

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DAYANIKLI P VE PI TİPİ KONTROLÖR TASARIMI**

**DOKTORA TEZİ  
Y. Müh. Nevra BAYHAN**

**Anabilim Dalı : ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİ**

**Programı : KONTROL VE OTOMASYON MÜHENDİSLİĞİ**

**EKİM 2008**

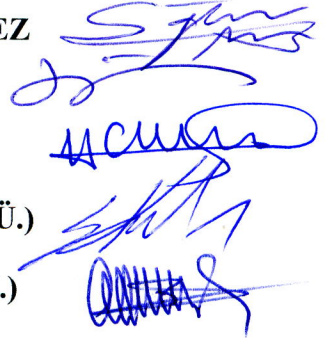
**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DAYANIKLI P VE PI TİPİ KONTROLÖR TASARIMI**

**DOKTORA TEZİ**  
**Y. Müh. Nevra BAYHAN**  
**(504022052)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2008**  
**Tezin Savunulduğu Tarih : 7 Ekim 2008**

**Tez Danışmanı :** Doç.Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ  
**Diğer Jüri Üyeleri** Prof.Dr. Leyla GÖREN (İ.T.Ü.)  
Prof.Dr. Hakan Ali ÇIRPAN (İ.Ü.)  
Doç.Dr. Salman KURTULAN (İ.T.Ü.)  
Prof.Dr. Galip CANSEVER (Y.T.Ü.)



**EKİM 2008**

## ÖNSÖZ

Tüm doktora öğrenimim boyunca anlayışlı tutumuyla bana her türlü desteği veren, tez çalışmam boyunca çok çaba harcayan, üstün bilgi birikimi ve yönlendirmeleriyle ufku açan ve akademik hayatımda hep örnek alacağım tez danışmanım, değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ'e, bilimsel desteği ile iyi bir yol gösterici ve arkadaş olan sevgili hocam Prof. Dr. Leyla GÖREN'e ve manevi desteği ile beni motive eden kıymetli hocam Prof. Dr. Hakan Ali ÇIRPAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan sevgili anneme ve ablama ödenmesi mümkün olmayacak desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunmaktan mutluluk duyacağım. Hepsinden özel olarak akademisyen olma isteğini bana aşılarmış ve destek olmuş olan; fakat bu tezi hiçbir zaman göremeyecek olan merhum babam Erol BAYHAN'a en derin şükran ve özlemlerimi sunarım.

Hazırlamış olduğum bu tezin dayanıklı kontrolör tasarlama konusunda çalışan araştırmacılara faydalı bir Türkçe kaynak olması, en büyük dileğimdir.

Ekim 2008

Y. Müh. Nevra BAYHAN

## İÇİNDEKİLER

|                                                                            |              |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>KISALTMALAR</b>                                                         | <b>VIII</b>  |
| <b>TABLO LİSTESİ</b>                                                       | <b>IX</b>    |
| <b>ŞEKİL LİSTESİ</b>                                                       | <b>XI</b>    |
| <b>SEMBOL LİSTESİ</b>                                                      | <b>XV</b>    |
| <b>ÖZET</b>                                                                | <b>XXIII</b> |
| <b>SUMMARY</b>                                                             | <b>XXV</b>   |
| <br>                                                                       |              |
| <b>1. GİRİŞ</b>                                                            | <b>1</b>     |
| <br>                                                                       |              |
| <b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI</b>                                            | <b>7</b>     |
| <br>                                                                       |              |
| <b>3. ZAMAN GECİKMESİZ SİSTEMLERDE DAYANIKLI P TİPİ KONTROL</b>            | <b>14</b>    |
| 3.1. Kararlılığı Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması                       | 15           |
| 3.1.1. Teorem 3.1 (Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi)               | 17           |
| 3.1.2. Algoritma 3.1 (Nyquist teoreminin genelleştirilmesi için)           | 18           |
| 3.1.2.1. Örnek 3.1                                                         | 19           |
| 3.1.2.2. Örnek 3.2                                                         | 21           |
| 3.1.2.3. Örnek 3.3                                                         | 22           |
| 3.2. Kazanç Payı ve Faz Payı Kavramları                                    | 23           |
| 3.3. İstenen Kazanç Payı ve Faz Payını Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması | 26           |
| 3.3.1. İstenen kazanç payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı              | 26           |
| 3.3.1.1. Lemma 3.1                                                         | 26           |
| 3.3.1.2. Lemma 3.1'in ispatı                                               | 26           |
| 3.3.1.3. Lemma 3.2                                                         | 27           |
| 3.3.1.4. Lemma 3.3                                                         | 27           |
| 3.3.2. İstenen faz payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı                 | 27           |
| 3.3.2.1. Teorem 3.2                                                        | 28           |
| 3.3.2.2. Uyarı 3.1                                                         | 29           |
| 3.3.2.3. Örnek 3.4 (Verilen KP ve FP'nı sağlayan kazançlar için)           | 29           |
| 3.3.2.4. Örnek 3.5 (Verilen KP ve FP'nı sağlayan kazançlar için)           | 32           |
| 3.4. Maksimum Kazanç Payı Hesabı                                           | 34           |
| 3.4.1. Lemma 3.4                                                           | 35           |
| 3.4.2. Lemma 3.5                                                           | 35           |
| 3.4.3. Lemma 3.6                                                           | 36           |
| 3.4.4. Uyarı 3.2                                                           | 36           |

