

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SÜPERSİMETRİK ALAN TEORİLERİNİN
KOHOMOLOJİK YAPILARI**

143079

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. S. Kayhan ÜLKER
(509972017)

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ SAVUNMA MERKEZİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 Mayıs 2002

Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Ekim 2002

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ömer Faruk DAYI (İ.T.Ü.)

Prof. Dr. İsmail Hakkı DURU (F.G.E.)

Prof. Dr. Cihan SAÇLIOĞLU (B.Ü.)

Doç. Dr. Neşe ÖZDEMİR (İ.T.Ü.)

EKİM 2002

ÖNSÖZ

Bu çalışma aracılığıyla ilk olarak sayın hocam Prof. Dr. M. Hortaçsu'ya teşekkür etmeyi bir borç biliyorum. Kendisi tüm fizik eğitim ve öğrenim aşamalarımda değerli bilgi birikimini ve bakış açısını paylaşmayı esirgemeyerek gerek bu çalışmanın alt yapısının oluşmasında, gerekse bu çalışmanın gelişmesinde büyük katkısı olmuştur.

Bu çalışmada incelenen probleme ilgimi çeken ve çalışmanın Bonn Üniversitesi Teorik Fizik Bölümü'nde yürütülen kısmında karşılaştığım sorunlarda yardım eden sayın Prof. Dr. R. Flume'ye teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışma sırasında karşılaştığım çeşitli sorunları verdiği cevaplarla aydınlatan Sayın Prof. Dr. Ö. F. Dayı'ya ve Uni-Bonn ve İ.T.Ü. Fizik bölümlerindeki tüm çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu çalışma Türkiye Bilim ve Teknik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK), Bütünleştirilmiş Doktora Programı ile desteklenmiştir. Dolayısıyla bana bu şansı verdiklerinden ve desteğin uzatılması için gösterdikleri anlayıştan dolayı TÜBİTAK, Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'na ve destek boyunca ilgili tüm sorunlarım ile ilgilenen sayın A. Ataş'a teşekkür ederim.

Son olarak, tüm yaşamım boyunca gerekli ilgi, sevgi, destek ve özveriye esirgemeyerek bu güne gelmemde en büyük payları olan sevgili annem Rezzan ve babam Erden Ülker'e ve bu çalışma boyunca gösterdiği sabırdan dolayı sevgili eşim Zoé Leenhardt Ülker'e teşekkür ederim.

Mayıs 2002

S. Kayhan ÜLKER

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
KISALTMALAR	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. SÜPERSİMETRİK ALAN TEORİLERİ	4
2.1. Wess-Zumino Modeli	5
2.2. N=1 Super Yang-Mills Teorisi	11
2.3. N=2 Super Yang-Mills Teorisi	13
3. SÜPERSİMETRİK ALAN TEORİLERİNİN KOHOMOLOJİK YAPISI	18
3.1. Süpersimetri Kohomolojisi	18
3.2. Wess-Zumino Modelinin Kohomolojik Yapısı	20
3.3. N=1 Super Yang-Mills Teorisinin Kohomolojik Yapısı	23
3.4. N=2 Super Yang-Mills Teorisinin Kohomolojik Yapısı	26
4. SÜPER YANG-MILLS TEORİLERİ VE BRST KOHOMOLOJİSİ	31
4.1. N=1 SYM Teorisi ve BRST Kohomolojisi	32
4.1.1 Genişletilmiş BRST Dönüşümleri ve ST Operatörü	32
4.1.2 ST Operatörünün Kohomolojisi ve N=1 SYM Eylemi	40
4.2. N=2 SYM Teorisi ve BRST Kohomolojisi	48
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	58
EKLER	62
ÖZGEÇMİŞ	70

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1 N=1 SYM teorisinde alanların boyutları ve R yükleri	24
Tablo 2 N=2 SYM teorisinde alanların boyutları ve R yükleri	26
Tablo 3 N=1 SYM teorisinde alanların boyutları, Grassmann pariteleri,hayalet sayıları ve R yükleri	42
Tablo 4 N=2 SYM teorisinde alanların boyutları, Grassmann pariteleri, hayalet sayıları ve R yükleri	53



KISALTMALAR

KD	:	Kabuk dışı
KÜ	:	Kabuk üstü
WZ	:	Wess-Zumino
SYM	:	Süper Yang-Mills
BRST	:	Becchi, Rouet, Stora, Tyutin
BV	:	Batalin, Vilkovisky
ST	:	Slavnov-Taylor



SEMBOL LİSTESİ

$\mu, \nu, \lambda, \rho, \dots$	:	Uzay-zaman indisleri
$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	:	Süpersimetri indisleri
$i, j, k, \dots$	:	SU(2)-R indisleri
$\Phi, A_\mu, \phi, \psi_\alpha, \lambda_\alpha, \mathcal{D}, \dots$	:	Alanlar
$Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$	:	Kiral ve antikiral süpersimetri üreteçleri
$\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$	:	Süpersimetri parametreleri
$\xi_\alpha, \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$	:	Komüt eden süpersimetri hayaletleri
$\mathcal{S}(\varphi)$	:	ST özdeşliği
$\mathcal{B}$	:	ST operatörü
$\mathcal{Q}$	:	Tırmanma operatörü

SÜPERSİMETRİK ALAN TEORİLERİNİN KOHOMOLOJİK YAPILARI

ÖZET

Süpersimetrik alan teorilerinin cebirsel yapısı yardımıyla bir kohomoloji problemi tanımlanmıştır. Bu kohomoloji probleminin bazı özel çözümleri kullanılarak, kabuk dışı süpersimetrik WZ modeli ve $N=1,2$ SYM teorilerinin eylemlerinin düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu supervaryasyonları ile temsil edilebileceği gösterilmiştir. Bu sonuç, süpersimetrik eylemlerin ilgili bir süperçoklunun en üst elemanı oluşu ile ilişkilendirilebilir. Kabuk üstü süpersimetrik durum içinse, elde edilen benzer bağıntıların orjinal eylemden hareket denklemleri kadar fark eden bir ifade verdiği bulunmuştur. Her ne kadar, kabuk üstü WZ modelinde etkileşme terimi ve düşük boyutlu alan polinomları arasında cebirsel bir ilişki bulunabilse de, SYM teorileri için kabuk üstü durumda benzer bir cebirsel ilişki bulunamaz.

Diğer taraftan, dört boyutta BRST kohomolojisi ve $N=1,2$ SYM eylemleri arasındaki ilişki tartışılmıştır. Özellikle, Cebirsel renormalizasyon yöntemindeki lineerleştirilmiş Slavnov-Taylor operatörü $\mathcal{B}$ 'nin kohomolojik analizinden elde edilen yavru denklemlerin çözümlerinden, kabuk dışı ve kabuk üstü $N=1,2$ SYM eylemlerinin her ikisinin de düşük boyutlu alan polinomları ile ilişkilendirilebileceği gösterilmiştir. Bundan başka, kabuk dışı ve kabuk üstü durumlardaki çözümlerin, bu iki durumdaki kohomolojinin aynı olmasından dolayı, birbirlerinden sadece bir $\mathcal{B}$ tam terim kadar fark ettiği gösterilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar diğer süpersimetrik modellerin cebirsel yapısının incelenmesinde kullanılabileceği gibi, aynı zamanda süpersimetrik teorilerin renormalize olmama teoremlerinin ve SYM teorilerindeki pertürbatif olmayan instanton katkılarının anlaşılmasında da kullanılabiliirliği tartışılmıştır.

COHOMOLOGICAL STRUCTURE OF SUPERSYMMETRIC FIELD THEORIES

SUMMARY

A cohomology problem is defined by using the algebraic structure of the (globally) supersymmetric field theories. By using some particular solutions of this cohomology problem, it is shown that the off-shell supersymmetric actions of Wess-Zumino model and $N=1,2$ SYM theories can be represented as multiple super variations of some lower dimensional field polynomials. This result can be related to the fact that supersymmetric actions can be viewed as the highest component of respective supermultiplets. For the on-shell supersymmetric case, it is found that above similar relations differ from the original actions by modulo equation of motion terms. Even if it is possible to find an algebraic relation between the interaction terms of on-shell Wess-Zumino model and lower dimensional field polynomials, it is not possible to find such relations for on-shell SYM theories.

On the other hand, the relation between BRST cohomology and the $N=1$ and $N=2$ supersymmetric Yang-Mills actions in four dimensions is discussed. In particular, it is shown that both off and on-shell $N=1,2$ SYM actions are related to a lower dimensional field polynomial by solving the descent equations, which is obtained from the cohomological analysis of linearized Slavnov-Taylor operator $\mathcal{B}$, in the framework of Algebraic Renormalization. Furthermore we show that off and on-shell solutions differ only by a $\mathcal{B}$ -exact term, which is a consequence of the fact that the cohomology of both cases are same.

As the results obtained in this work can be used to understand the algebraic structure of other supersymmetric models, it is also discussed the applicability of our method to understand the non-renormalization theorems of supersymmetric theories and also to understand the non-perturbative instanton contributions in SYM theories.

1 GİRİŞ

Kuantum alan teorilerinin süpersimetrik genelleştirilmeleri [1, 2, 3, 4], günümüz parçacık fizikçileri tarafından hem fenomenolojik ve hem de teknik açıdan pek çok fayda getirdiğinden yoğun olarak çalışılmaktadır. Bu faydaların en önemlilerinden bir tanesi renormalize olmama (non renormalization) teoremleridir.

Kısaca renormalize olmama teoremleri, süpersimetrik alan teorilerinin pertürbatif olarak renormalize edildiğinde belirli bir mertebeden sonra ortaya çıkan mor ötesi ıraksaklıkların birbirini götürmesi sonucu bu mertebeden sonra teorinin sonlu olduğunu gösteren teoremlerdir [5]. Mor ötesi ıraksaklıkların birbirlerini götürmeleri ilk olarak Iliopoulos ve Zumino [6] tarafından Wess-Zumino modeli için incelenmiştir. Daha sonra 1975'lerde süperuzayda tanımlanan süperalan formülasyonu geliştirilerek [7, 1, 2] çeşitli teorilerdeki renormalize olmama teoremleri süpersimetrisinin getirdiği tüm kolaylıklar kullanılarak ispatlanmıştır [8, 9, 10].

Diğer taraftan, fiziksel olarak aşikar olmayan hesaplamalar için süpersimetrisinin bileşen alan formülasyonu kullanılmalıdır. Bu formülasyonda teorinin süpersimetrik olması için kuantum alan teorisinin standart kavramlarından başka herhangi bir varsayıma ihtiyaç yoktur. Tek kısıtlama teorinin ek olarak süpersimetriye sahip olabilmesi için doğal olarak teorinin eyleminin bu süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kalmasıdır. Bu kısıtlama sadece teorinin sahip olduğu alanları, kütleleri ve bağlanma (kuplaj) sabitlerini belirler.

Yukarıda bahsedilen renormalize olmama teoremleri, bileşen alan formülasyonunda ilk olarak Wess-Zumino modeli için R. Flume ve E. Kraus [11] tarafından gösterilmiştir. Bu ispat, modeldeki etkileşme terimlerinin düşük boyutlu bir alan polinomunun çoklu süpervaryasyonu olarak yazılabileceğinin gösterilmesine dayanmaktadır [11]. Dolayısıyla renormalize olmama teorem-

lerinin cebirsel kaynağının süpersimetrik teorilerin kohomolojik yapısı olduğu düşünülebilir [12].

Yaptığımız bu çalışmada dört boyutlu süpersimetrik alan teorilerinin kohomolojik yapılarını inceleyeceğiz. Her ne kadar bu yapının incelenmesi kendi başına ilginç olsa da, yukarıda da bahsedildiği gibi renormalize olmama teorilerinin bileşen alan formülasyonunda ispatlanması için önemli bir yer tutmaktadır.

Yapılan çalışma iki ana kısma ayrılabilir. İlk kısımda Wess-Zumino (WZ) modelinin etkileşme terimlerinin ve $N=1$, $N=2$ Süper Yang-Mills (SYM) teorilerinin düşük boyutlu alan polinomları cinsinden, süpersimetri cebri yardımıyla, bileşen alan formülasyonunda nasıl ve hangi şartlar altında elde edilebileceği gösterilecektir [12]¹. Elde edilecek bu ilişkiler süpersimetrik teorilerin kohomolojik yapısıyla ilgilidir [12] ve süpersimetri cebri yardımıyla tanımlanabilen bir kohomoloji probleminin çözümü olarak yazılabilir [13].

Bölüm 3'de incelenecek olan bu yaklaşımda süpersimetrinin yardımcı alanları içeren, yani kabuk-dışı (KD, off-shell) süpersimetri formülasyonu kullanılması zorunludur. Başka bir deyişle KD süpersimetri ile süpersimetrik eylemler ve etkileşme terimleri tam olarak düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu varyasyonu ile bulunabilmesine rağmen, benzer yaklaşımla kabuk-üstü (KÜ, on-shell) süpersimetri kullanılarak elde edilen terimler orijinal eylem ve etkileşme terimlerinden hareket denklemleri kadar fark eder. Bu sorun KÜ-süpersimetri için yardımcı alanların hareket denklemleri yardımıyla yok edilmesi sonucu süpersimetri cebrinin sadece hareket denklemleri kullanıldığında kapanması ile ilgilidir. KÜ-süpersimetri durumunda ortaya çıkan bu eksik terimlerin SYM teorileri için bir şekilde telafi edilerek, düşük boyutlu alan polinomları ve KÜ eylem arasında cebirsel bir ilişki bulunabilmesi mümkün değildir.

Yukarıda bahsedilen KÜ-süpersimetri cebrinin hareket denklemlerine kapanması probleminin zarif bir çözümü Batalin-Vilkovisky (BV) yöntemi ile bul-

¹ $N=1$ küresel ve yerel (lokal) süpersimetrik eylemlerin ve anomalilerin benzer bir yolla incelenmesi Ref.[14, 15, 16]'da bulunabilir.

nabilir [17, 18, 19]². Cebirsel Renormalizasyon yöntemi [21] olarak da anılan bu metotta teörünün renormalize edilebilmesi için her alana karşılık eylemde bu alanların (genişletilmiş) BRST dönüşümlerine bağlanan anti-alanlar teoriye ilave edilir. Böylelikle renormalizasyon programı anti-alanlar yardımıyla yazılan lineerleştirilmiş Slavnov-Taylor (ST) operatörünün (BRST) kohomolojisi probleminin çözümüne indirgenir. Bu kohomoloji probleminin hayalet sayısı 0 için çözümü, teörünün renormalizasyonu için kuantum eylemine eklenmesi gereken karşı-terimleri (counter-terms), hayalet sayısı 1 için olan çözümleri ise teorideki olası anomali terimlerini verir.

Cebirsel Renormalizasyon yöntemi bugüne kadar çeşitli (KÜ) süpersimetrik teorilerin renormalizasyonuna uygulanmıştır [22, 23, 24, 25, 26, 27]. Belirtilen çalışmaların başlangıç noktası olağan BRST dönüşümlerinin süpersimetri dönüşümlerini de içerecek şekilde genişletilmesidir³. Böylelikle Wess-Zumino ayarında süpersimetrik ayar teorilerindeki diğer bir zorluk olan süpersimetri cebirinin alanlara bağlı ayar dönüşümleri ile modifiye olması problemi çözülebilmıştır. Diğer taraftan, aynı zamanda yukarıda bahsedilen KÜ süpersimetri cebirinin hareket denklemlerine kapanması problemi ise teörünün eylemine standart olmayan anti-alanların kuadratik terimleri eklenerek halledilmiştir [22, 23, 24, 25, 26, 27, 32].

Yaptığımız çalışmanın ikinci kısmında Cebirsel Renormalizasyon yönteminde elde edilen lineerleştirilmiş ST operatörü $\mathcal{B}$ 'nin, BRST kohomolojisi incelenerek $N=1$ ve $N=2$ SYM teorisinin (genişletilmiş) eylemleri hem KD ve hem de KÜ süpersimetri için düşük buyutlu alan polinomları cinsinden nasıl ifade edilebileceği gösterilecektir [33]. Elde edilen bu bağıntılar $\mathcal{B}$ -operatörünün kohomoloji probleminin incelenmesi ile elde edilen yavru (descent) denklemlerin çözümleri ile ilişkilendirilebilir. Bu yöntemin ilk avantajı yavru denklemlerin sonuncusunun çözümü eylemin dahil olduğu süpersimetri çoklusunun en alt (en düşük boyutlu) elemanını ve ilki de çoklunun en üst elemanını yani teörünün eylemini vermesidir.

²Bu yöntemin kendi başına yeterli bir incelemesi Ref.[20]'de verilmiştir.

³BRST dönüşümlerinin küresel simetrileri içerecek şekilde genişletilmesi, bizim bilimiz dahilinde ilk olarak lineer olmayan Sigma modelleri için Ref.[28, 29]'da kullanılmıştır. BRST dönüşümlerinin keyfi bir simetri ile genişletilmesi Ref.[30, 31]'de bulunabilir.

Dolayısıyla eylemin hangi düşük boyutlu alan polinomu ile ilişkili olduğu ve bu ikisinin ne şekilde birbiriyle ilişkilendirilebileceği BRST kohomolojisinin çözümü ile doğal olarak bulunabilir [33].

Kullanılan yöntemin diğer bir avantajı ise KD ve KÜ süpersimetri ile elde edilen eylemlerin birbirlerinden farkının bir tam $\mathcal{B}$ -terimi olarak yazılabilesidir [33]. Bu sonuç sadece dış alan içeriği ile birbirlerinden farklı olan iki teorinin aynı olduğunu söyleyen teorem [34] ile ilgilidir.

Son olarak bu çalışmanın bir yan sonucu olarak KÜ süpersimetrik teorilerde anti-alanların çeşitli kombinasyonlarının KD süpersimetrik teorilerdeki yardımcı alanlar gibi davrandıkları bulunmuştur [33]. Bu sonuç her ne kadar şaşırtıcı olmasa da bugüne kadar yardımcı alan içeriği bulunamamış olan teorilerin (örneğin $N=4$ SYM) KD süpersimetrik formülasyonunun bulunmasında faydalı olabileceğini düşünüyoruz.

Yapılan çalışmanın planı aşağıdaki gibidir:

Bölüm 2’de süpersimetrik alan teorilerinin temel özellikleri ve bu teorilerin süpersimetrisinin bileşen alan formülasyonunda nasıl elde edilebileceği özetlenmektedir.

Bölüm 3’de süpersimetri cebri yardımıyla bir kohomoloji problemi tanımlanarak, bu kohomoloji probleminin çözümlerinden WZ modelinin ve $N=1,2$ SYM teorilerinin KD eylemlerinin düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu süpervaryasyonu ile elde edilebileceği gösterilecektir. Benzer yaklaşım KÜ durum için de tartışılacaktır.

Bölüm 4’de $N=1$ ve $N=2$ SYM teorilerinin (genişletilmiş) BRST kohomolojisi incelenerek hem KD ve hem de KÜ süpersimetrik eylemlerin tam olarak düşük boyutlu alan polinomları cinsinden yazılabileceği gösterilecektir.

Son olarak, Bölüm 5’de elde edilen sonuçlar özetlenerek, bu sonuçların SYM teorilerindeki diğer çalışmalara uygulanabilirliği tartışılacaktır.

2 SÜPERSİMETRİK ALAN TEORİLERİ

Bir teorideki fermiyonlar ve bozonlar arasında tanımlanan bir simetri olan süpersimetri, S-matrisin standart simetrilerine relativistik kuantum alan teorisinin aksiyomlarını bozmadan eklenebilen tek simetridir [35, 4]. Dolayısıyla süpersimetrik bir kuantum alan teorisi süpersimetri altında dönüşen alanlar ve bu simetri altında değişmez kalan bir Lagranjiyen ile tutarlı olarak ifade edilebilir.

Bir teoride süpersimetrinin varolmasının en önemli özelliklerinden bir tanesi, süpersimetri sayesinde birbirlerine dönüşen farklı spinli fermiyon ve bozonların tek bir (süper) simetri çoklusunun elemanları olarak yazılabilesidir. Dolayısıyla, herhangi bir süperçokluda fermiyon ve bozon sayıları eşittir ve aynı çokluya ait olan tüm fermiyon ve bozon alanları aynı kütle ve aynı bağlanma sabitine sahiptir.

Süpersimetrik bir teorein eylemi süperçoklular yardımıyla yazılabilir. Bileşen alan formülasyonunda, eylemin sahip olması istenen süperçoklular belirlendikten sonra, eylem bu süperçokluların elemanlarının standart kuantum alan teorisinden bilinen kinetik terimlerini ve D-boyutta renormalize edilebilir en genel kütle ve etkileşme terimlerini içeren bir ifade ile verilir. Doğal olarak, eylemdeki bu terimlerin katsayılarının alabileceği değerler eylemin süpersimetri altında değişmez kalma şartıyla kısıtlanmıştır.

Süpersimetrik alan teorilerinin anlaşılması için literatürdeki önemli kaynaklar [1, 2, 3, 4] olarak sıralanabilir. Bu bölümde, yapılan çalışmanın kendi başına anlaşılabilir olmasını umarak, süpersimetri [1] ve [3] izlenerek kısaca özetlenmeye çalışılacaktır.

2.1 Wess-Zumino Modeli

Dört boyutta yazılabilen en basit süpersimetrik model olan Wess-Zumino (WZ) modeli kiral ve anti-kiral süpersimetri çoklularının elemanlarını içerir. Dolayısıyla hem bu modelin inşası ve hem de daha genel teoriler için kullanılması gereken farklı çokluların nasıl bulunabileceği hakkında bir fikir vermesi için kiral ve anti-kiral çokluların ne şekilde elde edildiğinin incelenmesi faydalıdır [3].

Herhangi bir süpersimetri çoklusunun elde edilmesi için doğal olarak süpersimetri cebri bilinmelidir. N=1 (küresel) süpersimetri cebri 4-boyutta komütatörler cinsinden

$$[\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}] = 2\theta\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu \quad (2.1)$$

$$[\theta Q, \theta Q] = 0 = [\bar{\theta} \bar{Q}, \bar{\theta} \bar{Q}] \quad (2.2)$$

$$[P_\mu, \theta Q] = 0 = [P_\mu, \bar{\theta} \bar{Q}] \quad (2.3)$$

bağıntıları ile verilir. Burada θ_α ve $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ anti-komüt eden süpersimetri parametreleri ve P_μ momentum operatörüdür. Teorideki alanlar üzerine etki eden süpersimetri dönüşümleri ise kiral ve anti-kiral dönüşümlerin toplamı olarak yazılır,

$$\delta A = [\theta Q, A] + [\bar{\theta} \bar{Q}, A] \quad (2.4)$$

ve $P_\mu = -i\partial_\mu$ için yukarıdaki süpersimetri cebri kullanılarak

$$\delta^2 = -2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \quad (2.5)$$

elde edilir.

Süpersimetri cebri ile kiral çoklu ve bu çoklunun elemanları arasındaki süpersimetri dönüşümleri yedi basit adımla elde edilebilir [3]. İlk adım kiral çoklunun en düşük boyutlu elemanının bir kompleks skaler alan olarak seçilmesidir

$$\phi(x) = S(x) + iP(x) \quad (2.6)$$

İkinci adımda $\phi(x)$ 'in anti-kiral dönüşümler altında değişmez kalması için

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \phi(x)] = 0 \quad (2.7)$$

şartı konulmalıdır. Bu noktada eğer yukarıda verilen (2.1-2.3) cebri için Jacobi özdeşliği kullanılırsa

$$[\bar{\theta}\bar{Q}, [\theta Q, \phi]] + [\theta Q, [\phi, \bar{\theta}\bar{Q}]] = -[\phi, [\bar{\theta}\bar{Q}, \theta Q]] = 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi \quad (2.8)$$

$\phi(x)$ alanının bir sabit olmaması için $[Q_\alpha, \phi] \neq 0$ olması gerektiği görülür. Bu aynı zamanda ϕ alanının kompleks seçilmesinin gerekliliğini göstermektedir.

Üçüncü adımda $\psi_\alpha, F_{\alpha\beta}, X_{\alpha\dot{\beta}}$ alanları

$$[\theta Q, \phi] = a\theta^\alpha\psi_\alpha \quad (2.9)$$

$$[\theta Q, \psi_\beta] = b\theta^\alpha F_{\alpha\beta} \quad , \quad [\bar{\theta}\bar{Q}, \psi_\alpha] = cX_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \quad (2.10)$$

a, b ve c sabitler olmak üzere tanımlanır.

Dördüncü adım bu alanlara süpersimetri cebriinin uygulanmasıdır. Bu amaçla denk.(2.8)'de verilen Jacobi özdeşliği kullanılırsa

$$ac\theta^\alpha X_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi \quad (2.11)$$

olacağından

$$X_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi \quad (2.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan tekrar Jakobi özdeşliği kullanıldığında

$$[\theta'Q, [\theta Q, \phi]] + [\theta Q, [\phi, \theta'Q]] + [\phi, [\theta'Q, \theta Q]] = 0 \quad (2.13)$$

bulunan

$$ab\theta^\alpha\theta'^\beta F_{\beta\alpha} - ab\theta'^\alpha\theta^\beta F_{\beta\alpha} = 0 \quad (2.14)$$

eşitliğin sağlanabilmesi için $F_{\alpha\beta}$ alanının

$$F_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}F \quad (2.15)$$

formunda olması gerektiği bulunur.

