuable information has been obtained related with the effect of temperature on materials.

As a second method, Ritz Energy method has been used in the thesis. Before getting into the calculations related with the Ritz method, series expansion expressions of u , v and w displacements have been obtained with respect to the appropriate boundary conditions. After obtaining the governing equations, total potential energy expression of piezoelectric plate has been obtained for the case of neglected thermal forces using the fundamental equations of bending strain energy, membrane strain energy, work of thermal force and electric force. Same calculations have also been conducted for the ‘thermal forces included case’ under similar conditions. Using obtained total potential energy expressions and Ritz energy method, unknown coefficients in the

displacement equations of u , v and w have been found and following to that, representation of displacement equations have been derived completely. Benefiting from the obtained expressions, displacements and stress values occurring at specific locations on the plate have been calculated.

Attained results from both methods have been compared with each other and significant information has been gained related with the appropriateness of the used methods.

1 GİRİŞ

Bu çalışmada, piezoelektrik özelliğe sahip Kurşun Zirkonat Titanat (PZT) malzemesi kullanılarak üretilen, dört kenarından ankastre olarak mesnetlenmiş üç boyutlu plağın statik analizi ANSYS 10.0 paket programı ve Ritz enerji metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Geçmişten günümüze kadar olan süreçte, akıllı malzemeler ve yapılar üzerine birçok araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalar doğrultusunda meydana gelen gelişim ile akıllı yapıların potansiyeli arttığından dolayı bu yapılar geniş kullanım alanına sahip olmuşlardır. Özellikle piezoelektrik malzemelerin sahip oldukları hızlı cevap verme ve düşük enerji kullanma gibi özellikleri, bu malzemelerin özellikle eyleyici ve algılayıcı üretiminde sıkça kullanılmasına neden olmuştur. En basit haliyle bir piezoelektrik algılayıcı üretebilmek için, bir elektrik potansiyel farkı piezoelektrik malzemeye uygulandığında birim uzama ortaya çıkması yeterli olmaktadır. Aynı şekilde, eğer piezoelektrik malzeme bir deformasyona maruz kaldıysa, elektrik potansiyel farkı ortaya çıkar ve bir algılayıcı elde edilir. Piezoelektrik eyleyiciler ve algılayıcılar, başta havacılık ve uydu gibi uzay sistemlerinde, titreşim indirgeyici sistemlerde, akustik sönümleme sistemlerinde ve yapısal sağlığı izleme sistemleri gibi birçok alanda kullanılmaktadırlar.

Dünya’da özellikle havacılık ve uzay konusunda büyük çalışmaların yürütüldüğü ABD Ulusal Havacılık ve Uzay Dairesi (NASA) [1, 2, 3] başta olmak üzere, ABD Hava Kuvvetleri [4] ve ABD İleri Savunma Projeleri Araştırma Ajansı (DARPA) [3] hava ve uzay araçlarında akıllı yapıların kullanımı üzerine çok sayıda araştırma ve geliştirme projesi yürütmektedirler.

Manson [5], piezoelektriğin tarihi üzerine, keşfini ve bazı uygulamalarını içeren bir çalışma yapmıştır. Doğrudan piezoelektrik etki, bir elektrik cevabının uygulanan gerinmesi sonucunda Pierre ve Jacques Curie tarafından keşfedilmiş ve ilk olarak 1880 yılında tanımlanmıştır. Pierre ve Jacques Curie, kuvartz ve rochelle tuzu gibi piezoelektrik olabilecek çok sayıda ve farklı kristaller bulmuşlardır. Ters piezoelektrik etki ise, bir gerinme cevabı uygulanan elektrik potansiyelinden dolayı oluşmaktadır. Farklı araştırmacıların bu durumu teorik olarak açıklamalarına rağmen deneysel olarak kanıtlanması bay ve bayan Curie tarafından gerçekleştirilmiştir. Piezoelektrik etkinin ilk pratik kullanımı, I. Dünya Savaşı’nın sonlarına doğru kuvartz kristalinin ultrasonik dalgalar oluşturma amacıyla sonarlarda kullanılması ile

gerçekleşmiştir. Ayrıca kuvartz ve rocbelle tuzu, sesin dönüştürülmesi gibi farklı akustik uygulamalarda da kullanılmıştır. Piezoelektrik malzemeler, yakın geçmişte, birçok dönüştürme uygulamalarında kullanılan diğer malzemelerin yerini almıştır. Buna en güzel örnek olarak piezoelektriklerin, gerinme ölçer, basınç dönüştürücü ve ivme ölçer gibi çeşitli dönüştürücülerde yaygın olarak kullanılması gösterilmektedir [6].

Bunların yanında, Candy ve Tiesten, piezoelektrik üzerine kesin çalışmalar sunmuşlardır [7, 8]. Candy, kristallerdeki piezoelektrik etkiyi açıklamak için bazı tarihi bilgileri, kristallerdeki etkinin nedenlerini, piezoelektriğin prensiplerini ve çok sayıda uygulamayı içeren bir çalışma ortaya koymuştur. Tiesten ise, plak titreşimleri ve lineer piezoelektrik teorisi üzerine yoğunlaşarak, lineer piezoelektrik çalışmalarında varolan dalga problemleri konularıyla ilgili tartışmaları, çözümleri, bazı yaklaşımları ve bu yaklaşımların kullanımlarını içeren bir araştırma yazısı yayınlamıştır.

Basit piezoelektrik problemler ile ilgili kesin çözümler, içlerinde Ray [9-11], Heyliger [12-14] ve Benveniste-Dvorak'ın [15] da aralarında bulunduğu çok sayıdaki yazar tarafından kanıtlanmıştır. Bu makalelerdeki çalışma konuları, 'tek katmanlı piezoelektrik plaklar' ve 'çok katmanlı piezoelektrik plaklar' olmak üzere iki guruba ayrılmaktadırlar. İki durumda da çözülen problemlerin tümü, (basit harmonik elektriksel veya yayılı fiziksel yükler altında) yarı-sonsuz plakların silindirik eğilme ile kısıtlanmasına yol açmaktadırlar. Çok katmanlı problemler ise Pagano'nun [16, 17] komposit katmanlar kullanarak gerçekleştirdiği çalışmaya benzer bir yöntem kullanarak çözülmüşlerdir. Pagano'nun ele aldığı çalışmalarda elde edilen sonuçlar, yaklaşımları ve basitleştirilmiş teorilerin sonuçlarını kontrol etmede öncelikli olarak yardımcı olmuştur. Örneğin Ray [10, 11], uzunluğun kalınlığa oranının altıdan büyük olduğu plaklar için yerdeğiştirmelerin, gerilmelerin ve elektrik potansiyelinin kalınlık boyunca lineer olarak değiştiğini bulmuştur. Bu çözümlerin bir kısmında dinamik etkiler de dikkate alınmıştır [14]. Vel ve Batra [18], keyfi sınır koşullarında, çok katmanlı piezoelektrik plaklar için kesin çözümler sunmuşlardır ve sınır katmanının serbest/ankastre bağlanmış kenarlara etkilerini incelemişlerdir.

Problemleri çözmek için, önceki çalışmalarda geliştirilen ve kullanılan kesin çözümlerden farklı olarak daha gerçekçi yaklaşım teorilerinin kullanıldığı çalışmalar da bulunmaktadır. Crawley [6, 19], piezoelektrik eyleyici bölümleri olan kirişleri de içine alan çeşitli kiriş düzeneklerini incelemiştir. Euler-Bernoulli ve biraz değiştirilmiş Euler-Bernoulli kiriş teorileri bu çalışmalarda kullanılmıştır. Ve ayrıca bu çalışmalarda alüminyum, cam-epoksi ve grafit-epoksi gibi malzemelerden üretilen kirişler dikkate alınmıştır. Crawley ve Anderson [19], kiriş ile eyleyici arasındaki

sonlu kalınlıktaki yapıştırıcı katmanın etkilerini incelemişlerdir. Lee [20] ve Wang, Rogers [21], piezoelektrik etkilerin dikkate alındığı klasik katmanlama teorisi gibi toeriler geliştirmişlerdir.

Sadece piezoelektrik malzemelerin ele alındığı çalışmaların yanı sıra, tamamı piezoelektrik malzemeden üretilen veya piezoelektrik bir katman içeren plakların ve kirişlerin dinamik ya da statik analizleri ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların bir kısmında yapıya etkiyen kuvvetlere ısı kuvvetleri de eklenmiştir.

Zhuang [22], ferroelektrik alanda piezoelektrik seramiğin oluşturulmasını incelemiştir. Ayrıca deneysel olarak gerçekleştirdiği çalışmada, 0°K ile 300°K sıcaklık aralığında saf PZT seramiğine ait dielektrik, piezoelektrik ve elastik özelliklerini ölçmüş, düşük ve yüksek sıcaklıklarda malzeme özelliklerinin gösterdikleri değişimleri incelemiştir. Sherrit ve Yang [23], piezoelektrik malzemelerin çeşitli çevre koşullarında kullanılmalarından dolayı bu çevre şartlarındaki sıcaklığın etkilerini gözlemlemek için çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalarında PZT seramik numunesinin, 0°C ile 100°C sıcaklık aralığında empedans spektrumunu ölçmek için empedans rezonans tekniğini kullanmışlardır. Çalışma sonucunda malzemeye ait matris sabitlerinin sıcaklık ile nasıl değiştiği elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen veriler doğrultusunda, değişim gösteren matris sabitlerinin sıcaklığa bağlı denklemleri sunulmuştur. Yong ve Wei [24] ise, piezoelektrik seramiğin malzeme özelliklerine ait Langrage sıcaklık katsayılarını elde etmek üzere yapılmış bir çalışmadır.

Piezoelektrik seramikler gibi malzemeler üzerinde sıcaklığın etkilerini gözlemlemek için çalışmalar gerçekleştirilmiş olmasına rağmen, ısı etkilerinin de hesaba katılarak gerçekleştirilen bazı çalışmalarda sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisi ihmal edilerek sayısal bir çok çalışma gerçekleştirilmiştir. Wauer ve Suherman [25], piezoelektrik ve yarı iletken plak tabakasının kalınlığının titreşimini incelemişlerdir. Bu çalışmada kalınlık boyunca bir ısı iletiminin etkileri de hesaba katılmasına rağmen, bu ısının ortamın sıcaklığını değiştirerek malzeme özelliklerine etkisi dikkate alınmamıştır. Frekans ve sıcaklık analizleri konusunda Wang [26], piezoelektrik plağın denklemlerinin türetilmesi konusunda bir çalışma sunmuştur. Bu çalışmada, titreşim analizlerinde yaygın olarak kullanılan Mindlin plaka teorisi yerine Lee plaka teorisini kullanmıştır. Ancak sıcaklık analizi için, diğer çalışmalarda olduğu gibi sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisi dikkate alınmadan denklemler türetilmiştir.

Genel olarak, piezoelektrik malzemelerin kullanıldığı plaklar ve kirişler ile ilgili problemlerde sıcaklığın malzeme özelliğini nasıl etkilediği hususu ihmal edilmiştir. Ancak bu etkinin ihmal edilmediği (az sayıda da olsa) bazı çalışmalar yapılmıştır.

Lee ve Saravanos [27], tarafından yapılan ve teknik rapor olarak ulaşılan yayınları, bu çalışmalardan bir tanesidir. Bu raporda, piezoelektrik kompozit bir plağın analitik denklemlerinin geliştirilmesi üzerine çalışılmıştır. Analitik denklemlerin türetilmesi esnasında sıcaklık değişimin malzeme özelliklerine etkisi dikkate alınmıştır. Sıcaklık etkilerinin dikkate alınarak yapılan analiz sonuçları ile sıcaklık etkilerinin dikkate alınmadığı durumda yapılan analiz sonuçları bu çalışmanın sonucu olarak sunulmuş ve sıcaklığın malzeme özellikleri üzerindeki etkisinin ihmal edilemeyecek boyutta olduğunu gösteren bir teknik rapor yazılmıştır. Sıcaklığın etkilerinin ihmal edilmediği bir başka çalışma ise Wang ve Mai'ye [28] aittir. Farklı ortam sıcaklıklarında, piezoelektrik seramiklerin gerilme değerleri üzerine bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Gerilmeleri hesaplamak için kullanılacak denklemlerin türetilmesinde, sıcaklığın malzeme özelliklerine ait matrislerdeki katsayılar üzerindeki etkisinin dikkate alındığı bir inceleme yapmışlardır.

Bu tez çalışmasında, tek bir katman olarak piezoelektrik malzemeden üretilen ve dört kenarından mesnetlenmiş plak üzerinde incelemeler yapılmıştır. Piezoelektrik plağın eyleyici özellik gösterebilmesi için üzerine elektriksel potansiyel uygulanmıştır. Plağın, farklı sıcaklık değerlerindeki davranışlarını gözlemlemek amacı ile; malzeme özelliklerine sıcaklık etkilerinin katılmadığı ve katıldığı durum olmak üzere iki farklı durumda statik analizler yapılmıştır. Analizler ilk olarak ANSYS v10.0, sonlu elemanlar metodu tabanlı, paket programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Daha sonra Ritz enerji metodu ve plağa ait yer değiştirme denklemleri kullanılarak sayısal analizler gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonunda ise iki farklı yöntem ile yapılan analizlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2 PİEZOELEKTRİK MALZEMELER

Akıllı yapılara adını ve özelliklerini veren akıllı malzemeler; piezoelektrik, şekil hafızalı alaşımlar, magnetostriktif malzemeler, elektrostriktif malzemeler, electro-rheological akışkanlar ve fiber optikler olarak altı gruba ayrılmaktadırlar. Bu tez çalışmasında, piezoelektrik malzemeler kullanıldığından dolayı diğer akıllı malzemeler ile ilgili bilgi verilmemiştir.

2.1 Piezoelektriğin Tarihçesi

Günümüzde piezoelektrik ya da piezoelektrik olgu olarak adlandırılan özellik, ilk olarak yüzyıllar öncesinde tourmaline kristali olarak bilinen farklı renkleri bulunan şeffaf taşlarda fark edilmiştir. Bu özelliğin fark edilmesinden sonra birçok bilim adamının bu konuda çalışmalar yapmış olmasına karşın, bir malzemede piezoelektrik etki ilk olarak 1880’li yıllarda Pierre ve Jacques Curie tarafından gösterilmiştir [29]. Pierre ve Jacques Curie, uygulanan basınçla orantılı bir voltaj üreten sıkıştırılmış bazı kristal malzemelerin bir yüzünden diğer yüzüne bir voltaj uygulayarak malzemenin şeklinde bir değişiklik oluştuğunu gözlemlemişlerdir. Piezoelektriklik olarak adlandırılan bu karakteristik özellik quartz ve tourmaline gibi kristalize malzemelerde görülmektedir [30].

Piezoelektrik malzemelerden olan piezoelektrik quartz, I. Dünya Savaşı esnasında ultrasonik dalgalar oluşturmak amacı ile sonar olarak ve algılayıcılar olarak kullanılmıştır. Böylece ilk olarak piezoelektrik malzemeler laboratuvar ortamının dışında bir uygulamada kullanılmışlardır [6,29].

1920’li yıllara gelindiğinde quartz malzemeler osilatörün rezonans frekansının kontrolü için kullanılmaya başlandı. Bu gelişmeleri takip eden süreçte piezoelektrik malzemelerin mikrofonlar, ivme ölçerler, ultrasonik dönüştürücüler, eğiciler gibi birçok uygulama alanları olmuştur. Ancak yapılan çalışmalar, malzemelerin aletlerdeki performanslarının sınırlı olmasını ortadan kaldıracabilecek düzeye ulaşmamışlardır. Elektronik alanında gelişmelerin başlaması ile piezoelektrik malzemelerde de bir gelişme süreci başlamış oldu. İlk olarak ferroelektrik seramikler (piezoelektrik seramikler / piezoseramikler) bulundu ve bu buluş piezoelektrik malzemelerin kullanım alanlarını oldukça genişletti [29].

Piezoelektrik malzemelerle, eyleyici ve algılayıcı maksadı ile kullanılarak, ses ve titreşim kontrolü yapılabileceği 1980'li yıllarda kanıtlanmıştır ve bu alanda araştırmalar günümüzde de devam etmektedir.

Ülkemizde piezoelektrik malzemeler üzerine ilk çalışmalar sayın Prof. Dr. M. Cengiz Dökmeci tarafından yapılmıştır. Bu konudaki ilk çalışmaları piezoelektrik malzemeden üretilen çubukların titreşim analizi üzerine yapmıştır [32].

2.2 Piezoelektrik malzemelerin özellikleri

Piezoelektrik malzemelerin büyük çoğunluğu kristalli katılardır. Bunlar tek kristalli ve çok kristalli katılar olmak üzere iki gruba ayrılırlar. Tek kristalli katılar doğal olarak elde edilebildiği gibi yapay yollarla da elde edilebilir. Çok kristalli katı yapılar ise piezoelektrik özelliği sonradan kazandırılan malzemelerdir [29].

Bir malzemede piezoelektrik olgunun meydana gelebilmesi için; malzemenin kristal kafes yapısında merkezi simetrik özellik göstermemesi gerekmektedir. Bunun anlamı kafes yapıyı oluşturan atomik yapılardan, bir eksen boyunca olan atomik yapının diğer eksenleri oluşturan atomik yapıdan farklı olmasıdır [31]. Sonuç olarak, piezoelektrik olgu, kristal kafes yapıdaki iyonların yer değiştirmeleri sonucu oluşur. Kristal kafesteki iyonların yer değiştirmelerine ise yük çiftlerinin polarizasyonu neden olur ve bunun sonucunda da mekanik deformasyon oluşur [31].

Doğrudan ve dolaylı olarak iki gruba ayrılan piezoelektrik etki bir malzemenin mekaniksel ve elektriksel davranışları arasındaki etkileşimi göstermektedir [29].

- *Doğrudan piezoelektrik etki*; piezoelektrik özelliğe sahip olan malzemenin uygulanan kuvvetle orantılı olarak küçük fakat ölçülebilir bir elektrik yükü oluşturma kabiliyetinden meydana gelmektedir.
- *Dolaylı piezoelektrik etki*; uygulanan elektrik alanın piezoelektrik malzemede deformasyona yol açmasıdır. Bu etki genelde eyleyici tasarımlarında uygulanmaktadır.

Doğal olarak elde edilemeyen, genellikle ticari amaçlarla üretilmek istenen piezoelektrik malzemelerin üretimi; istenen yönde piezoelektrik özellik yaratmak için malzeme yüksek şiddette elektrik alana maruz bırakılırken malzemeye yüksek sıcaklık uygulanmasını gerektirir [31]. Bu işleme kutuplama adı verilmektedir. Ancak kutuplama işlemi bittiğinde piezoelektrik malzeme, piezoelektrik özellik göstermez. Bu duruma neden olan ise malzemedeki dipollerin gelişi güzel dağılmasıdır. Kutuplama eksenini doğrultusunda bir voltaj uygulanmasının üzerine dipoller tekrar yönlendirilirler. Dipollerin bu yeni yönelimleri malzemenin sahip

olduğu piezoelektrik özelliği göstererek, şeklinde bir değişiklik oluşmasına neden olur [31].

Anizotropik özellik, piezoelektrik malzemelerin temel karakteristiğini oluşturmaktadır [4]. Bu nedenle; piezoelektrik malzemelerin mekaniksel ve elektriksel davranışları, malzemeye dışarıdan uygulanan elektrik alanının uygulama eksenine dayanmaktadır. Buna ek olarak; malzemenin elektrik yanıtı, dışarıdan uygulanan mekanik yükün uygulama doğrultusuna dayanmaktadır. Bu nedenle tasarım yöntemlerinde piezoelektrik malzemenin tasarımdaki konumu, anizotropik özelliklerden dolayı çok dikkatli yapılmalıdır.

Yaygın olarak kullanılan piezoelektrik malzemelerin başında piezoseramikler ve piezopolimerler gelmektedir. Kurşun zirkonat titanat (PZT) en iyi bilinen piezoseramik ve PVDF (Poliviniliden Florid) en iyi bilinen piezopolimer malzemelerdir. Bu iki malzemeye ait özellikler raporun devamında verilmiştir. Her iki sınıfa giren piezoelektrik malzemelerin çok kapsamlı özelliklerinden dolayı çok çeşitli uygulama alanları vardır.

Bu iki piezoelektrik malzeme sınıfının farklı özellikleri farklı uygulama alanlarında üstünlük göstermelerine neden olmaktadır. Örneğin; piezoseramik elemanların yüksek rijitliği, elektrik enerjisini verimli bir şekilde mekanik enerjiye dönüştürmesini sağlamaktadır. Bu dönüşüm de piezoseramik malzemeden üretilmiş parçaya iyi çalışma kabiliyeti vermektedir [31].

2.2.1 Elektrik polarizasyonun kaynakları

Bir elektrik alan altında kutuplanan malzeme, dielektrik olarak adlandırılır. Bir dielektrik malzemenin polarizasyon kaynakları 3 gruba ayrılmaktadır [29].

- *Elektronik polarizasyon*; elektrik alan uygulandığı zaman, elektron bulutunun deformasyon ile makroskobik dipol oluşturması durumudur.
- *İyonik polarizasyon*; elektrik alan uygulandığı zaman, anyonların anot tarafından katyonların da katot tarafından çekilerek dipollerin oluşması durumudur.
- *Dipollerin tekrar yönelmesi* durumunda, makroskopik olarak polarizasyona maruz kalmamış malzemeler polarize olmuş alanlar içerdiği durumlarda elektrik alan uygulanması toptan bir polarizasyon oluşturarak bu alanların tekrar yönelmelerini sağlamaktadır.

2.2.2 Piezoelektrik malzemelerin kullanım alanları

Piezoelektrik malzemeler, akıllı yapılar olarak en çok eyleyici ve algılayıcı üretiminde kullanılmaktadırlar. Buna ek olarak başta titreşim kontrolü olmak üzere eyleyicilerin ve algılayıcıların yapısında çok sık olarak kullanılmaktadır.

İlginç kullanım alanlarından bir tanesi ise ayakkabı gibi ayağa giyilen herhangi bir nesnenin üretimidir. Bu alanda kullanılmasının amacı ise yürüme esnasında oluşan ağırlık transferinden kullanılabilen enerjiyi toplamaktır. Bu aynı zamanda, makine parçalarının üretiminde de sıkça kullanılan akıllı malzemelerden bir tanesidir.

Bunların dışında yine titreşim kontrolünde olduğu gibi kontrol amaçlı uygulamalarda da kullanılmaktadır. Bu uygulamalarda kontrol edilmek istenen şey kullanıldığı parçada oluşan yer değiştirme miktarı ya da ses-gürültü kontrolü olabilir.

2.2.3 Ferroelektrik seramikler

Ferroelektrik seramikler genellikle piezoelektrik seramikler (piezoseramik) adı altında ifade edilmektedirler. Piezoelektrik seramik malzemelerdeki piezoelektrik etkiyi anlamak için, bu malzemelerin mikroskobik boyuttaki yapıları incelenmiştir [29]. Kюри sıcaklığı (θ_c) olarak adlandırılan belirli bir sıcaklık altında, piezoelektrik malzemenin kristal yapısı merkezi simetriye sahip olur ve elektrik dipole momenti oluşmaz. Bu sıcaklığın üzerinde, malzemenin kristal yapısı daha karmaşık bir yapı olan eksenel simetrik olmayan bir faz değişikliğine uğrar [29]. Bu fazda, kristal yapı doğal elektrik dipol özellik gösterir.

Piezoelektrik kristaller, ferroelektrik alanlar olarak adlandırılan aynı şekilde polarize olmuş kısımlar içermektedir. Her bir ferroelektrik alan içindeki tüm elektrik dipoller aynı doğrultuda sıralanmıştır. Bununla birlikte, piezoelektrik seramiğin yapısındaki kristaller elektrik alana maruz bırakıldıktan sonra soğutulduklarında tüm yapı içinde bölüm bölüm kutuplanan alanlar, elektrik alana yakın bir doğrultuda sıralanma eğilimi göstereceklerdir [29].

Piezoelektrik elemanlar, Kюри sıcaklığının altında olmayan bir sıcaklıkta, yüksek elektrik alana maruz bırakılarak oluşturulan kutuplaşma eğilimi sayesinde ve istenilen doğrultuda kutuplanarak piezoelektrik yapılabilir.

PZT (Kurşun Zirkonat Titanat): En iyi bilinen piezoseramik malzemedir. Piezoseramikler genel olarak gevrek malzemeler olmalarından dolayı, bu piezoelektrik malzemeden küçük yüzey alanlarıyla orantılı küçük, basit şekilli parçalar üretilmektedir. PZT, %0.1 lik geri alınabilen birim uzamaya sahiptir. Genellikle eyleyicilerin yapılarında kullanılırlar ve geniş frekans alanına sahiptirler [29].

2.2.4 Polimerler

Piezoelektrik olgu, en iyi bilinen polimer PVDF (Polivinliden Florid) de olduğu gibi polimerin moleküler kutup dipollerinin aynı doğrultuda yönlendirilmesi ile elde edilir. Florid karbona nazaran daha fazla elektronegatif olduğundan dolayı PVDF piezoelektrik malzemeye dönüştürülebilmektedir. Florid atomları karbon atomlarının elektronlarını çeker. Böylece CF_2 grupları zincir içinde kutupsal olurlar ve böylece elektrik alana maruz bırakıldıklarında sıralanırlar. Buna karşıt olarak, piezopolimer şekil değiştirdiğinde makroskopik dipoller oluşacaktır [29].

PVDF (Polivinliden Florid): PVDF üzerine çalışmalar, ilk olarak 1960'lı yılların sonlarına doğru Kawai tarafından yapılmıştır. En iyi bilinen bu piezopolimer malzeme, piezoseramik malzemelere karşılık esnek plastik malzemelerdir. İnce plakalar olarak çeşitli şekillerde ve boyutlarda üretilmektedir. PZT gibi algılayıcı üretiminde yaygın olarak kullanılan piezoelektrik malzemelerdir [29].

