



DÜZENSİZ KAFES (LATİS) İÇİNDE NLSM SOLİTONLARI

Mahmut Bağcı¹, İlkay Bakırtaş², Nalan Antar³

^{1,2,3}İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Fundamental, dipole and vortex solitons are obtained in a lattice with a vacancy defect for the two-dimensional nonlinear Schrödinger (NLS) equation with mean term (NLSM System). Although the first nonlinear semi infinite band-gap structures are almost overlapping for the NLS equation and NLSM System, there is a marked difference between soliton powers of these models. The linear stability spectrum and the nonlinear evolution of NLSM solitons are investigated by using direct simulations. The stability analysis shows that the fundamental, dipole and vortex solitons can be nonlinearly stable under suitable conditions, but none of these solitons are linearly stable. Also, it is shown that the nonlinear stability results of fundamental solitons are in good agreement with Vakhitov-Kolokolov (VK) stability criteria.

ÖZET

Doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denkleminde kuadratik katkılar dahil edildiğinde NLSM sistemi elde edilmektedir. NLSM sisteminde boşluk düzensizliği içeren potansiyelin varlığında lokalize dalga çözümlerinin (temel, dipol ve vorteks solitonların) var olduğu gösterilmiştir. NLS denklemi ve NLSM sistemi için birinci doğrusal olmayan (nonlinear) bant yapısı çok benzer olmasına rağmen soliton güçleri arasında önemli fark olduğu görülmüştür. Elde edilen solitonların doğrusal kararlılık spektrumları ve doğrusal olmayan ilerleyişleri sayısal yöntemlerle incelenmiştir. Kararlılık analizleri, belirli koşullar altında düzensiz kafes solitonlarının doğrusal olmayan kararlılığına sahip olabileceğini fakat bu solitonların doğrusal olarak kararsız olduğunu göstermiştir. Ayrıca, doğrusal olmayan kararlılık için elde edilen sonuçların Vakhitov-Kolokolov (VK) kararlılık kriterleri ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

GİRİŞ

Doğrusal olmayan (nonlinear) dalga denklemlerinin çözümleri, optik, akışkanlar dinamiği veya plazma fiziği gibi alanlarda geniş olarak yer tutan önemli bir konudur. Bu dalga problemlerinin çözümleri farklı özellikler taşır. Bu çözümler kararlı lokalize dalgalar (soliton) veya sönümlü dalgalar olabilir.

Sayısal yöntemlerden faydalanarak birçok dalga denkleminin soliton çözümlerinin olduğu kanıtlanmıştır. Bu dalga denklemlerine örnek olarak Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi veya bu çalışmada da model olarak kullanılan NLS denkleminde kuadratik katkılar içeren (NLS with mean term) NLSM sistemi gösterilebilir.

Son yıllarda düzenli (kristal veya yarı kristal) potansiyeller kullanılarak elde edilen temel dipol ve çoklu (vorteks) solitonlarla ilgili çok sayıda çalışma yayınlanmıştır [1,2]. Fakat düzensizlik içeren potansiyellerle ilgili çok az sayıda çalışma vardır [3,4].

Doyurulabilir doğrusal olmayan ortam veya dış potansiyel kullanılarak yönetici denklemlerden kararlı çözümler elde etmek literatürde bilinen bir yöntemdir. Fakat, NLSM sisteminin bir potansiyelin varlığında incelendiği herhangi bir çalışma bulunmamaktadır.

Bu çalışmada NLSM sisteminin temel, dipol ve çoklu solitonları düzensiz bir potansiyelin varlığında incelenmiştir. Kullanılan fiziksel sistemin yönetici modeli, bir potansiyel içeren NLSM Sistemi aşağıdaki şekilde tanımlanır [5].

$$iu_z + \frac{1}{2} \Delta u + |u|^2 u - \rho u \Phi - V(x, y)u = 0$$

$$\Phi_{xx} + \nu \Phi_{yy} = (|u|^2)_{xx}$$

Burada $u(x, y, z)$ birinci harmoniği, $\Phi(x, y)$ kuadratik etkileri göstermektedir. ρ ile ν kullanılan malzemenin (ortamın) fiziksel özelliklerine göre değişmektedir. $\rho < 0$ durumunda su dalgaları, $\rho > 0$ durumunda elektromanyetik dalga çözümleri elde edilir ($\rho = 0$ durumunda NLS denklemleri elde edilir).