Beşinci adım $F(x)$ alanının süpersimetri dönüşümlerinin tanımlanmasıdır:

$$[\theta Q, F] = d\theta^\alpha Y_\alpha \quad , \quad [\bar{\theta}\bar{Q}, F] = e\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Y}^{\dot{\alpha}} \quad (2.16)$$

Altıncı adım daha önceki adımlara benzer olarak Y ve $\bar{Y}$ alanlarına süpersimetri cebirinin uygulanmasıdır. Dolayısıyla tekrar Jacobi özdeşlikleri,

$$[\bar{\theta}\bar{Q}, [\theta Q, \psi_\alpha]] + [\theta Q, [\psi_\alpha, \bar{\theta}\bar{Q}]] + [\psi_\alpha, [\bar{\theta}\bar{Q}, \theta Q]] = 0 \quad (2.17)$$

$$[\theta'Q, [\theta Q, \psi_\alpha]] + [\theta Q, [\psi_\alpha, \theta'Q]] + [\psi_\alpha, [\theta'Q, \theta Q]] = 0 \quad (2.18)$$

ve (2.16) eşitliği kullanılarak

$$-be\theta_\alpha\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{Y}^{\dot{\alpha}} = 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\psi_\alpha + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\theta^\gamma\psi_\gamma \quad (2.19)$$

$$-bd\theta_\alpha\theta'^\beta Y_\beta + bd\theta'_\alpha\theta^\beta Y_\beta = bd\theta\theta'Y_\alpha = 0 \quad (2.20)$$

bağıntıları bulunur. Bu iki bağıntının çözümleri ise

$$\bar{Y}^{\dot{\alpha}} = \sigma_\mu^{\dot{\alpha}\alpha}\partial^\mu\psi_\alpha, \quad Y_\alpha = 0, \quad be = 2i \quad (2.21)$$

şeklinde elde edilir.

Yedinci ve son adım ise yukarıda kullanılmaya ihtiyaç duyulmayan süpersimetri cebirindeki diğer bağıntıların sağlanıp sağlanmadığının kontrol edilerek a, b, c, e katsayılarının tayin edilmesidir. Yukarıda verilen tanım ve sonuçlar kullanılırsa

$$[[\bar{\theta}'\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}], \psi] = [[\theta'Q, \theta Q], F] = [[\bar{\theta}'\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}], F] = 0 \quad (2.22)$$

$$[[\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}], F] = -2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu F \quad (2.23)$$

bağıntılarının ilgili Jacobi özdeşlikleriyle sağlandığı ve katsayılarında

$$a = b = \sqrt{2}, \quad c = e = i\sqrt{2} \quad (2.24)$$

olarak elde edildiği görülür. Dolayısıyla kiral çoklu Φ , iki kompleks skaler alan ϕ ve F , ve bir kiral Weyl spinor alanı ile yazılabilir $\Phi = (\phi, \psi_\alpha, F)^4$, ve çoklunun elemanları

$$\delta\phi = \sqrt{2}\theta\psi \quad (2.25)$$

$$\delta\psi_\alpha = i\sqrt{2}(\sigma^\mu\bar{\theta})_\alpha\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\theta_\alpha F \quad (2.26)$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi \quad (2.27)$$

süpersimetri dönüşümlerini sağlar.

⁴Görüldüğü gibi kiral çoklu 4 reel bozon ve 4 reel fermiyon alanı içerir. Bu sonuç yukarıda da belirtildiği gibi bir süpersimetri çoklusundaki bozon ve fermiyon sayılarının eşitliğini göstermektedir.

Diğer taraftan anti-kiral çoklunun elde edilmesi için tahmin edilebileceği gibi ikinci adımda verilen $[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \phi] = 0$ şartı yerine $[Q_{\alpha}, \phi] = 0$ kullanılmalıdır. Ancak

$$[Q_{\alpha}, \phi]^{\dagger} = -[\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \phi^{\dagger}] = 0 \quad (2.28)$$

olduğundan anti-kiral çoklu $\bar{\Phi} = (\phi^{\dagger}, \bar{\psi}, F^{\dagger})$, kiral multipllet Φ 'nin hermitsel eşleneği alınarak bulunabilir ve

$$\delta\phi^{\dagger} = \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} \quad (2.29)$$

$$\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2}(\bar{\sigma}^{\mu}\theta)^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\phi^{\dagger} + \sqrt{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}F^{\dagger} \quad (2.30)$$

$$\delta F^{\dagger} = i\sqrt{2}\theta\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi} \quad (2.31)$$

süpersimetri dönüşümlerini sağlar.

Görüldüğü gibi yukarıda verilen yedi adımda süpersimetri çokluları türetme yöntemi ile kiral ve anti-kiral çokluların alan içeriğinin tamamı, yani yardımcı alanları da içeren, yapısı elde edilebilir. Yardımcı alanlar⁵ $F, F^{\dagger}$ (2.1-2.3) ile verilen süpersimetri cebriinin, fermiyon alanlarının hareket denklemlerini sağlaması şartının kullanılmadan kapanmasını sağlarlar. Dolayısıyla elde edilen bu çoklular kabuk-dışı süpersimetriklerdir.

Yukarıda verilen yedi adımda süpersimetri çokluları türetme yöntemi benzer adımlar izlenerek (ve doğal olarak adım sayısı arttırılarak) daha karışık durumlara uygun şartlar altında uyarlanabilir [3]. Ancak bu her durum için çoklunun tüm elemanlarının bulunabileceğini göstermez. Örneğin N=4 SYM ve N=2 süpersimetrik madde çoklularının yardımcı alanları içeren yapıları halen bilinmemektedir ve dolayısıyla bu teorilerin KD süpersimetrik formülasyonunun bulunması ya da bulunamayacağının gösterilmesi ve bu formülasyonun altında yatan matematiksel gerçekliğin anlaşılmasında önem taşımaktadır.

Wess-Zumino modeli yukarıda bulunan kiral $\Phi = (\phi, \psi_{\alpha}, F)$ ve anti-kiral $\bar{\Phi} = (\phi^{\dagger}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}, F^{\dagger})$ süperçokluları ile verilir. Modelin eylemi

⁵Bu alanların yardımcı alan olarak adlandırılmasının nedeni, aşağıda gösterileceği gibi, teoremin eylemi yazıldığında, bu alanların hareket denklemlerinin diğer alanlar cinsinden cebirsel bir denklem olmasıdır. Dolayısıyla bu alanlar teoremin eyleminden hareket denklemleri kullanılarak yok edilebilirler ve fiziksel olarak bir değer taşımazlar.

$$\begin{aligned}
S_{WZ} &= \int d^4x (L_{kin} + L_{etk}) \\
&= \int d^4x \{ -\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i\bar{\psi} \bar{\phi} \psi + F^\dagger F \\
&\quad + [m(\phi F - \frac{1}{2}\psi\psi) + g(\phi\phi F - \psi\psi\phi) + h.c.] \} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

ifadesi ile kinetik ve etkileşme terimlerinin toplamı ile verilir. Burada m ve g sırasıyla alanların kütlesi ve (kompleks) bağlanma sabitidir.

Denklem (2.32)' de verilen L_{kin} ve L_{etk} terimleri ayrı ayrı (2.25-2.27) ve (2.28-2.31) ile verilen süpersimetri dönüşümleri altında değişmezdir:

$$\delta L_{kin} = \delta \{ -\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i\bar{\psi} \bar{\phi} \psi + F^\dagger F \} = 0 \quad (2.33)$$

$$\delta L_{int} = \delta \{ m(\phi F - \frac{1}{2}\psi\psi) + g(\phi\phi F - \psi\psi\phi) + h.c. \} = 0 \quad (2.34)$$

Diğer taraftan WZ modelinin alanları için hareket denklemleri

$$\partial^2 \phi = -mF^\dagger - 2\bar{g}\phi^\dagger F^\dagger + \bar{g}\bar{\psi}\bar{\psi} \quad , \quad \partial^2 \phi^\dagger = -mF - 2g\phi F + g\psi\psi \quad (2.35)$$

$$\bar{\phi}\psi = im\bar{\psi} + 2i\bar{g}\bar{\psi}\phi^\dagger \quad , \quad \phi\bar{\psi} = im\psi + 2ig\psi\phi \quad (2.36)$$

$$F = -m\phi^\dagger - \bar{g}\phi^\dagger\phi^\dagger \quad , \quad F^\dagger = -m\phi - g\phi\phi \quad (2.37)$$

olarak bulunur. Burada denklem (2.37)'den de görüldüğü gibi F ve $F^\dagger$ alanlarının hareket denklemleri bu alanların türevlerini içermeyen cebirsel bir denklemdir. Bu nedenden ötürü yardımcı alan olarak adlandırılan F ve $F^\dagger$ alanları fiziksel hesaplamalar için ilginç değildirler ve (2.37) kullanılarak modelin eyleminden ve süpersimetri dönüşümleri (2.27-2.31)'den yok edilebilirler. Böylelikle süpersimetrinin yardımcı alanları içermeyen KÜ formülasyonu elde edilmiş olur.

F ve $F^\dagger$ yardımcı alanlarının yok edilmesiyle KÜ süpersimetrik WZ eylemi

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{WZ} &= \int d^4x [-\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - i\bar{\psi} \bar{\phi} \psi - (m\phi^\dagger + \bar{g}\phi^\dagger\phi^\dagger)(m\phi + g\phi\phi) \\
&\quad - \frac{1}{2}m\psi\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\bar{\psi} - g\psi\psi\phi - \bar{g}\bar{\psi}\bar{\psi}\phi^\dagger] \quad (2.38)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve KÜ süpersimetri dönüşümleri δ' altında

$$\delta' \phi = \sqrt{2}\theta\psi \quad (2.39)$$

$$\delta' \psi_\alpha = i\sqrt{2}(\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu \phi - m\sqrt{2}\theta_\alpha \phi^\dagger - \bar{g}\sqrt{2}\theta_\alpha \phi^\dagger \phi^\dagger \quad (2.40)$$

$$\delta' \phi^\dagger = \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\psi} \quad (2.41)$$

$$\delta' \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = i\sqrt{2}(\bar{\sigma}^\mu \theta)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^\dagger - m\sqrt{2} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \phi - g\sqrt{2} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \phi \phi \quad (2.42)$$

değişmez kalır,

$$\delta' \tilde{S}_{WZ} = 0 \quad (2.43)$$

Görüldüğü gibi KÜ süpersimetri dönüşümleri artık eldeki modele, yani kütle m ve bağlanma sabiti g 'ye bağlıdır. Diğer taraftan KÜ süpersimetri dönüşümleri kullanıldığında (2.1-2.3) ile verilen süpersimetri cebri sadece (2.36) ile verilen fermiyonların hareket denklemleri sağlanıyorsa elde edilir⁶ ve (2.5) bağıntısı

$$\tilde{\delta}^2 = -2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \quad (\text{mod. } \psi, \bar{\psi}'\text{'in hareket denklemleri}). \quad (2.44)$$

şeklini alır. Dolayısıyla her ne kadar modelden yardımcı alanlar yani bazı bozonik alanlar atılmış olsa da, hareket denklemlerinin sağlanma şartı bozulmuş gibi gözüken fermiyon-bozon simetrisini yeniden sağlar.

2.2 N=1 Süper Yang-Mills Teorisi

N=1 Süper Yang-Mills (SYM) teorisi, doğal olarak bir vektör (ayar) alanı içeren, V vektör çoklusunun elemanları ile formüle edilir. Vektör çoklusu Bölüm 2.1 de verilen yöntemle benzer olarak çoklunun kiral ya da anti-kiral olması yerine reel olması $V = V^\dagger$ istenerek elde edilir

$$V = (C, \mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}, M, N, A_\mu, \lambda, \bar{\lambda}, \mathcal{D}) \quad (2.45)$$

Burada C , 0 boyutlu, M, N , 1 boyutlu ve $\mathcal{D}$, 2 boyutlu reel skaler alanlar, A_μ 1 boyutlu vektör alanı ve $\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}$, 1/2 boyutlu, $\lambda, \bar{\lambda}$ da 3/2 boyutlu Weyl spinorleridir.

Diğer taraftan kiral ve anti-kiral çokluların toplamı da reel olacağından vektör alan V 'ye

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \quad (2.46)$$

dönüşümü uygulanabilir. Bu dönüşüm altında ⁷,

$$C \rightarrow C + \phi + \phi^\dagger \quad (2.47)$$

⁶Bu sonuç süpersimetrinin yardımcı alansız formülasyonunun kabuk üstü süpersimetri olarak adlandırılmasının nedenidir.

⁷Doğal olarak, burada Bölüm 2.1'den farklı olarak ϕ , sıfır boyutludur.

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} - i\sqrt{2}\psi \quad (2.48)$$

$$M + iN \rightarrow M + iN - 2iF \quad (2.49)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - i\partial_\mu(\phi - \phi^\dagger) \quad (2.50)$$

$$\lambda \rightarrow \lambda \quad (2.51)$$

$$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \quad (2.52)$$

elde edilir⁸. Görüldüğü gibi $(\phi - \phi^\dagger)$ bir ayar parametresi gibi düşünülürse (2.50) dönüşümü ayar dönüşümünün süpersimetrik genelleştirilmesi gibidir ve $\lambda, \mathcal{D}$ alanları bu dönüşüm altında değişmez kalmaktadır. Dolayısıyla $(\phi + \phi^\dagger), \psi, \bar{\psi}$ ve F alanlarının uygun bir değeri seçilerek $C, \mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}, M, N$ alanları yok edilebilir. $C, \mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}}, M$ ve N 'nin tümünün sıfır olduğu ayara Wess-Zumino ayarı adı verilir ve WZ ayarında vektör çoklu

$$V = (A_\mu, \lambda_\alpha, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \mathcal{D}) \quad (2.53)$$

halini alır. WZ ayarı her ne kadar süpersimetrik olmasa da⁹ arta kalan alanların serbestlik dereceleri¹⁰ sırasıyla $(3, 2, 2, 1)$ olduğundan fermiyon ve bozon sayıları eşittir.

WZ ayarında vektör çoklunun elemanları

$$\delta A_\mu = i\theta\sigma_\mu\bar{\lambda} + i\bar{\theta}\bar{\sigma}_\mu\lambda \quad (2.54)$$

$$\delta\lambda = \sigma^{\mu\nu}\theta F_{\mu\nu} + i\theta\mathcal{D} \quad (2.55)$$

$$\delta\bar{\lambda} = \bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\theta} F_{\mu\nu} - i\bar{\theta}\mathcal{D} \quad (2.56)$$

$$\delta\mathcal{D} = -\theta\bar{D}\bar{\lambda} + \bar{\theta}D\lambda \quad (2.57)$$

süpersimetri dönüşümlerini sağlar. Ancak bu dönüşümler (2.1-2.3) ile verilen standart süpersimetri cebri yerine modifiye edilmiş süpersimetri cebri sağlar:

$$[\theta'Q, \theta Q] = 0 = [\bar{\theta}'\bar{Q}, \bar{\theta}\bar{Q}] \quad (2.58)$$

$$[\theta Q, \bar{\theta}\bar{Q}] = -2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + \delta_g \quad (2.59)$$

⁸Burada tüm alanlar ayar grubunun adjoint gösterimindedir, bkz. EK A.

⁹ $\mathcal{X} = M = N = 0$ alınmasına rağmen bu alanların süpersimetri varyasyonları sıfır değildir.

¹⁰Ayar serbestliğinden dolayı A_μ alanı (hareket denklemleri kullanılmazsa) 3 serbestlik derecesine sahiptir.

Burada δ_g , parametresi $2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu$ olan (alana bağılı) ayar dönüşümüdür [36] ve dolayısıyla $\delta = \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}$ için

$$\delta^2 = -2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}D_\mu \quad (2.60)$$

elde edilir.

WZ ayarında N=1 vektör çoklusunun elemanlarını içeren ayar değişmez N=1 SYM eylemi

$$S_{N=1} = \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i\lambda \not{D}\bar{\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \right) \quad (2.61)$$

ile verilir. $S_{N=1}$ eylemine (2.54-2.57) dönüşümleri uygulandığında bir yüzey integrali elde edildiğinden,

$$\delta S_{N=1} = \int d^4x \partial_\mu (\dots)^\mu \quad (2.62)$$

süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kalır.

Diğer taraftan hareket denklemleri $S_{N=1}$ eyleminden

$$D_\mu F^{\mu\nu} = -\{\lambda^\alpha, \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}\} \quad (2.63)$$

$$\not{D}\bar{\lambda} = 0 \quad , \quad \not{D}\lambda = 0 \quad (2.64)$$

$$\mathcal{D} = 0 \quad (2.65)$$

şeklinde türetilir. Denklem (2.65)'den de görüldüğü gibi N=1 SYM teorisi için $\mathcal{D}$ alanı yardımcı alandır ve $\mathcal{D} = 0$ için KÜ süpersimetrik durum elde edilir. Kabuk-üstü N=1 SYM eylemi $\tilde{S}_{N=1}$, WZ modelinde olduğu gibi KÜ süpersimetri dönüşümleri altında değişmezdir ve (2.58-2.60) ile verilen cebir sadece fermiyonların hareket denklemleri kullanılırsa elde edilir.

2.3 N=2 Süper Yang-Mills Teorisi

N=2 Süper Yang-Mills Teorisini elde etmek için üç farklı yöntem kullanılabilir. Aşağıda da gösterileceği gibi bu üç farklı yol KÜ süpersimetrik durum için aynı sonucu verse de, elde edilen teoriler dış alan içerikleri açısından farklıdır.

İlk ve en basit yöntem N=2 SYM teorisini N=1 süpersimetrik teorilerden, N=2 SYM'in sahip olduğu SU(2) R-simetrisini kullanarak elde etmektir[4]. Bu amaçla

N=2 vektör çoklusunun KÜ alan içeriği incelenirse N=1 kiral, N=1 anti-kiral ve N=1 vektör çoklularının toplam alan içeriği ile aynı olduğu ve bu farklı N=1 çokluların hem KD hem de KÜ süpersimetrik formülasyonlarının toplamı için $SU(2)$ -R simetrisi uygulanabildiği görülür. Bu toplamın tek bir N=2 çoklusunun elemanları olarak yazılabilmesi için doğal olarak N=1 kiral ve anti-kiral çokluların, N=1 vektör çoklusunun ayar simetri grubu ile aynı gösterimde olması (adjoint gösterim) ve tüm alanların sıfır kütleli olması gerekir.

Dolayısıyla N=2 SYM eylemi sıfır kütleli (ayar değişmez) WZ eylemi, N=1 SYM eylemi ve bu iki eylemdeki farklı spinörlerin etkileşme (Yukawa) terimlerinin toplamı olarak elde edilebilir. $SU(2)$ R-simetrisine sahip ve ayar değişmez böyle bir eylem

$$S_{N=1+1} = \frac{1}{g^2} Tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - D_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - i\lambda \not{D} \bar{\lambda} - i\bar{\psi} \not{D} \psi \right. \\ \left. + i\sqrt{2}([\phi^\dagger, \psi]\lambda + \bar{\lambda}[\phi, \bar{\psi}]) - \mathcal{D}[\phi, \phi^\dagger] + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 + F^\dagger F \right) \quad (2.66)$$

ile verilir ve burada eylemi oluşturan vektör ve skaler alanlar $SU(2)$ altında tekli, spinörler de çiftli olarak dönüşür:

$$SU(2)_R : \varphi \rightarrow \varphi, \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \psi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \psi \\ -\lambda \end{pmatrix}, \quad \varphi = (A_\mu, \phi, \phi^\dagger, \mathcal{D}, F, F^\dagger). \quad (2.67)$$

Bu formülasyonda, yukarıda açıklandığı gibi N=2 süpersimetri dönüşümleri

$$\delta A_\mu = i\theta_1 \sigma_\mu \bar{\lambda} + i\theta_2 \sigma_\mu \bar{\psi} + i\bar{\theta}_1 \bar{\sigma}_\mu \lambda + i\bar{\theta}_2 \bar{\sigma}_\mu \psi \quad (2.68)$$

$$\delta \lambda = \sigma^{\mu\nu} \theta_1 F_{\mu\nu} - i\sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\theta}_2 D_\mu \phi + i\theta_1 \mathcal{D} - \sqrt{2} \theta_2 F \quad (2.69)$$

$$\delta \psi = \sigma^{\mu\nu} \theta_2 F_{\mu\nu} + i\sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\theta}_1 D_\mu \phi + i\theta_2 \mathcal{D} + \sqrt{2} \theta_1 F \quad (2.70)$$

$$\delta \phi = \sqrt{2} \theta_1 \psi - \sqrt{2} \theta_2 \lambda \quad (2.71)$$

$$\delta \mathcal{D} = -\theta_1 \not{D} \bar{\lambda} + \bar{\theta}_1 \not{D} \lambda - \theta_2 \not{D} \bar{\psi} + \bar{\theta}_2 \not{D} \psi \quad (2.72)$$

$$\delta F = i\sqrt{2} \bar{\theta}_1 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - i\sqrt{2} \bar{\theta}_2 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda + 2ig[\phi^\dagger, \bar{\theta}_1 \bar{\lambda}] + 2ig[\phi, \bar{\theta}_2 \bar{\psi}] \quad (2.73)$$

şeklini alır¹¹. Bu dönüşümlerden de görülebileceği gibi ikinci süpersimetri parametresi θ_2 sıfır alındığında (2.54-2.57) ile verilen dönüşümlere benzer N=1 süpersimetri dönüşümleri bulunur.

¹¹ $\phi^\dagger, \bar{\lambda}, \bar{\psi}$ ve $F^\dagger$, nin süpersimetri dönüşümleri yukarıdaki ilgili dönüşümlerin hermitsel eşleneği alınarak bulunabilir.

Eylemden de görüleceği gibi $\mathcal{D}$ ve F yardımcı alanlarının hareket denklemleri

$$\mathcal{D} = [\phi, \phi^\dagger] \quad , \quad F = 0 = F^\dagger \quad (2.74)$$

ile verilir ve böylelikle KÜ süpersimetrik eylem

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{N=2} = & \frac{1}{g^2} Tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - D_\mu \phi^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - i\lambda \not{D} \bar{\lambda} - i\bar{\psi} \not{D} \psi \right. \\ & \left. + i\sqrt{2}([\phi^\dagger, \psi]\lambda + \bar{\lambda}[\phi, \bar{\psi}]) - \frac{1}{2}[\phi, \phi^\dagger]^2 \right) \end{aligned} \quad (2.75)$$

şeklini alır.

N=2 SYM teorisini elde etmenin bir ikinci yolu altı boyutlu N=1 SYM teorinden boyut indirgenmesi kullanmaktır [37]. Ancak bu yöntem ile N=2 SYM teorisinin sadece KÜ süpersimetrik hali (2.75) elde edilir. Başka bir deyişle teorisinin yardımcı alanlarında içeren formülasyonunun elde edilmesi mümkün değildir.