3 TERMO-PIEZOELEKTRİK PLAKLAR

3.1 Plakların Genel Özellikleri

Plaklar, mühendislik hesaplamalarında sıkça kullanılan yapılardır. Özellikle uçak, uydu, gemi ve köprü gibi yapılarda, mühendisler gerekli hesaplamaları yapabilmek amacı ile bu yapıların bazı kısımlarını (başta plaklar olmak üzere) plak veya kiriş olarak modellemektedirler. Modelleme sürecinden sonra, yapının maruz kaldığı yükler dikkate alınarak gerekli sayısal analizlerin gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Elde edilen sayısal sonuçlara göre yapının güvenliği olup olmadığına karar verilir.

Özellikle havacılık sanayisinde kullanılan yapıların modelleme işleminde, plaklar yaygın şekilde kullanılırlar. Kullanılan plakları birbirinden farklı kılan şey, plakların kalınlıkları ve mesnetlenme şekilleridir. Dolayısıyla, plakaların analizinde:

- Plakların geometrisi ve mesnetlenmeleri,
- Kullanılan malzemenin davranışı,
- Yükler ve uygulanma şekilleri,

dikkate alınan ve analiz sürecini etkileyen unsurlardır.

Plaklar, genişliğin kalınlığa oranına bağlı olarak üç gruba ayrılırlar:

1) Kalın plaklar

$$\frac{a}{h} \leq 8 \dots\dots\dots 10 \quad (3.1)$$

2) Çok ince plaklar

$$\frac{a}{h} \geq 80 \dots\dots\dots 100 \quad (3.2)$$

3) İnce plaklar

$$8 \dots\dots\dots 10 \leq \frac{a}{h} \leq 80 \dots\dots\dots 100 \quad (3.3)$$

İnce plaklar da bazı özel durumlar için iki grupta incelenmektedirler.

a) Katı (stiff) plaklar; eğilme etkisinin de dikkatte alındığı plaklardır.

$$\frac{w_{maks}}{h} \leq 0.2 \quad (3.4)$$

b) Esnek plaklar; eğilme ve membran etkilerin dikkate alındığı plaklardır.

$$\frac{w_{maks}}{h} \geq 0.3 \quad (3.5)$$

3.2 Plak Teorileri

Plaklar konusundaki ilk matematiksel yaklaşım, 1766 yılında L. Euler tarafından geliştirilmiştir. Euler, çok ince plaklar için membran teoriiyi geliştirmiştir. Ayrıca dairesel, üçgen ve dikdörtgen şekilli çok ince plaklar için serbest titreşim analiz problemlerini çözmüştür [34].

Euler'den sonra E.F.F. Chladni, plak titreşimlerini deneysel olarak gerçekleştirip elde ettiği sonuçları açıklamıştır. Bununla birlikte serbest titreşim için çeşitli modlar keşfetmişlerdir.

Daha sonra birçok matematikçi, plaklar üzerine çalışmalarını sürdürmüş ve plakların analizinde kullanılabilecek denklemler türetmişlerdir. Ancak bu denklemler hatalı olduğundan dolayı, bir önceki çalışmayı gerçekleştiren matematikçinin hatasını sürekli düzeltmeye çalışmışlardır. Denklemlerdeki hatalar, L. Navier [34] tarafından yapılan çalışmaya kadar kesin olarak düzeltilememiştir. Navier yayılı-statik bir yüke maruz kalan plağa ait diferansiyel denklemi türetmiştir. Sınır değerleri belli olan bir dikdörtgen plak için çözüm olarak geliştirdiği metod ile plağa ait diferansiyel denklemi cebirsel denkleme çevirebilmektedir. Navier'in bu metodda kullandığı yaklaşım, Fourier tarafından geliştirilen çift trigonometrik seri kullanımına dayanmaktadır.

Navier'in çalışmalarından sonra, Gustav R. Kirchhoff [34] ilk tam plak eğilme teorisini geliştirmiştir. Kirchhoff'un kendi çalışmaları üzerine yayınladığı ilk yazılarında daha önce başka bilim adamları tarafından yapılan çalışmaların özetlerinden bahsetmiş ancak Navier'in çalışmalarından bahsetmemiştir. Ancak Kirchhoff, Bernouilli'nin kiriş hipotezlerine dayanarak, plak eğilmesi için Navier'in denklemlerine benzer diferansiyel denklemleri farklı enerji yaklaşımı kullanarak türetmiştir [34].

Günümüzde, Kirchhoff, Midline ve Lee plak teorileri en çok kullanılan teoriler arasına girmektedirler. Bu çalışmada, plak ile ilgili kabuller yapılmadığından dolayı, var olan plak denklemleri olduğu gibi kullanılmıştır.

3.3 Plak Temel Denklemleri

Pkağın orta düzleminde, x, y ve z doğrultusuna göre yer değiştirme vektörlerinin ögeleri u, v ve w ile ifade edilmektedir. Yer değiştirme vektörünün ögelerinden olan w ve yanal yayılı yükü aşağı doğrultuda pozitif alınmaktadır. Bir plak için şu kabuller yapılmaktadır [38].

$$S_z = 0 \quad (3.1a)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (3.1b)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (3.1c)$$

3.3.1 Kinematik denklemler

Klasik plaklar ve kabuklar teorisi, elastisite teorisinin önemli bir uygulamasıdır. Bu teori kuvvetler, yer değiştirmeler, gerilmeler ve gerinmeler arasındaki ilişkiye değinmektedir. Katı bir cisim dış kuvvetlere maruz kaldığında, yapının içinde gerilmeler ve gerinmeler meydana gelir. Yapıda meydana gelen deformasyon; yapının geometrik oluşumuna, uygulanan yüke ve malzemenin mekanik özelliklerine bağlıdır. Elastisite teorisinin (genellikle), malzeme özellikleri izotropik veya homojen olan yapılarda kullanılması önerilmektedir.

(3.1) ifadesinde verilen kabuller dikkate alınarak, plağa ait kinematik ifadeler şu şekilde elde edilmiştir [38].

$$w^z = w(x, y) \quad (3.2a)$$

$$u^z = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u(x, y) \quad (3.2b)$$

$$v^z = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v(x, y) \quad (3.2c)$$

Kirchhoff teorisine göre, (3.2) ifadesinde verilen $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ sıfır olarak kabul edilmektedir. Bu durumda,

$$w^z = w(x, y) \quad (3.3a)$$

$$u^z = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.3b)$$

$$v^z = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3c)$$

şekline dönüşmektedir [38].

Verilen ifadelerin dışında, u^z ve v^z yer değiştirme öğelerini tekrar ifade etmeye çalışırsak,

$$u^z = -z g_x \quad (3.4a)$$

$$v^z = -z g_y \quad (3.4b)$$

şeklinde elde ederiz. Burada

$$g_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.5a)$$

$$g_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.5b)$$

olarak yüzey normalinin dönme açılarını ifade etmektedir. (3.3) ifadeleri kullanılarak plağa ait elde edilen kinematik bağıntıları şu şekildedir [38]:

$$S_x^z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.6a)$$

$$S_y^z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.6b)$$

$$\gamma_{xy}^z = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.6c)$$

Denklem (3.6)' da verilen ifadeler plağın eğilme gerinme vektörünün öğeleridir. Ayrıca bu tez çalışmasında, membran etkilerde dikkate alındığından membran gerinme vektör ifadesi de gerekmektedir.

$$\{S_1^T\} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.7a)$$

$$\{S_2\}^T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.7b)$$

Eğilme ve membran gerinme vektör ifadeleri, çalışmanın ilerleyen aşamalarında iş denklemlerinin türetilmesinde kullanılmaktadır.

3.3.2 Bünye denklemleri

Genelleştirilmiş Hooke yasası ve Kirchhoff'un kabulleri dikkate alınarak plağa ait bünye denklemleri türetilmiştir.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} (S_x + \nu S_y) \quad (3.8a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} (S_y + \nu S_x) \quad (3.8b)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (3.8c)$$

Burada, (E) elastisite modülünü, (G) kayma modülünü ve ν Poisson oranını ifade etmektedir. (G) kayma modülünün; elastisite modülü (E) ve Poisson oranı (ν) ile ilişkisi, 3.9 denkleminde verilmiştir.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

şeklindedir.

Plağın yüzey normalinde meydana gelen dönme açıları da dikkate alınarak (3.8) ifadesi tekrar ele alındığında şu şekilde bir sonuç elde edilir [38].

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.10a)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.10b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.10c)$$

Yukarıda verilen tüm ifadeler iki boyutlu plak çözümlerine uygun olarak sunulmuştur. Bu çalışmada dikkat edilmesi gereken bir unsur plağın piezoelektrik malzemeden üretilmiş olmasıdır. Bu durumda piezoelektrik malzemelere ait bünye denklemlerinde kullanılması gerekmektedir.

Piezoelektrik malzemeler, yapılarında meydana gelen polarizasyon nedeni ile homojen veya lineer malzeme özelliği gösteremezler. Dolayısıyla ortotropik veya anizotropik malzeme özellikleri sergilerler ve bu nedenle onlara ait bünye denklemleri, matris formunda ifade edilmektedir.

Bu denklemlerin, orthotropik malzemelere uygun şekilde türetilmesinde elastisite modülü (E) büyük öneme sahiptir. Ortotropik malzemeler için elastisite modülü,

$$[E] = \begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} E_x & 0 \\ \nu_{yx} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_x \nu_y) G_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Piezoelektrik malzemeden üretilen yapılar için gerilme-gerinme denklemleri temel denklemlerdir ve genellikle birbiri cinsinden rahatlıkla ifade edilebilirler [29].

$$\begin{aligned} \{T\} &= [c^E] \{S\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} &= [e] \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Bu denklemin farklı ifadeleri denklem (3.13), (3.14 ve (3.15)' te verilmiştir.

$$\begin{aligned} \{S\} &= [s^E] \{T\} + [d]^T \{E\} \\ \{D\} &= [d] \{T\} + [\varepsilon^T] \{E\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \{S\} &= [s^D] \{T\} + [g]^T \{D\} \\ \{E\} &= -[g] \{T\} + [\beta^T] \{D\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\{T\} &= [c^D]\{S\} - [h]^T \{D\} \\ \{E\} &= -[h]\{S\} + [\beta^S]\{D\}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Piezoelektrik malzemelere ait temel denklemlerin dışında, piezoelektrik malzeme özelliklerinin belirtilmesinde kullanılan dielektrik, elastik ve piezoelektrik katsayılar matrislerine ait denklemler de, piezoelektrik yapıların analizlerinde önemli yer tutmaktadır.

$$[c^E][s^E] = [c^D][s^D] \quad (3.16)$$

$$[\beta^S][\varepsilon^S] = [\beta^T][\varepsilon^T] \quad (3.17)$$

$$[c^D] = [c^E] + [e]^T [h] \quad (3.18)$$

$$[s^D] = [c^D] - [d]^T [g] \quad (3.19)$$

$$[\varepsilon^T] = [\varepsilon^S] + [d]^T [e] \quad (3.20)$$

$$[\beta^S] = [\beta^T] - [g]^T [h] \quad (3.21)$$

$$[e] = [d][c^E] \quad (3.22)$$

$$[d] = [\varepsilon^T][g] \quad (3.23)$$

$$[g] = [h][s^D] \quad (3.24)$$

$$[h] = [\beta^S][e] \quad (3.25)$$

$$[s^E] = [c^E]^{-1} \quad (3.26)$$

$$[d] = [e][c^E]^{-1} \quad (3.27)$$

3.3.3 Enerji denklemleri

Kartezyen koordinatlarda tanımlanmış bir plak için, iki farklı gerinme enerji denklemi ifadesi vardır. Bu ifadeler *eğilme gerinme enerji* denklemi ve *membran gerinme enerji* denklemi olarak adlandırılmaktadır. Plagın sahip olduğu özellikler doğrultusunda yapılan kabuller, denklemlerin değişmesine ve (çoğu zaman) bazı denklemlerinin kullanılamamasına neden olmaktadır. Bu durumlardan en önemlisi ise ince plaklarda membran etkilerin ihmal edildiği durumlarda gerçekleşmektedir. Bu etkiler ihmal edildiğinde, membran gerinme enerji ifadesinin sıfıra eşit olduğu belirtilir ve yapının toplam enerji ifadesi bu duruma göre elde edilir.

Bu çalışmada, piezoelektrik malzemenin özelliklerinden dolayı yukarıda belirtildiği gibi bir ihmal yapılamamaktadır. Dolayısıyla plak, hem eğilme gerinme enerji denkleminde hem de membran gerinme enerji denkleminde sahiptir.

Çalışmada kullanılan piezoelektrik plağın malzeme özellikleri orthotorik olduğundan dolayı, enerji ifadeleri orthotorik malzemeye uygun olarak yazılmıştır.

Eğilme gerinme enerji denklemi:

$$U_b = \frac{h^3}{24(1-\nu_x\nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}^T [E] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} d\Omega \quad (3.28a)$$

$$U_b = \frac{h^3}{24(1-\nu_x\nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{xy} E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \nu_{xy} E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2(1-\nu_x\nu_y) G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} d\Omega \quad (3.28b)$$

$$U_b = \frac{h^3}{24(1-\nu_x\nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ E_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_{xy} E_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{xy} E_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right\} d\Omega \quad (3.28c)$$

$$+ \frac{h^3}{24(1-\nu_x\nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ E_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu_x\nu_y) G_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} d\Omega$$

Membran gerinme enerji denklemi:

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{h}{(1-\nu_x\nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\}^T [E] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} d\Omega \quad (3.29a)$$

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{h}{(1-\nu_x \nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{ccc} E_x & \nu_{xy} E_x & 0 \\ \nu_{yx} E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_x \nu_y) G_{xy} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right\} d\Omega \quad (3.29b)$$

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{h}{2(1-\nu_x \nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ E_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + E_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_{xy} E_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} d\Omega \\ &+ \frac{h}{2(1-\nu_x \nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ 2(1-\nu_x \nu_y) G_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + (1-\nu_x \nu_y) G_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Omega \\ &+ \frac{h}{2(1-\nu_x \nu_y)} \iint_{\Omega} \left\{ (1-\nu_x \nu_y) G_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (3.29c)$$

(3.28) ve (3.29) ifadeleri ortotropik malzeme özelliklerine sahip plaklar için geçerlidir. Fakat, izotropik malzeme özelliğine sahip plaklar için eğilme ve membran gerinme enerji denklemleri şu şekilde ifade edilmektedir.

Eğilme gerinme enerji denklemi:

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (3.30)$$

Denklem 3.30' de, D;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.31)$$

ifadesinin yerine kullanılmıştır.

Membran gerinme enerji denklemi:

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (3.32)$$

Eğilme ve membran gerinme enerjileri toplanarak piezoelektrik plağa ait toplam gerinme enerji ifadesi elde edilir.

$$U_{\text{toplam}} = U_b + U_m - \{E\}^T \{D\} \quad (3.33)$$

Burada $\{E\}^T \{D\}$ ifadesinin malzeme özelliklerine bağlı ifadesi ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{44} \\ T_{55} \\ T_{66} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Bu çalışmada yer alan piezoelektrik plağın eyleyici olarak kullanılması planlandığından ve bazı özellikler bu doğrultuda belirlendiğinden dolayı, $\{E\}^T \{D\}$ ifadesinin kullanılmasına gerek kalmamaktadır. Ancak, piezoelektrik plağın eyleyici olarak kullanıldığı durumlarda, bu ifadenin enerji denkleminde yer alması gerekmektedir.

Eğilme ve membran gerinme enerji ifadeleri piezoelektrik plağın toplam potansiyel enerjinin hesaplanmasında kullanılır. Ancak, bu iki enerji denklemi piezoelektrik plağın toplam potansiyel enerji ifadesini tam olarak elde edilmesi için yetersidir. Bu denklemlere ek olarak, piezoelektrik plağa ait iş denkleminin hesaplanması gerekmektedir.

Piezoelektrik plaklara ait iş denklemi:

Piezoelektrik bir plağa uygulanan kuvvetlerin yaptığı iş denklemi,

$$W = \int_V \{u\}^T \{F_v\} dV + \int_{\Omega_1} \{u\}^T \{F_{\Omega_1}\} d\Omega_1 + \{u\}^T \{F_p\} - \int_{\Omega_2} \phi \rho d\Omega_2 - \phi Q \quad (3.35)$$

şeklinde ifade edilmektedir [29]. Bu formülde; $\{u\}^T$ yer değiştirme vektörünün transpozunu, $\{F_v\}$ bünye yüklerini, $\{F_{\Omega_1}\}$ yüzey kuvvetlerini, $\{F_p\}$ tekil kuvvetleri, ϕ elektrik potansiyelini, ρ yüzey yükünü, Q uygulanan tekil elektrik yüklerini ve Ω yüzey alanını ifade etmektedir.

Bu çalışmada ele alınan piezoelektrik plağa yüzey yükü olarak ısı yükleri ve elektrik potansiyelinden meydana gelen yükler etmektedir. Etki eden yüklerin tamamı dikkate alındığında, iş ifadesinin elde edilen son hali 3.36 denkleminde verilmiştir.

$$W = W_{ISIL} - W_{ELEKTRİK} = \int_{\Omega_1} \{u\}^T \{F_{\Omega_1}\} d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \phi \rho d\Omega_2 \quad (3.36)$$

Bu denklemde yer alan elektrik potansiyelinden dolayı oluşan ifade için, elektrik potansiyelinin plakta meydana getirdiği düzlem içi kuvvetlerden, $\{N\}$

faýdalanılmıştır. Bu nedenle, denklemde yer alan $\phi d\Omega_2$ ifadesi potansiyel farkının oluşturduğu düzlem içi kuvvetler ve momentler cinsinden ifade edilmiştir.

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = -e_{31}\phi \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

Düzlem içi kuvvet ifadeleri kullanılarak elde edilen potansiyel farkın yaptığı iş'e ait denklem (3.37) denklemi kullanılarak oluşturulmuştur.

$$W_{ELEKTRİK} = \int_{\Omega} N_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} N_y \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega \quad (3.38a)$$

$$W_{ELEKTRİK} = \int_{\Omega} (-e_{31}\phi) \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} (-e_{31}\phi) \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega \quad (3.38b)$$

Isıl kuvvetler tarafından plak üzerinde yapılan iş'in ifadesi, gerinme enerjisi cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda,

$$U_{ISIL} = W_{ISIL} = \int_V \{S\}^T [E] \{S_o\} dV = \int_V \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T [E] \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dV \quad (3.39)$$

ifadesi ısı kuvvetlerin yaptığı işin değerini vermektedir. Burada; V plağın hacmini, $[E]$ elastisite modül matrisini, ΔT plakta kalınlık boyunca meydana gelen sıcaklık değişimini, α ısı genleşme katsayısını ve $\{S\}$ ise gerinme vektörünü göstermektedir. Bu gerinmeler plakta oluşan eğilme ve membran gerinmelerinin toplamından oluşmaktadır. $\{S\}^T$ ve $[E]$ ifadelerine ait eşitlikler (3.7) ve (3.11) denklemlerinde verilmiştir. α ısı genleşme katsayısının değeri tezin bir sonraki bölümünde malzeme özellikleri kısmında verilmiştir. ΔT ifadesine ait denklem ise,

$$\Delta T = \frac{1}{2}(\Delta T_1 + \Delta T_2) + \frac{z}{h}(\Delta T_2 - \Delta T_1) \quad (3.40)$$

şeklindedir. (3.7), (3.11) ve (3.40) denklemleri kullanılarak, ısı kuvvetlere ait iş denklemi

$$\begin{aligned}
W_{ISIL} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} \left\{ \begin{array}{c} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}^T & \left\{ \begin{array}{c} E_x + \nu_{xy} E_y \\ \nu_{yx} E_x + E_y \\ 0 \end{array} \right\} \frac{\alpha z}{h} (\Delta T_2 - \Delta T_1) d\Omega dz \\
+ h \int_{\Omega} & \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{array}{c} E_x + \nu_{xy} E_y \\ \nu_{yx} E_x + E_y \\ 0 \end{array} \right\} \frac{\alpha}{2} (\Delta T_1 + \Delta T_2) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.41}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Plağa ait, (3.28), (3.29), (3.38) ve (3.41) denklemlerinde verilen ,eğilme, membran gerinme enerji ifadeleri, elektrik ve ısı yüklerin yaptığı iş ifadeleri kullanılarak plağın toplam enerji denklemi elde edilmektedir.

Plağın toplam potansiyel enerji denkleminin kapalı hali denklem (3.42)' de verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\Pi &= U_b + U_m - W \\
&= U_b + U_m - W_{ISIL} - W_{ELEKTRİK}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Elde edilen toplam potansiyel enerji denklemi, Ritz enerji metodunda kullanılarak $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ denklemlerinde bilinmeyen katsayıların belirlenmesini sağlayacaktır.

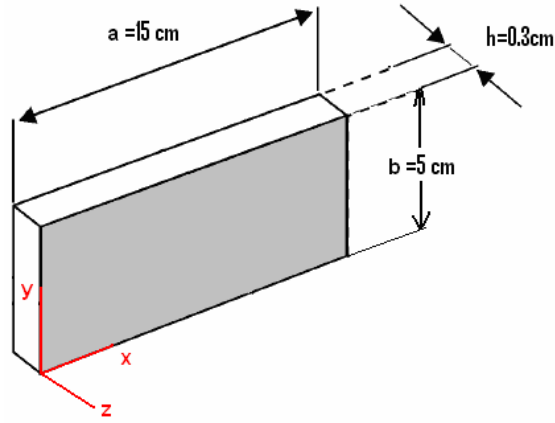
Bilinmeyen katsayıların belirlenmesi için, gerekli denklemler MATHEMATICA v5.0 programında yazılarak gerekli işlemlerin yapılması için komutlar verilmiştir.

MATHEMATICA v5.0 programının koşturulması sonucunda, $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ denklemlerindeki bilinmeyen katsayılar bulunmuştur. Böylece, $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ ' ye ait denklemler tüm terimleri ile elde edilmiştir.

4 PLAK GEOMETRİSİ VE MALZEME ÖZELLİKLERİ

Piezoelektrik malzemeden üretilen plak, üç boyutlu olarak modellenmiştir. Dört kenarının ortasındaki düğüm noktalarından x,y ve z doğrultularında basit mesnetli olarak mesnetlenen plağın boyutları, bir eyleyicinin boyutlarına uygun seçilmiştir. Böylece bu tez çalışmasında ele alınan plak, eyleyici olarak kullanılabilir.

Plağın boyutları Şekil 4.1’de verilmiştir.



Şekil 4.1: Plağın boyutları.

Plakta kullanılan PZT 5A malzemesine ait tüm malzeme özellikleri Tablo 4.1’de verilmiştir [27,36]. Ancak Tablo 4.1’ de verilen değerlerde, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin dikkate alındığı durumda elde edilen değerler verilmemiştir. Bu değerler tezin ilerleyen bölümlerinde hesaplanıp sunulmuştur.

Tablo 4.1: PZT 5A malzemesine ait malzeme özellikleri

PZT-5A	
Elastisite Modülü (GPa)	
E_{11}	69
E_{22}	69
E_{33}	53
Poisson Oranı	
ν_{12}	0.31
ν_{23}	0.44
ν_{31}	0.38
Kayma Modülü (GPa)	
G_{12}	23.3
G_{23}	21.1
G_{31}	21.1
Isı İletim Katsayısı (W/m°C)	
k_{11}	1.25
k_{22}	1.25
k_{33}	1.25
Isıl Genleşme Katsayısı ($\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$)	
α_{11}	1.2
α_{22}	1.2
α_{33}	1.2

Tablo 4.1’de, PZT 5A malzemesine ait tüm malzeme özelliği verilmemekle birlikte, piezoelektrik malzemelere ait ek özellikler Tablo 4.2’de verilmiştir.

Tablo 4.2: Sadece piezoelektrik malzemelerde olan özellikler

PZT-5A	
Dielektrik Katsayısı (nF/m)	$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.503 & 0 & 0 \\ 0 & 1.503 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix}$
Piezoelektrik Matrisi (C/m)	$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6.5 \\ 0 & 0 & -6.5 \\ 0 & 0 & 23.3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 17 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Katılık Modülü (m ² /N)	$[s] = \begin{bmatrix} 16.5 & -4.78 & -8.45 & 0 & 0 & 0 \\ -4.78 & 16.5 & -8.45 & 0 & 0 & 0 \\ -8.45 & 16.5 & 20.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 43.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 43.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43.5 \end{bmatrix} \times 10^{-12}$
Piezoelektrik Katsayılar Matrisi (C/N)	$[d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 741 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 741 & 0 & 0 \\ -274 & -274 & 593 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-12}$

ANSYS 10.0 programı kullanılarak piezoelektrik plağın, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin ihmal edildiği ve ihmal edilmediği durumlar için statik analizi gerçekleştirilmiştir.