$V(x, y)$ dış potansiyeli göstermektedir. Boşluk düzensizliği (vacancy defect) içeren potansiyel

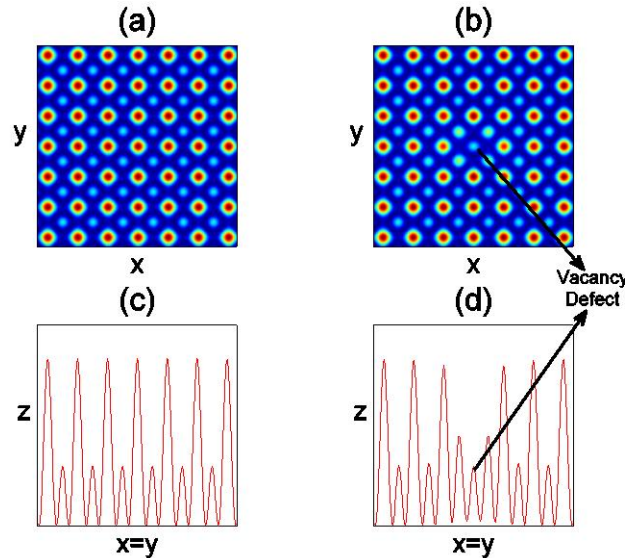
$$V(x, y) = \frac{V_0}{25} \left[2 \cos(k_x x) + 2 \cos(k_y y) + e^{i\theta(x, y)} \right]^2$$

ile verilmektedir [3]. Burada $\theta(x, y)$ faz fonksiyonu

$$\theta(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y - y_0}{x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{y + y_0}{x} \right)$$

olarak tanımlanır. V_0 potansiyel derinliğini belirleyen katsayıdır. $\theta(x, y) = 0$ olarak alındığında düzensizlik içermeyen bir periyodik potansiyel elde edilir.

Bu potansiyellere ait üstten görünüşler ve diyagonal kesitler aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 1. (a) Periyodik potansiyelin üstten görünüşü; (b) Sınır düzensizliği içeren potansiyelin üstten görünüşü; (c) Periyodik potansiyelin diyagonal kesiti; (d) Boşluk düzensizliği içeren potansiyelin diyagonal kesiti.

SAYISAL YÖNTEM

NLSM Sisteminin soliton çözümlerini elde etmek için Ablowitz ve Musslimani'nin ortaya koyduğu Spektral Renormalizasyon (SR) yöntemi kullanılmıştır [6]. SR yönteminde, NLSM

Sistemi Fourier uzayında ele alınıp, $u = f(x, y)e^{-i\mu z}$ çözüm önerisi ile lineer olmayan terime göre bir yakınsama faktörü belirlenir. Bu çalışmada yakınsama koşulu 10^{-8} olarak alınmıştır. SR yöntemiyle soliton çözüm elde etmek için kullanılan Gaussian başlangıç koşulu aşağıdaki şekildedir.

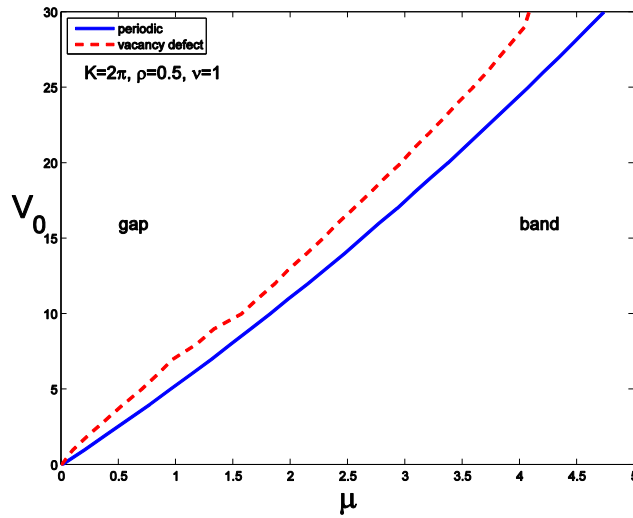
$$w_0(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-A[(x+x_n)^2 + (y+y_n)^2] + i\theta_n}$$

Burada x_n, y_n solitonların yerini, θ_n faz farkını, M soliton sayısını (temel, dipol, çoklu) belirlemek için kullanılır. A değeri, solitonu belirlenen yere odaklamak ve yakınsaklığı sağlamak için kullanılır.