N=2 SYM teorisinin diğer bir formülasyonu ise Grimm, Sohnius ve Wess tarafından verilmiştir [38, 3]. Bu formülasyonda, teorisinin sahip olduğu simetrinin N=2 süpersimetrisi olduğundan yola çıkılarak, Bölüm 2.1 ve 2.2 de verilen yönteme benzer olarak N=2 vektör multipleti,

$$(\phi, \phi^\dagger, A_\mu, \psi, \bar{\psi}, \lambda, \bar{\lambda}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F})$$

elde edilir. N=2 vektör multipletini içeren ayar değişmez eylem ise

$$\begin{aligned} S_{N=2} = & \frac{1}{g^2} Tr \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i\lambda \not{D} \bar{\lambda} - i\psi \not{D} \bar{\psi} + \phi D_\mu D^\mu \phi^\dagger \right. \\ & \left. + i\sqrt{2}(\psi[\lambda, \phi^\dagger] - \bar{\lambda}[\bar{\psi}, \phi]) - \frac{1}{2}[\phi, \phi^\dagger]^2 + \frac{1}{2}\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.76)$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\delta A_\mu = i\theta_1 \sigma_\mu \bar{\lambda} + i\theta_2 \sigma_\mu \bar{\psi} + i\bar{\theta}_1 \bar{\sigma}_\mu \lambda + i\bar{\theta}_2 \bar{\sigma}_\mu \psi \quad (2.77)$$

$$\delta \lambda = \sigma^{\mu\nu} \theta_1 F_{\mu\nu} + i\theta_1 [\phi, \phi^\dagger] - i\sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\theta}_2 D_\mu \phi + i\theta_2 \mathcal{D} + \theta_2 \mathcal{E} + i\theta_1 \mathcal{F} \quad (2.78)$$

$$\delta \psi = \sigma^{\mu\nu} \theta_2 F_{\mu\nu} + i\theta_2 [\phi, \phi^\dagger] + i\sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\theta}_1 D_\mu \phi + i\theta_1 \mathcal{D} - \theta_1 \mathcal{E} - i\theta_2 \mathcal{F} \quad (2.79)$$

$$\delta \phi = \sqrt{2} \theta_1 \psi - \sqrt{2} \theta_2 \lambda \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D} = & -\theta_1 \sigma^\mu D_\mu \bar{\psi} - \theta_2 \sigma^\mu D_\mu \bar{\lambda} + \sqrt{2} \theta_1 [\lambda, \phi^\dagger] - \sqrt{2} \theta_2 [\psi, \phi^\dagger] \\ & + \bar{\theta}_1 \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi + \bar{\theta}_2 \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda - \sqrt{2} \bar{\theta}_1 [\bar{\lambda}, \phi] + \sqrt{2} \bar{\theta}_2 [\bar{\psi}, \phi] \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E} = & -i\theta_1\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi} + i\theta_2\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} + i\sqrt{2}\theta_1[\lambda, \phi^\dagger] + i\sqrt{2}\theta_2[\psi, \phi^\dagger] \\ & -i\bar{\theta}_1\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + i\bar{\theta}_2\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda + i\sqrt{2}\bar{\theta}_1[\bar{\lambda}, \phi] + i\sqrt{2}\bar{\theta}_2[\bar{\psi}, \phi]\end{aligned}\quad (2.82)$$

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{F} = & -\theta_1\sigma^\mu D_\mu\bar{\lambda} + \theta_2\sigma^\mu D_\mu\bar{\psi} - \sqrt{2}\theta_1[\psi, \phi^\dagger] - \sqrt{2}\theta_2[\lambda, \phi^\dagger] \\ & +\bar{\theta}_1\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - \bar{\theta}_2\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi + \sqrt{2}\bar{\theta}_1[\bar{\psi}, \phi] + \sqrt{2}\bar{\theta}_2[\bar{\lambda}, \phi]\end{aligned}\quad (2.83)$$

N=2 süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kalır. Bu dönüşümlerden, N=2 süpersimetri cebriinin elde edilmesi için süpersimetri üreteçi δ

$$\begin{aligned}\delta = & Q_1 + Q_2 + \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 \\ = & \theta_1^\alpha Q_{1\alpha} + \theta_2^\alpha Q_{2\alpha} + \bar{\theta}_{1\dot{\alpha}} \bar{Q}_1^{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}_{2\dot{\alpha}} \bar{Q}_2^{\dot{\alpha}}.\end{aligned}\quad (2.84)$$

şeklinde kiral ve anti-kiral kısımlara ayrılırsa

$$[Q_i, \bar{Q}_j] = -2i(\theta_i\sigma^\mu\bar{\theta}_j)D_\mu \quad (2.85)$$

$$[Q_i, Q_j]A_\mu = -2\sqrt{2}\varepsilon_{ij}(\theta_i\theta_j)D_\mu\phi^\dagger \quad (2.86)$$

$$[\bar{Q}_i, \bar{Q}_j]A_\mu = -2\sqrt{2}\varepsilon_{ij}(\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j)D_\mu\phi \quad (2.87)$$

$$[Q_i, Q_j]\Xi = -2i\sqrt{2}\varepsilon_{ij}(\theta_i\theta_j)[\Xi, \phi^\dagger] \quad (2.88)$$

$$[\bar{Q}_i, \bar{Q}_j]\Xi = -2i\sqrt{2}\varepsilon_{ij}(\bar{\theta}_i\bar{\theta}_j)[\Xi, \phi] \quad (2.89)$$

$$i, j = 1, 2 \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$$

$$\Xi = \phi, \phi^\dagger, \lambda, \bar{\lambda}, \psi, \bar{\psi}, \mathcal{F}, (\mathcal{E} + i\mathcal{D}), (\mathcal{E} - i\mathcal{D})$$

cebrini sağlandığı görülür. Burada denklem (2.85), N=1 süpersimetrik duruma benzer olsa da, N=2 genişletilmiş süpersimetri nedeniyle (2.86-2.89)'dan da görüldüğü gibi kiral ve anti-kiral üreteçlerin kendi aralarındaki komütatörleri sırasıyla $\phi^\dagger$ ve ϕ alanlarının ayar parametresi olduğu ayar dönüşümlerini vermektedir.

N=2 vektör çokluya ait alanlar, (2.76)'dan elde edilen,

$$D^\mu F_{\mu\nu} = -\{\lambda, \sigma_\nu\bar{\lambda}\} - \{\psi, \sigma_\nu\bar{\psi}\} - 2i[\phi, D_\nu\phi^\dagger] \quad (2.90)$$

$$\bar{D}\psi = -\sqrt{2}[\phi, \bar{\lambda}] \quad , \quad D\bar{\psi} = -\sqrt{2}[\phi^\dagger, \lambda] \quad (2.91)$$

$$\bar{D}\lambda = \sqrt{2}[\phi, \bar{\psi}] \quad , \quad D\bar{\lambda} = \sqrt{2}[\phi^\dagger, \psi] \quad (2.92)$$

$$D^\mu D_\mu\phi = i\sqrt{2}\{\lambda, \psi\} + [[\phi, \phi^\dagger], \phi] \quad (2.93)$$

$$D^\mu D_\mu \phi^\dagger = i\sqrt{2}\{\bar{\lambda}, \bar{\psi}\} - [[\phi, \phi^\dagger], \phi^\dagger] \quad (2.94)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0 \quad (2.95)$$

hareket denklemlerini sağladıkları görülür.

Bu formülasyonda da (2.95) kullanılarak elde edilen KÜ süpersimetri dönüşümleri ve KÜ süpersimetrik eylem, (2.68-2.73) dönüşümlerinin KÜ hali ve (2.75) $\tilde{S}_{N=2}$ eylemi ile aynıdır.



3 SÜPERSİMETRİK ALAN TEORİLERİNİN KOHOMOLOJİK YAPISI

3.1 Süpersimetri Kohomolojisi

Süpersimetri sayesinde farklı özelliklere sahip alanların tek bir süpersimetri çoklusunun elemanları olarak yazılabildiğinin sonucu, süpersimetrik bir teori-den elde edilen hareket denklemleri, (süper) akımlar v.b. gibi fiziksel ifadeler de, bu ifadelerle ilgili çokluların elemanları olarak yazılabilir ¹². Dolayısıyla süpersimetrik bir teorinin eylemi ya da kinetik, kütle ve etkileşme terimleri ayrı ayrı, bir süpersimetri çoklusunun elemanı olarak düşünülebilir. Üstelik bu ifadeler süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kaldığından, dahil oldukları çoklunun en yüksek (boyutlu) elemanı olmalıdır ve prensip olarak çoklunun en düşük boyutlu elemanının çoklu süpervaryasyonu olarak elde edilebilmelidirler [11, 12, 13].

Yukarıda bahsedilen süpersimetrik eylemlerin hangi düşük boyutlu alanlar cinsinden ve nasıl elde edilebileceği probleminin çözümü için (N-genişletilmiş) süpersimetri cebri

$$\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\dot{\alpha}}\} = -2\delta_{ij}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu} + \delta_g(\Phi) \quad (3.1)$$

$$\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = \epsilon_{\alpha\beta}Z_{ij} \quad , \quad \{\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{Z}_{ij} \quad (3.2)$$

$$Z_{ij} = -Z_{ji} \quad , \quad \bar{Z}_{ij} = -\bar{Z}_{ji} \quad ; \quad i, j = 1 \dots N \quad (3.3)$$

kullanılmalıdır.¹³ Bu cebir için notasyonel kolaylık sağlaması açısından süpersimetri ve spinör indisleri ikilisi, tek bir indis olarak tanımlanırsa

$$(i, \alpha) := A \quad , \quad (i, \dot{\alpha}) = \dot{A} \quad ; \quad A = 1, 2, \dots, 2N \quad (3.4)$$

¹²Örneğin bölüm 2'de her bir model için verilen alan denklemlerinin süpersimetri dönüşümü alınırsa modele ait bir başka hareket denklemi elde edilebilir.

¹³Burada $\delta_g(\Phi)$, bölüm 2'de gösterilen, WZ ayarında SYM teorileri için var olan alan parametrelili ayar dönüşümleri ve Z 'de merkezci (central) yüklerdir.

(3.2)'den $i = j$, $\alpha = \beta$ ve $\dot{\alpha} = \dot{\beta}$ değerleri için

$$Q_A Q_A = 0 \quad , \quad \bar{Q}_{\dot{A}} \bar{Q}_{\dot{A}} = 0 \quad (3.5)$$

olduğu görülür ¹⁴. Dolayısıyla, Q_A ve $\bar{Q}_{\dot{A}}$ üreteçleri karesi alındığında sıfırdır (nilpotenttir) ve K, L herhangi bir alan polinomu olmak üzere¹⁵

$$Q_A K = 0 \quad , \quad K \neq Q_A L \quad (3.6)$$

$$\bar{Q}_{\dot{A}} \bar{K} = 0 \quad , \quad \bar{K} \neq \bar{Q}_{\dot{A}} \bar{L} \quad (3.7)$$

şeklinde Q_A ve $\bar{Q}_{\dot{A}}$ üreteçleri için bir kohomoloji problemi elde edilir.

Bu nedenle süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kalan bir eylem

$$\delta S = (\theta^A Q_A + \bar{\theta}_{\dot{A}} \bar{Q}_{\dot{A}}) S = 0 \quad (3.8)$$

aynı zamanda ayrı ayrı Q_A ve $\bar{Q}_{\dot{A}}$ altında da değişmez kalacağından,

$$Q_A S = 0 \quad , \quad \bar{Q}_{\dot{A}} S = 0, \quad (3.9)$$

böyle bir eylemin Q_A ve $\bar{Q}_{\dot{A}}$ 'ın kohomolojisine aittir.

Diğer taraftan, eylemin kendisi, ya da ayrı ayrı kinetik ve etkileşme terimleri bir çoklunun en yüksek elemanı olduğundan, eylem en genelde integre edilmiş (ayar değişmez) alan polinomları cinsinden

$$S = Q^{2N} \bar{Q}^{2N} Y + Q^{2N} X + \bar{Q}^{2N} \bar{X} \quad (3.10)$$

formunda yazılabilir. Burada, Q^{2N} ve $\bar{Q}^{2N}$, E_{2N} gerekli indis kontraksiyonlarını sağlaması için gerekli olan sabit tensörler olmak üzere

$$Q^{2N} := E_{2N}^{A_1 A_2 \dots A_{2N}} Q_{A_1} \dots Q_{A_{2N}} \quad (3.11)$$

$$\bar{Q}^{2N} := \bar{E}_{2N}^{A_1 A_2 \dots A_{2N}} \bar{Q}_{A_1} \dots \bar{Q}_{A_{2N}} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Böylece, bu tanımlardan

$$Q^{2N+1} = \bar{Q}^{2N+1} = 0 \quad (3.13)$$

¹⁴Doğal olarak (3.5) ifadesinde tekrarlanan indisler üzerinden toplam alınmamaktadır.

¹⁵Burada Q_A ve $\bar{Q}_{\dot{A}}$ üreteçlerinin alan (Φ) polinomları (K) üzerine etkisi $Q_A K = \int Q_A \Phi \frac{\delta K}{\delta \Phi}$ ve $\bar{Q}_{\dot{A}} K = \int \bar{Q}_{\dot{A}} \Phi \frac{\delta K}{\delta \Phi}$ şeklinde düşünülebilir.

özdeş olarak sağlandığından ve (3.1) ile verilen süpersimetri cebri integre edilmiş (ve SYM için ayar değişmez) alan polinomları uzayına kısıtlandığında

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{A}}\} \sim 0 \quad (3.14)$$

olduğundan (3.10) formunda verilen eylemin süpersimetri altında değişmez kalma şartı

$$Q_A \bar{X} = 0 \quad , \quad \bar{Q}_{\dot{A}} X = 0 \quad (3.15)$$

şartlarına indirgenmiş olur.

Görüldüğü gibi eylemin süpervaryasyonlar ile elde edilebileceği integre edilmiş alan polinomları X ve $\bar{X}$ sırasıyla $\bar{Q}$ ve Q üreteçlerinin kohomolojisine aittir. Y polinomu ise, (3.10)'da $\bar{Q}^{2N} Q^{2N} Y$ teriminin trivial olmaması için ne Q 'nun ne de $\bar{Q}$ 'ın kohomolojisine aittir,

$$QY \neq 0 \quad , \quad \bar{Q}Y \neq 0. \quad (3.16)$$

X , $\bar{X}$ ve Y integre edilmiş alan polinomları ise, aşağıda WZ modeli ve $N=1, N=2$ SYM teorileri için açıkça gösterileceği gibi, (3.15) ve (3.16) ile verilen kısıtlamalar, teorinin sahip olduğu simetriler ve boyut analizi kullanarak elde edilebilir.

Kabuk üstü süpersimetrik durumda süpersimetri cebri ve dolayısıyla integre edilmiş (ayar değişmez) alan polinomları için (3.1-3.3) sadece hareket denklemleri kullanıldığında elde edildiğinden, yukarıda verilen kohomoloji tartışması hareket denklemlerini sağlayan alanlar için geçerlidir. Ancak her ne kadar KÜ süpersimetrik durumda bulunan X , $\bar{X}$, Y çözümleri, kabuk dışı durumla aynı olsa da (3.10) ile verilen bu polinomların çoklu süpervaryasyonları KD ve KÜ durum için farklı sonuçlar verir.

3.2 Wess Zumino Modelinin Kohomolojik Yapısı

WZ modelinin kohomolojik yapısı, KD süpersimetrik durum için, modeldeki kiral ve anti-kiral etkileşme terimleri için renormalize olmama teoremlerinin gösterilmesi için Flume ve Kraus tarafından kullanılmıştır [11]. Bu çalışmada, süperuzayda tanımlanan bu renormalize olmama teoremlerinin, bileşen alan

formülasyonunda ispatı 4 boyutlu etkileşme terimlerinin (2.25-2.31) ile verilen süpersimetri dönüşümleri kullanılarak

$$(\phi\phi F - \psi\psi\phi) = -\frac{1}{12}\delta\delta(\phi\phi\phi) \quad (\phi^\dagger\phi^\dagger F^\dagger - \bar{\psi}\bar{\psi}\phi^\dagger) = -\frac{1}{12}\bar{\delta}\bar{\delta}(\phi^\dagger\phi^\dagger\phi^\dagger) \quad (3.17)$$

şeklinde 3 boyutlu alan polinomları cinsinden yazılabilmesine dayanmaktadır [11].

Bu sonuç, Bölüm 3.1’de verilen süpersimetri kohomolojisi ile KD süpersimetrik durum için elde edilebilir. N=1 süpersimetri için eylem, Bölüm 3.1’de gösterildiği gibi en genelde

$$S_{WZ} = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}Q^{\alpha}Q_{\alpha} \int d^4x Y + Q^{\alpha}Q_{\alpha} \int d^4x X + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \int d^4x \bar{X} \quad (3.18)$$

formundadır. Eylem boyutsuz olduğundan ve $Q, \bar{Q}$ etki ettiği alanların boyutunu 1/2 arttırdığından (3.18)’de verilen $X, \bar{X}$ ve Y polinomları için

$$Boyut(Y) = 2 \quad , \quad Boyut(X) = Boyut(\bar{X}) = 3 \quad (3.19)$$

olmalıdır. Diğer taraftan, (3.15,3.16) ile verilen ilişkilerden,

$$QY \neq 0 \quad , \quad \bar{Q}Y \neq 0 \quad , \quad \bar{Q}X = Q\bar{X} = 0$$

olduğundan $X, \bar{X}$ ve Y alan polinomlarının sadece

$$Y = c\phi^\dagger\phi \quad (3.20)$$

$$X = c_1\phi^3 + c_2m\phi^2 \quad , \quad \bar{X} = \tilde{c}_1\phi^{\dagger 3} + \tilde{c}_2m\phi^{\dagger 2} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabildiği görülür. Bu polinomların (3.10)’da verilen kiral ve anti-kiral süpervaryasyonları alınır

$$\bar{Q}\bar{Q}Q\phi^\dagger\phi = 16(\phi^\dagger\partial^2\phi - i\bar{\psi}\bar{\phi}\psi + F^\dagger F) \quad (3.22)$$

$$Q\phi^3 + m\phi^2 = 12(\psi\psi\phi - \phi^2 F) + 8m(\frac{1}{2}\psi\psi - \phi F) \quad (3.23)$$

$$\bar{Q}\bar{Q}(\phi^{\dagger 3} + m\phi^{\dagger 2}) = 12(\bar{\psi}\bar{\psi}\phi^\dagger - \phi^{\dagger 2} F^\dagger) + 8m(\frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\psi} - \phi^\dagger F^\dagger) \quad (3.24)$$

(2.32) ile verilen

$$S_{WZ} = \int d^4x (L_{kin} + L_{etk}^{kiral} + L_{etk}^{anti-kiral})$$

WZ eyleminin kinetik ve etkileşme terimleri için

$$L_{kin} = \frac{1}{16} \bar{Q} \bar{Q} Q Q \phi^\dagger \phi \quad (3.25)$$

$$L_{etk}^{kiral} = -Q Q \left(\frac{1}{12} \phi^3 + \frac{m}{8} \phi^2 \right) \quad (3.26)$$

$$L_{etk}^{anti-kiral} = -\bar{Q} \bar{Q} \left(\frac{1}{12} \phi^{\dagger 3} + \frac{m}{8} \phi^{\dagger 2} \right) \quad (3.27)$$

elde edilir.

Bilindiği gibi WZ modelinde kütle ve kuplaj sabitleri renormalize olmaz. Modelde yalnızca modelin eyleminin kinetik terimi ile ilgili olan logaritmik ıraksak dalga fonksiyonu renormalizasyonu vardır. Diğer taraftan [11]'de gösterildiği gibi etkileşme terimlerinin renormalize olmama teoremleri, bu teoremlerin düşük boyutlu alan polinomları cinsinden yazılmaları ile ispatlanabilir.

Yukarıda verilen süpersimetri kohomolojisi ile bu terimlerin elde edilmesi incelendiğinde modelde renormalize edilmesi gereken kısmın sadece $Q^2 \bar{Q}^2 Y$ terimi olduğu görülür. Renormalize olmama (nonrenormalization) teoremleri ise eylemin $Q^2 X$ ve $\bar{Q}^2 \bar{X}$ şeklinde yazılabilen terimleri ile ilgilidir. Başka bir deyişle, Bölüm (3.1)'de tanımlanan süpersimetri kohomolojisi açısından bakıldığında, bu renormalize olmama teoremlerinin eylemin Q ve $\bar{Q}$ 'ın kohomolojisine ait alan polinomlarından türetilen etkileşme terimleri ilgili olduğu görülür.

WZ modeli kabuk üstü formülasyonda incelendiğinde ise teorinin eyleminin etkileşme terimleri, yardımcı alanların (2.37) ile yok edilmesinden dolayı artık kiral ve anti-kiral kısımlara ayrılamaz. Dolayısıyla ilk bakışta KD süpersimetri için geçerli olan (3.25-3.27) ifadelerinin geçerli olmayacağı görülebilir. Diğer taraftan KÜ eylem

$$\tilde{S}_{WZ} = \int d^4x (L_{kin} + L_{etk}) \quad (3.28)$$

şeklinde ikiye ayrıldığında, renormalize olmama teoremlerinin geçerli olduğu kiral ve anti-kiral etkileşme köşeleri L_{etk} 'e dahildir ve L_{etk} ile düşük boyutlu alan polinomları arasında cebirsel bir ilişki elde edilebilir [12]. Bu amaçla orijinal KÜ eylem (2.38)'den kuplaj sabitini içeren terimler açıkça

$$L_{etk} = -mg\phi^\dagger\phi\phi + m\bar{g}\phi\phi^\dagger\phi^\dagger - g\psi\psi\phi - \bar{g}\bar{\psi}\bar{\psi}\phi^\dagger - \bar{g}g\phi^\dagger\phi^\dagger\phi\phi \quad (3.29)$$

şeklinde yazılırsa, KÜ süpersimetri için

$$QQ(\phi^3) = 12(\phi\psi\psi - m\phi^2\phi^\dagger - \bar{g}\phi^2\phi^{\dagger 2}) \quad (3.30)$$

$$\bar{Q}\bar{Q}(\phi^{\dagger 3}) = 12(\phi^\dagger\bar{\psi}\bar{\psi} - m\phi^{\dagger 2}\phi^\dagger - g\phi^2\phi^{\dagger 2}) \quad (3.31)$$

olduğundan, yukarıda verilen L_{etk} ve (3.30,3.31) karşılaştırılırsa, eylemin etkileşme terimi ve düşük boyutlu alan polinomları arasında

$$-\frac{1}{12}QQ\phi^3 = \frac{d}{dg}L_{etk} \quad -\frac{1}{12}\bar{Q}\bar{Q}\phi^{\dagger 3} = \frac{d}{d\bar{g}}L_{etk}. \quad (3.32)$$

bağıntısının geçerli olduğu görülür. Bu bağıntı yardımıyla, bileşen alan formülasyonunda, KD süpersimetri için Flume ve Kraus tarafından ispatlanan renormalize olmama teoremleri [11], KÜ süpersimetrik durum için de ispatlanabilir [12].

3.3 N=1 SYM Teorisinin Kohomolojik Yapısı

N=1 SYM teorisinin eylemi bölüm 3.1'de verilen kohomolojik yapı kullanılarak, WZ modelinde olduğu gibi en genelde

$$S_{N=1} = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}Q^{\alpha}Q_{\alpha} \int d^4x Y + Q^{\alpha}Q_{\alpha} \int d^4x X + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} \int d^4x \bar{X} \quad (3.33)$$

formunda yazılabilir. N=1 SYM ayar simetrisine sahip olduğundan,

$$\delta_g S_{N=1} = 0 \quad (3.34)$$

ve ayar dönüşümleri süpersimetri ile komüt ettiğinden

$$[Q, \delta_g] = 0 = [\bar{Q}, \delta_g] \quad (3.35)$$

integre edilmiş alan polinomlarında ayar değişmez olmalıdır. Ayar simetrisine ek olarak, teori R-simetrisine de sahiptir. Dolayısıyla eylem boyutsuz ve sıfır R yüküne sahip olduğundan, dört boyutta Y , X ve $\bar{X}$ ayar değişmez ayar polinomları için

$$Boyut(Y) = 2 \quad , \quad R(Y) = 0 \quad (3.36)$$

$$Boyut(X) = Boyut(\bar{X}) = 3 \quad , \quad R(X) = -R(\bar{X}) = 2 \quad (3.37)$$

Tablo 1: N=1 SYM teorisi için alanların boyutları ve R-yükleri.

	A_μ	λ	$\bar{\lambda}$	$\mathcal{D}$	Q	$\bar{Q}$
<i>Boyut</i>	1	3/2	3/2	2	1/1	1/2
<i>R</i>	0	-1	1	0	1	-1

şartları elde edilir. Tablo 1’de verilen alanların ve süpersimetri üreteçlerinin boyutları ve R-yükleri gözönüne alındığında (3.36,3.37) ile verilen kısıtlamaları sağlayan alan polinomları c , $\tilde{c}$ sabit sayılar olmak üzere sadece

$$Y = 0 \quad (3.38)$$

ve

$$X = c \text{Tr}(\lambda^\alpha \lambda_\alpha) \quad , \quad \bar{X} = \tilde{c} \text{Tr}(\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}) \quad (3.39)$$

şeklinde elde edilir. X ve $\bar{X}$ polinomları için

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \int d^4x \text{tr}(\lambda^\alpha \lambda_\alpha) = 0 \quad , \quad Q_\alpha \bar{X} = \int d^4x \text{tr}(\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}) = 0 \quad (3.40)$$

olduğundan, bu çözümler sırasıyla $\bar{Q}$ ve Q ’nun kohomolojisine aittir ve N=1 SYM teorisi için bulunabilecek sıfırdan farklı tek tutarlı çözümdür. Bu çözümlerden (3.33) ile $c = \tilde{c} = 1/16g^2$ için elde edilen süpersimetrik ve ayar değişmez ifade (2.61)’de verilen

$$\begin{aligned} S_{N=1} &= \frac{1}{16g^2} \int d^4x \{ Q^\alpha Q_\alpha \text{Tr}(\lambda^\beta \lambda_\beta) + \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \text{Tr}(\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) \} \\ &= \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \frac{1}{2} \lambda \not{D} \bar{\lambda} - i \frac{1}{2} \bar{\lambda} \not{D} \lambda + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

N=1 SYM eylemidir.

Diğer taraftan, Q^2 ve $\bar{Q}^2$ terimleri ayrı ayrı yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8g^2} \int d^4x Q^\alpha Q_\alpha \text{Tr}(\lambda^\beta \lambda_\beta) \\ &= \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} - i \frac{1}{2} \lambda \not{D} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8g^2} \int d^4x \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \text{Tr}(\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) \\ &= \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} - i \frac{1}{2} \bar{\lambda} \not{D} \lambda + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

elde edilir. Burada, bilindiği gibi bir ayar teorisinde PC simetrisini bozan terim

$$\pm i\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}$$

integral altında bir tam türev olarak yazılabildiğinden pertürbatif olarak teoriye bir katkı sağlamaz. Bu nedenle, (3.42) ve (3.43), orijinal eylem (2.61)'den bir tam türev ve kısmi integrasyon kadar fark ettiğinden bu ifadeler pertürbatif hesaplamalar için birbirlerine eşdeğerdir ve sırasıyla self-dual ve anti-self dual eylemler

$$S_{N=1}^{sd} = \frac{1}{8g^2} \int d^4x Q^\alpha Q_\alpha \text{Tr}(\lambda^\beta \lambda_\beta) \quad (3.44)$$

$$S_{N=1}^{asd} = \frac{1}{8g^2} \int d^4x \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \text{Tr}(\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) \quad (3.45)$$

olarak adlandırılabilir¹⁶.

