

**İÇERİSİNDE AKIŞKAN BULUNAN ÖNGERİLMELİ İNCE ELASTİK  
TÜPLERDE NONLİNEER DALGA YAYILMASI**

100750

**DOKTORA TEZİ**  
**Y. Müh. Nalan ANTAR**  
**509940070012**

100750

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih**  
**Tezin Savunulduğu Tarih**

**: 2 Haziran 1999**  
**: 25 Ekim 1999**

**Tez Danışmanı :**

**Prof. Dr. Hilmi DEMİRAY**

**Diğer Jüri Üyeleri**

**Prof. Dr. Erdoğan S. ŞUHUBİ (İ.T.Ü.)**

**Prof. Dr. Mithat İDEMEN (İ.Ü.)**

**Prof. Dr. Alp EDEN (B.Ü.)**

**Prof. Dr. Saadet ERBAY (İ.T.Ü.)**

**KASIM 1999**

## ÖNSÖZ

Mekanik eğitimimin ve doktora çalışmamın her aşamasında, özendirici ve titiz katkılarını hiç bir zaman esirgemeyen ve her zaman yönlendirici ve destek verici katkıları bulunan hocam Prof. Dr. Hilmi Demiray'a

Doktora çalışmam boyunca gösterdiği yakın ilgi ve bilgisayar programlarını hazırlamam konusunda katkılarını gördüğüm Yrd. Doç. Dr. Ali Ercengiz'e

Büyük desteklerini gördüğüm, yapıcı tartışma ve eleştirileriyle beni yönlendiren Prof. Dr. Hüsnü Erbay ve Prof. Dr. Saadet Erbay'a

Bu çalışma boyunca bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK, Feza Gürsey Enstitüsüne,

Son olarak, tüm eğitim, mesleki ve özel yaşantım boyunca bana maddi ve manevi büyük destek veren babama, anneme ve kardeşlerime

Teşekkürü bir borç bilirim.

Kasım, 1999

Yük. Mat. Müh. Nalan ANTAR

|                                                                                             |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>İÇİNDEKİLER</b>                                                                          |            |
| <b>ŞEKİL LİSTESİ</b>                                                                        | <b>iv</b>  |
| <b>ÖZET</b>                                                                                 | <b>vi</b>  |
| <b>SUMMARY</b>                                                                              | <b>xi</b>  |
| <b>1. GİRİŞ ve TARİHSEL GELİŞİM</b>                                                         | <b>1</b>   |
| <b>2. TEMEL DENKLEMLER</b>                                                                  | <b>9</b>   |
| 2.1. Giriş                                                                                  | 9          |
| 2.2. Akışkanın Alan Denklemleri                                                             | 9          |
| 2.3. Elastik Tüpün Nonlinear Hareket Denklemleri                                            | 11         |
| 2.4. Bünye Denklemleri                                                                      | 17         |
| <b>3. PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ</b>                                                           | <b>25</b>  |
| 3.1. Giriş                                                                                  | 25         |
| 3.2. Türev Açılım Yöntemi                                                                   | 25         |
| 3.3. İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi                                                       | 27         |
| 3.4. Denklem Sistemleri İçin Uzun Dalga Yaklaşımı                                           | 33         |
| <b>4. ZAYIF NONLINEER DALGALAR</b>                                                          | <b>36</b>  |
| 4.1. Giriş                                                                                  | 36         |
| 4.2. İçerisinde Viskoz Akışkan Bulunan İnce Elastik Tüplerde Nonlinear Dalga yayılması      | 36         |
| 4.3. Yaklaşık Akışkan Denklemleri                                                           | 43         |
| 4.4. Evolüsyon Denklemlerin ilerleyen dalga çözümleri                                       | 52         |
| 4.5. Sayısal Çözümler ve Sonuçlar                                                           | 59         |
| <b>5. NONLINEER DALGA MODÜLASYONU</b>                                                       | <b>66</b>  |
| 5.1. Giriş                                                                                  | 66         |
| 5.2. İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Elastik Tüplerde Nonlinear Dalga Modülasyonu | 66         |
| 5.3. Sayısal Sonuçlar ve Tartışma                                                           | 85         |
| <b>6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA</b>                                                              | <b>88</b>  |
| <b>KAYNAKLAR</b>                                                                            | <b>91</b>  |
| <b>EK A</b>                                                                                 | <b>95</b>  |
| <b>EK B</b>                                                                                 | <b>97</b>  |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                                                                             | <b>120</b> |

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa No

|            |                                                                                                                                          |     |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil B.2  | Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi .....                        | 97  |
| Şekil B.3  | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi .....                         | 98  |
| Şekil B.4  | Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi .....                            | 99  |
| Şekil B.5  | Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi .....                             | 100 |
| Şekil B.6  | Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi .....        | 101 |
| Şekil B.7  | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi .....         | 102 |
| Şekil B.8  | Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi ...              | 103 |
| Şekil B.9  | Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi ...               | 104 |
| Şekil B.10 | Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, $\mu_1$ katsayısının germe ile değişimi .....                                               | 105 |
| Şekil B.11 | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, $\mu_1$ katsayısının germe ile değişimi .....                                                | 106 |
| Şekil B.12 | Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, $\mu_1$ katsayısının germe ile değişimi .....                                                   | 107 |
| Şekil B.13 | Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, $\mu_1$ katsayısının germe ile değişimi .....                                                    | 108 |
| Şekil B.14 | Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi ..... | 109 |
| Şekil B.15 | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi .....  | 110 |
| Şekil B.16 | Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi .....     | 111 |
| Şekil B.17 | Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi .....      | 112 |
| Şekil B.18 | Arterilerde deneysel olarak gözlenen dalga profilleri .....                                                                              | 113 |
| Şekil B.19 | Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, V-KdV denkleminin yalnız dalga profilinin germe ile değişimi .....                              | 114 |
| Şekil B.20 | Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, V-KdV denkleminin yalnız dalga profilinin germe ile değişimi .....                               | 115 |

|            |                                                                                                                |     |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Şekil B.21 | Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=1$ )..... | 116 |
| Şekil B.22 | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=1$ ).....  | 117 |
| Şekil B.23 | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=4$ ).....  | 118 |
| Şekil B.24 | Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=6$ ).....  | 119 |



# İÇERİSİNDE AKIŞKAN BULUNAN ÖNGERİLMELİ İNCE ELASTİK TÜPLERDE NONLINEER DALGA YAYILMASI

## ÖZET

Literatürde, içerisinde akışkan bulunan tüplerde basınç dalgası yayılımı problemi bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu problemin biyomühendislik açısından önemi, damarlardaki kan akımının pulsatif bir akım olarak modellenmesidir. Damarlarda, dalga yayılımı üzerine yapılan çalışmaların çoğunda nonlinear etkiler ihmal edilmiş ve dalgaların sadece dispersif karakterleri incelenmiştir. Oysa, akışkanın konvektif terimlerinden veya tüp malzemesinin bünye bağıntısından ileri gelen nonlinear etkiler için içine sokulduğu zaman nonlinearitenin mertebesine bağlı olarak, sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılmasının incelenmesi gerekir. Bu çalışmada içi viskoz ve viskoz olmayan sıkışmaz bir akışkan ile dolu elastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılımı probleminin asimptotik analizi yapılmıştır. Birinci bölümde kısaca konunun tarihsel gelişiminden söz edilmiş ve bu konuda yapılmış teorik çalışmalar özetlenmiştir. İkinci bölümde ise çalışmanın esas konusunu oluşturacak olan, içerisinde sıkıştırılamayan viskoz akışkan bulunan öngerilmeli ince elastik tüplerde nonlinear dalga yayılımı probleminde kullanılacak olan alan denklemleri elde edilmiştir. Bölüm 3'te bu çalışmada kullanılacak olan pertürbasyon yöntemleri hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Bölüm 4'te içerisinde viskoz akışkan bulunan ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılımı problemi indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Dispersiyon, dissipasyon ve nonlinearite arasındaki dengeye bağlı olarak pertürbasyon açılımındaki en düşük mertebeden terimleri yöneten denklemlerin, Korteweg-de Vries-Burgers ve Korteweg-de Vries denklemleri olduğu gösterilmiştir. Bu denklemlerin ilerleyen dalga çözümleri ve elde edilen bir kısım sayısal sonuçlar yine aynı bölümde verilmiştir. Reynolds sayısının çok büyük veya viskozitenin çok küçük olduğu durumlarda akımın davranışı büyük ölçüde ideal akışkaninkine yaklaşır ve viskoz etkiler sınır yakınında ince bir tabakada sınırlandırılır. Yine aynı bölümün içinde viskozitenin küçük olduğu varsayılmış ve sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak zayıf nonlinear dalgaların yayılması incelenmiştir. Dispersiyonun mertebesine bağlı olarak viskozite-KdV ve viskozite-Burgers denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlere ilerleyen dalga tipinde çözüm elde etmek oldukça zordur. Bu nedenle bu bölümün sonunda V-KdV denklemi için sayısal çözüm verilmiş ve elde edilen sonuçların tartışması Bölüm 4'ün sonunda sunulmuştur. Bölüm 5'de, içi viskoz olmayan akışkanla dolu nonlinear elastik tüpte zayıf nonlinear, fakat kuvvetli dispersif ortamlarda dalgaların genlik modülasyonu incelenmiş ve böyle bir ortamda yönetici denklem olarak nonlinear Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Beşinci bölümün en son kısmında Nonlinear Schrödinger denkleminin bazı özel çözümleri verilmiş ve düzlem dalga çözümlerinin kararlılığı bazı malzemeler ve başlangıç şekil değiştirmeler için sayısal olarak incelenmiştir.

## Temel Denklemler

*Nonlineer elastik tüpün hareket denklemleri :*

$$\Lambda_\theta \left[ (p_0 + p) - 2\nu \frac{\partial V_r}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \left( 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} = ma_r, \quad (1)$$

$$\Lambda_\theta \left[ -(p_0 + p) \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \right) = ma_z. \quad (2)$$

Burada  $u, w$  radyal ve eksenel yöndeki yer değiştirmeleri,  $p$  akışkan basınç fonksiyonunu,  $V_r, V_z$  akışkanın radyal ve eksenel yöndeki hız bileşenlerini,  $\nu$  kinematik viskoziteyi,  $\Sigma$  şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu,  $a_r, a_z$  ise ivme bileşenlerini göstermektedir.  $\Sigma$  şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun,  $\Lambda_\theta$  ve  $\Lambda_z$ 'in analitik bir fonksiyonu olduğu kabul edilerek,  $u = 0, \partial u / \partial z = 0$  ve  $\partial w / \partial z = 0$  civarında seriye açılmıştır. Bu açılımlar (1) ve (2) denklemlerinde yerine yazıldığında nonlineer elastik bir tüp için hareket denklemleri yer değiştirmeler ve onların türevleri cinsinden elde edilebilir. Ana metinde yer alan bu denklemler yer tasarrufu nedeniyle burada verilmemiştir.

*Akışkan denklemleri :*

Kan sıkışmaz Newtoniyen tipte bir akışkan gibi alınarak silindirik koordinatlarda hareket denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_r}{x^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{V_r}{x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Bu alan denklemlerinin aşağıdaki sınır koşulunu sağlaması gerekir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial t} \left( 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} = V_r|_{x=1+u}. \quad (6)$$

## Zayıf Nonlineer Dalgalar

(1)-(6) denklemleri kullanılarak dissipatif ve dispersif ortamlarda küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak

incelenmiştir. Bunun için aşağıdaki şekilde koordinat dönüşümü tanımlanabilir

$$\xi = \epsilon^\alpha(z - gt), \quad \tau = \epsilon^{\alpha+1}gt. \quad (7)$$

Burada  $\epsilon$  nonlinearitenin küçüklüğünü sembolize eden bir parametre,  $\alpha$  ise daha sonra belirlenecek olan bir sabittir. Ayrıca alan değişkenlerinin aşağıdaki gibi  $\epsilon$  cinsinden asimptotik bir seriye açılabilceği kabul edilmiştir

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(\xi, \tau), & w &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1/2} w_n(\xi, \tau), & p &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n p_n(\xi, \tau) \\ V_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1/2} V_{rn}(\xi, \tau; x), & V_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n V_{zn}(\xi, \tau; x) \end{aligned} \quad (8)$$

Burada  $u_n$ ,  $w_n$ ,  $p_n$ ,  $V_{rn}$  ve  $V_{zn}$  alan denklemlerinin çözümü sonucunda belirlenecek olan fonksiyonlardır. (7) dönüşümü ve (8) açılımları alan denklemlerinde yerine yazılır ve  $\nu = \epsilon^\beta \bar{\nu}$  olduğu varsayıp  $\epsilon$ 'un çeşitli kuvvetlerine göre denklemler sıfıra eşitlenirse, bir diferansiyel denklemler sınıfı elde edilir. Sırasıyla  $O(\epsilon)$  ve  $O(\epsilon^2)$  mertebesindeki denklemler çözülecek olursa aşağıdaki evolüsyon denklemleri bulunur

(i)  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 1/2$  hali : Bu durumda yönetici denklem dissipasyonun, dispersiyonun ve nonlinearitenin denge durumunda olduğu Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) denklemine indirgenir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0. \quad (9)$$

(ii)  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 3/2$  hali : Bu durumda yönetici denklem dispersiyonun ve nonlinearitenin denge durumunda olduğu Korteweg-de Vries (KdV) denklemine indirgenir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (10)$$

*Yaklaşık Akışkan Denklemleri :*

Bu kısımda alan değişkenleri radyal koordinatla değişmeyen yaklaşık akışkan denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(1+u)}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{R(1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1+u}. \quad (12)$$

Burada  $v$  akışkanın eksenel yöndeki ortalama hızını,  $R$  ise Reynolds sayısını



göstermektedir.

Akışkan için, bu yaklaşık denklemler kullanılarak içerisinde akışkan bulunan öngerilmeli elastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılması incelenmiştir. Nonlineerite, dissipasyon ve dispersiyon arasındaki dengeye bağlı olarak, evölüsyon denklemleri sırasıyla Korteweg de Vries-Burgers, Korteweg-de Vries ve nonlinear diferansiyel denklemleri elde edilmiştir.

*Sınır tabakası yaklaşımı :*

Bu kısımda, içerisinde viskoz akışkan bulunan ince elastik bir tüpün nonlinear hareket denklemleri alınarak zayıf nonlinear dalgaların yayılımı sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak incelenmiştir. Akışkan için, (11) ve (12) ile verilen yaklaşık denklemleri alınmıştır. (7) dönüşümü ve  $y = (\bar{\nu}\epsilon)^{-1}g^{1/2}(1 - r + u)$ ,  $\bar{\nu} = (\epsilon^{\alpha+2}R)^{-1/2}$  kordinat dönüşümü (12) denkleminde yazılırsa

$$-g \frac{\partial v}{\partial \xi} + g\epsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^{2\alpha+2}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{2\bar{\nu}g^{1/2}\epsilon}{(1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (13)$$

bulunur. (8) açılımı (1)-(2) ve (11)-(13) denklemlerinde yazılır ve  $\epsilon$ 'un çeşitli kuvvetlerine göre denklemler sıfıra eşitlenirse diferansiyel denklemler sınıfı elde edilir. Bu diferansiyel denklemler sınıfı çözülürse aşağıdaki master denklem elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \epsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \bar{\mu}_3 \epsilon^{2\alpha+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \bar{\mu}_4 g^{1/2} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (14)$$

Burada  $\partial V_{z1}/\partial y$  terimi sınır tabakası denklemleri kullanılarak bulunacaktır.  $y = (\bar{\nu}\epsilon)^{-1}g^{1/2}(1 - r + u)$ ,  $\bar{\nu} = (\epsilon^{\alpha+2}R)^{-1/2}$  kordinat dönüşümü Navier-Stokes denklemlerinde yazılırsa sınır tabakası denklemleri ve sınır koşulları elde edilmiştir. Bu denklemler Duhamel teoremi kullanılarak çözülür ve  $\alpha = 1/2$  ve  $\alpha = 3/2$  seçilerek (14) denkleminde yazılırsa sırasıyla viskozite-KdV ve viskozite-Burgers denklemleri elde edilir

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} &= 2\bar{\mu}_4 g^{3/2} \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\right) \int_0^\infty U_\xi(\xi + \eta, \tau) (\eta\pi)^{-1/2} d\eta \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} &= 2\bar{\mu}_4 g^{3/2} \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\right) \int_0^\infty U_\xi(\xi + \eta, \tau) (\eta\pi)^{-1/2} d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

## Nonlinear Dalga Modülasyonu

Bu kısımda, içerisinde akışkan bulunan tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonu incelenmiştir. Eksenel yöndeki bağdan (tethering) dolayı tüpün eksenel yöndeki yer değiştirmesi ihmal edilmiştir. İç basıncın etkisi altında bir tüpün radyal yöndeki hareket denklemi aşağıdaki şekilde verilebilir

$$p|_{x=1+u} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\beta_1 - \beta_0) u - \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - m u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
& + (\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) u^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\
& + (\beta_3 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_0) u^3 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_0) u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& + \frac{1}{2} (-2\alpha_2 + \alpha_1) u \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{2} (\alpha_0 - \gamma_1) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Bu problemde indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Bu amaca yönelik olarak aşağıdaki koordinat dönüşümü tanımlanabilir

$$\xi = \varepsilon (z - \lambda t), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{17}$$

Burada  $\lambda$  bir sabit olup daha sonra bu sabitin grup hızına eşit olduğu gösterilecektir. Alan değişkenlerinin  $(z, t)$  hızlı değişkenleri ile  $(\xi, \tau)$  yavaş değişkenlerinin fonksiyonu olduğu farzedilmiştir. Yukarıdaki koordinat açılımından faydalananarak türev ifadeleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{18}$$

Alan değişkenlerinin aşağıdaki gibi  $\varepsilon$  cinsinden asimptotik bir seriye açılabileceği varsayılmıştır.

$$\begin{aligned}
\{u, p, V_r, V_z\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \{u_n, p_n, V_{rn}, V_{zn}\} \\
\{u_n, p_n, V_{rn}, V_{zn}\} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ U_n^{(l)}, P_n^{(l)}, V_{rn}^{(l)}, V_{zn}^{(l)} \right\} \exp[i l (\omega t - k z)] \tag{19}
\end{aligned}$$

Burada  $u_n$ 'nin reel olabilmesi için  $U_n^{(l)} = U_n^{(-l)*}$  koşulunun sağlanması gerekir. (19) açılımları ve (17) dönüşümleri (16) ve akışkan denklemlerinde yerine yazılır ve  $\varepsilon$ 'un çeşitli kuvvetlerine göre düzenlenirse bir diferansiyel denklemler hiyerarşisi elde edilir. Bu denklemlerin çözülmesiyle aşağıdaki nonlineer Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + q |U| U = 0. \tag{21}$$

NLS denkleminin kararlı çözümleri genellikle Jokabiyen elliptik fonksiyonları cinsinden ifade edilir ve özel durumlarda düzlem dalga, faz sıçrama, karanlık ve parlak zarf solitonlarını içerir.

# NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN A PRESTRESSED FLUID-FILLED THIN ELASTIC TUBES

## SUMMARY

The propagation of pressure pulses in fluid-filled distensible tubes has been studied by several researchers in the current literature. Such problems have been investigated, especially, in view of their applications to physiological problems involving pulse propagation in large blood vessels. In most of the works on wave propagation in compliant tubes, small amplitude waves have been considered, ignoring the nonlinear effects and focused on the dispersive character of the waves. However, when the nonlinear effects arising from the convective terms of fluids and/or the constitutive relations of tube materials are introduced, one has to consider either finite amplitude, or small-but-finite amplitude waves, depending on the order of nonlinearity. In this work, the propagation of weakly nonlinear waves in a prestressed thin elastic tubes filled with an incompressible viscous or inviscid fluid is studied. In Chapter 1, the historical evolution of the subject and some theoretical works in the existing literature on this area are presented. In Chapter 2, the nonlinear field equations that we need in studying the propagation of weakly nonlinear waves in fluid filled elastic tubes are obtained. The perturbation methods that we shall utilize in this work is briefly discussed in Chapter 3. In Chapter 4, employing the reductive perturbation method, the propagation of weakly nonlinear waves in elastic tubes, filled with a viscous fluid, is studied. Depending on the balance between the nonlinearity, dispersion and/or dissipation, the evolution equations are obtained as Korteweg-de Vries Burgers and Korteweg-de Vries equations. A progressive wave type of solution to these equations is sought and the numerical analysis of them is also given in the same chapter. In this case small viscosity (or large Reynolds number), the behaviour of viscous fluid is quite close to that of ideal fluids and viscous effects are confined to a very thin layer near the boundary. Assuming that viscous effects are very small, using the boundary layer approximation the propagation of weakly nonlinear waves is investigated in the same chapter. Depending on the order of dispersion the viscous-Korteweg-de Vries and viscous-Burgers equations are obtained. It is not so easy to obtain a progressive wave type of solution to these equations. Therefore, a numerical solution for viscous-Korteweg-de Vries equation are given and a discussion of the obtained results is presented at the end of Chapter 4. Finally, in Chapter 5, In the final section of Chapter 5 the amplitude modulation of weakly nonlinear waves in a fluid filled elastic tube is examined for strong dispersion and nonlinear Schrödinger equation is obtained. In the final section of Chapter 5 some special solutions of the NLS equation are given and the modulational instability of the plane wave solution is discussed for some elastic materials and initial deformations.

## Basic equations

*Nonlinear equations of elastic tube :*

$$\Lambda_\theta \left[ (p_0 + p) - 2\nu \frac{\partial V_r}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \left( 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} = m a_r, \quad (1)$$

$$\Lambda_\theta \left[ -(p_0 + p) \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \right) = m a_z, \quad (2)$$

where  $u, w$  are the radial and the axial displacements,  $p$  is the fluid pressure function,  $\Lambda$  and  $\Lambda_\theta$  are the stretches in the related directions,  $V_r$  and  $V_z$  are the fluid velocity components in the radial and axial directions,  $\nu$  is the kinematic viscosity of the fluid,  $\Sigma$  is the strain energy density function,  $a_r$  and  $a_z$  are the acceleration components in the radial and axial directions. Assuming that the strain energy density function  $\Sigma$  is analytic in  $\Lambda_\theta$  and  $\Lambda_z$ , we may expand it into a power series around  $u = 0$ ,  $\partial w / \partial z = 0$  and  $\partial u / \partial z = 0$ . If these expansions are substituted into equations (1) and (2) we obtain the nonlinear equations of motion of elastic tubes in terms of radial and axial displacements and its derivatives. However for the sake of saving some space these equations are not given here.

*Equations of fluid :*

Treating blood as an incompressible Newtonian fluid, the equations of motion in the cylindrical polar coordinates can be given as follows

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_r}{x^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{V_r}{x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

These field equations must satisfy the following boundary condition

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial t} \left( 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} = V_r|_{x=1+u}. \quad (6)$$

## Weakly Nonlinear Waves

Using the equations (1) and (6) the propagation of small but finite amplitude waves in a dispersive and dissipative medium will be studied, in the long wave limit, through the use of reductive perturbation method. For this purpose we

introduce the following stretched coordinates

$$\xi = \epsilon^\alpha(z - gt), \quad \tau = \epsilon^{\alpha+1}gt \quad (7)$$

where  $\epsilon$  is a small parameter measuring the weakness of dispersion, nonlinearity and dissipation;  $\alpha$  is a positive constant whose value will be determined later. We further assume that the field quantities can be represented by asymptotic series as

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n u_n(\xi, \tau), & w &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1/2} w_n(\xi, \tau), & p &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n p_n(\xi, \tau) \\ V_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1/2} V_{rn}(\xi, \tau; x), & V_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n V_{zn}(\xi, \tau; x). \end{aligned} \quad (8)$$

where  $u_n$ ,  $w_n$ ,  $p_n$ ,  $V_{rn}$  and  $V_{zn}$  are some unknown functions to be determined from the solution of the field equations. Introducing the transformation (7) expansion (8) into eq. (1)-(6) and assuming that  $\alpha = 1/2$  and  $\nu = \bar{\nu}\epsilon^\beta$  setting the like powers of  $\epsilon$  equal to zero we obtain the sets of differential equations. If we solve the  $O(\epsilon)$  and  $O(\epsilon^2)$  order equations, we obtain the following evolution equations.

(i)  $\alpha = 1/2$  and  $\beta = 1/2$  : In this case the governing equation is obtained as the following Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) equation

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0, \quad (9)$$

which is obtained by balancing the non-linearity with dispersion and dissipation.

(ii)  $\alpha = 1/2$  and  $\beta = 3/2$  : In this case the governing equations reduce to the well-known Korteweg-de Vries equation

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (10)$$

which results from the balance of nonlinearity with dispersion.

*Approximate fluid equations :*

In this section we obtain a set of approximate fluid equations whose field variables do not change with the radial coordinate. These equations can be given as follows

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(1+u)}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{R(1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r=1+u} \quad (12)$$

where  $v$  is the averaged fluid velocity in the axial direction and  $R$  is the Reynolds

number.

Using the approximate equations for the fluid body we study the propagation of weakly nonlinear waves in a fluid-filled non-linear thin tube. Depending on the balance between the nonlinearity, dissipation and dispersion, the evolution equations are obtained as the Korteweg de Vries-Burgers equation, the Korteweg-de Vries equation, and the nonlinear differential equation, respectively.

*Boundary layer approximation :*

In this section, employing the nonlinear equations of an elastic thin tube containing an incompressible viscous fluid, the propagation of weakly nonlinear waves is studied by use of the boundary layer approximation. For the fluid body, the set of approximate equations, which are given the equations (11) and (12), is employed. Introducing the transformation (7) and the coordinate transformation  $y = g^{1/2}(\bar{\nu}\epsilon)^{-1}(1 - r + u)$ ,  $\bar{\nu} = (\epsilon^{\alpha+2}R)^{-1/2}$  into the equation (12) we obtain

$$-g \frac{\partial v}{\partial \xi} + g\epsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\epsilon^{2\alpha+2}}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{2\bar{\nu}g^{1/2}\epsilon}{(1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (13)$$

Substituting the expansion (8) into the fields equations (1)-(2) and (11)-(13), setting the coefficients of the same power  $\epsilon$  equal to zero, we obtain a set of differential equations. Solving these differential equations we obtain the following master equation

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \epsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \bar{\mu}_3 \epsilon^{2\alpha+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \bar{\mu}_4 g^{1/2} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (14)$$

Here  $\partial V_{z1}/\partial y$  will be obtained by using the boundary layer equations. Substituting coordinate transformation  $y = g^{1/2}(\bar{\nu}\epsilon)^{-1}(1 - r + u)$ ,  $\bar{\nu} = (\epsilon^{\alpha+2}R)^{-1/2}$  into Navier-Stokes equations we obtain the boundary layer equations and the boundary conditions. Solving these equations by use of Duhamel theorem and substituting it into the equation (14) and choosing  $\alpha = 1/2$  and  $\alpha = 3/2$  we obtain viscosity-KdV and viscosity-Burgers equations, respectively

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} &= 2\bar{\mu}_4 g^{3/2} \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\right) \int_0^\infty U_\xi(\xi + \eta, \tau) (\eta\pi)^{-1/2} d\eta \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} &= 2\bar{\mu}_4 g^{3/2} \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\right) \int_0^\infty U_\xi(\xi + \eta, \tau) (\eta\pi)^{-1/2} d\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

## Nonlinear Wave Modulation

In this section we shall examine the amplitude modulation of weakly nonlinear waves in a fluid-filled non-linear thin elastic tube. Due to axial tethering, no axial displacement is allowed. The nonlinear equation of motion in the radial direction, under the effect of inner pressure may be



given as follows

$$\begin{aligned}
p|_{x=1+u} = & m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\beta_1 - \beta_0) u - \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - m u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
& + (\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) u^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\
& + (\beta_3 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_0) u^3 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_0) u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& + \frac{1}{2} (-2\alpha_2 + \alpha_1) u \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{2} (\alpha_0 - \gamma_1) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

We employ the reductive perturbation method and introduce the following coordinate stretching

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 t, \tag{17}$$

Here  $\epsilon$  is a small parameter measuring the weakness of nonlinearity,  $\lambda$  is a constant which will be shown to be the group velocity. We further assume that the field quantities are functions of fast variables  $(z, t)$  and also slow variables  $(\xi, \tau)$ . Thus the following substitution is permissible:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{18}$$

We shall assume that the field variables are expressible as asymptotic series in  $\epsilon$ .

$$\begin{aligned}
\{u, p, V_r, V_z\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \{u_n, p_n, V_{rn}, V_{zn}\}, \\
\{u_n, p_n, V_{rn}, V_{zn}\} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ U_n^{(l)}, P_n^{(l)}, V_{rn}^{(l)}, V_{zn}^{(l)} \right\} \exp[i l (\omega t - k z)].
\end{aligned} \tag{19}$$

For  $u_n$  to be real the condition  $U_n^{(l)} = U_n^{(-l)*}$  should be satisfied. Introducing the substitution (18) and the expansions (19) into the field equations (16), and Navier-Stokes equations and setting the coefficients of the same power of  $\epsilon$  equal to zero, we obtain the set of differential equations. If we solve this set of differential equations we obtain the following Nonlinear Schrödinger equation

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + q |U| U = 0. \tag{20}$$

The steady-state solution of the NLS equation, which generally represents the wavetrains expressible in terms of the Jacobian elliptic functions, include a bright and dark envelope solitons, a phase jump and a plane wave with a constant amplitude, as special cases.

## 1. GİRİŞ ve TARİHSEL GELİŞİM

İçerisinde viskoz veya viskoz olmayan akışkan bulunan öngerilmeli, (öngerilmesiz) elastik (veya viskoelastik) tüp içerisinde lineer (nonlinear) dalga yayılımı problemi uzun zamandan beri üzerinde çalışılan bir konudur. Bu nedenle konunun tarihsel gelişimi hakkında özet bilgi sunmakta yarar olabilir. Bu amaçla, önce lineer sonra da nonlinear dalga yayılımı konusunda bilgi sunulacaktır.

Büyük damarlarda dalga yayılımı problemi üzerindeki çalışmalar uzun zamandan beri devam etmektedir. Bu problemin önemi dalga hızının ve aktarma katsayısının çeşitli parametrelere göre değişimi, damar malzemesinin yapısında ne gibi değişimlerin olduğunu gözlemeyi mümkün kılmasındandır. Bu nedenle, kan ve damar ikilisi modellenirken, hem tüp malzemesinin hem de kanın mekanik özellikleri dikkate alınmalıdır.

Silindirik tüpler içerisindeki dalga yayılımı ilk kez Thomas Young [1] tarafından incelenmiştir. Young, insan damarlarında yayılan pals dalgalarının hızını hesaplayan ilk bilim adamı olup günümüzde bu dalga Young modu olarak bilinmektedir. Young tarafından bulunan pals dalgasının hızı 19. yüzyıl boyunca çeşitli araştırmacılar tarafından yeniden formüle edilmiştir. Bu araştırmacılardan bazıları Weber kardeşler, Moens, Korteweg ve Lamb sayılabilir. Bu çalışmaların özeti Skalak [2]'in makalesinde bulunabilir. Moens ve Korteweg, içi viskoz olmayan sıkışmaz akışkan ile dolu elastik tüp içerisindeki dalga yayılımı problemini incelemiş ve literatürde kendi adıyla (Moens-Korteweg) anılan hızı elde etmişlerdir. Bu hız iç basınç ve tüp dikkesit alanı cinsinden

$$c_0^2 = \frac{A_0}{\rho_a} \frac{dP_i}{dA_0} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $P_i$  iç basıncı,  $A_0$  tüp dikkesit alanını,  $\rho_a$  ise sıkışmaz akışkanın yoğunluğunu göstermektedir. Basit ince ve elastik bir tüp modelinde iç basınç ve iç yarıçap arasındaki bağıntının

$$a = a_0 + \frac{a_0^2 P_i}{Eh} \quad (1.2)$$



olduğu gözönünde bulundurulursa  $c_0$  hızı

$$c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho_a a_0}} \quad (1.3)$$

şeklinde verilir. Burada  $E$  tüp malzemesinin elastisite modülü,  $h$  kalınlığı,  $a_0$  şekil değiştirmeden önceki yarıçapı,  $a$  ise şekil değiştirmiş yarıçapı göstermektedir.

Viskozitenin dalga hızına etkisini ilk defa modelleyen ve dalga hızını yaklaşık olarak hesaplayan bilim adamı ise Witzig [3]'dir. Tüpü ince elastik, akışkanı da Navier-Stokes akışkanı olarak kabul ederek  $k$  dalga sayısını yaklaşık olarak

$$k^2 = \frac{\omega^2(1 - \sigma^2)}{c_0^2(1 - F_{10})} \quad (1.4)$$

şeklinde elde etmiştir. Burada  $\omega$  açısal hızı,  $c_0$  Moens-Korteweg hızını,  $\sigma$  Poisson oranını göstermekte olup  $F_{10}$  ise

$$F_{10} = \frac{2J_1(\xi)}{\xi J_0(\xi)}, \quad \xi = ai^{3/2}\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2} \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıda görülen diğer büyüklüklerden  $J_n(\xi)$  birinci tipten ve  $n$ . mertebeden Bessel fonksiyonunu,  $a$  iç yarıçapı,  $\nu$  kinematik viskoziteyi ve  $i$  ise kompleks sayı birimini göstermektedir.

Tüplerde lineer dalga yayılması ile ilgili önemli diğer katkılar Morgan ve Kiely [4] ve Womersley [5] tarafından yapılmıştır. İlk defa Atabek ve Lew [6], yaptıkları çalışmada atardamarların maruz kaldığı ön şekil değiştirmeyi dikkate almışlardır. Rachev [7], içi sıkışmaz ve viskoz akışkanla dolu ve öngerilmeye maruz elastik tüp içerisindeki eksenel simetrik ve harmonik dalga yayılımı problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Bu konularda daha fazla bilgi Skalak [2], Attinger [8] ve Cox [9] tarafından yazılmış derleme makalelerden ve McDonald [10] ve Fung [11] tarafından hazırlanmış kitaplardan temin edilebilir.

Bu çalışmaların büyük bir kısmında atardamarların ön şekil değiştirmesi pek dikkate alınmamış, ön gerilmeyi dikkate alan bir kaç çalışmada ise malzemenin nonlineer bünye denklemi bilinmediğinden basınç-dikkesit alan ilişkisi sağlıklı bir şekilde incelenememiştir. Bu konu ilk defa etraflı bir şekilde Demiray [12] ve arkadaşları tarafından incelenmiş ve literatürdeki mevcut çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

Şimdiye kadar yapılan çalışmaların hepsinde modellenmek istenen dalga hareketinin genliği küçük kabul edilmiş ve hareketi yöneten kısmi türevli diferansiyel denklemler lineerleştirilmiştir. Oysa dalganın genliği büyük ise dalga hareketini yöneten kısmi türevli diferansiyel denklemleri lineerleştirmek mümkün olmaz ve dalga hareketi nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler ile karakterize edilir. Çok farklı fiziksel durumlarda ortaya çıkan nonlinearlik uzun zamandan beri araştırmacıların ilgisini çekmiş ve bu konuda yoğun çalışmalara neden olmuştur.

Arterilerde pals dalgalarının nonlinear analizi ilk kez 1972 yılında Ling ve Atabek [13] tarafından verilmiştir. Kanı sıkışmaz ve Newtoniyen tipte bir akışkan kabul ederek, kan için Navier-Stokes denklemlerini ve süreklilik denklemini almışlar, damar hareketi için ise

$$\frac{m}{2\pi R} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = p(z, t) - P(R) \quad (1.7)$$

denklemini kullanarak elde ettikleri sonuç denklemleri sonlu farklar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Burada  $R = R(z, t)$  damarın iç yarıçapı,  $P(R)$   $R$  ile değişen ve deneysel olarak belirlenmiş kabul edilen basıncı ve  $m$  de damarın kütsel ataletini göstermektedir. Daha sonra 1980 yılında Lamb [14] damarı elastik halkaların birleşiminden meydana gelmiş bir tüp kabul ederek, temel denklemleri kütlenin korunumu, momentumun korunumu ve basınç ile damar kesit alanı arasındaki ilişkiyi de

$$\frac{2\pi a}{\rho_0 h} p(x, t) = \frac{E}{\rho_0 a^2} \Delta A + \frac{\partial^2 \Delta A}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

şeklinde alarak, yönetici denklem olarak Korteweg-de Vries denklemini elde etmiştir. Burada  $\Delta A = A - \pi a^2 \cong 2\pi r \Delta r$ ,  $p(x, t)$  akışkan basıncı,  $\rho_0$  tüpün yoğunluğu,  $h$  tüpün kalınlığı,  $E$  de tüpün Young modülüdür. Engelbrecht [15] benzer hareket denklemleri alarak (bir boyutlu ve iki boyutlu durumlarda) içi akışkan ile dolu elastik tüplerde küçük genlikli basınç dalgalarının KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. Engelbrecht [16] 'in yaptığı deneylerde damarlarda basınç dalgalarının önünün dikleştiğini ve damar kesit alanı ve basınç cinsinden ifade edilen dalga hızının nonlinear olduğunu gözlemlemiştir. Ayrıca McDonald [10] büyük damarlarda pals dalgalarının yayılırken genişliğinin azaldığını ve maksimum genliğinin arttığını göstermiştir. Bu olay dalga problemlerinde dikleşme (steeping) ve sivrileşme (peaking) olarak bilinir. Damarlarda dalga önünün dikleşmesine nonlinearite neden olur ve bu tür dikleşme aorta ve büyük damarlarda sıkça gözlenir.

Normal koşullarda bu dikleşme ortaya çıkmaz [17]. Özellikle damarları anormal genişleyen veya pals genliklerinin büyük olduğu hastalarda bu dikleşme oldukça önemlidir.

İçerisinde akışkan bulunan elastik veya viskoelastik tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımı karakteristikler yöntemi kullanılarak bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Lambert [18] 1958 yılında ilk defa nonlinear kan akımının hesaplanması için karakteristikler yöntemini kullanmayı önermiştir. Fakat Lambert'in seçtiği nümerik parametrelerle yapılan çalışmalar gerçeğe uygun sonuçlar vermemiştir. Bununla ilgili sonuçlar Skalak [2]'in makalesinde bulunabilir. Rudinger [19], Anliker [20,21] ve diğer araştırmacılar tarafından geliştirilen bir boyutlu nonlinear yaklaşımda temel denklemler akışkanın hareket denklemi, süreklilik denklemi ve damar duvarının davranışını tanımlayan denklemlerdir. Damar duvarının davranışını tanımlayan denklemlerde kesit alanının tüp boyunca uzaklığın ve basıncın bilinen bir fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir. Yaptıkları teorilerde, viskozitenin etkisini sınırdaki kayma gerilmesini hareket denklemlerine katarak, dallanma noktalarındaki dışa akımı ise süreklilik denklemine bir akı terimi ekleyerek çözümlenmişlerdir. Rudinger [19]'in tek boyutlu yaklaşımı içinde incelediği denklemler süreklilik ve momentum denklemleridir. Bu denklemleri kullanarak karakteristik eğri boyunca kısmi türevli diferansiyel denklemler

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho_a c} \frac{\partial P}{\partial t} = f \mp \frac{vc}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)_{P,t=sabit} \pm \frac{c}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_{P,z=sabit} \quad (1.9)$$

şeklini alır. Burada  $A$  tüpün dikkesit alanını,  $v$  aksel hızı,  $P$  akışkan basıncını,  $\rho_a$  akışkan yoğunluğunu ve  $f$  de sürtünme (viskoz) etkilerini göstermektedir. (1.9) denklemlerine kapalı bir çözüm bulunamamış, fakat bir başlangıç ve uygun sınır koşulu kullanılarak denklem nümerik olarak integre edilebilmiştir.

Rudinger [22], içi viskoz olmayan akışkanla dolu yarı sonsuz düzgün genişleyen tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımını incelemiş ve karakteristikler yöntemini kullanarak şok formu için bir ifade elde etmiştir. Daha sonra Hoogstraten ve Smith [23] düzgün olmayan tüplerde sürtünme terimini de ilave ederek Rudinger'in yaptığı çalışmayı genelleştirmiştir. Tait ve Moodie [24] ise içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik (viskoelastik) tüplerde dalga yayılımını karakteristikler yöntemi ile incelemişler ve Mooney-Rivlin malzemesi için şeklini değiştirmeden yayılan dalga formunda basit fakat kesin çözümler elde etmişlerdir.

Dissipatif ve dispersif ortamlarda zayıf nonlinear dalgaların uzak alan davranışı bazı bilinen nonlinear evolüsyon denklemleri ile tanımlanabilir. Örneğin,

dissipatif ortamlarda Burgers denklemi, dispersif ortamlarda ise Korteweg-de Vries (KdV) denklemi bilinen en basit evolüsyon denklemleridir (Karpman [25]). Dissipasyon, dispersiyon ve nonlinearite arasında bir denge varsa KdV ve Burgers denkleminin birleşimi olarak gösterilen Korteweg-de Vries Burgers (KdVB) denklemi elde edilir. Çok farklı fiziksel durumlarda ortaya çıkan bu tip evolüsyon denklemleri hakkında geniş bilgi [26]-[29] kaynaklarından temin edilebilir.

Çeşitli asimptotik yöntemler kullanılarak içi akışkanla dolu genişleyen tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı bir çok araştırmacı tarafından incelenmiş ve evolüsyon denklemleri olarak KdV, Burgers ve KDVB denklemleri elde edilmiştir. Hashizume [30] ve Yomosa [31] içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince nonlinear elastik bir tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılmasının Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ile yönetildiğini göstermişlerdir. Onlar büyük damarlarda gözlenen dikleşme ve sivrileşme olayı ile yalnız dalga arasındaki ilişkiyi tartışmışlardır.

Viskoelastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılımı ile ilgili önemli incelemeler arasında Ravindran ve Prasad [32], Swaters ve Sawatzky [33] ve Erbay [34] ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmalar sayılabilir. Ravindran ve Prasad [32] yaptıkları çalışmada viskoelastik tüpü lineer Maxwell-Voigt modeli olarak almışlar ve küçük genlikli basınç dalgalarının yayılmasının dissipasyon, dispersiyon ve nonlinearite arasındaki dengeye bağlı olarak Burgers, KdV ve KdVB denklemleri olarak elde etmişlerdir. Swaters ve Sawatzky [33] ise tüp malzemesini lineer Kelvin-Voigt modeli olarak almış ve basınç ifadesine Ravindran ve Prasad [32]'in aldıkları modelde olmayan dönme ataletini, eğilme rijitliğini ve çevresel germenin etkilerini de eklemiştir. Eklenen bu terimler yüksek mertebeden zaman ve uzaysal türevleri içerdiğinden kullanılan asimptotik açılımının bir sonucu olarak bu terimler KdVB denklemini veren analizlerin mertebesinde önemli bir rol oynamamıştır. Aynı bilim adamları viskoelastik etkisinin yalnız dalgaların genliğini düşürdüğünü göstermişlerdir. Erbay [34] ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmada Tait ve Moodie [24]'nin çalışmasını temel alarak nonlinear viskoelastik bir tüp için verilen uniform içbasınç-tüp kesit alanı ilişkisine tüpün atalet teriminide eklemiştir. Viskoz olmayan akışkanla dolu nonlinear elastik bir tüpte basınç dalgalarının yayılımını dissipasyon, dispersiyon ve nonlinearitenin mertebelerinin seçimine bağlı olarak çeşitli evolüsyon denklemleri ile karakterize edilebileceğini göstermişlerdir. Burada işareti edilmesi gereken önemli nokta, Tait ve Moodie [24]'nin temel denklemlerindeki içbasınç-tüp kesit alan ilişkisi uniform bir iç basınç için elde edilmiş, ancak temel denklemlerde yerine konurken aksel

koordinata ( $z$ ) bağıllığı suni olarak kabul edilmiştir.

Zayıf nonlinear dalgaların yayılımı üzerine yapılan çalışmalarda akışkanın viskozitesi ve tüpün aksenal yöndeki hareketini ihmal edilmiştir. Ancak Johnson [35] içi viskoz akışkanla dolu elastik bir tüpte laminar elastik sıçramayı incelemiş ve sıçramaların KdVB denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. Cowley [36] ise içi viskoz akışkanla dolu elastik bir tüpte laminar elastik sıçramaların sınır tabakası yaklaşımı kullanarak viskozite-KdV ile yönetildiğini göstermiştir. Mainardi ve Buggish [37]'de içi akışkanla dolu ince ve elastik bir tüpte nonlinear dalgaların yayılımı üzerine viskozitenin etkilerini gösterebilmek için bir analiz geliştirmişler ve sınır tabakası yaklaşımını kullanarak bir boyutlu teoremin denklemlerini viskoziteden dolayı Laplace konvolüsyon integralini içeren tek bir nonlinear dalga denklemine eşdeğer olduğunu göstermişlerdir. Bu denklem, sınır tabakası yaklaşımında viskoz etkileri de alarak içi gazla dolu rigid tüplerde basit nonlinear dalgaları inceleyen Keller [38] 'in bulduğu denklem ile aynıdır. Hashizume [39]'de yine içerisinde viskoz akışkan bulunan ve yarıçapı  $z$  ile değişen elastik tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılmasının pertürbe-KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir.

Şimdiye kadar sözü edilen çalışmalarda atardamarların maruz kaldığı ön gerilmeler pek dikkate alınmamıştır. Oysa yapılan deneysel çalışmalar damarların ön iç basınca ek olarak aksenal yönde 1.5 ~ 1.7 mertebesinde bir aksenal germeye maruz kaldığını göstermektedir. Bu nedenle tüpün şekil değiştirme analizinde ön şekil değiştirmelerin de hesaba katılması gerekir. Demiray [40], bütün bu etkileri hesaba katarak içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılımını incelemiş ve evölüsyon denkleminin KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. KdV denkleminin yalnız dalga çözümünün başlangıç şekil değiştirmesi göre değişimlerini tartışmıştır. Demiray ve Antar [41] yaptıkları çalışmada öngerilmeli nonlinear ince viskoelastik bir tüpte nonlinear dalga yayılımını incelemişler ve nonlinearite, dissipasyon ve dispersiyon arasındaki dengeye bağlı olarak Burgers, KdV ve KdVB denklemleri elde etmişlerdir. Bu çalışmada viskoelastik tüp malzemesi olarak yumuşak dokular için Demiray [42] tarafından önerilen model kullanılmıştır. Demiray [43] akışkanın aksenal hızının radyal hızdan daha büyük olduğunu (hidrolik yaklaşım) kabul etmiş ve Navier-Stokes denklemlerine kesit alanına göre ortalama işlemi uygulayarak akışkanın yaklaşık denklemlerini elde etmiştir. Bu yaklaşık denklemleri kullanarak içinde viskoz akışkan bulunan öngerilmeli ince elastik tüpte zayıf nonlinear dalgaların yayılmasını incelemiş ve viskozitenin mertebesine bağlı olarak pertürbe KdV ve KdV denklemlerini elde etmiştir.



Şu ana kadar yapılan çalışmalarda tüpün aksel yönündeki hareketi ihmal edilmiş ve akışkan için yaklaşık denklemler kullanılmıştır. İşte bu çalışmanın birinci kısmında (Bölüm 4), viskoz akışkanın kesin denklemlerini, tüpün de radyal doğrultudaki yer değiştirmesine ek olarak aksel yönündeki yer değiştirmesini de hesaba katarak, içi akışkanla dolu elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılması incelenmiştir. Viskoz akışkanın hareket denklemlerinin çözümündeki zorluklar dikkate alınarak, birinci problemde alan denklemlerinin çözümü olarak ideal akışkana ait çözüm alınmış ve viskozitenin etkisi akışkanın tüpe uyguladığı sınır kuvvetinin hesabında işin içine sokulmuş ve evölüsyon denklemi olarak KdVB denklemi elde edilmiştir (Antar ve Demiray [44]). Ayrıca bu denklemlere ilerleyen dalga çözümleri aranmış ve sonuçlar sayısal olarak incelenerek bir kısım grafikler üzerinde gösterilmiş ve muhtemel biyolojik uygulamaları gösterilmiştir. İncelenen ikinci problemde ise viskozitenin küçük olduğu ve etkilerinin tüp çeperine yakın yerlerde önemli olduğu düşünülerek sınır tabakası yaklaşımı kullanılmış ve Cowley [36] ve Manardi ve Buggisch [37]'in buldukları denklemlere benzer olarak viskozite KdV denklemi ve viskozite-Burgers denklemleri elde edilmiştir (Antar ve Demiray [45]). Bu tip denklemlere ilerleyen dalga çözümü vermek mümkün olmadığından belirli başlangıç koşulu altında denklemin sayısal çözümü elde edilmiştir.

Şimdi de çalışmanın ikinci kısmında (Bölüm 5) incelenecek olan probleme ışık tutması için biraz da dalga modülasyonu ile ilgili çalışmalardan söz edelim. İçinde akışkan bulunan ince elastik veya viskoelastik tüplerde zayıf nonlinear basınç dalgalarının genlik modülasyonu bir çok araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Eğer dalganın genliği yeterince küçük ise bir çok nonlinear sistemler, nonlinear terimlerin ihmal edildiği harmonik dalga çözümü içerir ve genlik zaman içinde sabit kalır. Eğer dalganın genliği küçük fakat sonlu ise nonlinear terimler ihmal edilemez ve genlik zaman ve uzaysal parametrelere bağlı olarak değişken kalır. Genlik, salınım periyodu boyunca yavaş değiştiği zaman, koordinat dönüşümleri bize sistemi, salınımı hızlı değişen, genliği de yavaş değişen olmak üzere iki kısma ayırmamıza izin verir. Formal çözüm asimptotik açılım formunda verilebilir ve dalganın modülasyonunu belirleyen bir denklem türetilebilir. Örneğin, Nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) dispersif ortamlarda bir boyutlu monokromatik düzlem dalgaların self modülasyonunu tanımlayan en basit örnektir.

İçerisi akışkanla dolu tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların nonlinear self modülasyon problemi Ravindran ve Prasad [32] tarafından incelenmiştir. Onlar lineer elastik tüp modelini alarak basınç dalgalarının self modülasyonunun Nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) ile yönetildiğini göstermişlerdir. Erbay

ve Erbay [46] ise tüpü nonlinear viskoelastik ve akışkanın yaklaşık denklemlerini alarak basınç dalgalarının nonlinear modülasyonun dissipatif Nonlinear Schrödinger denklemi ile yönetildiğini göstermişlerdir. Yapılan çalışmaların çoğunda akışkanın yaklaşık denklemleri kullanılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci kısmında (Bölüm 5) ideal akışkanın kesin denklemleri kullanılarak, içi akışkan ile dolu öngerilmeli elastik tüplerde nonlinear dalga modülasyonu problemi incelenmiş ve birinci mertebeden genlik teriminin nonlinear Schrödinger denklemiyle yönetildiği gösterilmiştir. Bu nonlinear denkleminin kararlı düzlem dalga çözümlerine sahip olabilmesi için katsayıların sağlaması gerekli koşullar incelenmiş ve yaklaşık akışkan denklemlerinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır (Antar ve Demiray [47]).





## 2. TEMEL DENKLEMLER

### 2.1 Giriş

Kalbin periyodik olarak uyguladığı pulsatif basınç sol karıncıktaki kanın atardamarlar kanalıyla vücuda yayılmasını sağlar. Kanın viskoz bir akışkan olması nedeniyle damarı da benzer bir hareket içerisine zorlar. Bu nedenle kanı ve atardamarları yöneten nonlinear diferansiyel denklemlerin ve sınır koşullarının uygun biçimde verilmesi gerekir. Bunlar akışkan ve tüp malzemesi için sırasıyla aşağıda verilecektir.

### 2.2 Akışkanın Alan Denklemleri

Kan, plazma adı verilen ve Newtoniyen özelliğe sahip bir sıvı ile hücrelerin belirli oranda karışımıyla oluşmuş viskoz bir akışkandır. Bir kan numunesindeki hücre miktarının toplam kan hacmine oranı “hematokrit oranı ” olarak bilinir. Kan üzerinde yapılan deneysel çalışmalar düşük hematokrit oranlarında ve yüksek kayma hızlarında kanın Newtoniyen bir akışkan gibi, yüksek hematokrit oranı ve düşük kayma hızlarında ise Newtoniyen olmayan bir akışkan gibi davrandığını göstermektedir. Genel olarak kabul edilen husus kanın sıkışmaz ve Newtoniyen olmayan bir akışkan oluşudur. Böyle bir akışkana ait bünye ve hareket denklemleri, kütle kuvvetlerinin ihmalı halinde,

$$\sigma_{kl} = ( -P^* + \alpha_0 ) \delta_{kl} + \alpha_1 d_{kl} + \alpha_2 d_{km} d_{lm} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{kl,k} = \rho_a \left( \frac{\partial v_l}{\partial t} + v_{l,k} v_k \right) \quad (2.2)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $\sigma_{kl}$  akışkanın gerilme tansörünü,  $P^*$  akışkanın hidrostatik basıncını,  $\delta_{kl}$  Kronecker deltasını,  $v_k$  hız bileşenini,  $d_{kl}$  deformasyon hızı tansörünü  $\rho_a$  kütle yoğunluğunu ve virgülden sonraki indis ise ilgili büyüklüğün  $x_k$ 'ya göre kısmi türevini göstermekte olup diğer büyüklükler

aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \quad , \quad \alpha_i = \alpha_i (II_d, III_d)$$

$$I_d = d_{kk} = 0, \quad II_d = d_{kl} d_{kl} \quad , \quad III_d = d_{km} d_{mn} d_{nk} . \quad (2.3)$$

Burada  $d_{kl}$  şekil değiştirme hızı tansörü olup sıkışmaz akışkanlar için  $I_d = 0$  dır.

Akışkanın viskoz gerilmesi şekil değiştirme hızının tek bir fonksiyon olması nedeniyle

$$-\alpha_0(II_d, III_d) = \alpha_0(II_d, -III_d)$$

$$\alpha_1(II_d, III_d) = \alpha_1(II_d, -III_d)$$

$$-\alpha_2(II_d, III_d) = \alpha_2(II_d, -III_d) \quad (2.4)$$

koşullarını sağlaması gerekir. Bunlara ek olarak  $\alpha_0$  katsayısının  $\alpha_0(0,0) = 0$  olması gerekliliği de düşünülebilir.

Gerilme tansörünün viskoz kısmının şekil değiştirme tansörüne lineer olarak bağlı olduğu akışkanlara *Newtoniyen akışkan* adı verilir. Bu duruma ait bünye denklemi (2.1)'de  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 2 \mu_v$  ve  $\alpha_2 = 0$  yazmak suretiyle elde edilir ve

$$\sigma_{kl} = -P^* \delta_{kl} + 2\mu_v d_{kl} \quad (2.5)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $\mu_v$  sabit viskozite katsayısıdır.

Damarın çeperine yakın yerlerde şekil değiştirme hızının yüksek olması ve akım sırasında alyuvarların merkeze yakın yerlere doğru kayması nedeniyle kanın damar içerisindeki davranışı Newtoniyen akışkan gibi işleme sokulabilir.

Ayrıca, biz bu çalışmada akışkanın ve tüpün aksel simetrik hareketlerini inceleyeceğimizden silindirik koordinatlarda uygun hız alanı  $v_1 = V_r^*(r, z^*, t^*)$ ,  $v_2 = 0$  ve  $v_3 = V_z^*(r, z^*, t^*)$  şeklinde olmalıdır. Bu durumda gerilme tansörü bileşenleri ve ilgili hareket denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\sigma_{rr} = -P^* + 2\mu_v \frac{\partial V_r^*}{\partial r} \quad , \quad \sigma_{\theta\theta} = -P^* + 2\mu_v \frac{V_r^*}{r},$$

$$\sigma_{zz} = -P^* + 2\mu_v \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}, \quad \sigma_{rz} = -\mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z^*} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= \rho_a \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho_a \left( \frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.6) gerilme bileşenleri ifadesi (2.7)'de yerine konursa  $V_r^*$ ,  $V_z^*$  hızları cinsinden hareket denklemleri aşağıdaki şekli alırlar

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^*}{\partial r} = \frac{\mu_v}{\rho_a} \left( \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r^*}{\partial r} - \frac{V_r^*}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial z^{*2}} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = \frac{\mu_v}{\rho_a} \left( \frac{\partial^2 V_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z^*}{\partial z^{*2}} \right). \quad (2.9)$$

Bu hareket denklemlerine ek olarak sıkışmazlık koşulundan ileri gelen aşağıdaki süreklilik denkleminin de sağlanması gerekir

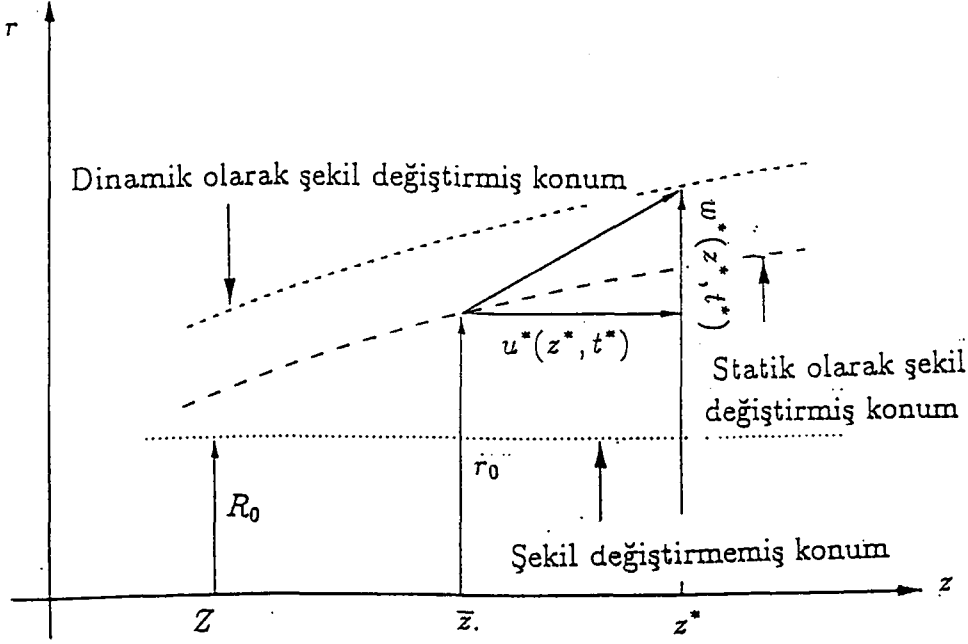
$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r} + \frac{V_r^*}{r} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2.10)$$

Akışkan ile tüp arasındaki etkileşim nedeniyle akışkanda oluşan hareket tüpte de bir harekete neden olacaktır. Bundan sonraki kısım da tüpün hareket denklemleri elde edilecektir.

### 2.3 Elastik Tüpün Nonlinear Hareket Denklemleri

Normal olarak sağlıklı bir insanda sistolik kan basıncı (maksimal basınç) 120 mmHg ve diyastolik (minimal) basınç ise 80 mmHg civarındadır. Deneysel çalışmalar, ayrıca, fizyolojik koşullarda büyük damarların aksenel yönde 1.6 mertebesinde bir germeye maruz kaldığını göstermektedir. Kalbin pulsatif hareketi sırasında uygulanan ek basınç sonucu bu statik değer üzerine dinamik yerdeğiştirmeler süperpoze edilmektedir. Genel olarak denilebilir ki büyük atardamarlar ortalama bir ön gerilmeye maruz kalmaktadır. İşte bu bölümde, muhtemel biyolojik uygulamalar göz önünde bulundurularak, sonlu statik ön gerilmeye maruz, üzerine dinamik yerdeğiştirmelerin süperpoze edildiği ve içerisinde viskoz akışkan bulunan bir ince tüpün (mambranın) hareketini

yöneten diferansiyel denklemler elde edilecektir. Bunun için, Şekil 2.1'de



Şekil 2.1 Elastik tüpün çeşitli konumları.

gösterildiği gibi, doğal konumunda dairesel silindirik bir mambran gözönüne alalım. Mambranın orta yüzeyindeki tipik bir noktanın silindirik koordinatlarını  $(R_0, \Theta, Z)$  ile gösterelim. Mambrana uygulanacak eksenel simetrik statik yükler altında şekil değiştirmiş konumunda aynı noktanın koordinatları  $(r_0, \theta, \bar{z})$  ile gösterilsin; burada  $\bar{z} = \bar{z}(Z)$  şeklindedir. Nihayet, bu statik yerdeğistirmeler üzerine radyal doğrultuda  $u^*(\bar{z}, t^*)$  ve eksenel doğrultuda da  $w^*(\bar{z}, t^*)$  büyük fakat zamana bağlı yerdeğistirmelerin süperpoze edildiğini varsayalım. Bu durumda, incelenmekte olan noktanın konum vektörü

$$\mathbf{r}(\bar{z}, t^*) = [r_0 + u^*(\bar{z}, t^*)] \mathbf{e}_r + [\bar{z} + w^*(\bar{z}, t^*)] \mathbf{e}_z \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$  silindirik koordinatlardaki birim baz vektörlerini göstermektedir.

Şekil değiştirmiş mambranın meridiyeni boyuncaki teğet vektörünü aşağıdaki biçimde tanımlamak mümkündür

$$\mathbf{T}_z = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u^*}{\partial \bar{z}} \mathbf{e}_r + \left(1 + \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}}\right) \mathbf{e}_z. \quad (2.12)$$

(2.12) ifadesi kullanılarak bu vektörün uzunluğu

$$\Lambda_z^2 = \mathbf{T}_z \cdot \mathbf{T}_z = \left( \frac{\partial u^*}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} \right)^2, \quad (2.13)$$

olarak tanımlanabilir. O halde şekil değiştirmiş meridiyene teğet birim  $\mathbf{t}$  vektörü aşağıdaki şekilde verilebilir

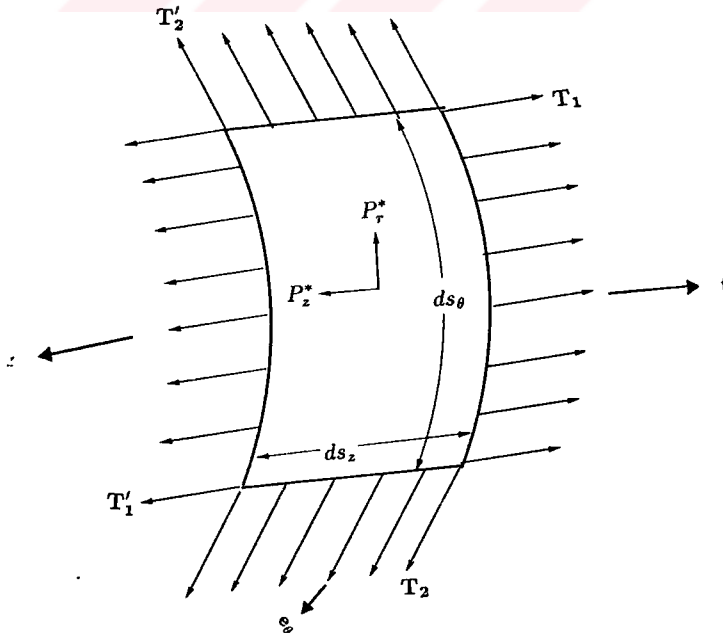
$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}_z}{\Lambda_z} = \frac{1}{\Lambda_z} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial \bar{z}} \mathbf{e}_r + \left( 1 + \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} \right) \mathbf{e}_z \right]. \quad (2.14)$$

Buna göre şekil değiştirmiş mambranın birim dış normali

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{t} = \left[ \left( 1 + \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} \right) \mathbf{e}_r - \frac{\partial u^*}{\partial \bar{z}} \mathbf{e}_z \right], \quad (2.15)$$

olarak ifade edilebilir.

Şimdi de mambran elemanının hareketini yöneten diferansiyel denklemleri elde etmeye çalışalım. Bunu için sonlu statik şekil değiştirmeden sonra  $\bar{z} = sbt$ ,  $\bar{z} + d\bar{z} = sbt$ ,  $\theta = sbt$ ,  $\theta + d\theta = sbt$  düzlemleri arasında kalan mambran elemanının hareket denklemlerini yazmaya çalışalım. Bilindiği gibi mambranlarda eğilme rijitlikleri ihmal edildiğinden mambran kuvvetleri mambran yüzeyine teğet olarak alınabilir. Buna göre, şekil değiştirmiş mambran elemanına etkiyen iç ve dış kuvvetler Şekil 2.2'de gösterilmiştir. O



Şekil 2.2. Mambran elemanına etkiyen kuvvetler.

halde mambran elemanına etkiyen toplam kuvvet

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & -(\mathbf{t} T_1 ds_\theta)|_{\bar{z}} + (\mathbf{t} T_1 ds_\theta)|_{\bar{z}+d\bar{z}} - (T_2 \mathbf{e}_\theta ds_z)|_\theta + (T_2 \mathbf{e}_\theta ds_z)|_{\theta+d\theta} \\ & + (P_r^* \mathbf{e}_r + P_z^* \mathbf{e}_z) ds_\theta ds_z \end{aligned} \quad (2.16)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $T_1$ ,  $\mathbf{t}$  boyunca etkiyen ve birim teğetsel yay uzunluğuna gelen mambran kuvvetini,  $T_2$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  boyunca etkiyen ve birim meridiyen yayı uzunluğuna gelen mambran kuvvetini,  $P_r^*$ ,  $P_z^*$  şekil değiştirmiş mambranın birim alanına  $\mathbf{e}_z$  ve  $\mathbf{e}_\theta$  doğrultularında etkiyen dış kuvvetleri,  $ds_\theta$  ve  $ds_z$  ise şekil değiştirmiş elemanın kenar uzunlukları olup aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$ds_\theta = (r_0 + u^*) d\theta, \quad ds_z = \Lambda_z d\bar{z}. \quad (2.17)$$

Eksenel simetri nedeniyle  $T_1$  ve  $T_2$  mambran kuvvetleri sadece zamana ve  $\bar{z}$  eksenel koordinatına bağlıdır. Buna göre (2.16)'da görülen diferansiyel ifadeler  $d\bar{z}$  ve  $d\theta$  büyüklüklerin serisine açılır ve yalnız birinci mertebe terimler tutulacak olursa  $\mathbf{F}$  kuvveti aşağıdaki şekli alır

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ T_1 \mathbf{t} (r_0 + u^*) \right] d\theta d\bar{z} - T_2 \mathbf{e}_r \Lambda_z d\theta d\bar{z} \\ & + (P_r^* \mathbf{e}_r + P_z^* \mathbf{e}_z) \Lambda_z (r_0 + u^*) d\theta dz. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Burada  $\mathbf{e}_\theta|_{\theta+d\theta} = \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_r d\theta$  ilişkisi kullanılmıştır.

Newton hareket yasasına göre (2.18) ile verilen kuvvet ifadesi, elemanter parçanın kütlesi ile ivme vektörünün çarpımına eşit olmalıdır. Yerdeğiştirme bileşenleri sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki uzaysal koordinatlar cinsinden ifade edildiğinden  $\mathbf{a}$  ivme vektörü

$$\mathbf{a} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_z \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca gözönüne alınacak tüp malzemesi sıkışmaz kabul edildiğinden mambran elemanının kütlesi

$$\rho_0 h' \Lambda_z (r_0 + u^*) d\bar{z} d\theta, \quad (2.20)$$

olup hareket denklemi vektörel biçimde aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ T_1 (r_0 + u^*) \mathbf{t} \right] - T_2 \Lambda_z \mathbf{e}_r + \Lambda_z (r_0 + u^*) (P_r^* \mathbf{e}_r + P_z^* \mathbf{e}_z) \\ & = \rho_0 h' \Lambda_z (r_0 + u^*) \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_r + \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \mathbf{e}_z \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Burada  $\rho_0$  mambranın kütle yoğunluğunu,  $h'$  ise şekil değiştirmiş mambranın nihai kalınlığını göstermektedir. Malzemenin sıkışmaz kabul edildiği hatırlanırsa, sıkışmazlık koşulu

$$h' \Lambda_z (r_0 + u^*) = h r_0, \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $h$ , sonlu statik şekil değiştirmeden sonraki mambran kalınlığıdır. (2.14) denklemindeki  $\mathbf{t}$  teğet vektörü ifadesi ve (2.22) sıkışmazlık koşulu (2.21)'de yerlerine konur ise bileşenler cinsinden hareket denklemleri

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ T_1 \frac{\partial u^*}{\partial \bar{z}} \frac{(r_0 + u^*)}{\Lambda_z} \right] - \Lambda_z T_2 + \Lambda_z (r_0 + u^*) P_r^* = \rho_0 r_0 h \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[ T_1 \left( 1 + \frac{\partial w^*}{\partial \bar{z}} \right) \frac{(r_0 + u^*)}{\Lambda_z} \right] + \Lambda_z (r_0 + u^*) P_z^* = \rho_0 r_0 h \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu çalışmada incelenecek problemlerde tüp malzemesi ile akışkanın etkileşimi söz konusu olacağından sınır koşullarının uygun bir şekilde ifade edilebilmesi için seçilen eksenel koordinatın her iki ortam için aynı olması gerekir. Bilindiği gibi katı cisimler için belirli bir maddesel konum tanımlanabildiği halde akışkanlar için aynı şey söylenemez; bu nedenle akışkan denklemleri Euler formunda ifade edilmelidir. O halde katı ve akışkanın ortak sınır koşullarının ifade edilebilmesi için mambran denklemlerinin de uzaysal formda yazılması uygun olacaktır. Maddesel parçacığın şekil değiştirmeden sonraki nihai eksenel koordinatı  $z^*$  ile gösterilecek olursa aşağıdaki bağıntılar geçerlidir

$$\bar{z} = z^* - w^*(z^*, t^*). \quad (2.25)$$

$u^* = u^*(z^*, t^*)$  ve  $w^* = w^*(z^*, t^*)$  olarak alınabileceği gözönünde



bulundurulursa

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z^*} = \left(1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z^*}, \quad (2.26)$$

$$\Lambda_z = \Lambda \left(1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)^{-1}, \quad \Lambda \equiv \left[1 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2} \quad (2.27)$$

ilişkileri yazılabilir. Buna göre (2.23) ve (2.24) hareket denklemleri aşağıdaki şekli alırlar

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left[ T_1 \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \frac{(r_0 + u^*)}{\Lambda} \right] - \Lambda T_2 + \Lambda (r_0 + u^*) P_r^* = \rho_0 r_0 h \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z^*}\right) a_r^*, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} \left[ T_1 \frac{(r_0 + u^*)}{\Lambda} \right] + \Lambda (r_0 + u^*) P_z^* = \rho_0 r_0 h \left(1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right) a_z^*. \quad (2.29)$$

Burada uzaysal koordinatlar cinsinden ifade edilmiş  $a_r^*$  ve  $a_z^*$  ivme bileşenleri aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır

$$\begin{aligned} a_r^* &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}} + 2 V_z^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^* \partial z^*} + V_z^{*2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + a_z^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*}, \\ a_z^* &= \left(1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)^{-1} \left[ \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} + 2 V_z^* \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^* \partial z^*} + V_z^{*2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Yukarıdaki ifadede geçen  $V_z^*$  hız bileşeni

$$V_z^*|_{r=r_0+u^*} = \left(1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)^{-1} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} \quad (2.31)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Burada ele alınacak problemde elastik tüp içerisinde viskoz akışkan problemi inceleneceğinden mambrana gelen dış kuvvet akışkan tarafından uygulanan reaksiyon kuvvetidir. Akışkana ait toplam gerilme tansörü  $\sigma_{kl}$  ile gösterilecek olursa akışkanın uyguladığı reaksiyon kuvveti bileşenleri

$$P_r^* = -[\sigma_{kr} n_k]_{r=r_0+u^*}, \quad P_z^* = -[\sigma_{kz} n_k]_{r=r_0+u^*}, \quad (2.32)$$

şeklinde verilir.

Daha önce ifade edildiği gibi akışkanın Newtoniyen ve sıkışmaz olduğu kabul

edilmişti. Böyle bir akışkana ait bünye bağıntısı ve gerilme bileşenleri (2.5) ve (2.6)'da verilmişti. (2.6)'da verilen gerilme bileşenleri (2.32)'de yazılırsa  $P_r^*$  ve  $P_z^*$  akışkan reaksiyon kuvvetleri aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} P_r^* &= \left[ P^* n_r - 2\mu_v \frac{\partial V_r^*}{\partial r} n_r - \mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) n_z \right]_{r=r_0+u^*}, \\ P_z^* &= \left[ P^* n_z - \mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) n_r - 2\mu_v \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} n_z \right]_{r=r_0+u^*}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

(2.15) denkleminde normalin bileşenleri yukarıda yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned} \Lambda P_r^* &= \left[ P^* - 2\mu_v \frac{\partial V_r^*}{\partial r} + \mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right]_{r=r_0+u^*}, \\ \Lambda P_z^* &= \left[ -P^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) + 2\mu_v \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right]_{r=r_0+u^*}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

elde edilir. Eğer akışkana ait büyüklükler bir şekilde tayin edilmiş ise (2.34) ifadeleri yardımıyla tüpe gelecek akışkan reaksiyon kuvvetleri hesaplanabilir. Ayrıca, Newton kabulü gereği akışkan parçacıklarının tüpe yapıştığı kabul edildiğinden aşağıdaki sınır koşullarının sağlanması gerekir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} V_z^* \Big|_{r=r_0+u^*} &= V_r^* \Big|_{r=r_0+u^*}, \\ \left( 1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^{-1} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} &= V_z^* \Big|_{r=r_0+u^*}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.4. Bünye Denklemleri

Daha önce (2.28)-(2.29) ile ifade edilen tüp hareket denklemlerinin tamamlanabilmesi için  $T_1$  ve  $T_2$  membran kuvvetlerinin yer değiştirmelere olan fonksiyonel bağıntısının, yani bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Biz bu çalışmada membran malzemesinin sıkışmaz, ideal elastik ve izotrop olduğunu kabul edeceğiz. Böyle bir malzemeye ait bünye bağıntısı

$$t_{kl} = \bar{P} \delta_{kl} + \mu (\Phi c_{kl}^{-1} + \Psi B_{kl}), \quad (2.36)$$

şeklinde verilebilir, Eringen [48]. Burada  $\bar{P}$  hidrostatik basıncı,  $\mu$  elastik cismin küçük şekil değiştirme halindeki kayma modülünü,  $c_{kl}^{-1}$  Finger deformasyon

tansörünü göstermekte olup

$$c_{kl}^{-1} = F_{kK} F_{lK}, \quad F_{kK} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K}, \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (2.36) ifadesinde yer alan diğer büyüklükler

$$B_{kl} = I_1 c_{kl}^{-1} - c_{km}^{-1} c_{ml}^{-1}, \quad \Phi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}, \quad \Psi = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2}, \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3 = 1$ ,  $c_{kl}^{-1}$ 'nin temel invariantlarını,  $\mu \Sigma = \mu \Sigma(I_1, I_2)$  ise incelenen elastik cisme ait şekil değişirme enerjisi yoğunluğunu göstermektedir.

$\lambda_1$  ve  $\lambda_2$ , membran teğet düzlemi içerisindeki asal germeleri  $\lambda_3$  de membran teğet düzlemine dik doğrultudaki germeyi gösterebilir. O halde asal eksenlere göre ifade edilmiş  $c_{kl}^{-1}$  ve  $B_{kl}$  tansörünün bileşenleri aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\begin{aligned} c_{11}^{-1} &= \lambda_1^2, & c_{22}^{-1} &= \lambda_2^2, & c_{33}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \\ B_{11} &= \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, & B_{22} &= \frac{1}{\lambda_1^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, & B_{33} &= \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$c_{kl}^{-1}$  tansörünün temel invariantları da

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad (2.40)$$

şeklinde verilir. Burada  $\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$  sıkışmazlık koşulu kullanılmıştır. O halde (2.36) denkleminde asal gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= \bar{P} + \mu \left[ \Phi \lambda_1^2 + \Psi \left( \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \right], \\ t_{22} &= \bar{P} + \mu \left[ \Phi \lambda_2^2 + \Psi \left( \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \right], \\ t_{33} &= \bar{P} + \mu \left[ \frac{\Phi}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \Psi \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

şeklinde ifade edilebilir. Mambranın çok ince kabul edilmesi nedeniyle kalınlığı doğrultusundaki gerilme bileşeni yaklaşık sıfır kabul edilebilir. Buna

göre

$$t_{33} = \bar{P} + \mu \left[ \frac{\Phi}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \Psi \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \right] \cong 0, \quad (2.42)$$

veya  $\bar{P}$  hidrostatik basıncı

$$\bar{P} = -\mu \left[ \frac{\Phi}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \Psi \left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \right], \quad (2.43)$$

şeklinde bulunur. O halde (2.43) ifadesi (2.41)'de yerine yazılırsa  $t_{11}$  ve  $t_{22}$  asal gerilme ifadeleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= \mu \left[ \Phi \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + \Psi \left( \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \right], \\ t_{22} &= \mu \left[ \Phi \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) + \Psi \left( \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.44)$$

olarak verilir.

$I_1$  ve  $I_2$  temel invaryantlarının ifadeleri hatırlanırsa aşağıdaki bağıntıların geçerliliği gösterilebilir

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_2}. \quad (2.45)$$

$\Psi$  ve  $\Phi$ 'nin tanımları dikkate alınır ve gerekli türetmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} &= \Phi \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) + \Psi \left( \lambda_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^3} \right), \\ \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} &= \Phi \left( \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} \right) + \Psi \left( \lambda_1^2 \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^3} \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

ilişkileri elde edilir. (2.44) ve (2.46) denklemlerinin karşılaştırılmasından

$$t_{11} = \mu \lambda_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad t_{22} = \mu \lambda_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2}, \quad (2.47)$$

bünye bağıntıları elde edilir.

Bilindiği gibi meridiyen ve çevresel eğri boyunca birim uzunluğa etkiyen membran kuvvetleri

$$T_1 = h' t_{11}, \quad T_2 = h' t_{22}, \quad (2.48)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Burada  $h'$  şekil değiştirmiş kalınlık olup sıkışmazlık koşulu nedeniyle, şekil değiştirmeden önceki  $H$  mambran kalınlığına

$$h' \lambda_1 \lambda_2 = H \quad \text{veya} \quad h' = \frac{H}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (2.49)$$

şeklinde ilintilidir. Buna göre  $T_1$  ve  $T_2$  mambran kuvvetleri  $\Sigma$  şekil değiştirme enerjisi cinsinden

$$T_1 = \frac{\mu H}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{\mu H}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2}, \quad (2.50)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ve  $H$

$$\lambda_1 = \frac{ds_z}{dZ} = \frac{ds_z}{d\bar{z}} \frac{d\bar{z}}{dZ} = \lambda_z \Lambda_z, \quad \lambda_2 = \frac{ds_\theta}{R_0} = \frac{(r_0 + u^*)}{R_0} = \left( \frac{r_0 + u^*}{r_0} \right) \frac{r_0}{R_0} = \lambda_\theta \Lambda_\theta, \quad (2.51)$$

$$\Lambda_\theta = 1 + \frac{u^*}{r_0}, \quad H = h \lambda_z \lambda_\theta \quad (\text{sıkışmazlık koşulu})$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\lambda_z = d\bar{z}/dZ$  ve  $\lambda_\theta = r_0/R_0$  eksenel ve çevresel yöndeki başlangıç germelerini göstermektedir. (2.51) ifadesi (2.48)'de yerine konur ve  $\Lambda_z$  için (2.27)<sub>1</sub> ifadesi kullanılırsa

$$T_1 = \frac{\mu h}{\Lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z}, \quad T_2 = \frac{\mu h}{\Lambda} \left( 1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta}, \quad (2.52)$$

bulunur. Bu ifadeler (2.28)-(2.29) denklemlerinde yerine konursa yerdeğiştirmeler cinsinden yönetici diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde elde edilir

$$\frac{\Lambda_\theta}{h} \left[ P^* - 2\mu_v \frac{\partial V_r^*}{\partial r} + \mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right]_{r=r_0+u^*} - \frac{\mu}{r_0} \left( 1 - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} + \mu \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = \rho_0 a_r^*, \quad (2.53)$$

$$\frac{\Lambda_\theta}{h} \left[ -P^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \mu_v \left( \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right) + 2\mu_v \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right]_{r=r_0+u^*} + \mu \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \right) = \rho_0 a_z^*. \quad (2.54)$$

### Boyutsuz Alan Büyüklükleri

Uygunluk açısından, alan denklemlerini ve ilgili sınır koşullarını boyutsuzlaştırmakta yarar vardır. Bu amaçla aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}
 z^* &= r_0 z, \quad r = r_0 x, \quad t^* = \left( \frac{r_0}{c_0} \right) t, \quad w^* = r_0 w, \quad u^* = r_0 u, \\
 V_r^* &= c_0 V_r, \quad V_z^* = c_0 V_z, \quad m = \frac{\rho_0 h}{\rho_a r_0}, \quad P^* = \rho_a c_0^2 (p_0 + p), \\
 c_0^2 &= \frac{\mu h}{\rho_a r_0}, \quad \mu_v = \rho_a r_0 c_0 \nu.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Yukarıdaki ifadeler ilgili alan denklemlerinde ve sınır koşullarında yerine konursa boyutsuz büyüklükler cinsinden alan denklemleri aşağıdaki şekilde verilir

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\theta &\left[ (p_0 + p) - 2\nu \frac{\partial V_r}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \left( 1 - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} = m a_r,
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\theta &\left[ -(p_0 + p) \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} \right) = m a_z,
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_r}{x^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right), \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{V_r}{x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \tag{2.60}$$

Sınır koşulu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial w}{\partial t} = V_r|_{x=1+u}. \quad (2.61)$$

(2.56) ve (2.57) denklemlerinde geçen boyutsuz  $a_r$  ve  $a_z$  ivme bileşenleri aşağıdaki şekilde verilebilir

$$a_r = \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + a_z \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.62)$$

$$a_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-2}. \quad (2.63)$$

(2.56) ve (2.57) alan denklemlerinde görülen  $\Sigma$  şekil değiştirme enerjisi fonksiyonun yerdeştirmelere ve onun türevlerine olan bağıllığının bilinmesi gerekir.  $\Sigma = \Sigma(\Lambda_\theta, \Lambda_z)$ ,  $\Lambda = \Lambda(u)$ , ve  $\Lambda_z = \Lambda_z(\partial u/\partial z, \partial w/\partial z)$  şeklindedir. Bu çalışmada  $\Sigma$  şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu  $\Lambda_\theta$  ve  $\Lambda_z$ 'in analitik bir fonksiyonu olduğu kabul edilmiş ve aşağıdaki şekilde  $u = 0$ ,  $\partial u/\partial z = 0$  ve  $\partial w/\partial z = 0$  civarında seriyeye açılmıştır

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} &= \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2 + \beta_3 u^3 + \alpha_1 \frac{\partial w}{\partial z} + 2\alpha_2 u \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha_2 u \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \\ &+ (\gamma_3 + \alpha_1) \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_z} &= \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \gamma_1 \frac{\partial w}{\partial z} + (\gamma_2 + \gamma_1) \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \\ &+ \frac{\gamma_1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + 2\gamma_3 u \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

Burada  $\Lambda_z$  için aşağıdaki açılım kullanılmıştır

$$\Lambda_z = 1 + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \dots \quad (2.66)$$

Yukarıda görülen  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\alpha_n$  ve  $\beta_n$  katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır



$$\gamma_1 = \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_z^2} \Big|_{\Lambda_\theta = \Lambda_z = 1}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_z^3} \Big|_{\Lambda_\theta = \Lambda_z = 1}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta \partial \Lambda_z^2} \Big|_{\Lambda_\theta = \Lambda_z = 1},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^n \partial \Lambda_z} \Big|_{\Lambda_\theta = \Lambda_z = 1}, \quad \beta_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n+1} \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^{n+1}} \Big|_{\Lambda_\theta = \Lambda_z = 1}. \quad (2.67)$$

(2.64) ve (2.65) ifadeleri (2.56) ve (2.57)' de yazılırsa yerdeğiştirmeler cinsinden alan denklemleri elde edilir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} & \left[ p - 2\nu \frac{\partial V_r}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right]_{x=1+u} = ma_r - mu a_r + mu^2 a_r \\ & + (\beta_1 - \beta_0)u + (\beta_2 - \beta_1 + \beta_0)u^2 + (\beta_3 - \beta_2 + \beta_1 - \beta_0)u^3 - \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & - \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2}(-2\alpha_2 + \alpha_1)u \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{2}(\alpha_0 - \gamma_1) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ & + (\alpha_0 - \alpha_1)u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_2)u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1 + \beta_0)u \frac{\partial w}{\partial z} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \gamma_3 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \quad (2.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ -p \frac{\partial u}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{x=1+u} = ma_z - mu a_z \\ & + (\beta_0 - \alpha_1) \frac{\partial u}{\partial z} + (-2\alpha_2 + \alpha_1)u \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\gamma_1 - 2\gamma_3)u \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ & + (\alpha_0 - \gamma_1) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2(\gamma_2 + \gamma_1) \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2\gamma_3 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.69) \end{aligned}$$

Bu şekilde elde edilen (2.68)-(2.69) alan denklemleri, (2.58)-(2.60) akışkan denklemleri ve (2.61) sınır koşulları  $u$ ,  $w$ ,  $V_r$ ,  $V_z$  ve  $p$  alan büyüklüklerini tayin etmek için yeterli sayıda denklem veya koşulu vermektedir. Ancak denklemlerin yüksek mertebeden nonlinear olmaları nedeniyle bu denklemleri analitik olarak çözmek oldukça güçtür. Bununla birlikte, asimptotik açılımlara dayanılarak dissipatif-dispersif ortamlarda nonlinear dalgaların yayılması incelenebilir. Bu

yaklaşım lar kullanılarak asıl denklem yerine onu karakterize edebilecek yine nonlinear fakat bilinen evolüsyon denklemleri bulunabilir. İlerideki bölümlerde bu konu etrafı olarak incelenmeye çalışılacaktır.