Sıcaklığın, malzeme özelliklerine etkilerinin ihmal edildiği durum için Tablo 4.1 ve Tablo 4.2’ de verilen değerler kullanılmıştır. Sıcaklığın etkilerinin ihmal edilmediği durumda ise, malzeme özelliklerine ait matrislerin bazı katsayılarında değişiklikler meydana gelmektedir. Sıcaklığın bu katsayılar üzerindeki etkisi deneysel olarak gözlemlenip, sıcaklığa bağlı denklemleri türetilmiştir [23]. Elde edilen denklemler aşağıda verilmiştir.

$$s_{33} = 1.51 \times 10^{-11} - 4.03 \times 10^{-15} T + 1.94 \times 10^{-17} T^2 \quad (4.1a)$$

$$s_{55} = 3.42 \times 10^{-11} - 3.07 \times 10^{-14} T + 1.43 \times 10^{-16} T^2 \quad (4.1b)$$

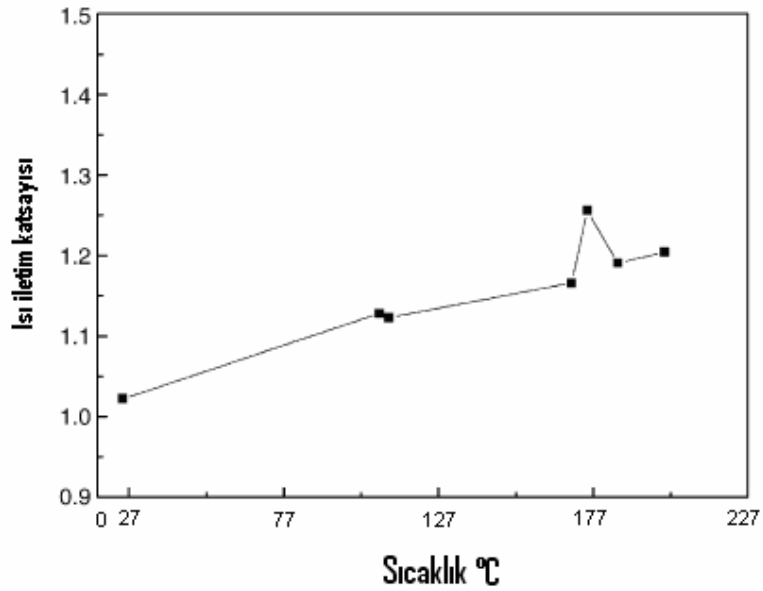
$$\varepsilon_{11} = 1.01 \times 10^{-8} - 1.39 \times 10^{-11} T + 1.04 \times 10^{-13} T^2 \quad (4.1c)$$

$$d_{33} = 2.53 \times 10^{-10} - 1.49 \times 10^{-13} T + 1.85 \times 10^{-15} T^2 \quad (4.1d)$$

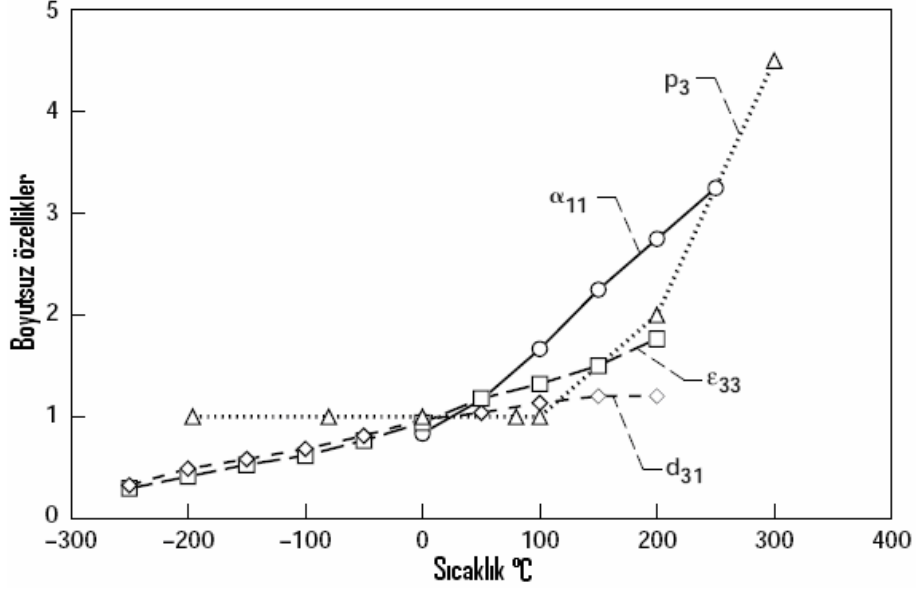
$$d_{15} = 3.49 \times 10^{-10} - 4.90 \times 10^{-14} T + 1.53 \times 10^{-18} T^2 \quad (4.1e)$$

Bu denklemler kullanılarak PZT 5A malzemesine ait özellikler, 0°C, 20°C, 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C sıcaklık değerleri için elde edilmiştir. (3.26) ve (3.37) denklemleri kullanılarak [d], [s] ve [c] matrisleri arasında gerekli dönüşümler yapılarak tüm katsayı matrisleri elde edilmiştir. Katsayı matrislerinin, [E], [ε], α, ve k' nın her sıcaklık için değişen değerleri EK-A ve Tablo A.1' de verilmiştir.

Sıcaklık, ısı iletim ve ısıl genleşme katsayılarına ait değerleri de değiştirmektedir. Sıcaklığın bu katsayılara nasıl etkiğini bulabilmek ve sıcaklık ile değişimlerini elde edebilmek için [27] ve [37] de verilen ısı iletim ve ısıl genleşme katsayılarının sıcaklıkla değişimlerini gösteren grafikler kullanılmıştır. Kullanılan grafikler Şekil 4.2 ve Şekil 4.3' te verilmiştir.



Şekil 4.2: Isı iletim katsayısının (k_{11}), sıcaklık ile değişimi [27].



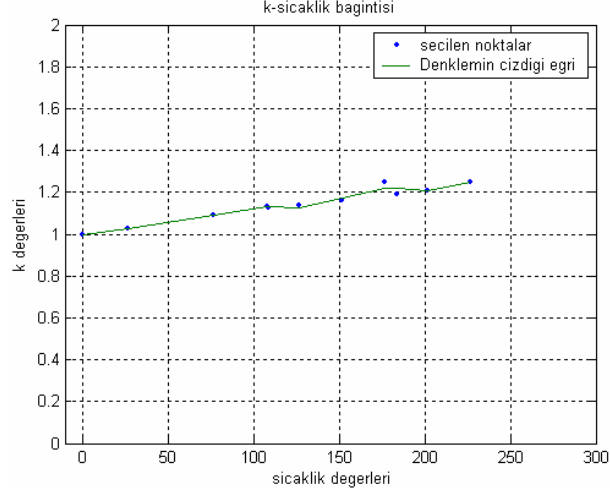
Şekil 4.3: Isıl genleşme katsayısının (α_{11}), sıcaklık ile değişimi [37].

Kaynaklardan elde edilen α ve k 'ya ait sıcaklığa bağlı eğriler kullanılarak; bu terimlerin, sıcaklığa bağlı denklemlerinin türetilmesi gerekmektedir. Bu denklemleri türetmek için eğrilerin üzerinden belirli aralıklardaki noktalar seçilerek MATLABv6.5 programı yardımıyla grafiklere benzer eğriler uydurularak bu eğrilere ait denklemler elde edilmiştir. Bu denklemleri elde etmek için kullanılan kodlar EK-B ve Tablo B.1 ve Tablo B.2'de verilmiştir.

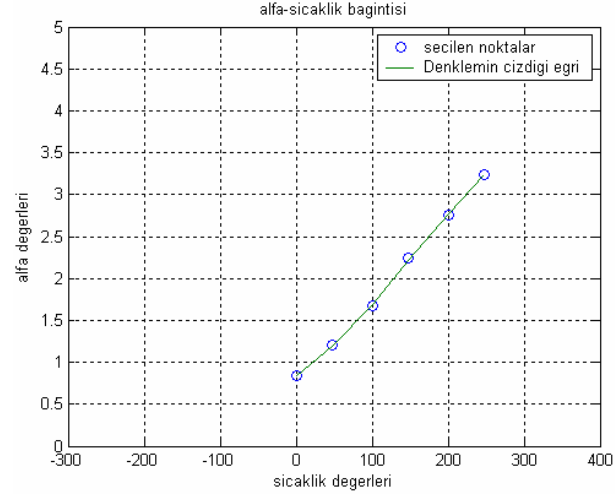
Verilen MATLAB kodları kullanılarak elde edilen denklemler,

$$k_{11} = 0.00000000000014xT^7 - 0.00000000005723xT^6 + 0.00000001255167xT^5 - 0.00000155469821xT^4 + 0.00010690984193xT^3 - 0.00367029978109xT^2 + 0.04678894641368xT + 0.99999042441028 \quad (4.2a)$$

$$\alpha_{11} = -0.00000007813119xT^3 + 0.00003459709842xT^2 + 0.00587697541196xT + 0.84020268985005 \quad (4.2b)$$



Şekil 4.4: Isı iletim katsayısının (k_{11}) denklemine ait eğri



Şekil 4.5: Isıl genleşme katsayısının (α_{11}) denklemine ait eğri

şeklindedir. Bu ifadeler kullanılarak çizdirilen eğriler, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6' da verilmiştir.

Piezoelektrik malzemeye ait değerlerin ve gerekli denklem ifadelerinin elde edilmesinden sonra, plağa uygulanacak yükler belirlenmiştir. Plagın, piezoelektrik bir eyleyici özelliği taşıması istendiğinden dolayı, plagın alt ve üst yüzeyleri arasında 100V' luk elektrik potansiyeli oluşturulmuştur. Ayrıca plagın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C değerlerinde ayrı ayrı sabit tutulup, üst yüzeyinin sıcaklığı 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C değerlerinde değiştirilerek, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olduğu ve bağlı olmadığı durumlar için analizler gerçekleştirilmiştir.

5 SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZ

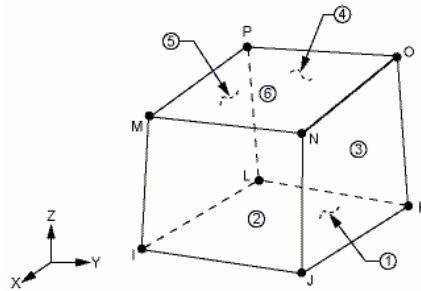
Bu bölümde ANSYS v10.0 paket programı kullanılarak, plağın alt yüzeyinin farklı (sabit) sıcaklıklarda olduğu durumlar için statik analizler yapılmıştır.

5.1 Sonlu Elemanlar Modeli

Plağın sonlu elemanlar modeli tek bir eleman tipi kullanılarak oluşturulmuştur. Ancak analizler esnasında üç farklı elemandan yararlanılmıştır. Bu nedenle sonlu elemanlar modelinde, üç farklı eleman arasında geçiş yapılarak analizler tamamlanmıştır. Plağın sonlu elemanlar analizinde KATI 5, KATI 70 ve KATI 45 elemanları kullanılmıştır. KATI 5 elemanı, plağın alt ve üst yüzeyinde potansiyel farkın oluşturulduğu durumda çözüm elde etmede kullanılmıştır. KATI 70 ve KATI45 elemanları ise, plağa sıcaklık uygulandığı durum için çözüm elde etmede kullanılmıştır. İki kuvvet için yapılan çözümlerden elde edilen sonuçlar toplanarak plak üzerinde meydana gelen yer değiştirme ve gerilme değerleri hakkında bilgi sahibi olunmuştur.

5.1.1 KATI 5 Elemanı

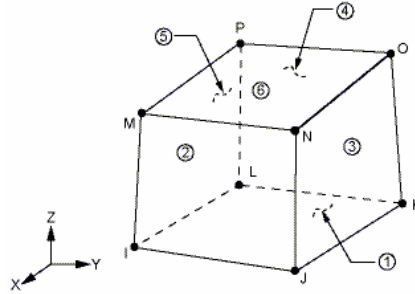
KATI 5 elemanı; manyetik, elektrik, piezoelektrik, ısı ve yapısal yüklere cevap verebilecek nitelikte bir elemandır. 8 düğüm noktasına ve her düğüm noktasında 6 serbestlik derecesine sahip bir elemandır. Yapısal ve piezoelektrik analizleri için kullanıldığında büyük yer değiştirme ve dayanıklılık özelliklerine sahiptir. KATI 5 elemanının yapısı Şekil 5.1’ de verilmiştir.



Şekil 5.1: KATI 5 elemanı [38].

5.1.2 KATI 70 Elemanı

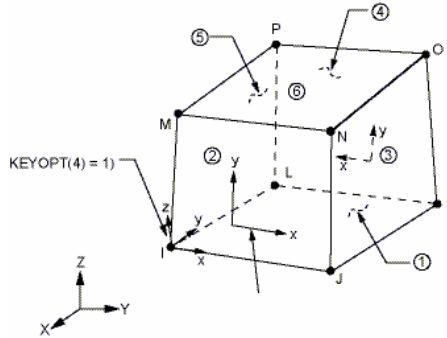
KATI 70 elemanı; üç boyutlu ısı iletim özelliğine sahiptir. Bu nedenle sürekli durum ve geçici sıcaklık analizlerinde doğru cevap verme kabiliyetine sahiptir. Elemanın 8 düğüm noktası ve her düğüm noktasında (sıcaklık olarak) tek serbestlik derecesi vardır. KATI 70 elemanının yapısı Şekil 5.2' de verilmiştir.



Şekil 5.2: KATI 70 elemanı [38].

5.1.3 KATI 45 Elemanı

KATI 45 elemanı, üç boyutlu katı modellemede kullanılan elemanlardır. Eleman, 8 düğüm noktasına ve her düğüm noktasında (x, y ve z doğrultularında olmak üzere) üç serbestlik derecesine sahiptir. Genel olarak plastisite, gerilme katılığı, büyük yer değiştirme ve geniş birim uzama kabiliyetine sahip elemanlardır. KATI 45 elemanının yapısı Şekil 5.3' de verilmiştir.

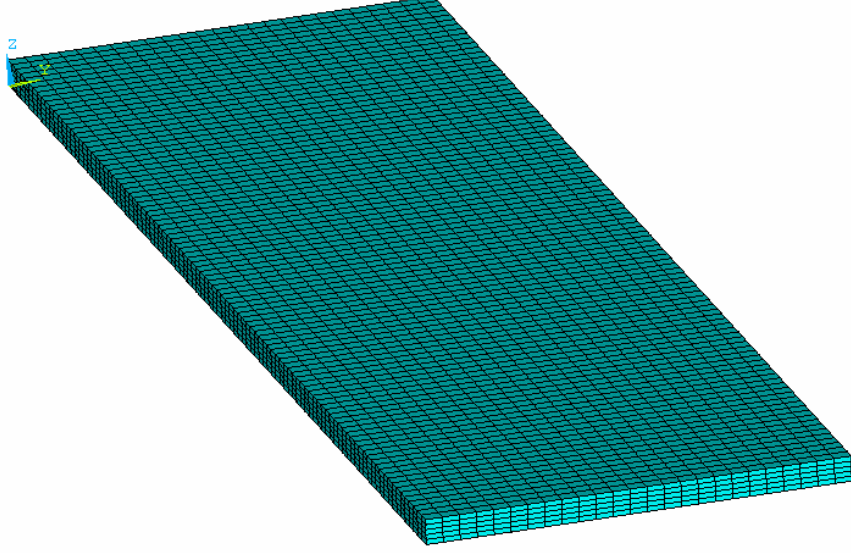


Şekil 5.3: KATI 45 elemanı [38].

5.1.4 Plağın sonlu elemanlar modeli

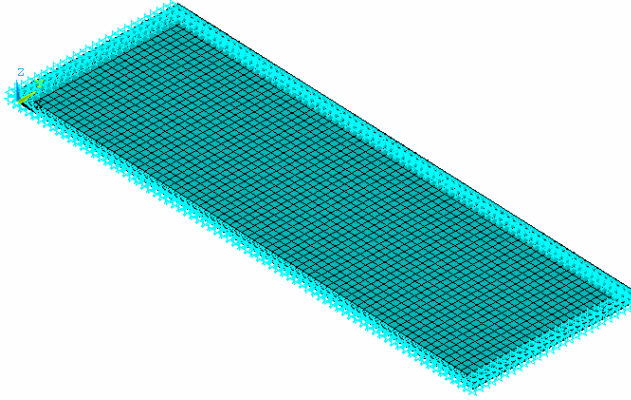
KATI 5 elemanı kullanılarak oluşturulan sonlu elemanlar modeli, KATI 70 ve KATI45 elemanları kullanılarak aynı biçimde sonlu elemanlar modeli elde edilmiştir. Analizler esnasında sonlu elemanlar modeli üzerinde, elemanlar arasında dönüşüm

yapılarak plağın statik analizleri gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar modeli oluşturulan plak Şekil 5.4’ de verilmiştir. Plağın sonlu elemanlar modelinde 7500 adet eleman ve 9880 adet düğüm noktası bulunmaktadır.

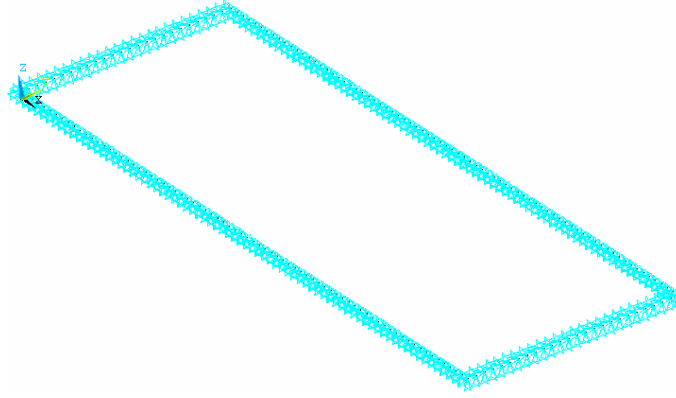


Şekil 5.4: Plağın sonlu elemanlar modeli.

Analizlere başlamadan önce plağın sonlu elemanlar modeli oluşturularak dört kenarının ortasındaki düğüm noktalarından x,y ve z doğrultularından basit mesnetlenmiştir. Plağın sonlu elemanlar modelinin mesnetlenmiş hali Şekil 5.5 ve Şekil 5.6’ da verilmiştir.



Şekil 5.5: Basit mesnetli plak.



Şekil 5.6: Kenarların ortasındaki düğüm noktalarından mesnetlenme durumu.

5.1.5 ANSYS v10.0 Analiz sonuçları

Sıcaklığın malzeme üzerindeki etkilerinin ihmal edildiği ve edilmediği durumlarda gerçekleştirilen analizlerde, plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C veya 20 °C’ de ve üst yüzeyinin sıcaklığı sırası ile 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C olacak şekilde ısı yükleri uygulanmaktadır. Ayrıca, alt ve üst yüzeyler arasında 100V’luk elektriksel potansiyel farkı uygulanmıştır.

Sadece 100V’luk potansiyel farkı uygulandığında elde edilen analiz sonuçları:

Tablo 5.1: Sadece potansiyel fark etkisinde elde edilen sonuçlar

	100 V
u_{maks}	0.722×10^{-7} m
v_{maks}	0.756×10^{-7} m
w_{maks}	0.676×10^{-7} m
$(\sigma_x)_{maks}$	-3.99 MPa
$(\sigma_y)_{maks}$	-4.22 MPa
$(\sigma_z)_{maks}$	2.03 MPa
$(\epsilon_x)_{maks}$	-0.231×10^{-4}
$(\epsilon_y)_{maks}$	-0.237×10^{-4}
$(\epsilon_z)_{maks}$	-0.562×10^{-4}

Sıcaklığın malzeme özelliklerine etkilerinin ihmal edildiği durum:

Malzeme özelliklerinde sıcaklığın etkisi ihmal edilerek, iki farklı durum için analizler gerçekleştirilmiştir.

Tablo 5.2: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C iken elde edilen analiz sonuçları

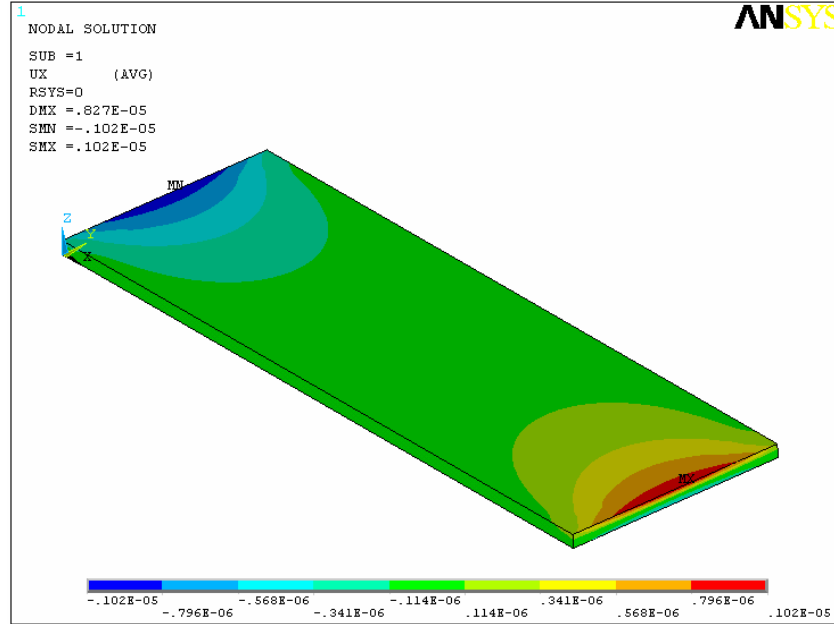
Üst Yüzey Sıcaklığı	50°C	100°C	150°C	200°C
u_{maks}	-1.02×10^{-5} m	-1.97×10^{-5} m	-2.92×10^{-5} m	-3.88×10^{-5} m
v_{maks}	-1.24×10^{-5} m	-2.40×10^{-5} m	-3.56×10^{-5} m	-4.72×10^{-5} m
w_{maks}	$.827 \times 10^{-5}$ m	$.166 \times 10^{-4}$ m	-2.49×10^{-4} m	$.332 \times 10^{-4}$ m
$(\sigma_x)_{maks}$	-12.5 MPa	-21.1 MPa	-29.6 MPa	-38.1 MPa
$(\sigma_y)_{maks}$	-12.7 MPa	-21.1 MPa	-29.6 MPa	-38 MPa
$(\sigma_z)_{maks}$	-11.1 MPa	-20.3 MPa	-29.1 MPa	-37.7 MPa
$(\epsilon_x)_{maks}$	-1.14×10^{-3}	-2.05×10^{-3}	-2.96×10^{-3}	-3.88×10^{-3}
$(\epsilon_y)_{maks}$	-1.13×10^{-3}	-2.03×10^{-3}	-2.92×10^{-3}	-3.82×10^{-3}
$(\epsilon_z)_{maks}$	-1.82×10^{-3}	-3.07×10^{-3}	-4.33×10^{-3}	-5.59×10^{-3}

İlk olarak plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C da sabit tutulup üst yüzeyin sıcaklığı sırasıyla 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C olarak değiştirilmiştir. Daha sonra sadece alt yüzeyin sıcaklığı 20°C' ye çıkartılıp, bu değer sabit tutularak analizler tekrarlanmıştır.

Tablo 5.3: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 20°C iken elde edilen analiz sonuçları

Üst Yüzey Sıcaklığı	50°C	100°C	150°C	200°C
u_{maks}	$-.786 \times 10^{-6}$ m	$-.174 \times 10^{-5}$ m	$-.269 \times 10^{-5}$ m	$-.364 \times 10^{-5}$ m
v_{maks}	$-.915 \times 10^{-6}$ m	$-.208 \times 10^{-5}$ m	$-.324 \times 10^{-5}$ m	$-.440 \times 10^{-5}$ m
w_{maks}	$.502 \times 10^{-5}$ m	$.133 \times 10^{-4}$ m	$.216 \times 10^{-4}$ m	$.299 \times 10^{-4}$ m
$(\sigma_x)_{maks}$	-15.9 MPa	-24.5 MPa	-33 MPa	-41.5 MPa
$(\sigma_y)_{maks}$	-16.1 MPa	-24.4 MPa	-33 MPa	-41.4 MPa
$(\sigma_z)_{maks}$	-11.2 MPa	-20.3 MPa	-29.5 MPa	-38.6 MPa
$(\epsilon_x)_{maks}$	$-.150 \times 10^{-3}$	$-.242 \times 10^{-3}$	$-.333 \times 10^{-3}$	$-.424 \times 10^{-3}$
$(\epsilon_y)_{maks}$	$-.149 \times 10^{-3}$	$-.238 \times 10^{-3}$	$-.328 \times 10^{-3}$	$-.417 \times 10^{-3}$
$(\epsilon_z)_{maks}$	$-.181 \times 10^{-3}$	$-.307 \times 10^{-3}$	$-.432 \times 10^{-3}$	$-.558 \times 10^{-3}$

Plağın, alt yüzeyi 0°C ve 20°C iken farklı üst yüzey sıcaklıklarında plak üzerinde meydana gelen maksimum yer değiştirme, gerilme ve gerinme değerlerin farklı olmasına rağmen maksimum değerlerin oluştukları yerler aynıdır. Bu nedenle sadece plağın alt yüzeye 0°C , üst yüzeye 50°C ısıl kuvvet uygulandığı durumlar için elde edilen yer değiştirme, gerilme ve gerinme değerlerini gösteren şekiller verilmiştir.

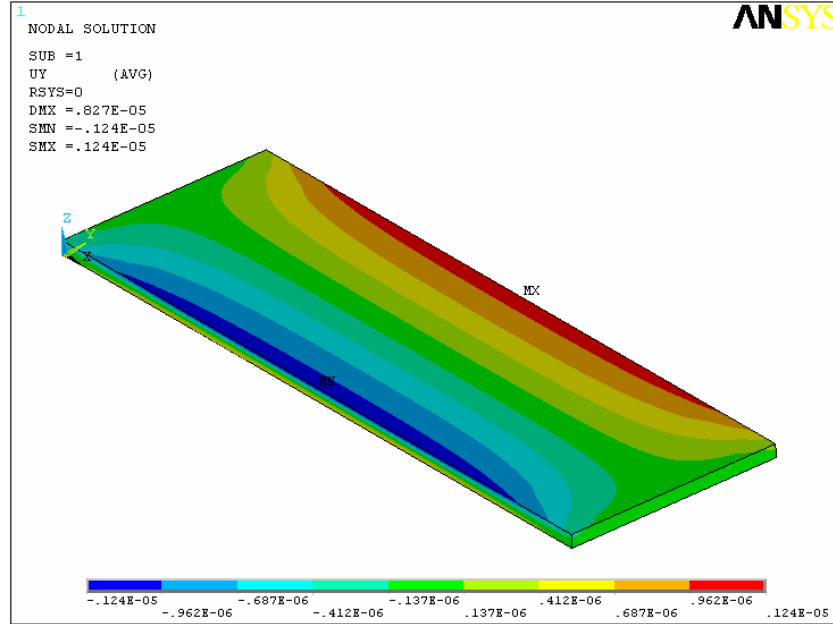


Şekil 5.7: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, x yönünde meydana gelen yer değiştirme değerleri.