|                                                                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.5. Maksimum Faz Payı Hesabı                                                                                   | 36        |
| 3.5.1. Açık çevrim kararlı sistemler için maksimum faz payı hesabı                                              | 36        |
| 3.5.1.1. Lemma 3.7                                                                                              | 37        |
| 3.5.1.2. Lemma 3.7'nin ispatı                                                                                   | 37        |
| 3.5.1.3. Lemma 3.8                                                                                              | 37        |
| 3.5.1.4. Lemma 3.8'in ispatı                                                                                    | 38        |
| 3.5.2. Açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararlı sistemler için maksimum faz payı hesabı    | 39        |
| 3.5.2.1. Lemma 3.9                                                                                              | 39        |
| 3.5.2.2. Lemma 3.9'un ispatı                                                                                    | 39        |
| 3.5.2.3. Lemma 3.10                                                                                             | 40        |
| 3.5.3. Açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız sistemler için maksimum faz payı hesabı   | 40        |
| 3.5.3.1. Lemma 3.11                                                                                             | 40        |
| 3.5.3.2. Lemma 3.11'in ispatı                                                                                   | 41        |
| 3.5.4. Algoritma 3.2 (Maksimum faz payı hesabı)                                                                 | 43        |
| 3.5.4.1. Örnek 3.6                                                                                              | 43        |
| 3.5.4.2. Örnek 3.7                                                                                              | 45        |
| 3.5.4.3. Örnek 3.8                                                                                              | 46        |
| 3.5.4.4. Örnek 3.9                                                                                              | 47        |
| 3.5.4.5. Örnek 3.10                                                                                             | 48        |
| 3.6. Yapısal Omayan Belirsizlik İçeren Sistemlerde Dayanıklılık Kararlılığı Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması | 49        |
| 3.6.1. Lemma 3.12                                                                                               | 54        |
| 3.6.2. Lemma 3.12'nin ispatı                                                                                    | 54        |
| 3.6.3. Teorem 3.3                                                                                               | 55        |
| 3.6.3.1. Örnek 3.11                                                                                             | 55        |
| 3.6.3.2. Örnek 3.12                                                                                             | 58        |
| 3.7. Sonuç                                                                                                      | 60        |
| <b>4. ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE DAYANIKLI P TİPİ KONTROL</b>                                                  | <b>61</b> |
| 4.1. Kararlılığı Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması                                                            | 62        |
| 4.1.1. Teorem 4.1                                                                                               | 63        |
| 4.1.2. Teorem 4.2                                                                                               | 64        |
| 4.1.3. Algoritma 4.1                                                                                            | 64        |
| 4.1.4. Algoritma 4.2                                                                                            | 66        |
| 4.1.4.1. Örnek 4.1                                                                                              | 67        |
| 4.2. Padé Yaklaşımı Yardımıyla Kazanç Kümesi Hesaplamada Hata Paylarının Bulunması                              | 70        |

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.1. Teorem 4.3                                                          | 72  |
| 4.2.2. Algoritma 4.3                                                       | 72  |
| 4.2.3. Lemma 4.1                                                           | 74  |
| 4.2.4. Lemma 4.1'in ispatı                                                 | 77  |
| 4.2.5. Teorem 4.4                                                          | 80  |
| 4.2.6. Algoritma 4.4 (Padé yaklaşımıyla yapılan hata paylarının hesabı)    | 81  |
| 4.2.6.1. Örnek 4.2                                                         | 82  |
| 4.2.6.2. Örnek 4.3                                                         | 91  |
| 4.2.6.3. Örnek 4.4                                                         | 96  |
| 4.2.6.4. Örnek 4.5                                                         | 100 |
| 4.3. İstenen Kazanç Payı ve Faz Payını Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması | 103 |
| 4.3.1. İstenen kazanç payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı              | 104 |
| 4.3.1.1. Lemma 4.2                                                         | 104 |
| 4.3.2. İstenen faz payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı                 | 104 |
| 4.3.2.1. Teorem 4.5                                                        | 106 |
| 4.3.2.2. Lemma 4.3                                                         | 107 |
| 4.3.2.3. Lemma 4.3'ün ispatı                                               | 110 |
| 4.3.2.4. Teorem 4.6                                                        | 112 |
| 4.3.2.5. Örnek 4.6 (Verilen KP ve FP'nı sağlayan kazançlar için)           | 112 |
| 4.4. Maksimum Kazanç Payı Hesabı                                           | 118 |
| 4.4.1. Lemma 4.4                                                           | 118 |
| 4.5. Maksimum Faz Payı Hesabı                                              | 119 |
| 4.5.1. Teorem 4.7                                                          | 120 |
| 4.5.2. Teorem 4.7'nin ispatı                                               | 121 |
| 4.5.3. Uyarı 4.1                                                           | 124 |
| 4.5.4. Lemma 4.5                                                           | 125 |
| 4.5.5. Lemma 4.6                                                           | 125 |
| 4.5.6. Lemma 4.6'nın ispatı                                                | 125 |
| 4.5.7. Uyarı 4.2                                                           | 127 |
| 4.5.8. Örnek 4.7 (Zaman gecikmeli sistemlerde maxKP ve maxFP için)         | 127 |
| 4.5.9. Örnek 4.8 (Zaman gecikmeli sistemlerde maxKP ve maxFP için)         | 130 |
| 4.6. Sonuç                                                                 | 131 |