### 3. PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ

#### 3.1 Giriş

Son yıllarda fiziğin bir çok dalında ortaya çıkan nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri değişik pertürbasyon yöntemleri kullanılarak incelenmiştir. Bunlar arasında su dalgalarından plazmaya, nonlinear optikten değişik sürekli ortam modellerine kadar geniş bir yelpazede dalga yayılması problemleri sayılabilir. Yapılan bu çalışmalarda bir boyutlu düzlem dalga veya boyuna dalga yayılması problemi değişik pertürbasyon teknikleri ve yaklaşımlarla denklem sisteminin uzak alan davranışlarını veren nonlinear skaler denklemler elde edilmiştir. Bunlar sistemin dispersif veya dissipatif olmasına bağlı olarak uzun dalga yaklaşımı için Korteweg-de Vries (KdV), Burgers denklemi veya onların genelleştirilmiş formları, kuvvetli dispersif için Nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) olmaktadır. Bu çalışmada içi viskoz (veya viskoz olmayan) akışkanla dolu tüplerde nonlinear dalga yayılması probleminin asimptotik olarak incelenmesi için seçilen yöntem indirgeyici pertürbasyon yöntemidir. Bu amaçla ilk önce türev açılım (veya çok ölçekli açılım) yöntemi kısaca temas edildikten sonra genel sistemler için indirgeyici pertürbasyon yöntemi açıklanacaktır. Bu yöntemlerin yanısıra nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri asimptotik olarak incelemek için değişik pertürbasyon yöntemleri Jeffrey ve Kawahara'nın [49] kitabında ayrıntılı olarak bulunabilir.

#### 3.2 Türev Açılım Yöntemi

Türev açılım yöntemi ilk kez Sturrock [50] tarafından 1957 yılında geliştirilmiş ve daha sonra bir çok araştırmacılar çeşitli fiziksel problemleri bu yöntem ile incelemişlerdir. Kawahara [51] 1973 yılında türev açılım yönteminin bir uygulaması olarak genlik modülasyonunun bütün etkilerini incelemiş ve kuvasi monokromatik dalga modülasyonu durumunda dispersif sistemler için Nonlinear Schrödinger denklemini elde etmiştir. Araştırmacıların çoğu ortamı dispersif olarak ele almışlardır. Eğer ortamda dissipasyon varsa (akışkanın viskoz veya tüp malzemesinin viskoelastik olması durumunda) dalga zarfını yöneten evölüsyon denklemi Nonlinear Schrödinger denklemi ile karak-

terize edilmez. Bu durumda tam dispersif ortamlar için kullanılan pertürbasyon yöntemleri dissipatif sistemlere uygulanacak şekilde düzenlenmelidir. Dissipatif ortamlarda dispersiyon bağıntısı reel  $k$ 'lar için imajiner frekanslar verir. Asano [52] zayıf nonlinear dissipatif sistemler için, alttan ısıtılan sınır tabakası içinde konvektif dalganın modülasyonunu türev açılım yöntemini kullanarak dissipatif Nonlinear Schrödinger denklemi ile yönetildiğini göstermiştir.

Türev açılım yöntemini açıklayabilmek için sırasıyla lineer ve nonlinear  $(L, N)$  iki operatör tanımlayalım

$$L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = N \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) F(u). \quad (3.1)$$

$F$   $u$ 'ya ve onun türevlerine bağlı genel bir fonksiyon olup burada açık ifadesi verilmeyecektir. Türev açılım yönteminde  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenlerinin aşağıdaki şekilde genişletildiği varsayılır

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_M, \quad \text{ve} \quad t_0, t_1, t_2, \dots, t_M. \quad (3.2)$$

Burada  $x_n = \varepsilon^n x$  ve  $t_n = \varepsilon^n t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, M$ ) şeklinde olup  $\varepsilon$  küçük bir parametredir. Buna bağlı olarak  $u(x, t)$  bağlı değişkeni bu genişletilmiş bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde alınabilir

$$u(x_0, x_1, x_2, \dots, x_M; t_0, t_1, t_2, \dots, t_M). \quad (3.3)$$

Buna bağlı olarak türev operatörleri ise

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n} \quad (3.4)$$

şeklinde kuvvet serisine açılabilir. Türev operatörlerinin böyle açılımı nedeniyle bu yöntem *türev açılım yöntemi* olarak bilinir. Yukarıdaki türev açılımları  $L$  ve  $N$  lineer ve nonlinear operatörlerde yazılırsa

$$\begin{aligned} L \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) &\equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n L_n \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial t_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_M} \right) + O(\varepsilon^{M+1}), \\ N \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) &\equiv \sum_{n=0}^M \varepsilon^n N_n \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial t_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_M} \right) + O(\varepsilon^{M+1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir. Keza bağlı değişkenler de aşağıdaki şekilde bir asimptotik seri ile

karakterize edilebilir

$$u(x_0, \dots, x_M, t_0, \dots, t_M; \varepsilon) = \sum_{m=1}^M \varepsilon^m u_m(x_0, \dots, x_M, t_0, \dots, t_M). \quad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6) açılımları (3.1) diferansiyel denklemde yazılır ve  $\varepsilon$ 'un çeşitli kuvvetlerin katsayıları sıfıra eşitlenirse  $u_n$ 'leri yöneten diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse kuvvetli dispersiyon halde Nonlinear Schrödinger denklemi, uzun dalga yaklaşımı halinde ise KdV veya onun genelleştirilmiş formları elde edilir.

### 3.3 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

İndirgeyici pertürbasyon yöntemi ilk defa kuvasi- monokromatik dalgaların yavaş modülasyonunun yayılımı için Taniuti ve Washimi [53] ve uzun dalga yaklaşımı için Taniuti ve Wei [54] tarafından verilmiştir. Bu yöntem daha sonra Taniuti ve Yajima [55] ve Asano ve Taniuti [56,57] tarafından bir çok nonlinear dalga sistemlerine genelleştirilmiştir. Dispersif sistemlerin uzak alan davranışlarının geniş bir incelemesi Jeffrey ve Kakutani'nin [58] çalışmasında verilmiştir.

Nonlinear dispersif dalgaların asimptotik davranışını incelemek için Gardner ve Morikawa [60] 1960 yılında

$$\xi = \varepsilon^\gamma (x - \lambda t), \quad \tau = \varepsilon^\mu t \quad (3.7)$$

şeklinde bir koordinat dönüşümü tanımlamışlardır. Burada  $\lambda$ ,  $\gamma$  ve  $\mu$  birer pozitif sabittir. Lineerleştirilmiş uzun dalgaların asimptotik davranışından türetilen bu koordinat dönüşümü Gardner-Morikawa dönüşümü olarak bilinir. Gardner-Morikawa, nonlinear asimptotik davranışı tanımlayabilmek için bağlı değişkenlerin pertürbasyon açılımı ile bu dönüşümü ile birleştirmişlerdir. Bu şekilde elde edilen pertürbasyon açılımı *indirgeyici pertürbasyon açılımı* olarak bilinir. İndirgeyici pertürbasyon yöntemi genel olarak nonlinear sistemi, sistemin uzak alan davranışını karakterize eden bir veya bir kaç nonlinear denkleme indirgemek için sistematik bir yol önerir.

Taniuti [59] aşağıdaki şekilde verilen denklemler sınıfını için uzun dalga yaklaşımı altında asimptotik bir yöntem geliştirmiştir

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} + b(U) + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (H_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t} + K_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}) U = 0. \quad (3.8)$$

Burada  $\mathbf{U} (u^1, u^2, u^3, \dots, u^n)$   $n$  bileşenli kolon vektörü,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}_\alpha^\beta$  ve  $\mathbf{K}_\alpha^\beta$   $n \times n$ 'lik matrisler,  $\mathbf{b}$  ise  $n$  bileşenli kolon vektörünü göstermektedir. Şimdi yöntemi açıklamada basitlik sağlayacağı için (3.8) denkleminde sağ tarafın sıfır olduğu, yani

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{b}(\mathbf{U}) = 0 \quad (3.9)$$

sistem ile ilgileneceğiz.

(3.9) denkleminin  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$  sabit çözümünün  $\mathbf{b}(\mathbf{U}_0) = 0$  uygunluk koşulunu sağlaması gerekir Kuvasi-monokromatik dalgaların yayılımı ile ilgilendiğimiz için (3.9) denklemine

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \delta \mathbf{U} e^{i(kx - \omega t)} + k.e. \quad (3.10)$$

şeklinde çözüm arayalım. Burada  $\omega$  açısal frekansı,  $k$  dalga sayısını, k.e. ise üssel ifadenin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca  $\delta \mathbf{U}$  artımsal büyüklüğün küçük olduğunu vurgulamak için başına  $\delta$  sembolü eklenmiştir. Bu çözüm (3.9)'da yazılır ve gerekli lineerleştirilirse yapılırsa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$|i\omega \mathbf{I} - ik\mathbf{A}_0 + \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0| = 0. \quad (3.11)$$

Burada  $\mathbf{I}$  birim matris  $\nabla_{\mathbf{U}}$   $\mathbf{U}$  'ya göre gradyan operatörünü,  $\mathbf{A}_0$  ve  $\mathbf{b}_0$  ise

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}, \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.11) denklemi  $\omega$  ile  $k$  arasında bir bağıntı verir, bu bağıntıyı  $\omega = \omega(k)$  şeklinde verildiğini varsayalım. Uygunluğu nedeniyle  $W_l$  matrisi

$$\mathbf{W}_l = il\omega \mathbf{I} - ilk\mathbf{A}_0 + \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $l$  bir tamsayıdır. Lineer düzlem dalgaların modülasyonunu inceleyebilmek için (3.7) dönüşümünde  $\gamma = 1$  ve  $\mu = 2$  olarak alınacaktır. Bu durumda (3.7) dönüşümü aşağıdaki şekli alır

$$\xi = \varepsilon(x - \lambda t), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \quad (3.14)$$

Burada  $\lambda = \partial\omega/\partial k$  olup  $v_g$  grup hızı olarak tanımlanmıştır.

$\mathbf{U}$  reel bağılı değişken vektörü  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$  sabit çözümü civarında

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{U}_n \quad (3.15)$$

şeklinde seriye açılabilmesini varsayalım.

Şimdi de  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$  ve  $\mathbf{b}(\mathbf{U})$  büyüklüklerinin ise  $\varepsilon$  cinsinden aşağıdaki şekilde seriye açılacakları kabul edilecektir

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \varepsilon^2 \left( \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right) + \dots \\ \mathbf{b} &= \varepsilon \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \varepsilon^2 \left( \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right) \\ &+ \varepsilon^3 \left( \mathbf{U}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 &\equiv \sum_{i=1}^N u_1^i \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i} \right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0} \\ \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 : \nabla \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 &\equiv \sum_{i,j}^N u_1^i u_1^j \left( \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^i \partial u^j} \right)_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.14) dönüşümü kullanılarak gerekli türev operatörleri ise

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.18)$$

şeklinde verilir. (3.18) türetme operatörleri ve (3.16)'daki seri açılımları (3.9) ile verilen diferansiyel denklem sisteminde yazılırsa  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  ve  $\varepsilon^3$  mertebedeki denklem sistemi elde edilir. Bunlar sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemler :

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 = 0. \quad (3.19)$$

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemler

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi}$$

$$+ \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 = 0, \quad (3.20)$$

$O(\varepsilon^3)$  mertebesindeki denklemler:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} \right) + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} \right) \\ & + (\mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{U}_3 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 \\ & + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 + \frac{1}{6} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

$O(\varepsilon)$ ,  $O(\varepsilon^2)$  ve  $O(\varepsilon^3)$  mertebesindeki denklemler ardışık olarak çözülmeye başlanırsa,  $O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemlerin formunun incelenmesinden

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^{(1)} \exp[i(\omega t - kx)] + k.e., \quad (3.22)$$

biçiminde bir çözümün uygun düşeceği görülebilir. Burada  $\mathbf{U}_1^{(1)}(\xi, \tau)$  bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklem daha sonra verilecektir ve  $k.e.$  ise ilgili büyüklüğün kompleks eşleniğini göstermektedir. (3.22) çözümü (3.19)'da yerine konduğunda, sıfırdan farklı  $\mathbf{U}_1^{(1)}$  için (3.11) dispersiyon bağıntısının sağlanması gerekir.  $\mathbf{W}_1$  matrisinin sağ özvektörü  $\mathbf{R}$  ile gösterilirse  $\mathbf{U}_1^{(1)}$  çözümü çözümden

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \Phi_1(\xi, \tau) \mathbf{R}, \quad (3.23)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $\Phi_1(\xi, \tau)$  bilinmeyen bir fonksiyon,  $\mathbf{R}$  ise

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = 0, \quad (3.24)$$

denklemini sağlayan ve  $\lambda$  özdeğerine karşı gelen sağ özvektördür.

(3.22) çözümü (3.20)'de yerine yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \mathbf{R} \exp[i(\omega t - kz)] \\ & + |\Phi_1|^2 [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : (\mathbf{R} \mathbf{R}^* - \mathbf{R}^* \mathbf{R}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : (\mathbf{R} \mathbf{R}^* + \mathbf{R}^* \mathbf{R})] \\ & + \Phi_1^2 [-ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}] \exp[2i(\omega t - kz)] + k.e. \end{aligned} \quad (3.25)$$



Bu denklemin şekli  $U_2$  için aşağıdaki biçimde bir çözüm önermemizi gerektirir

$$U_2 = U_2^{(0)} + U_2^{(1)} \exp[i(\omega t - kx)] + U_2^{(2)} \exp[2i(\omega t - kx)] + k.e. \quad (3.26)$$

Bu ifade (3.25)'de yerine konursa  $U_2^{(1)}$ 'i yöneten diferansiyel denklem

$$\mathbf{W}_1 U_2^{(1)} + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0, \quad (3.27)$$

şeklinde bulunur. Buradan  $\det \mathbf{W}_1 = 0$  olması nedeniyle (3.27) denkleminin  $U_2^{(1)}$ 'e göre çözülebilmesi için

$$\mathbf{L} (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} = 0, \quad (3.28)$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. Burada  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{R}$ 'ye karşı gelen sol özvektör olup

$$\mathbf{L} \mathbf{W}_1 = 0, \quad (3.29)$$

denklemini sağlar. (3.24)'in  $k$ 'ya göre türevi alınır

$$i(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} + \mathbf{W}_1 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} = 0, \quad (3.30)$$

bulunur. Bu ilişki (3.27)'de kullanılacak olursa

$$\mathbf{W}_1 (U_2^{(1)} + i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k}) = 0, \quad (3.31)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$U_2^{(1)} = \Phi_2 \mathbf{R} - i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} \quad (3.32)$$

şeklinde verilir. Burada  $\Phi_2(\xi, \tau)$  bilinmeyen diğer bir fonksiyon olup yüksek mertebeden açılımlardan elde edilmelidir.

(3.25)'den  $U_2^{(0)}$  ve  $U_2^{(2)}$  çözümleri aşağıdaki gibi verilebilir

$$U_2^{(0)} = |\Phi_1|^2 \mathbf{R}_2^{(0)}, \quad U_2^{(2)} = \Phi_1^2 \mathbf{R}_2^{(2)}. \quad (3.33)$$

Burada  $\Phi_1^*$ ,  $\Phi_1$ 'in kompleks eşleniği olmak üzere  $|\Phi_1|^2 = \Phi_1 \Phi_1^*$  şeklindedir ve

$\mathbf{R}_2^{(0)}$  ve  $\mathbf{R}_2^{(2)}$  vektörleri de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2^{(0)} &= -\mathbf{W}_0^{-1} [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : (\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{R}^*\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : (\mathbf{R}\mathbf{R}^* + \mathbf{R}^*\mathbf{R})] \\ \mathbf{R}_2^{(2)} &= -\mathbf{W}_2^{-1} [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{R}\mathbf{R} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R}].\end{aligned}\quad (3.34)$$

(3.22) ve (3.26) çözümleri (3.21)'de yerine konacak olursa  $\mathbf{U}_3$ 'ün aşağıdaki şekilde bir çözüm kabul edeceği gösterilebilir

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3 &= \mathbf{U}_3^{(0)} + \mathbf{U}_3^{(1)} \exp[i(\omega t - kx)] + \mathbf{U}_3^{(2)} \exp[2i(\omega t - kx)] \\ &\quad + \mathbf{U}_3^{(3)} \exp[3i(\omega t - kx)] + k.e.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Burada  $\mathbf{U}_3^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) yavaş değişkenlerin fonksiyonudur. Biz burada  $\Phi_1$ 'i yöneten diferansiyel denklemi elde etmeye çalıştığımızdan  $\mathbf{U}_3^{(1)}$ 'i yöneten diferansiyel denklemi yazmak yeterli olacaktır

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_3^{(1)} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} \mathbf{R} + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \mathbf{R} - i \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} \right) \\ + [-2ik\mathbf{R}^* \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_2^{(2)} - ik\mathbf{R}_2^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R} + ik\mathbf{R}_2^{(2)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}^* \\ - ik \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}^* \mathbf{R} + \frac{ik}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}^* + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}_2^{(0)} \\ + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R}^* \mathbf{R}_2^{(2)} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}^*] |\Phi_1|^2 \Phi_1 = 0.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Bu ifade soldan  $\mathbf{L}$  ile çarpılır ve (3.30) uygunluk koşulu kullanılır ise aşağıdaki Nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2} + q |\Phi_1|^2 \Phi_1 = 0. \quad (3.37)$$

Burada  $p$  ve  $q$  katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$p = i\mathbf{L} \cdot (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}),$$

$$q = i\mathbf{L} \cdot [-2ik\mathbf{R}^* \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_2^{(2)} - ik\mathbf{R}_2^{(0)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R} + ik\mathbf{R}_2^{(2)} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}^*]$$

$$\begin{aligned}
& -ik \nabla_U \nabla_U A_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}^* \mathbf{R} + \frac{ik}{2} \nabla_U \nabla_U A_0 : \mathbf{R} \mathbf{R} \mathbf{R}^* \\
& + \nabla_U \nabla_U \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}_2^{(0)} + \nabla_U \nabla_U \mathbf{b}_0 : \mathbf{R}^* \mathbf{R}_2^{(2)} \\
& + \frac{1}{2} \nabla_U \nabla_U \nabla_U \mathbf{b}_0 : \mathbf{R} \mathbf{R}^* \mathbf{R} \Big] / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}) .
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Şimdi de  $p$  katsayısına değişik bir ifade bulmaya çalışalım. Bunun için (3.30) denklemini  $k$ 'ya göre bir defa türetelim

$$i \frac{\partial \lambda}{\partial k} \mathbf{R} + 2i(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} - \mathbf{W}_1 \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial k^2} = 0. \tag{3.40}$$

Bu ifade soldan  $\mathbf{L}$  ile çarpılır ve (3.29) kullanılırsa

$$p = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial k} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \tag{3.41}$$

bulunur. Bu tip denklemlerin geniş bir incelemesi Teymur ve Şuhubi [61]'de bulunabilir.

### 3.4 Denklem Sistemleri İçin Uzun Dalga Yaklaşımı

Bu yöntem hem dispersif hem de dissipatif sistemleri karakterize edebilen aşağıdaki denklem sistemleri için uygulanabilir

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x}) \mathbf{U} = 0. \tag{3.42}$$

Şimdi de Gardner-Morikawa dönüşümünü

$$\xi = \epsilon^a (x - \lambda t) , \quad \tau = \epsilon^{a+1} t , \quad a = \frac{1}{p-1} \tag{3.43}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada  $\epsilon$  küçük bir parametre olup, lineer denklemlerin, uzun dalga yaklaşımında, asimptotik analizinden elde edilir.  $\lambda$  ise  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$  için  $\mathbf{A}(\mathbf{U}_0) = \mathbf{A}_0$  matrisinin özdeğeridir.  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}$  ifadelerinin  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$  sabit çözümü civarında aşağıdaki şekilde seriye açıldığı varsayılmıştır

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{U}_j, \quad \mathbf{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{H}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{H}_{\alpha j}^{\beta}, \quad \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathbf{K}_{\alpha j}^{\beta}. \tag{3.44}$$

Bu açılımlar ve (3.43) dönüşümü (3.42)'de yerine yazılır ve  $\epsilon$ 'un kuvvetlerine göre düzenlenirse aşağıdaki denklem takımı elde edilir

$O(\epsilon^{a+1})$  mertebesinde denklemler :

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} = 0, \quad (3.45)$$

$O(\epsilon^{a+2})$  mertebesinde denklemler :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{U}_1 \cdot (\nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} \\ & + \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-\lambda \mathbf{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathbf{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \frac{\partial^p \mathbf{U}_1}{\partial \xi^p} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

$\mathbf{A}_0$ 'ın  $\lambda$  özdeğerine karşı gelen özvektörü  $\mathbf{R}$  ile gösterilirse aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} = 0. \quad (3.47)$$

O halde (3.45) denkleminin çözümü

$$\mathbf{U}_1 = \Phi_1(\xi, \tau) \mathbf{R} + \mathbf{V}_1(\tau) \quad (3.48)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $\Phi_1(\xi, \tau)$ ,  $\mathbf{U}_1$ 'in  $\mathbf{R}$  boyunca olan bileşeni olup, diğer bileşeni  $\mathbf{V}_1(\tau)$ , başlangıç koşullarından belirlenecek olan bir fonksiyondur.  $\lambda$ ,  $\mathbf{A}_0$ 'ın bir özdeğeri olduğundan (3.46)'nın  $\partial \mathbf{U}_2 / \partial \xi$  cinsinden çözülebilmesi için aşağıdaki uygunluk koşulunun sağlanması gerekir

$$\mathbf{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} + \mathbf{L} \cdot \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-\lambda \mathbf{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathbf{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \frac{\partial^p \mathbf{U}_1}{\partial \xi^p} = 0. \quad (3.49)$$

$\xi \rightarrow \infty$  için  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_0$  olduğundan  $\xi \rightarrow \infty$  için  $\mathbf{U}_1 \rightarrow 0$  geçerlidir. Bu durumda  $\mathbf{V}_1(\tau) = 0$  alınabilir ve  $\mathbf{U}_1$  çözümü  $\mathbf{U}_1 = \Phi_1(\xi, \tau) \mathbf{R}$  şekline dönüşür. Buna göre  $\Phi_1$ 'i yöneten evölüsyon denklemi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + c_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial^p \Phi_1}{\partial \xi^p} = 0 \quad (3.50)$$

haline gelir. Burada  $c_1, c_2$  sabitleri

$$c_1 = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \mathbf{R}) / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}),$$

$$c_2 = \mathbf{L} \cdot \sum_{\beta=1}^s \prod_{\alpha=1}^p (-\lambda \mathbf{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathbf{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \mathbf{R} / (\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}) . \quad (3.51)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.50) denklemi  $p = 2$  için Burgers ve  $p = 3$  için de Korteweg-de Vries denklemi olarak bilinir.

Eğer verilen bir nonlinear diferansiyel denklem sistemine uygun Gardner-Morikawa dönüşümü bulunmadığı hallerde denklem sisteminin lineerleştirilmiş haline ait dispersiyon bağıntısına bakılır.  $a$  ve  $b$  reel sabitler olmak üzere dispersiyon bağıntısını  $k$ ' nın küçük değerleri için

$$\omega = a k + b k^3 + O(k^4)$$

$$\omega = a k + b k^2 + O(k^4) \quad (3.52)$$

şeklinde seriye açılabiliyorsa sonlu genlikli dalga yayılması incelenmesi durumunda nonlinear diferansiyel denklem sisteminin asimptotik olarak Burgers denklemine, KdV veya onun genelleştirilmiş formlarına indirgeneceği söylenebilir.

Burada özet olarak sunulmaya çalışılan yöntemlerden indirgeyici pertürbasyon yöntemi, bundan sonraki bölümlerde incelenecek problemlerde kullanılacak ve ilgili evolüsyon denklemleri elde edilmeye çalışılacaktır.

## 4. ZAYIF NONLİNEER DALGALAR

### 4.1. Giriş

Bu bölümde, içerisinde viskoz akışkan bulunan öngerilmeli ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılması indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak uzun dalga yaklaşımı altında incelenecektir. Akışkanın ilk önce kesin daha sonra yaklaşık denklemleri kullanılarak zayıf nonlinear dalga yayılmasını yöneten evolüsyon denklemleri viskozite parametresinin mertebesine bağlı olarak KdV ve KdVB denklemleri elde edilecektir. Ayrıca her bir evolüsyon denklemi için ilerleyen dalga çözümleri verilecektir. Viskozitenin büyük veya Reynolds sayısının küçük olduğu durumlarda viskozitenin etkisi bütün hız alanında önemlidir. Oysa viskozitenin küçük veya Reynolds sayısının büyük olduğu durumlarda viskozitenin etkisi sadece katı duvarının yakınında *sınır tabakası* olarak isimlendirilen dar bir bölgede önemli olur. Bu sınır tabakasının dışında akışkan ideal akışkan gibi davranır. Bu bölümün içerisinde aynı problem sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak çözülecek ve dispersiyonun mertebesine bağlı olarak viskozite-Korteweg-de Vries ve viskozite-Burgers denklemleri elde edilecektir. Bu denklemlerin ilerleyen dalga tipinde çözümlerini bulmak oldukça zordur. Bu nedenle viskozite-KdV denkleminin sol tarafı sonlu farklar metodu ile sağ tarafındaki integral ise ayrıklaştırılarak hesaplanacak ve sonuçlar grafik üzerinde gösterilecektir.

### 4.2. İçerisinde Viskoz Akışkan Bulunan İnce Elastik Tüplerde Nonlinear Dalga Yayılması

Bu kısımda boyutsuz alan büyüklükleri (2.68) ve (2.69) ile verilen içinde viskoz akışkan bulunan nonlinear ince elastik bir tüpte zayıf nonlinear dalga yayılması incelenecektir.

Şimdi aşağıdaki şekilde Gardner-Morikawa' nın [60] soğuk plazmada hidromanyetik dalgaların uzak alan davranışını incelerken yaptıkları dönüşüme benzer bir koordinat dönüşümü önerelim

$$\xi = \varepsilon^\alpha (z - g t), \quad \tau = \varepsilon^{\alpha+1} g t. \quad (4.1)$$

Burada  $\varepsilon$  nonlineeritenin, dispersiyonun ve dissipasyonun zayıflığını gösteren küçük bir parametre,  $g$  ise ölçek parametresi olup daha sonra belirlenecektir. (4.1) koordinat dönüşümü kullanılarak türetme operatörleri aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow g \varepsilon^\alpha \left( \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right), & \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\rightarrow \varepsilon^{2\alpha} g^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow \varepsilon^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2} &\rightarrow \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

(4.2) türetme operatörleri (2.68)-(2.69) tüp denklemlerinde, akışkan denklemlerinde ve sınır koşullarında yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir  
Tüp Denklemleri :

$$\begin{aligned}&\left[ p - 2 \bar{\nu} \varepsilon^\beta \frac{\partial V_r}{\partial x} + \bar{\nu} \varepsilon^{\alpha+\beta} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left( \varepsilon^\alpha \frac{\partial V_r}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \right]_{x=1+u} \\&= m a_r - m u a_r + (\beta_1 - \beta_0) u + (\beta_2 - \beta_1 + \beta_0) u^2 \\&- \alpha_0 \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha_1}{2} \varepsilon^{2\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon^{2\alpha} (\alpha_0 - \alpha_1) u \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\&+ \varepsilon^\alpha (\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \gamma_3 \varepsilon^{2\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \\&+ (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1 + \beta_0) \varepsilon^\alpha u \frac{\partial w}{\partial \xi},\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}&\left[ -\varepsilon^\alpha p \frac{\partial u}{\partial \xi} - \bar{\nu} \varepsilon^\beta \left( \varepsilon^\alpha \frac{\partial V_r}{\partial \xi} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + 2\bar{\nu} \varepsilon^{2\alpha+\beta} \frac{\partial V_z}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{x=1+u} \\&= m a_z - m u a_z + (\beta_0 - \alpha_1) \varepsilon^\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + (-2\alpha_2 + \alpha_1) \varepsilon^\alpha u \frac{\partial u}{\partial \xi} \\&- \gamma_1 \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (\gamma_1 - 2\gamma_3) \varepsilon^{2\alpha} u \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (\alpha_0 - \gamma_1) \varepsilon^{3\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\&- 2\gamma_3 \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} - 2(\gamma_2 + \gamma_1) \varepsilon^{3\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Akışkan Denklemleri :

$$\begin{aligned}
& -g \varepsilon^\alpha \left( \frac{\partial V_r}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial V_r}{\partial \tau} \right) + V_r \frac{\partial V_r}{\partial x} + \varepsilon^\alpha V_z \frac{\partial V_z}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial x} \\
& + \bar{\nu} \varepsilon^\beta \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_r}{\partial x} - \frac{V_r}{x^2} + \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \xi^2} \right), \tag{4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g \varepsilon^\alpha \left( \frac{\partial V_z}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial V_z}{\partial \tau} \right) + V_r \frac{\partial V_z}{\partial x} + \varepsilon^\alpha V_z \frac{\partial V_z}{\partial \xi} = -\varepsilon^\alpha \frac{\partial p}{\partial \xi} \\
& + \bar{\nu} \varepsilon^\beta \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_z}{\partial x} + \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \xi^2} \right), \tag{4.6}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{V_r}{x} + \varepsilon^\alpha \frac{\partial V_z}{\partial \xi} = 0. \tag{4.7}$$

Burada akışkanın viskozitesinin  $\nu = \bar{\nu} \varepsilon^\beta$  mertebesinde olduğu kabul edilmiştir. Sınır koşulları :

$$-g \varepsilon^\alpha \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) + \varepsilon^\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} V_z|_{x=1+u} = V_r|_{x=1+u}, \tag{4.8}$$

$$-g \varepsilon^\alpha \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} \right) \left( 1 - \varepsilon^\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^{-1} = V_z|_{x=1+u}. \tag{4.9}$$

Boyutsuz ivme bileşenleri  $a_r$  and  $a_z$  aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}
a_r = & g^2 \varepsilon^{2\alpha} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \left( 1 - \varepsilon^\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \varepsilon^\alpha a_z \frac{\partial u}{\partial \xi} \\
& + 2\varepsilon^{3\alpha} g^2 \left( \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \left( -\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} \right) \\
& + \varepsilon^{4\alpha} g^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left( \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \left( 1 - \varepsilon^\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^{-1}, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_z = & g^2 \varepsilon^{2\alpha} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + 2g^2 \varepsilon^{3\alpha} \left( \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \\
& \times \left( \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \left( 1 - \varepsilon^\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^{-1} + \varepsilon^{4\alpha} g^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left( \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2
\end{aligned}$$



$$\times \left(1 - \varepsilon^\alpha \frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^{-2}. \quad (4.11)$$

Sonlu, fakat küçük genlikli uzun dalgalarla ilgilendiğimiz için ,  $\varepsilon > 0$  dalga genliğini ölçen küçük bir parametre olmak üzere (4.3)-(4.7) denklemlerindeki alan büyüklükleri aşağıdaki şekilde  $\varepsilon$  cinsinden asimptotik seriye açılabilir

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi, \tau), & w &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1/2} w_n(\xi, \tau), & p &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(\xi, \tau), \\ V_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+1/2} V_{rn}(\xi, \tau; x), & V_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{zn}(\xi, \tau; x). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Burada  $u_n, w_n, p_n, V_{rn}$  ve  $V_{zn}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) fonksiyonları alan denklemlerinden ve sınır koşullarından belirlenecek olan fonksiyonlar olup  $u_0, w_0, p_0, V_{r0}$  ve  $V_{z0}$  fonksiyonları sıfır olarak alınmıştır. (4.1) koordinat dönüşümünde  $\alpha$  ve  $\beta$  ( $\nu = \bar{\nu} \varepsilon^\beta$ ) parametrelerin farklı seçimlerine bağlı olarak aşağıdaki şekilde evolüsyon denklemleri elde edilebilir :

(i)  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 1/2$  alınıp bu değerler (4.3)-(4.4) tüp denklemlerinde, (4.5)-(4.7) akışkan denklemlerinde ve sınır koşulunda yazılırsa diferansiyel denklem sınıfı elde edilir. Bu diferansiyel denklemlerde (4.12) ile verilen asimptotik açılımlar yazılır ve  $\varepsilon$ 'un çeşitli kuvvetlerine göre denklemler sıfıra eşitlenirse  $u_n, w_n, p_n, V_{rn}$  ve  $V_{zn}$  alan büyüklüklerini yöneten bir denklemler hiyerarşisi elde edilir. Bu denklemler  $\varepsilon^2$  mertebesine kadar aşağıdaki şekilde verilebilir :

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemler :

$$(\beta_1 - \beta_0) u_1 - (\beta_0 - \alpha_1) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = p_1 \Big|_{x=1}, \quad (4.13)$$

$$(\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + (\gamma_1 - mg^2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \bar{\nu} \frac{\partial V_{z1}}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial \xi} - g \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} = \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 V_{z1}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_{z1}}{\partial x} \right), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial V_{r1}}{\partial x} + \frac{V_{r1}}{x} + \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.16)$$

Sınır koşulu :

$$-g \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = V_{r1} \Big|_{x=1}, \quad -g \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = V_{z1} \Big|_{x=1} \quad (4.17)$$

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemler :

$$\begin{aligned} \left[ p_2 + u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} - 2\bar{\nu} \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} \right]_{x=1} &= (mg^2 - \alpha_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \beta_0) u_2 \\ &+ (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \beta_0 - \beta_1) u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + (\beta_2 - \beta_1 + \beta_0) u_1^2 \\ &+ \gamma_3 \left( \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right)^2 + (\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial w_2}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \left[ -p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \bar{\nu} \frac{\partial V_{r1}}{\partial \xi} - \bar{\nu} \frac{\partial V_{z2}}{\partial x} \right]_{x=1} &= (mg^2 - \gamma_1) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} - 2mg^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \tau} \\ &+ (\beta_0 - \alpha_1) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + (-2\alpha_2 + \alpha_1) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + (\gamma_1 - 2\gamma_3 - mg^2) u_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} \\ &- 2(\gamma_1 + \gamma_2 - mg^2) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - 2\gamma_3 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$-g \frac{\partial V_{r1}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 V_{r1}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} - \frac{V_{r1}}{x^2} \right), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial V_{z2}}{\partial \xi} + g \frac{\partial V_{z1}}{\partial \tau} + V_{r1} \frac{\partial V_{z1}}{\partial x} + V_{z1} \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial p_2}{\partial \xi} \\ &+ \bar{\nu} \left( \frac{\partial^2 V_{z2}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_{z2}}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_{z1}}{\partial \xi^2} \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial V_{r2}}{\partial x} + \frac{V_{r2}}{x} + \frac{\partial V_{z2}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.22)$$

Sınır Koşulu :

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - g \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \left[ V_{r2} + u_1 \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} \right]_{x=1}. \quad (4.23)$$

### Alan Denklemlerinin Çözümleri :

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

(4.15)<sub>1</sub> denkleminde görüldüğü gibi  $p_1$  fonksiyonu  $x$ 'den bağımsızdır.

(4.15)<sub>2</sub> denkleminde  $v = gV_{z1} - p_1$  tanımı yapılacak olursa

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\bar{v}}{g} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.24)$$

bulunur. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak (4.24) diferansiyel denkleminin çözümü

$$v = \int_0^\infty A(k, \tau) \exp \left( \frac{-k^2 \bar{v} \xi}{g} \right) I_0(kx) dk, \quad (4.25)$$

şeklinde bulunur. Burada  $A(k, \tau)$  bilinmeyen bir fonksiyon ve  $I_0(kx)$  sıfırıncı mertebeden modifiye Bessel fonksiyonudur. İlk yaklaşım olarak alan değişkenlerinin uzak alan davranışı ile ilgilendiğimiz için  $v = 0$  alınabilir. Bu durumda  $V_{z1}$   $x$ 'den bağımsızdır ve aşağıdaki şekilde verilebilir

$$V_{z1} = \frac{p_1(\xi, \tau)}{g}. \quad (4.26)$$

Burada, sözü edilen yaklaşıklık nedeniyle eksenel doğrultudaki sınır koşulunun sağlanmadığına dikkat edelim. Bu ise viskozitenin düşük alınması nedeniyle tüp ile akışkan arasında kaymaya izin verildiği şeklinde yorumlanabilir. Bu çözüm (4.16)'da yerine konursa  $V_{r1}$  ifadesi

$$V_{r1} = -\frac{1}{2g} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} x, \quad (4.27)$$

şeklinde bulunur. (4.17) sınır koşulu da kullanılarak diğer alan büyüklükleri aşağıdaki şekilde verilir

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad p_1 = 2g^2 U, \quad V_{z1} = 2gU, \quad V_{r1} = -g \frac{\partial U}{\partial \xi} x, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \Gamma U, \quad \Gamma = \left( \frac{\beta_0 - \alpha_1}{\gamma_1 - mg^2} \right).$$

Burada  $U(\xi, \tau)$  bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklem ikinci mertebe denklemlerin çözümünden bulunacaktır. Bu çözümler (4.13) ve (4.14) denklemlerinde yazılıp  $U \neq 0$  için gerekli koşuldan aşağıdaki denklem elde edilir

$$2mg^4 + g^2[m(\beta_0 - \beta_1) - 2\gamma_1] + [\gamma_1(\beta_1 - \beta_0) - (\alpha_1 - \beta_0)^2] = 0. \quad (4.29)$$

Bu denklem, ön şekil değiştirme ve maddesel sabitlere bağlı olarak,  $g$  ölçek

parametresinin belirlenmesini mümkün kılar. (4.29) denkleminde görüldüğü gibi ortamda yayılan ve birbirleriyle etkileşen iki dalga bulunmaktadır.