Plak, ısı yüklerinin yanında elektrik potansiyeline maruz kaldığından dolayı sadece çökme (w), yer değiştirmesi değil membran yer değiştirmeleri olan u ve v meydana gelmektedir. Bu nedenle ANSYS v10.0 kullanılarak ve Ritz enerji metodu kullanılarak elde edilen analizlerde özellikle u, v ve w yer değiştirme değerleri önemli yer tutmaktadır.

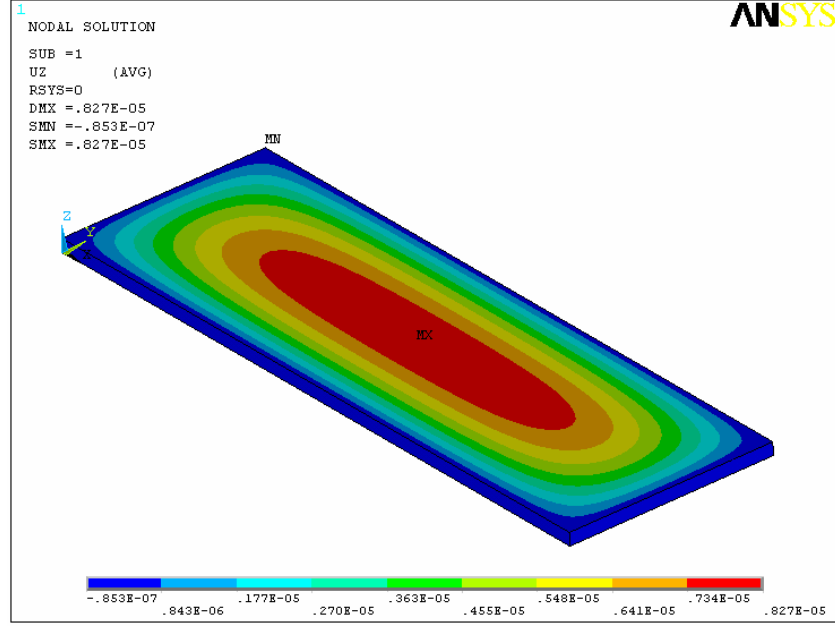
ANSYS v10.0 ile gerçekleştirilen analizlerden elde edilen sonuçlardan x yönünde meydana gelen yer değiştirme değerlerinin plak üzerindeki dağılımı Şekil 5.7’de verilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi maksimum u değerleri plakanın $x = 0$ ve $x = a$ noktalarındaki kenarların orta bölümlerinde oluşmaktadır.

Şekil 5.8’ de ise y yönünde meydana gelen yer değiştirme değerlerinin plak üzerinde dağılımını göstermektedir. Burada da, $y = 0$ ve $y = b$ noktalarındaki kenarların orta kısımlarında en yüksek v değeri elde edilmektedir.



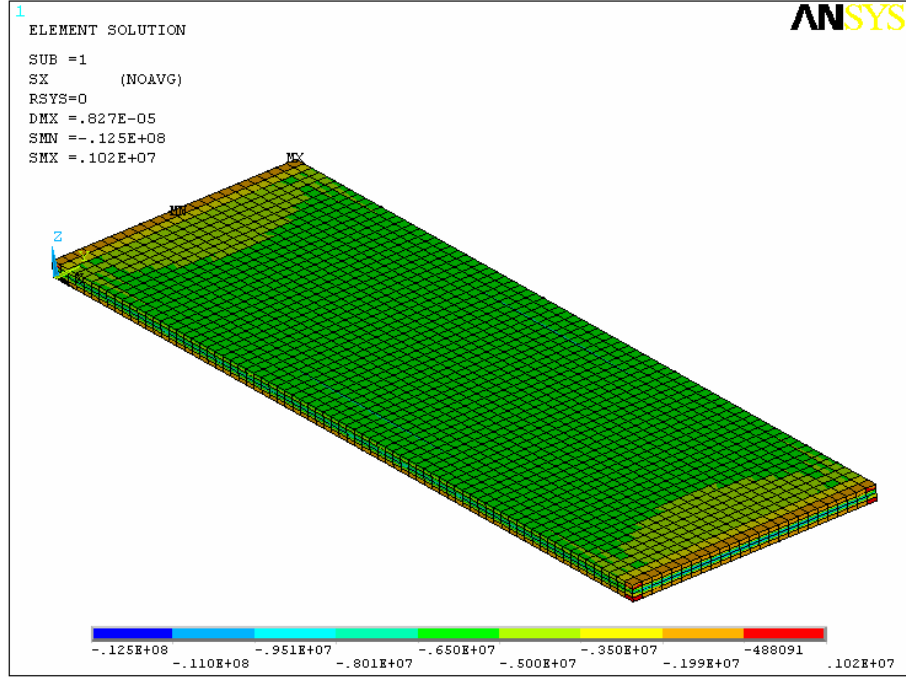
Şekil 5.8: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, y yönünde meydana gelen yer değiştirme değerleri.

Plakta en büyük yer değiştirme çökme şeklinde oluşmaktadır ve plakanın tam ortasında meydana gelir. Şekil 5.9’ da plakta z doğrultusunda meydana gelen yer değiştirmeler rahatlıkla gözlemlenebilmektedir.



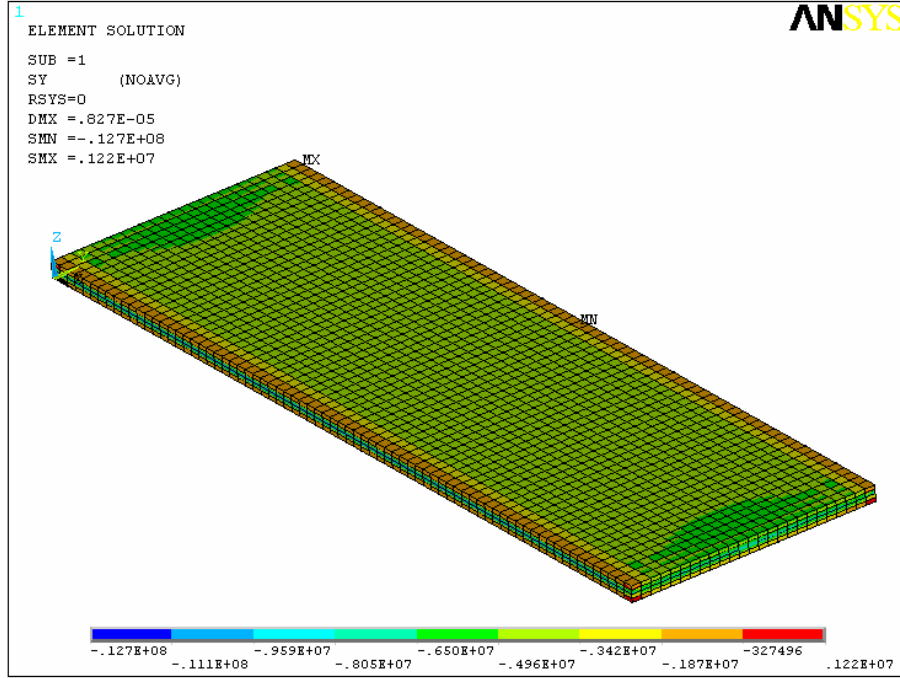
Şekil 5.9: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, z yönünde meydana gelen yer değiştirme değerleri.

Tez çalışmasında ele alınan piezoelektrik plağın yapılan analizler sonucunda elde edilen gerileme değerleri büyük önem taşımaktadır. Özellikle σ_x ve σ_y değerleri plağın uygulanan yükler altındaki davranışının incelenmesinde önemli yer tutmaktadır. Şekil 5.10’ dae maksimum σ_x değerlerinin plağın hangi kısımlarında oluştuğu rahatlıkla görülmektedir.



Şekil 5.10: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, x yönünde meydana gelen gerilme (σ_x) değerleri.

Maksimum σ_x değerleri gibi maksimum sigmay değerlerinin, plağın hangi bölümlerinde meydana geldiğini incelemek amacıyla Şekil 5.11’da σ_y değerlerine ait analiz sonuçları verilmiştir.



Şekil 5.11: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, y yönünde meydana gelen gerilme (σ_y)değerleri.

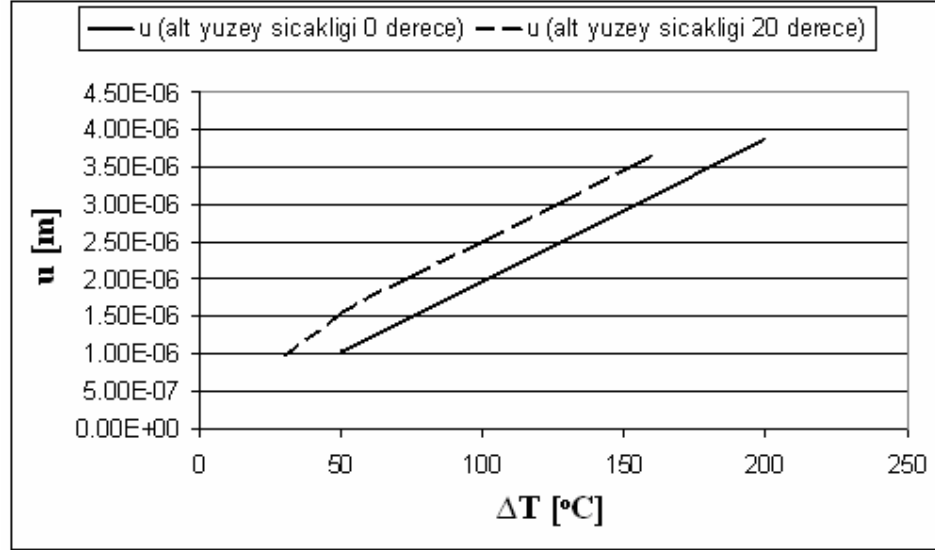
Plağın, alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C, üst yüzeyinin sıcaklığı 50°C olduğu durumlarda elde edilen diğer analiz sonuçları olan σ_z , S_x , S_y ve S_z ifadelerine analiz sonuçları EK-C bölümünde verilmiştir. Burada hatırlatılması gereken en önemli unsurlardan bir tanesi σ_z ile ilgilidir.

Şekil 5.8'den Şekil 5.11'e kadar ve EK-C kısmında verilen, plağa ait analiz sonuçlarını gösteren tüm resimlerde, maksimum değerlerin meydana geldikleri yerler, diğer ısı kuvvet değerlerinde ve sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin dikkate alındığı durumda gerçekleştirilen analizlerde elde edilen sonuçların maksimum değerlerin konumları ile aynıdır.

Ayrıca plak teorileri dikkate alındığında, kenarların ortasındaki düğüm noktalarından x,y ve z doğrultularında basit olarak mesnetlenen plağın z doğrultusunda gerilme meydana gelmemesi gerekmektedir. Ancak, piezoelektrik malzeme kullanılmasından ve elektrik potansiyeli uygulanmasından dolayı plakta polarizasyon meydana gelmektedir. Bu da, z doğrultusunda, x ve y doğrultularındakinden daha düşük değerde basma gerilmelerinin oluşmasına neden olmaktadır.

Plağın, alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C değerlerinde ayrı ayrı sabit tutulduğu ve sıcaklığın malzeme özelliklerine etkilerinin ihmal edildiği şartlar için yapılan

analizlerden elde edilen x yönündeki maksimum yer değiştirme değerlerine ait değişimleri gösteren eğriler Şekil 5.12’ de verilen grafikte karşılaştırılmıştır.

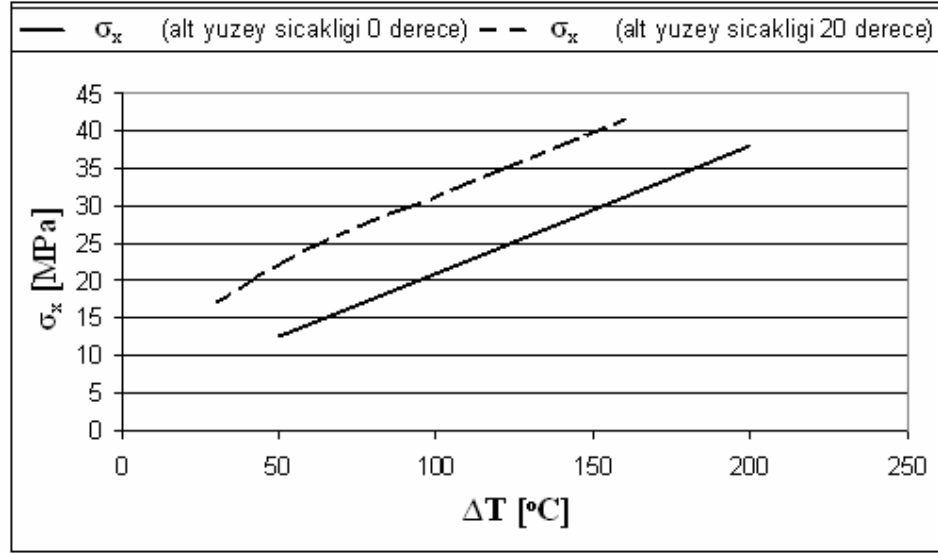


Şekil 5.12: Plâgın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde x yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri.

Grafikte verilen eğriler incelendiğinde, plâgın alt yüzeyinin sıcaklığı farklı değerlerde sabitlendiğinde, üst yüzeyinin sıcaklığı ise 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C’ye sırasıyla çıkartıldığında meydana gelen yer değiştirme değerleri lineer olarak bir artış göstermektedir. İki eğri aynı yapıya sahiplerdir fakat plâgın maruz kaldığı sıcaklık farkının iki durum için farklılık göstermesi elde edilen değerlerin değişmesine neden olur. Ancak bu durum, meydana gelen yer değiştirmelerin lineer olarak artmasını engellememektedir. Aynı durum y ve z yönlerinde meydana gelen yer değiştirme değerleri için geçerlidir. Plâgın $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ ’ nin iki farklı durum için elde edilen eğrilerine ait şekiller EK-D kısmında sunulmuştur.

Plakta, alt yüzeyin sıcaklığı 0°C ve 20°C’de ayrı ayrı sabitlendiği durumlarda üst yüzeyinin sıcaklığı 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C’ye sıra ile değiştirilerek analizler gerçekleştirildiğinde elde edilen σ_x ve σ_y değerlerine ait eğrilerde u,v ve w ’ya ait eğrilere benzerlik göstermektedir.

Şekil 5.13’ de görüldüğü gibi iki farklı alt yüzey sıcaklığında plakta meydana gelen σ_x değerleri, üst yüzeyin sıcaklığının değiştirilmesi sonucunda lineer olarak değişmektedir. Aynı durum σ_y değerleri içinde elde edilmiştir. σ_y değerlerine ait eğrilerin değişimi EK-D bölümünde verilmiştir.



Şekil 5.13: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_x (MPa) değerleri.

Sıcaklığın malzeme özelliklerine etkilerinin ihmal edilmediği durum:

Malzeme özelliklerinde sıcaklığın etkisi dikkate alınarak, iki farklı durumda analizler gerçekleştirilmiştir. İlk olarak plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C da sabit tutulup üst yüzeyin sıcaklığı sırasıyla 50°C, 100°C, 150°C ve 200°C olarak değiştirilmiştir. Daha sonra sadece alt yüzeyin sıcaklığı 20°C’ ye getirilerek sabit tutulmuştur.

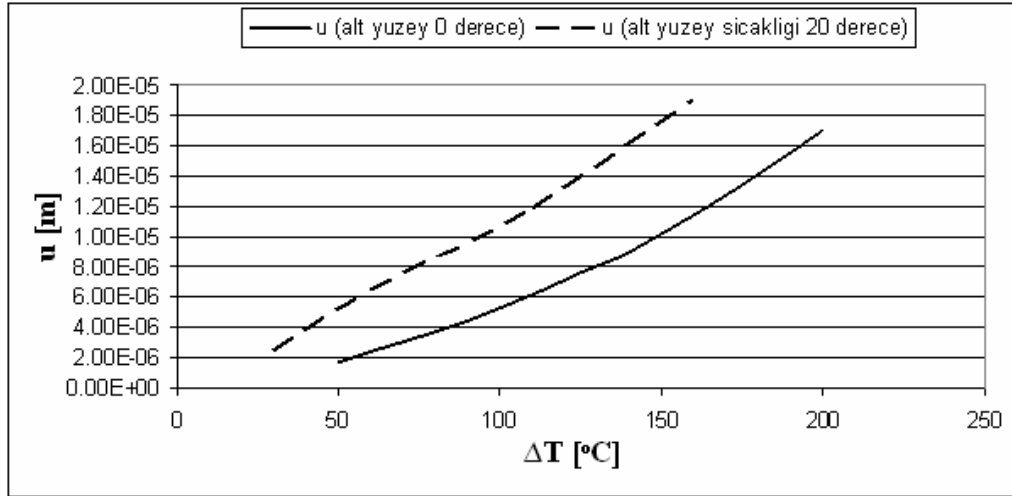
Tablo 5.4: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C iken elde edilen analiz sonuçları

Üst Yüzey Sıcaklığı	50°C	100°C	150°C	200°C
u_{maks}	-0.164×10^{-5} m	-0.518×10^{-5} m	-0.102×10^{-4} m	-0.170×10^{-4} m
v_{maks}	-0.188×10^{-5} m	-0.610×10^{-5} m	-0.122×10^{-4} m	-0.202×10^{-4} m
w_{maks}	0.116×10^{-4} m	0.422×10^{-4} m	0.862×10^{-4} m	0.145×10^{-3} m
$(\sigma_x)_{maks}$	-26.2 MPa	-72.4 MPa	-117 MPa	-201.3 MPa
$(\sigma_y)_{maks}$	-21.9 MPa	-65.1 MPa	-101 MPa	-187.1 MPa
$(\sigma_z)_{maks}$	-0.289×10^{-3}	-0.602×10^{-3}	-1.025×10^{-3}	-1.57×10^{-3}
$(S_x)_{maks}$	-0.253×10^{-3}	-0.527×10^{-3}	-0.908×10^{-3}	-1.389×10^{-3}
$(S_y)_{maks}$	-0.209×10^{-3}	-0.511×10^{-3}	-0.979×10^{-3}	-1.559×10^{-3}
$(S_z)_{maks}$	-0.289×10^{-3}	-0.602×10^{-3}	-1.025×10^{-3}	-1.57×10^{-3}

Tablo 5.5: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 20°C iken elde edilen analiz sonuçları

Üst Yüzey Sıcaklığı	50°C	100°C	150°C	200°C
u_{maks}	-0.242×10^{-5} m	-0.640×10^{-5} m	-0.119×10^{-4} m	-0.190×10^{-4} m
v_{maks}	-0.301×10^{-5} m	-0.793×10^{-6} m	-0.146×10^{-4} m	-0.233×10^{-4} m
w_{maks}	0.224×10^{-4} m	0.602×10^{-4} m	0.110×10^{-3} m	0.175×10^{-3} m
$(\sigma_x)_{maks}$	-46.5 MPa	-85.2 MPa	-133 MPa	-206 MPa
$(\sigma_y)_{maks}$	-43.9 MPa	-77.1 MPa	-121 MPa	-190 MPa
$(\sigma_z)_{maks}$	-35.6 MPa	-42.1 MPa	-98.9 MPa	-157 MPa
$(S_x)_{maks}$	-0.213×10^{-3}	-0.474×10^{-3}	-0.871×10^{-3}	-1.387×10^{-3}
$(S_y)_{maks}$	-0.181×10^{-3}	-0.416×10^{-3}	-0.759×10^{-3}	-1.199×10^{-3}
$(S_z)_{maks}$	-0.301×10^{-3}	0.570×10^{-3}	1.043×10^{-3}	1.684×10^{-3}

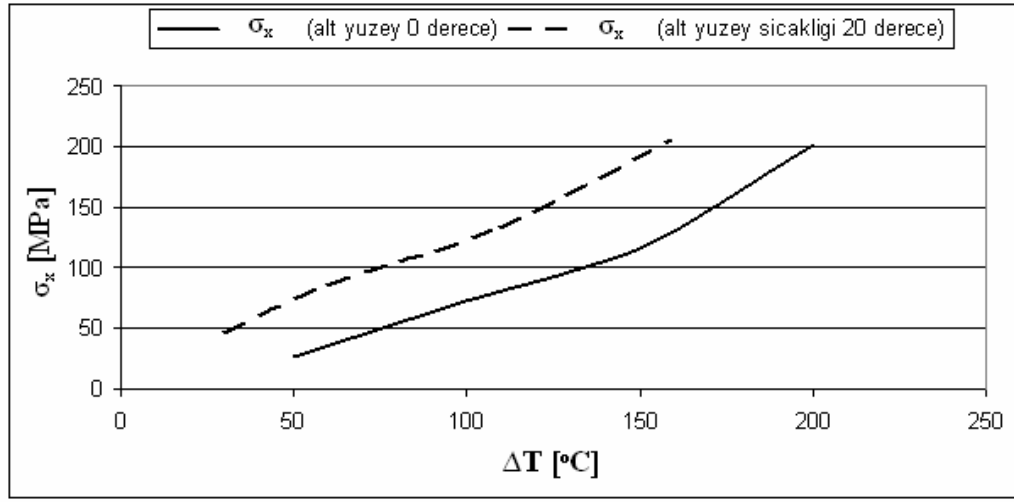
Sıcaklığın, malzeme özelliklerine etkisinin ihmal edilmediği durum için tekrarlanan analiz verilerinden elde edilen sonuçlara göre x,y ve z yönlerinde meydana gelen yer değiştirme değerleri plağın alt yüzey sıcaklığına göre karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda elde edilen eğrilere ait grafikler Şekil 5.14, Şekil 5.15 ve Şekil 5.16’de sunulmuştur.



Şekil 5.14: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde x yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri (sıcaklık etkileri).

Elde edilen eğriler incelendiğinde, sıcaklığın malzeme özelliklerine olan etkisi hesaba katıldığında yapılan analiz sonuçlarına göre, malzeme özelliklerinde nonlineer değişiklikler meydana gelmektedir. Sıcaklığın malzeme özelliklerine ait etkileri dikkate alınarak elde edilen analiz sonuçlarından y ve z yönündeki yer değiştirmeleri gösteren eğriler EK-D kısmında sunulmuştur.

Yer değiştirme değerlerinin yanında, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisi dikkate alınarak gerçekleştirilen analizlerin sonuçlarından elde edilen verilen doğrultusunda x ve y yönünde meydana gelen gerilme değerlerinin değişimine ait eğriler karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.



Şekil 5.15: Plâgın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_x (MPa) değerleri.

Şekil 5.15’den, plakta meydana gelen σ_x değerlerinin iki farklı alt yüzey sıcaklığında, sıcaklık etkileri dikkate alındığında nasıl değiştiğini dair bilgi edinmekteyiz. Sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisini lineer olmadığından, nonlineer olduğundan dolayı σ_x ’e ait eğriler nonlineer olarak değişmektedir. Aynı durum σ_y ’ye ait eğrilerde de meydana gelmektedir. σ_y ’nin sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisi dikkate alınarak yapılan analizlerden elde edilen sonuçlar EK-D kısmında verilmiştir.

6 RİTZ METODU

Bir enerji metodu olan Ritz metodu, minimum potansiyel enerji prensibini kullanarak çözüm veren yakınsayan bir işlemdir. Bu metoda göre, sınır değer koşullarını sağlayan ve yapının toplam potansiyel enerjisini minimum yapan bütün yer değiştirme değerleri, denge koşullarına ulaşmak için araştırılan ve istenen değerlerdir.

İlk olarak, plağa ait u,v,w yer değiştirme denklemleri belirlenmiştir. Belirlenen denklemler, plağın toplam enerji denkleminin elde edilmesinde kullanılırlar. Ancak, u,v,w yer değiştirme denklemlerinde bilinmeyen katsayılar bulunmaktadır. Ritz metodu, denklemlerde yer alan bilinmeyen katsayıların hesaplanmasında kullanılan bir yöntemdir.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{mn}} = \dots\dots\dots \frac{\partial \Pi}{\partial C_{mn}} = 0 \quad (6.1)$$

(6.1) denkleminde; Π plağa ait toplam potansiyel enerjiyi, A_{mn} ve C_{mn} ise denklemlerdeki bilinmeyen katsayıları temsil etmektedir. (6.1) denkleminin, bilinmeyen katsayı ifadelerinin hepsine göre ayrı ayrı kısmi türevleri alınıp sıfıra eşitlenmesi ile bilinmeyen sayısı kadar denklem elde edilir. Bu denklemlerin, bir kod veya program yardımı ile çözülmesinden de bilinmeyen katsayılar hesaplanır.

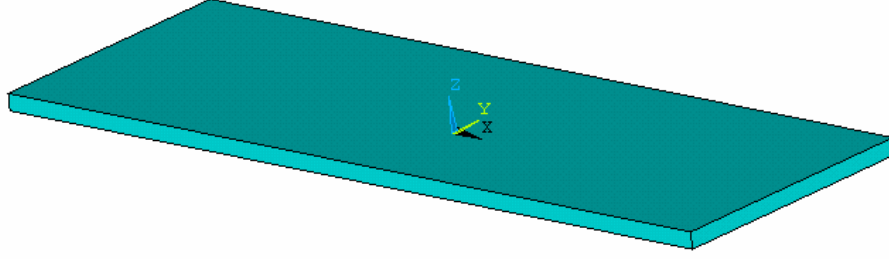
6.1 Navier Yaklaşımı ile u,v,w Yer Değiştirme Denkleminin Belirlenmesi

Plak, dört kenarının ortasındaki düğüm noktalarından basit olarak x, y ve z doğrultularında mesnetlendiğinden dolayı bu kenarlarda ki yer değiştirme değerlerinin sıfır olması gerekmektedir.

Navier yaklaşımı, yer değiştirme denklemlerinin çift seri çözümü olarak ifade edilmesini ön görür. w(x,y) yer değiştirme denkleminin belirlenmesinde Navier yaklaşımı kullanılırken, u(x,y) ve v(x,y) yer değiştirme denklemlerinin belirlenmesinde plağın orta düzleminin yer değiştirme eğrileri kullanılmıştır.