Kabuk üstü süpersimetrik durumda, $\mathcal{D} = 0$, için yukarıda verilen yöntem kullanılırsa benzer boyut ve R-yükü analizi ile bulunan integre edilmiş ayar değişmez alan polinomları Y, X ve $\bar{X}$, KD süpersimetrik durum için elde edilen çözümlerle aynıdır. Ancak KÜ süpersimetri kullanmanın sonucu, bu alanların ikili kiral ve anti-kiral süpervaryasyonu

$$\frac{1}{16g^2} \int d^4x \{ Q^\alpha Q_\alpha \text{Tr}(\lambda^\beta \lambda_\beta) + \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \text{Tr}(\bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}) \} \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{3i}{8} \lambda \not{D} \bar{\lambda} - \frac{3i}{8} \bar{\lambda} \not{D} \lambda \right) = S_{N=1}^{ON} \quad (3.47)$$

ifadesini verir. Görüldüğü gibi bu ifade ve orijinal eylem arasındaki fark

$$S_{N=1} - S_{N=1}^{ON} = \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{i}{8} \lambda \not{D} \bar{\lambda} - \frac{i}{8} \bar{\lambda} \not{D} \lambda \right) \quad (3.48)$$

olduğundan, bu fark fermiyonların hareket denklemleri, $\not{D} \bar{\lambda} = 0$, $\bar{\not{D}} \lambda = 0$, kadardır.

Elde edilen bu fark KÜ süpersimetrik durumda hareket denklemlerinin kullanılması zorunluluğundan dolayı doğaldır. Ancak $N=1$ SYM için WZ modelinde olduğu gibi orijinal KÜ eylem ve düşük boyutlu alan polinomları arasında cebirsel bir ilişki (sadece süpersimetri kohomolojisi kullanarak) bulunamaz.

¹⁶Burada (3.44) eyleminin self-dual olarak adlandırılmasının nedeni $F_{\mu\nu}^+ = F_{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$ tanımı için self-dualite şartının sağlanması, $F_{\mu\nu}^+ = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}^+$, ve eylemde $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^+ F^{+\mu\nu}$ şeklinde yazılabilesidir. Benzer neden antiself-dual eylem için de geçerlidir.

3.4 N=2 SYM Teorisinin Kohomolojik Yapısı

N=2 SYM eylemini düşük boyutlu alan polinomlarından elde etmek için, eylem N=2 süpersimetriyi yardımıyla

$$S_{N=2} = \bar{Q}^4 Q^4 \int d^4x Y + Q^4 \int d^4x X + \bar{Q}^4 \int d^4x \bar{X} \quad (3.49)$$

formunda yazılabilir. Teori ayar dönüşümleri, (U(1)) R-simetri ve SU(2) R-simetri altında değişmez kaldığından dört boyutta ayar değişmez ayar polinomları

$$Boyut(Y) = 0 \quad , \quad R(Y) = 0 \quad (3.50)$$

$$Boyut(X) = Boyut(\bar{X}) = 2 \quad , \quad R(X) = -R(\bar{X}) = -4 \quad (3.51)$$

boyut ve R yüklerine sahip olmalıdır.

Tablo 2: N=2 SYM teorisi için alanların boyutları ve R-yükleri.

	A_μ	λ	$\bar{\lambda}$	ϕ	$\phi^\dagger$	ψ	$\bar{\psi}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{F}$	Q	$\bar{Q}$
<i>Boyut</i>	1	3/2	3/2	1	1	3/2	3/2	2	2	2	1/2	1/2
<i>R</i>	0	-1	1	-2	2	-1	1	0	0	0	1	-1

Tablo 2’de verilen alanların boyutları ve R-yükleri incelenirse, WZ ayarında teori boyutsuz bir alana sahip olmadığından

$$Y = 0 \quad (3.52)$$

bulunur. Ayar değişmezlik ve (3.56) şartlarını sağlayan X ve $\bar{X}$ çözümleri ise tektir,

$$X = c \int d^4x Tr(\phi^2) \quad , \quad \bar{X} = c \int d^4x Tr(\phi^{\dagger 2}) \quad (3.53)$$

ve sırasıyla $\bar{Q}$ ve Q ’nun kohomolojisine ait olan

$$\bar{Q}X = 0 \quad , \quad Q\bar{X} = 0 \quad (3.54)$$

X ve $\bar{X}$ alan polinomları kullanılarak N=2 SYM teorisi için bir eylem prensip olarak elde edilebilir.

Bölüm (2.3)’de de gösterildiği gibi KD N=2 SYM teorisi için iki farklı eylem, $S_{N=1+1}$ (2.66) ve $S_{N=2}$ (2.76) yazılabilir. Yardımcı alan içeriği tamamen birbirinden farklı olan bu iki formülasyondan, iki N=1 teorisinin toplamı olarak

yazılabilen $S_{N=1+1}$ eylemi, bu formülasyonda verilen süpersimetri dönüşümleri (2.68-2.73) kullanılarak $Q^4\phi^2$ ve $\bar{Q}^4\phi^{\dagger 2}$ formunda elde edilemez. Bu sonucun nedeni, N=2 süpersimetrisinin iki N=1 teorisine dışarıdan uygulanması olarak düşünülebilir.

Diğer taraftan, [38, 3] ile verilen N=2 SYM teorisi, doğrudan N=2 süpersimetriye sahip bir vektör çoklusundan elde edildiğinden Bölüm (3.1)'de verilen kohomolojik yapı kullanılarak teoremin eylemi düşük boyutlu alan polinomlarının süpervaryasyonu olarak bulunabilmelidir. Gerçekten de, teoremin sahip olduğu $SU(2)$ R simetrisi ile

$$Q^4 = Q_1^\alpha Q_{1\alpha} Q_2^\beta Q_{2\beta} = (Q_1 Q_1)(Q_2 Q_2) \quad (3.55)$$

şeklinde yazılırsa¹⁷,

$$S_{N=2}^{sd} = \frac{1}{32}(Q_1 Q_1)(Q_2 Q_2) \int d^4x Tr(\phi\phi) \quad (3.56)$$

$$= \frac{1}{g^2} Tr \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} - i\lambda D\bar{\lambda} - i\psi D\bar{\psi} + \phi D_\mu D^\mu \phi^\dagger \right. \\ \left. + i\sqrt{2}(\psi[\lambda, \phi^\dagger] - \bar{\lambda}[\bar{\psi}, \phi]) - \frac{1}{2}[\phi, \phi^\dagger]^2 + \frac{1}{2}\mathcal{D}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{E}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}^2 \right] \quad (3.57)$$

bağıntısı ile (self-dual) N=2 SYM eylemi elde edilir. Anti-self dual eylem $S_{N=2}^{sd}$ 'in hermitsel eşleniğidir

$$S_{N=2}^{asd} = (S_{N=2}^{sd})^\dagger = \frac{1}{32}(\bar{Q}_1 \bar{Q}_1)(\bar{Q}_2 \bar{Q}_2) \int d^4x Tr(\phi^{\dagger 2}) \quad (3.58)$$

ve N=1 SYM teorisinde olduğu gibi orijinal N=2 SYM eylemi

$$S_{N=2} = S_{N=2}^{sd} + S_{N=2}^{asd} \quad (3.59)$$

şeklinde düşük boyutlu ayar değişmez alan polinomları ϕ^2 ve $\phi^{\dagger 2}$ cinsinden elde edilebilir.

KÜ süpersimetrik durumda ($\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$) her ne kadar KD durum için elde edilen $X, \bar{X}, Y$ çözümleri geçerli olsa da (3.55)'de verilen anti-komütasyon bağıntıları sadece hareket denklemleri kullanıldığında geçerli olduğundan, ϕ^2 'nin

¹⁷ Q^4 'ün en genel formu denk.(3.61)'de verilmiştir. Burada (3.55) anti-komütasyon bağıntıları sağlandığından (3.57) ve (3.61) birbirine eşdeğerdir.

dörtlü kiral süpervaryasyonlarının anlamlı bir sonuç vermesi için Q^4 üreteçinin Q_1 ve Q_2 'ler cinsinden en genel formu bulunmalıdır. Bu amaçla, yine SU(2) R simetrisi kullanılarak, biraz işlemden sonra

$$Q^4 = Q_1^\alpha Q_{1\alpha} Q_2^\beta Q_{2\beta} - Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_{1\alpha} Q_{2\beta} + Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_{2\beta} Q_{1\alpha} + (1 \longleftrightarrow 2) \quad (3.60)$$

bulunur. Bu dörtlü kombinasyon ϕ^2 üzerine etki ettirildiğinde ise KÜ durum için

$$\frac{1}{182g^2} \int d^4x Q^4 Tr \phi \phi = \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g^2} Tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} - \frac{i}{2} \lambda \not{D} \bar{\lambda} - \frac{i}{2} \psi \not{D} \bar{\psi} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \phi D_\mu D^\mu \phi^\dagger - \frac{i\sqrt{2}}{2} \bar{\lambda} [\bar{\psi}, \phi] \right) = S_{N=2}^{ku}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi KÜ süpersimetri dönüşümleri kullanıldığında elde edilen (3.63) ifadesi ve KD durumunda bulunan $S_{N=2}^{sd}$ eylemi arasındaki fark (2.91-2.94) ile verilen $\bar{\lambda}$, $\bar{\psi}$ ve $\bar{\phi}$ 'in hareket denklemleri cinsinden ifade edilebilir,

$$\begin{aligned} & Tr \int d^4x \{ -i\psi (\not{D}\bar{\psi} - \sqrt{2}[\lambda, \phi^\dagger]) - i\lambda (\not{D}\bar{\lambda} + \sqrt{2}[\psi, \phi^\dagger]) \\ & + \phi (D_\mu D^\mu \phi^\dagger - i\sqrt{2}[\bar{\lambda}, \bar{\psi}] - [\phi^\dagger, [\phi, \phi^\dagger]]) \}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Denklem (3.63) ile verilen $S_{N=2}^{ku}$ ifadesinin bir diğer ilginç özelliği ise, N=2 SYM teorisinde kullanılan instanton hesaplarıyla olan ilişkisidir. Bilindiği gibi N=2 SYM teorisinin (holomorfik) efektif eylemine gelen tüm pertürbatif ve pertürbatif olmayan katkılar Seiberg-Witten tarafından dualite yardımıyla hesaplanabilmiştir [39, 40]. Teorideki pertürbatif olmayan katkılar, doğrudan bir ve iki instanton için "bağlı instanton" yöntemi [41, 42, 43] kullanılarak hesaplandığında elde edilen sonuçların (her ne kadar bağlı instanton yöntemi instanton denklemlerini yaklaşık olarak verse de) SW çözümüyle tutarlı olduğu gösterilmiştir [44, 45, 46].

Yukarıda bahsedilen instanton hesaplarının $S_{N=2}^{ku}$ ile ilişkisini anlamak için bu ifadede yer alan alanların (2.90-2.95) ile verilen orijinal hareket denklemlerini sağladıkları unutulur ve $S_{N=2}^{ku}$ ifadesi bir eylem ¹⁸ gibi düşünülürse, $S_{N=2}^{ku}$ 'den

¹⁸Bilindiği gibi instanton hesapları Euclid uzayında tanımlıdır. Ancak, Minkowski uzayından Euclid uzayına aşağıda verilen her hangi bir adımda analitik devamlılık ile geçilebileceğinden burada süpersimetrinin Euclid uzayında verilen formülasyonunda çalışmıyoruz.

türetilen yeni "hareket denklemleri"

$$D^2\phi = i\sqrt{2}\{\bar{\lambda}, \bar{\psi}\} \quad , \quad D^2\phi^\dagger = 0 \quad (3.64)$$

$$\not{D}\lambda = -\sqrt{2}[\bar{\psi}, \phi], \quad \not{D}\psi = +\sqrt{2}[\bar{\lambda}, \phi] \quad , \quad \not{D}\bar{\lambda} = \not{D}\bar{\psi} = 0 \quad (3.65)$$

şeklini alır. Elde edilen bu denklemler Ref.[44, 45, 46]'da bağlı instanton yöntemi ile elde edilen yaklaşık instanton denklemleridir.

Diğer taraftan yine bilindiği gibi N=2 SYM teorisi bükülürse (twist edilirse), kohomolojik tipte bir topolojik ayar teorisi elde edilir [47]. Bükülmüş N=2 SYM (TYM) teorisinde instanton hesapları, bu teorinin Baulieu-Singer formülasyonu [48] kullanılarak yapıldığında, elde edilen sonuçların Ref.[44, 45, 46]'da verilen geleneksel instanton hesaplarıyla bulunan sonuçlarla aynı olduğu görülmüştür [49, 50].

Bu hesapta da gösterildiği gibi Baulieu-Singer formülasyonunda elde edilen hareket denklemleri herhangi bir yaklaşıklık kullanılmadan doğrudan instanton denklemlerini verir [49, 50]. Dolayısıyla, $S_{N=2}^{ku}$ 'den türetilen (3.65,3.66) denklemlerinin instanton denklemleri ile aynı olduğu sonucundan hareketle, $S_{N=2}^{ku}$ ifadesinin bükülmüş halinin Baulieu-Singer tarafından verilen TYM eylemini vermelidir.

Bu amaçla SU(2) R simetrisi altında bir çiftli olarak dönüşen Weyl spinorleri için $i = 1, 2$ süpersimetri indisleri tanımlanırsa (bkz EK B),

$$\lambda^1 = \lambda \quad , \quad \lambda^2 = \psi \quad , \quad \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda} \quad , \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{\psi} \quad (3.66)$$

(3.63) ile verilen $S_{N=2}^{ku}$

$$\begin{aligned} S_{N=2}^{ku} = & \quad Tr \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} - \frac{i}{2} \lambda_i \not{D} \bar{\lambda}^i + \frac{1}{2} \phi D_\mu D^\mu \phi^\dagger \right. \\ & \left. - \frac{i\sqrt{2}}{4} \bar{\lambda}^i [\bar{\lambda}_i, \phi] \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

şeklinde yazılabilir. Bükme işlemi basitce noktalı veya noktasız spinor ve süpersimetri indislerini birbirlerine eşdeğer almak (örneğin $i \equiv \alpha$) olduğundan

$$\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\sigma}_\mu^{\alpha\dot{\alpha}} \psi^\mu$$

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^\beta &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta_\alpha^\beta \eta + \sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \mathcal{X}_{\mu\nu}) \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Phi} \quad , \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi\end{aligned}\tag{3.68}$$

şeklinde tanımlanan yeni alanlar $\psi_\mu, \mathcal{X}_{\mu\nu}, \Phi, \bar{\Phi}$, ve

$$F_{\mu\nu}^+ = 2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}\tag{3.69}$$

için (3.68) ile verilen $S_{N=2}^{ku}$ ifadesinin bükülmüş halinin

$$\begin{aligned}S_{N=2}^{top} &= \frac{1}{4}Tr \int d^4x \left(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^+ F^{+\mu\nu} + i\eta \mathcal{D}^\mu \psi_\mu + \frac{i}{2} \mathcal{X}^{\mu\nu} (D_\mu \psi_\nu - D_\nu \psi_\mu)^+ \right. \\ &\quad \left. + \bar{\Phi} (D^2 \Phi + i\{\psi^\mu, \psi_\mu\}) \right)\end{aligned}\tag{3.70}$$

olduğu bulunur. Bu ifade gerçekten de Baulieu-Singer formülasyonunda $F_{\mu\nu}^+ F^{+\mu\nu}$ teriminin katsayısı keyfi olduğundan bu formülasyondaki Fadeev-Popov hayalet alanlarının özel bir seçimi için Topolojik Yang-Mills eylemidir.

Görüldüğü gibi N=2 SYM teorisinin düşük boyutlu alan polinomu $Tr\phi^2$ 'den elde edilmesi bir şekilde teorideki pertürbatif olmayan instanton hesapları ile ilgilidir. Bizim bilgimiz dahilinde yukarıda bahsedilen yaklaşık instanton denklemleri kullanılarak nasıl SW çözümündeki kesin sonuçların elde edildiği konusunda ikna edici bir açıklama henüz verilmemiştir¹⁹. Dolayısıyla hem geleneksel ve hem de TYM için yapılan instanton hesaplarının KÜ süpersimetri ile ilişkisinin incelenmesinin ilginç olacağını düşünüyoruz²⁰.

¹⁹Bu problem aynı zamanda Ref.[51, 52]'de de belirtilmiştir.

²⁰Bu konu üzerine çalışmalarımız halen devam etmektedir.

4 SÜPER YANG-MİLLS TEORİLERİ VE BRST KOHOMOLOJİSİ

İsminden de anlaşılacağı gibi Cebirsel Renormalizasyon [21], bir takım yerel ve küresel (global) simetriler ile karakterize edilen bir teorinin renormalize edilebilirliğinin²¹ sistematik bir biçimde cebirsel olarak incelenmesidir. Dolayısıyla bu yöntemde herhangi bir Feynman diyagramı hesabı yapılmadan teorinin kuantum genişletilmesindeki tüm mümkün anomaliler ve pertürbatif açılımda klasik simetrileri düzeltmek için klasik eyleme eklenmesi gereken karşı terimler (counter terms) bulunabilir [21].

Cebirsel Renormalizasyon yönteminin başlangıç noktası, uygun hayalet ve anti-alanların tanımlanmasıyla incelenen teorinin tüm simetrilerini içeren bir Slavnov-Taylor (ST) özdeşliğinin yazılmasıdır. ST özdeşliğinden karesi sıfır (nilpotent) bir operatör tanımlanabilir. Lineerleştirilmiş ST operatörü olarak adlandırılan bu operatörün integre edilmiş yerel alan ve alan türevleri polinomları uzayına kısıtlanmış kohomoloji sınıfları teorideki tüm anomali ve karşı terimler ile ilgilidir. Başka bir deyişle teorinin renormalize edilebilirliğinin ispatı bu operatörün (genişletilmiş) BRST kohomolojisi sınıflarının elde edilmesi problemine indirgenmiş olur.

Cebirsel Renormalizasyon yöntemi her ne kadar sadece pertürbatif yaklaşım için geçerli olsa da, bu yöntemin temeli sadece yerellik ve kuvvet sayma prensiplerine dayandığından, diğer pertürbatif hesap tekniklerinde kullanılması zorunlu olan herhangi bir regülarizasyondan bağımsızdır. Dolayısıyla, bir teorideki simetrileri bozmayan bir regülarizasyon yönteminin bilinmediği teoriler, örneğin süpersimetrik teoriler, için de kullanılabildiğinden geniş bir uygulama alanına sahiptir.

²¹Burada renormalizasyon ile klasik teorinin sahip olduğu simetrilerin, teorinin pertürbatif açılımı yapıldığında bu simetrilerin tüm mertebelerde uygulanabilirliği anlaşılmalıdır.

Diğer taraftan, bu bölümde inceleneceği gibi, Cebirsel Renormalizasyon yönteminde elde edilen karesi sıfır ST operatörünün, bu operatörden türetilen yavru (descent) denklemler yardımıyla (genişletilmiş) BRST kohomolojisinin incelenmesi ile SYM teorilerinin eylemleri elde edilebilir [33]. Bu yöntemin ilk avantajı ilgili teorinin eyleminin düşük boyutlu alan polinomları ile ilişkisini açık ve doğal olarak vermesidir [33]. Diğer bir avantaj ise yöntemin hem KD ve hem de KÜ süpersimetrik durum için, eylemin tam olarak düşük boyutlu alan polinomlarından elde edilebilmesidir. Bu sonuç KÜ durumunda anti-alanların belli bir kombinasyonunun, KD durumdaki yardımcı alanlar gibi davranmasıyla ilgilidir. Dolayısıyla SYM teorilerinin Cebirsel Renormalizasyon yöntemi ile kurulan BRST kohomolojik yapısının incelenmesi, bu teorilerin renormalize edilebilirlik ve renormalize olmama özelliklerinin anlaşılmasının yanı sıra, cebirsel yapılarının anlaşılmasında da faydalıdır.

Bu bölümde, yukarıda bahsedilen özelliklerin gösterilmesi amacıyla $N=1$ ve $N=2$ SYM teorilerinin BRST kohomolojik yapısı incelenerek hem KD ve hem de KÜ süpersimetrik eylemlerin tam olarak düşük boyutlu alan polinomları cinsinden yazılabileceği ve SYM teorileri için Bölüm 3’de karşılaşılan KÜ eylem ile düşük boyutlu alan polinomlarını birbirlerine bağlayan cebirsel bir ifadenin bulunamaması probleminin bu yöntem ile çözülebileceği gösterilecektir. Bu amaçla, Cebirsel Renormalizasyon kullanılarak elde edilen yöntem özellikle $N=1$ SYM teorisi için oldukça ayrıntılı olarak verilmeye çalışılmıştır. Böylelikle kullanılan yöntemin anlaşılması ve farklı problemlere uygulanabilirliği için bu bölümün kendi başına yeterli olacağını umuyoruz.

4.1 $N=1$ SYM Teorisi ve BRST Kohomolojisi

4.1.1 Genişletilmiş BRST Dönüşümleri ve ST Operatörü

Bir teorinin Cebirsel Renormalizasyon yöntemiyle elde edilen genişletilmiş BRST kohomolojisinin incelenmesi için ilk adım, standart BRST üreteğine teorinin sahip olduğu diğer simetri üreteçlerinin de eklenerek, genişletilmiş BRST üreteçinin tanımlanmasıdır.

N=1 SYM teorisinin genişletilmiş BRST kohomolojisini ilk olarak KD süpersimetrik durum için inceleyeceğiz.

Bilindiği gibi, N=1 SYM teorisi için standart BRST dönüşümleri, c teorisinin yerel ayar değişmezliğine karşılık gelen Fadeev-Popov hayalet alanı olmak üzere

$$s_0 A_\mu = D_\mu c \quad (4.1)$$

$$s_0 \lambda = i\{c, \lambda\} \quad , \quad s_0 \bar{\lambda} = i\{c, \bar{\lambda}\} \quad , \quad s_0 \mathcal{D} = i[c, \mathcal{D}] \quad (4.2)$$

$$s_0 c = i\{c, c\} \quad (4.3)$$

ile verilir. Görüldüğü gibi s_0 'ın karesi sıfırdır.

$$s_0^2 = 0 \quad (4.4)$$

ve c anti-komüt eden bir hayalet alan olarak tanımlandığından s_0 etki ettiği alan polinomlarının Grassman parametresini ve hayalet sayısını bir arttırır. Eylem ²²

$$S_{N=1} = \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} - i\lambda \not{D} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \right\} \quad (4.5)$$

ayar değişmez olduğundan

$$s_0 S_{N=1} = 0$$

dır.

N=1 SYM için genişletilmiş BRST dönüşümleri s , s_0 'a eylemi değişmez bırakan süpersimetri

$$\delta = \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}$$

ve öteleme

$$\delta_t = v_\mu \partial^\mu$$

simetrileri eklenerek elde edilir. Burada θ ve v_μ sırasıyla süpersimetri ve öteleme parametreleridir. Genişletilmiş BRST dönüşümü s 'nin N=1 vektör çoklusunun elemanları üzerine etkisinin

$$s \sim s_0 + \delta + \delta_t$$

²²Bu bölümde, N=1 SYM eylemi olarak Bölüm 3'de verilen ve topolojik terimi de içeren $S_{N=1}^{sd}$ (3.42) eylemini kullanıyoruz.

gibi yazılabilmesi için δ ve δ_t , s_0 ile aynı Grassman paritesi ve hayalet sayısına sahip olmalıdır. Q ve ∂_μ sırasıyla anti-komütatif ve komütatif olduğundan, bu dönüşümlerin parametreleri yerine hayalet sayısı taşıyan komütatif bir sabit Weyl spinörü ξ ve anti-komütatif bir sabit vektörü η_μ ile

$$s := s_0 - i\xi^\alpha Q_\alpha - i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} - \eta_\mu \partial^\mu \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanabilir [22, 23, 24, 25, 26, 27]. Burada, ξ^α ve η_μ 'nin hayalet sayısı bir olduğundan bu parametreler küresel süpersimetri ve öteleme hayaletleri olarak adlandırılabilirler.