Çalışmada, aksi belirtilmedikçe, $\rho = 1$, $\nu = 1$, $A=1$, $V_0 = 12.5$ ve $\mu = 0.5$ olarak alınmıştır.

SOLİTONLARIN VARLIĞI VE KARARLILIK ANALİZİ

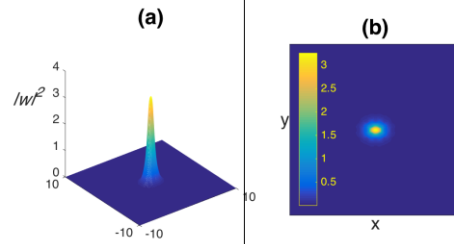
SR yöntemi kullanılarak boşluk düzensizliği içeren potansiyelin varlığında NLSM yönetici sisteminin temel, dipol ve çoklu çözümleri merkezdeki boş hücre civarında elde edilmiştir. Aynı yöntem kullanılarak birinci doğrusal olmayan bant yapısı potansiyel içinde düzensizliğin olduğu ve olmadığı (periyodik olduğu) durumlar için karşılaştırılmıştır.



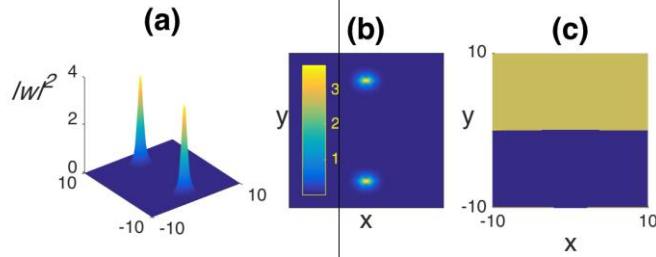
Şekil 2. Boşluk düzensizliğinin olduğu ve olmadığı (periyodik) durumlar için bant yapısı.

Boşluk düzensizliğinin olduğu durumda soliton çözüm elde edilebilecek (gap) alanının daha dar olduğu Şekil 2’den görülmektedir. Benzer şekilde NLS ($\rho = 0$) ve NLSM sisteminde ($\rho = 1$) soliton çözüm elde edilebilecek alanlar karşılaştırıldığında bant sınırının iki durum için örtüştüğü görülmüştür.

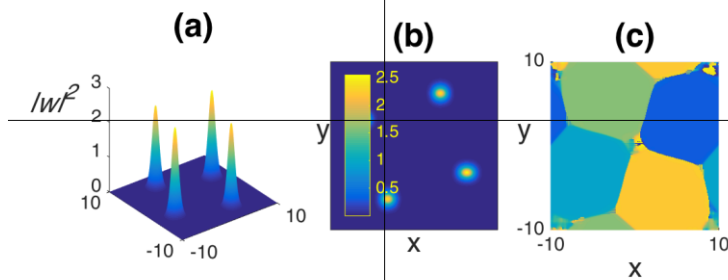
Boşluk düzensizliği içeren potansiyelin merkezine odaklanan temel soliton ve merkezin etrafına odaklanan ikili ve çoklu solitonlar sırasıyla Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5’te gösterilmiştir.



Şekil 3. Boşluk düzensizliği içeren potansiyelin merkezine odaklanan temel solitonun (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü.