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

(4.20) denkleminde  $V_{r1}$  ifadesi yazılır ve bu denklem  $x$ 'e göre integre edilirse

$$p_2 = -\frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} x^2, \quad (4.30)$$

bulunur. (4.30) ve (4.28) çözümleri (4.21) 'de yerine konursa

$$\begin{aligned} \bar{v} \left( \frac{\partial^2 V_{z2}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial V_{z2}}{\partial x} \right) + g \frac{\partial V_{z2}}{\partial \xi} &= -2\bar{v}g \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 4g^2 U \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &+ 2g^2 \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{g^2}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} x^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

elde edilir. Bu denklemin özel çözümü

$$V_{z2}^{(p)} = F(\xi, \tau) - \frac{g}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} x^2, \quad (4.32)$$

şeklinde bulunur. Burada  $F(\xi, \tau)$  bilinmeyen bir fonksiyon olup aşağıdaki denklemin sağları

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 4g U \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2g \frac{\partial U}{\partial \tau}. \quad (4.33)$$

(4.31) denkleminin homogen çözümü ise

$$V_{z2}^{(h)} = \int_0^\infty B(k, \tau) \exp\left(\frac{-k^2 \bar{v} \xi}{g}\right) I_0(kx) dk, \quad (4.34)$$

şeklinde yazılabilir. Birinci mertebe denklemlerin çözümünde olduğu gibi alan değişkenlerinin uzak alan davranışı ile ilgilendiğimiz için  $V_{z2}^{(h)} = 0$  alınabilir. Bu durumda sıkışmazlık koşulu kullanılarak  $V_{r2}$  ifadesi

$$V_{r2} = \frac{gx^3}{8} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \left( 2g U \frac{\partial U}{\partial \xi} + g \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) x, \quad (4.35)$$

şeklinde bulunur. (4.35) ifadesi (4.23) sınır koşulunda yerine konursa

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{8} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + (3 - \Gamma) U \frac{\partial U}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial U}{\partial \tau}, \quad (4.36)$$

bulunur. (4.18) ve (4.19) denklemleri arasında  $u_2$  ve  $w_2$  yok edilirse dissipasyonun, nonlinearitenin ve dispersiyonun dengelendiği Korteweg de Vries-Burgers (KdVB) denklemi elde edilir. Bu denklem

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \mu_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0 \quad (4.37)$$

şeklinde verilir. Burada  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  ve  $\mu_3$  katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2 \left[ 3g^2 + \beta_2 - \beta_1 + \beta_0 + \Gamma(3\alpha_2 + \beta_0 - \beta_1 - 2g^2 - 3\alpha_1/2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma^2}{2}(6\gamma_3 - \gamma_1 + mg^2) + \Gamma^3(\gamma_2 + \gamma_1 - mg^2) \right] / (2mg^2\Gamma^2 + 4g^2) \\ \mu_2 &= \frac{(mg^2 - \alpha_0 + g^2/4)}{(2mg^2\Gamma^2 + 4g^2)}, \quad \mu_3 = \frac{\bar{\nu}(g\Gamma - 2g)}{(2mg^2\Gamma^2 + 4g^2)}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

(ii)  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 3/2$  durumunda akışkan denklemleri tamamıyla viskoz olmayan akışkan denklemlerine indirgenir.  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 3/2$  olma durumu (4.3)-(4.4) tüp denklemlerinde , (4.5)-(4.7) akışkan denklemlerinde ve sınır koşulunda yazılır ve  $\epsilon$ 'un çeşitli kuvvetlerine göre denklemler sıfıra eşitlenirse diferansiyel denklemler sınıfı elde edilir. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse dispersiyonun ve nonlinearitenin denge durumunda olduğu Korteweg-de Vries (KdV) denklemi bulunur. Bu denklem

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0, \quad (4.39)$$

şeklinde verilir.

### 4.3. Yaklaşık Akışkan Denklemleri

Bundan önce incelenen problemde ideal akışkanın alan denklemlerinin kesin çözümü alınmış viskozite etkisi ise sadece akışkanın tüpe uyguladığı kuvvet bileşenlerinin hesabında kullanılmıştı. Diğer bir söyleyişle tüp ile akışkan arasında bir kaymanın varlığı kabul edilmişti. Bu kısımda ise akışkanın radyal doğrultudaki değişken cinsinden ortalaması alınarak yaklaşık alan denklemleri elde edilecek ve bu yaklaşımla ilgili alan denklemlerinin uzun dalga yaklaşımı incelenecektir.

Bunun için önce, radyal hızın aksenal hıza göre küçük olduğu durumlarda geçerli olan ortalaması alınmış alan denklemlerini elde etmeye çalışalım. Bu

amaçla bir  $f$  fonksiyonunun kesit alanı üzerindeki ortalama değeri

$$\langle f \rangle = \frac{2\pi}{A} \int_0^{r_0+u^*} f r dr, \quad (4.40)$$

şeklinde verilir. Burada  $A$  kesit alanı

$$A(z, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0+u^*} r dr d\theta = \pi (r_0 + u^*)^2, \quad (4.41)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu ortalama işlemi (2.8) ve (2.9) ile verilen Navier-Stokes denklemlerine uygulanırsa aşağıdaki süreklilik ve momentum denklemleri elde edilir

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}(A \langle V_z^* \rangle) = 0, \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \langle V_z^* \rangle + \frac{\partial}{\partial z^*} \langle V_z^{*2} \rangle + \frac{\mu_v}{\rho_a} \frac{\partial}{\partial z^*} \langle p \rangle = \frac{\mu_v}{\rho_a} \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \langle V_z^* \rangle + \frac{2\pi\mu_v}{A\rho_a} \left( r \frac{\partial V_z^*}{\partial r} \right)_{r=r_0+u^*} \quad (4.43)$$

Burada  $\langle V_z^* \rangle$  eksenel yöndeki akışkanın hızının ortalama değerini ve  $\langle p \rangle$  basıncın ortalama değerini, göstermektedir. (4.42) ve (4.43) denklemlerinde (4.41) ifadesi ve (2.55) ile verilen boyutsuz büyüklükler kullanılırsa süreklilik ve momentum denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(1+u)}{2} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{R(1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1+u} \quad (4.45)$$

Yukarıdaki denklemlerde  $\langle p \rangle = \bar{p}$ ,  $\langle V_z \rangle = v$  ve Reynolds sayısı ise  $R = 1/\nu$  şeklinde tanımlanmış olup aşağıdaki varsayım kullanılmıştır [62]

$$A(v^*)^2 = 2\pi \int_0^{(r_0+u^*)} r^* V_z^{*2} dr^*. \quad (4.46)$$

Bir önceki kısımda olduğu gibi zayıf nonlineer dalga yayılması inceleneceğinden (4.2) ile verilen türev operatörleri süreklilik ve momentum denklemlerinde yazılırsa

$$-g \frac{\partial u}{\partial \xi} + g \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{(1+u)}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} + v \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (4.47)$$

$$-g \frac{\partial v}{\partial \xi} + g \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon^\alpha}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{2}{R \varepsilon^\alpha (1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1+u} \quad (4.48)$$

elde edilir. (4.3) ve (4.4) denklemlerinde akışkan tarafından uygulanan viskoz kuvvetler sıfırlanırsa ortalama basınç cinsinden aşağıdaki tüp denklemler elde edilebilir :

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (\beta_1 - \beta_0) u + (\beta_2 - \beta_1 + \beta_0) u^2 + \varepsilon^{2\alpha} (mg^2 - \alpha_0) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ &- \frac{\alpha_1}{2} \varepsilon^{2\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \varepsilon^{2\alpha} (\alpha_0 - \alpha_1) u \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \varepsilon^\alpha (\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ &+ (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1 + \beta_0) \varepsilon^\alpha u \frac{\partial w}{\partial \xi} + \gamma_3 \varepsilon^{2\alpha} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^\alpha \bar{p} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= (\beta_0 - \alpha_1) \varepsilon^\alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} + (-2\alpha_2 + \alpha_1) \varepsilon^\alpha u \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ &+ (mg^2 - \gamma_1) \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (\gamma_1 - 2\gamma_3 - mg^2) \varepsilon^{2\alpha} u \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ &+ (\alpha_0 - \gamma_1) \varepsilon^{3\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\gamma_3 \varepsilon^{2\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} - 2mg^2 \varepsilon^{3\alpha} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \tau} \\ &- 2(\gamma_2 + \gamma_1 - mg^2) \varepsilon^{3\alpha} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Alan büyüklüklerinin (4.12)'de verildiği gibi  $\varepsilon$  cinsinden asimptotik açılımı yapılır ve bunlar akışkan ve tüp denklemlerinde yerine yazılırsa diferansiyel denklemler hiyerarşisi elde edilir. Bu denklemler  $\varepsilon^2$  mertebesine kadar aşağıdaki şekilde verilebilir :

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemler :

$$-g \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0, \quad -g \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.51)$$

$$\bar{p}_1 = (\beta_1 - \beta_0) u_1 + \varepsilon^{\alpha-1/2} (\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \quad (4.52)$$

$$(\beta_0 - \alpha_1) \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + (mg^2 - \gamma_1) \varepsilon^{\alpha-1/2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.53)$$

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemler :

$$-g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \frac{1}{2} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0, \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & -g \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + g \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \bar{v} \varepsilon^{\alpha+\beta-1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} \\ & = -2\bar{v} \varepsilon^{-\alpha+\beta+1} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_2 &= (m g^2 - \alpha_0) \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + (\beta_1 - \beta_0) u_2 + (\beta_2 - \beta_1 + \beta_0) u_1^2 \\ &+ \varepsilon^{\alpha-1/2} (\alpha_1 - \beta_0) \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \varepsilon^{\alpha-1/2} (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \beta_1 + \beta_0) u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \\ &+ \varepsilon^{2\alpha-1} \gamma_3 \left( \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} -\bar{p}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= (m g^2 - \gamma_1) \varepsilon^{\alpha-1/2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} - 2m g^2 \varepsilon^{\alpha-1/2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \tau} \\ &+ (2 m g^2 - 2\gamma_2 - 2\gamma_1) \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + (\beta_0 - \alpha_1) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \\ &+ (-2\alpha_2 + \alpha_1) u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \varepsilon^{\alpha-1/2} (\gamma_1 - 2\gamma_3 - m g^2) u_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} \\ &- 2 \gamma_3 \varepsilon^{\alpha-1/2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial w_1}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Burada  $y = \varepsilon^2(1 - x + u)$  koordinat dönüşümü kullanılmış olup  $R^{-1} = \varepsilon^\beta \bar{v}$  şeklinde olduğu varsayılmıştır.

### Alan Denklemlerinin Çözümleri :

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

(4.51) ve (4.53) denklem takımı  $\xi$ 'ye göre integre edilirse

$$u_1 = U(\xi, \tau), \quad v_1 = 2gU, \quad \bar{p}_1 = 2g^2U, \quad \varepsilon^{\alpha-1/2} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \Gamma U, \quad \Gamma = \left( \frac{\beta_0 - \alpha_1}{\gamma_1 - m g^2} \right), \quad (4.58)$$

bulunur. Bu çözümler (4.52) ile verilen denklemde yerine yazılırsa  $g$  ölçek



parametresi için (4.29) ile verilen denklem elde edilir.

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

(4.58) ile verilen çözümler (4.54) denkleminde yazılır ve  $\partial v_2 / \partial \xi$  çekilecek olursa

$$\frac{\partial v_2}{\partial \xi} = 2g \left( \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \tau} - 3U \frac{\partial U}{\partial \xi} \right), \quad (4.59)$$

bulunur. Bu ifade (4.55) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} = & -4g^2 \frac{\partial U}{\partial \tau} + 2g^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 10g^2 U \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ & + 2\varepsilon^{\alpha+\beta-1} \bar{\nu} g \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\bar{\nu} \varepsilon^{-\alpha+\beta+1} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} \end{aligned} \quad (4.60)$$

elde edilir. (4.57) denkleminde  $\partial^2 w_2 / \partial \xi^2$  ifadesi çekilip (4.58) ile verilen çözümler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \xi^2} = & \left[ (\beta_0 - \alpha_1) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 2mg^2 \Gamma \frac{\partial U}{\partial \tau} + \{ \Gamma(\gamma_1 - 4\gamma_3 - mg^2) \right. \\ & \left. + 2g^2 - 2\alpha_2 + \alpha_1 + 2\Gamma^2(mg^2 - \gamma_2 - \gamma_1) \} U \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] / (\gamma_1 - mg^2) \end{aligned} \quad (4.61)$$

bulunur. (4.56) ile verilen diferansiyel denklem  $\xi'$  ye göre türetilir ve bu denklemde  $\partial^2 w_2 / \partial \xi^2$  yerine (4.61) ifadesi yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} = & 2g^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + 2mg^2 \Gamma^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \varepsilon^{2\alpha-1} (mg^2 - \alpha_0) \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \\ & + \left[ 2(\beta_2 - \beta_1 + \beta_0) + 2\Gamma(-3\alpha_1/2 + 3\alpha_2 - \beta_1 + \beta_0 - g^2) \right. \\ & \left. + \Gamma^2(6\gamma_3 - \gamma_1 + mg^2) + 2\Gamma^3(\gamma_2 + \gamma_1 - mg^2) \right] U \frac{\partial U}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

bulunur.  $\partial \bar{p}_2 / \partial \xi$  ifadesi (4.60) denkleminde yerine konursa aşağıdaki master denklem elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \bar{\mu}_3 \varepsilon^{\alpha+\beta-1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \bar{\mu}_4 \varepsilon^{-\alpha+\beta+1} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (4.63)$$

Burada  $\bar{\mu}_1$ ,  $\bar{\mu}_2$ ,  $\bar{\mu}_3$  ve  $\bar{\mu}_4$  katsayıları

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_1 &= [10g^2 + 2(\beta_2 - \beta_1 + \beta_0) + 2\Gamma(-3\alpha_1/2 + 3\alpha_2 - \beta_1 + \beta_0 - g^2) \\
&\quad + \Gamma^2(-\gamma_1 + 6\gamma_3 + mg^2) + 2\Gamma^3(\gamma_2 + \gamma_1 - mg^2)]/(4g^2 + 2mg^2\Gamma^2) \\
\bar{\mu}_2 &= \frac{(mg^2 - \alpha_0)}{4g^2 + 2mg^2\Gamma^2}, \quad \bar{\mu}_3 = -\frac{2g\bar{\nu}}{4g^2 + 2mg^2\Gamma^2}, \\
\bar{\mu}_4 &= \frac{2\bar{\nu}}{4g^2 + 2mg^2\Gamma^2}, \tag{4.64}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.63) denkleminden  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin çeşitli durumlarına göre bu genel denklemden bilinen çeşitli evolüsyon denklemleri elde edilir.

(i)  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 1/2$ ,  $\bar{\nu} = O(1)$  olma hali : Bu durumda  $(\partial V_{z1}/\partial y)_{y=0}$ 'ın katsayısı  $\epsilon$  mertebesinde olacağından bu terim düşer ve master denklemi Korteweg de Vries-Burgers (KdVB) denklemine indirgenir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \bar{\mu}_3 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0. \tag{4.65}$$

(i)  $\alpha = 1/2$  ve  $\beta = 3/2$ ,  $\bar{\nu} = O(1)$  olma hali : Bu durumda ise master denklemi dispersiyonun ve nonlinearitenin denge durumunda olduğu KdV denklemine indirgenir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0. \tag{4.66}$$

(i)  $\alpha = 3/2$  ve  $\beta = 3/2$ ,  $\bar{\nu} = O(1)$  olma hali : Bu durumda  $\partial^2 U/\partial \xi^2$ ,  $\partial^3 U/\partial \xi^3$ 'ün katsayıları  $\epsilon^2$  ve  $(\partial V_{z1}/\partial y)_{y=0}$ 'ın katsayısı ise  $\epsilon$  mertebesinde olduğundan master denklemi nonlinear diferansiyel denkleme indirgenir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \tag{4.67}$$

#### *Sınır Tabakası Yaklaşımı*

Reynolds sayısının çok büyük veya viskozitenin çok küçük olduğu durumda akımın davranışı büyük ölçüde ideal akışkaninkine yaklaşır. Bununla birlikte ideal akışkan çözümleri aynı koşullar altındaki viskoz akışkan çözümlerinden

akımı sınırlayan yüzeylerin yakınında çok farklı davranış gösterir. Viskoz bir akışkanda akışkan zerreciklerinin sınır yüzeyine yapıştığı kabul edildiğinden sınır koşulları ideal akışkanlar için geçerli olan sınır koşullarından oldukça farklıdır. 1904 yılında, büyük Reynolds sayıları için sınır koşullarındaki bu farklılıktan kaynaklanan durumun yerel kaldığını ve gerçek akımın ancak matematiksel bir soyutlama olarak düşünülebilecek ideal akışkan akımından etkin olarak yalnızca sınır civarındaki çok ince bir tabaka içinde ayrıldığı gözlenmiştir. Buna göre bir cismin etrafındaki büyük Reynolds sayılı akım farklı iki bölgede incelenebilir.

Birinci bölge, cismin civarına akışkan hızının cismin yüzeyindeki hızdan ya da cisim duruyorsa sıfırdan ideal haldeki değere ulaştığı ince bir tabakadır. Bu tabaka içinde sınıra dik doğrultaki hız gradyanı  $\partial V_z / \partial r$  büyük değerlere ulaşır. Dolayısı ile viskozite katsayısı çok küçük de olsa viskoz gerilmeler ihmal edilemeyecek değerlere ulaşır. Özellikle ihmal edilemeyen  $\tau = \mu \partial V_z / \partial r$  kayma gerilmesi bir direnç kuvvetine yol açarak ideal akışkan teorisinin önemli bir çelişkisini ortadan kaldırır. Bu olayların olduğu bölge *sınır tabakası* olarak adlandırılır. İkinci bölge ise sınır tabakasının dışındaki geniş bölge olup burada akışkan hareketini sürtünmesiz olarak kabul etmek pratik olarak mümkündür.

Sınır tabakasının cismin çevresi boyunca değişebilen ve başlangıçtaki bilmediğimiz kalınlığını  $\Upsilon(z)$  ile gösterelim. Öncelikle ideal akışkana karşı gelen problemin çözülebildiğini ve sınır üzerinde sınıra teğet olan bir  $V_z^{(id)}$  hız fonksiyonunun elde edilmiş olduğunu varsayalım. Gerçek durumunda sınır üzerinde hız sıfır olmalıdır. Dolayısı ile küçük  $\Upsilon(z)$  kalınlığındaki sınır tabakası içinde hız sıfırdan başlayarak viskozitenin artık etkin olmadığı bölgedeki ideal akışkan akımının hızına yaklaşır. Ancak  $\Upsilon$  kalınlığının çok küçük olduğu varsayıldığından bu hızın pratik olarak cismin sınırındaki matematiksel  $V_z^{(id)}$  hızına eşit alınması geçerli bir yaklaşıklık oluşturur. Buna göre problem ince bir  $\Upsilon$  tabakası içinde Navier-Stokes denklemlerinin ya da tabakanın ince alınmasından elde edilmiş yaklaşık şekillerinin  $y = 0$  da  $V_z = \partial w / \partial t$  sınır koşullarını sağlayan ve hız alanın  $V_z$  bileşeninin  $y = \Upsilon$ 'da  $V_z^{(id)}$  asimptotik olarak ulaştığı çözümleri belirlemeye indirgenir.  $V_z$  bileşeninin  $V_z^{(id)}$  ideal akışkan hızına asimptotik olarak yaklaşması temel varsayımız oluşturduğundan asimptotik limiti  $y \rightarrow \Upsilon$  yerine  $y \rightarrow \infty$  alınabilir ve matematik işlemlerde önemli ölçüde kolaylıklar sağlar. Böylece sınır tabakasındaki sınır koşulları

$$\begin{aligned} y = 0, \quad V_z &= \frac{\partial w}{\partial t} \\ y \rightarrow \infty, \quad V_z &\rightarrow V_z^{(id)} \end{aligned} \quad (4.68)$$

olarak alınır [63].

Bu kısımda, içerisinde viskoz akışkan bulunan ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların yayılması sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak incelenecektir. Nonlinear elastik tüpün radyal ve eksenel yöndeki alan denklemleri radyal  $u$  ve eksenel  $w$  yöndeki yerdeğiştirmeler cinsinden (4.49)- (4.50) ile ve akışkan denklemleri ise (4.44) ve (4.45) ile verilebilir.

Cowley [36]'in yaptığı dönüşüme benzer olarak  $\bar{v} = (\varepsilon^{\alpha+2}R)^{-1/2}$ ,  $y = g^{1/2}(\bar{v}\varepsilon)^{-1}(1-r+u)$  şeklinde alıp (4.48) denkleminde yazılırsa

$$-g \frac{\partial v}{\partial \xi} + g \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \xi} - \bar{v}^2 \varepsilon^{2\alpha+2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{2\bar{v}g^{1/2}\varepsilon}{(1+u)} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (4.69)$$

bulunur. (4.12) ile verilen asimptotik açılımlar ve (4.58)'deki çözümler kullanılıp (4.69) denkleminde  $\partial \bar{p}_2 / \partial \xi$  ifadesi çözülürse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \xi} = & -4g^2 \frac{\partial U}{\partial \tau} + 2g^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - 10g^2 U \frac{\partial U}{\partial \tau} \\ & + 2\varepsilon^{2\alpha+1} \bar{v}^2 g \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2\bar{v}g^{1/2} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

elde edilir. Bu ifade (4.62) denkleminde yazılırsa aşağıdaki master denklem elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \bar{\mu}_3 \bar{v} \varepsilon^{2\alpha+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \bar{\mu}_4 g^{1/2} \left( \frac{\partial V_{z1}}{\partial y} \right)_{y=0} = 0. \quad (4.71)$$

$\partial V_{z1} / \partial y$  ifadesini bulabilmek için (4.1) ile  $y = g^{1/2}(\bar{v}\varepsilon)^{-1}(1-r+u)$  koordinat dönüşümünü ve  $\bar{v} = (\varepsilon^{\alpha+2}R)^{-1/2}$  şeklinde olduğu varsayılp Navier-Stokes denklemlerinde yazılırsa, sınır tabakası yaklaşımı altındaki denklemler ve sınır koşulları aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V_{z1}}{\partial y^2}, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} y = 0, \quad V_{z1} = & -g\Gamma U = -\frac{\Gamma}{2g} p_1^{(id)}, \\ y \rightarrow \infty, \quad V_{z1} \rightarrow & V_{z1}^{(id)}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

(4.72)<sub>1</sub> denkleminin çözümünden  $p_1 = p_1(\xi, \tau)$  bulunur. Bu çözümünden görüldüğü gibi  $p_1$  basınç fonksiyonunun sınır tabakası boyunca değişmediği, dolayısı ile  $p_1(\xi, \tau)$  fonksiyonun sınır üzerindeki ideal akışkana karşı gelen

çözümün belirlediği basınç dağılımına eşit alınabileceği sonucuna varılır. Dolayısı ile  $p_1 = p_1^{(id)}$  şeklinde yazılabilir. (4.72)<sub>2</sub> diferansiyel denkleminde ve (4.73) sınır koşullarında

$$V_{z1} = \frac{1}{g} p_1^{(id)}(\xi, \tau) + W(\xi, y; \tau), \quad (4.74)$$

dönüşümü yapılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem ve sınır koşulları elde edilir

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= 0, \\ y = 0 \quad W &= -\frac{1}{g}(1 + \Gamma/2)p_1^{(id)}, \\ y \rightarrow \infty \quad W &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.75)$$

(4.75)<sub>1</sub> diferansiyel denklemi (4.75)<sub>2,3</sub> sınır koşulları altında Duhamel teoremine göre çözülürse

$$W = -\frac{2}{g\sqrt{\pi}}(1 + \frac{\Gamma}{2}) \int_0^\infty p_1^{(id)}\left(\xi + \frac{y^2}{4\zeta^2}, \tau\right) e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad (4.76)$$

bulunur. Bu çözüm (4.74)'de yazılırsa  $V_{z1}$  aşağıdaki şekilde bulunur

$$\begin{aligned} V_{z1} &= \frac{y}{2g\sqrt{\pi}}(1 + \frac{\Gamma}{2}) \int_0^\infty \frac{[p_1^{(id)}(\xi, \tau) - p_1^{(id)}(\xi + \eta, \tau)]}{\eta^{3/2}} e^{-y^2/4\eta} d\eta \\ &\quad - \frac{\Gamma}{2g} p_1^{(id)}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

$p_1^{(id)} = 2g^2 U$  ifadesi kullanılır ve  $(\partial V_{z1}/\partial y)_{y=0}$  oluşturulur ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\left(\frac{\partial V_{z1}}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{2g}{\sqrt{\pi}}(1 + \frac{\Gamma}{2}) \int_0^\infty U_\xi(\xi + \eta, \tau) \eta^{-1/2} d\eta, \quad (4.78)$$

bulunur. (4.78) ifadesi (4.71) denkleminde yazılırsa aşağıdaki master denklem elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \varepsilon^{2\alpha-1} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} + \bar{\mu}_3 \bar{\nu} \varepsilon^{2\alpha+1} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}$$

$$= \frac{2g^{3/2}\bar{\mu}_4}{\sqrt{\pi}}(1 + \frac{\Gamma}{2}) \int_0^{\infty} U_{\xi}(\xi + \eta, \tau) \eta^{-1/2} d\eta. \quad (4.79)$$

Burada  $\alpha = 1/2$  ve  $\alpha = 3/2$  seçimine bağlı olarak sırasıyla aşağıdaki viskozite-Korteweg-de Vries (V-KdV) ve viskozite-Burgers (V-B) denklemleri elde edilir

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \bar{\mu}_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} &= \frac{2\bar{\mu}_4 g^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(1 + \frac{\Gamma}{2}) \int_0^{\infty} U_{\xi}(\xi + \eta, \tau) \eta^{-1/2} d\eta, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \bar{\mu}_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi} &= \frac{2\bar{\mu}_4 g^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(1 + \frac{\Gamma}{2}) \int_0^{\infty} U_{\xi}(\xi + \eta, \tau) \eta^{-1/2} d\eta. \end{aligned} \quad (4.80)$$

#### 4.4 Evolüsyon Denklemlerinin İlerleyen Dalga Çözümleri

İlerleyen dalga çözümleri özel tipteki çözümler olup dalga şeklinin sabit hızla yayıldığını gösterir. Bu dalgalar lokalize veya periyodik olabilir. Lineer denklemler durumunda dalganın profili genellikle keyfidir. Örneğin klasik dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.81)$$

$f$  ve  $g$  keyfi fonksiyonlar için  $f(x - ct)$  ve  $g(x + ct)$  olmak üzere ilerleyen dalga çözümlerine sahiptir. Diğer taraftan aşağıdaki şekilde bir nonlinear denklemin ilerleyen dalga çözümünü bulmaya çalışalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + u) \frac{\partial u}{\partial x} = v(u). \quad (4.82)$$

$v(u) = 0$  durumunda  $u(x, t) = f(x - ct)$  şeklinde ilerleyen dalga çözümüne sahip olabilmesi için  $f$ 'in sabit olması gerekir. Bu çözüm ise ilerleyen dalga çözüm yapısında değildir.  $v(u) = u(1 - u^2)$  şeklinde verildiğini varsayalım. Bu durumda (4.82) denkleminin çözümü hiperbolik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde verilebilir

$$u(x, t) = f(x - t) = \tanh(x - t - x_0). \quad (4.83)$$

(4.83) çözümünden görüldüğü gibi nonlinear denklem durumunda dalganın

profili keyfi değildir. Nonlinear denklemlerin çözümleri ile lineer denklemlerin çözümleri birbirinden oldukça farklıdır. Nonlinear denklemlerde çözüm süperpoze edilebilme özelliğini kaybeder. İkinci ve temel ayrılık lineer denklemlerde bütün  $t > 0$  için çözüm tek olarak bulunabilmesine karşılık nonlinear denklemlerde başlangıç verileri düzgün olsa bile sonlu bir zamandan sonra (kritik zaman) çözümün çok değerli olabilmesidir. Dispersiyonun tek başına etkileri dalganın şeklini değiştirerek ilerlemesi olarak kendini gösterir veya tam ters anlamda söylemek gerekirse dalga dikleşmeden dağılarak yayılır. Nonlinear etkilerle dengede kaldığı zaman kalıcı dalga formu oluşabilir. İşte nonlinear ve dispersiyon etkilerin dengede olduğu zaman yalnız (solitary) dalgalar oluşur.

#### *Korteweg-de Vries Denklemi :*

Yalnız dalgalar ilk kez 1834 Edinburg da Glasgow kanalında İskoçyalı bir mühendis olan J. Scott Russell, tarafından gözlenmiştir. Russel, düzgün bir su kanalında tek bir yükselmeden oluşan ve bu yüksekliği kanal derinliğine göre oldukça büyük olan bir dalganın görünür bir değişime uğramadan kanal boyunca yayıldığını gözlemlemiş, atla izleyerek bu dalganın hızını ölçmüş ve bu dalgaya yalnız (solitary) dalga ismini vermiştir. Bu yalnız dalga profilinin  $z = \zeta(x, t)$

$$\zeta(x, t) = \text{asech}^2[\gamma(x - ct)] \quad (4.84)$$

ile verildiğini göstermiş fakat bu çözümü sağlayan bir diferansiyel denklem bulamamıştır. Daha sonra 1895 yılında Korteweg ve de Vries kendi adlarıyla anılan KdV denklemini bulmuşlar ve bu denklemin çözümünün (4.84) ile verildiğini göstermişlerdir. Bu denklem en genel formda

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (4.85)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha$  ve  $\beta$  keyfi sabitlerdir. (4.85) denkleminde

$$u = aU, \quad x = bX, \quad t = T \quad (4.86)$$

dönüşümü uygulanırsa bu denklem

$$\frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial^3 U}{\partial X^3} = 0 \quad (4.87)$$

formuna dönüşür. Burada  $b = \beta^{1/3}$  ve  $a = b/\alpha$  şeklindedir. Şimdi bu

denklemin

$$U = U(\zeta), \quad \zeta = X - cT, \quad c = \text{sabit} \quad (4.88)$$

yapısında ilerleyen dalga çözümleri elde edilmeye çalışılacaktır. (4.88) çözümü (4.87) ile verilen denklemde yazılırsa

$$U''' + U U' - c U' = 0 \quad (4.89)$$

elde edilir. Burada  $( )'$ ,  $\zeta$  değişkenine göre adi türevi ifade etmektedir. (4.89) denkleminin  $\zeta$ 'ya göre integrali alınır

$$U'' + \frac{U^2}{2} - cU = A \quad (4.90)$$

elde edilir. Burada  $A$  bir integrasyon sabitidir. (4.90) denkleminin her iki tarafı  $dU/d\zeta$  ile çarpılıp bir kez daha  $\zeta$ 'ya göre integrali alınır

$$3 (U')^2 = -U^3 + 3c U^2 + 6AU + 6B \equiv F(U). \quad (4.91)$$

bulunur. Burada  $B$  ikinci bir integrasyon sabitidir. Aslında (4.91) denklemi  $-F(U)/6$  potansiyeline sahip birim kütleli bir parçacığın hareket denklemidir veya başka bir şekilde ifade edecek olursak,  $U$  uzaysal,  $\zeta$  da zaman parametresi olarak seçildiğinde (4.91) denklemi bir anharmonik salıncının hareket denklemi olarak yorumlanabilir. (4.91) denkleminin gerçel çözümlere sahip olabilmesi ancak  $F(U) \geq 0$  olması ile mümkündür. Eğer  $F(U) = 0$  denkleminin bir tane gerçel kökü varsa bu durumda sınırlı çözüm bulmak mümkün değildir. Bu yüzden  $F(U)$  fonksiyonunun üç tane ayrı gerçel kökü olduğunu farzediyoruz. Bu kabul altında  $c_1 < c_2 < c_3$  olmak üzere

$$F(U) = (U - c_1) (U - c_2) (c_3 - U), \quad (4.92)$$

şeklinde yazabiliriz. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

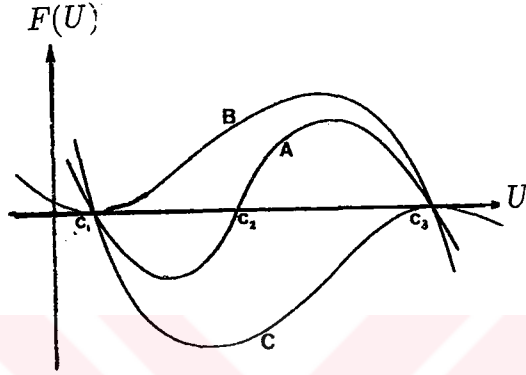
$$c = \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3), \quad A = -\frac{1}{6}(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1), \quad B = \frac{1}{6}c_1 c_2 c_3, \quad (4.93)$$

olduğu ortaya çıkar. Ayrıca  $c_1$ ,  $c_2$ , ve  $c_3$  köklerinin ayrı ve gerçel olması için, aşağıdaki eşitsizliklerin de sağlanması gerekir

$$c^2 + 2A > 0, \quad F(c + \sqrt{c^2 + 2A}) \geq 0, \quad F(c - \sqrt{c^2 + 2A}) \leq 0. \quad (4.94)$$



Burada üç kök, iki tane de ekstremum noktası olduğundan, ekstremum noktalarından birisi maksimum diğeri de minimum noktası olacaktır.  $F(U)$  fonksiyonunun genel davranışı Şekil 4.1'de A eğrisi ile verilmiştir. (4.91) denkleminin gerçel çözümü  $c_2$  ve  $c_3$  arasında nonlinear bir osilasyonu tasvir etmektedir. Eğer  $c_2 \rightarrow c_1$  ise bu çözüm yalnız dalgaya karşı gelmekte ve şekilde B eğrisi ile tasvir edilmektedir. Eğer  $c_2 \rightarrow c_3$  ise bu sabit çözüme karşı gelen lineer sinüzoidal dalgaları vermekte ve şekilde C eğrisi ile verilmektedir. Eğer  $c_1$ ,  $c_2$  ve  $c_3$  köklerinin üçü de çakışıkysa yine sabit çözüm oluşmaktadır ve bu çözüm ilerleyen dalga formunda değildir.



Şekil 4.1  $F(U)$  fonksiyonun davranışı A : Knoidal dalga, B : Yalnız dalga, C : Sabit çözüm

Şimdi (4.91) denkleminin Jakobiye eliptik fonksiyonlar cinsinden çözümünü bulabilmek için aşağıdaki şekilde yeni bir fonksiyon tanımlayalım

$$y^2(\zeta) = c_3 - U(\zeta). \quad (4.95)$$

Bu yeni fonksiyon (4.91) denkleminde yazılırsa

$$(y')^2 = \frac{1}{12}(y^2 + c_1 - c_3)(y^2 + c_2 - c_3), \quad (4.96)$$

şeklini alır. Bu denklemde

$$w = \frac{y}{\sqrt{c_3 - c_2}}, \quad k^2 = \frac{c_3 - c_2}{c_3 - c_1} \quad (4.97)$$

değişken dönüşümleri kullanılırsa (4.96) diferansiyel denklemi

$$\frac{dw}{\sqrt{(1 - k^2 w^2)(1 - w^2)}} = \sqrt{\frac{c_3 - c_1}{12}} d\zeta \quad (4.98)$$

şeklini alır. (4.98) denkleminin sol tarafı  $w = \sin\phi$  dönüşümü kullanılarak eliptik

integral olduğu gösterilebilir. Bu dönüşüm kullanılırsa (4.98) denklemi

$$\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}(\zeta-d). \quad (4.99)$$

şeklinde bulunur. Burada  $d$  bir integrasyon sabitidir. (4.99) denkleminin sol tarafı eliptik integralin genliği ve bu genliğin sin'ü ise Jacobiyen eliptik fonksiyon olarak bilinir ve

$$w = \operatorname{sn} \left[ \sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}(\zeta-d), k \right] \quad (4.100)$$

şeklinde yazılabilir. (4.100) ifadesi (4.97)'de yerine konursa

$$y = \sqrt{c_3-c_2} \operatorname{sn} \left[ \sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}(\zeta-d), k \right] \quad (4.101)$$

bulunur. Bu çözüm (4.95)'de yerine konursa  $U(\zeta)$  çözümü Jacobiyen eliptik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= c_3 - (c_3 - c_2) \operatorname{sn}^2 \left[ \sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}(\zeta-d), k \right] \\ U(\zeta) &= c_2 + (c_3 - c_2) \operatorname{cn}^2 \left[ \sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}}(\zeta-d), k \right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Yukarıdaki denklemdeki  $k$  sayısı ( $0 \ll k \ll 1$ ) integralin modülü olarak adlandırılır ve  $(4.97)_2$  ile tanımlanmıştır. (4.102) denklemindeki  $\operatorname{cn}$  fonksiyonundan dolayı KdV denkleminin bu tür çözümleri “knoidal dalga” olarak bilinir ve periyodu  $K$  birinci nevi tam eliptik integral olmak üzere

$$T_p = 4K \sqrt{\frac{3}{c_3-c_1}} \quad (4.103)$$

şeklindedir. Özel olarak  $c_2 \rightarrow c_1$  ise  $k \rightarrow 1$  olur ve  $\operatorname{cn}$  eliptik fonksiyonu,  $\operatorname{sech}$  fonksiyonuna dönüşür ve  $T_p$  'de sonsuza gider. Bu halde de çözüm

$$U = c_1 + (c_3 - c_1) \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{c_3-c_1}{12}} \left( X - \frac{1}{3}(2c_1 + c_2)T \right) \right], \quad (4.104)$$

olur. Eğer  $c_1 = U_\infty$ ,  $c_3 - c_1 = \bar{a}$  olarak tanımlanırsa KdV denkleminin çözümü

$$U = U_\infty + \bar{a} \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{\bar{a}}{12}} \left\{ X - \left( U_\infty + \frac{1}{3} \bar{a} \right) T \right\} \right], \quad (4.105)$$

olarak yazılır. Burada  $U_\infty$   $U$ 'nun sonsuzdaki üniform durumunu,  $\bar{a}$  ise dalganın genliğini göstermektedir. (4.105)'deki çözüm *yalnız dalga* olarak adlandırılır. Bir yalnız dalganın yayılma hızı,  $\bar{a}$  genliği ne kadar büyükse o kadar fazladır. Dolayısı ile aynı yönde ilerleyen ve aralarındaki uzaklık yeter derecede büyük olan iki yalnız dalgadan geridekinin genliği daha büyükse öndekine yetiyecek ve aralarında karmaşık bir etkileşim oluşacaktır. Sayısal hesaplamalar bir süre sonra bu etkileşimin pratik olarak sona erdiğini ve asimptotik olarak iki dalganın yeniden birbirinden ayrılarak yollarına devam ettiğini göstermiştir. Ancak çarpışmadan sonra genliği büyük olan dalganın öne geçtiği gözlenir. Çarpışmaları sonunda karakterleri değişmeyen bu tür dalgalara "soliton" adı verilir.

*Korteweg de Vries-Burgers Denklemi :*

Bu denklem en genel formda aşağıdaki şekilde verilir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial u^3}{\partial x^3} = 0. \quad (4.106)$$

Burada  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sabit sayılar olup üçüncü terim dissipatif etkiyi, dördüncü terim ise dispersif etkiyi göstermektedir.  $\gamma \rightarrow 0$  veya  $\beta \rightarrow 0$  durumunda (4.106) denklemi, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + 2\alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u^3}{\partial x^3} &= 0, \end{aligned} \quad (4.107)$$

şeklinde verilen Burgers ve KdV denklemlerine dönüşmektedir. Bu denklemlerin her biri, ilerleyen dalga tipinde çözümleri bulunabilen denklemlerdir. KdV-Burgers denkleminin ilerleyen dalga çözümü uzun zamandan beri incelenmekte olan bir konudur. Dispersiyonun veya dissipasyonun baskın olduğu duruma bağlı olarak KdV-Burgers denkleminin yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Johnson [35] 1970 yılında dispersiyonun hakim olduğu ( $\beta \gg \gamma$ ) durumunda yaklaşık çözüm bulmuştur. Dissipasyonun hakim olduğu ( $\beta \ll \gamma$ ) olduğu zaman ki durum Jeffrey [64] tarafından incelenmiş ve asimptotik çözüm elde edilmiştir. Canosa ve Gazdag [65] ise KdV-Burgers denkleminin

sayısal çözümünü Fourier yöntemi ile incelemişlerdir. Bona ve Schonbeck [66] ise  $\pm\infty$  'da sabit durumuna giden sınırlı ilerleyen dalga çözümlerin varlığını ve tekliğini incelemişler ve  $\beta \rightarrow 0$  iken  $\gamma = O(1)$  ve  $\gamma \rightarrow 0$  iken  $\beta = O(1)$  limit durumlarında Korteweg de Vries-Burgers denkleminin ilerleyen dalga çözümünü vermişlerdir. Daha sonra Jeffrey ve Xu [67], KdV-Burgers denklemini yeni bir bağımsız değişken ve onun kısmi türevlerini içeren kuvadratik forma indirgeyen bir dönüşüm tanımlamışlardır. Onlar KdV-Burgers denkleminin kesin çözümünü exponensiyel serileri kullanarak elde etmişler bu yöntem seri yöntemi olarak bilinmektedir. Aynı yazarlar direkt yöntemi kullanarak KdV-Burgers denklemin ilerleyen dalga çözümlerini bulmuşlardır. Bu yöntem kısaca aşağıdaki şekilde verilebilir:

*Direkt Yöntem* : KdV-Burgers denkleminin

$$u = U(\zeta), \quad \zeta = kx + \omega t \quad (4.108)$$

yapısında kararlı çözümleri arayacağız. Burada  $k$  ve  $\omega$  belirlenmesi gereken sabitlerdir. (4.108) çözümü KdV-Burgers denkleminde yerine konur ve bir kez  $\zeta$ 'ya göre integrali alınır

$$\omega U + k\alpha U^2 + \beta k^2 U' + \gamma k^3 U'' = C \quad (4.109)$$

bulunur. Burada  $C$  integrasyon sabitidir.  $U$ 'nun çözümünün aşağıdaki formda olduğunu varsayalım

$$U = A \operatorname{sech}^n \zeta + B \tanh^m \zeta + D \quad (4.110)$$

Burada  $A$ ,  $B$  ve  $D$  belirlenmesi gereken sabitlerdir. Çözümün bu tipte seçilmesinin nedeni KdV denkleminin ve Burgers denkleminin çözümlerinin süperpozisyonu formunda genel bir çözüm bulabilmek içindir. (4.109) denklemindeki  $C$  integrasyon sabitini sıfır alır ve (4.110) çözümü KdV-Burgers denkleminde yazılırsa ancak  $n = 2$  ve  $m = 1$  durumunda beş tane bilinmeyen sabiti belirlemek için gerekli beş tane denkleme ulaşılır. Bu denklemler

$$4\gamma k^3 A + \beta k^2 B + k\alpha(2AD - B^2) - \omega A = 0,$$

$$k\alpha(B^2 + D^2) + \omega D = 0$$

$$2k\alpha D + \omega = 0,$$

$$\alpha AB - \beta kA - \gamma Bk^2 = 0,$$

$$\alpha A - 6\gamma k^2 = 0 \quad (4.111)$$

bulunur. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse  $k$ ,  $\omega$ ,  $A$ ,  $B$  ve  $D$  sabitleri aşağıdaki şekilde bulunur

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{\beta^2}{100\gamma^2}, \quad \omega = -\frac{3\beta^3}{125\gamma^2}, \quad A = \frac{3\beta^2}{50\alpha\gamma}, \\ B &= \pm \frac{3\beta^2}{25\alpha\gamma}, \quad D = \pm \frac{3\beta^2}{25\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Bu sabitler (4.110) çözümünde yerine yazılırsa KdV- Burgers denkleminin ilerleyen dalga çözümü aşağıdaki şekilde bulunur

$$\begin{aligned} U(\zeta) &= \frac{3\beta^2}{50\alpha\gamma} \left[ \text{sech}^2 \zeta + 2 \tanh \zeta + 2 \right], \quad \zeta = \frac{\beta}{10\gamma} x - \frac{3\beta^3}{125\gamma^2} t, \\ U(\zeta) &= \frac{3\beta^2}{50\alpha\gamma} \left[ \text{sech}^2 \zeta - 2 \tanh \zeta - 2 \right], \quad \zeta = -\frac{\beta}{10\gamma} x - \frac{3\beta^3}{125\gamma^2} t \end{aligned} \quad (4.120)$$

(4.120) ile verilen ilerleyen dalga çözümleri  $\gamma \rightarrow 0$  limit durumunda Burgers denkleminin tanh tipinde ilerleyen dalga çözümüne veya  $\beta \rightarrow 0$  durumunda KdV denkleminin  $\text{sech}^2$  tipindeki ilerleyen dalga çözümüne dönüşmez. Eğer  $\gamma \rightarrow 0$  veya  $\beta \rightarrow 0$  limit durumunda incelenmek isteniyorsa KdV-Burgers denkleminde bu limit dikkate alındıktan sonra aynı yöntemle istenilen çözüm elde edilebilir

#### 4.5. Sayısal Çözümler ve Sonuçlar

Daha önce elde edilen KdV, KdVB ve viskozite-KdV denklemlerinin sayısal çözümlerini inceleyebilmek için elastik tüpe ait bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Bu çalışmada bir karşılaştırma yapabilmek amacıyla, literatürde mevcut ve vulganize lastikler için iyi sonuç veren Mooney-Rivlin (M-R) malzemesi ile Demiray [68] tarafından biyolojik dokular için önerilen şekil değiştirme enerjisi kullanılacaktır. Simon ve arkadaşları [69] tarafından köpeğin karın (abdominal) aortu üzerinde yaptıkları deneyler, Demiray [70] tarafından [69]'da önerilen modelin analitik sonucu ile karşılaştırılmış ve  $\alpha$  maddesel sabiti;  $\alpha = 1.948$  olarak bulunmuştur. Lastik tipi malzeme üzerinde yapılan deneysel sonucunda ise  $\beta = 0.9$  olarak bulunmuştur (Fung [71]). Kan ve yumuşak dokular üzerinde yapılan deneyler, damar ile kanın kütle yoğunluğu yönünden aynı mertebede olduğunu göstermektedir. Dolayısı ile  $\rho_0/\rho_a \cong 1$  alınabilir. O halde  $m = H/(R_0 \lambda_\theta^2 \lambda_z)$  olup incelenen damar malzemesi için  $H/R_0 = 0.1\text{cm}$  olarak alınırsa  $m$  parametresi  $m = 0.1/\lambda_\theta^2 \lambda_z$  şeklinde verilebilir. Bu sayısal değerler EKA'da

verilen  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ve  $\gamma_1$  katsayılarında yazılarak KdVB denklemin katsayıları teğetsel ve eksenel germeye olan bağılıkları bulunmuştur. Bu çalışmada (4.29) ile verilen denklemin kökleriyle ilişkisi olan dalgalar birinci ve ikinci dalgalar olarak adlandırılacaktır. Birinci ve ikinci dalgalara karşı gelen KdVB denkleminin ilerleyen dalga çözümlerinin profili çeşitli malzemeler için başlangıç şekil değiştirmesi ve viskozite parametresi ile olan değişimleri Şekil 4.2-4.9'da verilmiştir.