Dolayısıyla, N=1 vektör çoklusunun elemanlarının s -dönüşümleri (4.6) kullanılarak

$$sA_\mu = D_\mu c + \xi\sigma_\mu \bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu \lambda - i\eta_\nu \partial^\nu A_\mu \quad (4.7)$$

$$s\lambda = i\{c, \lambda\} - i\sigma^{\mu\nu} \xi F_{\mu\nu} + \xi \mathcal{D} - i\eta_\mu \partial^\mu \lambda \quad (4.8)$$

$$s\bar{\lambda} = i\{c, \bar{\lambda}\} - i\bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\xi} F_{\mu\nu} - \bar{\xi} \mathcal{D} - i\eta_\mu \partial^\mu \bar{\lambda} \quad (4.9)$$

$$s\mathcal{D} = i[c, \mathcal{D}] + i\xi \not{D} \bar{\lambda} - i\bar{\xi} \not{D} \lambda - i\eta_\mu \partial^\mu \mathcal{D} \quad (4.10)$$

şeklinde verilir. Hayaletlerin s -dönüşümleri ise, karesi sıfır olan bir s operatörü elde etmek için

$$sc = \frac{i}{2} \{c, c\} - 2i\xi\sigma^\nu \bar{\xi} A_\nu - i\eta_\mu \partial^\mu c \quad (4.11)$$

$$s\eta_\mu = -2\xi\sigma_\mu \bar{\xi} \quad (4.12)$$

$$s\xi = s\bar{\xi} = 0 \quad (4.13)$$

şeklinde seçilmelidir. Böylece, c ve η_μ hayaletlerinin süpersimetri altında da dönüşmesi sağlanarak, süpersimetrik ayar teorilerinde süpersimetrinin kovaryant türeve kapanması problemi çözülerek [24, 25, 22, 23, 26, 27], karesi sıfır olan,

$$s^2 = 0, \quad (4.14)$$

genişletilmiş BRST üretici s yazmak mümkündür.

ST özdeşliğinin elde edilmesi için ikinci adım eylemin ayar serbestliğinin sabitlenmesidir. Bu amaçla, standart BRST kuantizasyonunda olduğu gibi teoriye bir

anti-hayalet $\bar{c}$ ve bir Lagrange çarpanı b eklenebilir. Ancak standart durumdan farklı olarak $s^2 = 0$ şartının sağlanması için bu trivial çiftin s -dönüşümleri

$$s\bar{c} = b - i\eta_\mu \partial^\mu \bar{c} \quad (4.15)$$

$$sb = -2i\xi\sigma_\mu\bar{\xi}\partial^\mu\bar{c} - i\eta_\mu\partial^\mu b \quad (4.16)$$

şeklini alır ve teorideki ayar serbestliği, eyleme bir s -tam terim eklenerek yok edilebilir. Bu amaçla Landau tipi bir ayar sabitleme terimi seçilirse

$$S_{gf} = tr \int d^4x s(\bar{c}\partial^\mu A_\mu) \quad (4.17)$$

ayar sabitlenmiş eylem $S_{N=1} + S_{gf}$, s -nilpotent olduğundan aşık bir şekilde s altında değişmez kalır

$$s(S_{N=1} + S_{gf}) = sS_{N=1} = 0. \quad (4.18)$$

Görüldüğü gibi, genişletilmiş BRST dönüşümü s 'nin kullanılmasının avantajı, ayar sabitleme işleminin sadece teoremin yerel simetrisi yerine süpersimetri gibi diğer simetrisi de içeren bir s -tam terim kullanılarak yapılmasıdır. Bilindiği gibi ayar simetrisi ve süpersimetri ayrı ayrı ele alındığında, bu iki simetri altında ayrı ayrı değişmez kalan böyle bir terim bulmak mümkün değildir [53]. Diğer taraftan, (4.17)'de η_μ hayaletinin gözükmemesi ise, ayar sabitleme teriminin uzay-zaman ötelemeleri altında değişmez kaldığını göstermektedir.

ST özdeşliğinin yazılması için son adım, eylemde teoremin içerdiği alanların s -varyasyonlarına bağlanan anti-alanların (kaynakların) teoriye eklenmesidir. Bu amaçla notasyonda kolaylık sağlaması için alanlar $\Phi^A = \{A_\mu, \lambda, \bar{\lambda}, \mathcal{D}, c^*\}$ ile gösterilirse bu alanlara karşılık gelen anti-alanlar

$$\Phi_A^* = \{A_\mu^*, \lambda^*, \bar{\lambda}^*, \mathcal{D}^*, c^*\}$$

kullanılarak ayar sabitlenmiş eyleme eklenmesi gereken terim

$$S_{ek} = tr \int d^4x \Phi_A^* s\Phi^A \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir.

Eyleme eklenen S_{ek} terimi orijinal eylem ile aynı boyut ve kuantum sayılarına sahip olması gerektiğinden, anti-alanların sahip olduğu boyut, Grassmann parametresi ve hayalet sayıları (4.19) kullanılarak belirlenebilir. Bu nedenle orijinal alanların boyutları, Grassman pariteleri, ve hayalet sayıları sırasıyla $Boyut(\Phi^A)$, $GP(\Phi^A)$ ve $Gh(\Phi^A)$ ile gösterilirse, herhangi bir eylem için

$$Boyut(S) = GP(S) = Gh(S) = 0$$

olduğundan ve s -varyasyonu etki ettiği büyüklerin boyutunu değiştirmeden, Grassman paritelerini ve hayalet sayılarını bir arttırdığından, anti-alanlar için dört boyutta

$$Boyut(\Phi_A^*) = 4 - Boyut(\Phi^A) \quad (4.20)$$

$$GP(\Phi_A^*) = GP(\Phi^A) + 1 \quad (mod 2) \quad (4.21)$$

$$Gh(\Phi_A^*) = -Gh(\Phi^A) - 1 \quad (4.22)$$

elde edilir.

Kabuk dışı süpersimetrik durum için $N=1$ SYM eyleminin daha fazla genişletilmesine gerek yoktur ve genişletilmiş eylem I_t

$$I_t = S_{N=1} + S_{gf} + S_{ek} \quad (4.23)$$

için ST özdeşliği

$$S(I_t) = tr \int d^4x \left(\frac{\delta I_t}{\delta \Phi^A} \frac{\delta I_t}{\delta \Phi_A^*} + s\bar{c} \frac{\partial I_t}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial I_t}{\partial b} + s\eta_\mu \frac{\partial I_t}{\partial \eta_\mu} \right) = 0 \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır. Burada, (4.24) ST özdeşliği, standart BRST simetrisinin süpersimetri ve öteleme simetrileri ile genişletilmesi ile tanımlanan (4.6) s -dönüşümleri ile elde edildiğinden, YM teorileri için yazılan sıradan ST özdeşliği ile beraber aynı zamanda süpersimetri ve ötelemeler için Ward özdeşliklerini de içermektedir.

Bir teorinin renormalize edilmesi için pertürbatif açılımda klasik simetrileri düzeltmek için gereken karşı terimleri ve ayrıca olası anomali terimlerini bulmak için ST özdeşliğinin lineerleştirilmesi ile karesi sıfır olan bir operatör, $\mathcal{B}$

elde edilmelidir. Bilindiği gibi, lineerleştirilmiş ST operatörü olarak da bilinen, $\mathcal{B}$ operatörünün hayalet sayıları ayrı ayrı sıfır ve bir için kohomoloji sınıflarının elde edilmesiyle sırasıyla yukarıda bahsedilen tüm karşı terimler ve olası anomali terimleri bulunabilir ²³ [21].

Bu çalışmamızda amacımız N=1 SYM eylemini böyle bir $\mathcal{B}$ operatörünün kohomolojisi yardımıyla elde etmek olduğundan, bu kohomoloji sınıflarını integre edilmiş alan polinomları uzayına kısıtlamak mümkündür. Dolayısıyla, ST özdeşliğini basitleştirmek için genişletilmiş eylemin uzay-zaman ötelemeleri altında değişmez kalması

$$\mathcal{P}_\mu I_t = 0 \quad (4.25)$$

$$\mathcal{P}_\mu = tr \int d^4x (\partial_\mu \Phi^A \frac{\delta}{\delta \Phi^A} + \partial_\mu \Phi_A^* \frac{\delta}{\delta \Phi_A^*} + \partial_\mu \bar{c} \frac{\delta}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu b \frac{\delta}{\delta b}) \quad (4.26)$$

kullanılabilir. Görüldüğü gibi $\mathcal{P}_\mu$ alan ve anti-alanların polinomuna lineer olarak etki ettiğinden öteleme hayaleti η_μ

$$\frac{\partial I_t}{\partial \eta^\nu} = \Delta_\nu = tr \int d^4x (A_\mu^* \partial_\nu A^\mu - \lambda^* \partial_\nu \lambda - \bar{\lambda}^* \partial_\nu \bar{\lambda} + \mathcal{D}^* \partial_\nu \mathcal{D} - c^* \partial_\nu c) \quad (4.27)$$

kullanılarak sabitlenebilir. Burada (4.27) ifadesi lineer olarak kırılan öteleme simetrisi için bir Ward özdeşliğidir. Δ_ν terimi kuantum alanlarında lineer olduğundan bu kırılmanın teorisinin renormalize edilmesinde bir etkisi yoktur ve I_t içindeki η_μ 'lu terimler yok edilebilir. Bu amaçla genişletilmiş eylem

$$I_t = I + \eta^\mu \Delta_\mu, \quad \frac{\partial I}{\partial \eta^\nu} = 0 \quad (4.28)$$

formunda yazılırsa lineer olarak kırılan Ward özdeşliği nedeniyle I eylemi modifiye edilmiş ST özdeşliğini

$$S(I) = 2i\xi\sigma^\mu\bar{\xi}\Delta_\mu \quad (4.29)$$

$$S(I) = tr \int d^4x (\frac{\delta I}{\delta \Phi^A} \frac{\delta I}{\delta \Phi_A^*} + s\bar{c} \frac{\partial I}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial I}{\partial b}) \quad (4.30)$$

sağlar.

Denklem (4.29) ile verilen modifiye edilmiş ST özdeşliği ve (4.28) gibi yazılabilen I_t genişletilmiş eyleminden de görülebileceği gibi, genişletilmiş BRST dönüşümü

²³Herhangibir ayar teorisi için $\mathcal{B}$ operatörünün kohomolojisinin neden bu terimlerle ilgili olduğu Ek C'de gösterilmiştir.

s ötelemeleri içermeyecek şekilde de tanımlanabilir

$$s := s_0 - i\xi^\alpha Q_\alpha - i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}. \quad (4.31)$$

Bu sonuç aynı zamanda Ref.[33]'de BRST dönüşümleri s 'nin ötelemeleri de içeren (4.6) yerine yukarıda verilen (4.31) tanımın kullanılmasının nedenidir. Bu çalışmada da, herhangi bir notasyonel karmaşanın olmayacağını umarak, bundan sonra s için (4.31)'de verilen tanımları kullanacağız.

KD N=1 SYM teorisinin genişletilmiş BRST kohomolojisinin incelenmesi için uygun bir operatör, modifiye edilmiş ST özdeşliği (4.30) lineerize edilerek

$$\mathcal{B}_I = tr \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta \Phi^A} \frac{\delta}{\delta \Phi_A^*} + \frac{\delta I}{\delta \Phi_A^*} \frac{\delta}{\delta \Phi^A} + s\bar{c} \frac{\partial}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial}{\partial b} \right) \quad (4.32)$$

şeklinde elde edilir. Bu operatörün teorideki alanlar ve anti-alanlar üzerine etkisi, KD süpersimetri için

$$\mathcal{B}_I \Phi^A = s\Phi^A \quad (4.33)$$

$$\mathcal{B}_I \Phi_A^* = \frac{\delta I}{\delta \Phi^A} \quad (4.34)$$

şeklindedir. Burada not edilmesi önemli olan nokta, anti-alanların $\mathcal{B}$ -varyasyonları

$$\mathcal{B}_I \Phi_A^* = \frac{\delta I}{\delta \Phi^A} = \frac{\delta S_{N=1}}{\delta \Phi^A} + \dots$$

olduğundan karşılık geldikleri alanların hareket denklemlerini içermeleridir. Literatürde Kozsul-Tate diferansiyeli olarak adlandırılan bu kısım

$$\delta_{kt} \Phi_A^* = \frac{\delta S_{N=1}}{\delta \Phi^A}, \quad \delta_{kt} \Phi^A = 0 \quad (4.35)$$

kendi başına nilpotenttir

$$\delta_{kt}^2 = 0 \quad (4.36)$$

ve bir teoremin BRST kohomolojik açıdan incelenmesinde önemli bir yer tutmaktadır [54].

$\mathcal{B}_I$ operatörü, modifiye edilmiş ST özdeşliğinin içerdiği lineer kırılma nedeniyle (başka bir deyişle s ötelemeleri içermediğinden) tam olarak nilpotent değildir

$$\mathcal{B}_I \mathcal{B}_I = -2i\xi^\nu \bar{\xi} \mathcal{P}_\nu. \quad (4.37)$$

Ancak, B_I operatörü integre edilmiş polinomlar üzerine kısıtlandığında, $\mathcal{P}_\nu$ 'nin bu uzaya etkisi bir yüzey integrali olduğundan,

$$\mathcal{P}_\nu \int d^4x \mathcal{K} = \int d^4x \partial_\nu(\dots) \sim 0,$$

B_I 'nin karesi bu uzayda sıfır olarak alınabilir.

KÜ süpersimetrik durumda yukarıda verilen yöntem kullanılırsa, KÜ teoride yardımcı alan sıfır olduğundan, $\mathcal{D} = 0$, genişletilmiş BRST dönüşümü $\tilde{s}$

$$\tilde{s} = s|_{\mathcal{D}=0} \quad (4.38)$$

ile tanımlanır²⁴. KÜ süpersimetri cebri sadece hareket denklemleri kullanıldığında kapandığından, $\tilde{s}^2$ için de

$$\tilde{s}^2 = -2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi}\partial_\nu \quad (\text{mod. } \lambda, \bar{\lambda}'\text{'in hareket denk.leri}) \quad (4.39)$$

elde edilir.

Genişletilmiş BRST dönüşümünün kabuk üstü kapanması problemi teoremin genişletilmiş eylemine standart olmayan fermiyonların anti-alanları cinsinden kuadratik bir terim eklenerek çözülebilir [22, 23, 24, 25, 26, 27]. Bu amaçla eylemin üniter, ayar değişmez, boyutsuz, Grassman çift ve sıfır hayalet sayısına sahip olduğu hatırlanırsa, en genel böyle bir terim c_1, c_2 reel sabitler olmak üzere

$$tr \int d^4x (c_1(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*)^2 + c_2\xi\lambda^*\bar{\xi}\bar{\lambda}^*)$$

olmalıdır. Böyle bir terimin eklenmesiyle elde edilecek modifiye ST özdeşliğinin ve lineerleştirilmiş ST operatörünün KD durumda (4.29) ve (4.37) ile verilen benzer cebirsel ilişkileri sağlaması için, biraz işlemten sonra

$$c_1 = -\frac{1}{2}g^2, \quad c_2 = 0$$

olması gerektiği bulunur. Dolayısıyla,

$$S_{kuad} = -\frac{1}{2}g^2 tr \int d^4x (\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*)^2 \quad (4.40)$$

²⁴Burada s için ötelemelerden bağımsız olan (4.31) tanımı kullanılmaktadır.

teriminin eklenmesiyle elde edilen KÜ N=1 SYM genişletilmiş eylem [26]

$$\tilde{I} = S_{SYM}|_{D=0} + S_{gf} + S_{ek}|_{D=0} + S_{kuad} \quad (4.41)$$

kullanılarak modifiye ST özdeşliği ve lineerleştirilmiş ST operatörü

$$\mathcal{S}(\tilde{I}) = 2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi}\tilde{\Delta}_\nu \quad (4.42)$$

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}\mathcal{B}_{\tilde{I}} = -2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi}\tilde{\mathcal{P}}_\nu \quad (4.43)$$

şeklinde bulunur²⁵.

KÜ durumda $\mathcal{B}_I$ operatörünün λ ve $\bar{\lambda}$ haricindeki diğer alanlara ve anti-alanlara etkisi KD durumda elde edilen (4.33) ve (4.34) ile benzerdir,

$$\mathcal{B}_I\Phi^A = \tilde{s}\Phi^A, \quad \Phi^A \neq \lambda, \bar{\lambda} \quad (4.44)$$

$$\mathcal{B}_I\Phi_A^* = \frac{\delta I}{\delta\Phi^A}. \quad (4.45)$$

Teorideki fermiyon alanları $\lambda, \bar{\lambda}$ 'ın $\mathcal{B}$ varyasyonları ise eyleme eklenen S_{quad} terimi nedeniyle modifiye olurlar:

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}\lambda = \tilde{s}\lambda + g^2\xi(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*) \quad , \quad \mathcal{B}_{\tilde{I}}\bar{\lambda} = \tilde{s}\bar{\lambda} - g^2\bar{\xi}(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*). \quad (4.46)$$

Buradan da görülebileceği gibi $g^2(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*)$ kombinasyonu KD durumda var olan yardımcı alan $\mathcal{D}$ gibi davranmaktadır,

$$\mathcal{B}_I\lambda|_{D=g^2(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*)} = \mathcal{B}_{\tilde{I}}\lambda \quad , \quad \mathcal{B}_I\lambda|_{D=g^2(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*)} = \mathcal{B}_{\tilde{I}}\lambda \quad (4.47)$$

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}g^2(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*) = \mathcal{B}_I\mathcal{D}|_{D=g^2(\xi\lambda^* - \bar{\xi}\bar{\lambda}^*)}. \quad (4.48)$$

4.1.2 ST Operatörünün Kohomolojisi ve N=1 SYM Eylemi

ST operatörü $\mathcal{B}$ 'nin kohomolojisinin incelenmesinin başlangıç noktası, $\mathcal{B}$ 'nin etkisi integre edilmiş alan ve anti-alan polinomlarına kısıtlandığı zaman (4.37) ve (4.43) ile verilen ifadelerin sağ tarafının bir yüzey integrali olarak yazılabilmesidir. Dolayısıyla teoride herhangi bir pertürbatif olmayan katkı yoksa²⁶

$$\mathcal{B} \int d^4x \mathcal{K} = 0 \quad (4.49)$$

²⁵Burada $\tilde{\Delta}_\nu = \Delta_\nu|_{D=0}$, $\tilde{\mathcal{P}}_\nu = \mathcal{P}_\nu|_{D=0}$ 'dir.

²⁶Çalışmanın bundan sonraki kısmında açıkça belirtildiği durumlar hariç, $\mathcal{B}$ operatörü hem KD durumda elde edilen $\mathcal{B}_I$ ve hem de KÜ durumdaki $\mathcal{B}_{\tilde{I}}$ operatörlerini göstermektedir.

denklemini, integre edilmiş alan ve anti-alan polinomları uzayında bir kohomoloji problemi oluşturur. Ek C’de gösterildiği gibi, bu denklemin hayalet sayısı sıfır ve bir için trivial olmayan çözümleri,

$$\int d^4x \mathcal{X} \neq \mathcal{B} \int d^4x \mathcal{X}'$$

sırasıyla teorideki karşı terimler ve olası anomaliler ile ilgilidir.

$\mathcal{B}$ operatörünün kohomoloji sınıflarının elde edilmesi için en basit ve şık yollardan biri, denk.(4.49)’nin yerel versiyonundan elde edilen yavru (descent) denklemlerin çözümlerinin kullanılmasıdır [21]. Bu amaçla denk.(4.49)’un en genelde bir yüzey integrali verdiği varsayılırsa, bu denklemin integre edilmemiş hali

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_0 = (\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu)^\alpha \partial^\mu \mathcal{X}_{1\alpha} \quad (4.50)$$

şeklinde yazılabilir. Her ne kadar standart yaklaşımda, bu denklemin sağ tarafı sadece kısmi türev ∂_μ ile orantılı alınsa da [21], burada teorinin içerdiği süpersimetri nedeniyle, bu terimin $(\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu)^\alpha$ katsayısı ile beraber verildiğini varsayıyoruz [33]. Aşağıda da gösterileceği gibi bu varsayım elde edilebilecek yavru denklemlerinin sayısını, teorinin içerdiği süpersimetriye göre kısıtlamaktadır.

İkinci yavru denklemi elde etmek için, standart yöntemde de olduğu gibi, ilkinin (4.50) $\mathcal{B}$ varyasyonu alınır ve (4.37) kullanılırsa

$$\mathcal{B}^2 \mathcal{X}_0 = -2i\xi\sigma^\nu \bar{\xi}\partial_\nu \mathcal{X}_0 = (\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu)^\alpha \partial^\mu \mathcal{B}\mathcal{X}_{1\alpha} \quad (4.51)$$

bulunur. Burada spinör indislerinde anti-simetrik $\mathcal{X}_{2\alpha\beta} = -\mathcal{X}_{2\beta\alpha}$ herhangi bir tensör için, Ek A’da verilen spinor cebri kullanıldığında

$$(\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu)^\alpha (\bar{\xi}\bar{\sigma}_\nu)^\beta \partial_\mu \partial_\nu \mathcal{X}_{2\alpha\beta} = 0 \quad (4.52)$$

olduğundan, (4.52) denklem (4.51)’in bir tarafına eklenebilir. Elde edilecek bu ifade $(\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu)^\alpha$ parantezine alınır, ikinci yavru denklem

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_{1\alpha} = -2i\xi_\alpha \mathcal{X}_0 + (\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu)^\beta \partial^\mu \mathcal{X}_{2\alpha\beta} \quad (4.53)$$

şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki işlemlere benzer olarak, üçüncü yavru denkleminin bulunması için ikinci denklem (4.53)'ün $\mathcal{B}$ varyasyonu alınır, elde edilen ifade bir alt çözüm $\mathcal{X}_{\alpha\beta\gamma}$ içerir. Ancak, $\mathcal{X}_3$ çözümü spinör indislerinde tamamen anti-simetrik olduğundan ve spinör indisleri sadece iki farklı değer ($\alpha = 1, 2$) alabildiğinden, bu çözüm özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla, üçüncü yavru denklem

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_{2\alpha\beta} = 2i\xi_\alpha\mathcal{X}_{1\beta} - 2i\xi_\beta\mathcal{X}_{1\alpha} \quad (4.54)$$

şeklinde elde edilir ve (4.49)'un yavrulama işlemi bu seviyede kendiliğinden son bulur.

Yavru denklemlerin çözümleri N=1 SYM teorisinin simetri içeriği ve BRST yönteminde tanımlanan hayalet sayılarının korunumu ile kısıtlanmıştır. Bu amaçla Tablo 3'de teorideki alanların, anti-alanların ve $\mathcal{B}$ operatörünün boyutları, R-yükleri, Grassman Pariteleri ve hayalet sayıları özetlenmesi faydalıdır. N=1 SYM eylemi süpersimetrik ve ayar değişmez olduğundan doğal olarak $\mathcal{B}$

Tablo 3: N=1 SYM teorisindeki alanların boyutları, Grassmann pariteleri GP , hayalet sayıları Gh ve R-yükleri R .

	A_μ	λ	$\mathcal{D}$	c	$\bar{c}$	b	ξ	A_μ^*	λ^*	$\mathcal{D}^*$	c^*	$\mathcal{B}$
d	1	3/2	2	0	2	2	-1/2	3	5/2	2	4	0
GP	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1
Gh	0	0	0	1	-1	0	1	-1	-1	-1	-2	1
R	0	-1	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0

altında da değişmezdir, başka bir deyişle $\mathcal{B}$ operatörünün hayalet sayısı sıfır olan kohomoloji sınıfına aittir. Bu çalışmada amacımız, eylemi yukarıda verilen yavru denklemlerinin çözümü yardımıyla düşük boyutlu alan polinomları cinsinden ifade etmek olduğundan, Lagranjiyenin dahil olduğu $\mathcal{X}_0$ çözümleri için

$$d(\mathcal{X}_0) = 4 \quad , \quad Gp(\mathcal{X}_0) = Gh(\mathcal{X}_0) = R(\mathcal{X}_0) = 0 \quad (4.55)$$

alınmalıdır. Dolayısıyla Tablo 3'den yavru çözümler $\mathcal{X}_1$ ve $\mathcal{X}_2$ için

$$d(\mathcal{X}_1) = \frac{7}{2} \quad , \quad GP(\mathcal{X}_1) = 1 \quad , \quad Gh(\mathcal{X}_1) = 0 \quad , \quad R(\mathcal{X}_1) = -1 \quad (4.56)$$

$$d(\mathcal{X}_2) = 3 \quad , \quad GP(\mathcal{X}_2) = 0 \quad , \quad Gh(\mathcal{X}_2) = 0 \quad , \quad R(\mathcal{X}_2) = -2 \quad (4.57)$$

bulunur.

Görüldüğü gibi son yavru denklemin çözümü, (4.57) yardımıyla $\mathcal{B}$ operatörünü kullanmaya gerek kalmadan, $\lambda.\lambda$ gibi bir terim olmalıdır. Diğer taraftan, (4.54) denkleminin sağ tarafı ξ ile orantılı olduğundan hayalet sayısı birdir, $\lambda.\lambda$ gibi bir terimin $\mathcal{B}$ varyasyonu FP hayalet alanı c 'yi içeremez. Dolayısıyla $\mathcal{X}_2$ aynı zamanda ayar değişmez olmalıdır. Bu özelliklere sahip hem KD ve hem de KÜ süpersimetrik durumlar için, k keyfi bir sabit olmak üzere, sadece tek bir anti-simetrik $\mathcal{X}_2$ çözümü bulunabilir:

$$\mathcal{X}_{2\alpha\beta} = k\epsilon_{\alpha\beta}tr(\lambda\lambda). \quad (4.58)$$

Elde edilen bu çözüm, Bölüm 3'de N=1 SYM teorisinin süpersimetri kohomolojisi ile elde edilen çözüm ile benzerdir. Başka bir değişle eylemin dahil olduğu süpersimetri çoklusunun en alt elemanı, yukarıda verilen en alt yavru denkleminin çözümü ile orantılıdır. İki yaklaşım arasındaki bu ilişki, aynı zamanda, özellikle çoklu yapısı bilinmeyen (N=4 SYM gibi), süpersimetrik teorilerin BRST kohomolojisinin incelenmesindeki ilk fayda olarak düşünülebilir.