Yer değiştirme denklemlerinin belirlenme sürecinde, plağın simetrik olması göz önünde bulundurulmuştur. Bu nedenle, çalışmanın ilerleyen adımlarında yapılan çözümlerin bir kısmında plağın dörtte biri alınırken bazı çalışmalarda plağın tamamı

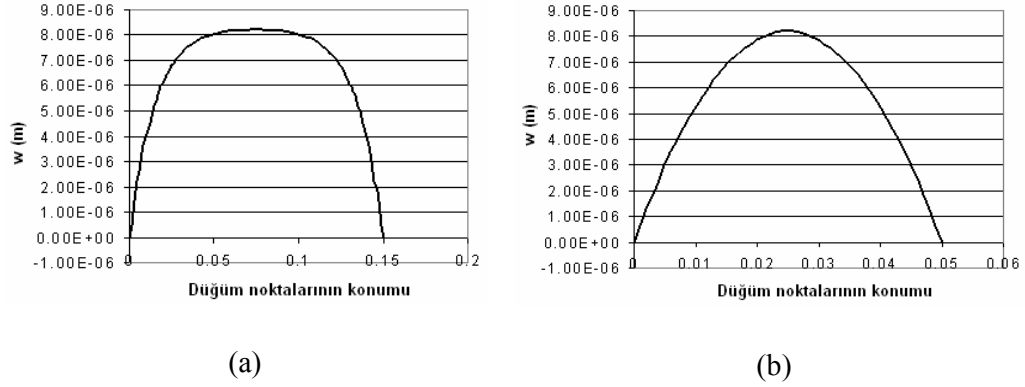
alınmıştır. Plağın dörtte biri alınarak yapılan çalışmalarda koordinat sistemi plağın tam ortasında seçilmiştir.



Şekil 6.1: Dörtte biri alınacak olan plağın koordinat düzleminin konumu

Navier yaklaşımına göre, yer değiştirme denklemlerini belirlemeden önce, ANSYS 10.0 da analizleri yapılan plağın orta düzelemindeki düğüm noktaları seçilerek u, v ve w' nin x'e ve y'ye göre değişimlerine ait grafikler elde edilmiştir.

w yer değiştirme ifadesinin, x'e ve y'ye göre değişimlerini gösteren garfikler şu şekildedir.



Şekil 6.2: w yer değiştirme ifadesinin (a) x'e göre, (b) y'ye göre değişimi

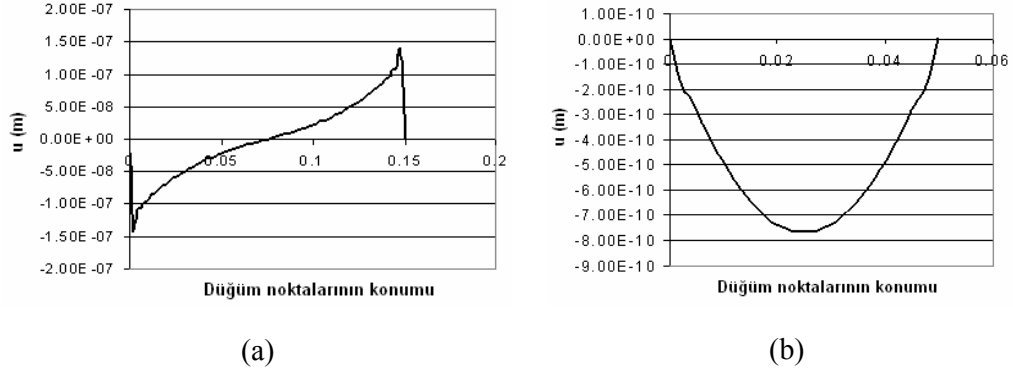
Şekil 6.2' de verilen değişim grafikleri de dikkatte alınarak; Navier yaklaşımına göre, plağın kenarlarındaki yer değiştirme değerini sıfır olarak veren $w(x,y)$ yer değiştirme ifadesi (6.2) denklemindeki gibi belirlenmiştir.

$$w(x,y) = \sum_{m=1,2,\dots}^N \sum_{n=1,2,\dots}^N A_{mn} \left(\sin \frac{\pi m x}{a} \right) \left(\sin \frac{\pi n y}{b} \right) \quad (6.2)$$

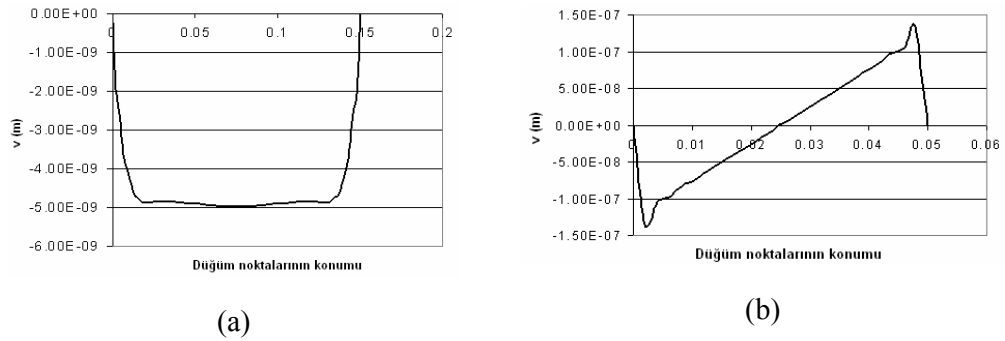
Yukarıda $w(x,y)$ için verilen denklem incelendiğinde, $x = y = 0, x = a$ ve $y = b$ sınır değerlerinde sıfıra eşit olması için m ve n ifadelerinin tek sayı olması

gerekmektedir. Ritz enerji metodu kullanılarak çözümlerin yapıldığı aşamada, seri açılımları bu unsur dikkate alınarak yapılmıştır. Bu koşullar doğrultusunda belirlenen $w(x,y)$ ifadesi plak için oldukça uygun sonuçlar vermektedir.

$w(x,y)$ denkleminin belirlenmesinin ardından, pizoelektrik etkilerden dolayı ihmal edilemeyen membran etkileri hesaplamak için $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ denklemlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Daha önce $w(x,y)$ denkleminin elde edilmesinde şimdide $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ denklemlerinin elde edilmesinde plağın ortasının davranışı ANSYS v10.0 kullanılarak incelenmiştir. Burada belirtilmesi gereken önemli bir unsur, orta düzlemin davranışının incelendiği durumda plağa sadece ısı yükleri etki etmektedir. Çünkü 100V'luk bir potansiyel farkının yaratılması plakta deformasyona neden olmaktadır ancak bu deformasyon ısı yüklerinin oluşturduğu değerlerin yanında ihmal edilecek kadar küçüktür. Dolayısıyla ısı ve elektrik potansiyel yüklerinin uygulandığı duruma ait plağın davranışlarında ısı yüklerinin baskın olması nedeni ile sadece ısı yükleri altındaki analiz sonuçlarının kullanılmasına neden olmuştur. Analizlerin ardından, plağın orta düzlemindeki düğüm noktaları seçilerek her bir düğüm noktasında meydana gelen yer değiştirme değerlerine ait grafikler çizdirilmiştir.



Şekil 6.3: u yer değiştirme ifadesinin (a) x 'e göre, (b) y 'ye göre değişimi



Şekil 6.4: v yer değiştirme ifadesinin (a) x 'e göre, (b) y 'ye göre değişimi

Elde edilen grafiklere benzer veya yakın eğriler veren ifadeler belirlenmeye çalışılmıştır. Ancak $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirmeleri, elektrik potansiyelinin ve ısı kuvvetlerin uygulandığı durumlarda enerji ifadelerinin elde edilebilmesi için iki farklı ifadeye sahiptir. Bunun nedeni, Ritz enerji metodunda, $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve bunların türevlerinin alan üzerinde integre edilmesi sonucunda bazı sorunlar ile karşılaşılmasıdır. Bu nedenle iki farklı durum için iki farklı denklem $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ kullanılmıştır. $w(x,y)$ ifadesi için tek bir denklem türetilmiştir çünkü plak üzerine uygulanan potansiyel farkının plağın eğilmesine bir katkısı yoktur. Sadece membran etkiler ortaya çıkarttığından dolayı, elektrik potansiyelinin meydana getirdiği duruma uygun bir $w(x,y)$ ifadesi türetilmemiştir.

Isıl yükler uygulandığında meydana gelen düzlem içi etkilerin hesaplanmasında kullanılan $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadeleri,

$$u(x,y) = \sum_{k=1,2,\dots}^N \sum_{l=1,2,\dots}^N B_{kl} \left(\sin \frac{\pi k x}{a} \right) \left(\cos \frac{\pi l y}{b} \right) \quad (6.3)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1,2,\dots}^N \sum_{j=1,2,\dots}^N C_{ij} \left(\cos \frac{\pi i x}{a} \right) \left(\sin \frac{\pi j y}{b} \right) \quad (6.4)$$

Elektrik potansiyeli uygulandığında meydana gelen membran gerinme enerji ifadesini ve elektrik yüklerini uygulamak için kullanılan $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadeleri,

$$u(x,y) = \sum_{k=1,2,\dots}^N \sum_{l=1,2,\dots}^N B_{kl} \left(\cos \frac{\pi k x}{a} \right) \left(\sin \frac{\pi l y}{b} \right) \quad (6.5)$$

$$v(x,y) = \sum_{i=1,2,\dots}^N \sum_{j=1,2,\dots}^N C_{ij} \left(\sin \frac{\pi i x}{a} \right) \left(\cos \frac{\pi j y}{b} \right) \quad (6.6)$$

Her iki yükleme durumunda da, seri açılımlarında k,l,i ve j ifadeleri tek sayı değerini almaktadır.

$u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ yer değiştirme ifadelerine ait seri ifadelerinde terim sayısının arttırılması plağın yer değiştirme eğrilerine yakın sonuçlar alınmasını sağlamaktadır. Bu nedenle, terim sayısının artışı plağa ait doğru sonuçlara yakınlığı arttırmaktadır.

Bu tez çalışmasında, elektrik ve ısı yükler için ayrı ayrı MATHEMATICA v5.0 çözümü elde edilmiştir. Böylece elde edilen sonuçlar sadece ısı yükler altında meydana gelen $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ değerlerinin kendi içinde, sadece elektrik potansiyeli uygulandığı durumda meydana gelen $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ değerlerinin kendi içinde karşılaştırması sağlanmıştır. Burada MATHEMATICA v5.0 ile yapılan tüm çözümler için her seri açılımında 9 terim alınarak analiz sonuçlarının biraz daha yakın olarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Isıl yüklerin meydana getirdiği eğilme

etkilerinden dolayı türetilen $w(x,y)$ ifadesinde 9 terim alınırken ısı yüklerinin meydana getirdiği düzlem içi etkilerden dolayı türetilen $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadelerinde 4 terim alınmıştır. Çünkü düzlem içi etkiler için yazılan MATHEMATICA v5.0 kodunda terim sayısı arttırıldıkça, denklemler birbirlerine bağımlı çıkmakta ve bunun sonucunda bilinmeyen katsayı ifadelerini birbiri cinsinden ifade eden sonuçlar elde edilmiştir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için ısı yüklerinin eğilme etkilerinde 9 terim, düzlem içi etkilerinde ise 4 terim alınarak sonuçlara ulaşılmıştır.

Elektrik potansiyeli ise sadece düzlem içi etkiler oluşturmaktadır. Bu nedenle elektrik potansiyelinden dolayı oluşacak olan $u(x,y)$, $v(x,y)$ değerlerinin hesaplanmasında seri açılımlarında yine 9 terim kullanılmıştır ve denklemlerin birbirine bağımlı olması gibi bir sorun ile karşılaşılmamıştır.

6.2 Plakın Toplam Potansiyel Enerji İfadesinin Elde Edilmesi

$u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ denklemleri belirlendikten sonra, toplam potansiyel enerjinin elde edilmesinde kullanılacak olan eğilme birim uzama enerjisine, membran birim uzama enerjisine, ısı yüklerinin ve elektrik yüklerinin yaptığı işlere ait denklemler MATHEMATICA v5.0 programı kullanılarak hesaplanmıştır.

MATHEMATICA v5.0 kullanılarak yapılan hesaplamalar üç kısma ayrılarak kodlar yazılmış ve çözüm elde edilmiştir. Bunun nedeni ,daha önce de belirtildiği gibi bazı durumlar için alan üzerinde integral almak, terim sayısındaki artış denklemlerin birbirine bağımlı olmasına neden olması çözüme ulaşılmasını engellemektedir. Bu sorunu gidermek için, ısı yükleri sonucunda meydana gelen eğilme etkileri, düzlem içi etkiler ve elektrik potansiyelinden meydana gelen düzlem içi etkiler ayrı ayrı hesaplanmıştır. Sonuç olarak, ısı kuvvetlerinin etkisinden ve elektrik potansiyelinin etkisinden dolayı iki farklı, bilinmeyen katsayı değerlerine sahip $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadesi elde edilmiştir.

$u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ denklemleri ayrı durumlar için farklı koşullarda hesaplandığından dolayı Ritz enerji metodu ile elde edilen $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ değerleri, ANSYS v10.0 kullanılarak; ısı yükleri ve elektrik potansiyeli için ayrı ayrı yapılan analiz sonuçları ile karşılaştırılmıştır

Ritz enerji metodu ile ilgili MATHEMATICA v5.0 da yazılan kodlar ve sonuçlar EK-E' de verilmiştir. EK-E' de verilen çözümler incelendiğinde “delta fark” ve “deltatoplam” olmak üzere iki ifadenin, yer değiştirme denklemlerine ait ve hesaplanmaya çalışan katsayı ifadelerinde bulunduğu görülmektedir. Bu değerler ısı kuvvetlerinin yaptığı işe ait denklemden gelmektedir. Plak, farklı sıcaklıklara maruz

kaldığından dolayı, maruz kaldığı her sıcaklık değeri için *deltafark* ve *deltatoplama* belirlenerek katsayı ifadelerinin değerleri hesaplanır.

$$deltafark = (T_2 - T) - (T_1 - T) \quad (6.7a)$$

$$deltatoplama = (T_2 - T) + (T_1 - T) \quad (6.7b)$$

(6.7) denklemlerinde; T_2 plağın üst yüzeyinin sıcaklığını, T_1 plağın alt yüzeyinin sıcaklığı ve T ortam sıcaklığını (20°C) temsil etmektedir.

Elde edilen katsayılar kullanılarak, plağın ortasında bulunan nokta için farklı sıcaklıkların uygulandığı durumlar için $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ değerleri sayısal olarak hesaplanmıştır. Yapılan hesaplamaların ardından ANSYS v10.0 ile gerçekleştirilen analizlerin sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Analiz sonuçlarının karşılaştırılması için ANSYS v10.0’ da maksimum değerlerin olduğu noktaların koordinatları belirlenerek, Ritz enerji metodu ile bu noktalarda oluşan yer değiştirme değerleri hesaplanarak karşılaştırılmıştır.

Isıl yüklerin etkisi altında:

Maksimum $u(x,y)$ değeri, plağın $x = 0$ ve $x = a$ ’daki kenarların tam ortalarında meydana gelmektedir. Kenarların tam ortasına gelen düğüm noktalarından biri 393 numaralı düğüm noktasıdır ve bu noktada farklı sıcaklık değerlerinde meydana gelen $u(x,y)$ değeri Tablo 7.1’de verilmiştir.

Tablo 6.1: 393 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)

	ANSYS	Ritz enerji m.	ANSYS	Ritz enerji m.
Üst yüzey sıcaklığı	50°C, <i>deltatoplama</i> =10°C		100°C, <i>deltatoplama</i> =60°C	
$u(x,y)$ (m)	0.9508x10 ⁻⁶	0.27733x10 ⁻⁶	0.19016 x10 ⁻⁵	0.554666x10 ⁻⁶
Üst yüzey sıcaklığı	150°C, <i>deltatoplama</i> =110°C		200°C, <i>deltatoplama</i> =160°C	
$u(x,y)$ (m)	0.28524 x10 ⁻⁵	0.101689x10 ⁻⁵	0.38032 x10 ⁻⁵	0.147911x10 ⁻⁵

Maksimum $v(x,y)$ değeri, plağın $y = 0$ ve $y = b$ 'deki kenarların tam ortalarında meydana gelmektedir. Kenarların tam ortasına gelen düğüm noktalarından biri 543 numaralı düğüm noktasıdır ve bu noktada farklı sıcaklık değerlerinde meydana gelen $v(x,y)$ değeri Tablo 6.2'de verilmiştir.

Tablo 6.2: 543 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)

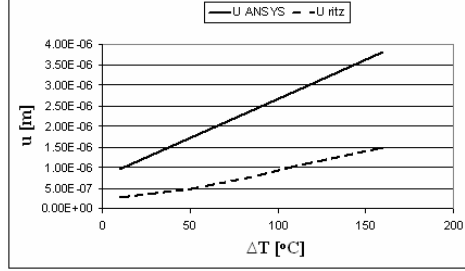
	ANSYS	Ritz enerji m.	ANSYS	Ritz enerji m.
Üst yüzey sıcaklığı	50°C, <i>deltatoplam=10°C</i>		100°C, <i>deltatoplam=60°C</i>	
$v(x,y)$ (m)	1.1608×10^{-6}	0.439297×10^{-6}	0.23216×10^{-5}	0.878594×10^{-6}
Üst yüzey sıcaklığı	150°C, <i>deltatoplam=110°C</i>		200°C, <i>deltatoplam=160°C</i>	
$v(x,y)$ (m)	0.34825×10^{-5}	0.160176×10^{-5}	0.46433×10^{-5}	0.234292×10^{-5}

Maksimum $w(x,y)$ değeri, plağın tam ortasında $x = \frac{a}{2}$ ve $y = \frac{b}{2}$ değerlerine denk gelen düğüm noktasından oluşmaktadır. Plağın tam ortasındaki düğüm noktalarından biri 1851 numaralı düğüm noktasıdır ve bu noktada farklı sıcaklık değerlerinde meydana gelen $w(x,y)$ değeri Tablo 6.3'de verilmiştir.

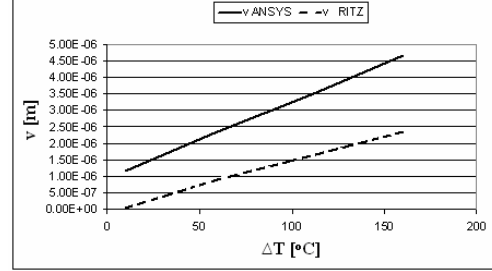
Tablo 6.3: 1851 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)

	ANSYS	Ritz enerji m.	ANSYS	Ritz enerji m.
Üst yüzey sıcaklığı	50°C, <i>deltatoplam=10°C</i>		100°C, <i>deltatoplam=60°C</i>	
$w(x,y)$ (m)	0.82952×10^{-5}	0.776244×10^{-5}	0.1659×10^{-4}	0.155249×10^{-4}
Üst yüzey sıcaklığı	150°C, <i>deltatoplam=110°C</i>		200°C, <i>deltatoplam=160°C</i>	
$w(x,y)$ (m)	0.24885×10^{-4}	0.232873×10^{-4}	0.331811×10^{-4}	0.310498×10^{-4}

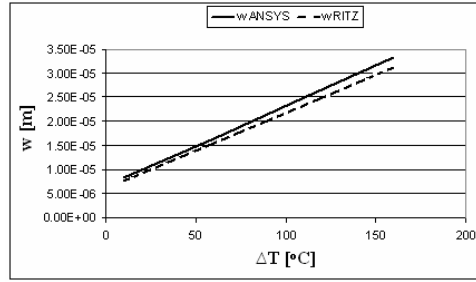
Tablo 6.1, Tablo 6.2 ve Tablo 6.3’ de verilen değerler ile ANSYS v10.0’den elde edilen değerlerin karşılaştırılması $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ için sırasıyla aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 6.5: Dört farklı sıcaklık aralığında, iki farklı yöntem ile elde edilen (a) $u(x,y)$, (b) $v(x,y)$ ve (c) $w(x,y)$ değerleri

Tablo 6.4: 393 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 20°C)

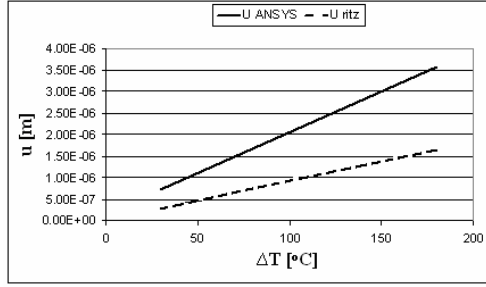
	ANSYS	Ritz enerjisi m.	ANSYS	Ritz enerjisi m.
Üst yüzey sıcaklığı	50°C, <i>deltatoplama</i>=30°C		100°C, <i>deltatoplama</i>=80°C	
u(x,y) (m)	0.71375 x10 ⁻⁶	2.77333x10 ⁻⁷	0.16645 x10 ⁻⁵	7.39555x10 ⁻⁷
Üst yüzey sıcaklığı	150°C, <i>deltatoplama</i>=130°C		200°C, <i>deltatoplama</i>=180°C	
u(x,y) (m)	0.26153 x10 ⁻⁵	1.20178x10 ⁻⁶	0.35661x10 ⁻⁶	1.644x10 ⁻⁶

Tablo 6.5: 543 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)

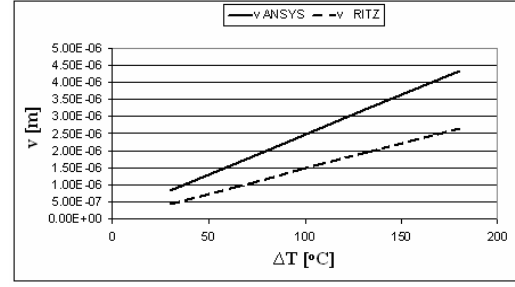
	ANSYS	Ritz enerji m.	ANSYS	Ritz enerji m.
Üst yüzey sıcaklığı	50°C, <i>deltatoplamlam=10°C</i>		100°C, <i>deltatoplamlam=60°C</i>	
v(x,y) (m)	0.83933 x10 ⁻⁶	4.39297x10 ⁻⁷	0.20001 x10 ⁻⁵	1.17146x10 ⁻⁶
Üst yüzey sıcaklığı	150°C, <i>deltatoplamlam=110°C</i>		200°C, <i>deltatoplamlam=160°C</i>	
v(x,y) (m)	0.31610 x10 ⁻⁵	1.906362x10 ⁻⁶	0.43218 x10 ⁻⁵	2.03578x10 ⁻⁶

Tablo 6.6: 1851 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C)

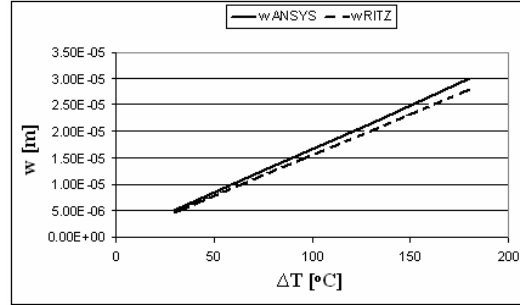
	ANSYS	Ritz enerji m.	ANSYS	Ritz enerji m.
Üst yüzey sıcaklığı	50°C, <i>deltatoplamlam=10°C</i>		100°C, <i>deltatoplamlam=60°C</i>	
w(x,y) (m)	0.50517 x10 ⁻⁵	0.776244x10 ⁻⁵	0.13347 x10 ⁻⁴	0.155249x10 ⁻⁴
Üst yüzey sıcaklığı	150°C, <i>deltatoplamlam=110°C</i>		200°C, <i>deltatoplamlam=160°C</i>	
w(x,y) (m)	0.21642 x10 ⁻⁴	0.232873x10 ⁻⁴	0.29937 x10 ⁻⁴	0.310498x10 ⁻⁴



(a)



(b)



(c)

Şekil 6.6: Dört farklı sıcaklık aralığında, iki farklı yöntem ile elde edilen (a) $u(x,y)$, (b) $v(x,y)$ ve (c) $w(x,y)$ değerleri

Elektrik potansiyelinin etkisi altında:

Elektrik potansiyelinin düzlem içi etkileri sonucunda oluşan $u(x,y)$ ve $v(x,y)$ ifadelerine ait seri açılımlarında 9 terim kullanılmıştır ancak plağın dörtte biri alınarak işlemler gerçekleştirilmiştir. Plağın dörtte biri alındığı için maksimum u ve v değerleri kenarların $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = 0$ ve $y = \pm \frac{b}{2}$, $x = 0$ da oluşmaktadır.

Maksimum u değeri $x = -\frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$ ve $y = 0$ noktalarında oluşmaktadır. Bu konumlara denk gelen düğüm noktalarından bir tanesi 393 numaralı düğüm noktasıdır ve bu noktada farklı sıcaklık değerlerinde meydana gelen $u(x,y)$ değeri Tablo 6.7’de verilmiştir.

Tablo 6.7: 393 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (100 V)

100 V		
	ANSYS	Ritz Enerji M.
u (x,y)	$0.72177 \times 10^{-7} \text{ m}$	$0.218119 \times 10^{-5} \text{ m}$

Maksimum v değeri $y = \frac{b}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$ ve $x = 0$ noktalarında oluşmaktadır. Bu konumlara denk gelen düğüm noktalarından bir tanesi 543 numaralı düğüm noktasıdır ve bu noktada farklı sıcaklık değerlerinde meydana gelen $v(x,y)$ değeri Tablo 6.8’de verilmiştir.