## 5. AYRIK ZAMANLI SİSTEMLERDE DAYANIKLI P TİPİ KONTROL

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Chebyshev Polinomları Kullanılarak P Tipi Kontrol                      | 133 |
| 5.1.1. Chebyshev dizisi ve temel özellikleri                                | 134 |
| 5.1.2. Chebyshev gösterimi kullanılarak oransal kontrolör ile kararlı kılma | 136 |
| 5.1.2.1. Örnek 5.1                                                          | 138 |

|                                                                                                                                           |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1.2.2. Örnek 5.2                                                                                                                        | 139        |
| 5.1.2.3. Örnek 5.3                                                                                                                        | 141        |
| 5.2. Bilineer Dönüşüm Kullanılarak P Tipi Kontrol                                                                                         | 142        |
| 5.2.1. Teorem 5.1                                                                                                                         | 143        |
| 5.1.1.1. Örnek 5.4                                                                                                                        | 144        |
| 5.2.2. Uyarı 5.1                                                                                                                          | 146        |
| 5.3. Sonuç                                                                                                                                | 146        |
| <b>6. DAYANIKLI PI TİPİ KONTROL</b>                                                                                                       | <b>147</b> |
| 6.1. Zaman Gecikmesiz Sistemlerde Parametre Uzayı Yaklaşımı Kullanılarak PI Tipi Kontrolör İçin Kararlı Kılan Bölgelerin Belirlenmesi     | 148        |
| 6.1.1. Örnek 6.1                                                                                                                          | 152        |
| 6.1.2. Örnek 6.2                                                                                                                          | 154        |
| 6.2. Zaman Gecikmeli Sistemlerde Parametre Uzayı Yaklaşımı Kullanılarak PI Tipi Kontrolör İçin Kararlı Kılan Bölgelerin Belirlenmesi      | 155        |
| 6.2.1. Teorem 6.1                                                                                                                         | 156        |
| 6.2.2. Teorem 6.1'in ispatı                                                                                                               | 157        |
| 6.2.3. Uyarı 6.1                                                                                                                          | 160        |
| 6.2.4. Lemma 6.1                                                                                                                          | 160        |
| 6.2.5. Lemma 6.1'in ispatı                                                                                                                | 161        |
| 6.2.6. Uyarı 6.2                                                                                                                          | 161        |
| 6.2.7. Örnek 6.3                                                                                                                          | 161        |
| 6.2.8. Örnek 6.4                                                                                                                          | 163        |
| 6.2.9. Örnek 6.5                                                                                                                          | 163        |
| 6.3. Padé Yaklaşımı Kullanılarak Zaman Gecikmeli Birinci Mertebeden Sistemler İçin Kutup Atama Tabanlı Bir PI Kontrolör Katsayı Ayarlama  | 166        |
| 6.3.1. Simülasyon sonuçları                                                                                                               | 171        |
| 6.3.1.1. Örnek 6.6                                                                                                                        | 171        |
| 6.3.1.2. Örnek 6.7                                                                                                                        | 173        |
| 6.3.2. Deney sonuçları                                                                                                                    | 175        |
| 6.4. Yapısal Olmayan Belirsizlik İçeren Zaman Gecikmesiz Sistemlerde Dayanıklı Kararlılığı Sağlayan PI Tipi Kontrolör Kümesinin Bulunması | 178        |
| 6.4.1. Belirsizlik bölgesinin bulunmasına yönelik algoritma (Yöntem 1)                                                                    | 187        |
| 6.4.1.1. Algoritma 6.1                                                                                                                    | 187        |
| 6.4.2. Birim dairenin taranması yöntemiyle dayanıklı PI kontrolörlerin hesaplanması (Yöntem 2)                                            | 188        |
| 6.4.3. Belirsizlik bantının üstten çevrenmesi (Dörtgen yöntemi)                                                                           | 189        |
| 6.4.3.1. Örnek 6.8 (Yöntem 1, Yöntem 2 ve Dörtgen yöntemi için)                                                                           | 198        |
| 6.4.3.2. Örnek 6.9 (Yöntem 1, Yöntem 2 ve Dörtgen yöntemi için)                                                                           | 205        |
| 6.5. Sonuç                                                                                                                                | 216        |

|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| <b>7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA</b> | <b>217</b> |
| <b>KAYNAKLAR</b>               | <b>221</b> |
| <b>EKLER</b>                   | <b>230</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                | <b>232</b> |



## KISALTMALAR

|                |                                                                                                                                                           |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>KP</b>      | : Kazanç Payı                                                                                                                                             |
| <b>FP</b>      | : Faz Payı                                                                                                                                                |
| <b>P</b>       | : Oransal Kontrolör                                                                                                                                       |
| <b>PI</b>      | : Oransal-İntegral Kontrolör                                                                                                                              |
| <b>PID</b>     | : Oransal-İntegral-Türev Kontrolör                                                                                                                        |
| <b>maxKP</b>   | : Maksimum Kazanç Payı                                                                                                                                    |
| <b>maxFP</b>   | : Maksimum Faz Payı                                                                                                                                       |
| <b>PA</b>      | : Padé Yaklaşımı Kullanılarak Birinci Mertebeden Zaman Gecikmeli Sistemler İçin Kutup Atama Tabanlı Bir PI Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi             |
| <b>ZN</b>      | : Ziegler-Nichols Basamak Cevabı Yöntemi                                                                                                                  |
| <b>CC</b>      | : Cohen-Coon Yöntemi                                                                                                                                      |
| <b>IMC</b>     | : İç Model Kontrol Yöntemi                                                                                                                                |
| <b>IAE</b>     | : Bozucu Etkilerin Değişimine Bağlı Hatanın Mutlak Değerinin İntegralinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi                 |
| <b>IAESPC</b>  | : Referans Girişin Değişimine Bağlı Hatanın Mutlak Değerinin İntegralinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi                 |
| <b>ITAE</b>    | : Bozucu Etkilerin Değişimine Bağlı Hatanın Mutlak Değerinin Zaman Ağırlıklı İntegralinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi |
| <b>ITAESPC</b> | : Referans Girişin Değişimine Bağlı Hatanın Mutlak Değerinin Zaman Ağırlıklı İntegralinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi |
| <b>ISE</b>     | : Bozucu Etkilerin Değişimine Bağlı Hatanın Karesinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi                                     |
| <b>ISESPC</b>  | : Referans Girişin Değişimine Bağlı Hatanın Karesinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi                                     |
| <b>ITSE</b>    | : Bozucu Etkilerin Değişimine Bağlı Hatanın Karesinin Zaman Ağırlıklı İntegralinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi        |
| <b>ITSESPC</b> | : Referans Girişin Değişimine Bağlı Hatanın Karesinin Zaman Ağırlıklı İntegralinin En Küçüklenmesine Dayalı Bir Kontrolör Katsayı Ayarlama Yöntemi        |