İkinci yavru denklemin çözümü $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ en alt denklem (4.54)'de yerine konulduğu zaman, N=1 genişletilmiş süpersimetri cebri görece basit olduğundan, (4.54) denkleminin sağ tarafından okunabilir. $\mathcal{B}$ operatörü KD ve KÜ süpersimetri için farklı olduğundan, KD durum için

$$\mathcal{X}_{1\alpha}^{kd} = iktr(-i\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta}\lambda_{\beta}F_{\mu\nu} - \lambda_{\alpha}\mathcal{D}) \quad (4.59)$$

ve KÜ durum için

$$\mathcal{X}_{1\alpha}^{ku} = iktr\{-i\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta}\lambda_{\beta}F_{\mu\nu} - g^2(\frac{1}{2}\lambda_{\alpha}\xi\lambda^* + \frac{1}{2}\lambda_{\alpha}^*\xi\lambda - \lambda_{\alpha}\bar{\xi}\lambda^*)\} \quad (4.60)$$

elde edilir.

Ancak, küresel hayalet ξ 'ler komüt eden spinörler

$$\xi_{\alpha}\xi_{\beta} - \xi_{\beta}\xi_{\alpha} = 0$$

olduklarından $\mathcal{X}_{1\alpha}^{ku}$ çözümüne ξ_{α} ile orantılı bir terimin eklenmesi (4.54)'ün sağ tarafını değiştirmez. Böyle bir terim $\mathcal{X}_1$ 'in boyutu ve kuantum sayıları kullanılarak

$$\mathcal{X}_{1\alpha}^t = \frac{i}{2}g^2k\xi_{\alpha}tr\lambda^*\lambda \quad (4.61)$$

şeklinde seçilirse elde edilen KÜ çözüm

$$\tilde{\mathcal{X}}_{1\alpha}^{ku} = \mathcal{X}_{1\alpha}^{ku} + \mathcal{X}_{1\alpha}^t = i k t r \{ -i \sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta} \lambda_{\beta} F_{\mu\nu} - \lambda_{\alpha} g^2 (\xi \lambda^* - \bar{\xi} \bar{\lambda}^*) \} \quad (4.62)$$

formunu alır. Burada, (4.61) ve (4.62)'den görüldüğü gibi $\mathcal{X}_{1\alpha}^t$ 'nin katsayısı $i/2$ olarak seçilmesinin nedeni, KD ve KÜ çözümlerde $\mathcal{D}$ ve $g^2(\xi \lambda^* - \bar{\xi} \bar{\lambda}^*)$ yer değiştirildiğinde bu iki çözümün birbirlerine benzer olmalarıdır.

KD ve KÜ $\mathcal{X}_0$ çözümü, $\mathcal{X}_{1\alpha}^{off}$ ve $\tilde{\mathcal{X}}_{1\alpha}^{on}$ denklem (4.53)'de yerlerine konularak

$$\mathcal{X}_0^{kd} = k t r \{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} - i \lambda \not{D} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \} \quad (4.63)$$

$$\mathcal{X}_0^{ku} = k t r \{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} - i \lambda \not{D} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} g^4 (\xi \lambda^* - \bar{\xi} \bar{\lambda}^*)^2 \} \quad (4.64)$$

bulunur.

Görüldüğü gibi KD N=1 SYM eylemi $k = 1/g^2$ için elde edilen çözümler cinsinden

$$S_{N=1} = \mathcal{X}_0^{kd} = \mathcal{X}_0^{ku}|_{g^2(\xi \lambda^* - \bar{\xi} \bar{\lambda}^*) = \mathcal{D}} \quad (4.65)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde teoremin genişletilmiş eylemi içinse

$$\int d^4 x \mathcal{X}_0^{kd} = -\frac{1}{2} g \frac{d}{dg} I, \quad \int d^4 x \mathcal{X}_0^{ku} = -\frac{1}{2} g \frac{d}{dg} \tilde{I} \quad (4.66)$$

cebirsel ilişkileri elde edilir.

Diğer taraftan, k serbest bir parametre olarak bırakılırsa, yukardaki ilişkiler,

$$\int d^4 x \mathcal{X}_0^{kd} = k \frac{d}{dg^{-2}} I = \bar{k} \frac{d}{dg} I \quad (4.67)$$

$$\int d^4 x \mathcal{X}_0^{ku} = k \frac{d}{dg^{-2}} \tilde{I} = \bar{k} \frac{d}{dg} \tilde{I} \quad (4.68)$$

halini alır. $\frac{d}{dg} I$, $\frac{d}{dg} \tilde{I}$ terimleri $\mathcal{B}$ operatörünün hayalet sayısı sıfır olan kohomolojisi-
sine ait olduğundan, bu terimler pertürbatif açılımda teoremin renormalizasyonu
için eklenmesi gerekli karşı terimlerdir. Burada keyfi sabit k , bağlanma sabitinin
renormalizasyonuna karşılık gelen bir parametre olarak da düşünülebilir [33]. Elde
edilen bu sonuç Ref.[26]'da teoremin BRST kohomolojisini farklı bir yöntemle in-
celenmesi ile bulunan sonuçla uyumludur.

Diğer taraftan, yukarıdaki $\mathcal{X}_2$ ve $\mathcal{X}_0$ çözümü, en azından kabuk üstü süpersimetri için, sırasıyla eylemin dahil olduğu çoklunun en alt ve en üst elemanları olduğundan (bkz Bölüm 3), yukarıda verilen yavru denklemlerinin $\mathcal{X}_i$ çözümlerinin de birbirleri ile bir tırmanma operatörü yardımıyla ilişkili olduğu düşünülebilir [33].

Bu amaçla yavru denklemlerinin sağ tarafları ξ süpersimetri hayaletleri ile orantılı olduğundan,

$$\mathcal{N} = \xi^\alpha \frac{\delta}{\delta \xi^\alpha} \quad (4.69)$$

şeklinde bir filtreleme operatörü tanımlanarak, $\mathcal{B}$ operatörü için

$$\mathcal{B} = \sum \mathcal{B}_n \quad , \quad [\mathcal{N}, \mathcal{B}_n] = n \mathcal{B}_n \quad (4.70)$$

yazılabilir ve

$$\mathcal{B}_0^2 = 0 \quad (4.71)$$

$$\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1\} = -2i\xi^\mu \bar{\xi} \partial_\mu \quad (4.72)$$

$$\{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_2\} + \mathcal{B}_1^2 = 0 \quad (4.73)$$

$$\mathcal{B}_2^2 = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\} = 0 \quad (4.74)$$

cebri elde edilir.

Tırmanma işlemi için uygun bir operatör tanımlanabilmesi için $\mathcal{B}$ operatörü açıkça süpersimetri hayaletleri cinsinden,

$$\mathcal{B} = \delta + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Y}^{\dot{\alpha}} + \xi^\alpha Y_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \xi^\alpha Z_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{X}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \frac{1}{2} \xi^\alpha \xi^\beta X_{\alpha\beta} \quad (4.75)$$

gibi yazılır²⁷ ve

$$\beta = \mathcal{B}_0 = \delta + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{Y}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{\dot{\beta}} \bar{X}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (4.76)$$

$$\xi^\alpha Q_\alpha = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 = \xi^\alpha (Y_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} Z_{\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2} \xi^\beta X_{\alpha\beta}) \quad (4.77)$$

ile β ve Q operatörleri tanımlanırsa, (4.71-4.74)'de verilen cebir yardımıyla en alt yavru denklem (4.54)'ün

$$\beta \mathcal{X}_{2\alpha\beta} = 0 \quad (4.78)$$

²⁷Burada doğal olarak $Z^{k\bar{u}} \neq Z^{KD}$ and KD süpersimetrik durum için $X_{\alpha\beta}^{KD} = 0 = \bar{X}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^{KD}$.

ve

$$\xi^\gamma Q_\gamma \mathcal{X}_{2\alpha\beta} = 2i\xi_\alpha \mathcal{X}_{1\beta} - 2i\xi_\beta \mathcal{X}_{1\alpha} \quad (4.79)$$

şeklinde ikiye ayrılabilceği görülür. Denklem (4.79)'dan görüldüğü gibi Q operatörü bir cins tırmanma operatörü gibidir ve gerçekten de biraz işlemten sonra yavru denklemlerinin yukarıda verilen çözümlerinin birbirlerine

$$Q_\gamma \mathcal{X}_{2\alpha\beta} = 2i(\epsilon_{\alpha\gamma} \mathcal{X}_{1\beta} - \epsilon_{\beta\gamma} \mathcal{X}_{1\alpha}) \quad (4.80)$$

$$Q_\alpha \mathcal{X}_{1\beta} = 2i\epsilon_{\alpha\beta} \mathcal{X}_0 \quad (4.81)$$

cebirsel ilişkileri ile bağlı olduğu elde edilerek en alt çözümden en üst çözüme

$$Q^\alpha Q^\beta \mathcal{X}_{2\alpha\beta} = -8\mathcal{X}_0 \quad (4.82)$$

şeklinde tırmanılabilir.

KD süpersimetri için (4.82) ile verilen tırmanma işleminin sonucu

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_0^{kd} &= -\frac{1}{8g^2} Q^\alpha Q_\alpha \text{tr} \int d^4x \lambda^\beta \lambda_\beta \\ &= \frac{1}{g^2} \text{tr} \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} - i\lambda \not{D} \bar{\lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{D}^2 \right\} \\ &= S_{N=1} \end{aligned} \quad (4.83)$$

dir. Burada KD süpersimetrik durum için filtreleme yardımıyla elde edilen Q (4.77) operatörünün $N=1$ vektör çoklusunun elemanları üzerine etkisi Bölüm 3'de kullanılan sıradan süpersimetri dönüşümlerinin kiral kısmı ile aynı olduğundan, (4.83) ile elde edilen ifade (3.44) ile benzerdir. Ancak, KÜ süpersimetrik durum için Q tırmanma operatörü, eyleme eklenen (4.40) kuadratik anti-alan terimleri nedeniyle modifiye olduğundan (4.82) tırmanma işleminin sonucu olarak

$$\mathcal{X}_0^{ku} = -\frac{1}{8g^2} Q^\alpha Q_\alpha \text{tr} \int d^4x \lambda^\beta \lambda_\beta \quad (4.84)$$

$$= \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{3i}{8} \lambda \not{D} \bar{\lambda} - \frac{3i}{8} \bar{\lambda} \not{D} \lambda + \dots \right) \quad (4.85)$$

$$= S_{N=1}^{ku} + \mathcal{F}(\Phi_A^*) \quad (4.86)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $\mathcal{X}_0^{ku}$ çözümü eylemden oldukça farklıdır. Ancak, elde edilmiş yöntemi ile bu çözüm $\mathcal{B}$ 'nin hayalet sayısı sıfır olan kohomoloji sınıfına

ait olduğundan, bir $\mathcal{B}$ -tam terimin bu ifadeye eklenmesi sonucu değiştirmez. Eklenebilecek böyle bir terim ise, $\mathcal{B}$ etki ettiği polinomların hayalet sayısını bir arttırdığından anti-alanları içermesi gerektiği açıktır. Bölüm 3'de de tartışıldığı gibi $S_{N=1}^{ku}$ 'nin KD durumdan olan farkı $\lambda \mathcal{D} \bar{\lambda}$ olduğundan bu terim

$$\mathcal{B} \int d^4x \text{tr} \lambda^* \lambda$$

formuna sahip olmalıdır. Bu terim, aynı zamanda yavru denklemlerin doğrudan çözülmesi sırasında elde edilen $\mathcal{K}_2^t$ teriminin doğrudan yavru denkleminde yerine konulması ile de bulunabilir.

Dolayısıyla (4.82) ilişkisinin sonucu olarak KD ve KÜ süpersimetrik genişletilmiş eylemler $k = \frac{1}{g^2}$ için

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g \frac{d}{dg} I &= S_{SYM} \\ &= -\frac{1}{8g^2} Q^\alpha Q_\alpha \text{tr} \int d^4x \lambda^\beta \lambda_\beta \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g \frac{d}{dg} \tilde{I} &= S_{SYM}|_{\mathcal{D}=0} - S_{quad} \\ &= -\frac{1}{8g^2} Q^\alpha Q_\alpha \text{tr} \lambda^\beta \lambda_\beta - \frac{1}{4} \mathcal{B}_{\tilde{I}} \text{tr} \int d^4x \lambda^{*\alpha} \lambda_\alpha \end{aligned} \quad (4.88)$$

cebirsel ifadesi ile elde edilebilir[33].

Görüldüğü gibi N=1 SYM teorisinin genişletilmiş BRST kohomolojisi yardımıyla elde edilen yavru denklemleri ile incelenmesinin avantajı hem KD ve hem de KÜ süpersimetrik durumlar için eylemin üç boyutlu alan polinomu $\text{tr} \lambda \lambda$ cinsinden tam olarak bulunabilmesidir. Ayrıca, (4.87) ve (4.88) cebirsel ilişkileri arasındaki fark bir tam $\mathcal{B}$ -terimi olarak yazılabilmesi N=1 SYM teorisinin BRST kohomolojisinin KÜ ve KD süpersimetrik durumlar için aynı olduğunu gösterir[33]. Bu sonuç, sadece yardımcı alan içeriği bakımından farklılık gösteren Yang-Mills tipindeki bir ayar teorisinin BRST kohomolojisinin aynı olduğunu belirten teorem [34] ile uyumludur.

4.2 N=2 SYM Teorisi ve BRST Kohomolojisi

N=2 SYM teorisinin BRST kohomolojisinin incelenmesi ve bu amaçla kullanılacak hesapların daha sade ve basit olarak gösterilebilmesi için teorisin SU(2) kovaryant formülasyonu kullanılabilir. Bu formülasyonda, SU(2) R simetrisi altında bir çiftli olarak dönüşen fermiyon alanlar λ ve ψ (bkz.Bölüm 2), bir SU(2) indisi $i = 2$ yardımıyla

$$\lambda_{1\alpha} = \lambda_\alpha, \lambda_{2\alpha} = \psi_\alpha \quad (4. 89)$$

ve benzer olarak

$$\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^1 = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^2 = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \quad (4. 90)$$

şeklinde simplektik Weyl spinörleri λ_i ile gösterilebilir. λ_i spinörlerinin simplektik olarak adlandırılmasının nedeni, bu spinörlerin SU(2) indislerinin anti-simetrik bir $\mathcal{E}_{ij}$ tensörü,

$$\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}^{12} = -\mathcal{E}_{21} = -\mathcal{E}^{21} = 1, \quad (4. 91)$$

yardımla indirilip kaldırılmalarıdır²⁸:

$$\lambda^i = \mathcal{E}^{ij} \lambda_j, \quad \lambda_i = \lambda^j \mathcal{E}_{ji} \quad (4. 92)$$

$$\bar{\lambda}_i = \mathcal{E}_{ij} \bar{\lambda}^j, \quad \bar{\lambda}^i = \bar{\lambda}_j \mathcal{E}^{ji} \quad (4. 93)$$

Diğer taraftan, teorisin yardımcı alanları SU(2) R simetrisi altında bir üçlü olarak gösterilebilir [3]:

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D} \\ \mathcal{E} \\ \mathcal{F} \end{bmatrix} \quad (4. 94)$$

Bu formülasyonda, (3.58) ile verilen topolojik terimi de içeren N=2 SYM eylemi ise

$$\begin{aligned} S_{N=2} = & \frac{1}{g^2} \text{Tr} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{8} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \right. \\ & \left. - i \lambda^i \not{D} \bar{\lambda}_i + \phi D_\mu D^\mu \phi^\dagger \right. \\ & \left. - \frac{i\sqrt{2}}{2} (\lambda_i [\lambda^i, \phi^\dagger] + \bar{\lambda}^i [\bar{\lambda}_i, \phi]) - \frac{1}{2} [\phi, \phi^\dagger]^2 + \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{D} \right) \quad (4. 95) \end{aligned}$$

şeklini alır.

²⁸Burada kullandığımız tanım nedeniyle, SU(2) indisleri için verilen $\mathcal{E}_{ij}$ tensörü süpersimetri indisleri için kullanılan $\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ tensörlerinden farklıdır. (Örneğin, $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}^{ij}$, ama $\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\beta}$). Simplektik Weyl spinörleri ile ilgili yararlı bağıntılar EK B'de verilmiştir.

Bölüm 4.1’de ayrıntılı olarak verilen adımlar izlenerek KD süpersimetrik N=2 SYM teorisinde küresel süpersimetri hayaletleri $\xi_i, \bar{\xi}_i$ yardımıyla süpersimetriyi ve sıradan BRST dönüşümlerini içeren genişletilmiş BRST dönüşümleri

$$sA_\mu = D_\mu c + \xi_i \sigma_\mu \bar{\lambda}^i + \bar{\xi}^i \bar{\sigma}_\mu \lambda_i \quad (4.96)$$

$$s\lambda_i = i\{c, \lambda_i\} - i\sigma^{\mu\nu} \xi_i F_{\mu\nu} + \xi_i [\phi, \phi^\dagger] - \sqrt{2} \sigma^\mu \bar{\xi}_i D_\mu \phi + \bar{\tau}_i^j \xi_j \cdot \vec{D} \quad (4.97)$$

$$s\bar{\lambda}^i = i\{c, \bar{\lambda}^i\} - i\bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\xi}^i F_{\mu\nu} - \sqrt{2} \bar{\sigma}^\mu \xi^i D_\mu \phi^\dagger - \bar{\xi}^i \bar{\tau}_i^j \cdot \vec{D} \quad (4.98)$$

$$s\phi = i[c, \phi] - i\sqrt{2} \xi_i \lambda^i \quad (4.99)$$

$$s\phi^\dagger = i[c, \phi^\dagger] - i\sqrt{2} \bar{\xi}^i \bar{\lambda}_i \quad (4.100)$$

$$s\vec{D} = i[c, \vec{D}] - i\bar{\tau}_i^j (-\xi_j \not{D} \bar{\lambda}^i + \bar{\xi}^i \not{D} \lambda_j - \sqrt{2} \xi^i [\lambda_j, \phi^\dagger] + \sqrt{2} \bar{\xi}_j [\bar{\lambda}^i, \phi]) \quad (4.101)$$

$$sc = \frac{i}{2} \{c, c\} - 2i\xi_i \sigma^\mu \bar{\xi}^i A_\mu - \sqrt{2} \xi_i \xi^i \phi^\dagger - \sqrt{2} \bar{\xi}^i \bar{\xi}_i \phi \quad (4.102)$$

$$s\bar{c} = b \quad (4.103)$$

$$sb = -2i\xi_i \sigma^\mu \bar{\xi}^i \partial_\mu \bar{c} \quad (4.104)$$

şeklinde tanımlanır ²⁹. Burada FP hayaleti c ’nin (4.102) ile verilen dönüşümündeki $\xi_i \xi^i \phi^\dagger$ ve $\bar{\xi}^i \bar{\xi}_i \phi$ terimleri yardımıyla süpersimetri cebrinin kovaryant türeve kapanması probleminin yanında, cebirin (2.86-2.89) ile verilen alana bağlı ayar dönüşümlerine kapanması problemi de çözülerek, s için

$$s^2 = -2i\xi_i \sigma^\mu \bar{\xi}^i \partial_\mu \quad (4.105)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, burada da s öteleme simetrisini içermediğinden, s^2 bir uzay-zaman türevi üzerine kapanmaktadır.

KD teorisinin ayar sabitlenmiş ve anti-alanlar ile genişletilmiş eylemi

$$I = S_{N=2} + S_{gf} + S_{ek} \quad (4.106)$$

$$S_{gf} = -tr \int d^4x s(\bar{c} \partial^\mu A_\mu) \quad (4.107)$$

$$S_{ek} = tr \int d^4x (A_\mu^* s A^\mu + \lambda^{*i} s \lambda_i + \bar{\lambda}_i^* s \bar{\lambda}^i + \vec{D}^* s \vec{D} + c^* s c) \quad (4.108)$$

²⁹Burada, $\vec{\tau}$ Pauli spin matrislerini göstermektedir. (Bkz EK B.)

ile verilir. Notasyonel kolaylık sağlaması için Bölüm 4.1’de olduğu gibi alan ve anti-alanların

$$\Phi^A = \{A_\mu, \lambda_i, \bar{\lambda}_i, \phi, \phi^\dagger, \vec{D}, c\} \quad , \quad \Phi_A^* = \{A_\mu^*, \lambda_i^*, \bar{\lambda}_i^*, \phi^*, \phi^{\dagger*}, \vec{D}^*, c^*\}$$

gösterimi için, teori

$$S(I) = 2i\xi\sigma^\mu\bar{\xi}\Delta_\mu \quad (4.109)$$

$$S(I) = tr \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta \Phi^A} \frac{\delta I}{\delta \Phi_A^*} + s\bar{c} \frac{\partial I}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial I}{\partial b} \right) \quad (4.110)$$

(modifiye) ST özdeşliğini sağlar. Burada,

$$\begin{aligned} \Delta_\nu = tr \int d^4x & (A_\mu^* \partial_\nu A^\mu - \lambda^{*i} \partial_\nu \lambda_i - \bar{\lambda}_i^* \partial_\nu \bar{\lambda}^i + \phi^* \partial_\nu \phi \\ & + \phi^{\dagger*} \partial_\nu \phi^\dagger + \vec{D}^* \partial_\nu \vec{D} - c^* \partial_\nu c), \end{aligned} \quad (4.111)$$

s üreteçinin ötelemeleri içermemesinden dolayı ortaya çıkan klasik bir kırılmadır.

BRST kohomolojik yapının incelenmesi için uygun bir ST operatörü (4.110)’nun lineerleştirilmesi ile elde edilir,

$$\mathcal{B}_I = tr \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta \Phi^A} \frac{\delta}{\delta \Phi_A^*} + \frac{\delta I}{\delta \Phi_A^*} \frac{\delta}{\delta \Phi^A} + s\bar{c} \frac{\partial}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial}{\partial b} \right). \quad (4.112)$$

Bölüm 4.1’de olduğu gibi burada da $\mathcal{B}_I$ ’nin alanlar ve anti-alanlar üzerine etkisi

$$\mathcal{B}_I \Phi^A = s\Phi^A \quad , \quad \mathcal{B}_I \Phi_A^* = \frac{\delta I}{\delta \Phi^A} \quad (4.113)$$

dir ve

$$\mathcal{B}_I \mathcal{B}_I = -2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi}\mathcal{P}_\nu = -2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi} tr \int d^4x \left(\partial_\nu \Phi^A \frac{\partial}{\partial \Phi^A} + \partial_\nu \Phi_A^* \frac{\partial}{\partial \Phi_A^*} \right). \quad (4.114)$$

bağıntısını sağlar.

KÜ süpersimetrik N=2 SYM teorisi ($\vec{D} = 0$) içinse KÜ üreteç $\tilde{s} = s|_{\vec{D}=0}$

$$\tilde{s}^2 = -2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi}\partial_\nu \quad (\text{mod. } \lambda_i, \bar{\lambda}_i \text{'in hareket denklemleri}) \quad (4.115)$$

formuna sahip olacağından (4.106) genişletilmiş eylemi kuadratik anti-alan terimleri ile bir kez daha genişletilmelidir,

$$\tilde{I} = I|_{\vec{D}=0} + S_{kuad} \quad (4.116)$$

$$S_{kuad} = -\frac{1}{2}g^2 tr \int d^4x (\bar{\tau}_i^j (\xi_j \lambda^{*i} - \bar{\xi}^i \bar{\lambda}_j^*) \cdot \bar{\tau}_k^l (\xi_l \lambda^{*k} - \bar{\xi}^k \bar{\lambda}_l^*)) \quad . \quad (4.117)$$

Böylelikle, $\tilde{I}$

$$\mathcal{S}(\tilde{I}) = 2i\xi\sigma^\mu\bar{\xi}\Delta_\mu|_{\bar{D}=0} \quad (4.118)$$

ST özdeşliğini sağlar ve karesi, integre edilmiş alan polinomları üzerine etki ettiğinde bir tam türev olan,

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}\mathcal{B}_{\tilde{I}} = -2i\xi\sigma^\nu\bar{\xi}\mathcal{P}_\nu|_{\bar{D}=0}, \quad (4.119)$$

lineerleştirilmiş ST operatörü $\mathcal{B}_{\tilde{I}}$ elde edilir.