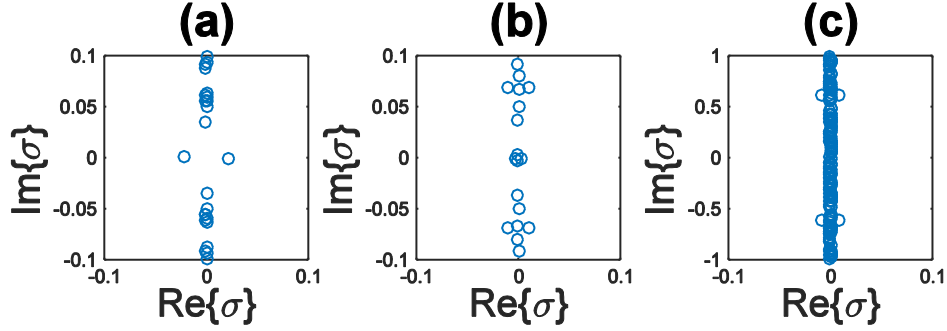


Şekil 4. Boşluk düzensizliği civarında elde edilen ikili (dipol) solitonların (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü; (c) Faz yapısı.



Şekil 5. Boşluk düzensizliği civarında elde edilen çoklu (vorteks) solitonların (a) 3 boyutlu görünüşü; (b) Üstten görünüşü; (c) Faz yapısı.

Elde edilen solitonların doğrusal ve doğrusal olmayan kararlılıkları incelenmiştir. Doğrusal kararlılık analizi için özdeğer dağılımı incelenmiştir. Doğrusal spektrumu elde etmek için NLSM denklemi doğrusallaştırılıp, doğrusal özdeğer problemine dönüştürülmektedir. Bu özdeğer problemi “Fourier collocation” yöntemi ile sayısal olarak çözülüp özdeğerler elde edilmektedir [7]. Pozitif gerçel değerli herhangi bir özdeğere sahip solitonlar kararsız olarak nitelenmektedir.



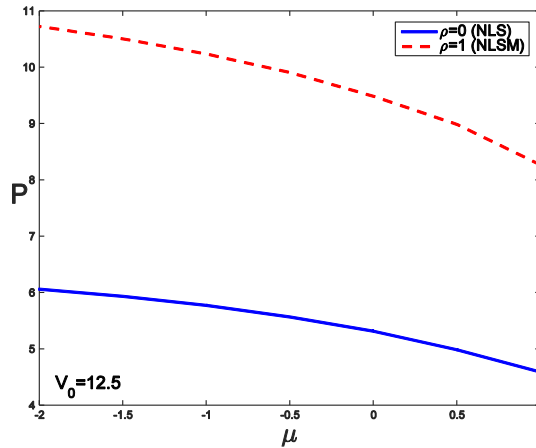
Şekil 6. (a) Temel; (b) İkili; (c) Çoklu solitonların doğrusal özdeğer spektrumu.

Doğrusal olmayan kararlılık incelenirken, ilk olarak soliton gücüyle (P) solitonun doğrusal olmayan kararlılığı arasındaki ilişkiyi ortaya koyan Vakhitov-Kolokolov (VK) kararlılık kriterleri açıklanmıştır [8]. Bu kriterlere göre solitonun kararlı olabilmesi için soliton gücünün (P), özdeğer (μ) arttıkça azalması (eğimin negatif olması) ve güç değerinin kritik güç değerinin altında olması gerekir [8]. Gücün kritik değeri NLS denklemi için 5.85'tir. Soliton gücü

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)|^2 dx dy$$

ile verilir.

Düzensiz potansiyel içindeki temel solitonun NLS denklemi ve NLSM sistemi için güç analizi Şekil 7'de gösterilmektedir.

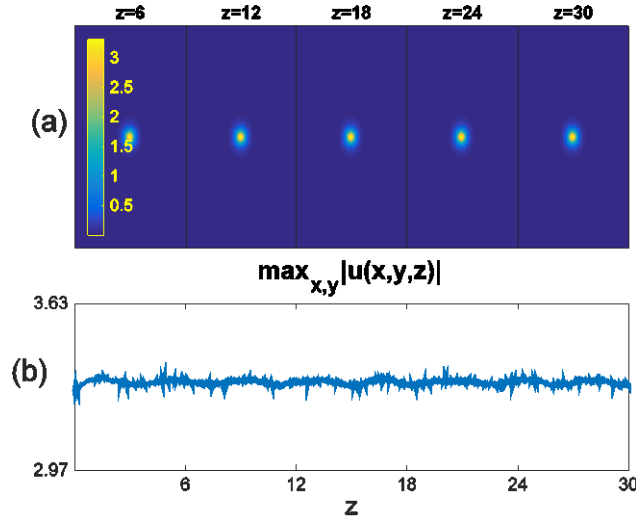


Şekil 7. Boşluk düzensizliği içeren potansiyelin varlığında NLS denklemi ve NLSM sistemi için güç analizi.