## TABLO LİSTESİ

|                                                                                                                                                                      | <u>Sayfa No</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <b>Tablo 3.1</b> Örnek 3.1 için Teorem 3.1'den bulunan kazançlar.....                                                                                                | 20              |
| <b>Tablo 3.2</b> Örnek 3.2 için Teorem 3.1'den bulunan kazançlar.....                                                                                                | 21              |
| <b>Tablo 3.3</b> Örnek 3.3 için kapalı çevrimde sistemi kararlı kılan kazançlar.....                                                                                 | 22              |
| <b>Tablo 3.4</b> Örnek 3.4'de $FP = 20^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar.....                                                                             | 30              |
| <b>Tablo 3.5</b> Örnek 3.4'de $FP = 60^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar.....                                                                             | 31              |
| <b>Tablo 3.6</b> Örnek 3.5'de $FP = 70^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar.....                                                                             | 33              |
| <b>Tablo 3.7</b> Örnek 3.5'de $FP = 10^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar.....                                                                             | 33              |
| <b>Tablo 3.8</b> Örnek 3.6'da $FP = 47^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar.....                                                                             | 45              |
| <b>Tablo 3.9</b> Örnek 3.6'da $FP = 49.001^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar                                                                              | 45              |
| <b>Tablo 3.10</b> Örnek 3.7'de $FP = 17.3^\circ$ için Teorem 3.2'den bulunan kazançlar..                                                                             | 46              |
| <b>Tablo 3.11</b> Örnek 3.9 için kapalı çevrimde sistemi kararlı kılan kazançlar.....                                                                                | 47              |
| <b>Tablo 3.12</b> Örnek 3.10 için kapalı çevrimde sistemi kararlı kılan kazançlar.....                                                                               | 48              |
| <b>Tablo 3.13</b> Örnek 3.11 için $G_0(s)$ 'i kararlı kılan kazançlar.....                                                                                           | 56              |
| <b>Tablo 3.14</b> Örnek 3.11 için belirsizlik kazanç aralıkları.....                                                                                                 | 57              |
| <b>Tablo 3.15</b> Örnek 3.12 için belirsizlik kazanç aralıkları.....                                                                                                 | 58              |
| <b>Tablo 4.1</b> Örnek 4.1 için kararlı kılan $S_0$ kazanç kümesi.....                                                                                               | 67              |
| <b>Tablo 4.2</b> Örnek 4.2'de $d = 2$ için $\hat{G}(s)$ 'i kararlı kılan kazançlar.....                                                                              | 82              |
| <b>Tablo 4.3</b> Örnek 4.2'de $d = 2$ 'e ilişkin $w < \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                 | 84              |
| <b>Tablo 4.4</b> Örnek 4.2'de $d = 2$ 'e ilişkin $w > \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                 | 85              |
| <b>Tablo 4.5</b> Örnek 4.2'de $d = 3$ 'e ilişkin $w < \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                 | 88              |
| <b>Tablo 4.6</b> Örnek 4.3'de $d = 2$ için $\hat{G}(s)$ 'i kararlı kılan kazançlar.....                                                                              | 91              |
| <b>Tablo 4.7</b> Örnek 4.3'de $d = 2$ 'e ilişkin $w < \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                 | 93              |
| <b>Tablo 4.8</b> Örnek 4.4'de $d = 2$ için $\hat{G}(s)$ 'i kararlı kılan kazançlar.....                                                                              | 96              |
| <b>Tablo 4.9</b> Örnek 4.4'de $d = 2$ 'e ilişkin $w < \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                 | 97              |
| <b>Tablo 4.10</b> Örnek 4.5'de $d = 2$ için $\hat{G}(s)$ 'i kararlı kılan kazançlar.....                                                                             | 100             |
| <b>Tablo 4.11</b> Örnek 4.5'de $d = 2$ 'e ilişkin $w < \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                | 101             |
| <b>Tablo 4.12</b> Örnek 4.5'de $d = 4$ için $\hat{G}(s)$ 'i kararlı kılan kazançlar.....                                                                             | 102             |
| <b>Tablo 4.13</b> Örnek 4.5'de $d = 4$ 'e ilişkin $w < \hat{w}_{pc}$ için belirsizlik aralıkları.....                                                                | 102             |
| <b>Tablo 4.14</b> Örnek 4.6'da $d = 2$ için $\tilde{\theta} = 30^\circ$ faz payını sağlayan kazançlar.....                                                           | 114             |
| <b>Tablo 4.15</b> Örnek 4.6'da $d = 2$ 'e ilişkin $ w  < \hat{w}_{pc}$ ve $\tilde{\theta} = 30^\circ$ faz payı kısıtlamaları için belirsizlik kazanç aralıkları..... | 115             |