KÜ durumda not edilmesi önemli olan nokta ise $g^2(\bar{\tau}_i^j (\xi_j \lambda^{*i} - \bar{\xi}^i \bar{\lambda}_j^*))$ kombinasyonunun, KD durumdaki yardımcı alan $\tilde{D}$ gibi davranmasıdır³⁰ :

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}\lambda_i = \bar{s}\lambda_i + g^2\bar{\tau}_i^j \xi_j \cdot \bar{\tau}_k^l (\xi_l \lambda^{*k} - \bar{\xi}^k \bar{\lambda}_l^*) = \mathcal{B}_I\lambda_i|_{\tilde{D}=\bar{\tau}_k^l (\xi_l \lambda^{*k} - \bar{\xi}^k \bar{\lambda}_l^*)} \quad (4.120)$$

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}\bar{\lambda}^i = \bar{s}\bar{\lambda}^i - g^2\bar{\xi}^j \bar{\tau}_j^i \xi_j \cdot \bar{\tau}_k^l (\xi_l \lambda^{*k} - \bar{\xi}^k \bar{\lambda}_l^*) = \mathcal{B}_I\bar{\lambda}^i|_{\tilde{D}=\bar{\tau}_k^l (\xi_l \lambda^{*k} - \bar{\xi}^k \bar{\lambda}_l^*)} \quad (4.121)$$

$$\mathcal{B}_{\tilde{I}}g^2(\bar{\tau}_i^j (\xi_j \lambda^{*i} - \bar{\xi}^i \bar{\lambda}_j^*)) = \mathcal{B}_I\tilde{D}|_{\tilde{D}=\bar{\tau}_k^l (\xi_l \lambda^{*k} - \bar{\xi}^k \bar{\lambda}_l^*)} \quad (4.122)$$

$\mathcal{B}$ operatörünün ³¹ etkisinin integre edilmiş alan ve anti-alan polinomları uzayına kısıtlanması ile elde edilen kohomoloji probleminin

$$\mathcal{B} \int d^4x \mathcal{X} = 0 \quad , \quad \int d^4x \mathcal{X} \neq \mathcal{B} \int d^4x \mathcal{X}' \quad (4.123)$$

çözümü, Bölüm 4.1.2'de olduğu gibi, (4.123) denkleminin yerel versiyonundan elde edilebilen yavru denklemler ile bulunabilir. Teorinin N=2 süpersimetri yapısı kullanılarak ilk denklem,

$$\mathcal{B}\mathcal{X}^{(0)} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}^i \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \mathcal{X}_{i\alpha}^{(1)} \quad (4.124)$$

şeklinde alınabilir. Bir alt yavru denklemin bulunması için (4.124)'ün $\mathcal{B}$ varyasyonu alınır, elde edilecek ifadenin,

$$\mathcal{B}^2 \mathcal{X}^{(0)} = -2i\bar{\xi}^i \bar{\sigma}^\mu \xi_i \partial_\mu \mathcal{X}^{(0)} = \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}^i \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \mathcal{B}\mathcal{X}_{i\alpha}^{(1)},$$

³⁰Bu sonuç her ne kadar eyleme eklenen S_{kuad} teriminin bu çalışmada kullanılan (4.117) formundan açıkça görülsede literatürde bu benzerliği açıkça gösteren bir çalışmaya rastlayamadık.

³¹Burada $\mathcal{B}$ operatörü aksi ifade edilmedikçe KD ve KÜ durumda elde edilen ST operatörü için kullanılacaktır.

bir tarafına

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}^i \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha\mu} \bar{\xi}_{\dot{\beta}}^i \bar{\sigma}^{\dot{\beta}\beta\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} \mathcal{X}_{i\alpha,j\beta}^{(2)}$$

formundaki bir terimin eklenebilmesi için böyle bir terim kendiliğinden sıfır olmalıdır. EK A ve EK B’de verilen spinör cebri kullanılarak böyle bir terimin sadece $\mathcal{X}^{(2)}$ ’nin $(i\alpha)$ ve $(j\beta)$ indis ikililerinde anti simetrik olması, $\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta}^{(2)} = -\mathcal{X}_{j\beta,i\alpha}^{(2)}$, durumunda bulunabilir. Böylelikle, yukarıdaki ifade $\bar{\xi}^i \bar{\sigma}_{\mu} \partial_{\mu}$ parantezine alınırsa ikinci yavru denklem

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_{i\alpha}^{(1)} = -2i\xi_{i\alpha}\mathcal{X}^{(0)} + (\bar{\xi}^j \bar{\sigma}^{\mu})^{\beta} \partial_{\mu} \mathcal{X}_{i\alpha,j\beta}^{(2)} \quad (4.125)$$

şeklinde elde edilir. Benzer yöntemle, elde edilen her bir alt yavru denklemin $\mathcal{B}$ varyasyonu alınarak diğer denklemler

$$\mathcal{B}\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta}^{(2)} = -2i\xi_{j\beta}\mathcal{X}_{i\alpha}^{(1)} + 2i\xi_{i\alpha}\mathcal{X}_{j\beta}^{(1)} + (\bar{\xi}^k \bar{\sigma}^{\mu})^{\gamma} \partial_{\mu} \mathcal{X}_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{(3)} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{(3)} &= 2i\xi_{j\beta}\mathcal{X}_{i\alpha,k\gamma}^{(2)} - 2i\xi_{i\alpha}\mathcal{X}_{j\beta,k\gamma}^{(2)} - 2i\xi_{k\gamma}\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta}^{(2)} \\ &\quad + (\bar{\xi}^l \bar{\sigma}^{\mu})^{\lambda} \partial_{\mu} \mathcal{X}_{i\alpha,j\beta,k\gamma,l\lambda}^{(4)} \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta,k\gamma,l\lambda}^{(4)} &= -2i\xi_{l\lambda}\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta,k\gamma}^{(3)} - 2i\xi_{j\beta}\mathcal{X}_{i\alpha,k\gamma,l\lambda}^{(3)} + 2i\xi_{i\alpha}\mathcal{X}_{j\beta,k\gamma,l\lambda}^{(3)} \\ &\quad + 2i\xi_{k\gamma}\mathcal{X}_{i\alpha,j\beta,l\lambda}^{(3)} \end{aligned} \quad (4.128)$$

şeklinde bulunur. Burada $\mathcal{X}^{(3)}$, $\mathcal{X}^{(4)}$ çözümleri de spinör ve SU(2)-R indis ikililerinde ($i\alpha$, $j\beta$ gibi) tamamen antisimetriktir. Böyle bir tamamen antisimetrik $\mathcal{X}^{(5)}$ çözümü ise $i, \alpha = 1, 2$ değerlerini aldığından ve bu indis ikililerinin alabileceği dört farklı değer olduğundan, özdeş olarak sıfırdır. Dolayısıyla, N=1 durumunda olduğu gibi, yavru denklemler teoremin sahip olduğu N=2 süpersimetri nedeniyle (4.128)’de kendiliğinden son bulur.

Yavru denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi için, $\mathcal{X}^{(a)}$, $a = 0, \dots, 4$ çözümlerinin boyut, R yükü ve hayalet sayılarının bilinmesi olası çözüm sınıflarını oldukça kısıtlar.

Teorinin Lagranjiyeninin dahil olduğu $\mathcal{X}^{(0)}$ çözümü

$$\text{Boyut}(\mathcal{X}^{(0)}) = 4, R(\mathcal{X}^{(0)}) = 0, Gh(\mathcal{X}^{(0)}) = 0 \quad (4.129)$$

şartlarını sağlaması gerektiğinden, diğer çözümler için yavru denklemlerin yapısı

Tablo 4: N=2 SYM teorisi için alanların boyutları, Grassmann pariteleri GP , hayalet sayıları Gh ve R-yükleri R .

	A_μ	λ_i	ϕ	$\vec{D}$	c	$\bar{c}$	b	ξ_i	A_μ^*	λ_i^*	ϕ^*	$\vec{D}^*$	c^*	B
d	1	3/2	1	2	0	2	2	-1/2	3	5/2	3	2	4	0
GP	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
Gh	0	0	0	0	1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	-2	1
R	0	-1	-2	0	0	0	0	-1	0	1	2	0	0	0

ve Tablo 4 kullanılarak en alt çözüm $\mathcal{X}^{(4)}$ için

$$Boyut(\mathcal{X}^{(4)}) = 2, Gh(\mathcal{X}^{(4)}) = 0, R(\mathcal{X}^{(4)}) = -4 \quad (4.130)$$

elde edilir. Bu özelliklere sahip ayar değişmez bir $\mathcal{X}^{(4)}$ çözümü $tr\phi^2$ ile orantılı olmalıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{X}^{(4)}$ çözümünün indis yapısı göz önüne alınırsa, böyle bir çözüm

$$\mathcal{X}^{(4)} = K tr\phi^2 \quad (4.131)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, K

$$\begin{aligned} K_{i\alpha,j\beta,k\gamma,l\lambda} = & \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\lambda}(\mathcal{E}_{ik}\mathcal{E}_{jl} + \mathcal{E}_{il}\mathcal{E}_{jk}) - \epsilon_{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\lambda}(\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} + \mathcal{E}_{il}\mathcal{E}_{jk}) \\ & + \epsilon_{\alpha\lambda}\epsilon_{\beta\gamma}(\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{lk} + \mathcal{E}_{ik}\mathcal{E}_{lj}) \end{aligned} \quad (4.132)$$

şeklinde $\epsilon_{\alpha\beta}$ ve $\mathcal{E}_{ij}$ tensörleri ile yazılabilen indis ikililerinde tamamen antisimetrik bir sabit tensördür.

Diğer yavru denklemlerin çözümleri, Bölüm 4.1’de incelenen N=1 SYM teorisinde olduğu gibi en alt çözüm $\mathcal{X}^{(4)}$ ’den bir tırmanma operatörü yardımıyla elde edilebilmelidir. Böyle bir tırmanma operatörü, $\mathcal{B}$ ’nin süpersimetri hayaletleri ξ_i cinsinden seriye açılarak,

$$\mathcal{B} = \delta + \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}}\bar{Y}^{i\dot{\alpha}} + \xi^{i\alpha}Y_{i\alpha} + \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}}\xi^{j\alpha}Z_{j\alpha}^{i\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\bar{\xi}_{i\dot{\alpha}}\bar{\xi}_{j\dot{\beta}}\bar{X}^{i\dot{\alpha}j\dot{\beta}} + \frac{1}{2}\xi^{i\alpha}\xi^{j\beta}X_{i\alpha,j\beta}, \quad (4.133)$$

N=1 SYM teorisinde kullanılanlara benzer bir tırmanma operatörü $\mathcal{Q}_{i\alpha}$,

$$\xi^{i\alpha}\mathcal{Q}_{i\alpha} = \xi^{i\alpha}Y_{i\alpha} + \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}}\xi^{j\alpha}Z_{j\alpha}^{i\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\xi^{i\alpha}\xi^{j\beta}X_{i\alpha,j\beta}, \quad (4.134)$$

tanımlanabilir. Dolayısıyla, N=1 SYM’de de olduğu gibi, KD ve KÜ süpersimetrik N=2 SYM teorisi için eylem ve düşük boyutlu alan polinomları arasındaki ilişki sırasıyla

$$S_{N=2}^{kd} = c_1 K_{i\alpha,j\beta,k\gamma,l\lambda} Q^{i\alpha} Q^{j\beta} Q^{k\gamma} Q^{l\lambda} tr \int d^4x \phi^2 \quad (4. 135)$$

ve

$$S_{N=2}^{kd} = c_1 K_{i\alpha,j\beta,k\gamma,l\lambda} Q^{i\alpha} Q^{j\beta} Q^{k\gamma} Q^{l\lambda} tr \int d^4x \phi^2 + c_2 B tr \int d^4x (\phi^* \phi + \lambda^* \lambda) \quad (4. 136)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, c_1 ve c_2 katsayıları yukarıda verilen bağıntıların açıkça hesaplanmasıyla bulunabilecek sabitlerdir.

5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada süpersimetrik teorilerin cebirsel yapısı kullanılarak tanımlanabilen bir kohomoloji problemi yardımıyla, WZ modelinin ve $N=1$, $N=2$ SYM teorilerinin düşük boyutlu alan polinomları ile ilişkisi incelenmiştir.

Böyle bir kohomoloji problemi, Bölüm 3'de sadece süpersimetrik yapı kullanılarak modelden bağımsız olarak tanımlanmış ve KD (kabuk dışı) süpersimetrik WZ modeli ve $N=1$, $N=2$ SYM teorileri için kullanılan eylemlerin düşük boyutlu alan polinomlarından elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu yöntem KD yapısı bilinen diğer süpersimetrik teorilere de uygulanabilir. KÜ (kabuk üstü) süpersimetrik durum içinse, süpersimetri cebri sadece fermiyonların hareket denklemleri sağlandığında kapandığından, KD durumunda elde edilen bağıntıların orjinal eylemden hareket denklemleri kadar farklı bir ifade verdiği bulunmuştur. Her ne kadar, renormalize olmama teorilerinin ispatı için KÜ WZ modelinde etkileşme terimi ve düşük boyutlu alan polinomları arasında cebirsel bir ilişki bulunabilse de, SYM teorileri için KÜ durumunda benzer bir cebirsel ilişkinin bulunamayacağı anlaşılmıştır.

Bölüm 4'de $N=1$ ve $N=2$ SYM teorilerinin sahip oldukları sıradan BRST simetrisi süpersimetriyi de içerecek şekilde genişletilerek, bu teoriler için Cebirsel Renormalizasyon yöntemi ile tanımlanan kohomoloji problemi incelenmiştir. Genişletilmiş BRST kohomolojisi olarak da adlandırılan kohomoloji probleminin çözümü yavru denklemler yardımıyla elde edilerek hem KD ve hem de KÜ süpersimetrik $N=1$ eyleminin düşük boyutlu alan polinomlar cinsinden yazılabileceği ispatlanmıştır. Benzer analiz kullanılarak $N=2$ SYM teorisinin eyleminin düşük boyutlu alan polinomları ile ilişkisinin hangi formda olması gerektiği gösterilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlardan da görüldüğü gibi, SYM teorilerinin BRST kohomolojisinin yavru denklemler yardımıyla incelenmesinin faydası yavru denklemlerin yapısının ve sayısının kullanılan

süpersimetriye bağlı olması ve her bir yavru denklemin çözümünün eylemin dahil olduğu süper çoklunun elemanlarını vermesidir. Dolayısıyla, bu yöntemle eylemin dahil olduğu çoklunun en alt elemanı ve en üst eleman eylem arasındaki ilişki doğal ve zarif bir yolla elde edilir.

Aynı zamanda, Bölüm 4’de KD ve KÜ süpersimetrik eylemler için BRST kohomolojisinin elde edilen ifadelerin birbirlerinden bir $\mathcal{B}$ -tam terim kadar fark ettiği bulunmuştur. Bu sonuç, sadece yardımcı alan içeriğinde fark eden iki ayar teorisinin BRST kohomolojisinin aynı olduğunu belirten teoremin [34], SYM teorileri için de geçerli olduğunu gösterir.

Bölüm 4’de elde edilen bir diğer sonuç ise $N=1$ ve $N=2$ SYM teorilerinde, KÜ durumdaki fermiyon anti-alanları ve süpersimetri hayaletlerinin belirli bir kombinasyonunun KD süpersimetrik durumdaki yardımcı alanlar gibi davranmasıdır. Bu sonuç her ne kadar kullanılan Cebirsel Renormalizasyon yönteminde açıkça gözükse de, literatürde (bizim bilğimiz dahilinde) böyle bir benzerlik açıkça verilmemiştir. Bu sonucun ilginç bir uygulamasının, bu benzerliğin KD süpersimetrik yapısı bilinmeyen teorilerde ($N=4$ gibi) kullanılarak, bu teorilerin yardımcı alan içeriğinin bulunması ya da bulunamayacağının ispatlanması olabileceğini düşünüyoruz.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar diğer süpersimetrik modellerin cebirsel yapısının incelenmesinde kullanılabileceği gibi, günümüzde yoğun olarak çalışılan süpersimetrik teorilerin renormalize olma özelliklerinin ve aynı zamanda SYM teorilerindeki pertürbatif olmayan instanton katkılarının anlaşılmasında da kullanılabilir.

Bilindiği gibi süpersimetrik eylemlerin ve/veya etkileşme terimlerinin düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu süpervaryasyonu olarak yazılması kullanılarak bazı renormalize olmama teoremleri ispatlanabilmiştir [11, 12, 55, 56]. Benzer olarak Ref.[57, 58, 59]’da döndürülmüş (twisted) $N=2$ SYM teorisinin β fonksiyonunun sadece bir halka katkısı aldığı Bölüm 4’de kullanılan yöntemle gösterilebilmiştir. Dolayısıyla, gelecekte çalışmayı planladığımız sıradan $N=2$

SYM teorisinin renormalize olmama teoremi süpersimetrinin bileşen alan formülasyonunda da teorinin döndürülmesine gerek kalmadan gösterilebilmelidir.

Diğer taraftan Bölüm 3’de kısaca bahsedildiği gibi KÜ dönüşümler kullanılarak elde edilen "eylem" $N=2$ SYM teorisindeki instanton denklemlerini kesin olarak vermektedir. Benzer sonuç BRST kohomolojisi kullanılarak da gösterilebilir. Başka bir deyişle, bir şekilde KÜ süpersimetrik durum ve instantonlar arasında bir ilişki olduğu gözükmemektedir. Bu tezde elde edilen sonuçlar yardımıyla şu anda devam ettiğimiz bu konudaki çalışmamızla yukarıdaki ilişkiyi açıklayarak Bölüm 3’de bahsedilen instanton hesaplarına açıklık getirmeyi umuyoruz.



KAYNAKLAR

- [1] **J. Wess and J. Bagger**, 1992. Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [2] **P. West**, 1990. Introduction to Supersymmetry and Supergravity, (2nd edition), World Scientific, Singapore.
- [3] **M. Sohnius**, 1985. Introducing Supersymmetry, *Phys. Rep.* **128** 39-204.
- [4] **S. Weinberg**, 2000. The Quantum Theory of Fields, Vol.III Supersymmetry Cambridge Univ. Press.
- [5] **J. Wess and B. Zumino**, 1974. A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations, *Phys. Lett. B* **49** 52-61.
- [6] **J. Iliopoulos and B. Zumino**, 1974. Broken Supergauge Symmetry And Renormalization, *Nucl. Phys. B* **76** 310-342.
- [7] **S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, W. Siegel**, 1983. *Superspace: or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, Benjamin/Cummings, London.
- [8] **K. Fujikawa and W. Lang**, 1975. Perturbation calculations for the scalar multiplet in a superfield formulation, *Nucl. Phys. B* **88** 61-85.
- [9] **M.T. Grisaru, W. Siegel and M. Rocek**, 1979. Improved Methods For Supergraphs, *Nucl. Phys. B* **159** 429-461.
- [10] **M.T. Grisaru and W. Siegel**, 1982. Supergraphity. 2. Manifestly Covariant Rules And Higher Loop Finiteness, *Nucl. Phys. B* **201** 292-325.
- [11] **R. Flume and E. Kraus**, 2000. Non-renormalization theorems without supergraphs: The Wess-Zumino model, *Nucl. Phys. B* **569** 625-642.
- [12] **K. Ülker**, 2001. On the cohomological structure of supersymmetric Lagrangeans with and without auxiliary fields, *Mod. Phys. Lett.A* **16** 881 .
- [13] **K. Ülker**, 2002. Supersimetrik Alan Teorileri ve Kohomoloji, İ.T.Ü derisinde yayınlanmak üzere hazırlanan çalışma.
- [14] **F. Brandt**, 1993. Lagrangians and anomaly candidates of $D = 4$, $N=1$ rigid supersymmetry, *Nucl. Phys. B* **392** 428-460.
- [15] **F. Brandt**, 1994. Anomaly Candidates And Invariants Of $D = 4$, $N=1$ Supergravity Theories, *Class. Quant. Grav.* **11** 849-864.

- [16] **F. Brandt**, 1997. Local BRST cohomology in minimal $D = 4$, $N = 1$ supergravity, *Ann. Phys.* **259** 253-312.
- [17] **I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky**, 1977. Relativistic S Matrix Of Dynamical Systems With Boson And Fermion Constraints, *Phys. Lett. B* **69** 309-312.
- [18] **I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky**, 1983. Quantization Of Gauge Theories With Linearly Dependent Generators, *Phys. Rev. D* **28** 2567-2582.
- [19] **I.A. Batalin and G.A. Vilkovisky**, 1981. Gauge Algebra And Quantization, *Phys. Lett. B* **102** 27-31.
- [20] **J. Gomis, J. Paris and S. Samuel**, 1995. Antibracket, antifields and gauge theory quantization, *Phys. Rep.* **259** 1-145.
- [21] **O. Piguet and S.P. Sorella**, 1995. *Algebraic Renormalization*, Lecture Notes in Physics m28, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- [22] **P.L. White**, 1992. Analysis Of The Superconformal Cohomology Structure Of $N=4$ Superyang-Mills, *Class. Quant. Grav.* **9** 413-444.
- [23] **P.L. White**, 1992. An Analysis Of The Cohomology Structure Of Superyang-Mills Coupled To Matter, *Class. Quant. Grav.* **9** 1663-1682.
- [24] **N. Maggiore**, 1995. Off-shell formulation of $N=2$ superYang-Mills theories coupled to matter without auxiliary fields, *Int. J. Mod. Phys. A10*) 3937-3950.
- [25] **N. Maggiore**, 1995. Algebraic renormalization of $N=2$ superYang-Mills theories coupled to matter, *Int. J. Mod. Phys. A10*) 3781-3802.
- [26] **N. Maggiore, O. Piguet and S. Wolf**, 1996. Algebraic renormalization of $N=1$ supersymmetric gauge theories, *Nucl. Phys. B* **458** 403-429.
- [27] **N. Maggiore, O. Piguet and S. Wolf**, 1996. Algebraic Renormalization of $N = 1$ Supersymmetric Gauge Theories with Supersymmetry Breaking Masses, *Nucl. Phys. B* **476** 329-350.
- [28] **A. Blasi and R. Collina**, 1987. Renormalization A La B.R.S. Of The Nonlinear Sigma Model, *Nucl. Phys. B* **285** 204-228.
- [29] **C. Becchi, A. Blasi, G. Bonneau, R. Collina and F. Delduc**, 1988. Renormalizability And Infrared Finiteness Of Nonlinear Sigma Models: A Regularization Independent Analysis For Compact Coset Spaces, *Commun. Math. Phys.* **120** 121-177.
- [30] **F. Brandt, M. Henneaux and A. Wilch**, 1996. Global symmetries in the antifield-formalism, *Phys. Lett. B* **387** 320-326.
- [31] **F. Brandt, M. Henneaux and A. Wilch**, 1998. Extended antifield formalism, *Nucl. Phys. B* **510** 640-656.

- [32] **O. Piguet and K. Sibold**, 1985. Renormalizing Supersymmetry Without Auxiliary Fields, *Nucl. Phys. B* **253** 269-300.
- [33] **K. ¨Ulker**, 2002. N=1 SYM Action and BRST Cohomology, *Mod. Phys. Lett.A* **17** 739-749.
- [34] **G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux**, 1995. Local Brst Cohomology In The Antifield Formalism. 1. General Theorems, *Commun. Math. Phys.* **174** 57-92.
- [35] **R. Haag, J. Lopuszanski and M. Sohnius**, 1975. All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix, *Nucl. Phys. B* **88** 257-303.
- [36] **B. de Witt and D.Z. Freedman**, 1975. On Combined Supersymmetric And Gauge Invariant Field Theories, *Phys. Rev. D* **12** 2286-2322.
- [37] **L. Brink, J. Schwarz and J. Scherk**, 1977. Supersymmetric Yang-Mills Theories, *Nucl. Phys. B* **121** 77-100.
- [38] **R. Grimm, M.F. Sohnius and J. Wess**, 1978. Extended Supersymmetry And Gauge Theories, *Nucl. Phys. B* **133** 275-295.
- [39] **N. Seiberg and E. Witten**, 1994. Electric - magnetic duality, monopole condensation, and confinement in N=2 supersymmetric Yang-Mills theory, *Nucl. Phys. B* **426** 19-52.
- [40] **N. Seiberg and E. Witten**, 1994. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in N=2 supersymmetric QCD, *Nucl. Phys. B* **431-550** 484.
- [41] **I. Affleck**, 1981. On Constrained Instantons, *Nucl. Phys. B* **191** 429-454.
- [42] **I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg**, 1984. Dynamical Supersymmetry Breaking In Supersymmetric QCD, *Nucl. Phys. B* **241** 493-534.
- [43] **I. Affleck, M. Dine and N. Seiberg**, 1985. Dynamical Supersymmetry Breaking In Four-Dimensions And Its Phenomenological Implications, *Nucl. Phys. B* **256** 557-629.
- [44] **N. Dorey, V. Khoze and M. P. Mattis**, 1996. Multi-Instanton Calculus in N=2 Supersymmetric Gauge Theory *Phys. Rev. D* **54** 2921-2943.
- [45] **N. Dorey, V. Khoze and M. P. Mattis**, 1996. Multi-instanton calculus in N = 2 supersymmetric gauge theory. II: Coupling to matter, *Phys. Rev. D* **54** 7832-7848.
- [46] **N. Dorey, V. Khoze and M. P. Mattis**, 1998. Supersymmetry and the multi-instanton measure, *Nucl. Phys. B* **513** 681-708.
- [47] **E. Witten**, 1988. Topological Quantum Field Theory, *Commun. Math. Phys.* **117** 353-414.
- [48] **L. Baulieu and I.M. Singer**, 1985. Topological Yang-Mills Symmetry, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **5** 12-19.