Tablo 6.8: 543 numaralı düğüm noktasına ait yer değiştirme değerleri (100 V)

100 V		
	ANSYS	Ritz Enerji M.
v (x,y)	$0.75516 \times 10^{-7} \text{ m}$	$0.395012 \times 10^{-6} \text{ m}$

7 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Yapılan tez çalışmasında,dört kenarının ortasındaki düğüm noktalarından basit mesnetli olarak tasarlanan piezoelektrik bir plağın, sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisinin ihmal edildiği ve ihmal edilmediği durumlar için statik analizler gerçekleştirilmiştir. Statik analizler, sıcaklığın etkilerinin ihmal edildiği ve edilmediği durum için, ilk olarak ANSYS v100 porgramı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.ANSYS v10.0 ile yapılan statik analizlerden sonra, kullanılan plağın sınır şartlarına uygun olarak $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ için uygun denklemler belirlenmiştir. Bu denklemler kullanılarak plağın maruz kaldığı yükleme durumlarına uygun olarak enerji ve iş denklemleri türetilmiştir. Hesaplanan enerji ve iş denklemleri ile plağın toplam potansiyel enerji ifadesi belirlenmiştir ve Ritz enerji metodu kullanılarak $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ için belirlenen denklemlerdeki bilinmeyen katsayı değerleri hesaplanmıştır. Böyle $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ yer değiştirme denklemlerinin açık ifadeleri elde edilmiştir. Plakta meydana gelen maksimum yer değiştirme değerleri hem ANSYS v10.0, hem de Ritz enerji metodu ile hesaplanıp karşılaştırılmıştır.

Elde edilen sonuçlarda, sıcaklığın etkilerinin ihmal edildiği plak üzerinde meydana gelen maksimum yer değiştirme ve gerinme değerleri sıcaklık artışı ile lineer olarak artmaktadır. Sıcaklık etkilerinin ihmal edilmediği durumlarda ise bu değerlerin nonlineer olarak değiştiği gözlenmiştir. Ayrıca sıcaklık etkilerinin dikkate alınarak statik analizlerin gerçekleştirilmesi, gerçeğe daha yakın sonuçlar vermektedir. Ritz enerji metodu ile elde edilen maksimum $u(x,y)$, $v(x,y)$ ve $w(x,y)$ değerleri ANSYS sonuçları aynı davranışı göstermektedirler ancak elde edilen değerler birebir aynı değildir. Daha yakın sonuçların elde edilebilmesi için Ritz enerji metodunda kullanılan ve denklemlerde yer alan terim sayısının artırılması gerekmektedir. terim sayısı arttıkça iki farklı yöntem ile elde edilen analiz sonuçları birbirine yakınsayacaktır.

Bu çalışmayı takiben, aynı piezoelektrik plağın aynı ortam ve yük şartlarında deneysel analizi gerçekleştirilip burada elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılması mümkündür. Ayrıca Ritz enerji metodu yerine daha uygun farklı bir yöntem seçilerek analizlerden elde edilen sonuçlar farklı yöntemler ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Goldin, D. S., Venneri, S. L., and Noor, A. K.** “Fresh Air, Wide-Open Space,” *Mechanical Engineering*, Vol. 123, No. 11, Nov. 2001, pp. 48–55.6.
- [2] **Sietzen, F. Jr.** “New Blueprint for NASA Aeronautics,” *Aerospace America*, Aug.2002, pp. 24–28.
- [3] **Agnes, G. S.** “Adaptive Structures,” *Aerospace America*, Dec. 2001, p. 78.
- [4] **Wilson, J. R.** “Active Aeroelastic Wing: A New/Old Twist on Flight,” *Aerospace America*, Sept. 2002, pp. 34–37.
- [5] **Mason, W. P.** “Piezoelectricity, Its History and Applications,” *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 70, 1981, pp. 1561–1566.
- [6] **Crawley, E. F. and de Luis, J.** “Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures,” *AIAA Journal*, Vol. 25, 1987, pp. 1373–1385
- [7] **Cady, W. G.** *Piezoelectricity: An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals*, McGraw-Hill, New York, 1946
- [8] **Tiersten, H. F.** *Linear Piezoelectric Plate Vibrations: Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibrations of Piezoelectric Plates*, Plenum Press, New York,1969
- [9] **Ray, M. C., Bhattacharya, R., and Samanta, B.** “Exact Solutions for Static Analysis of Intelligent Structures,” *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 1684–169
- [10] **Ray, M. C., Rao, K. M., and Samanta, B.** “Exact Analysis of Coupled Electroelastic Behavior of a Piezoelectric Plate Under Cylindrical Bending,” *Computers and Structures*, Vol. 45, 1992, pp. 667–677

- [11] **Ray, M. C., Rao, K. M., and Samanta, B.** “Exact Solution for Static Analysis of Intelligent Structures Under Cylindrical Bending,” *Computers and Structures*, Vol. 47, 1993, pp. 1031–1042
- [12] **Heyliger, P.** “Exact Solutions for Simply Supported Laminated Piezoelectric Plates,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, 1997, pp. 299–306
- [13] **Heyliger, P. and Brooks, S.** “Exact Solutions for Laminated Piezoelectric Plates in Cylindrical Bending,” *Journal of Applied Mechanics*, Cilt. 63, Dec. 1996, s. 903–910.
- [14] **Heyliger, P. R. and Brooks, S. P.** “Free Vibration of Piezoelectric Laminates in Cylindrical Bending,” *International Journal of Solids and Structures*, Cilt. 32, 1995, s. 2945–2959.
- [15] **Benveniste, Y. and Dvorak, G. J.** “Uniform Fields and Universal Relations in Piezoelectric Composites,” *Journal of the Mechanics of Physics and Solids*, Cilt. 40, Sayı. 6, 1992, s. 1295–1312
- [16] **Pagano, N. J.** “Exact Solutions for Composites in Cylindrical Bending,” *Journal of Composite Materials*, Cilt. 3, 1969, s. 398–411.
- [17] **Pagano, N. J.** “Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates,” *Journal of Composite Materials*, Cilt. 4, 1970, s. 20–34
- [18] **Vel, S. S. and Batra, R. C.** “Three-Dimensional Analytical Solutions for Hybrid Multilayered Piezoelectric Plates”, *Journal of Applied Mechanics*, Cilt. 67, Sayı. 3, s. 558–567, 2000
- [19] **Crawley, E. F., and Anderson, E. H.** “Detailed Models of Piezoceramic Actuation of Beams,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Cilt. 1, 1990, s. 4–25.
- [20] **Lee, C. K.** “Theory of Laminated Piezoelectric Plates for the Design of Distributed Sensors/Actuators. Part I: Governing Equations and Reciprocal Relationships,” *Journal of the Acoustical Society of America*, cilt. 87, 1990, s. 1144–1158.

- [21] **Wang, B. T. and Rogers, C. A.** "Laminate Plate Theory for Spatially Distributed Induced Strain Actuators," Journal of Composite Materials, Cilt. 25, s. 433-452.
- [22] **Zhuang, Z. Q., Haun, M. J., Jang, S. ve Cross, L.E.** " Composition and Temperature Dependence of the Dielectric, Piezoelectric and Elastic Properties of Pure PZT Ceramics,"IEEE, Cilt. 36 Sayı. 4, 1989, s. 413-416.
- [23] **Sherrit, S. Yang, G. Wiederick, H. D. ve Mukherjee, B. K.,** "Temperature Dependence of the Dielectric, Elastic and Piezoelectric Material Constants of Lead Zirconate Titanate Ceramics" department of National Defence, Canada.
- [24] **Yong, Y., ve Wei, W.,** " Lagrangean Temperature Coefficients of The Piezoelectric Stress Constant and Dielectric Permittivity of Quartz", IEEE/EIA 2000, s. 364-372.
- [25] **Wauer, J., Suherman, S.,** " Thickness Vibrations of a Piezo-Semiconducting Plate Layer," Int. J. Engng Sci. Cilt.35, Sayı 15, 1997, s. 1386-1404.
- [26] **Wang, J.,** " The Frequency-Temperature Analysis Equation of Piezoelectric Plates With Lee Plate Theory," International Frequency Control Symposium, 1997 IEEE, s. 677-681.
- [27] **Lee, H., ve Saravanos, D. A.,** " The Effect of Temperature Dependent Material Nonlinearities on the Response of Piezoelectric Composite Plates", NASA, 1997.
- [28] **Wang, B., ve Mai, Y.,** " Strength Evaluation of Piezoelectric Ceramics under Transient Thermal Environments," J. Am. Ceram. Soc., 2004, cilt 87 Sayı 5, s. 929-936.
- [29] **Piefort, V.** 2001: Finite Element Modelling of Piezoelektrik Active Structures, Doktora, Universit'e Libre de Bruxelles
- [30] **Lawver, A.,** 2001: Thunder: A new frontier in research for smart materials.
- [31] **Gandhi, M.V. ve B.S. Thompson,** 1992: Smart Materials and Structure, 1. Baskı, CHAPMAN HALL, LONDON,

- [32] **Dökmeci, M. C., 1974:** A theory of high frequency vibrations of piezoelectric crystals bars. International Journal of Solids and Structures, Volume 10, Issue 4, s. 401-409
- [33] **Banks, H.T., R.C. Smith ve Y. Wang,** 1996: Smart Materials Structures; Modeling, Estimation and Control, JOHN WILEY & SONS, PARIS
- [34] **Szilar, R.,**2004 "Theories and Application of Plate Analysis", 1921, Wiley, USA
- [35] **Ugural, A., C.,** Stresses in Plates and Shells, second edition, 1999. McGraw-Hill
- [36] **Yang, J.,** An Introduction to the Theory of piezoelectricity, 2005, Springer.
- [37] **Wu. X., Xu, J.,** "Thermal Properties of PZTN Single Crystals Grown by The Flux Bridgman Method\Materials Chemistry and Physics, 2005, s. 220-223.
- [38] **ANSYS v10.0,** Yardım Dosyaları

EK-A**Tablo A.1:** Sıcaklığın etkisi dikkate alınarak hesaplanan malzeme özelliklerinin yeni değerleri

	0°C	20°C	50°C
Elastisite Modülü (GPa)			
E_{11}	62.303	109.85	110.19
E_{22}	51.396	122.16	117.88
E_{33}	39.988	132.76	126.18
Isı İletim Katsayısı (W/m°C)			
k_{11}	1.23	1.28	1.3013
k_{22}	1.23	1.28	1.3013
k_{33}	1.23	1.28	1.3013
Isıl Genleşme Katsayısı ($\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$)			
α_{11}	1.6804	1.984	2.4215
α_{22}	1.6804	1.984	2.4215
α_{33}	1.6804	1.984	2.4215
Dielektrik Katsayısı (nF/m)			
ϵ_{11}	1.01	1.042	1.1055
ϵ_{22}	1.01	1.042	1.1055
Katılık Modülü (m^2/N)			
s_{33}			1.4947e-11
s_{55}			3.3023e-11
Piezoelektrik Katsayılar Matrisi (C/N)			
d_{33}			2.6508e-10
d_{15}			3.5145e-10

Tablo A.1: Sıcaklığın etkisi dikkate alınarak hesaplanan malzeme özelliklerinin yeni değerleri (devam)

	100°C	150°C	200°C
Elastisite Modülü (GPa)			
E_{11}	103.57	103.57	97.38
E_{22}	117.88	117.88	103.57
E_{33}	126.18	126.18	107.57
Isı İletim Katsayısı (W/m°C)			
k_{11}	1.3975	1.4095	1.43
k_{22}	1.3975	1.4095	1.43
k_{33}	1.3975	1.4095	1.43
Isıl Genleşme Katsayısı ($\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$)			
α_{11}	3.3914	4.4729	5.5488
α_{22}	3.3914	4.4729	5.5488
α_{33}	3.3914	4.4729	5.5488
Dielektrik Katsayısı (nF/m)			
ϵ_{11}	1.253	1.4525	1.704
ϵ_{22}	1.253	1.4525	1.704
Katılık Modülü (m^2/N)			
s_{33}	1.4891e-11	1.4932e-11	1.5070e-11
s_{55}	3.256e-11	3.2813e-11	3.378e-11
Piezoelektrik Katsayılar Matrisi (C/N)			
d_{33}	2.864e-10	3.1697e-10	3.5680e-10
d_{15}	3.5392e-10	3.5638e-10	3.5886e-10

EK-B

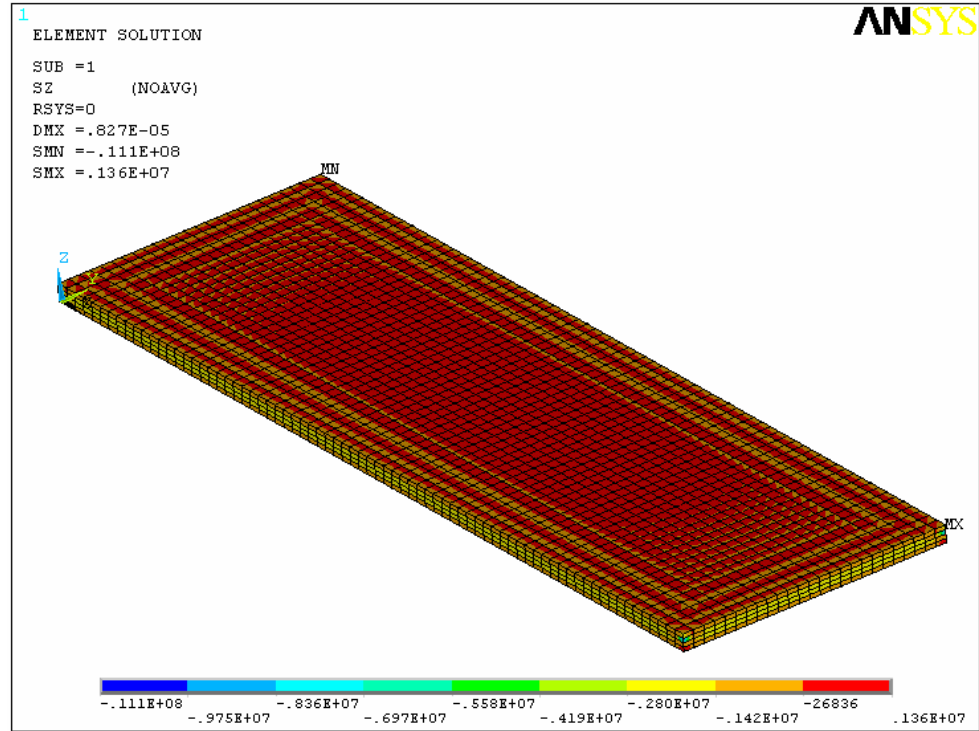
Tablo B.1: k 'nın sıcaklığa bağlı denkleminin elde edilmesinde kullanılan MATLAB kodu

```
clear all; close all; clc;
% Curve Fitting
x=[0 27 77 108.25 109 127 152 177 184 202 227]';
y=[1 1.025 1.09 1.13 1.125 1.135 1.16 1.25 1.19 1.21 1.25]';
p = polyfit(x,y,8);
% Let's what we have
f = polyval(p,x);
plot(x,y,'.',x,f,'-'),xlabel('sıcaklık degerleri'),ylabel('k
degerleri'),title('alfa-sıcaklık bagintisi'),
legend('secilen noktalar','Denklemin cizdigi egri'),
axis([-10 300 0 2]),grid
```

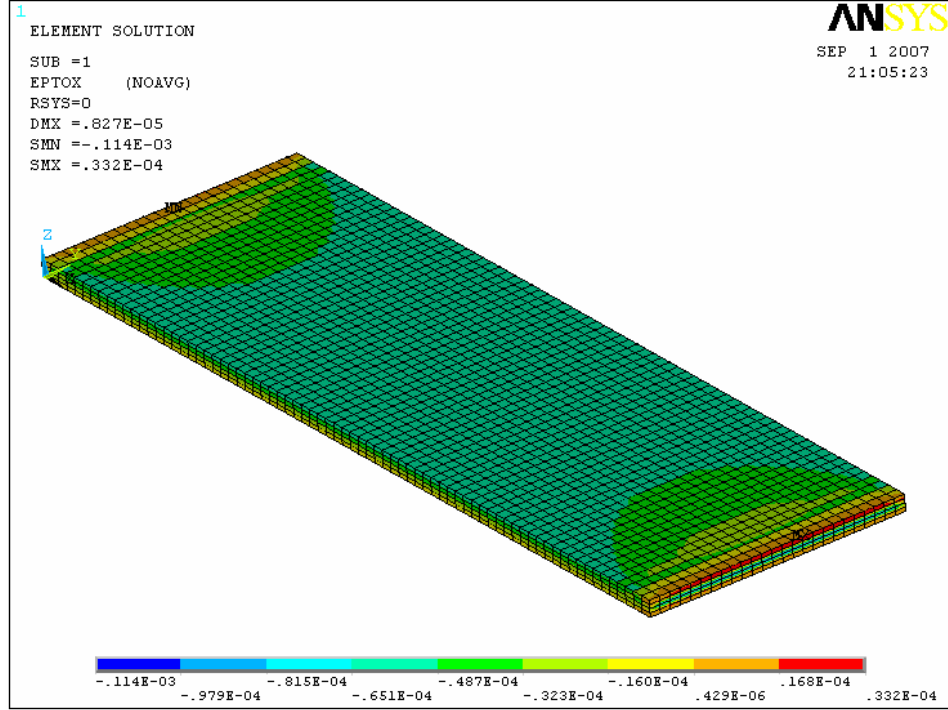
Tablo B.2: α 'nın sıcaklığa bağlı denkleminin elde edilmesinde kullanılan MATLAB kodu

```
clear all; close all; clc;
% Curve Fitting
x=[0 48.28 100 148.28 200 248.28]';
y=[0.84 1.2 1.68 2.24 2.76 3.24]';
p = polyfit(x,y,3);
% Let's what we have
f = polyval(p,x);
plot(x,y,'o',x,f,'-'),xlabel('sıcaklık degerleri'),ylabel('alfa
degerleri'),title('alfa-sıcaklık bagintisi'),
legend('secilen noktalar','Denklemin cizdigi egri'),
axis([-300 400 0 5]),grid
```

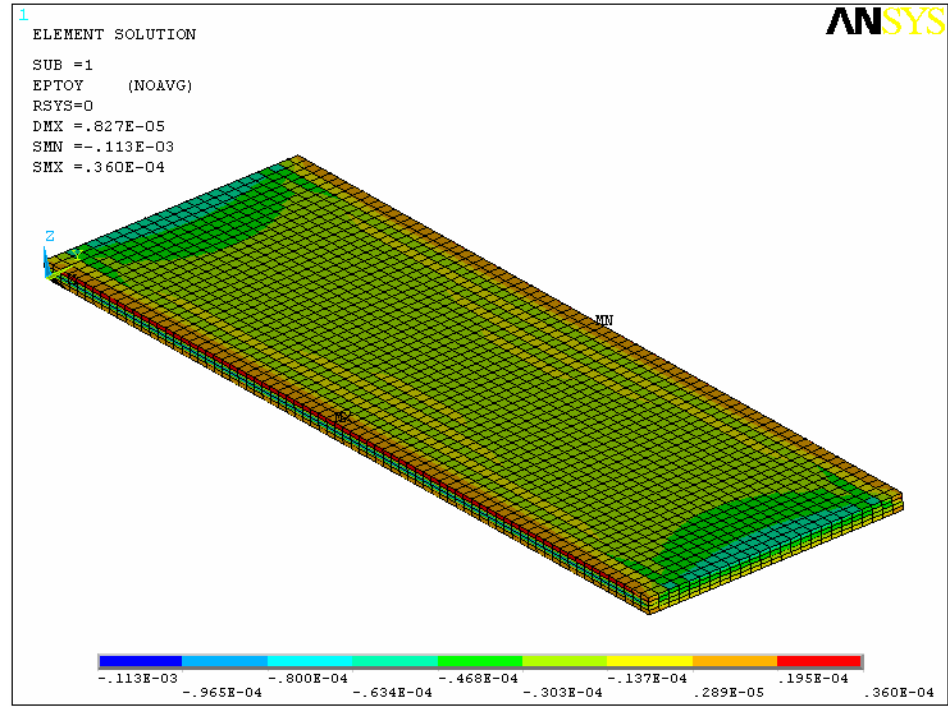
EK- C



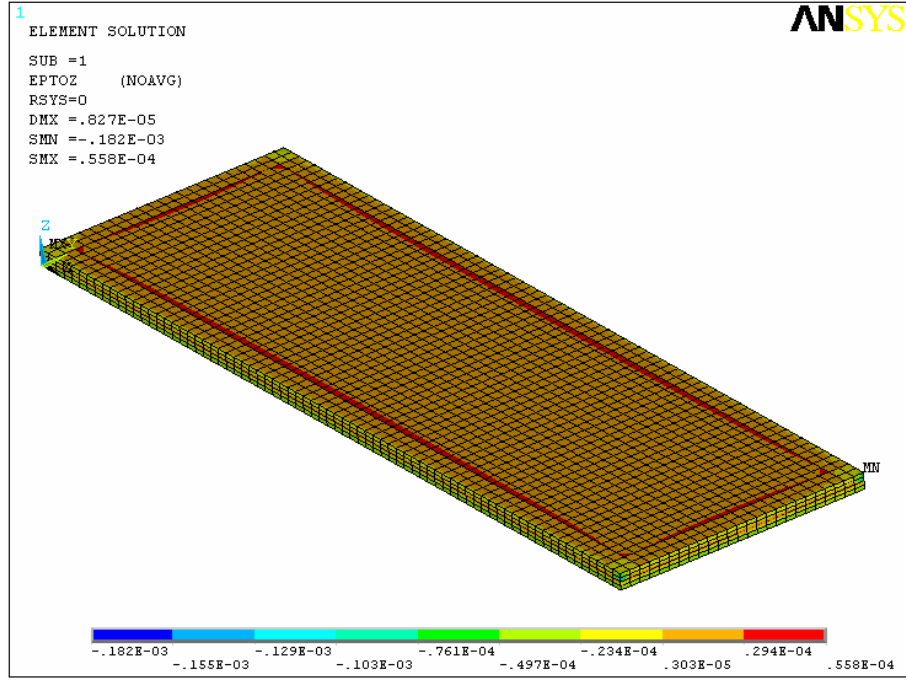
Şekil C.1: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, z yönünde meydana gelen gerilme (σ_z) değerleri.



Şekil C.2: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, x yönünde meydana gelen gerinme (ϵ_x) değerleri.

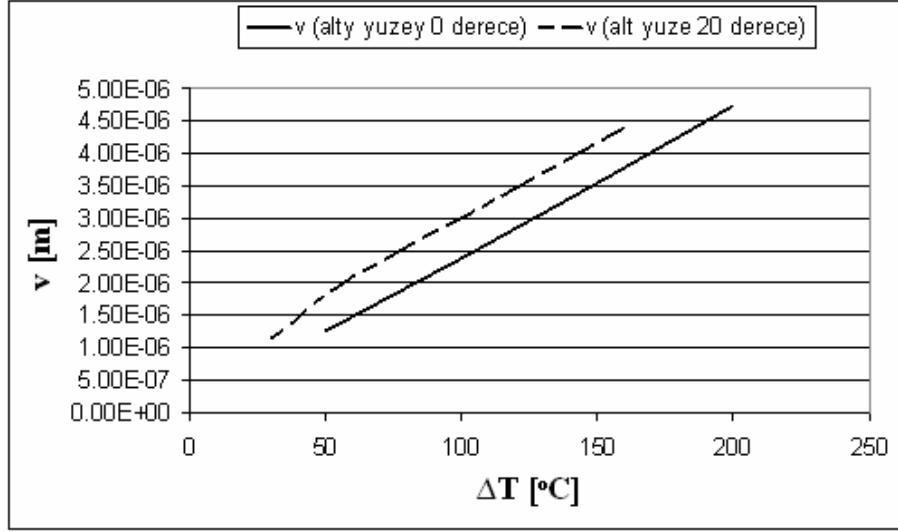


Şekil C.3: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, y yönünde meydana gelen gerinme (ϵ_y) değerleri.

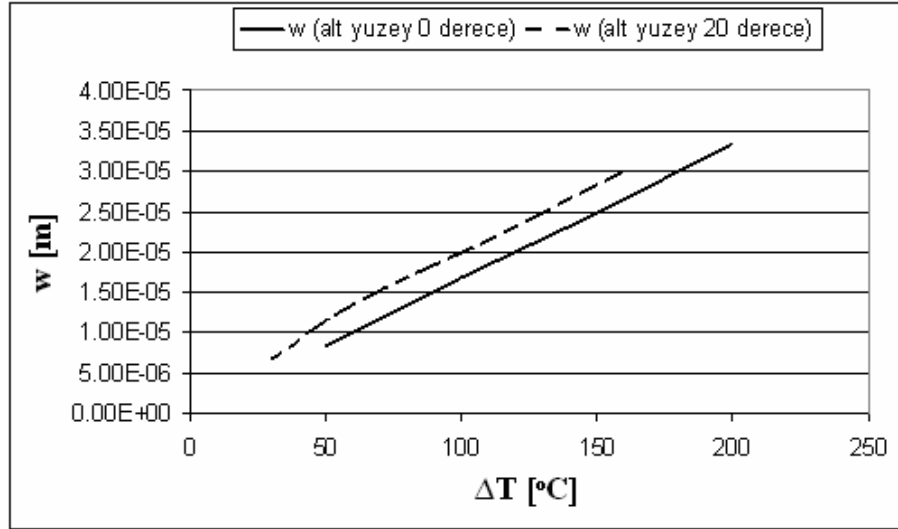


Şekil C.4: 0°C-50°C ve 100V değerlerinde, sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği durum için, z yönünde meydana gelen gerinme (ϵ_z) değerleri.