|                   |                                                                                                                                                    |     |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tablo 4.16</b> | Örnek 4.6’da $d = 4$ ’e ilişkin $ w  < \hat{w}_{pc}$ ve $\tilde{\theta} = 30^\circ$ faz payı kısıtlamaları için belirsizlik kazanç aralıkları..... | 117 |
| <b>Tablo 5.1</b>  | Örnek 5.4 için bilineer dönüşümle bulunan kazançlar.....                                                                                           | 145 |
| <b>Tablo 6.1</b>  | Bazı iyi bilinen PI kontrolör ayarlama formülleri.....                                                                                             | 170 |
| <b>Tablo 6.2</b>  | Örnek 6.6 için zaman tanım bölgesi özellikleri.....                                                                                                | 171 |
| <b>Tablo 6.3</b>  | Örnek 6.6 için PI kontrolör parametreleri.....                                                                                                     | 171 |
| <b>Tablo 6.4</b>  | Örnek 6.7 için zaman tanım bölgesi özellikleri.....                                                                                                | 173 |
| <b>Tablo 6.5</b>  | Örnek 6.7 için PI kontrolör parametreleri.....                                                                                                     | 174 |
| <b>Tablo 6.6</b>  | Farklı $a$ değerleri için zaman tanım bölgesi özellikleri.....                                                                                     | 176 |
| <b>Tablo 6.7</b>  | PT326 deney seti için zaman tanım bölgesi özellikleri.....                                                                                         | 177 |
| <b>Tablo 6.8</b>  | PT326 deney seti için PI kontrolör parametreleri.....                                                                                              | 177 |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                                   | <u>Sayfa No</u> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Şekil 3.1 : Sabit kazançlı kapalı çevrim kontrol sistemi .....                                    | 15              |
| Şekil 3.2 : Örnek 3.1'deki sistemin farklı skalalar için Nyquist eğrisi.....                      | 20              |
| Şekil 3.3 : Örnek 3.2'deki sistemin Nyquist eğrisi.....                                           | 22              |
| Şekil 3.4 : Kararlı bir sistem için kazanç payı (KP) ve faz payı (FP).....                        | 23              |
| Şekil 3.5 : Kazanç-faz belirsizliğine sahip kapalı çevrim sistem.....                             | 24              |
| Şekil 3.6 : Kazanç-faz belirsizliğine sahip bir sistemin oransal kontrolü.....                    | 26              |
| Şekil 3.7 : Örnek 3.4'de $FP = 20^\circ$ için dönmüş yineli geçişli Nyquist eğrisi...             | 31              |
| Şekil 3.8 : Örnek 3.4'de $FP = 60^\circ$ için dönmüş yineli geçişli Nyquist eğrisi....            | 32              |
| Şekil 3.9 : Örnek 3.5'de $FP = 70^\circ$ için Nyquist eğrisi.....                                 | 34              |
| Şekil 3.10 : Örnek 3.5'de $FP = 10^\circ$ için Nyquist eğrisi.....                                | 34              |
| Şekil 3.11 : $K_{p180\max}$ kazancının hesabı.....                                                | 38              |
| Şekil 3.12 : Örnek 3.8 için $K_{p180\max} G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi.....                       | 47              |
| Şekil 3.13 : Örnek 3.9 için orijinal sistemin Nyquist eğrisi.....                                 | 48              |
| Şekil 3.14 : Örnek 3.10 için $K_{p180\min} G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi .....                     | 49              |
| Şekil 3.15 : Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemin kapalı çevrim kontrolü...                | 50              |
| Şekil 3.16 : Verilen $w^*$ frekansı için $G_0(jw)$ 'nin frekans cevabı.....                       | 50              |
| Şekil 3.17 : Örnek 3.11'de $G_0(s)$ 'nin farklı skalalar için Nyquist eğrisi.....                 | 56              |
| Şekil 3.18 : Örnek 3.11'de $\hat{G}(s)$ 'nin farklı skalalar için Nyquist eğrisi.....             | 56              |
| Şekil 3.19 : Örnek 3.11'de $w = 0.757708$ ve $w = 0.761995$ arası Nyquist eğrisi...               | 58              |
| Şekil 3.20 : Örnek 3.12 için $\hat{G}(s)$ sisteminin Nyquist eğrisi.....                          | 59              |
| Şekil 3.21 : $\hat{G}(s)$ 'nin simulink simülasyonu ile bulunan Nyquist eğrileri.....             | 59              |
| Şekil 3.22 : Örnek 3.12'de verilen sistemin birim basamak cevapları.....                          | 60              |
| Şekil 4.1 : Zaman gecikmeli kontrol sistemi.....                                                  | 63              |
| Şekil 4.2 : Zaman gecikmeli bir sistemin oransal kontrolü.....                                    | 64              |
| Şekil 4.3 : Örnek 4.1'de $K_p > 0$ için faz eğrisi .....                                          | 68              |
| Şekil 4.4 : Örnek 4.1'de $K_p > 0$ için genlik eğrisi .....                                       | 68              |
| Şekil 4.5 : Örnek 4.1'de $K_p < 0$ için faz eğrisi .....                                          | 69              |
| Şekil 4.6 : Örnek 4.1'de $L_0 = 1.8$ ve $K_p = -0.45$ için basamak cevabı.....                    | 70              |
| Şekil 4.7 : Model eşleme blok diyagramı.....                                                      | 70              |
| Şekil 4.8 : Padé yaklaşımıyla oluşan örnek bir hata bölgesi.....                                  | 73              |
| Şekil 4.9 : Örnek 4.2'de 2. mertebeden Padé yaklaşımı için $\hat{G}(s)$ 'nin Nyquist eğrisi ..... | 86              |