- [49] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini and G. Travaglini, 2000. Multi-instantons, supersymmetry and topological field theories, *Phys. Lett. B* **480** 365-372.
- [50] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini and G. Travaglini, 2000. Instanton calculus, topological field theories and $N = 2$ super Yang-Mills theories, *JHEP* **007** 017-84.
- [51] R. Flume, R. Poghossian and H. Storch, 2002. The Coefficients of the Seiberg-Witten Prepotential as Intersection Numbers(?), *to be published in the collection 'From Integrable Models to Gauge Theories*, World Scientific, Singapore.
- [52] R. Flume, R. Poghossian and H. Storch, 2002. The Seiberg-Witten prepotential and the Euler class of the reduced moduli space of instantons, *Mod. Phys. Lett.A* **17** 327-340
- [53] P. Breitenlohner and D. Maison, 1985. Renormalization of supersymmetric Yang-Mills theories, in *Cambridge 1985, Proceedings: Supersymmetry and its applications*.
- [54] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, 2000. Local BRST cohomology in gauge theories, *Phys. Rep.* **338** 439-569.
- [55] E. Kraus and D. Stöckinger, 2001. Non-renormalization theorems in softly broken SQED and the soft beta-functions, *Phys. Rev. D* **64** 115012-115040
- [56] E. Kraus, 2002. An anomalous breaking of supersymmetry in supersymmetric gauge theories with local coupling, *Nucl. Phys. B* **620** 55-83.
- [57] F. Fucito, A. Tanzini, L. C. Vilar, O. S. Ventura, C. A. Sasaki and S. P. Sorella, 1997. Algebraic renormalization: Perturbative twisted considerations on topological Yang-Mills theory and on $N = 2$ supersymmetric gauge theories, Lectures given at the *First School on Field Theory and Gravitation*, Victoria, Esprinto, Brazil. hep-th/9707209.
- [58] A. Blasi, V. E. Lemes, N. Maggiore, S. P. Sorella, A. Tanzini, O. S. Ventura and L. C. Vilar, 2000. Perturbative beta function of $N = 2$ super Yang-Mills theories, *JHEP* **0005** 039-059.
- [59] V. E. Lemes, M. S. Sarandy, S. P. Sorella, O. S. Ventura and L. C. Vilar, 2001. An algebraic criterion for the ultraviolet finiteness of quantum field theories, *J. Phys. A* **34** 9485-9506.
- [60] A. Iorio, 1999. Supersymmetric Noether currents and Seiberg-Witten theory, *Ph.D. Thesis*, Trinity Coll., Dublin, . hep-th/0006198.

EK A: NOTASYON VE SPİNÖR CEBRİ

Bu çalışma boyunca Wess ve Bagger uzlaşımını [1] kullanıyoruz :

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon_{21} = -\epsilon_{12} = \epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1 \quad (\text{A.2})$$

$$\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123} \quad (\text{A.3})$$

Bu uzlaşımında antikomüt eden iki bileşenli Weyl spinörleri

$$\psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta, \quad \psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \quad (\text{A.4})$$

$$\psi_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}}, \quad \psi^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}} \quad (\text{A.5})$$

$$\varphi\chi = \varphi^\alpha\chi_\alpha = -\varphi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\varphi_\alpha = \chi\varphi \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\varphi}\bar{\chi} = \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\varphi} \quad (\text{A.7})$$

$$(\varphi\chi)^\dagger = \bar{\chi}\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\bar{\chi}. \quad (\text{A.8})$$

özelliklerini sağlar. Spinörlere göre türev alma işlemi ise

$$\frac{\partial\theta^\alpha}{\partial\theta^\beta} = \delta^\alpha_\beta, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = -\epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}, \quad \frac{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\beta}}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\beta}}}. \quad (\text{A.9})$$

şeklindedir. Burada noktalı spinörler $SL(2, \mathbb{C})$ 'nin $(1/2, 0)$ reprezentasyonuna ve noktasızlar da eşlenik reprezentasyon $(0, 1/2)$ 'ye göre dönüşmektedirler. İki bileşenli Weyl spinörlerinin, Dirac ve Majorana spinörleri ile ilişkisi aşağıdaki gibidir:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Sigma matrisleri

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

şeklinde verilmiştir. Bu tanımlardan

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 \quad , \quad \bar{\sigma}^{1,2,3} = -\sigma^{1,2,3} \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} = \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^\mu{}^{\dot{\beta}\beta} \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = -2\eta^{\mu\nu} \quad , \quad \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^\nu{}^{\dot{\alpha}\beta} = -2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.15})$$

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha^\beta = -2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta \quad , \quad (\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = -2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\lambda + \sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu = 2(\eta^{\mu\lambda}\sigma^\nu - \eta^{\nu\lambda}\sigma^\mu - \eta^{\mu\nu}\sigma^\lambda) \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda + \bar{\sigma}^\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = 2(\eta^{\mu\lambda}\bar{\sigma}^\nu - \eta^{\nu\lambda}\bar{\sigma}^\mu - \eta^{\mu\nu}\bar{\sigma}^\lambda) \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\sigma^\lambda - \sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu = 2i\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma_\kappa \quad , \quad \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\bar{\sigma}^\lambda - \bar{\sigma}^\lambda\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu = -2i\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\bar{\sigma}_\kappa \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} = \frac{1}{4}(\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\beta\nu} - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\beta\mu}) \quad , \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\beta}} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha\mu}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\nu - \bar{\sigma}^{\dot{\alpha}\alpha\nu}\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu) \quad (\text{A.20})$$

$$\sigma_\alpha^{\mu\nu\alpha} = 0 = \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}} \quad (\text{A.21})$$

$$\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \sigma_\gamma^{\mu\nu\beta}\epsilon_{\beta\alpha} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma_{\lambda\kappa} = \sigma^{\mu\nu} \quad , \quad \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\bar{\sigma}_{\lambda\kappa} = -\bar{\sigma}^{\mu\nu} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr}\sigma^{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\kappa} - \eta^{\mu\kappa}\eta^{\nu\lambda}) - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \quad (\text{A.24})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu = 2(\sigma^{\mu\nu}\epsilon)_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + 2(\epsilon\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\alpha\beta} \quad (\text{A.25})$$

$$\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\nu + \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\nu\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu = -\eta^{\mu\nu} + 4(\sigma^{\lambda\mu}\epsilon)_{\alpha\beta}(\epsilon\bar{\sigma}^{\lambda\nu})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (\text{A.26})$$

..

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^\lambda = \frac{1}{2}(-\eta^{\lambda\nu}\sigma^\mu + \eta^{\lambda\mu}\sigma^\nu + i\epsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}\sigma_\kappa) \quad (\text{A.27})$$

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\sigma^\nu - \eta^{\mu\nu}\sigma^\lambda + i\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma_\kappa) \quad (\text{A.28})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\sigma}^\lambda = \frac{1}{2}(-\eta^{\lambda\nu}\bar{\sigma}^\mu + \eta^{\lambda\mu}\bar{\sigma}^\nu - i\epsilon^{\lambda\mu\nu\kappa}\bar{\sigma}_\kappa) \quad (\text{A.29})$$

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma^{\nu\lambda} = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\lambda}\bar{\sigma}^\nu - \eta^{\mu\nu}\bar{\sigma}^\lambda - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}\bar{\sigma}_\kappa) \quad (\text{A.30})$$

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma_\nu = \sigma_\nu\bar{\sigma}^{\nu\mu} = -\frac{3}{2}\sigma^\mu \quad , \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\sigma}_\nu = \bar{\sigma}_\nu\sigma^{\nu\mu} = -\frac{3}{2}\bar{\sigma}^\mu \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta}\sigma_{\nu\gamma\dot{\gamma}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\delta\dot{\gamma}}^{\mu}\epsilon_{\gamma\alpha}\epsilon^{\beta\delta} - \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^{\mu}\delta_{\gamma}^{\beta}) \quad (\text{A.32})$$

$$\sigma_{\alpha}^{\mu\nu\beta}\bar{\sigma}_{\nu}^{\dot{\alpha}\gamma} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\delta}\epsilon_{\alpha\delta}\epsilon^{\beta\gamma} + \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\delta_{\alpha}^{\gamma}) \quad (\text{A.33})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_{\nu}^{\dot{\gamma}\gamma} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^{\mu\dot{\delta}\gamma}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon_{\delta\dot{\beta}} - \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}) \quad (\text{A.34})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}\sigma_{\nu\alpha\dot{\gamma}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\delta}^{\mu}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\delta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} + \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu}\delta_{\dot{\gamma}}^{\dot{\alpha}}) \quad (\text{A.35})$$

bağıntılarını sağladıkları gösterilebilir [1, 60]

Çalışma sırasında büyük kolaylık sağlayan anti-komüt eden Weyl spinörleri için diğer ilişkiler aşağıdaki gibidir [1]:

$$\theta_{\alpha}\theta_{\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta, \quad \theta^{\alpha}\theta^{\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}, \quad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \quad (\text{A.37})$$

$$\chi\sigma^{\nu}\bar{\varphi} = -\bar{\varphi}\sigma^{\nu}\chi, \quad (\chi\sigma^{\nu}\bar{\varphi})^{\dagger} = \varphi\bar{\sigma}^{\nu}\bar{\chi} \quad (\text{A.38})$$

$$\chi\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi = \varphi\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu}\chi, \quad (\chi\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu}\varphi)^{\dagger} = \bar{\varphi}\bar{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu}\bar{\chi} \quad (\text{A.39})$$

$$\chi\sigma^{\mu\nu}\varphi = -\varphi\sigma^{\mu\nu}\chi, \quad (\chi\sigma^{\mu\nu}\varphi)^{\dagger} = -\bar{\varphi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\chi} \quad (\text{A.40})$$

$$(\psi\varphi)\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}(\varphi\sigma^{\mu}\bar{\chi})(\psi\sigma_{\mu})_{\dot{\alpha}} \quad (\text{A.41})$$

Son olarak, bu çalışmada N=1 ve N=2 SYM teorilerinin alanlarını ayar grubunun adjoint gösteriminde ve matris formunda alıyoruz:

$$\Phi = \Phi^a\tau^a, \quad [\tau^a, \tau^b] = if^{abc}\tau^c, \quad Tr(\tau^a\tau^b) = \delta^{ab} \quad (\text{A.42})$$

$$D_{\mu}\Phi = \partial_{\mu}\Phi - i[A_{\mu}, \Phi] \quad (\text{A.43})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - i[A_{\mu}, A_{\nu}]. \quad (\text{A.44})$$

Burada f^{abc} tamamen antisimetrik yapı sabitleridir.

EK B: SİMPLEKTİK WEYL SPİNÖRLERİ

SU(2) R simetrisi altında ikili olarak dönüşen iki Weyl spinörü φ ve ψ için simplektik Weyl spinörleri,

$$\lambda_1 = \varphi \quad \lambda_2 = \psi \quad , \quad \lambda^2 = -\psi \quad \lambda^1 = \varphi \quad (B.1)$$

$$\bar{\lambda}^1 = \bar{\varphi} \quad \bar{\lambda}^2 = \bar{\psi} \quad , \quad \bar{\lambda}_2 = -\bar{\psi} \quad \bar{\lambda}_1 = \bar{\varphi} \quad (B.2)$$

$$\lambda^i = \mathcal{E}^{ij} \lambda_j \quad , \quad \lambda_i = \lambda^j \mathcal{E}_{ji} \quad (B.3)$$

$$\bar{\lambda}_i = \mathcal{E}_{ij} \bar{\lambda}^j \quad , \quad \bar{\lambda}^i = \bar{\lambda}_j \mathcal{E}^{ji} \quad (B.4)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada,

$$\mathcal{E}_{12} = \mathcal{E}^{12} = -\mathcal{E}_{21} = -\mathcal{E}^{21} = 1 \quad (B.5)$$

dir.

Simplektik spinörlerin süpersimetri dönüşümlerinde kullanılan $\vec{\tau}$ Pauli matrisleri

$$\vec{\tau} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (B.6)$$

$$\vec{\tau}_i^j = \mathcal{E}^{jk} \vec{\tau}_k^l \mathcal{E}_{li} \quad , \quad \vec{\tau}_i^j \cdot \vec{\tau}_k^l = 2\delta_k^j \delta_i^l - \delta_i^j \delta_k^l \quad (B.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu notasyonda kompleks eşlenik aşağıdaki gibi verilir:

$$(\psi_{i\alpha})^\dagger = \bar{\psi}_\alpha^i \quad (B.8)$$

$$(\mathcal{E}^{ij})^\dagger = \mathcal{E}_{ij} \quad , \quad (\vec{\tau}_i^j)^\dagger = (\vec{\tau}_j^i) \quad (B.9)$$

ξ_i komüt eden, ψ anti-komüt eden ve φ komüt veya anti-komüt eden simplektik Weyl spinörleri için

$$\varphi_i \psi^i = -\varphi^i \psi_i \quad , \quad \bar{\varphi}_i \psi^i = \bar{\varphi}^i \psi_i \quad , \quad \bar{\varphi}^i \bar{\psi}_i = -\bar{\varphi}_i \bar{\psi}^i \quad (B.10)$$

$$\varphi_i \psi_j - \varphi_j \psi_i = \mathcal{E}_{ij} \varphi_k \psi^k \quad , \quad \bar{\varphi}_i \bar{\psi}_j - \bar{\varphi}_j \bar{\psi}_i = \mathcal{E}_{ij} \bar{\varphi}^k \bar{\psi}_k \quad (B.11)$$

$$\varphi_i \bar{\psi}_j - \varphi_j \bar{\psi}_i = -\varepsilon_{ij} \varphi_k \psi^k \quad (\text{B.12})$$

$$\psi_i^\alpha \psi_\alpha^i = 0 = \bar{\psi}_\alpha^i \bar{\psi}_i^\alpha \quad (\text{B.13})$$

$$\xi_i^\alpha \xi_{j\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \xi_k^\alpha \xi^{k\alpha} \quad (\text{B.14})$$

$$\xi^{i\alpha} \bar{\tau}_i^j \xi_{j\alpha} = 0 \quad , \quad \xi_i^\alpha \sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} \xi_\beta^i = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\xi^{i\alpha} \bar{\tau}_i^j \psi_{j\alpha} = -\psi^{j\alpha} \bar{\tau}_j^i \xi_{i\alpha} \quad , \quad \xi_{j\alpha} (\xi^j \psi) = -\frac{1}{2} (\xi_j \xi^j) \psi_\alpha \quad (\text{B.16})$$

ile verilen özdeşlikler yukardaki tanımlar kullanılarak biraz işlemden sonra elde edilebilir.

Son olarak bu çalışmada

$$\lambda^i, \xi^i, \bar{\lambda}^{*i}, \bar{Q}^i, \bar{\mathcal{Q}}^i$$

ve

$$\bar{\lambda}_i, \tilde{\xi}_i, \lambda_i^*, Q_i, \mathcal{Q}_i$$

lerin $SU(2)R$ indisleri sırasıyla denk.(B.3) ve denk.(B.4)'e göre indirilip kaldırılmaktadır.

EK C: ST OPERATÖRÜ, KARŞI TERİMLER VE ANOMALİLER

Cebirsel Renormalizasyon yönteminde genişletilmiş BRST simetrisi ile elde edilen genişletilmiş eylem I klasik ST özdeşliğini sağlar ³²,

$$S(I) = 0 \quad (C.1)$$

Klasik ST özdeşliğinin kuantum genişletilmesinin elde edilmesi için bir parçacık indirgenemez Green fonksiyonlarının üretici

$$\Gamma = I + O(\hbar) \quad (C.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bilindiği gibi eğer Γ için ST özdeşliği tüm mertebelerde sağlanıyorsa

$$S(\Gamma) = 0 \quad (C.3)$$

teoride anomali yoktur. Diğer taraftan (C.3) n. mertebede kırılıyorsa

$$S(\Gamma) = \hbar^n \Delta + O(\hbar^{n+1}) \quad (C.4)$$

teori n. mertebede anomaliye sahiptir. Burada Δ hayalet sayısı bir olan integre edilmiş alan, anti-alan ve hayaletlerin bir polinomudur.

ST özdeşliğinin lineerize edilmesi ile elde edilen ST operatörü, hayalet sayısı çift olan herhangi bir polinom için

$$B_{\mathcal{F}} S(\mathcal{F}) = 0 \quad (C.5)$$

eşitliğini cebirsel olarak sağlar. Dolayısıyla, bu eşitlikten hayalet sayısı çift bir $\mathcal{F}$ polinomu için B 'nin karesi sıfır olma şartı,

$$B_{\mathcal{F}} B_{\mathcal{F}} = 0 \quad (C.6)$$

³²Bu bölümde verilen yaklaşım ayrıntılı olarak [21] ve [57]'de bulunabilir.

elde edilir ve $\mathcal{B}$ operatörünün kohomoloji sınıfları

$$\mathcal{B}_F \mathcal{X} = 0 \quad , \quad \mathcal{X} \neq \mathcal{B}_F \tilde{\mathcal{X}} \quad (\text{C.7})$$

denklemlerinin çözümleri şeklinde tanımlanır.

Teorideki olası anomali terimlerinin elde edilmesi için Γ , (C.2) formunda olduğundan, lineerleştirilmiş ST operatörü

$$\mathcal{B}_\Gamma = \mathcal{B}_I + O(\hbar) \quad (\text{C.8})$$

şeklinde yazılırsa, (C.5) eşitliği her durumda cebirsel olarak sağlandığından, $\mathcal{B}_\Gamma \mathcal{S}(\Gamma) = 0$, n. mertebedeki (C.4) kırılması için

$$(\mathcal{B}_I + O(\hbar))(\hbar^n \Delta + O(\hbar^{n+1})) = 0 \quad (\text{C.9})$$

elde edilir. Dolayısıyla, bu denklemin $\hbar$ 'ın en düşük mertebesi için, hayalet sayısı bir olan Δ anomali teriminin

$$\mathcal{B}_I \Delta = 0 \quad (\text{C.10})$$

denklemini sağlaması gerektiği bulunur. Denklemin en genel çözümü

$$\Delta = k\mathcal{A} + \mathcal{B}_I \tilde{\Delta} \quad , \quad \mathcal{A} \neq \mathcal{B}_I \tilde{\mathcal{A}} \quad (\text{C.11})$$

formundadır³³. Burada k numerik bir sabittir ve bu sabitin değerinin bulunması için standart Feynman diyagramları hesabı yapılmalıdır. Başka bir deyişle $k\mathcal{A} \neq 0$ için Cebirsel Renormalizasyon yöntemi teorideki potansiyel bir anomali terimini verir.

Teorinin renormalizasyonu için Γ 'ya eklenmesi gereken karşı terimlerin analizi için

$$\Gamma_K = \Gamma + \hbar^n \mathcal{K} \quad (\text{C.12})$$

yazılır ve ST özdeşliğinin

$$\mathcal{S}(\Gamma_K) = O(\hbar^{n+1}) \quad (\text{C.13})$$

şeklinde sağlandığı varsayılırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_K) &= \mathcal{S}(\Gamma) + \hbar^n \mathcal{B}_\Gamma \mathcal{K} \\ &= \mathcal{S}(\Gamma) + \hbar^n (\mathcal{B}_I + O(\hbar)) \mathcal{K} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

³³Buradaki $\mathcal{B}$ -tam terim Γ 'nın $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \hbar^n \mathcal{B}_I \tilde{\Delta}$ şeklinde yeniden tanımlanması ile yok edilebilir.

olacağından, $\hbar$ 'ın en düşük mertebesi için

$$\mathcal{B}_I \mathcal{K} = 0 \quad (\text{C.15})$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, $\mathcal{B}$ operatörünün hayalet sayısı sıfır için kohomoloji sınıflarının bulunması ile eyleme eklenmesi gereken karşı terimler $\mathcal{K}$ elde edilebilir.

Bölüm 4'de KD süpersimetrik N=1 ve N=2 SYM teorilerinde elde edilen (modifiye) ST özdeşlikleri ve bunlara karşılık gelen lineerleştirilmiş ST operatörlerinin alanlar, anti-alanlar ve hayaletler cinsinden açık hali ise aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} S(I)^{N=1} = & \text{tr} \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta A_\mu^*} \frac{\delta I}{\delta A^\mu} + \frac{\delta I}{\delta \lambda^{*\alpha}} \frac{\delta I}{\delta \lambda_\alpha} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}_\alpha^*} \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}^\alpha} + \frac{\delta I}{\delta \mathcal{D}^*} \frac{\delta I}{\delta \mathcal{D}} \right. \\ & \left. + \frac{\delta I}{\delta c^*} \frac{\delta I}{\delta c} + s\bar{c} \frac{\partial I}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial I}{\partial b} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_I^{N=1} = & \text{tr} \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta A_\mu^*} \frac{\delta}{\delta A^\mu} + \frac{\delta I}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta A^{*\mu}} \right. \\ & + \frac{\delta I}{\delta \lambda_\alpha} \frac{\delta}{\delta \lambda^{*\alpha}} + \frac{\delta I}{\delta \lambda^{*\alpha}} \frac{\delta}{\delta \lambda_\alpha} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}^\alpha} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}_\alpha^*} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}_\alpha^*} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}^\alpha} \\ & \left. + \frac{\delta I}{\delta \mathcal{D}} \frac{\delta}{\delta \mathcal{D}^*} + \frac{\delta I}{\delta \mathcal{D}^*} \frac{\delta}{\delta \mathcal{D}} + \frac{\delta I}{\delta c^*} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta I}{\delta c} \frac{\delta}{\delta c^*} + s\bar{c} \frac{\partial}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial}{\partial b} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} S(I)^{N=2} = & \text{tr} \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta A_\mu^*} \frac{\delta I}{\delta A^\mu} + \frac{\delta I}{\delta \lambda^{*i\alpha}} \frac{\delta I}{\delta \lambda_{i\alpha}} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}_{i\alpha}^*} \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}^{i\alpha}} + \frac{\delta I}{\delta \phi^*} \frac{\delta I}{\delta \phi} + \frac{\delta I}{\delta \phi^{*\dagger}} \frac{\delta I}{\delta \phi^\dagger} \right. \\ & \left. + \frac{\delta I}{\delta \bar{\mathcal{D}}^*} \frac{\delta I}{\delta \bar{\mathcal{D}}} + \frac{\delta I}{\delta c^*} \frac{\delta I}{\delta c} + s\bar{c} \frac{\partial I}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial I}{\partial b} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_I^{N=2} = & \text{tr} \int d^4x \left(\frac{\delta I}{\delta A_\mu^*} \frac{\delta}{\delta A^\mu} + \frac{\delta I}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta A^{*\mu}} \right. \\ & + \frac{\delta I}{\delta \lambda_{i\alpha}} \frac{\delta}{\delta \lambda^{*i\alpha}} + \frac{\delta I}{\delta \lambda^{*i\alpha}} \frac{\delta}{\delta \lambda_{i\alpha}} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}^{i\alpha}} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}_{i\alpha}^*} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\lambda}_{i\alpha}^*} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}^{i\alpha}} \\ & + \frac{\delta I}{\delta \phi^*} \frac{\delta}{\delta \phi} + \frac{\delta I}{\delta \phi} \frac{\delta}{\delta \phi^*} + \frac{\delta I}{\delta \phi^{*\dagger}} \frac{\delta}{\delta \phi^\dagger} + \frac{\delta I}{\delta \phi^\dagger} \frac{\delta}{\delta \phi^{*\dagger}} \\ & \left. + \frac{\delta I}{\delta \bar{\mathcal{D}}} \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{D}}^*} + \frac{\delta I}{\delta \bar{\mathcal{D}}^*} \frac{\delta}{\delta \bar{\mathcal{D}}} + \frac{\delta I}{\delta c^*} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta I}{\delta c} \frac{\delta}{\delta c^*} + s\bar{c} \frac{\partial}{\partial \bar{c}} + sb \frac{\partial}{\partial b} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

KÜ süpersimetrik durum için ilgili (modifiye) ST özdeşlikleri ve operatörleri yukarıdaki ifadelerde yardımcı alanlar $\mathcal{D}$ ve $\bar{\mathcal{D}}$ 'nin yok edilmesiyle bulunabilir.

ÖZGEÇMİŞ

S. Kayhan Ülker, 1973 yılında İstanbul'da doğdu. Lise eğitimini 1991 yılında Beşiktaş Atatürk Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Lisans eğitimini Haziran 1995'de ve master eğitimini de Şubat 1997'de İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü'nde tamamladı. Mart 1999 ve Kasım 2001 tarihleri arasında Bonn Üniversitesi Teorik Fizik Bölümü'nde TÜBİTAK-BDP bursu ile doktora çalışmalarında bulundu. Kendisi Şubat 1996 tarihinden itibaren İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.