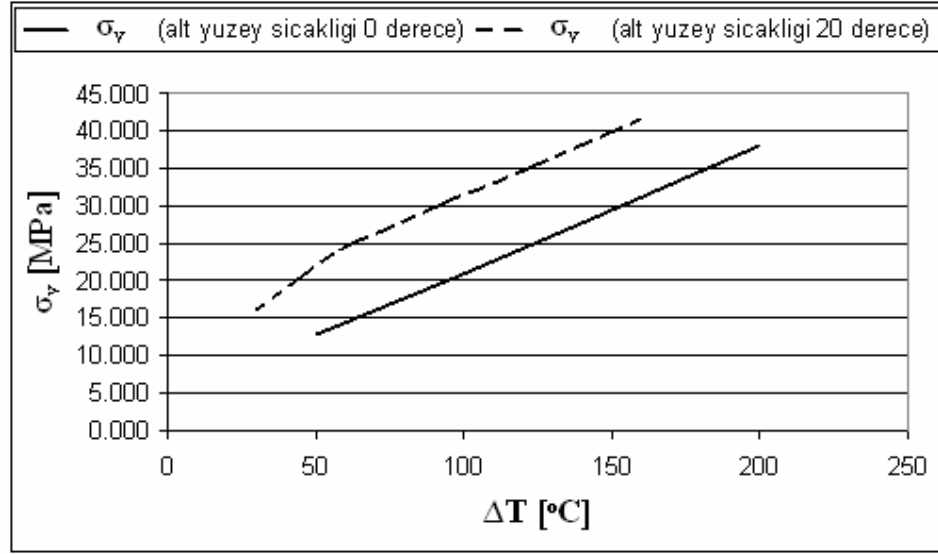
EK-D



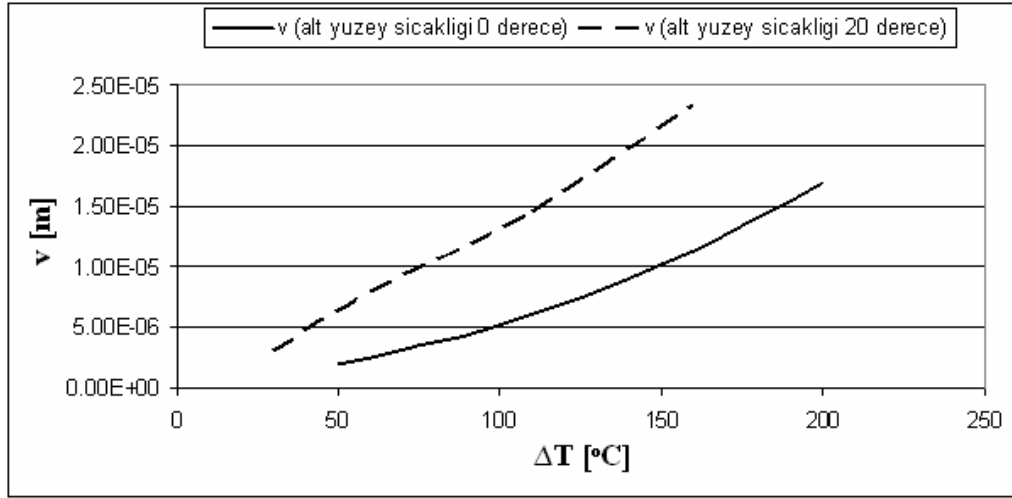
Şekil D.1: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde y yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri



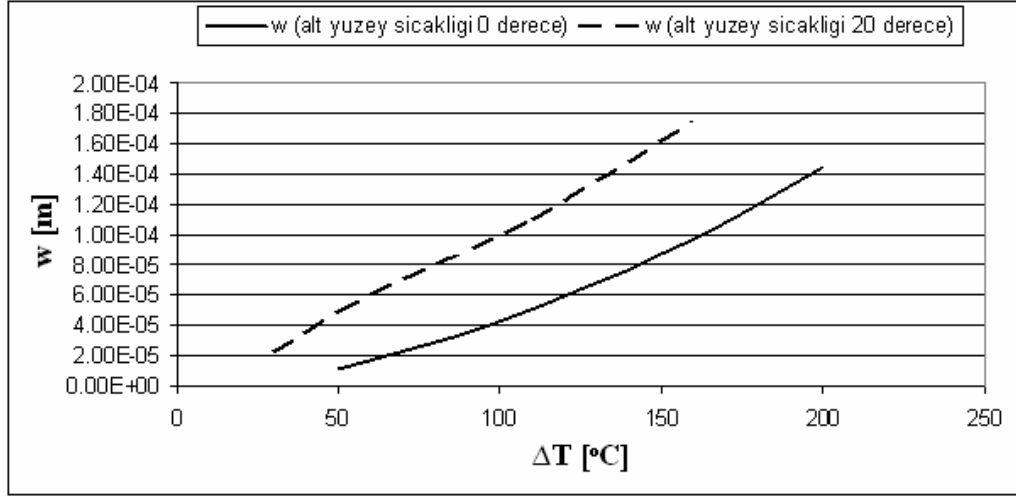
Şekil D.2: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde z yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri



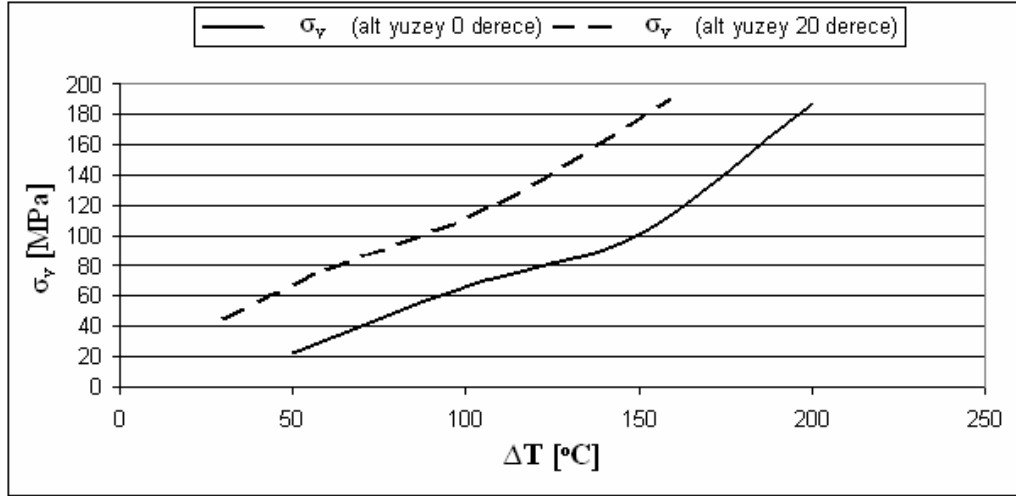
Şekil D.3: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_y (MPa) değerleri.



Şekil D.4: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde y yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri (sıcaklık etkileri).



Şekil D.5: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde z yönünde elde edilen yer değiştirme değerleri (sıcaklık etkileri).



Şekil D.6: Plağın alt yüzeyinin sıcaklığı 0°C ve 20°C’ de ayrı ayrı sabitlendiğinde elde edilen σ_y (MPa) değerleri.

EK-E

MATHEMATICA v5.0 ÇÖZÜMÜ

Isıl yüklerin düzlem içi etkilerine ait çözümler:

$$\begin{aligned}
 u &= \text{Sum}[B_{\{k,1\}} \cos\left[\frac{k\pi x}{15}\right] \left(\sin\left[\frac{1\pi y}{5}\right]\right), \{k, 1, 3, 2\}, \{1, 1, 3, 2\}] \\
 &\cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] B_{\{1,1\}} + \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] B_{\{1,3\}} + \\
 &\cos[20\pi x] \sin[20\pi y] B_{\{3,1\}} + \cos[20\pi x] \sin[60\pi y] B_{\{3,3\}} \\
 \partial_x u &= -\frac{20}{3}\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] B_{\{1,1\}} - \frac{20}{3}\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] B_{\{1,3\}} - \\
 &20\pi \sin[20\pi x] \sin[20\pi y] B_{\{3,1\}} - 20\pi \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] B_{\{3,3\}} \\
 \partial_y u &= 20\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] B_{\{1,1\}} + 60\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] B_{\{1,3\}} + \\
 &20\pi \cos[20\pi x] \cos[20\pi y] B_{\{3,1\}} + 60\pi \cos[20\pi x] \cos[60\pi y] B_{\{3,3\}} \\
 w &= \text{Sum}[C_{\{i,j\}} \left(\sin\left[\frac{i\pi x}{15}\right]\right) \cos\left[\frac{j\pi y}{5}\right], \{i, 1, 3, 2\}, \{j, 1, 3, 2\}] \\
 &\cos[20\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] C_{\{1,1\}} + \cos[60\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] C_{\{1,3\}} + \\
 &\cos[20\pi y] \sin[20\pi x] C_{\{3,1\}} + \cos[60\pi y] \sin[20\pi x] C_{\{3,3\}} \\
 \partial_x w &= \frac{20}{3}\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] C_{\{1,1\}} + \frac{20}{3}\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] C_{\{1,3\}} + \\
 &20\pi \cos[20\pi x] \cos[20\pi y] C_{\{3,1\}} + 20\pi \cos[20\pi x] \cos[60\pi y] C_{\{3,3\}} \\
 \partial_y w &= -20\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] C_{\{1,1\}} - 60\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] C_{\{1,3\}} - \\
 &20\pi \sin[20\pi x] \sin[20\pi y] C_{\{3,1\}} - 60\pi \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] C_{\{3,3\}} \\
 \text{thermal3} &= N\left[\left(\frac{162702}{1000} \text{deltatoplam}\right) \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (N[\partial_x u]) \, dx \, dy\right] \\
 &162.702 \text{deltatoplam} \\
 &(-0.063662 B_{\{1,1\}} - 0.0212207 B_{\{1,3\}} - 0.063662 B_{\{3,1\}} - 0.0212207 B_{\{3,3\}}) \\
 \text{thermal4} &= N\left[\left(\frac{162702}{1000} \text{deltatoplam}\right) \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (N[\partial_y w]) \, dx \, dy\right] \\
 &162.702 \text{deltatoplam} \\
 &(-0.190986 C_{\{1,1\}} - 0.190986 C_{\{1,3\}} - 0.063662 C_{\{3,1\}} - 0.063662 C_{\{3,3\}})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{toplamlthermal} = \text{Expand}[N[\text{thermal3} + \text{thermal4}]] \\
& -10.3579 \text{deltatoplaml} B_{\{1,1\}} - 3.45264 \text{deltatoplaml} B_{\{1,3\}} - \\
& 10.3579 \text{deltatoplaml} B_{\{3,1\}} - 3.45264 \text{deltatoplaml} B_{\{3,3\}} - 31.0738 \text{deltatoplaml} C_{\{1,1\}} - \\
& 31.0738 \text{deltatoplaml} C_{\{1,3\}} - 10.3579 \text{deltatoplaml} C_{\{3,1\}} - 10.3579 \text{deltatoplaml} C_{\{3,3\}} \\
& \text{membrane1} = N\left[\frac{1145038168}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x u) (\partial_x u) dx dy\right] \\
& 9.41756 \times 10^7 (B_{\{1,1\}}^2 + B_{\{1,3\}}^2 + 9. (B_{\{3,1\}}^2 + B_{\{3,3\}}^2)) \\
& \text{membrane2} = N\left[\frac{1145038168}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_y w) (\partial_y w) dx dy\right] \\
& 8.47581 \times 10^8 (C_{\{1,1\}}^2 + 9. C_{\{1,3\}}^2 + C_{\{3,1\}}^2 + 9. C_{\{3,3\}}^2) \\
& \text{membrane3} = N\left[\frac{7099236641}{100} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x u) (\partial_y w) dx dy\right] \\
& 1.75167 \times 10^8 (B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 3. B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 3. B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + 9. B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}}) \\
& \text{membrane4} = N\left[69900000 \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_y u) (\partial_x w) dx dy\right] \\
& 1.72471 \times 10^8 (B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 3. B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 3. B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + 9. B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}}) \\
& \text{membrane5} = N\left[34950000 \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_y u) (\partial_y u) dx dy\right] \\
& 2.58707 \times 10^8 (B_{\{1,1\}}^2 + 9. B_{\{1,3\}}^2 + B_{\{3,1\}}^2 + 9. B_{\{3,3\}}^2) \\
& \text{membrane6} = N\left[34950000 \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x w) (\partial_x w) dx dy\right] \\
& 2.87452 \times 10^7 (C_{\{1,1\}}^2 + C_{\{1,3\}}^2 + 9. (C_{\{3,1\}}^2 + C_{\{3,3\}}^2)) \\
& \text{toplammembrane} = \text{Expand}[N[\text{membrane1} + \text{membrane2} + \text{membrane3} + \\
& \text{membrane4} + \text{membrane5} + \text{membrane6}]] \\
& 3.52883 \times 10^8 B_{\{1,1\}}^2 + 2.42254 \times 10^9 B_{\{1,3\}}^2 + 1.10629 \times 10^9 B_{\{3,1\}}^2 + \\
& 3.17594 \times 10^9 B_{\{3,3\}}^2 + 3.47638 \times 10^8 B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 8.76326 \times 10^8 C_{\{1,1\}}^2 + \\
& 1.04291 \times 10^9 B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 7.65697 \times 10^9 C_{\{1,3\}}^2 + 1.04291 \times 10^9 B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + \\
& 1.10629 \times 10^9 C_{\{3,1\}}^2 + 3.12874 \times 10^9 B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}} + 7.88693 \times 10^9 C_{\{3,3\}}^2 \\
& \text{toplampotansiyelenerji} = \text{Expand}[N[\text{toplammembrane} - \text{toplamlthermal}]] \\
& 10.3579 \text{deltatoplaml} B_{\{1,1\}} + 3.52883 \times 10^8 B_{\{1,1\}}^2 + \\
& 3.45264 \text{deltatoplaml} B_{\{1,3\}} + 2.42254 \times 10^9 B_{\{1,3\}}^2 + 10.3579 \text{deltatoplaml} B_{\{3,1\}} + \\
& 1.10629 \times 10^9 B_{\{3,1\}}^2 + 3.45264 \text{deltatoplaml} B_{\{3,3\}} + 3.17594 \times 10^9 B_{\{3,3\}}^2 + \\
& 31.0738 \text{deltatoplaml} C_{\{1,1\}} + 3.47638 \times 10^8 B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 8.76326 \times 10^8 C_{\{1,1\}}^2 + \\
& 31.0738 \text{deltatoplaml} C_{\{1,3\}} + 1.04291 \times 10^9 B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 7.65697 \times 10^9 C_{\{1,3\}}^2 + \\
& 10.3579 \text{deltatoplaml} C_{\{3,1\}} + 1.04291 \times 10^9 B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + 1.10629 \times 10^9 C_{\{3,1\}}^2 + \\
& 10.3579 \text{deltatoplaml} C_{\{3,3\}} + 3.12874 \times 10^9 B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}} + 7.88693 \times 10^9 C_{\{3,3\}}^2 \\
& \text{denklem1} = \partial_{B_{\{1,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji} \\
& 10.3579 \text{deltatoplaml} + 7.05765 \times 10^8 B_{\{1,1\}} + 3.47638 \times 10^8 C_{\{1,1\}} \\
& \text{denklem2} = \partial_{B_{\{1,3\}}} \text{toplampotansiyelenerji} \\
& 3.45264 \text{deltatoplaml} + 4.84508 \times 10^9 B_{\{1,3\}} + 1.04291 \times 10^9 C_{\{1,3\}} \\
& \text{denklem3} = \partial_{B_{\{3,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji} \\
& 10.3579 \text{deltatoplaml} + 2.21258 \times 10^9 B_{\{3,1\}} + 1.04291 \times 10^9 C_{\{3,1\}} \\
& \text{denklem4} = \partial_{B_{\{3,3\}}} \text{toplampotansiyelenerji} \\
& 3.45264 \text{deltatoplaml} + 6.35189 \times 10^9 B_{\{3,3\}} + 3.12874 \times 10^9 C_{\{3,3\}}
\end{aligned}$$

denkleml5 = $\partial_{C_{1,1}}$ toplam potansiyel enerji

$$31.0738 \text{deltatoplaml} + 3.47638 \times 10^8 B_{1,1} + 1.75265 \times 10^9 C_{1,1}$$

denkleml6 = $\partial_{C_{1,3}}$ toplam potansiyel enerji

$$31.0738 \text{deltatoplaml} + 1.04291 \times 10^9 B_{1,3} + 1.53139 \times 10^{10} C_{1,3}$$

denkleml7 = $\partial_{C_{3,1}}$ toplam potansiyel enerji

$$10.3579 \text{deltatoplaml} + 1.04291 \times 10^9 B_{3,1} + 2.21258 \times 10^9 C_{3,1}$$

denkleml8 = $\partial_{C_{3,3}}$ toplam potansiyel enerji

$$10.3579 \text{deltatoplaml} + 3.12874 \times 10^9 B_{3,3} + 1.57739 \times 10^{10} C_{3,3}$$

NSolve[{denkleml1 == 0, denkleml2 == 0, denkleml3 == 0, denkleml4 == 0, denkleml5 == 0, denkleml6 == 0, denkleml7 == 0, denkleml8 == 0},

{B_{1,1}, B_{1,3}, B_{3,1}, B_{3,3}, C_{1,1}, C_{1,3}, C_{3,1}, C_{3,3}}]

{B_{1,1} → -6.58665 × 10⁻⁹ deltatoplaml, B_{1,3} → -2.7994 × 10⁻¹⁰ deltatoplaml, B_{3,1} → -3.18168 × 10⁻⁹ deltatoplaml, B_{3,3} → -2.4395 × 10⁻¹⁰ deltatoplaml, C_{1,1} → -1.64231 × 10⁻⁸ deltatoplaml, C_{1,3} → -2.01005 × 10⁻⁹ deltatoplaml, C_{3,1} → -3.18168 × 10⁻⁹ deltatoplaml, C_{3,3} → -6.08264 × 10⁻¹⁰ deltatoplaml}

Isıl yüklerin eğilme etkilerine ait çözümler:

$$ww = \text{Sum}[A_{m,n} \left(\sin\left[\frac{m\pi x}{15}\right] \right) \left(\sin\left[\frac{n\pi y}{100}\right] \right), \{m, 1, 5, 2\}, \{n, 1, 5, 2\}]$$

$$\sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{1,1} +$$

$$\sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{1,3} + \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{1,5} +$$

$$\sin[20\pi x] \sin[20\pi y] A_{3,1} + \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] A_{3,3} +$$

$$\sin[20\pi x] \sin[100\pi y] A_{3,5} + \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{5,1} +$$

$$\sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{5,3} + \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{5,5}$$

$\partial_{x,x} ww$

$$-\frac{400}{9} \pi^2 \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{1,1} -$$

$$\frac{400}{9} \pi^2 \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{1,3} - \frac{400}{9} \pi^2 \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{1,5} -$$

$$400 \pi^2 \sin[20\pi x] \sin[20\pi y] A_{3,1} - 400 \pi^2 \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] A_{3,3} -$$

$$400 \pi^2 \sin[20\pi x] \sin[100\pi y] A_{3,5} - \frac{10000}{9} \pi^2 \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{5,1} -$$

$$\frac{10000}{9} \pi^2 \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{5,3} - \frac{10000}{9} \pi^2 \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{5,5}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_{y,y} WW \\
& -400\pi^2 \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{1,1} - \\
& 3600\pi^2 \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{1,3} - 10000\pi^2 \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{1,5} - \\
& 400\pi^2 \sin[20\pi x] \sin[20\pi y] A_{3,1} - 3600\pi^2 \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] A_{3,3} - \\
& 10000\pi^2 \sin[20\pi x] \sin[100\pi y] A_{3,5} - 400\pi^2 \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{5,1} - \\
& 3600\pi^2 \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{5,3} - 10000\pi^2 \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{5,5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_{x,y} WW \\
& \frac{400}{3}\pi^2 \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] A_{1,1} + \\
& 400\pi^2 \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] A_{1,3} + \frac{2000}{3}\pi^2 \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[100\pi y] A_{1,5} + \\
& 400\pi^2 \cos[20\pi x] \cos[20\pi y] A_{3,1} + 1200\pi^2 \cos[20\pi x] \cos[60\pi y] A_{3,3} + \\
& 2000\pi^2 \cos[20\pi x] \cos[100\pi y] A_{3,5} + \frac{2000}{3}\pi^2 \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] A_{5,1} + \\
& 2000\pi^2 \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] A_{5,3} + \frac{10000}{3}\pi^2 \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[100\pi y] A_{5,5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_x WW \\
& \frac{20}{3}\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{1,1} + \\
& \frac{20}{3}\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{1,3} + \frac{20}{3}\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{1,5} + \\
& 20\pi \cos[20\pi x] \sin[20\pi y] A_{3,1} + 20\pi \cos[20\pi x] \sin[60\pi y] A_{3,3} + \\
& 20\pi \cos[20\pi x] \sin[100\pi y] A_{3,5} + \frac{100}{3}\pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] A_{5,1} + \\
& \frac{100}{3}\pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] A_{5,3} + \frac{100}{3}\pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] A_{5,5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_y WW \\
& 20\pi \cos[20\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] A_{1,1} + \\
& 60\pi \cos[60\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] A_{1,3} + 100\pi \cos[100\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] A_{1,5} + \\
& 20\pi \cos[20\pi y] \sin[20\pi x] A_{3,1} + 60\pi \cos[60\pi y] \sin[20\pi x] A_{3,3} + \\
& 100\pi \cos[100\pi y] \sin[20\pi x] A_{3,5} + 20\pi \cos[20\pi y] \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] A_{5,1} + \\
& 60\pi \cos[60\pi y] \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] A_{5,3} + 100\pi \cos[100\pi y] \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] A_{5,5}
\end{aligned}$$

$$\text{thermal1} = N \left[(36156000 \text{deltafark}) \int_{-\frac{2000}{3}}^{\frac{3}{2000}} \int_0^5 \int_0^{\frac{15}{100}} (N[\partial_{x,x} WW]) (z^2) dx dy dz \right]$$

$$3.6156 \times 10^7 \text{deltafark}$$

$$\begin{aligned}
& (-3. \times 10^{-9} A_{1,1} - 1. \times 10^{-9} A_{1,3} - 6. \times 10^{-10} A_{1,5} - 9. \times 10^{-9} A_{3,1} - 3. \times 10^{-9} \\
& A_{3,3} - 1.8 \times 10^{-9} A_{3,5} - 1.5 \times 10^{-8} A_{5,1} - 5. \times 10^{-9} A_{5,3} - 3. \times 10^{-9} A_{5,5})
\end{aligned}$$

$$\text{thermal2} = N[(36156000 \text{deltafark}) \int_{-\frac{3}{2000}}^{\frac{3}{2000}} \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (N[\partial_{y,y} WW]) (z^2) dx dy dz]$$

$$3.6156 \times 10^7 \text{deltafark}$$

$$(-2.7 \times 10^{-8} A_{\{1,1\}} - 8.1 \times 10^{-8} A_{\{1,3\}} - 1.35 \times 10^{-7} A_{\{1,5\}} - 9. \times 10^{-9} A_{\{3,1\}} - \\ 2.7 \times 10^{-8} A_{\{3,3\}} - 4.5 \times 10^{-8} A_{\{3,5\}} - 5.4 \times 10^{-9} A_{\{5,1\}} - \\ 1.62 \times 10^{-8} A_{\{5,3\}} - 2.7 \times 10^{-8} A_{\{5,5\}})$$

$$\text{toplamthermal} = \text{Expand}[N[\text{thermal1} + \text{thermal2}]]$$

$$-1.08468 \text{deltafark} A_{\{1,1\}} - 2.96479 \text{deltafark} A_{\{1,3\}} - 4.90275 \text{deltafark} A_{\{1,5\}} - \\ 0.650808 \text{deltafark} A_{\{3,1\}} - 1.08468 \text{deltafark} A_{\{3,3\}} - 1.6921 \text{deltafark} A_{\{3,5\}} - \\ 0.737582 \text{deltafark} A_{\{5,1\}} - 0.766507 \text{deltafark} A_{\{5,3\}} - 1.08468 \text{deltafark} A_{\{5,5\}}$$

$$\text{bending1} = N[\frac{858778626}{10^7} \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (\partial_{x,x} WW) (\partial_{x,x} WW) dx dy]$$

$$30982.5 (A_{\{1,1\}}^2 + A_{\{1,3\}}^2 + A_{\{1,5\}}^2 + 81. A_{\{3,1\}}^2 + \\ 81. A_{\{3,3\}}^2 + 81. A_{\{3,5\}}^2 + 625. (A_{\{5,1\}}^2 + A_{\{5,3\}}^2 + A_{\{5,5\}}^2))$$

$$\text{bending2} = N[\frac{5324427481}{10^8} \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (\partial_{y,y} WW) (\partial_{x,x} WW) dx dy]$$

$$172883. (A_{\{1,1\}}^2 + 9. A_{\{1,3\}}^2 + 25. A_{\{1,5\}}^2 + 9. A_{\{3,1\}}^2 + \\ 81. A_{\{3,3\}}^2 + 225. A_{\{3,5\}}^2 + 25. A_{\{5,1\}}^2 + 225. A_{\{5,3\}}^2 + 625. A_{\{5,5\}}^2)$$

$$\text{bending3} = N[\frac{858778626}{10^7} \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (\partial_{y,y} WW) (\partial_{y,y} WW) dx dy]$$

$$2.50959 \times 10^6 (A_{\{1,1\}}^2 + 81. A_{\{1,3\}}^2 + 625. A_{\{1,5\}}^2 + A_{\{3,1\}}^2 + \\ 81. A_{\{3,3\}}^2 + 625. A_{\{3,5\}}^2 + A_{\{5,1\}}^2 + 81. A_{\{5,3\}}^2 + 625. A_{\{5,5\}}^2)$$

$$\text{bending4} = N[\frac{52425}{1000} \int_0^{\frac{5}{100}} \int_0^{\frac{15}{100}} (\partial_{x,y} WW) (\partial_{x,y} WW) dx dy]$$

$$170222. (A_{\{1,1\}}^2 + 9. A_{\{1,3\}}^2 + 25. A_{\{1,5\}}^2 + 9. A_{\{3,1\}}^2 + \\ 81. A_{\{3,3\}}^2 + 225. A_{\{3,5\}}^2 + 25. A_{\{5,1\}}^2 + 225. A_{\{5,3\}}^2 + 625. A_{\{5,5\}}^2)$$

$$\text{toplambending} = \text{Expand}[N[\text{bending1} + \text{bending2} + \text{bending3} + \text{bending4}]]$$

$$2.88367 \times 10^6 A_{\{1,1\}}^2 + 2.06395 \times 10^8 A_{\{1,3\}}^2 + 1.5771 \times 10^9 A_{\{1,5\}}^2 + \\ 8.10712 \times 10^6 A_{\{3,1\}}^2 + 2.33577 \times 10^8 A_{\{3,3\}}^2 + 1.6482 \times 10^9 A_{\{3,5\}}^2 + \\ 3.04513 \times 10^7 A_{\{5,1\}}^2 + 2.99839 \times 10^8 A_{\{5,3\}}^2 + 1.8023 \times 10^9 A_{\{5,5\}}^2$$

$$\text{toplampotansiyelenerji} = \text{Expand}[N[\text{toplambending} - \text{toplamthermal}]]$$

$$1.08468 \text{deltafark} A_{\{1,1\}} + 2.88367 \times 10^6 A_{\{1,1\}}^2 + 2.96479 \text{deltafark} A_{\{1,3\}} + \\ 2.06395 \times 10^8 A_{\{1,3\}}^2 + 4.90275 \text{deltafark} A_{\{1,5\}} + 1.5771 \times 10^9 A_{\{1,5\}}^2 + \\ 0.650808 \text{deltafark} A_{\{3,1\}} + 8.10712 \times 10^6 A_{\{3,1\}}^2 + 1.08468 \text{deltafark} A_{\{3,3\}} + \\ 2.33577 \times 10^8 A_{\{3,3\}}^2 + 1.6921 \text{deltafark} A_{\{3,5\}} + 1.6482 \times 10^9 A_{\{3,5\}}^2 + \\ 0.737582 \text{deltafark} A_{\{5,1\}} + 3.04513 \times 10^7 A_{\{5,1\}}^2 + 0.766507 \text{deltafark} A_{\{5,3\}} + \\ 2.99839 \times 10^8 A_{\{5,3\}}^2 + 1.08468 \text{deltafark} A_{\{5,5\}} + 1.8023 \times 10^9 A_{\{5,5\}}^2$$

$$\text{denkleml} = \partial_{A_{\{1,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$1.08468 \text{deltafark} + 5.76735 \times 10^6 A_{\{1,1\}}$$

$$\text{denkleml2} = \partial_{A_{\{1,3\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$2.96479 \text{deltafark} + 4.12791 \times 10^8 A_{\{1,3\}}$$

$$\text{denkleml3} = \partial_{A_{\{1,5\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$4.90275 \text{deltafark} + 3.1542 \times 10^9 A_{\{1,5\}}$$

denkleml4 = $\partial_{A_{3,1}}$ toplam potansiyel enerji

$$0.650808 \text{ delta fark} + 1.62142 \times 10^7 A_{3,1}$$

denkleml5 = $\partial_{A_{3,3}}$ toplam potansiyel enerji

$$1.08468 \text{ delta fark} + 4.67155 \times 10^8 A_{3,3}$$

denkleml6 = $\partial_{A_{3,5}}$ toplam potansiyel enerji

$$1.6921 \text{ delta fark} + 3.2964 \times 10^9 A_{3,5}$$

denkleml7 = $\partial_{A_{5,1}}$ toplam potansiyel enerji

$$0.737582 \text{ delta fark} + 6.09026 \times 10^7 A_{5,1}$$

denkleml8 = $\partial_{A_{5,3}}$ toplam potansiyel enerji

$$0.766507 \text{ delta fark} + 5.99678 \times 10^8 A_{5,3}$$

denkleml9 = $\partial_{A_{5,5}}$ toplam potansiyel enerji

$$1.08468 \text{ delta fark} + 3.60459 \times 10^9 A_{5,5}$$

NSolve[{denkleml1 == 0, denkleml2 == 0, denkleml3 == 0, denkleml4 == 0,

denkleml5 == 0, denkleml6 == 0, denkleml7 == 0, denkleml8 == 0, denkleml9 == 0},

{A_{1,1}, A_{1,3}, A_{1,5}, A_{3,1}, A_{3,3}, A_{3,5}, A_{5,1}, A_{5,3}, A_{5,5}}}]