Mooney-Rivlin (M-R) malzemesi için, birinci ve ikinci dalga profillerinin  $\zeta$  ve teğetsel germe oranı ( $\lambda_\theta$ ) ile değişimi Şekil 4.2 ve 4.3'de gösterilmiştir. Birinci dalga için şok formu artan teğetsel germe ile artmakta ikinci dalga için ise artan teğetsel germe ile azalmaktadır. Bu şekillerden görüldüğü gibi birinci dalga genleşme ve ikinci dalga ise sıkışma dalgası şeklindedir. Biyolojik malzeme için, bu dalgaların profillerinin aynı parametrelerle değişimi Şekil 4.4 ve 4.5'de gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden görüleceği gibi birinci ve ikinci dalganın işareti dışında, bu dalgaların formları M-R malzemesine oldukça benzerdir. Şekil 4.5'de gösterildiği gibi, ikinci dalga için  $k$ 'nın işareti başlangıç şekil değiştirmesi ile değişir. Teğetsel germenin küçük değerleri için pozitif, büyük değerleri için negatiftir.

Şekil 4.6 ve 4.7'de M-R malzemesi için dalga profillerinin  $\zeta$  ve viskozite parametresi ile değişimleri verilmiştir. Bu şekillerden görüldüğü gibi şok dalgasının önü artan viskozite parametresi ile daha belirgin olmaktadır. Yine burada da birinci dalga sıkışma ikinci dalga ise genleşme dalgası şeklindedir. Biyolojik malzemesi için aynı parametrelerle birinci ve ikinci dalga profillerinin değişimi Şekil 4.8 ve Şekil 4.9'da gösterilmiştir. Birinci dalga için şok dalgasının önü artan viskozite parametresi ile artmakta, ikinci dalga için ise azalmaktadır.

Akışkan için Navier-Stokes ve yaklaşık (süreklilik ve momentum) denklemleri kullanılarak elde edilen KdV denkleminin nonlinear katsayıları ( $\mu_1, \bar{\mu}_1$ ) başlangıç şekil değiştirmesine bağlıdır. Her iki yaklaşımda elde edilen bu katsayılar çeşitli germe oranları ( $\lambda_z$  ve  $\lambda_\theta$ ) için hesaplanmış ve sonuçlar Şekil 4.10-4.13 arasında gösterilmiştir. Tüpün eksenel yöndeki hareketi alınmadığı zaman ( $\Gamma = 0$ ), Mooney-Rivlin malzemesi için akışkanın yaklaşık denklemleri ile elde edilen KdV denkleminin lineer denkleme dönüşür yani nonlinear katsayı ( $\bar{\mu}_1$ ) sıfırlanır, oysa kesin denklemler kullanıldığı zaman  $\mu_1 = -0.5$  eşittir. Bu sonuç Demiray [72] ve Hashizume [30] tarafından verilen sonuç ile aynıdır.

Şekil 4.10-4.11'de Mooney-Rivlin malzemesi için, tüpün eksenel yöndeki hareketi dikkate alınarak birinci ve ikinci dalgalar için her iki yaklaşımda elde edilen nonlinear katsayılarının teğetsel germe ve çeşitli eksenel germe oranları ile değişimleri gösterilmektedir. Şekil 4.10'da birinci dalga için, her iki yaklaşımda elde edilen nonlinear katsayısının  $\lambda_\theta$  ile değişimleri oldukça birbirine yakındır ve bu katsayıların sayısal değeri artan eksenel germe ile birlikte azaldığı



gözlemlenmiştir. İkinci dalga için nonlinear katsayılarının aynı parametrelerle değişimleri Şekil 4.11’de gösterilmiştir. Bu şeklin incelenmesinden görüleceği gibi akışkanın yaklaşık denklemleri kullanıldığı zaman bulunan nonlinear katsayısı kesin denklemler kullanıldığı zaman ki değerinden daha fazladır ve bu katsayı artan eksenel germe ile birlikte azalmaktadır.

Biyolojik malzeme için KdV denklemindeki nonlinear katsayılarının aynı parametrelerle değişimi Şekil 4.12 ve 4.13’de gösterilmiştir. Şekil 4.12’de görüldüğü gibi, birinci dalga için her iki yaklaşımda elde edilen nonlinear katsayılarının  $\lambda_\theta$  ile değişimi birbirine çok yakındır ve artan eksenel germe ile artmakta teğetsel germe ile azalmaktadır. İkinci dalga için, akışkanın yaklaşık denklemleri kullanılarak elde edilen nonlinear katsayısının sayısal değeri daha fazladır. Her iki yaklaşımda elde edilen bu katsayılar artan eksenel germe ile azalmakta ve artan teğetsel germe ile artmaktadır. Bu sonuçlar Şekil 4.13’de gösterilmiştir. Tüpün eksenel yöndeki hareketi ihmal edildiği zaman aynı problem Demiray [72] tarafından incelenmiş ve ikinci dalga için bulunan sonuçlara benzer sonuçlar elde etmiştir.

Daha önce ifade edildiği gibi KdV denkleminin katsayıları tüpün öngermesine ve malzemenin mekanik özelliklerine bağlıdır. Bu nedenle yalnız dalga profili bu parametrelere bağlı olarak değişir. Burada da Mooney-Rivlin ve biyolojik malzeme için yalnız dalga profili değişimi tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumunda sayısal olarak hesaplanmış ve sonuçlar şekil 4.14 ve şekil 4.17 arasında grafik olarak gösterilmiştir.

Şekil 4.14 ve şekil 4.16’da Mooney-Rivlin ve biyolojik malzeme için, birinci dalgaya karşı gelen yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ( $\lambda_\theta = 1.3, \lambda_z = 1.4$ ) ve öngerilmesiz ( $\lambda_\theta = 1.0, \lambda_z = 1.0$ ) olması durumundaki değişimi gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden görüldüğü gibi, her iki malzeme için de çevresel germe ve eksenel germenin artan değerleriyle yalnız dalga çanı tabanının daraldığı görülmektedir.

Mooney-Rivlin ve biyolojik malzeme için, ikinci dalgaya karşı gelen yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ( $\lambda_\theta = 1.3, \lambda_z = 1.4$ ) ve öngerilmesiz ( $\lambda_\theta = 1.0, \lambda_z = 1.0$ ) olması durumundaki değişimi ise şekil 4.15 ve şekil 4.17’de gösterilmiştir. Bu şekillerin incelenmesinden görüleceği gibi, Mooney-Rivlin malzeme için çevresel germe ve eksenel germenin artan değerleriyle yalnız dalga çanı tabanının arttığı, biyolojik malzeme için ise azaldığı görülmektedir.

Arterilerde yalnız dalga problemi deneysel olarak da McDonald [10] tarafından incelenmiştir Şekil 4.18. Bu şeklin incelenmesinden görüldüğü gibi, analitik olarak bulunan yalnız dalga profili ile deneysel olarak bulunan yalnız dalga profili arasında büyük bir benzerlik vardır. Bu benzerlik, burada sunulan modelin aort mekaniğinde de uygulanabileceğini ifade etmektedir. Bu olasılık

Yomosa [31] tarafından geniş biçimde tartışıldığı için benzer sözcüklere burada yer verilmeyecektir.

Sınır tabakası yaklaşımı kullanılarak elde edilen V-KdV ve V-B denklemlerine ilerleyen dalga formunda çözüm elde etmek oldukça güçtür. Bu nedenle bu denklemlerden V-KdV denkleminin sol tarafı sonlu farklar sağ tarafı ise ayrıklaştırılarak hesaplanacaktır. Bu kısımda (4.80)<sub>1</sub> ile verilen V-KdV denkleminin

$$U(\xi, 0) = U_0 \text{sech}^2\left[\frac{10b\xi}{\pi} - 10, 0\right], \quad 0 \leq \xi \leq \frac{2\pi}{b} \quad (4.121)$$

başlangıç koşulu ve periyodik sınır koşulu altında çözümü bulunacak ve başlangıç şekil değiştirmesinin dalga profili üzerindeki etkileri araştırılacaktır.

Sonlu farklar şemasının kararlı olup olmaması KdV denklemindeki lineer ve nonlinear katsayılar çok yakından bağlıdır. Bu nedenle aşağıdaki ölçek dönüşümleri tanımlayarak V-KdV denklemi normalize edilebilir

$$V = aU, \quad X = b\xi, \quad \tau = T. \quad (4.122)$$

Bu dönüşümler Viskozite-KdV denkleminde ve başlangıç koşulunda kullanılırsa

$$\frac{\partial V}{\partial T} + 0.1 V \frac{\partial V}{\partial X} + 0.1 \frac{\partial^3 V}{\partial X^3} = d \int_0^\infty \frac{V_X(X + \eta, T)}{\sqrt{\pi\eta}} d\eta, \quad (4.123)$$

$$V(X, 0) = \text{sech}^2(10X/\pi - 10, 0), \quad 0 \leq X \leq 2\pi$$

bulunur. Burada  $a$ ,  $b$ ,  $U_0$

$$a = \bar{\mu}_1 10^{2/3} \bar{\mu}_2^{-1/3}, \quad b = (10\bar{\mu}_2)^{-1/3}, \quad U_0 = a^{-1},$$

$$d = 2\bar{\mu}_4 g^{3/2} \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\right) (10\bar{\mu}_2)^{-2/3}, \quad (4.124)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Şimdi (4.123)<sub>1</sub> denkleminin sağ tarafındaki integrali aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$(DV)_X = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sgn}\eta + 1) |\pi\eta|^{-1/2} V_X(X + \eta, T) d\eta. \quad (4.125)$$

Burada  $(DV)_X$ 'in sonlu Fourier dönüşümüne gereksinin duyulacağından bir



$V(X, T)$  fonksiyonun  $(0, 2\pi)$  aralığındaki sonlu Fourier dönüşümü

$$\bar{V}(k, T) = F[V] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikX} V(X, T) dX \quad (4.126)$$

şeklinde tanımlanır ve (4.125) ifadesinin her iki tarafının sonlu Fourier dönüşümü alınır

$$F[(DV)_X] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikX} \int_{-\infty}^{\infty} (sgn\eta + 1) |\pi\eta|^{-1/2} V_X(X + \eta, \tau) dX d\eta, \quad (4.127)$$

bulunur. (4.127) ifadesinde  $\eta = z$  ve  $X + \eta = y$  dönüşümü yapılır

$$\begin{aligned} F[(DV)_X] &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iky} V_y(y, \tau) dy \int_{-\infty}^{\infty} (sgnz + 1) |\pi z|^{-1/2} e^{ikz} dz \\ &= \frac{ik}{2} F[V] \int_{-\infty}^{\infty} (sgnz + 1) |\pi z|^{-1/2} e^{ikz} dz, \end{aligned} \quad (4.128)$$

bulunur. Yukarıdaki sonuç elde edilirken  $(V(0, T) = V(2\pi, T))$  sınır koşulları kullanılmıştır. (4.128) ifadesindeki integral alınır

$$F[(DV)_X] = \begin{cases} \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2} F[V] (i - 1), & k > 0 \\ \left(\frac{k}{2}\right)^{1/2} F[V] (-i - 1), & k < 0 \end{cases} \quad (4.129)$$

veya daha kapalı formda aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$F[(DV)_X] = \left(\frac{|k|}{2}\right)^{1/2} F[V] (isgnk - 1) \quad (4.130)$$

(4.130) ifadesinin ters Fourier dönüşümü alınır

$$(DV)_X = F^{-1} \left[ \left(\frac{|k|}{2}\right)^{1/2} (isgnk - 1) F[V] \right], \quad (4.131)$$

bulunur. (4.123) denkleminde  $d = 0$  alınır bu denklem KdV denkleminin dönüşür. Bu denklemin sayısal çözümü ilk defa Zabusky-Kruskal [73] tarafından sonlu fark şeması kullanılarak incelenmiştir. Burada (4.123) denkleminin sol

tarafı Zabusky-Kruskal [73] tarafından verilen şema sağ tarafı ise aşağıdaki şekilde ayrıklaştırılarak hesaplanacaktır

$$\begin{aligned}
V_j^{n+1} = & V_j^{n-1} - \frac{(0.1)\Delta T}{3\Delta X}(V_{j+1}^n + V_j^n + V_{j-1}^n)(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \\
& - \frac{(0.1)\Delta T}{(\Delta X)^3}(V_{j+2}^n - 2V_{j+1}^n + 2V_{j-1}^n - V_{j-2}^n) + \frac{2d\Delta T}{N} \\
& \times \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \left\{ \left( \frac{|k|}{2} \right)^{1/2} (isgnk - 1) \sum_{j=0}^{N-1} V_j^n e^{-2\pi ijk/N} \right\} e^{2\pi ijk/N} \quad (4.132)
\end{aligned}$$

Burada  $V_j^n = V(j\Delta X, n\Delta T)$  şeklinde tanımlanmış ve yalnız dalga civarında sayısal çözüm aranmıştır.  $[0, 2\pi]$  aralığı  $\Delta X = 2\pi/N$  olmak üzere  $N$  eşit aralığa bölünmüş ve küçük  $T$  değerlerinde sayısal çözüm aranmıştır.  $j$  ve  $n$  tamsayılar olup  $i$  kompleks birimi göstermektedir. (4.132) ile verilen şema kullanılarak V-KdV denklemi (4.123)<sub>2</sub> başlangıç koşulu altında sayısal çözümü Biyolojik malzeme, birinci ve ikinci dalga için, ilk önce  $d = 0$  olduğu durumda daha sonra ise çeşitli  $\lambda_\theta$  değerlerine göre çözümü verilmiş ve sonuçlar Şekil 4.19 ve Şekil 4.20'de gösterilmiştir. V-KdV denkleminin sağ tarafındaki  $d$  katsayısı başlangıç şekil değiştirmesine ve viskozite parametresine bağlıdır. Burada  $\nu = 0.1$ ,  $\lambda_\theta = 1.6$  ve  $\lambda_\theta = 1.3$  alınarak birinci dalga için, V-KdV denkleminin sayısal çözümü bulunmuş ve  $\lambda_\theta$ 'nın artan değerleriyle birlikte dalga profili genliğinin düştüğü gözlemlenmiştir Şekil 4.19. İkinci dalga için ise  $\lambda_\theta$ 'nın artan değerlerine rağmen dalga profilinde değişme olmadığı gözlemlenmiş ve bu sonuçlar Şekil 4.20'de gösterilmiştir. Bu ise  $\lambda_\theta$ 'nın artan değerlerinde  $d$  katsayısı (dissipatif katsayı) çok küçük olmakta ve denklem KdV denkleminin dönüşmektedir. Şimdi (4.65) ile verilen KdVB denklemi farklı bir başlangıç koşulu altında sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal çözümü elde edilmeye çalışılacaktır. (4.122) ile verilen ölçek dönüşümleri kullanılarak KdVB denkleminin sonlu farklar yöntemi ile çözümü aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned}
V_j^{n+1} = & V_j^{n-1} - \frac{(0.1)\Delta T}{3\Delta Y}(V_{j+1}^n + V_j^n + V_{j-1}^n)(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) \\
& - \frac{(0.1)\Delta T}{(\Delta Y)^3}(V_{j+2}^n - 2V_{j+1}^n + 2V_{j-1}^n - V_{j-2}^n) \\
& - 2d_1 \frac{\Delta T}{(\Delta Y)^2} (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n). \quad (4.137)
\end{aligned}$$

Başlangıç koşulu ise aşağıdaki şekilde alınacaktır

$$V(Y, 0) = 0.5(1 - \tanh(Y/b)), \quad -40 \leq Y \leq 20. \quad (4.138)$$

Burada  $d_1 = \bar{\mu}_3(10\bar{\mu}_2)^{-2/3}$  şeklinde tanımlanmıştır. Mooney-Rivlin malzeme, birinci ve ikinci dalga için, KdVB denklemi (4.138) ile verilen başlangıç koşulu altında sayısal olarak çözülmüş ve sonuçlar Şekil 4.21-4.24'de gösterilmiştir. Sayısal hesaplamalar birinci dalga için dalga profilinin zamanla çok fazla değişmediğini göstermektedir. Şekil 4.21'de birinci dalga,  $T = 1$  ve  $\bar{\nu} = 0.01$  için şok formunun artan teğetsel germe ile dikleştiği gösterilmiştir. Şekil 4.22-4.24'de ikinci dalga için dalga profillerinin zamanla ve çeşitli teğetsel germe ile değişimleri verilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi dalga profili salınımlar yapmakta ve bu salınımlar artan zamanla birlikte  $Y$  boyunca yayılmaktadır.  $\nu$  dissipasyon teriminin katsayısını,  $\mu$  ise dispersiyon teriminin katsayısını göstermek üzere, Johnson [35]  $4\mu \gg \nu^2$  limiti durumunda şok önünün  $\nu = 0.01$  ve  $V(\pm\infty) = 0$  koşulları altında KdV denkleminin yalnız dalgalarına yaklaştığını göstermiştir. Benzer sonuçlar ikinci dalga için Şekil 4.17-4.19'da gözlemlenmiştir. Diğer taraftan birinci dalga için şok önü  $V(-\infty) = 1$  ve  $V(+\infty) = 0$  durumunda Burgers denkleminin ilerleyen dalga çözümüne yaklaştığı gözlemlenmiştir.

## 5. NONLINEER DALGA MODÜLASYONU

### 5.1 Giriş

Bu bölümde içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince nonlinear elastik tüplerde zayıf nonlinear dalgaların genlik modülasyonunun Nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) ile yönetildiği gösterilecektir. Yapılan deneysel çalışmalar, büyük damarların eksenel yönde  $1.5 \sim 1.7$  mertebesinde bir eksenel germeye maruz kaldığını göstermektedir. Bu fizyolojik koşullar dikkate alınarak tüpün düzgün  $P_0$  iç basıncına ve sabit  $\lambda_z$  eksenel germeye maruz kaldığı varsayılacaktır. Kalbin periyodik olarak uyguladığı basınç sonucu oluşan kan akımı sırasında bu statik alan üzerine sonlu ve zamana bağlı yerdeğiştirmelerin süperpoze edildiği varsayılacak ve eksenel yöndeki bağdan dolayı tüpün eksenel yöndeki yer değiştirmesine izin verilmeyecektir. Bu nedenle tüpün radyal yöndeki nonlinear hareket denklemleri ve akışkanın kesin denklemleri kullanılacaktır. NLS denklemindeki lineer ( $p$ ) ve nonlinear ( $q$ ) katsayılarının çarpımlarının işareti düzlem dalga çözümlerinin kararlı olup olmadığını belirleme açısından önemlidir. Bu nedenle akışkanın hem yaklaşık denklemleri hem de kesin denklemleri kullanılarak elde edilen  $pq$  katsayısının başlangıç şekil değiştirmesine ve dalga sayısına göre değişimleri grafik üzerinde gösterilecektir.

### 5.2 İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Elastik Tüplerde Nonlinear Dalga Modülasyonu

Bu kısımda, içi akışkanla dolu nonlinear ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalga modülasyonu indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenecektir. Akışkan viskoz olmayan, sıkışmaz kabul edilecek ve akışkanın kesin denklemleri kullanılacaktır. Burada tüpün eksenel yönde bir hareketi olmadığı varsayılacağından tüp denklemi (2.68) ve  $\nu = 0$  durumunda (2.58)-(2.60) akışkan denklemleri ve sınır koşulu aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\begin{aligned} p|_{x=1+u} = & m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (\beta_1 - \beta_0) u - \alpha_0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - m u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & + (\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) u^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \alpha_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\beta_3 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_0) u^3 + (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_0) u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
& + \frac{1}{2}(-2\alpha_2 + \alpha_1) u \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{3}{2}(\alpha_0 - \gamma_1) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{V_r}{x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad (5.4)$$

Sınır koşulu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = V_r|_{x=1+u}. \quad (5.5)$$

Şimdi aşağıdaki şekilde  $\xi$  ve  $\tau$  yavaş değişkenler tanımlayalım

$$\xi = \varepsilon (z - \lambda t), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \quad (5.6)$$

Burada  $\varepsilon$  ortamın fiziksel özelliğini karakterize eden küçük bir parametre,  $\lambda$  ise grup hızına eşit olduğu gösterilecek olan bir sabit, alan büyüklükleri ise yavaş değişkenler olan  $\xi$ ,  $\tau$  ve hızlı değişkenler olan  $t$  ve  $z$  'in fonksiyonlarıdır. (5.6) kullanılarak türetme operatörleri

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (5.7)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi de alan büyüklüklerinin  $\varepsilon$  cinsinden aşağıdaki gibi asimptotik açılımlara sahip oldukları varsayılacaktır

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(z, t; \xi, \tau), & p &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(z, t, x; \xi, \tau), \\
V_r &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{rn}(z, t, x; \xi, \tau), & V_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_{zn}(z, t, x; \xi, \tau). \quad (5.8)
\end{aligned}$$

(5.7) ile verilen türetme operatörleri ve (5.8) açılımları yukarıdaki (5.1) tüp denkleminde, (5.2)-(5.4) akışkan denklemlerinde ve (5.5) sınır koşulunda yazılır

ve  $\varepsilon$  'un çeşitli kuvvetindeki terimler sıfıra eşitlenirse  $u_n, p_n, V_{rn}$  ve  $V_{zn}$  'leri yöneten bir denklemler hiyerarşisi elde edilir. Bu denklemler  $\varepsilon^3$  'un mertebesine kadar aşağıdaki şekilde verilmiştir

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemler :

$$p|_{x=1} = m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\beta_1 - \beta_0) u_1 - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial V_{r1}}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial V_{z1}}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} + \frac{V_{r1}}{x} + \frac{\partial V_{z1}}{\partial z} = 0. \quad (5.10)$$

Sınır koşulu :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = V_{r1}|_{x=1}. \quad (5.11)$$

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemler :

$$\begin{aligned} \left[ p_2 + u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \right]_{x=1} &= m \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \xi} - u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right) + (\beta_1 - \beta_0) u_2 \\ &+ (\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) u_1^2 - \alpha_0 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi} \right) + (\alpha_0 - \alpha_1) u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \\ &- \frac{1}{2} \alpha_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial V_{r2}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial V_{r1}}{\partial \xi} + V_{r1} \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} + V_{z1} \frac{\partial V_{r1}}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial V_{z2}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} + V_{r1} \frac{\partial V_{z1}}{\partial x} + V_{z1} \frac{\partial V_{z1}}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial V_{r2}}{\partial x} + \frac{V_{r2}}{x} + \frac{\partial V_{z2}}{\partial z} + \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} = 0. \quad (5.15)$$

Sınır koşulu :

$$\left[ V_{r2} + u_1 \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} \right]_{x=1} = \frac{\partial u_2}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \xi}. \quad (5.16)$$

$O(\varepsilon^3)$  mertebesindeki denklemler :

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + p_3 \right]_{x=1} = m \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial \xi} \right. \\
& \left. + \lambda^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} - u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + 2\lambda u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \xi} + u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right] \\
& + (\beta_1 - \beta_0) u_3 + 2(\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) u_1 u_2 + (\beta_3 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_0) u_1^3 \\
& - \alpha_0 \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} - u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - 2u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi} + u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right] \\
& - \alpha_1 \left[ u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + 2u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial \xi} - u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right] + \frac{3}{2}(\alpha_0 - \gamma_1) \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \\
& - 3\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{2}(-2\alpha_2 + \alpha_1) u_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 - \alpha_2 u_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (5.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_{r3}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial V_{r2}}{\partial \xi} + \frac{\partial V_{r1}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}(V_{r1} V_{r2}) + V_{z2} \frac{\partial V_{r1}}{\partial z} + V_{z1} \frac{\partial V_{r2}}{\partial z} \\
& + V_{z1} \frac{\partial V_{r1}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_3}{\partial x} = 0, \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_{z3}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial V_{z2}}{\partial \xi} + \frac{\partial V_{z1}}{\partial \tau} + V_{r1} \frac{\partial V_{z2}}{\partial x} + V_{r2} \frac{\partial V_{z1}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(V_{z1} V_{z2}) \\
& + V_{z1} \frac{\partial V_{z1}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_3}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} = 0, \quad (5.19)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_{r3}}{\partial x} + \frac{V_{r3}}{x} + \frac{\partial V_{z3}}{\partial z} + \frac{\partial V_{z2}}{\partial \xi} = 0. \quad (5.20)$$

Sınır koşulu :

$$\left[ \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 V_{r1}}{\partial x^2} + u_2 \frac{\partial V_{r1}}{\partial x} + u_1 \frac{\partial V_{r2}}{\partial x} + V_{r3} \right]_{x=1} = \frac{\partial u_3}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \quad (5.21)$$

## Alan Denklemlerinin Çözümleri :

$O(\varepsilon)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

(5.9) ve (5.10) ile verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri aşağıdaki formda yazılabilir

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{l=1}^2 U_1^{(l)} \exp(il\phi) + k.e., & p_1 &= \sum_{l=1}^2 P_1^{(l)} \exp(il\phi) + k.e., \quad \phi = \omega t - kz, \\ V_{r1} &= \sum_{l=1}^2 V_{r1}^{(l)} \exp(il\phi) + k.e., & V_{z1} &= \sum_{l=1}^2 V_{z1}^{(l)} \exp(il\phi) + k.e. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Burada  $u_1$ ,  $\xi$  ve  $\tau$  yavaş değişkenlerine,  $V_{r1}$ ,  $V_{z1}$  ve  $P_1$  ise  $\xi$  ve  $\tau$  yavaş değişkenlere ve aynı zamanda  $x$ 'e bağlı genlik fonksiyonlarıdır. Burada k.e. tanımlanan büyüklüklerin kompleks eşleniğini göstermektedir.

Açısal frekansı  $\omega$  ve dalga sayısı  $k$  civarında merkezlenmiş dalgaların nonlinear self modülasyonu ile ilgilendiğimiz için, ilk mertebede ilk harmoniklerin dışında yüksek mertebeden harmoniklerin katsayıları sıfır alınır. Bu durumda (5.22) ile verilen çözümler aşağıdaki şekli alır

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1^{(1)} e^{i\theta} + U_1^{(-1)} e^{-i\theta}, & p_1 &= P_1^{(1)} e^{i\theta} + P_1^{(-1)} e^{-i\theta}, \\ V_{r1} &= V_{r1}^{(1)} e^{i\theta} + V_{r1}^{-1} e^{-i\theta} & V_{z1} &= V_{z1}^{(1)} e^{i\theta} + V_{z1}^{-1} e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

(5.23) ile verilen çözümler (5.9) ve (5.10)'da yerine konur  $\exp[i(\omega t - kz)]$  faktörü atılırsa geri kalan diferansiyel denklem aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial^2 P_1^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial x} - k^2 P_1^{(1)} = 0. \quad (5.24)$$

(5.24) Bessel tipi bir diferansiyel denklem olup  $x = 0$  da sonlu kalan çözümü  $I_0(kx)$  modifiye Bessel fonksiyonu cinsinden

$$P_1^{(1)} = A_1 I_0(kx) \quad (5.25)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $A_1$ ,  $\xi$ ,  $\tau$  değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olup sınır koşullarından tayin edilmesi gerekir. Bu çözüm (5.10) ve (5.11) sınır koşulunda yerine konacak olursa diğer alan büyüklükleri aşağıdaki şekilde bulunabilir

$$U_1 = U(\xi, \tau), \quad V_{r1}^{(1)} = i\omega g_1(kx)U, \quad V_{z1}^{(1)} = \omega g_0(kx)U,$$



$$P_1^{(1)} = \frac{\omega^2}{k} g_0(kx) U. \quad (5.26)$$

Burada uygunluğu nedeniyle aşağıdaki tanımlar yapılmıştır

$$g_n(kx) = \frac{I_n(kx)}{I_1(k)}, \quad A_1 = \frac{\omega^2}{k I_1(k)} U, \quad (n = 0, 1). \quad (5.27)$$

Burada  $I_n(kx)$   $n$ .’ mertebeden modifiye Bessel fonksiyonu,  $U(\xi, \tau)$  ise  $\xi$  ve  $\tau$  yavaş değişkenlerine bağlı bilinmeyen bir fonksiyon olup, yönetici denklem daha sonraki mertebelerdeki denklemlerin çözümü sonucu elde edilecektir.

(5.26) ile verilen çözümler tüpe ait olan (5.9) alan denkleminde yerine konursa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$\omega^2 = \frac{(\beta_1 - \beta_0)k^2 + \alpha_0 k^4}{(2f + mk^2)}, \quad f(k) = \frac{k I_0(k)}{2 I_1(k)}. \quad (5.28)$$

Dalga enerjisinin yayılma hızını gösteren grup hızı ise

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{(4f^2 - k^2)\omega^2 + 2\alpha_0 k^4}{2\omega k(2f + mk^2)}, \quad (5.29)$$

şeklinde bulunur.

$O(\varepsilon^2)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

(5.26) ile verilen çözümler (5.12) ve (5.14) denklemlerinde ve (5.15) sınır koşullarında yerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\begin{aligned} p_2|_{x=1} &= m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + [2m\omega^2 + 2(\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) + (-2\alpha_0 + \alpha_1)k^2 - 2\omega^2]|U|^2 \\ &+ \left[ m\omega^2 + (\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) + \frac{1}{2} (3\alpha_1 - 2\alpha_0) k^2 - \omega^2 \right] U^2 e^{2i\phi} \\ &+ (\beta_1 - \beta_0) u_2 - \alpha_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + 2i(\alpha_0 k - m\omega\lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\phi} + k.e., \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{r2}}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - i\omega\lambda g_1(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\phi} + \frac{\omega^2 g_1^2(kx)}{x} U^2 e^{2i\phi} \\ + 2\omega^2 \left[ 2k g_0(kx)g_1(kx) - \frac{g_1^2(kx)}{x} \right] |U|^2 + k.e. = 0, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{z2}}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial z} + \omega \left( \frac{\omega}{k} - \lambda \right) g_0(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\phi} \\ + i \omega^2 k (g_1^2(kx) - g_0^2(kx)) U^2 e^{2i\phi} + k.e. = 0, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial V_{r2}}{\partial x} + \frac{V_{r2}}{x} + \frac{\partial V_{z2}}{\partial z} + \omega g_0(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\phi} + k.e. = 0, \quad (5.33)$$

ve sınır koşulu

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - V_{r2}|_{x=1} = \lambda \frac{\partial U}{\partial \xi} e^{i\phi} + i\omega[kg_0(k) - 1] U^2 e^{2i\phi} + k.e. \quad (5.34)$$

bulunur. Yukarıdaki ifadelerde  $|U|^2 = UU^*$  olup  $U^*$ ,  $U$ 'nun kompleks eşleniğini göstermektedir. (5.30) ve (5.33) diferansiyel denklemlerinin çözümlerini

$$\begin{aligned} V_{r2} &= V_{r2}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 V_{r2}^{(l)}(x; \xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \\ V_{z2} &= V_{z2}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 V_{z2}^{(l)}(x; \xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \\ p_2 &= p_2^{(0)} + \sum_{l=1}^2 P_2^{(l)}(x; \xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \\ u_2 &= u_2^{(0)} + \sum_{l=1}^2 U_2^{(l)}(\xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \end{aligned} \quad (5.35)$$

formunda arayalım. (5.35) ile verilen çözümler (5.30)-(5.33) denklemlerinde ve (5.34) sınır koşulunda yerine yazılırsa sırasıyla  $l = 0$ ,  $l = 1$  ve  $l = 2$  ( $e^{il\phi}$ ) modlarına karşı gelen diferansiyel denklemler elde edilir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde verilir :

$l = 0$  denklemleri :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial x} + 2\omega^2 \left[ 2kg_0(kx)g_1(kx) - \frac{g_1^2(kx)}{x} \right] |U|^2 = 0, \\ \frac{\partial V_{r2}^{(0)}}{\partial x} + \frac{V_{r2}^{(0)}}{x} = 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$P_2^{(0)}|_{x=1} = (\beta_1 - \beta_0)U_2^{(0)} + \left[2\beta_2 + \alpha_1 k^2 - \frac{4f\omega^2}{k^2} - 2\omega^2\right]|U|^2. \quad (5.37)$$

ve sınır koşulu

$$V_{r2}^{(0)}|_{x=1} = 0. \quad (5.38)$$

$l = 1$  denklemleri :

$$i\omega V_{r2}^{(1)} + \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial x} - i\omega \lambda g_1(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (5.39)$$

$$i\omega V_{z2}^{(1)} - ikP_2^{(1)} + g_0(kx)\omega \left(\frac{\omega}{k} - \lambda\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial V_{r2}^{(1)}}{\partial x} + \frac{V_{r2}^{(1)}}{x} - ikV_{z2}^{(1)} + \omega g_0(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0, \quad (5.41)$$

$$P_2^{(1)}|_{x=1} = \frac{2f\omega^2}{k^2}U_2^{(1)} + 2i(\alpha_0 k - m\omega\lambda) \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (5.42)$$

ve sınır koşulu

$$i\omega U_2^{(1)} - V_{r2}^{(1)}|_{x=1} = \lambda \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (5.43)$$

$l = 2$  denklemleri :

$$2i\omega V_{r2}^{(2)} + \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial x} + g_1^2(kx)\frac{\omega^2}{x}U^2 = 0, \quad (5.44)$$

$$2\omega V_{z2}^{(2)} - 2kP_2^{(2)} + \omega^2 k[g_1^2(kx) - g_0^2(kx)]U^2 = 0, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial V_{r2}^{(2)}}{\partial x} + \frac{V_{r2}^{(2)}}{x} - 2ikV_{z2}^{(2)} = 0, \quad (5.46)$$

$$P_2^{(2)}|_{x=1} = [-4m\omega^2 + (\beta_1 - \beta_0) + 4\alpha_0 k^2] U_2^{(2)} + \left[\beta_2 + \frac{3}{2}\alpha_1 k^2 - \frac{2f\omega^2}{k^2} - \omega^2\right] U^2, \quad (5.47)$$

ve sınır koşulu

$$2i\omega U_2^{(2)} - V_{r2}^{(2)} \Big|_{x=1} = i\omega(2f-1)U^2. \quad (5.48)$$

$l = 0$  moduna karşı gelen diferansiyel denklemler çözülürse, bu denklemlerin çözümleri

$$V_{r2}^{(0)} = 0, \quad P_2^{(0)} = F(\xi, \tau) - \omega^2 [g_1^2(kx) + g_0^2(kx)] |U|^2 \quad (5.49)$$

şeklinde bulunur. (4.49)<sub>2</sub> ile verilen  $P_2^{(0)}$  (5.37) denkleminde yerine konursa  $U_2^{(0)}$  çözümü aşağıdaki şekilde bulunur

$$U_2^{(0)} = \frac{|U|^2}{(\beta_1 - \beta_0)} \left[ \omega^2 \left( 1 + \frac{4f}{k^2} - \frac{4f^2}{k^2} \right) - 2\beta_2 - \alpha_1 k^2 \right] + \frac{F(\xi, \tau)}{(\beta_1 - \beta_0)}. \quad (5.50)$$

(5.50) ifadesinin geçerli olabilmesi için  $\beta_1 - \beta_0 \neq 0$  olması gerekir.  $\beta_1 - \beta_0 = 0$  olma hali daha sonra tartışılacaktır.

$l = 1$  moduna karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulabilmek için (5.39) ve (5.40) denklemleri arasında  $V_{r2}^{(1)}$  ve  $V_{z2}^{(1)}$  elimine edilecek olursa  $P_2^{(1)}$  yöneten diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\frac{\partial^2 P_2^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial x} - k^2 P_2^{(1)} = 2i\omega^2 g_0(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (5.51)$$

Bu denklemin genel çözümü

$$P_2^{(1)} = \frac{\omega^2}{k} g_0(kx) V + \frac{i\omega^2}{k} x g_1(kx) \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (5.52)$$

şeklinde bulunur. Burada  $V$ ,  $\xi$  ve  $\tau$  değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. (5.52) ile verilen çözüm (5.39)-(5.40) denklemlerinde ve sınır koşulunda yazılırsa diğer alan büyüklükleri

$$V_{r2}^{(1)} = i\omega g_1(kx) V + \left[ \lambda g_1(kx) - \omega x g_0(kx) \right] \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$V_{z2}^{(1)} = \omega g_0(kx) V + i \left[ \omega x g_1(kx) + \left( \frac{\omega}{k} - \lambda \right) g_0(kx) \right] \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$U_2^{(1)} = V(\xi, \tau) + 2i \left[ \frac{f}{k} - \frac{\lambda}{\omega} \right] \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (5.53)$$

şeklinde elde edilir. Bu çözümler (5.42) 'de yerine konursa

$$\left[ \frac{-i\omega^2}{k} + \frac{4if\omega^2}{k^2} \left( \frac{f}{k} - \frac{\lambda}{\omega} \right) + 2i(\alpha_0 k - m\omega\lambda) \right] \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad (5.54)$$

ifadesi elde edilir. (5.54) denkleminde  $\partial U / \partial \xi \neq 0$  olması için köşeli parantezin içi sıfır olmalıdır. Bu ise bizi

$$\lambda = v_g \quad (5.55)$$

olması gerektiği sonucuna götürür.