|                   |                                                                                                                                 |     |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 4.10</b> | : Örnek 4.2’de 2. mertebeden Padé yaklaşımıyla oluşan hata bantları.....                                                        | 86  |
| <b>Şekil 4.11</b> | : Şekil 4.10’da görülen hata bantlarının bir kısmı.....                                                                         | 87  |
| <b>Şekil 4.12</b> | : Örnek 4.2’de 3. mertebeden Padé yaklaşımıyla oluşan hata bantları.....                                                        | 89  |
| <b>Şekil 4.13</b> | : Örnek 4.2’de 4. mertebeden Padé yaklaşımıyla oluşan hata bantları.....                                                        | 91  |
| <b>Şekil 4.14</b> | : Örnek 4.3’de 2. mertebeden Padé yaklaşımıyla oluşan hata bantları.....                                                        | 94  |
| <b>Şekil 4.15</b> | : Kazanç-faz belirsizliği olan zaman gecikmeli sistemin oransal kontrolü.....                                                   | 103 |
| <b>Şekil 5.1</b>  | : Sabit kazançlı ayrık zamanlı kontrol sistemi.....                                                                             | 137 |
| <b>Şekil 6.1</b>  | : Zaman gecikmesiz bir sistemin PI kontrolü.....                                                                                | 148 |
| <b>Şekil 6.2</b>  | : Örnek 6.1 için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....                                          | 153 |
| <b>Şekil 6.3</b>  | : Örnek 6.2 için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....                                          | 155 |
| <b>Şekil 6.4</b>  | : Zaman gecikmeli bir sistemin PI kontrolü..                                                                                    | 155 |
| <b>Şekil 6.5</b>  | : Örnek 6.3’de $w_{\max} = 5.2$ ( $0 < w < 5.2$ ) için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....    | 162 |
| <b>Şekil 6.6</b>  | : Örnek 6.3’de $w = 30.3$ için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....                            | 162 |
| <b>Şekil 6.7</b>  | : Örnek 6.4’de $w = 23.2$ için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....                            | 163 |
| <b>Şekil 6.8</b>  | : Örnek 6.5’de $w_{\max} = 100$ için $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....                                             | 164 |
| <b>Şekil 6.9</b>  | : Örnek 6.5’de $w_{\max} = 450$ için $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları.....                                             | 164 |
| <b>Şekil 6.10</b> | : Örnek 6.5’de 1. dereceden Padé yaklaşımıyla bulunan $P$ -bölgeleri..                                                          | 165 |
| <b>Şekil 6.11</b> | : Örnek 6.5’de 2. dereceden Padé yaklaşımıyla bulunan $P$ -bölgeleri..                                                          | 165 |
| <b>Şekil 6.12</b> | : Örnek 6.5’de 3. dereceden Padé yaklaşımıyla bulunan $P$ -bölgeleri..                                                          | 165 |
| <b>Şekil 6.13</b> | : Örnek 6.6 için PI ayarlama metodlarına ilişkin birim basamak cevapları.....                                                   | 172 |
| <b>Şekil 6.14</b> | : Örnek 6.6’da çeşitli $a$ değerleri için $K_p - K_i$ düzlemindeki eğri.....                                                    | 172 |
| <b>Şekil 6.15</b> | : Örnek 6.6 için kararlı yapan PI kontrolörler bölgesinde $\xi = 1$ ’i sağlayan $K_p - K_i$ eğrisi.....                         | 173 |
| <b>Şekil 6.16</b> | : Örnek 6.7 için PI ayarlama metodlarına ilişkin birim basamak cevapları.....                                                   | 174 |
| <b>Şekil 6.17</b> | : Örnek 6.7 için kararlı yapan PI kontrolörler bölgesinde $\xi = 1$ ’i sağlayan $K_p - K_i$ eğrisi.....                         | 175 |
| <b>Şekil 6.18</b> | : PT326 deney setine ilişkin farklı $a$ değerleri için basamak cevapları...                                                     | 176 |
| <b>Şekil 6.19</b> | : PT326 deney setinde farklı PI katsayı ayarlama yöntemlerine ilişkin basamak cevapları ( $a = 1.3$ ve $\tau_{cl} = 0.3$ )..... | 176 |
| <b>Şekil 6.20</b> | : PT326 deney seti için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ( $w_{\max} = 5.3$ )..                                            | 178 |