Şekil 7'de görüldüğü gibi özdeğer (μ) arttıkça güç (P) azalmaktadır (yani grafiğin eğimi negatiftir). Dolayısı ile kritik bir güç değerinin altında yer alan solitonların doğrusal olmayan kararlılığına sahip olması beklenmektedir.

(P) - (μ) analizi yapıldıktan sonra solitonun en büyük genlik değeri ile potansiyel içinde ilerleyen soliton profilinin şekli ve konumu incelenmiştir. En büyük genlik değerinin değişmediği (veya ihmal edilebilir ölçüde değiştiği) ve soliton profilinin şekli ile konumunun değişmediği durumda ele alınan soliton doğrusal olmayan kararlılığa sahip olarak nitelenmektedir.

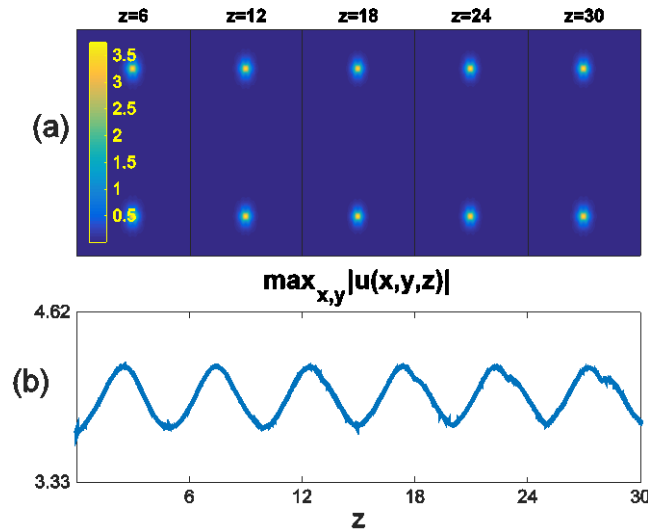
Şekil 3'te elde edilen temel solitonun doğrusal olmayan kararlılığı Şekil 8'de incelenmiştir.



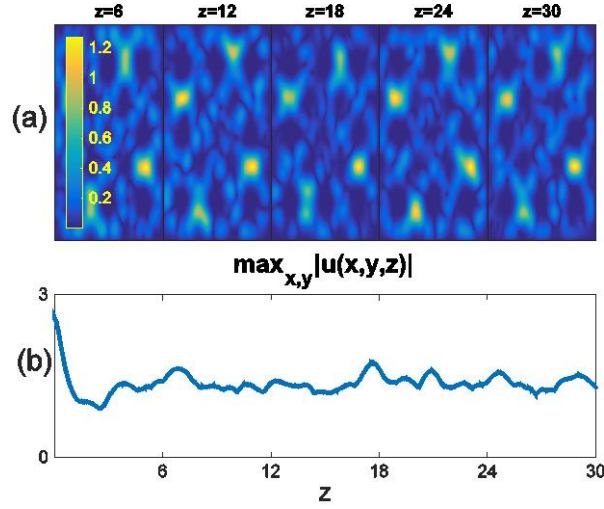
Şekil 8. Boşluk düzensizliği içeren potansiyelin merkezine odaklanan temel solitonun ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

Şekil 8'de görüldüğü gibi temel solitonun ilerleyişi sırasında üstten görünüşü değişmemiş ve en büyük genlik değeri çok küçük salınımlar yapmıştır. Bu durum, boşluk düzensizliğinin merkezine odaklanan temel solitonun doğrusal olmayan kararlılığını göstermektedir. Şekil 7'deki güç analiziyle birlikte ele alındığında, elde edilen sonucun VK kararlılık kriterleri ile uyum içinde olduğu görülebilir.