$l = 2$  moduna karşılık gelen diferansiyel denklemlerin çözümleri bulabilmek için (5.44) ve (5.46) denklemlerini kullanarak  $P_2^{(2)}$  yöneten diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_2^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial P_2^{(2)}}{\partial x} - 4k^2 P_2^{(2)} = 2\omega^2 \left[ \frac{g_1^2(kx)}{x^2} - \frac{kg_1(kx)g_0(kx)}{x} \right. \\ \left. - k^2 (g_1^2(kx) - g_0^2(kx)) \right] U^2 \end{aligned} \quad (5.56)$$

şeklinde bulunur. Bu denklemin homojen ve özel çözümü

$$P_2^{(2)} = \frac{\omega^2}{k} C f_0(2kx) + \frac{\omega^2}{2} \left[ g_1^2(kx) - g_0^2(kx) \right] U^2, \quad (5.57)$$

şeklinde verilir. Bu çözüm kullanılarak diğer alan büyüklükleri ise

$$V_{r2}^{(2)} = i\omega C f_1(2kx), \quad V_{z2}^{(2)} = \omega C f_0(2kx). \quad (5.58)$$

şeklinde bulunur. Burada  $C(\xi, \tau)$  yavaş değişkenlere bağlı diğer bir fonksiyon olup,  $f_i(2kx)$  ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$f_i(2kx) = \frac{I_i(2kx)}{I_1(2k)}, \quad (i = 0, 1). \quad (5.59)$$

(5.58) ile verilen çözümler (5.48) sınır koşulunda ve (5.47) denkleminde yerine konursa  $C(\xi, \tau)$  fonksiyonu ve  $U_2^{(2)}$  çözümü aşağıdaki şekilde bulunur

$$C = 2U_2^{(2)} + (1 - 2f)U^2$$

$$U_2^{(2)} = \left\{ \omega^2 \left( \frac{3}{2} - \frac{2f^2}{k^2} \right) + \frac{\omega^2}{k} (1 - 2f) f_0(2k) + \frac{2f\omega^2}{k^2} - \beta_2 - \frac{3}{2} \alpha_1 k^2 \right\} \\ \times \left[ 2f \frac{\omega^2}{k^2} + 3(\alpha_0 k^2 - m\omega^2) - \frac{2\omega^2}{k} f_0(2k) \right]^{-1} U^2. \quad (5.60)$$

$O(\epsilon^3)$  mertebesindeki denklemlerin çözümleri :

$O(\epsilon^2)$  mertebesinde olduğu gibi (5.17)-(5.20) diferansiyel denklemlerinin çözümleri

$$u_3 = U_3^{(0)} + \sum_{l=1}^3 U_3^{(l)}(\xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \\ V_{r3} = V_{r3}^{(0)} + \sum_{l=1}^3 V_{r3}^{(l)}(x; \xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \\ V_{z3} = V_{z3}^{(0)} + \sum_{l=1}^3 V_{z3}^{(l)}(x; \xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e., \\ p_3 = P_3^{(0)} + \sum_{l=1}^3 P_3^{(l)}(x; \xi, \tau) \exp(il\phi) + k.e. \quad (5.61)$$

şeklinde arayalım. Burada  $U_3^{(0)}, \dots, P_3^{(0)}$   $\xi$  ve  $\tau$  yavaş değişkenlerin bir fonksiyonlarıdır. (5.61) ile verilen açılımlar (5.17)-(5.20) diferansiyel denklemlerinde yerine yazılır ve bir önceki mertebede olduğu gibi  $l = 0$  ve  $l = 1$  modlarına karşı gelen diferansiyel denklemler elde edilebilir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde verilir :

$l = 0$  denklemler :

$$-v_g \frac{\partial V_{z2}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \xi} + \omega^2 [g_0^2(kx) + g_1^2(kx)] \frac{\partial}{\partial \xi} |U|^2 = 0 \\ \frac{\partial V_{r3}^{(0)}}{\partial x} + \frac{V_{r3}^{(0)}}{x} + \frac{\partial V_{z2}^{(0)}}{\partial \xi} = 0 \quad (5.62)$$

ve sınır koşulu

$$-v_g \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \xi} = V_{r3}^{(0)}|_{x=1} + \left[ \frac{4\omega f}{k} (f - 1) - 2fv_g + v_g - \omega k \right] \frac{\partial}{\partial \xi} |U|^2. \quad (5.63)$$

$l = 1$  denklemler :

$$\begin{aligned}
& i\omega V_{r3}^{(1)} + \frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial x} - v_g \frac{\partial V_{r2}^{(1)}}{\partial \xi} + i\omega g_1(kx) \frac{\partial U}{\partial \tau} \\
& - i\omega U^* \frac{\partial}{\partial x} \left[ g_1(kx) V_{r2}^{(2)} \right] + k\omega g_1(kx) (V_{z2}^{(0)} U + V_{z2}^{(2)} U^*) \\
& - 2i\omega k g_0(kx) V_{r2}^{(2)} U^* = 0
\end{aligned} \tag{5.64}$$

$$\begin{aligned}
& i\omega V_{z3}^{(1)} - ik P_3^{(1)} - v_g \frac{\partial V_{z2}^{(1)}}{\partial \xi} + \omega g_0(kx) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \omega k g_1(kx) V_{r2}^{(2)} U^* \\
& + i\omega g_1(kx) \left[ \frac{\partial V_{z2}^{(0)}}{\partial x} U - U^* \frac{\partial V_{z2}^{(2)}}{\partial x} \right] + \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \xi} \\
& - i\omega k g_0(kx) [V_{z2}^{(0)} U + V_{z2}^{(2)} U^*] = 0,
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\frac{\partial V_{r3}^{(1)}}{\partial x} + \frac{V_{r3}^{(1)}}{x} - ik V_{z3}^{(1)} + \frac{\partial V_{z2}^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
P_3^{(1)}|_{x=1} &= \frac{2f\omega^2}{k^2} U_3^{(1)} + (mv_g^2 - \alpha_0) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2im\omega \frac{\partial U}{\partial \tau} \\
&+ \left[ -2f \frac{\omega^2}{k^2} + \alpha_1 k^2 + 2\beta_2 + (\beta_0 - \beta_1) - \omega^2 \right] U_2^{(0)} U \\
&+ [5m\omega^2 - (5\alpha_0 - 3\alpha_1)k^2 + 2(\beta_2 + \beta_0 - \beta_1) - 5\omega^2] U_2^{(2)} U^* \\
&+ \left[ -3m\omega^2 + \frac{1}{2}(6\alpha_0 - 5\alpha_1 + 4\alpha_2)k^2 - \frac{3}{2}(\alpha_0 - \gamma_1)k^4 \right. \\
&\left. + 3(\beta_3 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_0) - \omega^2 \left( \frac{3}{2} - 9f \right) \right] |U|^2 U \\
&+ 2i(\alpha_0 k - m\omega v_g) \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi},
\end{aligned} \tag{5.67}$$

ve sınır koşulu

$$\begin{aligned}
i\omega U_3^{(1)} - V_{r3}^{(1)} \Big|_{x=1} &= i\omega \left[ \frac{k^2}{2} + f + 2kf_0(2k) - 4kf f_0(2k) \right] |U|^2 U \\
&+ i\omega(2f-1)U_2^{(0)}U + i\omega[4kf_0(2k) - 1 - 2f] U_2^{(2)}U^* \\
&+ v_g \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \tau}
\end{aligned} \tag{5.68}$$

(5.49)<sub>2</sub> ile verilen  $P_2^{(0)}$  çözümü (5.62)<sub>1</sub> diferansiyel denkleminde yerine konursa

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - v_g \frac{\partial V_{z2}^{(0)}}{\partial \xi} = 0, \tag{5.69}$$

bulunur. Bu denklemin çözümü

$$V_{z2}^{(0)} = \frac{F(\xi, \tau)}{v_g}, \tag{5.70}$$

şeklinde verilir. Bu çözüm (5.62)<sub>2</sub> ve (5.63) sınır koşulunda yerine konursa

$$V_{r3}^{(0)} = -\frac{1}{2v_g} \frac{\partial F}{\partial \xi} x, \tag{5.71}$$

$$U_2^{(0)} = \frac{F}{2v_g^2} + \left[ \frac{4\omega f}{v_g k} (1-f) + 2f - 1 + \frac{\omega k}{v_g} \right] |U|^2, \tag{5.72}$$

bulunur. (5.50) ile verilen  $U_2^{(0)}$  ifadesi (5.72) denkleminde karşılaştırılacak olursa  $F(\xi, \tau)$  fonksiyonu

$$\begin{aligned}
F = -\frac{|U|^2}{(2v_g^2 + \beta_0 - \beta_1)} &\left\{ 2v_g^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{4f}{k^2} - \frac{4f^2}{k^2} \right) - 4\beta_2 v_g^2 - 2\alpha_1 k^2 v_g^2 \right. \\
&\left. + (\beta_1 - \beta_0) \left[ \frac{8\omega f v_g}{k} (f-1) - 4f v_g^2 + 2v_g^2 - 2\omega v_g k \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.73}$$

şeklinde bulunur. (5.64)-(5.65) diferansiyel denklemlerinden  $V_{r3}^{(1)}$  ve  $V_{z3}^{(1)}$  çekilip (5.66) denkleminde yerine konursa  $P_3^{(1)}$  yöneten diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde bulunur



$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 P_3^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial P_3^{(1)}}{\partial x} - k^2 P_3^{(1)} = \left[ \frac{-\omega^2}{k} g_0(kx) - 2\omega^2 x g_1(kx) \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\
& - \omega^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - k^2 \right] (f_1(2kx)g_1(kx) + f_0(2kx)g_0(kx)) CU^* \\
& + 2i\omega^2 g_0(kx) \frac{\partial V}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned}
P_3^{(1)} &= A_3 g_0(kx) + \left[ -\frac{\omega^2 x^2}{2k} g_0(kx) + \frac{\omega^2 x}{2k^2} g_1(kx) \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\
& - \omega^2 [f_0(2kx)g_0(kx) + f_1(2kx)g_1(kx)] C U^* \\
& + \frac{ix\omega^2}{k} g_1(kx) \frac{\partial V}{\partial \xi}
\end{aligned} \tag{5.75}$$

şeklinde bulunur. Burada  $A_3$ ,  $\xi$  ve  $\tau$  değişkenlerine bağlı bir fonksiyondur. Bu çözüm (5.64) ve (5.65) denklemlerinde yazılırsa  $V_{r3}^{(1)}$  ve  $V_{z3}^{(1)}$  büyüklükleri aşağıdaki şekilde elde edilir

$$\begin{aligned}
V_{r3}^{(1)} &= \frac{ik}{\omega} g_1(kx) A_3 + i \left[ \left( v_g - \frac{\omega}{2k} \right) x g_0(kx) - \left( \frac{w}{2} x^2 + \frac{v_g^2}{\omega} \right) g_1(kx) \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{\omega^2}{k} \left[ v_g g_1(kx) - x\omega g_0(kx) \right] \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{ikFU}{v_g} g_1(kx) - g_1(kx) \frac{\partial U}{\partial \tau} \\
V_{z3}^{(1)} &= \frac{k}{\omega} g_0(kx) A_3 + \left[ \left( v_g + \frac{\omega}{2k} \right) x g_1(kx) + \left( -\frac{w}{2} x^2 - \frac{v_g^2}{\omega} + \frac{v_g}{k} \right) g_0(kx) \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{kFU}{v_g} g_0(kx) + i g_0(kx) \frac{\partial U}{\partial \tau} + i \left[ \omega x f_1(kx) + \left( \frac{\omega}{k} - v_g \right) f_0(kx) \right] \frac{\partial V}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{5.76}$$

(5.76)<sub>2</sub> ile verilen  $V_{r3}^{(1)}$  ifadesi (5.68) sınır koşulunda yazılırsa  $U_3^{(1)}$  aşağıdaki şekilde bulunur

$$U_3^{(1)} = \frac{k}{\omega^2} A_3 + \frac{kFU}{\omega v_g} + \frac{2i}{\omega} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \left[ \frac{4v_g f}{\omega k} - \frac{f}{k^2} - \frac{3v_g^2}{\omega^2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{k^2}{2} + f + 2kf_0(2k) - 4kf f_0(2k) \right] |U|^2 U \\
& + (2f - 1)U_2^{(0)} U + [4kf_0(2k) - 1 - 2f] U_2^{(2)} U^* \\
& + \left[ 2i \frac{f}{k} - \frac{v_g}{\omega} \right] \frac{\partial V}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{5.77}$$

$U_3^{(1)}$  ve  $P_3^{(1)}$  ifadeleri (5.67) denkleminde yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilir

$$\begin{aligned}
& \left[ mv_g^2 - \alpha_0 + \frac{8f^2 v_g}{\omega k^3} - \frac{2f^2 \omega^2}{k^4} - \frac{6v_g^2 f}{k^2} - 4(\alpha_0 k - m\omega v_g) \left( \frac{f}{k} - \frac{v_g}{\omega} \right) - \frac{\omega^2}{2k^2} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \\
& + \frac{2i\omega}{k} (2f + mk^2) \frac{\partial U}{\partial \tau} + \left[ \frac{4f\omega^2}{k^2} (f - 1) + \alpha_1 k^2 + 2\beta_2 + \beta_0 - \beta_1 - \omega^2 \right] U_2^{(0)} U \\
& + \left[ \frac{12ff_0\omega^2}{k} - \frac{4f^2\omega^2}{k^2} + 3(m\omega^2 - \alpha_0 k^2 - \omega^2) + 2\beta_2 + 3\alpha_1 k^2 - \frac{6f\omega^2}{k^2} \right] U_2^{(2)} U^* \\
& + \left[ \frac{8\omega^2 f f_0}{k} - \frac{12f^2 f_0 \omega^2}{k} + \frac{2f^2 \omega^2}{k^2} + 8f\omega^2 - \frac{\omega^2}{2} - 3\omega^2 m + 3(\beta_1 - \beta_0) \right. \\
& \left. + 3\alpha_0 k^2 + 3(\beta_3 - \beta_2) + \frac{1}{2}(-5\alpha_1 + 4\alpha_2)k^2 - \frac{3}{2}(\alpha_0 - \gamma_1)k^4 \right] |U|^2 U + \frac{2f\omega}{v_g k} F U \\
& + \left[ \frac{-i\omega^2}{k} + \frac{4if\omega^2}{k^2} \left( \frac{f}{k} - \frac{v_g}{\omega} \right) + 2i(\alpha_0 k - m\omega v_g) \right] \frac{\partial V}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

(5.78) denkleminde  $\partial V / \partial \xi$ 'nin katsayısının  $v_g$  olduğu dikkate alınır aşağıdaki Nonlinear Schrödinger denklemi elde edilir

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + p \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + q |U|^2 U = 0. \tag{5.79}$$

Burada  $p$  ve  $q$  katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

$$\begin{aligned}
p = \frac{1}{2\omega k(2f + mk^2)} & \left\{ v_g^2 k(2f + mk^2) + 2\omega v_g(k^2 - 4f^2) - \omega v_g(2f + mk^2) \right. \\
& \left. - \omega^2 k - \frac{2f\omega^2}{k}(k^2 - 4f^2) \right\},
\end{aligned} \tag{5.80}$$

$$\begin{aligned}
q = & \frac{1}{2\omega(2f + mk^2)} \left\{ \left[ -\frac{k^2}{2} + 8fk^2 + 6f + 2f^2 - 12kf^2f_0(2k) + 6ff_0(2k) \right] \omega^2 \right. \\
& + \frac{1}{2}(-5\alpha_1 + 4\alpha_2)k^4 + 3(\beta_3 - \beta_2)k^2 - \frac{3}{2}(\alpha_0 - \gamma_1)k^6 \\
& + \left[ \frac{12ff_0(2k)\omega^2}{k} - \frac{4f^2\omega^2}{k^2} - \frac{6f\omega^2}{k^2} + 3(m\omega^2 - \alpha_0k^2 - \omega^2) + 3\alpha_1k^2 + 2\beta_2 \right] \\
& \times \left[ \omega^2 \left( \frac{3k^2}{2} - 2f^2 \right) + \omega^2k(1 - 2f)f_0(2k) + 2f\omega^2 - \beta_2k^2 - \frac{3}{2}\alpha_1k^4 \right] \\
& \times \left[ \frac{2f\omega^2}{k^2} + 3(\alpha_0k^2 - m\omega^2) - \frac{2\omega^2f_0(2k)}{k} \right]^{-1} + [4f\omega^2(f - 1) + \alpha_1k^4 \\
& + 2\beta_2k^2 + (\beta_0 - \beta_1)k^2 - \omega^2k^2] \left[ \frac{4f\omega(1 - f)}{v_gk} + 2f - 1 + \frac{\omega k}{v_g} \right] \\
& - \frac{1}{2v_g^2 + \beta_0 - \beta_1} \left\{ [4f\omega^2(f - 1) + 4f\omega kv_g + \alpha_1k^4 + 2\beta_2k^2 \right. \\
& + (\beta_0 - \beta_1)k^2 - \omega^2k^2] \left[ \omega^2 \left( 1 + \frac{4f}{k^2} - \frac{4f^2}{k^2} \right) - 2\beta_2 - \alpha_1k^2 + (\beta_1 - \beta_0)(1 - 2f) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\omega k}{v_g}(\beta_1 - \beta_0) + \frac{4f\omega(f - 1)}{v_gk}(\beta_1 - \beta_0) \right] \right\} \}. \tag{5.81}
\end{aligned}$$

(5.50) denkleminde  $\beta_1 - \beta_0 = 0$  olduğunda  $F(\xi, \tau)$ ,  $U_2^{(0)}$  ve  $U_2^{(2)}$  ifadeleri aşağıdaki şekli alır

$$\begin{aligned}
F(\xi, \tau) &= \left[ 2\beta_2 + \alpha_1k^2 - \omega^2 \left( 1 + \frac{4f}{k^2} - \frac{4f^2}{k^2} \right) \right] \\
U_2^{(0)} &= \frac{F}{2v_g^2} + \left[ \frac{4\omega f}{v_gk}(1 - f) + 2f - 1 + \frac{\omega k}{v_g} \right] |U|^2 \\
U_2^{(2)} &= \left[ \frac{-2\omega^2f_0}{k} + 4m\omega^2 - 4\alpha_0k^2 \right]^{-1} \\
&\times \left[ 2\beta_2 + \alpha_1k^2 - \omega^2 - \frac{4\omega^2f}{k^2} + \frac{\omega^2}{k}f_0(1 - 2f) \right] U^2 \tag{5.82}
\end{aligned}$$

Bu ifadeler (5.78)'de yazılırsa  $\beta_1 - \beta_0 = 0$  durumunda Nonlinear Schrödinger denkleminin nonlinear katsayısı ( $q$ ) bulunabilir.

NLS denklemi dispersif ortamlarda bir boyutlu düzlem monokromatik dalgaların self modülasyonu karakterize eden bir denklem olarak ortaya çıkar. NLS denkleminin kararlı çözümleri genellikle Jacobiyeen elliptik fonksiyonlarla ifade edilir ve özel durumlarda sabit genlikli düzlem dalga, faz sıçrama, karanlık ve parlak zarf solitonları içerir.  $p q > 0$  veya  $p q < 0$  olma durumu verilen bir başlangıç datasının NLS denklemi ile yönetilen asimptotik alanda uzun zaman sonucunda nasıl ilerleyeceğini belirlemesi açısından önemlidir.

Şimdi Nonlineer Schrödinger (NLS) denkleminin ilerleyen dalga çözümlerini aşağıdaki şekilde arayalım

$$U(\xi, \tau) = V(\eta) \exp[i(K\xi - \Omega\tau)], \quad \eta = \xi - c\tau, \quad c = \text{sabit.} \quad (5.83)$$

Burada  $K$  ve  $\Omega$  sabit sayılar olup  $V(\eta)$  reel bir fonksiyondur. (5.83) çözümü NLS denkleminde yerine konursa

$$p \frac{d^2 V}{d\eta^2} + i(2Kp - c) \frac{dV}{d\eta} + (\Omega - K^2 p)V + qV^3 = 0 \quad (5.84)$$

bulunur. Eğer  $c$  ve  $\Omega$  ifadesi

$$c = 2Kp \quad \Omega = K^2 p - q \frac{A^2}{2} \quad (5.85)$$

şeklinde seçilirse (5.84) denklemindeki ikinci terim düşer ve

$$\frac{d^2 V}{d\eta^2} - \frac{qA^2}{2p} V + \frac{q}{p} V^3 = 0 \quad (5.86)$$

şeklini alır. Bu denklem tipik knoidal dalga denklemdir. (5.86) diferansiyel denklem  $dV/d\eta$  ile çarpılır ve integre edilirse

$$\left( \frac{dV}{d\eta} \right)^2 = C + \frac{q}{2p} A^2 V^2 - \frac{q}{2p} V^4 \quad (5.87)$$

bulunur. Bu denklemin çözümü  $c = 2Kp$  varsayımı altında Jacobiyeen eliptik fonksiyonlar cinsinden bulunabilir. Burada bazı özel durumlar için NLS denkleminin çözümleri verilecektir.

(i) Eğer  $pq > 0$  için  $|\eta| \rightarrow \infty$  iken  $V \rightarrow 0$  ve  $dV/d\eta \rightarrow 0$  olduğunu kabul edersek  $C = 0$  bulunur. Bu durumda (5.87) denklemi

$$\frac{dV}{d\eta} = \left( \frac{q}{2p} \right)^{1/2} V (A^2 - V^2)^{1/2} \quad (5.88)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü

$$V(\eta) = A \operatorname{sech} \left[ \left( \frac{q}{2p} \right)^{1/2} A \eta \right] \quad (5.89)$$

şeklinde bulunur.

(ii) Eğer  $pq < 0$  için  $\eta \rightarrow \infty$  iken  $V \rightarrow V_0$  ve  $dV/d\eta \rightarrow 0$  olduğunu kabul edersek  $C = -qV_0^4/2p$  olarak bulunur. Burada  $\Omega = pK^2 - qV_0^2$  olarak alınmıştır. Bu durumda (5.84) denklemi

$$\left( \frac{dV}{d\eta} \right)^2 = \left( -\frac{q}{2p} \right)^{1/2} (V_0^2 - V^2)^2 \quad (5.90)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü ise

$$V(\eta) = V_0 \tanh \left[ \left( -\frac{q}{2p} \right)^{1/2} V_0 \eta \right] \quad (5.91)$$

şeklinde verilir. (5.89) ve (5.90) çözümleri sırasıyla zarf yalnız (solitary) dalga çözümüne ve faz sıçramasına karşı gelmektedir.

(iii) Eğer  $|U|$  sonsuzda  $U_0$  sabitine yaklaşırsa Nonlineer Schrödinger denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde verilir

$$U(\xi, \tau) = U_0 \exp[i(K\xi - \Omega\tau)]. \quad (5.92)$$

#### *Düzlem Dalga Çözümlerinin Kararlılığı :*

Burada NLS denkleminin düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlı olup olmadığı incelenenektir. NLS denkleminin çözümü  $\rho(\xi, \tau)$  genliği ve  $\theta(\xi, \tau)$  fazı göstermek üzere

$$u(\xi, \tau) = \rho(\xi, \tau) \exp[i\theta(\xi, \tau)], \quad (5.93)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çözüm NLS denkleminde yazılır, reel ve imajiner kısımlar ayrılacak olursa aşağıdaki şekilde kuple nonlineer diferansiyel denklemler elde edilir

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + p \left[ \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] = 0$$

$$\rho \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - p \left[ \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} - \rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \right] - \frac{q}{4} \rho^3 = 0. \quad (5.94)$$

$\rho$  ve  $\theta$  fonksiyonları  $\rho = \rho_0$  ve  $\theta = \theta_0$  denge konumu civarında aşağıdaki şekilde seriye açılabilir

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots \\ \theta &= \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \end{aligned} \quad (5.95)$$

(5.95) açılımları (5.94) denklemlerinde yerine konur ve lineerleştirme yapılırsa  $\rho_1$  ve  $\theta_1$  için aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau} + p \rho_0 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} = 0, \quad (5.96)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} - p \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial \xi^2} - \frac{3q}{4} \rho_0^2 \rho_1 = 0. \quad (5.97)$$

(5.96) ve (5.97) denklem sisteminin çözümleri aşağıdaki şekilde düzlem dalga çözümleri cinsinden aranacaktır

$$(\rho_1, \theta_1) = (A, B) \exp [i(K\xi - \Omega\tau)]. \quad (5.98)$$

Bu çözümler (5.96) ve (5.97) denklem sisteminde yerine konur ve sıfırdan farklı olma koşulu kullanılırsa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$\Omega^2 = p^2 K^4 - \frac{3}{4} p q \rho_0^2 K^2. \quad (5.99)$$

(5.99) ifadesi yeniden düzenlenecek olursa

$$\Omega = (-pq)^{1/2} \left( \frac{3}{4\rho_0^2} \right)^{1/2} K \left( 1 - \frac{4pK^2}{3q\rho_0^2} \right)^{1/2} \quad (5.100)$$

bulunur. (5.100) dispersiyon bağıntısından görüldüğü gibi verilen bir  $K$  için eğer  $pq < 0$  ise  $\Omega$  reel olacak ve  $\rho_1$  ve  $\theta_1$  sınırlı kalacaklardır.  $pq > 0$  ise  $K < (3p/q)^{1/2} \rho_0/2$  eşitsizliğini sağlayan değerleri için  $\Omega$  kompleks olacak ve dolayısı ile  $\rho_1$  ve  $\theta_1$  sınırsız olarak büyüyecektir. Bu nedenle  $pq < 0$  ise Nonlineer Schrödinger denkleminin düzlem dalga çözümleri küçük pertürbasyonlar altında

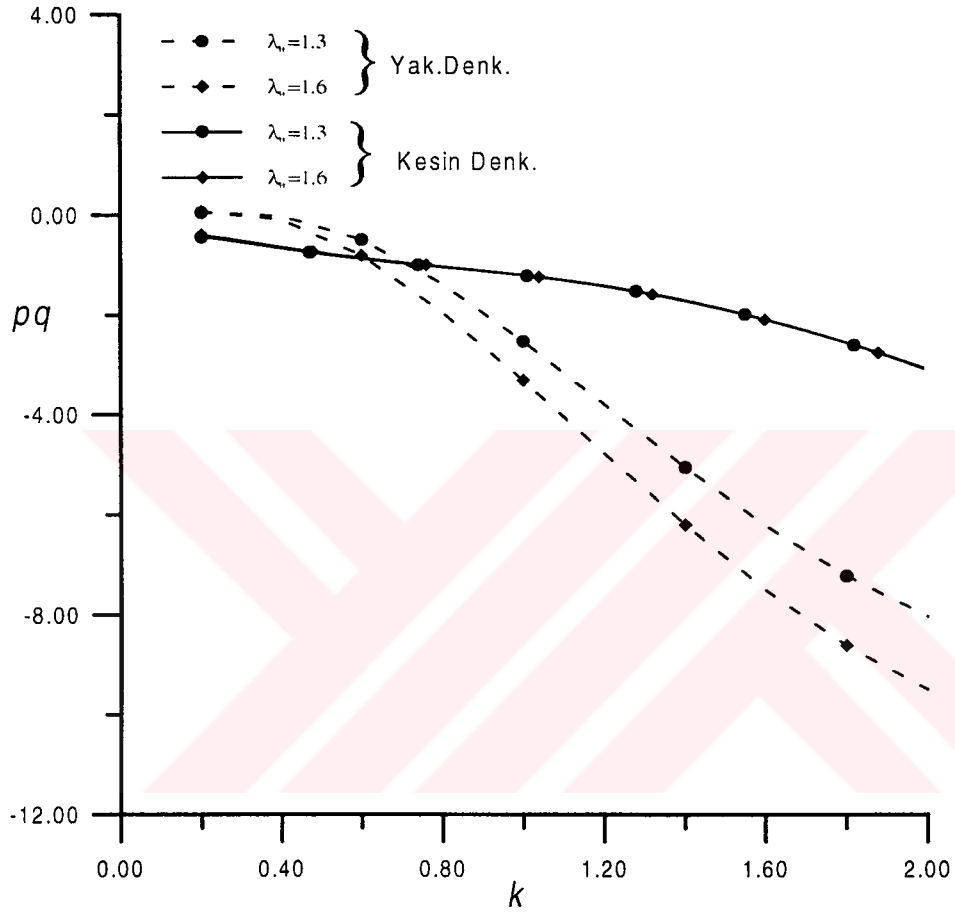
kararlı olduğu,  $pq > 0$  ise kararlı olmadığı söylenebilir.

### 5.3. Sayısal Sonuçlar ve Tartışma

Bir önceki kısımda belirtildiği gibi, NLS denkleminin düzlem dalga çözümlerinin kararlı olup olmaması  $pq$  çarpımlarının işaretine bağlıdır. Bu nedenle  $pq$  çarpımlarının işareti malzeme özellikleri, başlangıç şekil değiştirmesi ve dalga sayısına göre değişimlerinin incelenmesi gerekir. Bunun için  $\alpha$  ve  $\beta$  malzeme sabitlerinin nümerik değerlerine ihtiyacımız vardır. Dördüncü bölüm de olduğu gibi burada da  $\alpha = 1.948$  ve  $\beta = 0.9$  olarak alınacaktır. (5.80) ve (5.81) ile verilen  $p$  ve  $q$  katsayılarında görülen  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ve  $\gamma_1$  ifadelerinin eksenel germe ve teğetsel germe cinsinden değerleri Mooney-Rivlin ve biyolojik malzeme için EKA'da verilmiştir.  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin nümerik değerleri ve  $m = 0.1/\lambda_\theta^2 \lambda_z$  alınarak  $p$  ve  $q$  katsayıları nümerik olarak bulunmuş ve  $pq$  ifadesinin başlangıç şekil değiştirmesi ve  $k$  dalga sayısına göre değişimleri Şekil 5.1 ve 5.2'de gösterilmiştir. Bu şekiller akışkanın yaklaşık denklemleri kullanılarak elde edilen  $pq$  katsayısı ile bu çalışma da elde edilen  $pq$  katsayısının başlangıç şekil değiştirmesi ve  $k$  dalga sayısı ile olan değişimlerini göstermektedir.

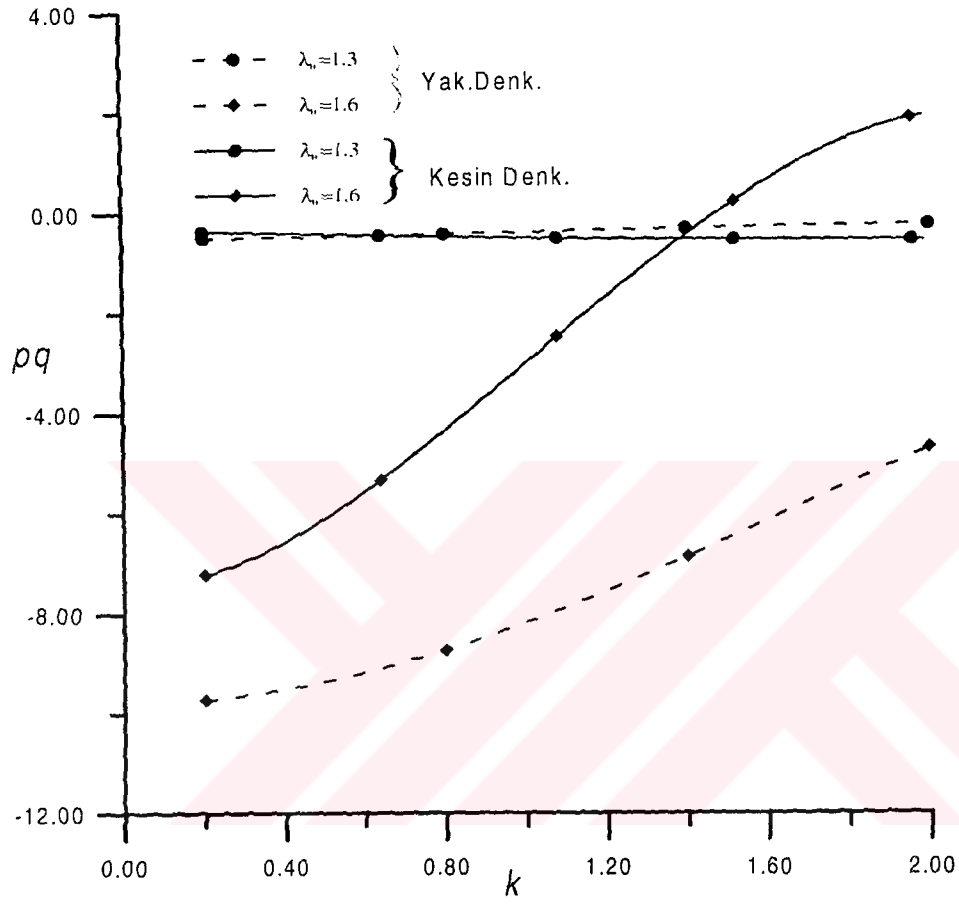
Şekil 5.1'de Mooney-Rivlin malzeme için, akışkanın her iki yaklaşımı kullanılarak elde edilen  $pq$  katsayısı artan  $k$  değerlerine karşı azaldığı gözlemlenmiştir. Kesin denklemleri kullanılarak elde edilen  $pq$  katsayısının teğetsel germeye karşı değişimleri çok hassas değildir.

Biyolojik malzeme için, akışkanın kesin denklemleri kullanıldığı zaman teğetsel germenin büyük değerleri için  $pq$  katsayısı  $k$ 'nın yaklaşık 1.4 değerinden sonra pozitif olmakta ve teğetsel germenin küçük değerleri için negatif olmaktadır. Akışkanın yaklaşık denklemleri kullanıldığı zaman ise  $pq$  katsayısı artan  $k$  dalga sayısına göre artmakta ve  $\lambda_\theta$ 'nın her iki değeri için ise negatif olmaktadır. Bu sonuçlar şekil 5.2'de gözlemlenmiştir.



Şekil 5.1 Mooney-Rivlin malzeme için,  $pq$  çarpımının başlangıç şekil değişimine ve  $k$  dalga sayısına göre değişimi





Şekil 5.2 Biyolojik malzeme için,  $pq$  çarpımının başlangıç şekil değişimine ve  $k$  dalga sayısına göre değişimi

## 6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada içerisinde viskoz (veya viskoz olmayan) akışkan bulunan öngerilmeli ince elastik tüplerde nonlinear dalga yayılması incelenmiş ve literatürde bilinen bazı evolüsyon denklemleri elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun için önce, kısaca konunun tarihsel gelişiminden sözedilmiş daha sonra tüp ve akışkan hareketlerini yöneten nonlinear diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Ancak elde edilen bu denklemlerin yüksek mertebeden nonlinear olmaları nedeniyle bu denklemleri analitik olarak çözmek oldukça güçtür. Bununla birlikte asimptotik açılımlara dayanarak dissipatif-dispersif ortamlarda çeşitli pertürbasyon yöntemleri kullanılarak nonlinear dalga yayılması incelenebilir. Bu amaca yönelik olarak, bu çalışmada kullanılacak indirgeyici pertürbasyon yöntemi genel nonlinear denklem sistemi için açıklanmıştır.

Bu çalışmada ilk önce içerisinde viskoz akışkan bulunan öngerilmeli ince elastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılması problemi incelenmiştir. Akışkanın kesin (Navier-Stokes) denklemleri kullanılmış ve daha sonra literatürdeki sonuçlarla karşılaştırmak için akışkanın yaklaşık denklemleri bulunmuştur. Reynolds sayısının çok büyük veya viskozitenin çok küçük olduğu durumda akışkanın davranışı ideal akışkaninkine yaklaşır. Bu durumda aynı problem sınır tabakası yaklaşımı altında çözülmüş ve viskozite-KdV (V-KdV) ve viskozite-Burgers (V-B) denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemleri analitik olarak çözmek mümkün olmadığı için sayısal olarak incelenmiştir. Bu bölümün sonunda KdVB denkleminin ilerleyen dalga çözümlerinin profilleri  $\zeta$ , başlangıç şekil değiştirmesi ve viskozite parametresine göre çizilmiştir. Akışkanın yaklaşık ve kesin denklemleri kullanılarak bulunan KdV denkleminin nonlinear katsayısı çeşitli eksenel ve teğetsel germeye göre değişimleri incelenmiştir. Sayısal sonuçların incelenmesinden aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir :

(i) Mooney-Rivlin malzemesi için, birinci dalgaya karşı gelen KdVB denkleminin ilerleyen dalga çözümleri artan teğetsel germe ile artmakta ikinci dalga için ise artan teğetsel germe ile azalmaktadır . Birinci dalga genleşme ikinci dalga ise sıkışma tipindedir.

(ii) Biyolojik malzemesi için, bu dalgaların formları birinci ve ikinci dalganın işareti dışında Mooney-Rivlin malzemesinin dalga formlarına çok benzerdir.

Burada birinci dalga sıkışma ikinci dalga ise genleşme tipindedir.

(iii) Mooney-Rivlin ve Biyolojik malzemesi için, ilerleyen dalga çözümlerinin viskozite parametresine ve  $\zeta$ 'ya göre değişimleri birinci ve ikinci dalgaların işaretleri dışında aynıdır. Her iki malzeme için, şok dalgaların önü artan viskozite ile birlikte daha belirgin olmaktadır. Burada da birinci dalga sıkışma ikinci dalga ise genleşme tipindedir. Biyolojik malzeme için ise birinci dalga genleşme ikinci dalga ise sıkışma tipindedir.

(iv) Tüpün eksenel yönde hareketi sıfırlandığı zaman, Mooney-Rivlin malzemesi için, akışkanın yaklaşık denklemleri kullanılarak elde edilen KdV denkleminin nonlinear katsayısı sıfırlanır. Akışkanın kesin denklemleri kullanıldığı zaman ise bu katsayı başlangıç şekil değiştirmesine bağlı değildir. Tüpün eksenel yönde hareketi alındığı zaman ise her iki yaklaşımda nonlinear katsayı başlangıç şekil değiştirmesine bağlıdır. Mooney-Rivlin malzemesi ve birinci dalga için, her iki yaklaşımda elde edilen nonlinear katsayısının teğetsel ve eksenel germeye göre değişimleri birbirine çok yakındır ve artan teğetsel germe ile azalmaktadır. İkinci dalgaya karşı gelen nonlinear katsayısı artan teğetsel ve eksenel germe ile azaldığı gözlemlenmiştir.

(v) Biyolojik malzeme için, birinci dalgaya karşı gelen nonlinear katsayısının teğetsel germe ile değişimi her iki yaklaşımda da hemem hemen aynıdır. Bu katsayı artan teğetsel germe ile azalmakta ve eksenel germe ile artmaktadır. İkinci dalgaya karşı gelen katsayı ise artan teğetsel germe ile artmakta ve artan eksenel germe ile azaldığı gözlemlenmiştir.

(vi) Yapılan deneysel çalışmalarda (McDonald [10]) gözlenen yalnız dalga profili ile burada analitik olarak bulunan yalnız dalga profili arasında yakın bir benzerlik görülmüş ve önerilen modelin aort mekanizminde de uygulanabileceği ümidini güçlendirmiştir.

(vii) Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, V-KdV denkleminin dalga profilinin genliği artan  $\lambda_0$  değerleriyle birlikte düşmekte olduğu gözlemlenmiştir. İkinci dalga için  $d$  katsayısının (dissipatif terimin) çok küçük olması nedeniyle genliklerdeki düşme fazla gözlenmemiştir.

(viii) Mooney-Rivlin malzemesi için, KdVB denkleminin  $V(Y, 0) = 0.5(1 - \tanh(Y/b))$  başlangıç koşulu altında sonlu farklar yöntemi kullanılarak sayısal çözümü bulunmuştur. Birinci dalga için dalga profilinin zamanla çok fazla değişmediği gözlemlenmiştir. İkinci dalga için dalga profili salınımlar yapmakta ve bu salınımlar artan zamanla birlikte  $Y$  boyunca yayılmaktadır. Johnson [36]

$4\mu \gg \nu^2$  limiti durumunda ( $\nu$  dissipasyon teriminin katsayısını,  $\mu$  ise dispersiyon teriminin katsayısını göstermektedir) şok önünün  $\nu = 0.01$  ve  $V(\pm\infty) = 0$  koşulları altında KdV denkleminin yalnız dalgalarına yaklaştığını göstermiştir. Benzer sonuçlar ikinci dalga için de gözlemlenmiştir. Ayrıca birinci dalga için şok önü  $V(-\infty) = 1$  ve  $V(+\infty) = 0$  için Burgers denkleminin ilerleyen dalga çözümüne yaklaştığı gözlemlenmiştir.

Son olarak nonlinear dalga modülasyonu incelenmiştir. İnce tüp denklemleri ve viskoz olmayan akışkanın kesin denklemleri kullanılarak böyle bir ortamda genlik modülasyonunun nonlinear Schrödinger denklemi (NLS) ile ifade edileceği gösterilmiştir. İşlem kalabalıklığı olması nedeniyle tüpün eksenel yöndeki hareketi ihmal edilmiştir. Nonlinear Schrödinger denkleminin düzlem dalga çözümlerinin kararlılığı lineer ( $p$ ) ve nonlinear ( $q$ ) katsayılarının çarpımının işaretine bağlıdır. Bu nedenle akışkanın hem yaklaşık hem de kesin denklemleri kullanılarak bulunan  $pq$  çarpımının  $k$  ile olan değişimleri grafik üzerinde tartışılmıştır. Bununla ilgili sonuçlar aşağıdaki şekilde verilebilir :

(i) Mooney-Rivlin malzemesi için, her iki yaklaşımda bulunan  $pq$  katsayısı artan  $k$  değerlerine göre azaldığı gözlemlenmiştir. Dolayısı ile bu malzeme için NLS denkleminin düzlem dalga çözümlerinin kararlı olduğu söylenebilir.

(ii) Biyolojik malzeme için ise, akışkanın yaklaşık denklemleri kullanılarak bulunan  $pq$  katsayısı artan  $k$  değerlerine karşı negatif olmaktadır yani bu yaklaşım için NLS denkleminin düzlem dalga çözümleri kararlı olmaktadır. Akışkanın kesin denklemleri kullanıldığı zaman ise  $\lambda_\theta$ 'nın büyük değerlerinde ve  $k$ 'nın yaklaşık 1.4 değerinden sonra  $pq$  çarpımı pozitif olmaktadır. Dolayısı ile  $k \cong 1.4$  değerinden sonra düzlem dalga çözümlerinin kararlı olmadığı söylenebilir.