|                   |                                                                                                                                                    |     |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 6.21</b> | : PT326 deney seti için kararlı yapan PI kontrolörler bölgesinde $\xi = 1$ 'i sağlayan $K_p - K_i$ eğrisi ( $w = 5.3$ ).....                       | 178 |
| <b>Şekil 6.22</b> | : $G_0(jw)$ ve $F(jw)$ etrafındaki belirsizliklerin grafik gösterilimi.....                                                                        | 179 |
| <b>Şekil 6.23</b> | : Orijini içeren $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin ve $F(jw)$ etrafındaki belirsizliklerin grafik gösterilimleri.....                  | 181 |
| <b>Şekil 6.24</b> | : Orijine bir noktadan teğet olan $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin ve $F(jw)$ etrafındaki belirsizliklerin grafik gösterilimleri..... | 182 |
| <b>Şekil 6.25</b> | : $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen bir belirsizlik diskini içine alan en küçük sektör ve $F(jw)$ düzlemine olan iz düşümü.....              | 189 |
| <b>Şekil 6.26</b> | : $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içeren bir belirsizlik diskini.....                                                                                | 194 |
| <b>Şekil 6.27</b> | : $F(jw)$ 'ye ilişkin orijini içeren eliptik bir belirsizlik diskini.....                                                                          | 195 |
| <b>Şekil 6.28</b> | : Örnek 6.8'de $w_{fix} = 10$ için $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diskini...                                                                | 198 |
| <b>Şekil 6.29</b> | : Örnek 6.8'de $w_{fix} = 10$ için $F(jw)$ 'ye ilişkin bir eliptik belirsizlik diskini.....                                                        | 199 |
| <b>Şekil 6.30</b> | : Örnek 6.8'de $w_{fix} = 10$ için $K_p - K_i$ düzleminde eliptik bir belirsizlik diskini.....                                                     | 199 |
| <b>Şekil 6.31</b> | : Örnek 6.8'de $0 < w < 5$ için $\Delta G(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi.....                                                                            | 200 |
| <b>Şekil 6.32</b> | : Örnek 6.8'de $0 < w < 500$ için $\Delta G(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi.....                                                                          | 200 |
| <b>Şekil 6.33</b> | : Örnek 6.8 için 1. yöntemle bulunan $K_p - K_i$ düzlemindeki $P$ -bölgeleri ve belirsizlik bantları.....                                          | 201 |
| <b>Şekil 6.34</b> | : $w_{fix} = 10$ için Şekil 6.28'deki $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskini içine alan sektör.....                                             | 201 |
| <b>Şekil 6.35</b> | : $w_{fix} = 10$ için Şekil 6.29'daki $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskini yamuk ile çevreleme.....                                     | 202 |
| <b>Şekil 6.36</b> | : $w_{fix} = 10$ için Şekil 6.30'daki eliptik belirsizlik diskini yamuk ile çevrelenmiş biçimi.....                                                | 203 |
| <b>Şekil 6.37</b> | : Örnek 6.8 için dörtgen yöntemi kullanılarak $K_p - K_i$ düzlemindeki $P$ -bölgelerinin yamuklarla çevrelemesiyle oluşan belirsizlik bantı.....   | 203 |
| <b>Şekil 6.38</b> | : Şekil 6.8 için Bölüm 6.4.2'deki 2. yöntemle bulunan $K_p - K_i$ düzlemindeki belirsizlik bölgesi.....                                            | 204 |
| <b>Şekil 6.39</b> | : Örnek 6.9'da belirsizliğin olmadığı durum için $K_p - K_i$ düzleminde $P$ -bölgeleri ve kararsız kutup sayıları ( $w = 25$ ).....                | 205 |
| <b>Şekil 6.40</b> | : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 20$ için $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diskini...                                                                | 206 |
| <b>Şekil 6.41</b> | : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 20$ için $F(jw)$ 'ye ilişkin bir eliptik belirsizlik diskini.....                                                        | 206 |
| <b>Şekil 6.42</b> | : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 20$ için $K_p - K_i$ düzleminde eliptik belirsizlik diskini.....                                                         | 207 |

|                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Şekil 6.43</b> : Örnek 6.9 için orijini içermeyen belirsizlik disklerinden kaynaklanan ve 1. yöntemle bulunan $K_p - K_i$ düzlemindeki belirsizlik bantı.....                  | 207 |
| <b>Şekil 6.44</b> : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 400$ için $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diski.....                                                                            | 208 |
| <b>Şekil 6.45</b> : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 400$ için $F(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diski.....                                                                              | 208 |
| <b>Şekil 6.46</b> : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 400$ için $K_p - K_i$ düzleminde eliptik bir belirsizlik diski.....                                                                   | 209 |
| <b>Şekil 6.47</b> : Örnek 6.9'da $0 < w < 200$ için $\hat{G}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi.....                                                                                        | 209 |
| <b>Şekil 6.48</b> : Örnek 6.9 için $K_p - K_i$ düzlemindeki $P$ -bölgeleri ve 1. yöntemle bulunan belirsizlik bölgeleri.....                                                      | 210 |
| <b>Şekil 6.49</b> : $w_{fix} = 20$ için Şekil 6.40'daki $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskini içine alan sektör.....                                                          | 211 |
| <b>Şekil 6.50</b> : $w_{fix} = 20$ için Şekil 6.41'deki $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskini yamuk ile çevreleme.....                                                  | 211 |
| <b>Şekil 6.51</b> : $w_{fix} = 20$ için Şekil 6.42'deki eliptik belirsizlik diskinin yamuk ile çevrelenmiş biçimi.....                                                            | 212 |
| <b>Şekil 6.52</b> : Örnek 6.9'da $w_{fix} = 400$ için, Şekil 6.44 ile verilen $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içeren belirsizlik diski ve $s_7s_8s_9s_{10}$ dörtgeni.....           | 212 |
| <b>Şekil 6.53</b> : Örnek 6.9'da Şekil 6.48 ile verilen $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diski ve $F_7F_8F_9F_{10}$ dörtgeni.....                                          | 213 |
| <b>Şekil 6.54</b> : Örnek 6.9 için $K_p - K_i$ düzleminde belirsizlik disklerinin içeriden ve dışarıdan çevrelenmesine dayalı dayanıklı karalı kılan PI kontrolörler bölgesi..... | 214 |
| <b>Şekil 6.55</b> : Örnek 6.9 için Şekil 6.48 ile Şekil 6.54'ün karşılaştırılması.....                                                                                            | 214 |
| <b>Şekil 6.56</b> : Örnek 6.9 için 1. ve 2. yöntemle bulunan $K_p - K_i$ düzlemindeki belirsizlik bölgelerinin karşılaştırılması.....                                             | 215 |