{A_{1,1} → -1.88073 × 10⁻⁷ delta fark,

A_{1,3} → -7.18231 × 10⁻⁹ delta fark, A_{1,5} → -1.55436 × 10⁻⁹ delta fark,

A_{3,1} → -4.01381 × 10⁻⁸ delta fark, A_{3,3} → -2.32188 × 10⁻⁹ delta fark,

A_{3,5} → -5.13318 × 10⁻¹⁰ delta fark, A_{5,1} → -1.21109 × 10⁻⁸ delta fark,

A_{5,3} → -1.2782 × 10⁻⁹ delta fark, A_{5,5} → -3.00916 × 10⁻¹⁰ delta fark}]

Elektrik potansiyelinin düzlem içi etkilerine ait çözümler:

$$u = \text{Sum}[B_{\{k,l\}} \sin\left[\frac{k\pi x}{\frac{15}{100}}\right] \left[\cos\left[\frac{l\pi y}{\frac{5}{100}}\right]\right], \{k, 1, 5, 2\}, \{l, 1, 5, 2\}]$$

$$\cos[20\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] B_{\{1,1\}} +$$

$$\cos[60\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] B_{\{1,3\}} + \cos[100\pi y] \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] B_{\{1,5\}} +$$

$$\cos[20\pi y] \sin[20\pi x] B_{\{3,1\}} + \cos[60\pi y] \sin[20\pi x] B_{\{3,3\}} +$$

$$\cos[100\pi y] \sin[20\pi x] B_{\{3,5\}} + \cos[20\pi y] \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] B_{\{5,1\}} +$$

$$\cos[60\pi y] \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] B_{\{5,3\}} + \cos[100\pi y] \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] B_{\{5,5\}}$$

$\partial_x u$

$$\frac{20}{3} \pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] B_{\{1,1\}} +$$

$$\frac{20}{3} \pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] B_{\{1,3\}} + \frac{20}{3} \pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[100\pi y] B_{\{1,5\}} +$$

$$20\pi \cos[20\pi x] \cos[20\pi y] B_{\{3,1\}} + 20\pi \cos[20\pi x] \cos[60\pi y] B_{\{3,3\}} +$$

$$20\pi \cos[20\pi x] \cos[100\pi y] B_{\{3,5\}} + \frac{100}{3} \pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] B_{\{5,1\}} +$$

$$\frac{100}{3} \pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] B_{\{5,3\}} + \frac{100}{3} \pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[100\pi y] B_{\{5,5\}}$$

$$\partial_y u$$

$$\begin{aligned} & -20\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] B_{\{1,1\}} - \\ & 60\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] B_{\{1,3\}} - 100\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] B_{\{1,5\}} - \\ & 20\pi \sin[20\pi x] \sin[20\pi y] B_{\{3,1\}} - 60\pi \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] B_{\{3,3\}} - \\ & 100\pi \sin[20\pi x] \sin[100\pi y] B_{\{3,5\}} - 20\pi \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] B_{\{5,1\}} - \\ & 60\pi \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] B_{\{5,3\}} - 100\pi \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] B_{\{5,5\}} \end{aligned}$$

$$w = \sum [C_{\{i,j\}} \left(\cos\left[\frac{i\pi x}{15}\right] \right) \sin\left[\frac{j\pi y}{5}\right], \{i, 1, 5, 2\}, \{j, 1, 5, 2\}]$$

$$\begin{aligned} & \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] C_{\{1,1\}} + \\ & \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] C_{\{1,3\}} + \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] C_{\{1,5\}} + \\ & \cos[20\pi x] \sin[20\pi y] C_{\{3,1\}} + \cos[20\pi x] \sin[60\pi y] C_{\{3,3\}} + \\ & \cos[20\pi x] \sin[100\pi y] C_{\{3,5\}} + \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] C_{\{5,1\}} + \\ & \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] C_{\{5,3\}} + \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] C_{\{5,5\}} \end{aligned}$$

$$\partial_x w$$

$$\begin{aligned} & -\frac{20}{3}\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] C_{\{1,1\}} - \\ & \frac{20}{3}\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] C_{\{1,3\}} - \frac{20}{3}\pi \sin\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] C_{\{1,5\}} - \\ & 20\pi \sin[20\pi x] \sin[20\pi y] C_{\{3,1\}} - 20\pi \sin[20\pi x] \sin[60\pi y] C_{\{3,3\}} - \\ & 20\pi \sin[20\pi x] \sin[100\pi y] C_{\{3,5\}} - \frac{100}{3}\pi \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[20\pi y] C_{\{5,1\}} - \\ & \frac{100}{3}\pi \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[60\pi y] C_{\{5,3\}} - \frac{100}{3}\pi \sin\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \sin[100\pi y] C_{\{5,5\}} \end{aligned}$$

$$\partial_y w$$

$$\begin{aligned} & 20\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] C_{\{1,1\}} + \\ & 60\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] C_{\{1,3\}} + 100\pi \cos\left[\frac{20\pi x}{3}\right] \cos[100\pi y] C_{\{1,5\}} + \\ & 20\pi \cos[20\pi x] \cos[20\pi y] C_{\{3,1\}} + 60\pi \cos[20\pi x] \cos[60\pi y] C_{\{3,3\}} + \\ & 100\pi \cos[20\pi x] \cos[100\pi y] C_{\{3,5\}} + 20\pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[20\pi y] C_{\{5,1\}} + \\ & 60\pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[60\pi y] C_{\{5,3\}} + 100\pi \cos\left[\frac{100\pi x}{3}\right] \cos[100\pi y] C_{\{5,5\}} \end{aligned}$$

$$membrane1 = N \left[\frac{1145038168}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x u) (\partial_x u) dx dy \right]$$

$$\begin{aligned} & 2.35439 \times 10^7 (B_{\{1,1\}}^2 + B_{\{1,3\}}^2 + B_{\{1,5\}}^2 + \\ & 9. B_{\{3,1\}}^2 + 9. B_{\{3,3\}}^2 + 9. B_{\{3,5\}}^2 + 25. (B_{\{5,1\}}^2 + B_{\{5,3\}}^2 + B_{\{5,5\}}^2)) \end{aligned}$$

$$\text{membrane2} = N \left[\frac{1145038168}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_y w) (\partial_y w) dx dy \right]$$

$$2.11895 \times 10^8 (C_{\{1,1\}}^2 + 9. C_{\{1,3\}}^2 + 25. C_{\{1,5\}}^2 + C_{\{3,1\}}^2 + 9. C_{\{3,3\}}^2 + 25. C_{\{3,5\}}^2 + C_{\{5,1\}}^2 + 9. C_{\{5,3\}}^2 + 25. C_{\{5,5\}}^2)$$

$$\text{membrane3} = N \left[\frac{7099236641}{100} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x u) (\partial_y w) dx dy \right]$$

$$4.37917 \times 10^7 (B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 3. B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 5. B_{\{1,5\}} C_{\{1,5\}} + 3. B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + 9. B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}} + 15. B_{\{3,5\}} C_{\{3,5\}} + 5. B_{\{5,1\}} C_{\{5,1\}} + 15. B_{\{5,3\}} C_{\{5,3\}} + 25. B_{\{5,5\}} C_{\{5,5\}})$$

$$\text{membrane4} = N \left[\frac{6990000}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x u) (\partial_y w) dx dy \right]$$

$$4.31178 \times 10^7 (B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 3. B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 5. B_{\{1,5\}} C_{\{1,5\}} + 3. B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + 9. B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}} + 15. B_{\{3,5\}} C_{\{3,5\}} + 5. B_{\{5,1\}} C_{\{5,1\}} + 15. B_{\{5,3\}} C_{\{5,3\}} + 25. B_{\{5,5\}} C_{\{5,5\}})$$

$$\text{membrane5} = N \left[\frac{34950000}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_x u) (\partial_x u) dx dy \right]$$

$$7.18631 \times 10^6 (B_{\{1,1\}}^2 + B_{\{1,3\}}^2 + B_{\{1,5\}}^2 + 9. B_{\{3,1\}}^2 + 9. B_{\{3,3\}}^2 + 9. B_{\{3,5\}}^2 + 25. (B_{\{5,1\}}^2 + B_{\{5,3\}}^2 + B_{\{5,5\}}^2))$$

$$\text{membrane6} = N \left[\frac{34950000}{10} \int_0^5 \int_0^{15} (\partial_y w) (\partial_y w) dx dy \right]$$

$$6.46768 \times 10^7 (C_{\{1,1\}}^2 + 9. C_{\{1,3\}}^2 + 25. C_{\{1,5\}}^2 + C_{\{3,1\}}^2 + 9. C_{\{3,3\}}^2 + 25. C_{\{3,5\}}^2 + C_{\{5,1\}}^2 + 9. C_{\{5,3\}}^2 + 25. C_{\{5,5\}}^2)$$

$$\text{toplammembrane} = \text{Expand}[N[\text{membrane1} + \text{membrane2} + \text{membrane3} + \text{membrane4} + \text{membrane5} + \text{membrane6}]]$$

$$3.07302 \times 10^7 B_{\{1,1\}}^2 + 3.07302 \times 10^7 B_{\{1,3\}}^2 + 3.07302 \times 10^7 B_{\{1,5\}}^2 + 2.76572 \times 10^8 B_{\{3,1\}}^2 + 2.76572 \times 10^8 B_{\{3,3\}}^2 + 2.76572 \times 10^8 B_{\{3,5\}}^2 + 7.68255 \times 10^8 B_{\{5,1\}}^2 + 7.68255 \times 10^8 B_{\{5,3\}}^2 + 7.68255 \times 10^8 B_{\{5,5\}}^2 + 8.69095 \times 10^7 B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + 2.76572 \times 10^8 C_{\{1,1\}}^2 + 2.60728 \times 10^8 B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + 2.48915 \times 10^9 C_{\{1,3\}}^2 + 4.34547 \times 10^8 B_{\{1,5\}} C_{\{1,5\}} + 6.9143 \times 10^9 C_{\{1,5\}}^2 + 2.60728 \times 10^8 B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + 2.76572 \times 10^8 C_{\{3,1\}}^2 + 7.82185 \times 10^8 B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}} + 2.48915 \times 10^9 C_{\{3,3\}}^2 + 1.30364 \times 10^9 B_{\{3,5\}} C_{\{3,5\}} + 6.9143 \times 10^9 C_{\{3,5\}}^2 + 4.34547 \times 10^8 B_{\{5,1\}} C_{\{5,1\}} + 2.76572 \times 10^8 C_{\{5,1\}}^2 + 1.30364 \times 10^9 B_{\{5,3\}} C_{\{5,3\}} + 2.48915 \times 10^9 C_{\{5,3\}}^2 + 2.17274 \times 10^9 B_{\{5,5\}} C_{\{5,5\}} + 6.9143 \times 10^9 C_{\{5,5\}}^2$$

$$\text{elektrik1} = N \left[\frac{650000}{3} \int_0^5 \int_0^{15} (N[\partial_x u]) dx dy \right]$$

$$216667. (0.000759909 B_{\{1,1\}} - 0.000253303 B_{\{1,3\}} + 0.000151982 B_{\{1,5\}} + 0.000253303 B_{\{3,1\}} - 0.0000844343 B_{\{3,3\}} + 0.0000506606 B_{\{3,5\}} + 0.000151982 B_{\{5,1\}} - 0.0000506606 B_{\{5,3\}} + 0.0000303964 B_{\{5,5\}})$$

$$\text{elektrik2} = N \left[\frac{650000}{3} \int_0^5 \int_0^{15} (N[\partial_y w]) dx dy \right]$$

$$216667. (0.000759909 C_{\{1,1\}} + 0.000253303 C_{\{1,3\}} + 0.000151982 C_{\{1,5\}} - 0.000253303 C_{\{3,1\}} - 0.0000844343 C_{\{3,3\}} - 0.0000506606 C_{\{3,5\}} + 0.000151982 C_{\{5,1\}} + 0.0000506606 C_{\{5,3\}} + 0.0000303964 C_{\{5,5\}})$$

$$\begin{aligned} \text{toplamelektrik} = & \text{Expand}[N[\text{elektrik1} + \text{elektrik2}]] \\ & 164.647 B_{\{1,1\}} - 54.8823 B_{\{1,3\}} + 32.9294 B_{\{1,5\}} + 54.8823 B_{\{3,1\}} - 18.2941 B_{\{3,3\}} + \\ & 10.9765 B_{\{3,5\}} + 32.9294 B_{\{5,1\}} - 10.9765 B_{\{5,3\}} + 6.58588 B_{\{5,5\}} + \\ & 164.647 C_{\{1,1\}} + 54.8823 C_{\{1,3\}} + 32.9294 C_{\{1,5\}} - 54.8823 C_{\{3,1\}} - \\ & 18.2941 C_{\{3,3\}} - 10.9765 C_{\{3,5\}} + 32.9294 C_{\{5,1\}} + 10.9765 C_{\{5,3\}} + 6.58588 C_{\{5,5\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{toplampotansiyelenerji} = & \text{Expand}[N[\text{toplammembrane-} \\ & \text{toplamelektrik}]] \\ & -164.647 B_{\{1,1\}} + 3.07302 \times 10^7 B_{\{1,1\}}^2 + 54.8823 B_{\{1,3\}} + 3.07302 \times 10^7 B_{\{1,3\}}^2 - \\ & 32.9294 B_{\{1,5\}} + 3.07302 \times 10^7 B_{\{1,5\}}^2 - 54.8823 B_{\{3,1\}} + 2.76572 \times 10^8 B_{\{3,1\}}^2 + \\ & 18.2941 B_{\{3,3\}} + 2.76572 \times 10^8 B_{\{3,3\}}^2 - 10.9765 B_{\{3,5\}} + 2.76572 \times 10^8 B_{\{3,5\}}^2 - \\ & 32.9294 B_{\{5,1\}} + 7.68255 \times 10^8 B_{\{5,1\}}^2 + 10.9765 B_{\{5,3\}} + 7.68255 \times 10^8 B_{\{5,3\}}^2 - \\ & 6.58588 B_{\{5,5\}} + 7.68255 \times 10^8 B_{\{5,5\}}^2 - 164.647 C_{\{1,1\}} + 8.69095 \times 10^7 B_{\{1,1\}} C_{\{1,1\}} + \\ & 2.76572 \times 10^8 C_{\{1,1\}}^2 - 54.8823 C_{\{1,3\}} + 2.60728 \times 10^8 B_{\{1,3\}} C_{\{1,3\}} + \\ & 2.48915 \times 10^9 C_{\{1,3\}}^2 - 32.9294 C_{\{1,5\}} + 4.34547 \times 10^8 B_{\{1,5\}} C_{\{1,5\}} + \\ & 6.9143 \times 10^9 C_{\{1,5\}}^2 + 54.8823 C_{\{3,1\}} + 2.60728 \times 10^8 B_{\{3,1\}} C_{\{3,1\}} + \\ & 2.76572 \times 10^8 C_{\{3,1\}}^2 + 18.2941 C_{\{3,3\}} + 7.82185 \times 10^8 B_{\{3,3\}} C_{\{3,3\}} + \\ & 2.48915 \times 10^9 C_{\{3,3\}}^2 + 10.9765 C_{\{3,5\}} + 1.30364 \times 10^9 B_{\{3,5\}} C_{\{3,5\}} + \\ & 6.9143 \times 10^9 C_{\{3,5\}}^2 - 32.9294 C_{\{5,1\}} + 4.34547 \times 10^8 B_{\{5,1\}} C_{\{5,1\}} + \\ & 2.76572 \times 10^8 C_{\{5,1\}}^2 - 10.9765 C_{\{5,3\}} + 1.30364 \times 10^9 B_{\{5,3\}} C_{\{5,3\}} + \\ & 2.48915 \times 10^9 C_{\{5,3\}}^2 - 6.58588 C_{\{5,5\}} + 2.17274 \times 10^9 B_{\{5,5\}} C_{\{5,5\}} + 6.9143 \times 10^9 C_{\{5,5\}}^2 \end{aligned}$$

$$\text{denkleml} = \partial_{B_{\{1,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-164.647 + 6.14604 \times 10^7 B_{\{1,1\}} + 8.69095 \times 10^7 C_{\{1,1\}}$$

$$\text{denkleml2} = \partial_{B_{\{1,3\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$54.8823 + 6.14604 \times 10^7 B_{\{1,3\}} + 2.60728 \times 10^8 C_{\{1,3\}}$$

$$\text{denkleml3} = \partial_{B_{\{1,5\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-32.9294 + 6.14604 \times 10^7 B_{\{1,5\}} + 4.34547 \times 10^8 C_{\{1,5\}}$$

$$\text{denkleml4} = \partial_{B_{\{3,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-54.8823 + 5.53144 \times 10^8 B_{\{3,1\}} + 2.60728 \times 10^8 C_{\{3,1\}}$$

$$\text{denkleml5} = \partial_{C_{\{1,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-164.647 + 8.69095 \times 10^7 B_{\{1,1\}} + 5.53144 \times 10^8 C_{\{1,1\}}$$

$$\text{denkleml6} = \partial_{C_{\{1,3\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-54.8823 + 2.60728 \times 10^8 B_{\{1,3\}} + 4.97829 \times 10^9 C_{\{1,3\}}$$

$$\text{denkleml7} = \partial_{C_{\{1,5\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-32.9294 + 4.34547 \times 10^8 B_{\{1,5\}} + 1.38286 \times 10^{10} C_{\{1,5\}}$$

$$\text{denkleml8} = \partial_{C_{\{3,1\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$54.8823 + 2.60728 \times 10^8 B_{\{3,1\}} + 5.53144 \times 10^8 C_{\{3,1\}}$$

$$\text{denkleml9} = \partial_{B_{\{3,3\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$18.2941 + 5.53144 \times 10^8 B_{\{3,3\}} + 7.82185 \times 10^8 C_{\{3,3\}}$$

$$\text{denkleml10} = \partial_{B_{\{3,5\}}} \text{toplampotansiyelenerji}$$

$$-10.9765 + 5.53144 \times 10^8 B_{\{3,5\}} + 1.30364 \times 10^9 C_{\{3,5\}}$$

denklem11 = $\partial_{B_{\{5,1\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$-32.9294 + 1.53651 \times 10^9 B_{\{5,1\}} + 4.34547 \times 10^8 C_{\{5,1\}}$$

denklem12 = $\partial_{B_{\{5,3\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$10.9765 + 1.53651 \times 10^9 B_{\{5,3\}} + 1.30364 \times 10^9 C_{\{5,3\}}$$

denklem13 = $\partial_{B_{\{5,5\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$-6.58588 + 1.53651 \times 10^9 B_{\{5,5\}} + 2.17274 \times 10^9 C_{\{5,5\}}$$

denklem14 = $\partial_{C_{\{3,3\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$18.2941 + 7.82185 \times 10^8 B_{\{3,3\}} + 4.97829 \times 10^9 C_{\{3,3\}}$$

denklem15 = $\partial_{C_{\{3,5\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$10.9765 + 1.30364 \times 10^9 B_{\{3,5\}} + 1.38286 \times 10^{10} C_{\{3,5\}}$$

denklem16 = $\partial_{C_{\{5,1\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$-32.9294 + 4.34547 \times 10^8 B_{\{5,1\}} + 5.53144 \times 10^8 C_{\{5,1\}}$$

denklem17 = $\partial_{C_{\{5,3\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$-10.9765 + 1.30364 \times 10^9 B_{\{5,3\}} + 4.97829 \times 10^9 C_{\{5,3\}}$$

denklem18 = $\partial_{C_{\{5,5\}}}$ toplampotansiyelenerji

$$-6.58588 + 2.17274 \times 10^9 B_{\{5,5\}} + 1.38286 \times 10^{10} C_{\{5,5\}}$$

NSolve[{denklem1 == 0, denklem2 == 0, denklem3 == 0, denklem4 == 0, denklem5 == 0,

denklem6 == 0, denklem7 == 0, denklem8 == 0, denklem9 == 0, denklem10 == 0,

denklem11 == 0, denklem12 == 0, denklem13 == 0, denklem14 == 0, denklem15 == 0,

denklem16 == 0, denklem17 == 0, denklem18 == 0},

{B_{1,1}, B_{1,3}, B_{1,5}, B_{3,1}, B_{3,3}, B_{3,5}, B_{5,1}, B_{5,3},

B_{5,5}, C_{1,1}, C_{1,3}, C_{1,5}, C_{3,1}, C_{3,3}, C_{3,5}, C_{5,1}, C_{5,3}, C_{5,5}}}]

$$\{ \{ B_{\{1,1\}} \rightarrow 2.90298 \times 10^{-6}, B_{\{1,3\}} \rightarrow -1.20817 \times 10^{-6}, B_{\{1,5\}} \rightarrow 6.67178 \times 10^{-7},$$

$$B_{\{3,1\}} \rightarrow 1.87686 \times 10^{-7}, B_{\{3,3\}} \rightarrow -3.58393 \times 10^{-8}, B_{\{3,5\}} \rightarrow 2.7917 \times 10^{-8},$$

$$B_{\{5,1\}} \rightarrow 5.90746 \times 10^{-9}, B_{\{5,3\}} \rightarrow -1.15894 \times 10^{-8}, B_{\{5,5\}} \rightarrow 4.64477 \times 10^{-9},$$

$$C_{\{1,1\}} \rightarrow -1.58457 \times 10^{-7}, C_{\{1,3\}} \rightarrow 7.42996 \times 10^{-8}, C_{\{1,5\}} \rightarrow -1.8584 \times 10^{-8},$$

$$C_{\{3,1\}} \rightarrow -1.87686 \times 10^{-7}, C_{\{3,3\}} \rightarrow 1.95626 \times 10^{-9}, C_{\{3,5\}} \rightarrow -3.42553 \times 10^{-9},$$

$$C_{\{5,1\}} \rightarrow 5.48905 \times 10^{-8}, C_{\{5,3\}} \rightarrow 5.23972 \times 10^{-9}, C_{\{5,5\}} \rightarrow -2.53531 \times 10^{-10} \} \}$$

ÖZGEÇMİŞ

Selen BAYAR, 28 Mart 1981 tarihinde Düzce’de dünyaya gelmiştir. Beşiktaş Lisesin’deki lise öğrenimini takiben 2000 yılında girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Uzay Mühendisliği bölümünden 2005 yılında, Çift Anadal Programı kapsamında ise Uçak Mühendisliği bölümünden 2006 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl başladığı İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Disiplinler Arası Anabilim Dalı Uçak – Uzay Mühendisliği Yüksek Lisans programından 2006 – 2007 akademik yılı bahar yarıyılında mezun olması beklenmektedir. Halen İTÜ Uçak Uzay Bilimleri Fakültesi Uzay Mühendisliği Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.