Bu çalışmada incelen her iki problemde de, tüp duvarının ince olduğu varsayılmıştır. Ancak biyolojik uygulamalar gözönünde bulundurulduğunda, büyük damarlarda bile damar kalınlığının ortalama yarıçapa oranı  $1/6$  ile  $1/4$  arasında değişmektedir. Bu nedenle, biyolojik uygulamalarda ince tüp denklemi yaklaşımına pek sempati ile bakılamaz, kalın tüp denklemlerinin kullanılması gerekir. Keza tüp malzemesi olarak da ideal elastik ve izotrop malzeme yaklaşımı kullanılmıştır. Ancak yapılan deneysel çalışmalar tüp malzemesinin viskoelastik ve anizotrop olduğunu göstermektedir. Daha gerçekçi bir model için bu özelliklerin yönetici nonlinear denklemlere yansıtılması gerekir. İşte bu problemler gelecekte üzerinde çalışılması gereken önemli konulardır.

## KAYNAKLAR

- [1] Young, T., 1809. On the function of the heart and arteries, The Croonian Lecture, *Phil. Trans. Roy.*, **99**, 1-31
- [2] Skalak, R., 1966. Wave propagation in blood flow. In : Biomechanics Symposium (Edited by Y. C. Fung ), 20-46, ASME.
- [3] Witzig, K., 1914. Über erzwungene wellenbewegungen zaber, inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen Röhren, Inaugural Dissertation, University of Bern.
- [4] Morgan, G.W. and Kiely, J. P., 1958. Wave propagation in viscous fluid contained in a flexible tube, *J. Acoust. Soc. Am.* , **26**, 326-338.
- [5] Womersley, J.R., 1955. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube-I : The linear approximation for long waves, *Phil. Mag.*, **46** , 199-219.
- [6] Atabek, H.B. and Lew, H.S., 1966. Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube, *J. Biophys.*, **6** , 481-503.
- [7] Rachev, A.I., 1980. Effects of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, *J. Biomechanical Engng.*, ASME, **102**, 119-123.
- [8] Attinger E. O., 1968. Analysis of pulsatile blood flow, *In Advances in Biomedical Engineering and Medical Physics*, (Edited by S. N. Levine) 1-59, Interscience, New York.
- [9] Cox, R.H. , 1969. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thin walled viscoelastic tube : The influence of wall compressibility, *J. Biomech.* , 270-291.
- [10] McDonald, D. A., 1960. Blood Flow in Arteries, The Williams and Wilkins Co., Baltimore Md.
- [11] Fung, Y. C. , 1984. Biodynamics : Circulation, Springer Verlag, New York.
- [12] Demiray, H., Erbay, H. A. and Erbay, S., 1987. Effects of prestress on pulse waves in arteries, *ZAMM*, **67**, 473-485.
- [13] Ling, S.C. and Atabek H.B., 1972. A nonlinear analysis of pulsatile flow in arteries. *J. Fluid Mech.*, **55**, 493-511.
- [14] Lamb, G.L., 1980. Elements of Soliton Theory. Wiley, New York.
- [15] Engelbrecht, J., 1987. On KdV soliton splitting. *Wave Motion*, **9**, 127-132.
- [16] Engelbrecht, J., 1994. Waves in Blood Vessels and the KdV Approximation, Research Report (Mech 107/94), Estonian Academy of Sciences, Tallinn.
- [17] Caro, C.G., Pedley, T.J., Schroter, R.C. and Seed, W.A., 1978. The Mechanics of the Circulation, Oxford, Oxford University Press.
- [18] Lambert J.W., 1958. On the nonlinearities of fluid flow in nonrigid tubes, *J. Franklin Inst.*, **266**, 83.
- [19] Rudinger, G., 1966. Review of Current Mathematical Methods for the Analysis of Blood Flow, *Biomedical Fluid Mechanics Symposium* , ASME, New York, 1-33.

- [20] Anliker, M., Hestand, M.B. and Ogden, E., 1968. Dispersion and attenuation of small artificial pressure waves in the canina aorta, *Circ. Res.*, **23**, 539-551.
- [21] Anliker, M., Rockwell, R.L. and Ogden, E., 1971. Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries. Part I : Derivation and properties of mathematical model, *ZAMP*, **22**, 217-246.
- [22] Rudinger, G., 1970. Shock waves in mathematical models of the aorta, *J. Appl. Mech.*, **37**, 34-37 .
- [23] Hoogstraten, H.W. and Smith, C.H., 1978. A mathematical theory of shock-wave formation in arterial blood flow, *Acta Mechanica*, **30**, 145-155 .
- [24] Tait, R.J. and Moodie, T.B., 1984. Waves in nonlinear fluid filled tubes, *Wave Motion*, **6**, 197-203.
- [25] Karpman, V.I., 1975. Non-linear Waves in Dispersive Media, New York, Pergamon Press.
- [26] Infeld, E. and Rowlands, G., 1992. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos, Cambridge University Press, Cambridge.
- [27] Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., 1992. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, Cambridge.
- [28] Jeffrey, A. and Engelbrecht, J., 1994. Nonlinear Waves in Solids, Springer Verlag, New York.
- [29] Engelbrecht, J., 1997. Nonlinear Wave Dynamics, Complexity and Simplicity, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [30] Hashizume Y., 1985. Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube, *J. Phys. Soc. Japan*, **54**, 3305-3312.
- [31] Yomosa, S., 1987. Solitary waves in large blood vessels, *J. Phys.Soc. Japan*, **56**, 506-520.
- [32] Ravindran, R. and Prasad, P., 1979. A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid-filled visco-elastic tube, *Acta Mechanica*, **31**, 253-280.
- [33] Swaters, G. and Sawatzky, R.P., 1989. Viscoelastic modulation of solitary pressure pulses in nonlinear fluid-filled distensible tubes, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **42**, 213.
- [34] Erbay, H. , Erbay, S. and Dost, S., 1992 . Wave propagation in fluid filled nonlinear viscoelastic tubes, *Acta Mechanica*, **95**, 87-102.
- [35] Johnson, R.S., 1970. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion, *J. Fluid Mechanics* , **42**, 49-60 .
- [36] Cowley, S.J., 1983. On the wavetrains associated with elastic jumps on fluid-filled elastic tube, *Q.J. Mech. Appl. Math.*, **36**, 289-312.
- [37] Mainardi, F. and Buggish, H., 1982. On nonlinear waves in liquid filled elastic tubes, *Nonlinear Deformation Waves* , IUTAM Symposium Tallinn.
- [38] Keller, J.J., 1981. Propagation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction, *Z. Angew. Math. Phys.* , **32**, 170-181.
- [39] Hashizume, Y., 1988. Nonlinear pressure wave propagation in arteries , *J. Phys. Soc. Japan*, **57**, 4160-4168.
- [40] Demiray, H., 1996. Solitary waves in prestressed elastic tubes, *Bull. Math. Biology* , **58** , 939-955.
- [41] Demiray, H. and Antar, N., 1997. Nonlinear waves in an inviscid fluid contained in a prestressed viscoelastic thin tube , *ZAMP*, **48**, 325-340.
- [42] Demiray, H., 1996. A quasi-linear viscoelastic constitutive relation for arterial wall materials, *J. Biomechanics* , **29**, 1011-1014.



- [43] Demiray, H., 1998. Slowly varying solitary waves in an elastic tube filled with a viscous fluid, *ARI*, **51**, 98-102.
- [44] Antar, N. and Demiray, H., 1999. Weakly nonlinear waves in a prestressed thin elastic tube containing viscous fluid, *Int. J. Eng. Sci.*, **37**, 1859-1876.
- [45] Antar, N. and Demiray, H., 1999. The boundary layer approximation and nonlinear waves in elastic tubes, *Int. J. Engng. Sci.* (yayında).
- [46] Erbay, S. and Erbay, H., 1992. Non-linear wave modulation in fluid filled distensible tubes, *Acta Mechanica*, **104**, 201-214.
- [47] Antar, N. and Demiray, H., 1999. Nonlinear wave modulation in a prestressed thin elastic tube, *Int. Non-Linear Mechanics*, **34**, 123-138.
- [48] Eringen, C. A., 1962. Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New-York.
- [49] Jeffrey, A. and Kawahara, T., 1981. Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Boston: Pitman.
- [50] Sturrock, P.A., 1957. Nonlinear effects in electron plasma, *Proc. R. Soc. London*, **A242**, 277-299.
- [51] Kawahara, T., 1973. The derivative-expansion method and nonlinear dispersive waves, *J. Phys. Soc. Japan*, **35**, 1537-1544.
- [52] Asano, N., 1974. Modulation for nonlinear wave in dissipative or unstable media, *J. Phys. Soc. Japan*, **36**, 861-868.
- [53] Taniuti, T. and Washimi, H., 1968. Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, *Phys. Rev. Letters*, **21**, 209-212.
- [54] Taniuti, T. and Wei, C.C., 1968. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation I, *J. Phys. Soc. Japan*, **24**, 941-946.
- [55] Taniuti, T. and Yajima, N., 1969. Perturbation method for a nonlinear wave modulation, I, *J. Math. Phys.*, **10**, 1369-1372.
- [56] Asano, N. and Taniuti, T., 1969. Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media I, *J. Phys. Soc. Japan*, **27**, 1059-1062.
- [57] Asano, N. and Taniuti, T., 1970. Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media II, *J. Phys. Soc. Japan*, **29**, 209-214.
- [58] Jeffrey, A. and Kakutani, T., 1972. Weak nonlinear dispersive waves : a discussion centered around the Korteweg-de Vries, *SIAM, Rev.*, **14**, 582-643.
- [59] Taniuti, T., 1974. Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **55**, 1-35.
- [60] Gardner, C. S. and Morikawa, G.K., 1960. Similarity in the asymptotic behaviour of collision-free hydromagnetic waves and water waves, *Courant Inst. Math. Sci. Rep.*, NYO-9082, 1-30.
- [61] Teymur, M. and Şuhubi, E., 1978. Wave propagation in dissipative or dispersive non-linear media, *J. Inst. Maths. Applics.*, **21**, 25-40.
- [62] Prandtl, L. and Tietjens O.G., 1957. Applied hydro and aero-mechanics. New York : Dover.
- [63] Şuhubi, Erdoğan., 1993. Akışkanlar Mekaniği İTÜ, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.
- [64] Jeffrey, A., 1979. Some aspects of the mathematical modelling of long nonlinear waves, *Arch. of. Mech.*, **31**, 559-574.
- [65] Canosa, J. and Gazdag, J., 1977. The Korteweg-de Vries Burgers equation, *J. Comput. Phys.*, **23**, 393-403.
- [66] Bona, J.L. and Schonbek, M.E., 1985. Travelling wave solutions to

- Korteweg-de Vries Burgers equation, *Proc.Roy.Soc. Edinburg*, **101A**,207-226.
- [67] **Jeffrey, A. and Xu ,S.**, 1989. Exact solutions to the Korteweg-de Vries Burgers equation,*Wave Motion*, **11**, 559-564.
  - [68] **Demiray, H.**, 1972. On the elasticity of soft biological tissues *J. Biomech.*, **5**, 309-311.
  - [69] **Simon, B.R., Kobayashi, A.S., Stradness, D.E. and Wiederhielm, C.A.**, 1972. :Re-evaluation of arterial constitutive laws, *Circulation Research*, **30**, 491-500.
  - [70] **Demiray, H.**, 1976. Large deformation analysis of some basic problems in biophysics, *Bull. Math. Biology*, **38**, 701-711.
  - [71] **Fung,Y.C.**,1972. Stress-strain history relation of soft tissues in simple elongation :In *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* (edited by Y.C. Fung, N. Peronne and M.Anliker), Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs. N.J.
  - [72] **Demiray, H.**,1998. On the propagation of solitary waves in a prestressed thin elastic tube filled with an inviscid fluid, *ZAMP*, **49**, 538-557.
  - [73] **Zabusky N.J. and Kruskal M.D.**, 1965. Interaction of “solitons” in a collisionsless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240.





## EK A : BAZI ELASTİK MALZEMELER İÇİN $\alpha_i$ , $\beta_i$ Ve $\gamma_i$ KATSAYILARININ AÇIK İFADELERİ

Burada ana metinde yer alan bazı katsayıların çeşitli elastik malzemelere bağlı olarak ifadeleri verilecektir. Bunlar :

(i) Mooney-Rivlin malzemesi için Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\Sigma = \frac{\mu}{2}[\beta(I_1 - 3) + (1 - \beta)(I_2 - 3)] \quad (A1)$$

Burada  $\mu$  kayma modülü,  $\beta$  maddesel sabit,  $I_1$ ,  $I_2$  ve  $I_3 = 1$  ise Finger deformasyon tansörünün invaryantlarını göstermektedir. Asal germeler halinde  $I_1$  ve  $I_2$  invaryantları aşağıdaki biçimde tanımlanabilir

$$I_1 = \lambda_z^2 \Lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 \Lambda_\theta^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 \Lambda_\theta^2 \Lambda_z^2}, I_2 = \frac{1}{\Lambda_z^2 \lambda_z^2} + \lambda_z^2 \Lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 \Lambda_\theta^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \Lambda_\theta^2}. \quad (A2)$$

Bu ifadeler (2.67) denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki katsayılar elde edilir

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + (1 - \beta)(\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_z^2}) \\ \alpha_1 &= \frac{2\beta}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + 2(1 - \beta)\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 \\ \alpha_2 &= \frac{-3\beta}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + (1 - \beta)\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 \\ \beta_0 &= \beta(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + (1 - \beta)(\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2}) \\ \beta_1 &= \beta(\lambda_\theta^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + (1 - \beta)(\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2}) \\ \beta_2 &= \frac{-6\beta}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - \frac{6(1 - \beta)}{\lambda_\theta^2} \\ \beta_3 &= \frac{10\beta}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + \frac{10(1 - \beta)}{\lambda_\theta^2} \\ \gamma_1 &= \beta(\lambda_z^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + (1 - \beta)(\lambda_\theta^2 \lambda_z^2 + \frac{3}{\lambda_z^2}) \\ \gamma_2 &= -6(\frac{\beta}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + \frac{1 - \beta}{\lambda_z^2}) \\ \gamma_3 &= -\frac{3\beta}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + (1 - \beta)\lambda_\theta^2 \lambda_z^2. \end{aligned} \quad (A3)$$

(ii) Yumuşak dokular için Demiray [68] tarafından önerilen Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilebilir

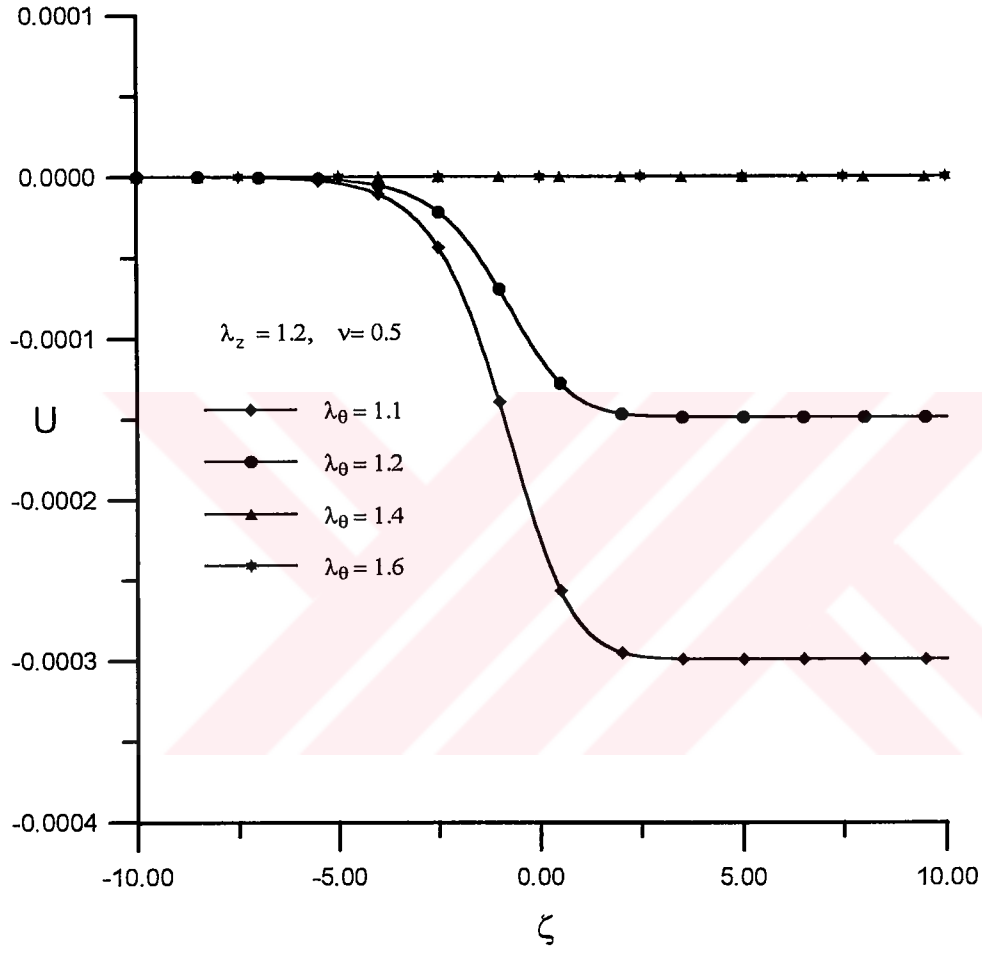
$$\Sigma = \frac{\mu}{2\alpha} \{ \exp[\alpha(I_1 - 3)] - 1 \}. \quad (A4)$$

Bunlar  $\alpha$  ve  $\mu$  birer maddesel sabittir. A4 ifadesi (2.67) denklemlerinde yerine konurda  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ve  $\gamma_i$  katsayıları aşağıdaki biçimde verilebilir

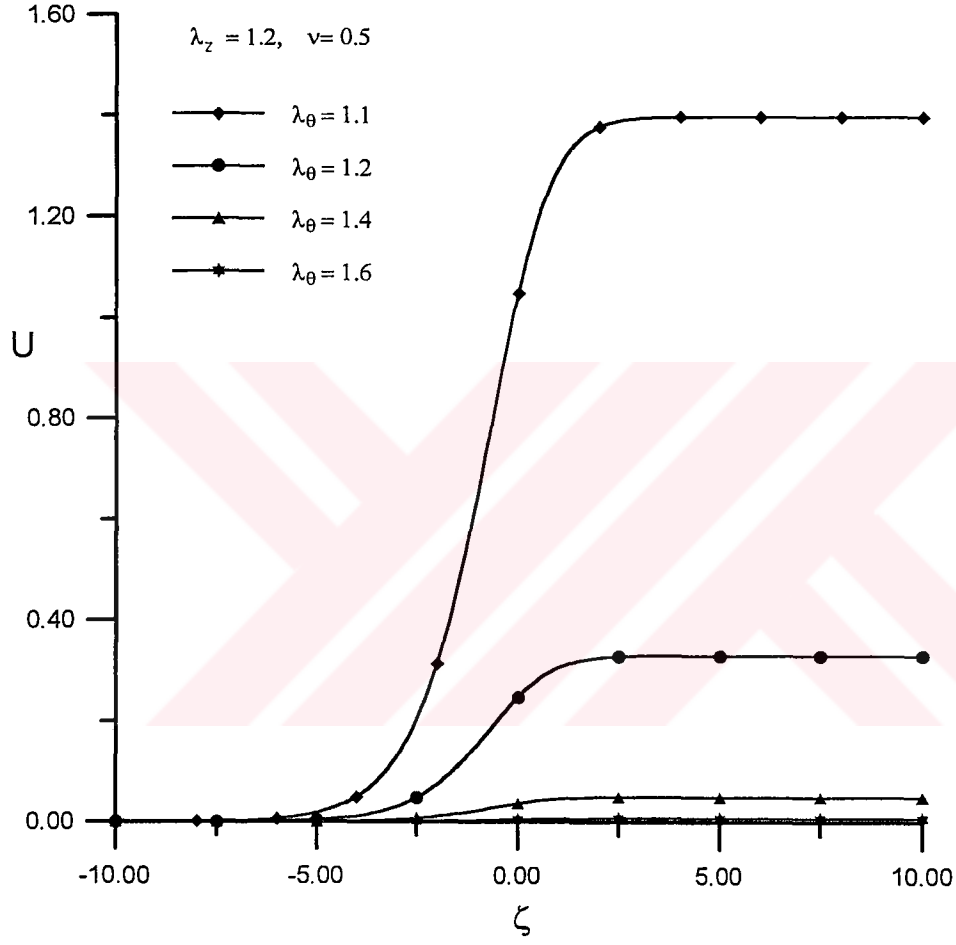
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \alpha_1 &= 2[\frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + \alpha(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \alpha_2 &= [\frac{-3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + \alpha(\frac{3}{\lambda_\theta^2} + \frac{3}{\lambda_z^2} + \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - \frac{7}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4}) + 2\alpha^2(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) \\ &\quad (\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^2] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \beta_0 &= (\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \beta_1 &= [(\lambda_\theta^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + 2\alpha(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^2] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \beta_2 &= [\frac{-6}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + 3\alpha(\lambda_\theta^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + 2\alpha^2(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^3] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \beta_3 &= [\frac{10}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + \alpha(\lambda_\theta^4 + \frac{25}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4} - \frac{10}{\lambda_z^2}) + 4\alpha^2(\lambda_\theta^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^2 \\ &\quad + \frac{4}{3}\alpha^3(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^4] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \gamma_1 &= [(\lambda_z^2 + \frac{3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2}) + 2\alpha(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^2] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \gamma_2 &= [\frac{-6}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + 3\alpha(\lambda_z^4 + \frac{2}{\lambda_\theta^2} - \frac{3}{\lambda_z^4 \lambda_\theta^4}) + 2\alpha^2(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^3] F(\lambda_\theta, \lambda_z) \\ \gamma_3 &= [\frac{-3}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} + \alpha(\frac{3}{\lambda_\theta^2} + \frac{3}{\lambda_z^2} + \lambda_\theta^2 \lambda_z^2 - \frac{7}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4}) \\ &\quad + 2\alpha^2(\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})^2(\lambda_\theta^2 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2})] F(\lambda_\theta, \lambda_z). \end{aligned} \quad (A5)$$

Burada  $F(\lambda_\theta, \lambda_z)$  fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır

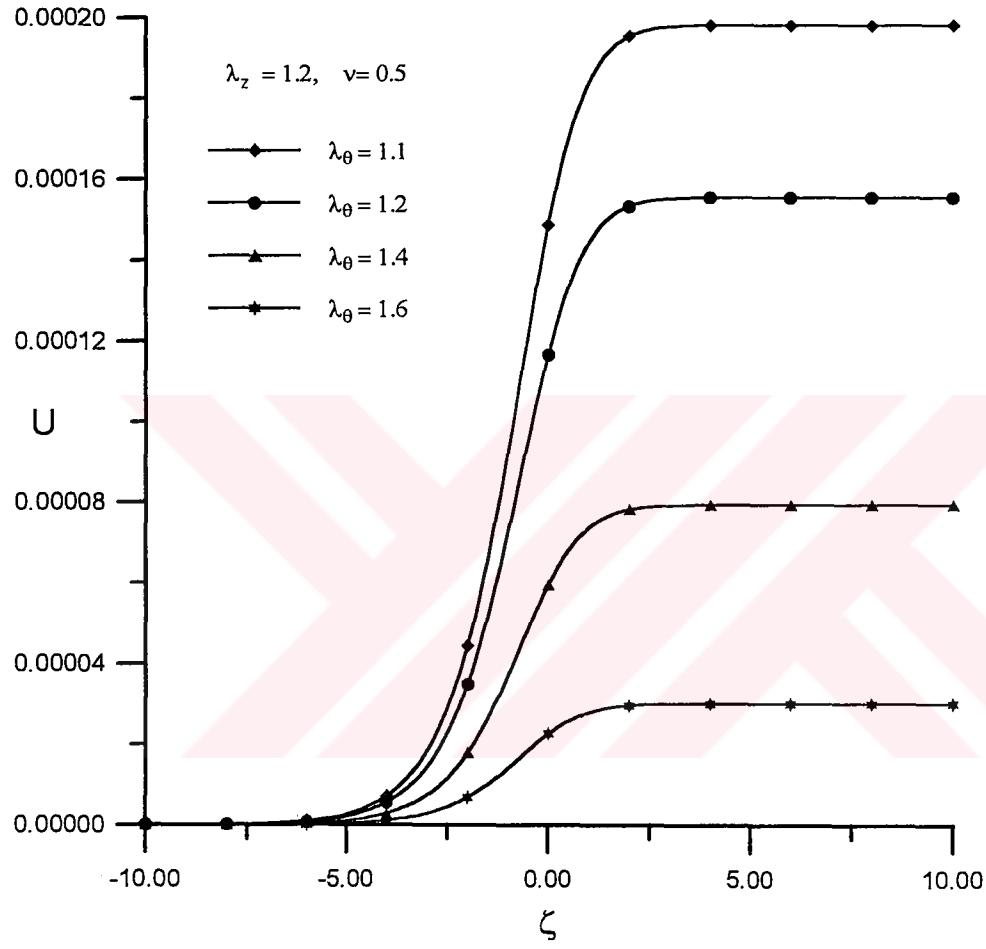
$$F(\lambda_\theta, \lambda_z) = \exp[\alpha(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - 3)]. \quad (A6)$$



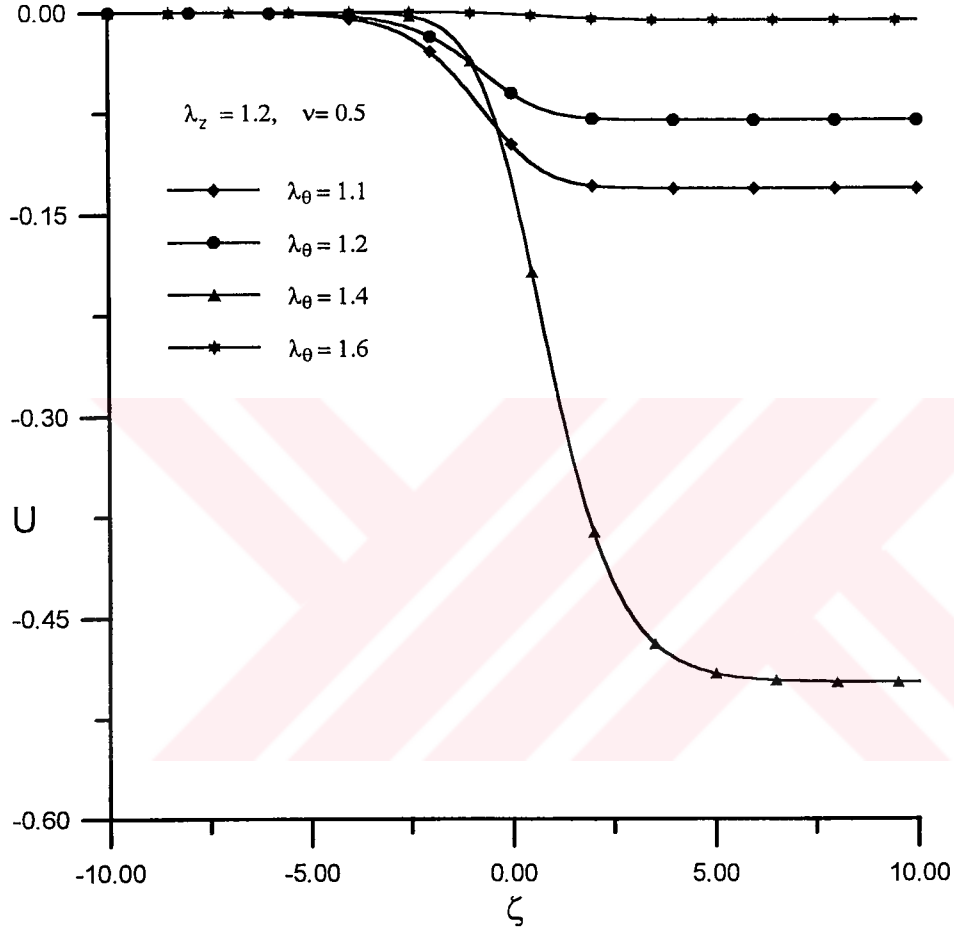
Şekil B.2 Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi



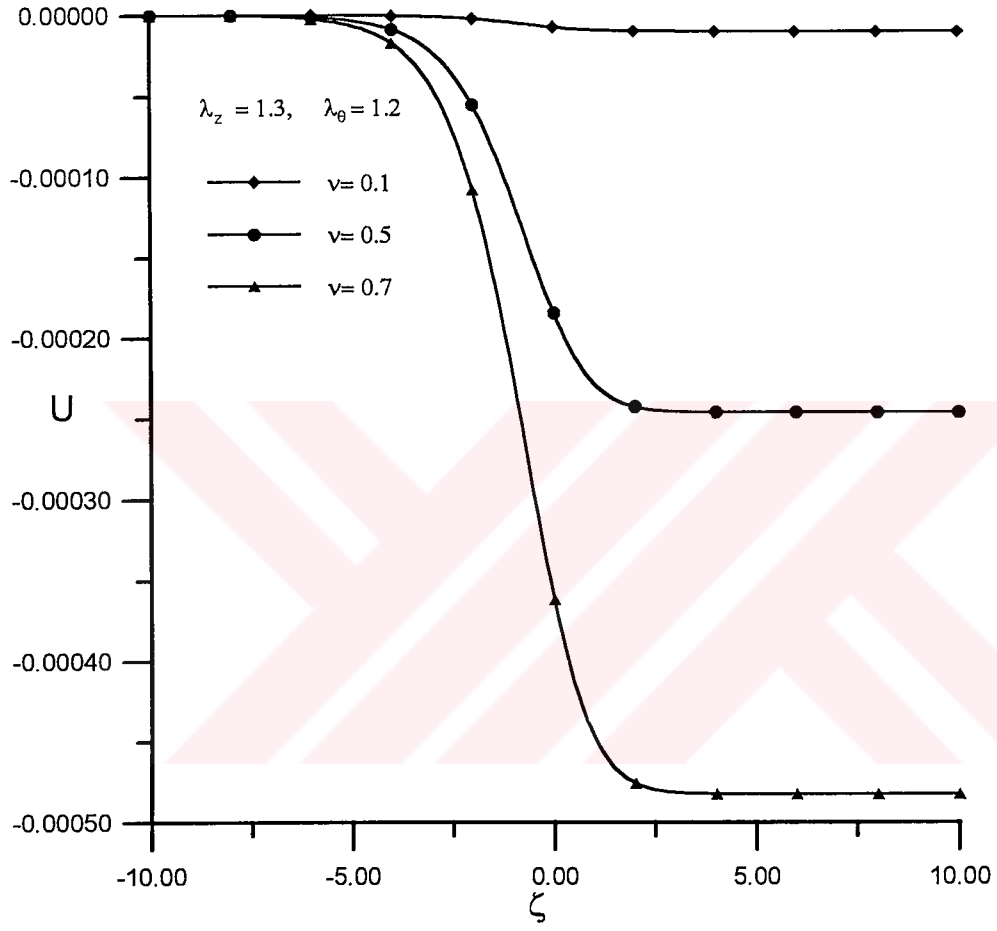
Şekil B.3 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi



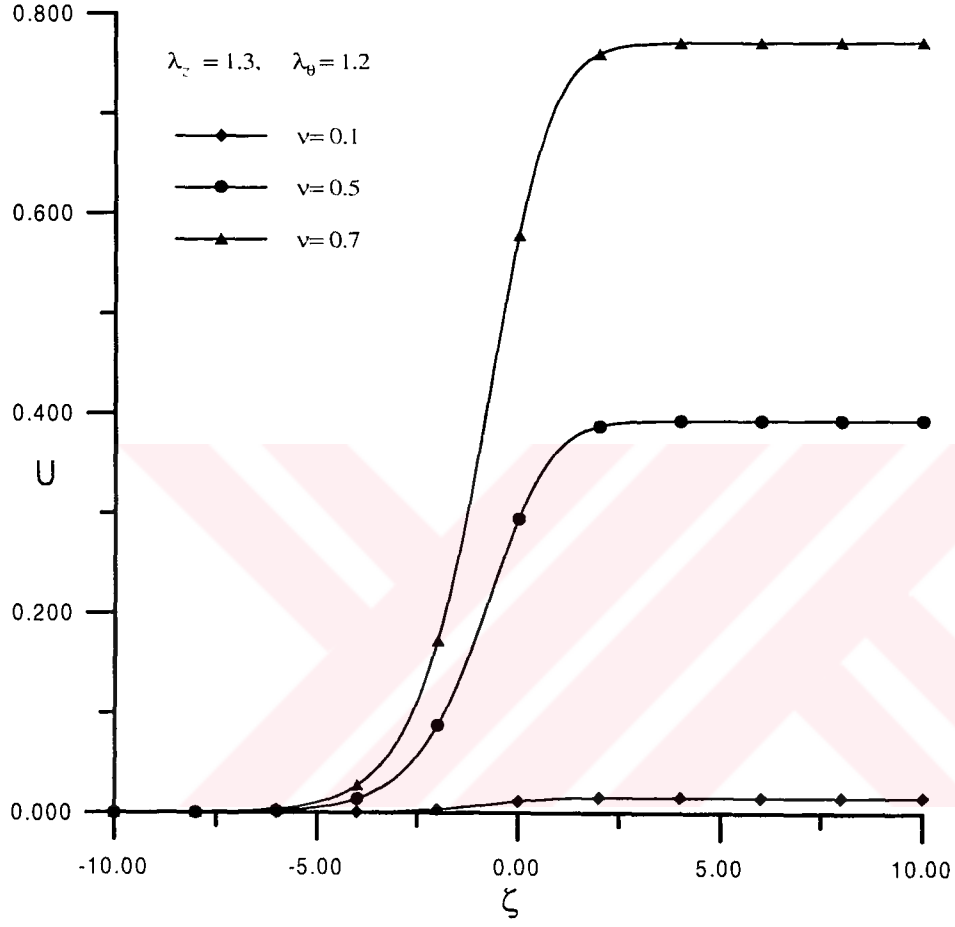
Şekil B.4 Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi



Şekil B.5 Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin germe ile değişimi

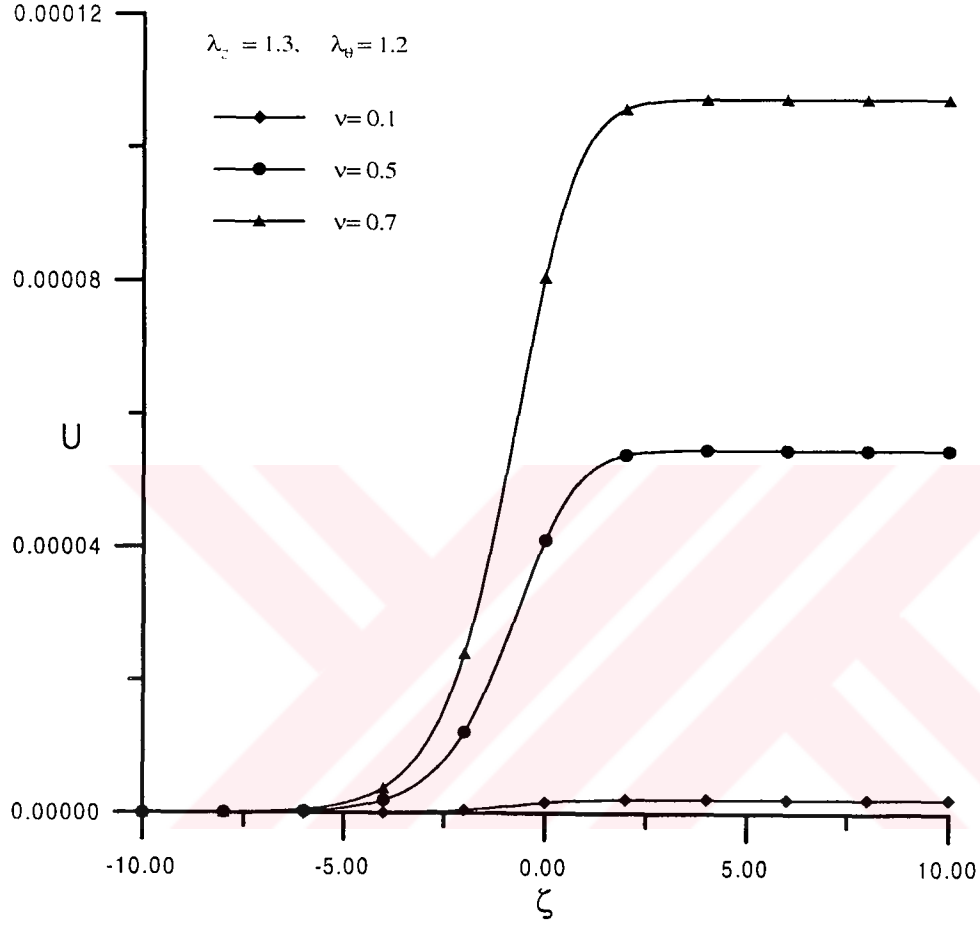


Şekil B.6 Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi

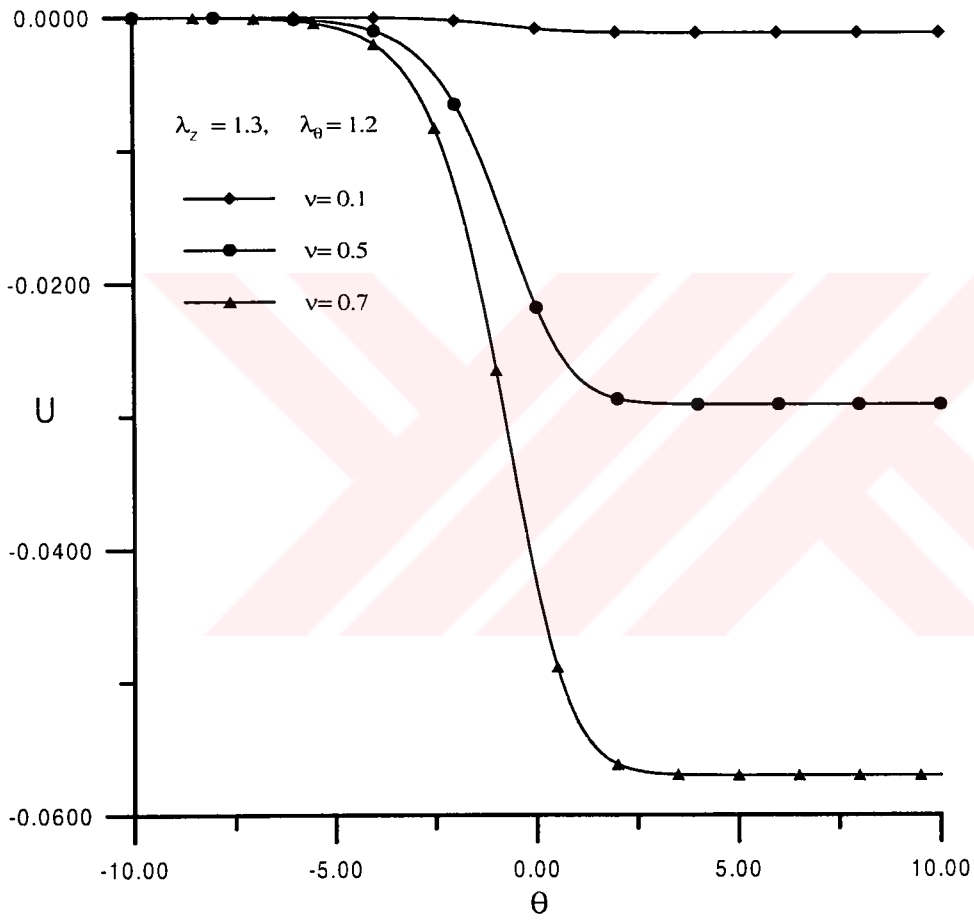


Şekil B.7 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi

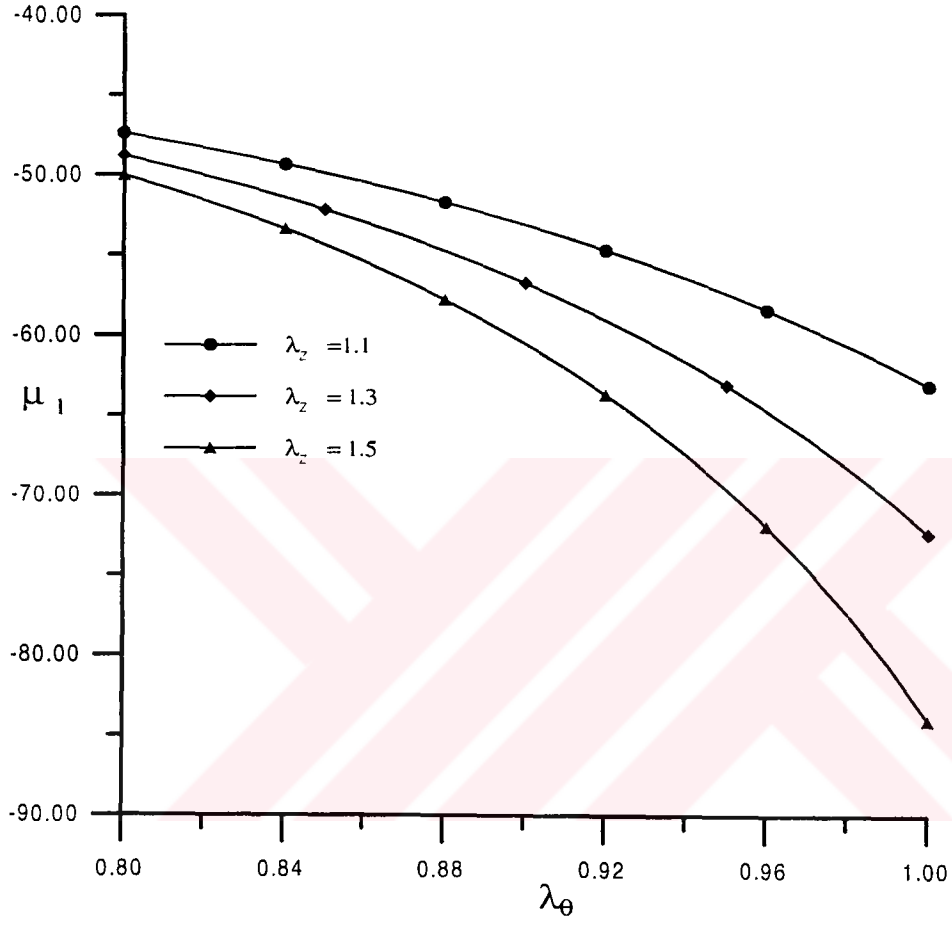




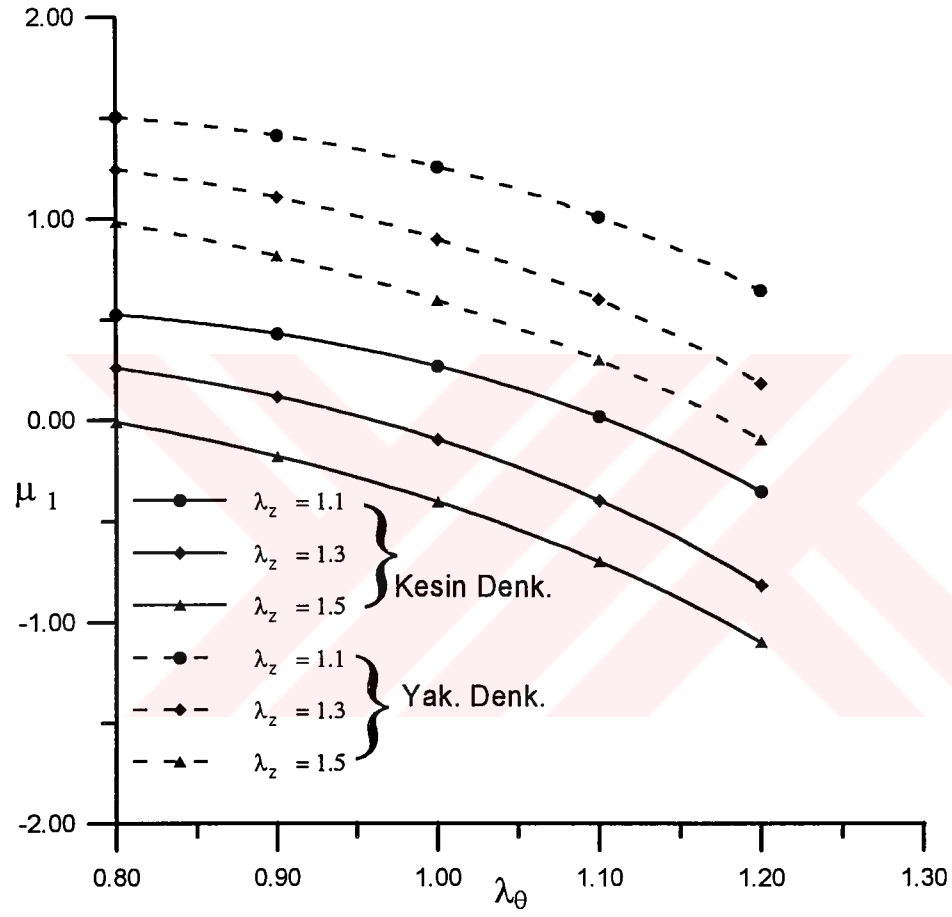
Şekil B.8 Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi



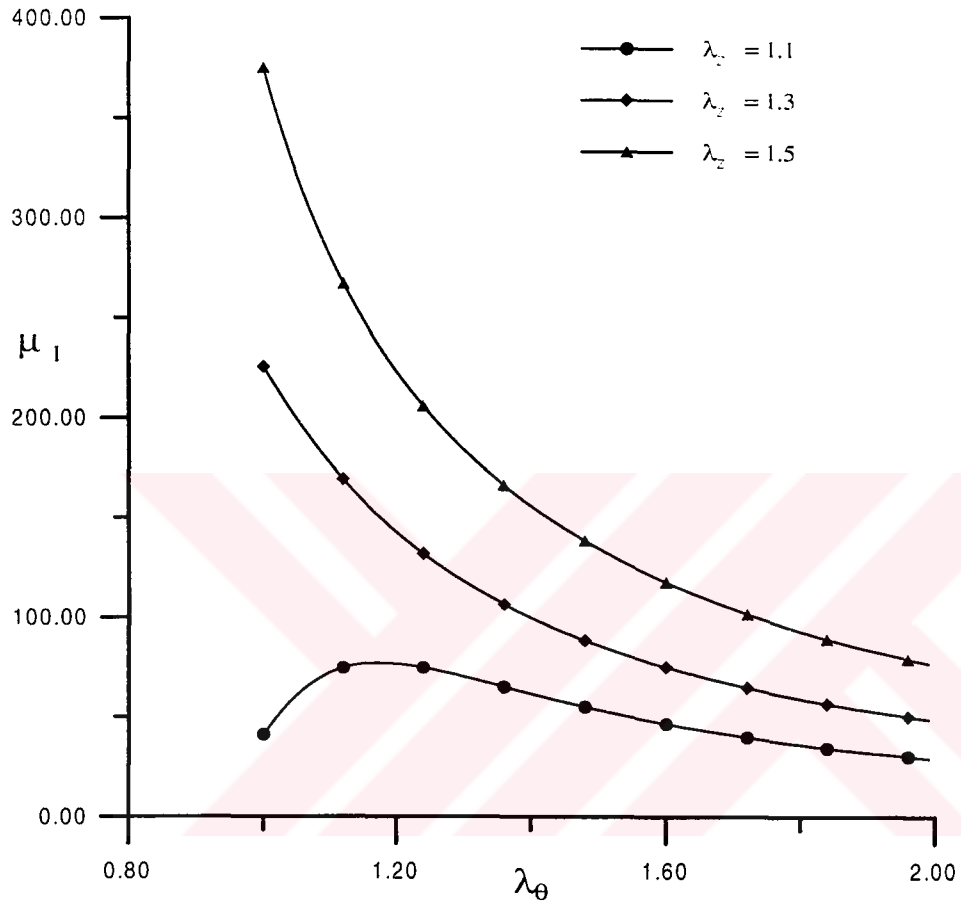
Şekil B.9 Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin ilerleyen dalga profilinin viskozite parametresi ile değişimi



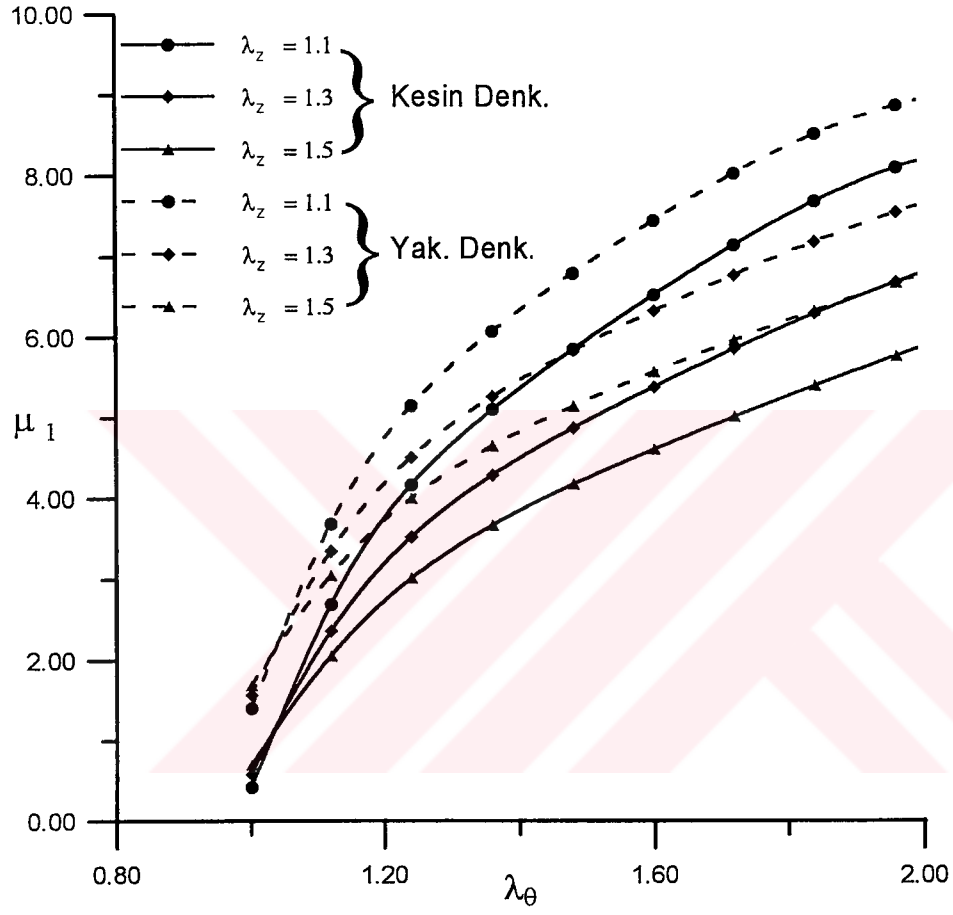
Şekil B.10 Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için,  $\mu_1$  katsayısının germe ile değişimi



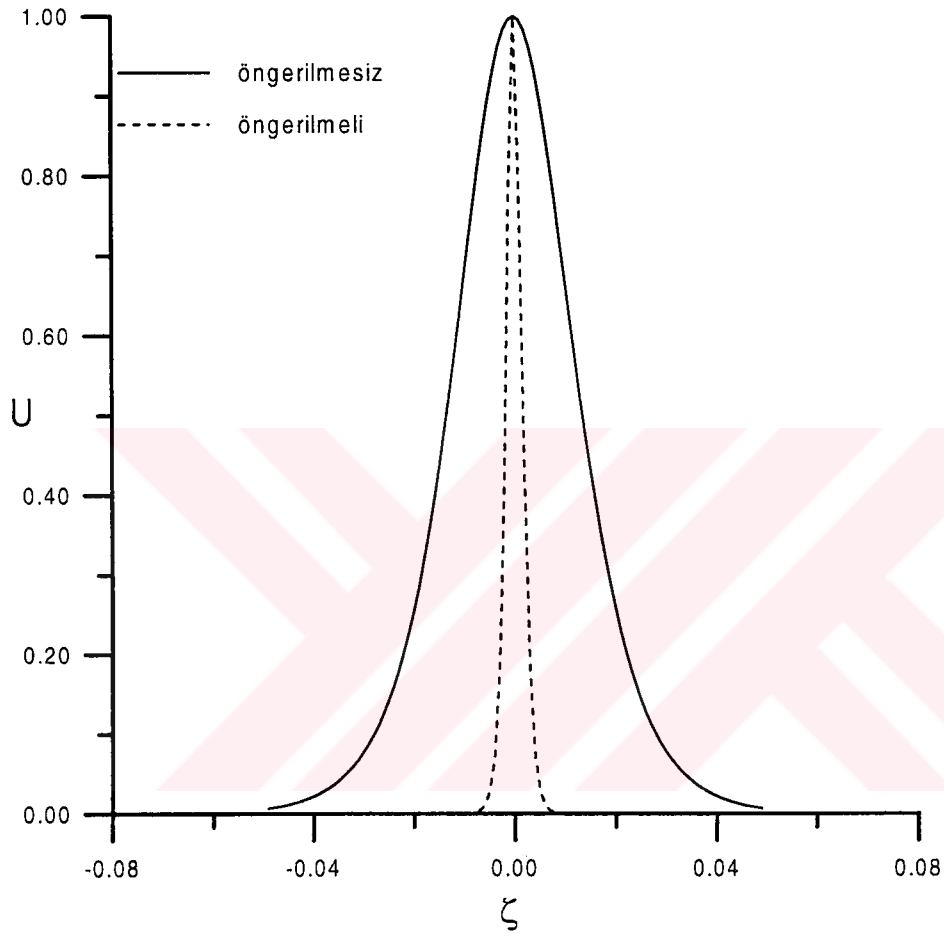
Şekil B.11 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için,  $\mu_1$  katsayısının germe ile değişimi



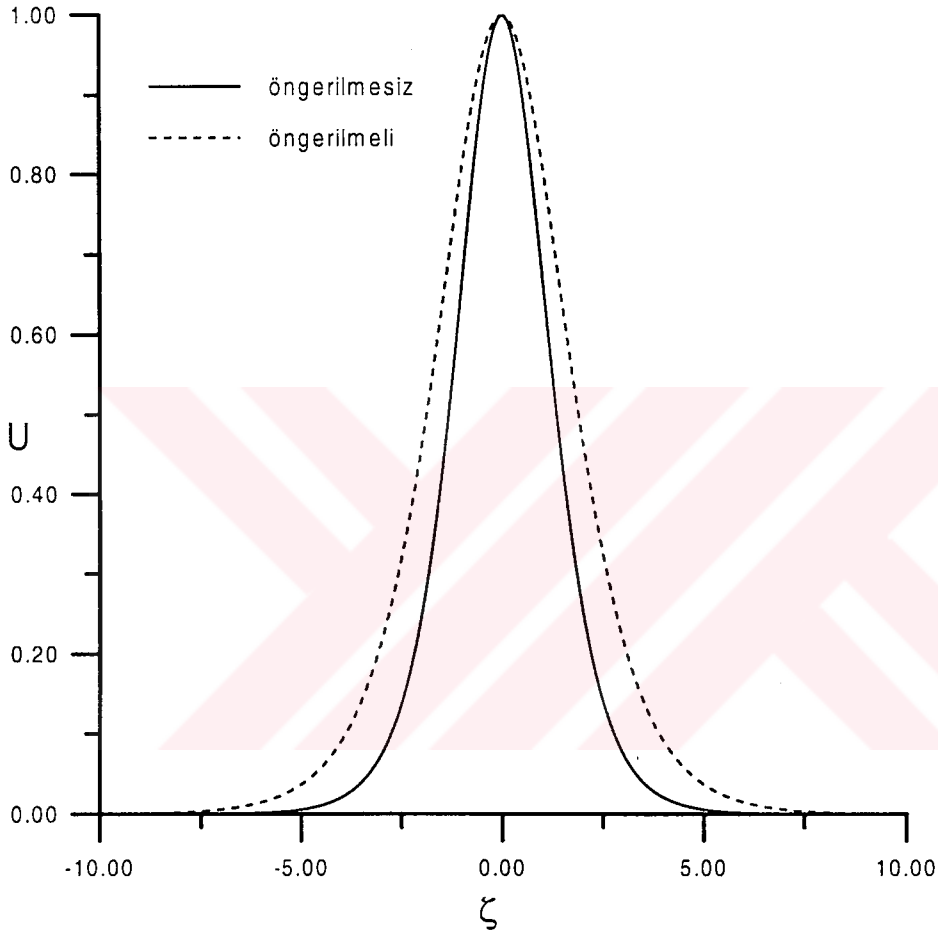
Şekil B.12 Biyolojik malzeme ve birinci dalga için,  $\mu_1$  katsayısının germe ile değişimi



Şekil B.13 Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için,  $\mu_1$  katsayısının germe ile değişimi

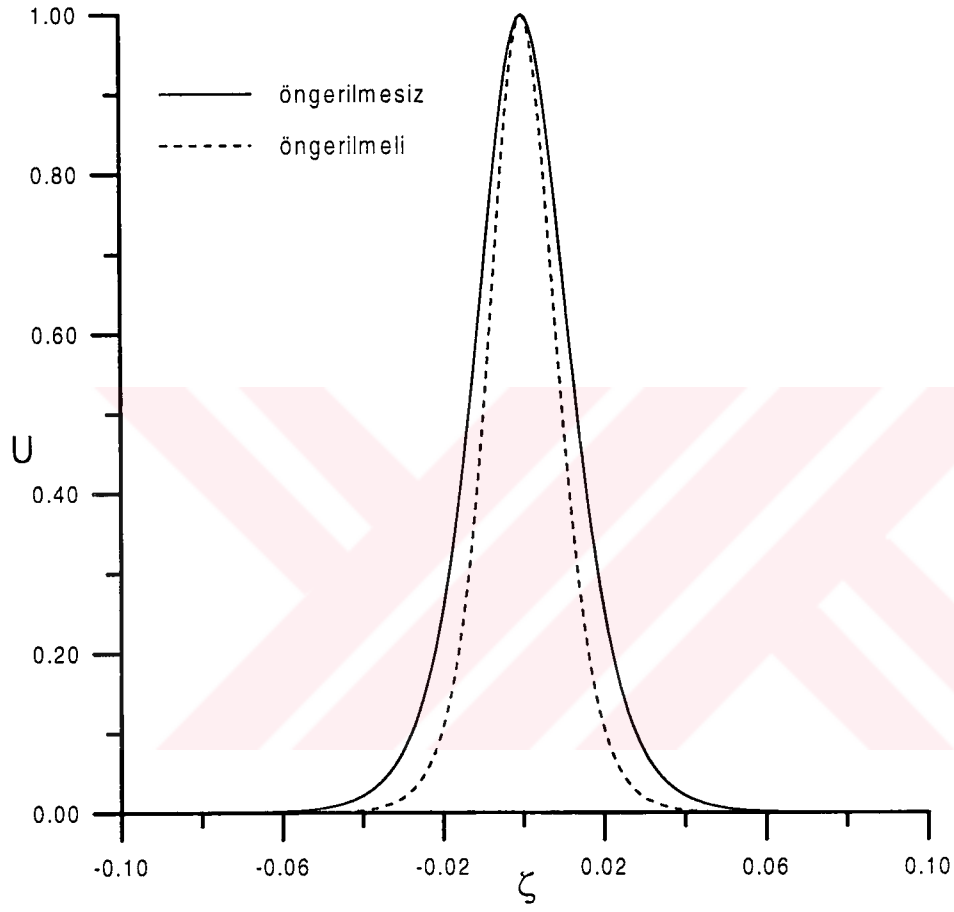


Şekil B.14 Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi

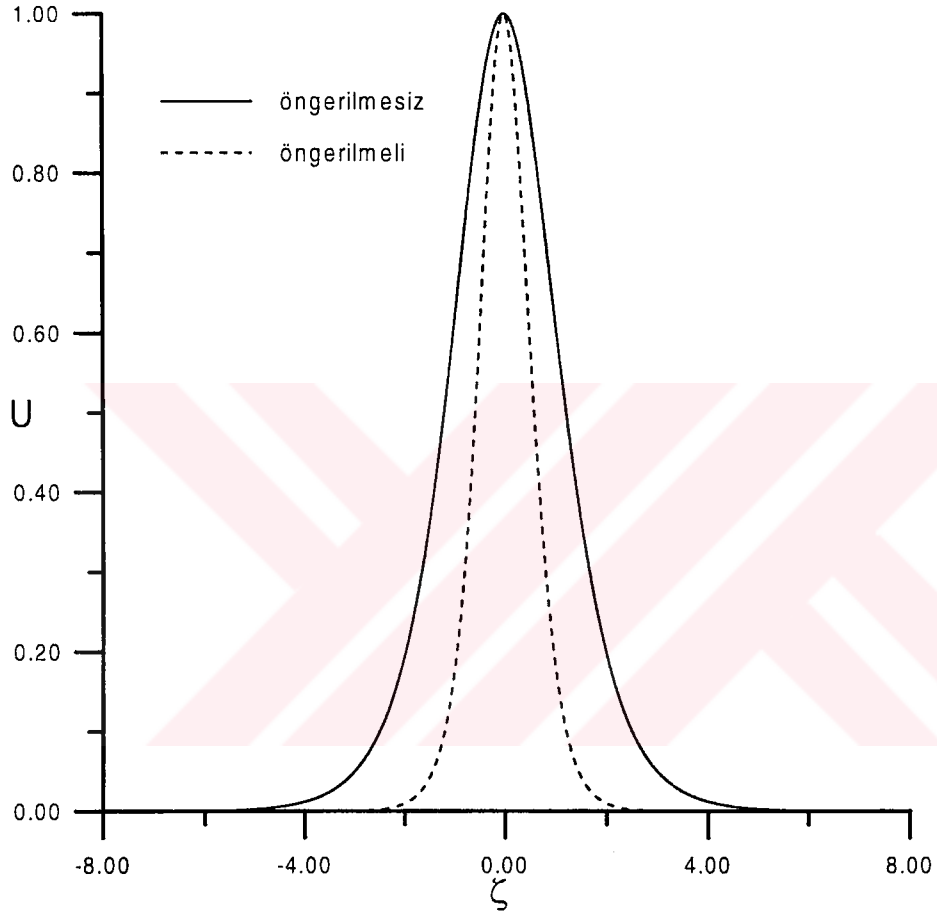


Şekil B.15 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi

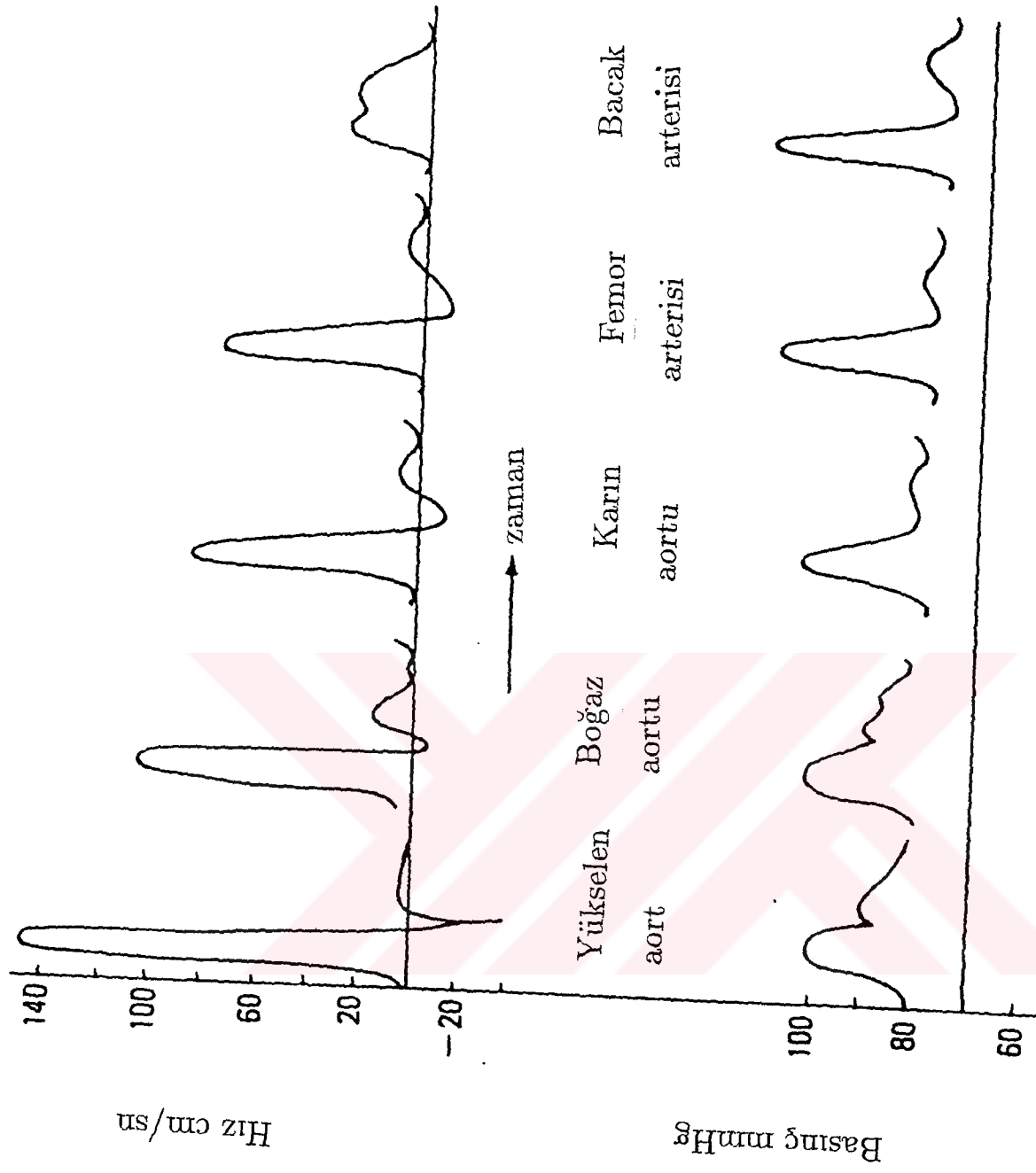




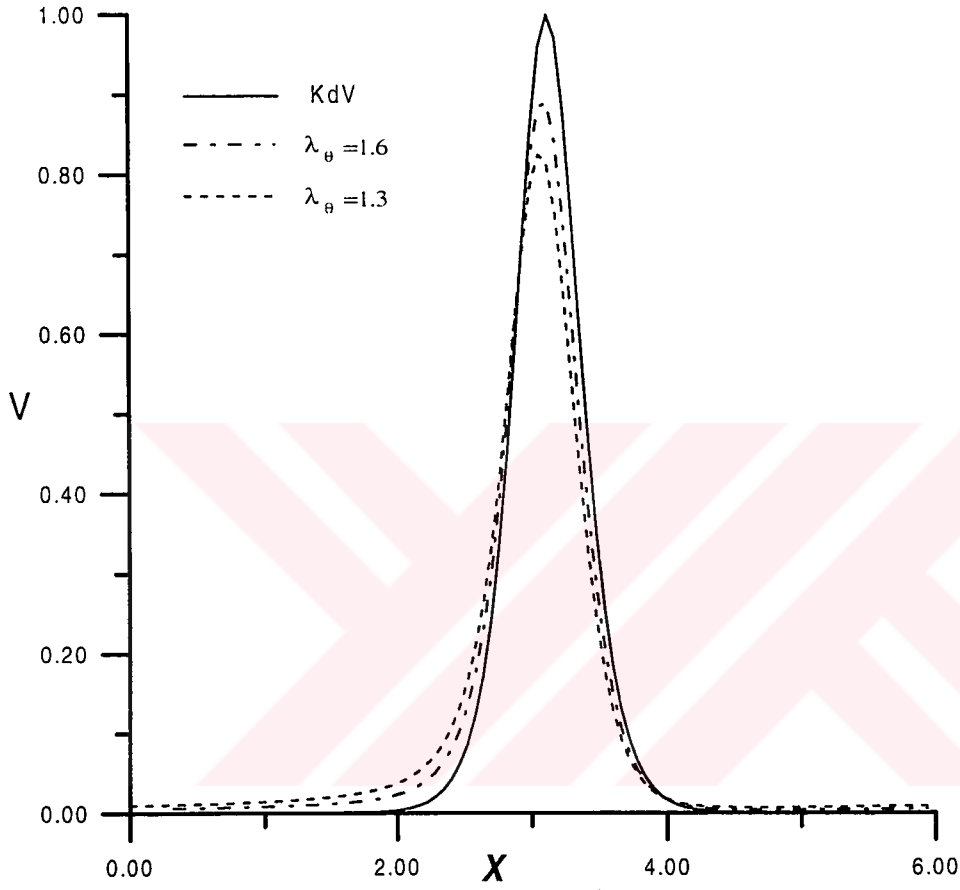
Şekil B.16 Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi



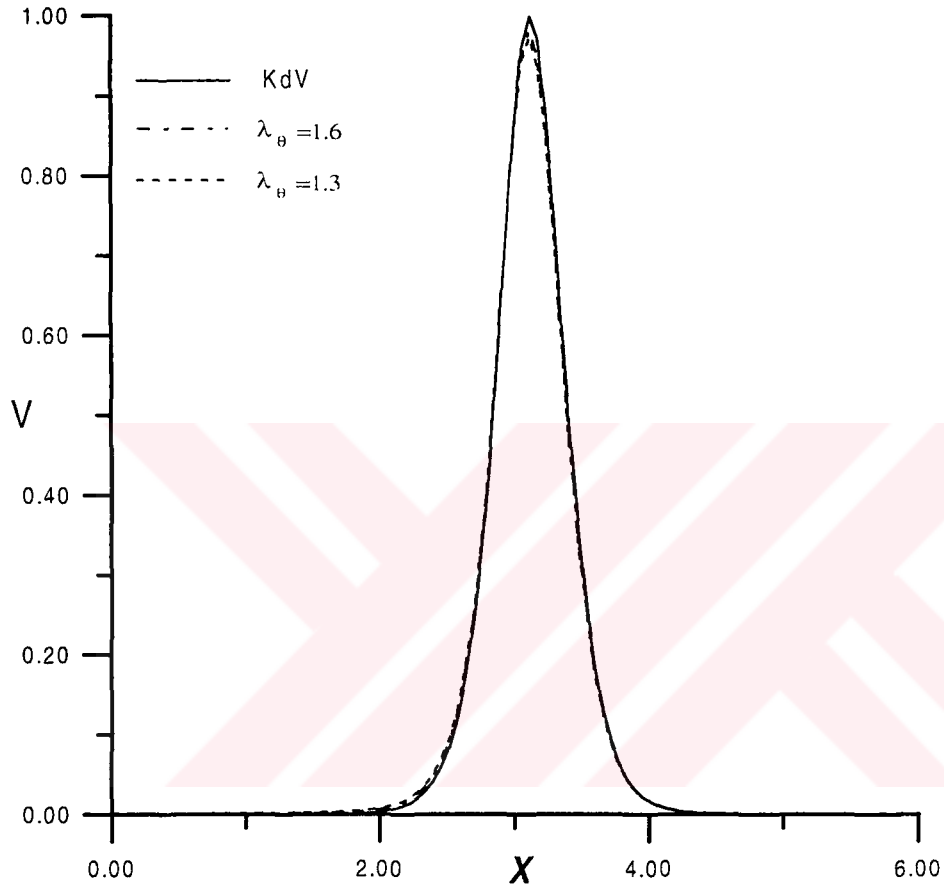
Şekil B.17 Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, yalnız dalga profilinin tüpün öngerilmeli ve öngerilmesiz olması durumundaki değişimi



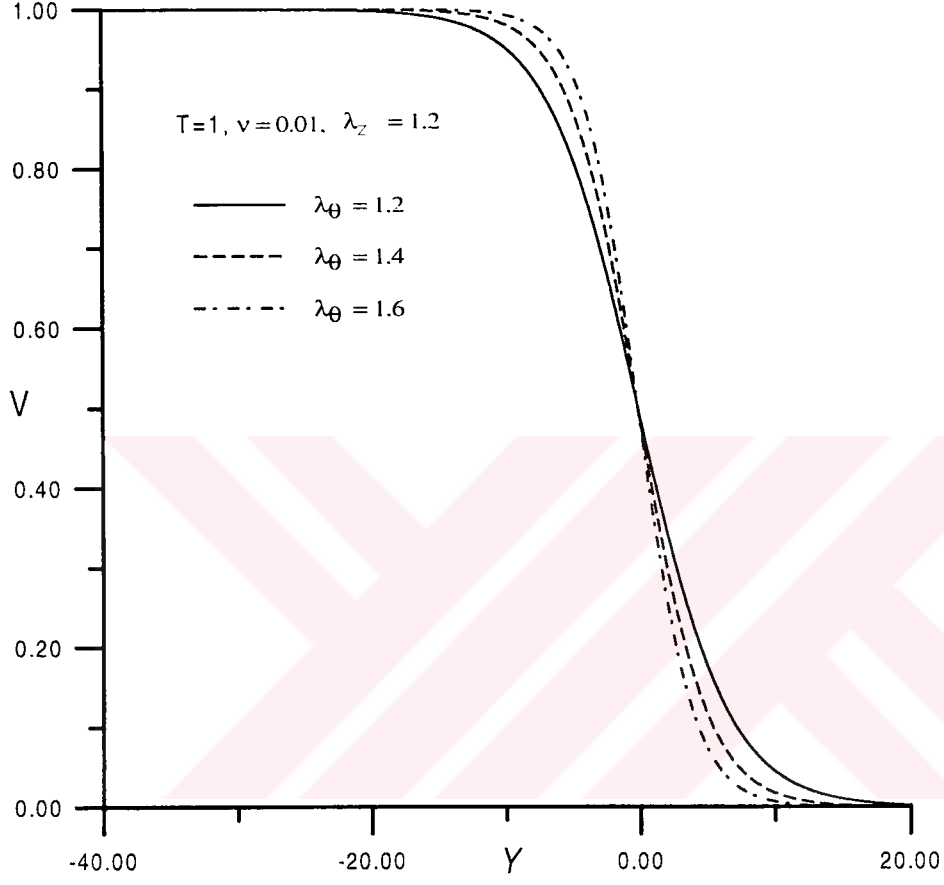
Şekil B.18 Arterilerde deneysel olarak gözlenen dalga profilleri



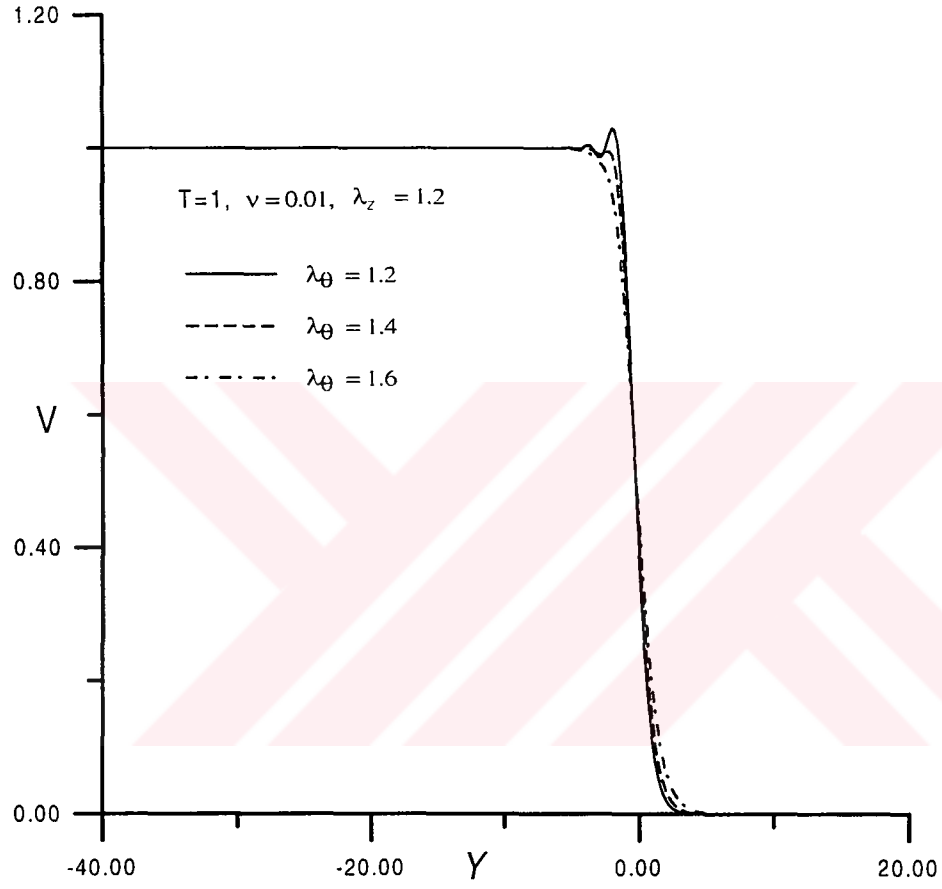
Şekil B.19 Biyolojik malzeme ve birinci dalga için, V-KdV denkleminin yalnız dalga profilinin germe ile değişimi



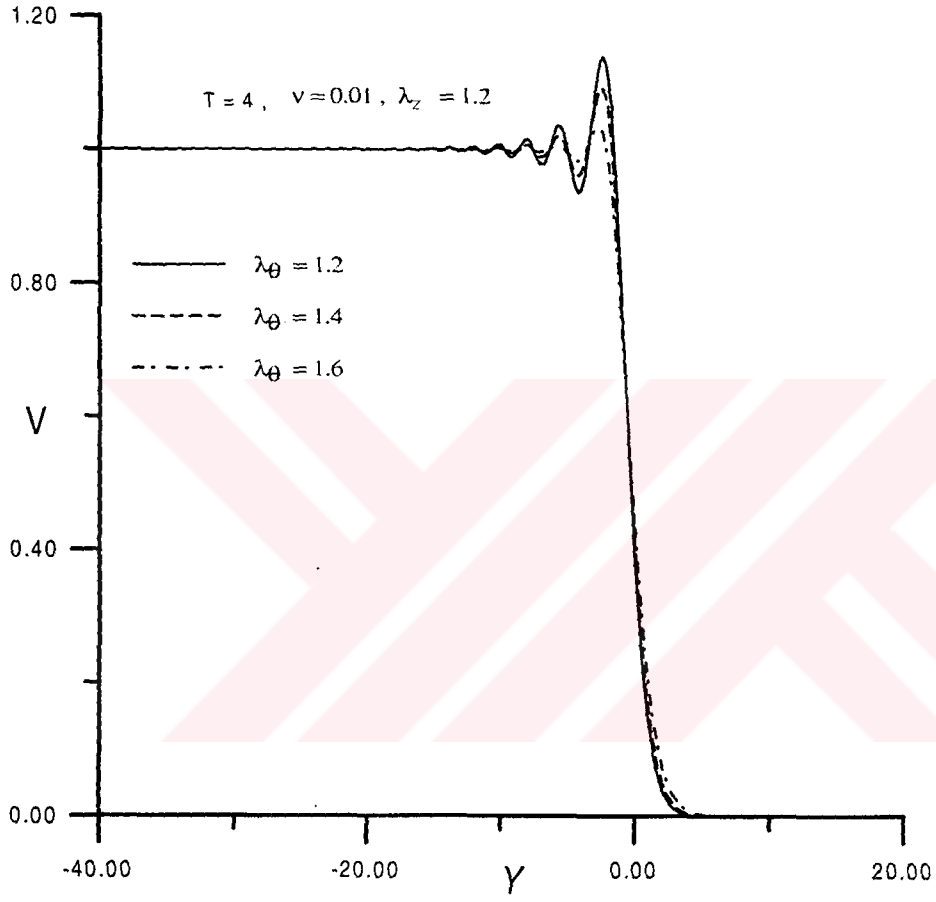
Şekil B.20 Biyolojik malzeme ve ikinci dalga için, V-KdV denkleminin yalnız dalga profilinin germe ile değişimi



Şekil B.21 Mooney-Rivlin malzeme ve birinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=1$ )

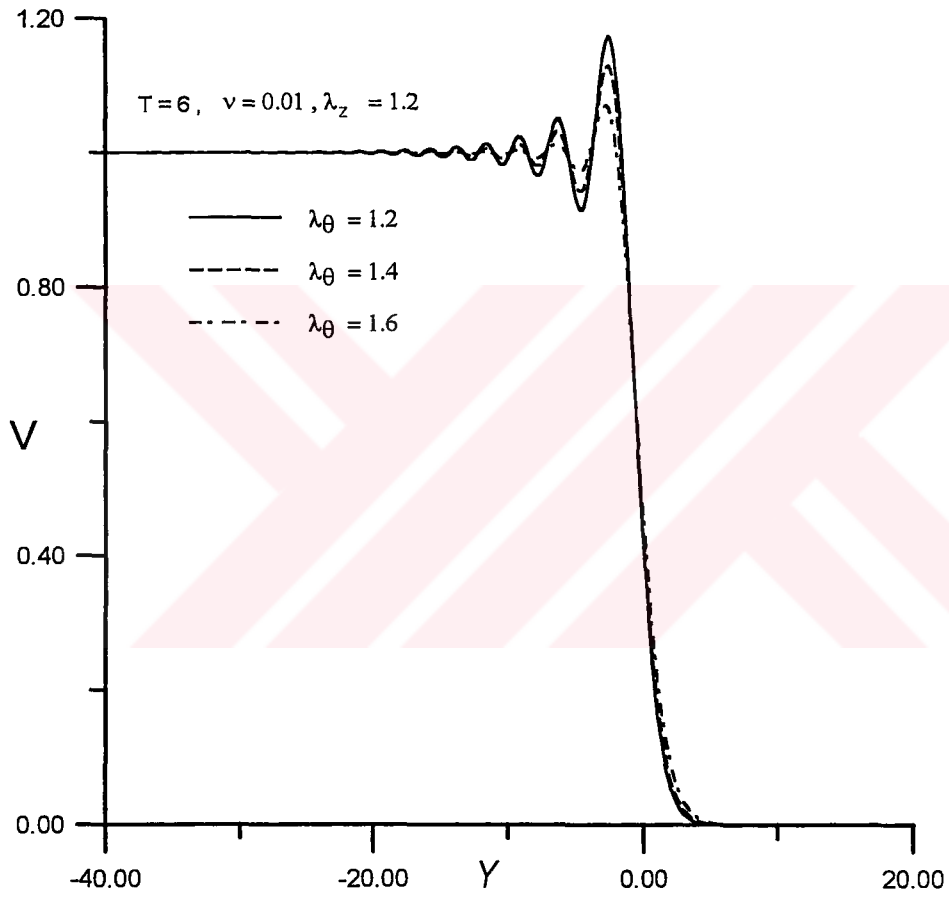


Şekil B.22 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=1$ )



Şekil B.23 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin şok profilinin germe ile değişimi ( $T=4$ )





Şekil B.24 Mooney-Rivlin malzeme ve ikinci dalga için, KdVB denkleminin şok profiline germe ile değişimi ( $T=6$ )

## ÖZGEÇMİŞ

Nalan Antar 1969 yılında Diyarbakır'da doğdu. 1986 yılında Avcılar 50.Yıl İnsa Lisesinden, 1990 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünden mezun oldu. 1990-1993 yılları arasında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Mühendislik Bilimleri Mekanik programında master yaptı. 1994 yılında İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsünde Mühendislik Bilimleri Mekanik programında doktora eğitimine başladı. 1991 yılından beri TÜBİTAK, Temel Bilimler Araştırma Enstitüsünde araştırmacı olarak çalışmaktadır.