Benzer şekilde Şekil 4 ve Şekil 5'te elde edilen ikili (dipol) ve çoklu (vorteks) solitonların doğrusal olmayan kararlılık analizleri sırasıyla Şekil 9 ve Şekil 10'da gösterilmiştir.



Şekil 9. Boşluk düzensizliği civarında elde edilen ikili (dipol) solitonların ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.



Şekil 10. Boşluk düzensizliği civarında elde edilen çoklu (vorteks) solitonların ilerleyişi sırasında (a) Üstten görünüşü; (b) En büyük genlik değeri.

Düzensizlik içeren potansiyel içerisinde elde edilen ikili ve çoklu solitonların ilerlerken yerlerini korudukları ve en büyük genlik değerlerinin salınım yaptığı Şekil 8 ve Şekil 9'dan görülebilir. Bu durum düzensizlik içeren kafes yapısı içinde elde edilen ikili ve çoklu solitonların doğrusal olmayan kararlılığa sahip olduklarını göstermektedir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada NLSM sistemine düzensiz bir potansiyel eklenerek soliton çözümler elde edilmiştir. Potansiyel içerisinde düzensizlik yaratıldığında birinci doğrusal olmayan bant yapısının daraldığı, yani soliton çözüm elde edilebilecek aralığın daraldığı görülmüştür. Elde edilen temel, dipol ve çoklu solitonların doğrusal kararlılık spektrumları ve doğrusal olmayan ilerleyişleri incelenmiştir. Yapılan kararlılık analizlerine göre düzensiz kafes içerisinde temel, dipol ve çoklu solitonların doğrusal olmayan ilerleyişlerinin kararlı olduğu görülmüştür. Elde edilen sonuçlar VK kararlılık kriterleri ile uyum içindedir.

Doğrusal kararlılık spektrumları her bir durum için incelenmiş ve tüm solitonların pozitif gerçel değerli özdeğerlere sahip olduğu, dolayısı ile doğrusal olarak kararsız oldukları görülmüştür.

Çalışmada ayrıca NLS denkleminin NLSM sisteminin bant yapıları ve soliton güçleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda bant yapıları çok benzer olsa da soliton güçleri arasında önemli farklar olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] M.J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, and B. Ilan, Vortex and dipole solitons in complex two-dimensional nonlinear lattices, *Physical Review A*. 86 (2012) 033804. doi:10.1103/PhysRevA.86.033804.
- [2] M.J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, and B. Ilan, Band gap formation and fundamental solitons in complex 2D nonlinear lattices, *Physical Review A*. 81 (2010) 033834. doi:10.1103/PhysRevA.81.033834.
- [3] M.J. Ablowitz, B. Ilan, E. Schonbrun, and R. Piestun, Solitons in two-dimensional lattices possessing defects, dislocations and quasicrystal structures, *Physical Review E*. 74 (2006) 035601(R). doi:10.1103/PhysRevE.74.035601.
- [4] M. Bağcı, İ. Bakırtaş, N. Antar, Vortex and dipole solitons in lattices possessing defects and dislocations, *Optics Communications*. 331 (2014) 204-218. doi:10.1016/j.optcom.2014.06.005.

- [5] M.J. Ablowitz, Gino Biondini, and Steve Blair, Nonlinear Schrödinger equations with mean terms in non-resonant multidimensional quadratic materials, *Phys. Rev. E.* 63 (2001) 046605. doi:10.1103/PhysRevE.63.046605.
- [6] M.J. Ablowitz, and Z.H. Musslimani, Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems, *Opt. Lett.* 30 (2005), 2140-2142. doi:10.1364/OL.30.002140.
- [7] J. Yang, Iteration methods for stability spectra of solitary waves, *Journal of Comput. Physics.* 227 (2008) 6862–6876. doi:10.1016/j.jcp.2008.03.039.
- [8] M. Vakhitov and A. Kolokolov, Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation, *Radio Phys. Quant. Elec.* 16 (1973) 783. doi:10.1007/BF01031343.