## SEMBOL LİSTESİ

|                                   |                                                                                                 |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C(s)$                            | : Kontrolör elemanı                                                                             |
| $G_0(s)$                          | : Kontrol edilen zaman gecikmesiz sistemin transfer fonksiyonu                                  |
| $N(s)$                            | : Zaman gecikmesiz $G_0(s)$ sisteminin pay polinomu                                             |
| $D(s)$                            | : Zaman gecikmesiz $G_0(s)$ sistemin payda polinomu                                             |
| $m$                               | : $N(s)$ polinomunun derecesi                                                                   |
| $n$                               | : $D(s)$ polinomunun derecesi                                                                   |
| $K_p$                             | : Kazanç kontrolörü (Oransal kontrolör)                                                         |
| $K_i$                             | : İntegral kazanç parametresi                                                                   |
| $\delta(s, K_p)$                  | : Sabit kazançlı kapalı çevrim kontrol sisteminin karakteristik polinomu                        |
| $N_{re}$                          | : $N(s)$ 'nin reel kısmı                                                                        |
| $N_{im}$                          | : $N(s)$ 'nin sanal kısmı                                                                       |
| $D_{re}$                          | : $D(s)$ 'nin reel kısmı                                                                        |
| $D_{im}$                          | : $D(s)$ 'nin sanal kısmı                                                                       |
| $N_e(s^2)$                        | : $s$ 'nin çift kuvvetlerini içeren $N(s)$ 'nin bir polinomu                                    |
| $N_o(s^2)$                        | : $s$ 'nin tek kuvvetlerini içeren $N(s)$ 'nin bir polinomu                                     |
| $D_e(s^2)$                        | : $s$ 'nin çift kuvvetlerini içeren $D(s)$ 'nin bir polinomu                                    |
| $D_o(s^2)$                        | : $s$ 'nin tek kuvvetlerini içeren $D(s)$ 'nin bir polinomu                                     |
| $X(w^2)$                          | : $s = jw$ için $G_0(jw)$ 'nin reel kısmının pay polinomu                                       |
| $Y(w^2)$                          | : $s = jw$ için $G_0(jw)$ 'nin sanal kısmının pay polinomu                                      |
| $Z(w^2)$                          | : $s = jw$ için $G_0(jw)$ 'nin payda polinomu                                                   |
| $X'(w^2)$                         | : $X(w^2)$ 'nin $w$ 'ye göre birinci türevi                                                     |
| $Z'(w^2)$                         | : $Z(w^2)$ 'nin $w$ 'ye göre birinci türevi                                                     |
| $v_1^*, v_2^*, \dots, v_\gamma^*$ | : $v \triangleq w^2$ için $Y(v)$ 'nin pozitif reel kökleri                                      |
| $w_i^*$                           | : $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş frekansları                              |
| $y_1$                             | : $Y(v)$ 'nin baş katsayısı                                                                     |
| $y_0$                             | : $Y(v)$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı                                                    |
| $x_i$                             | : $i = 1, 2, \dots, \gamma$ için $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş noktaları |
| $u_0$                             | : $G_0(s)$ 'nin kararsız kutup sayısı                                                           |
| $d_{i,j}$                         | : $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin geçiş yönleri                                                |
| $r_i$                             | : $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçişlerinin sayısı                            |



|                                            |                                                                                                                        |
|--------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{K}_i$                             | : Zaman gecikmesiz $G_0(s)$ sistemini kararlı yapan $i$ . kazanç aralığı                                               |
| $K_{i\min}$                                | : $\mathbb{K}_i$ kazanç aralığının alt sınırı                                                                          |
| $K_{i\max}$                                | : $\mathbb{K}_i$ kazanç aralığının üst sınırı                                                                          |
| $w_p$                                      | : Faz geçiş frekansı                                                                                                   |
| $w_g$                                      | : Kazanç geçiş frekansı                                                                                                |
| $KP$ , $KP_{dB}$                           | : Kazanç payı ve $dB$ cinsinden kazanç payı                                                                            |
| $FP$                                       | : Faz payı                                                                                                             |
| $KP^-$ , $KP_{dB}^-$                       | : Negatif kazanç payı ve $dB$ cinsinden negatif kazanç payı                                                            |
| $KP^*$ , $KP_{dB}^*$                       | : Simetrik kazanç payı ve $dB$ cinsinden simetrik kazanç payı                                                          |
| $Ke^{-j\theta}$                            | : Kazanç-faz belirsizliği                                                                                              |
| $(KP)_{\min}$                              | : İstenilen kazanç payı kısıtlaması                                                                                    |
| $\overline{K}$                             | : İstenilen kazanç payını sağlayan kararlı kılan kazanç kümesi                                                         |
| $\emptyset$                                | : Boş küme                                                                                                             |
| $(KP^-)_{\max}$                            | : İstenilen maksimum negatif kazanç payı kısıtlaması                                                                   |
| $(KP^*)_{\min}$                            | : İstenilen minimum simetrik kazanç payı kısıtlaması                                                                   |
| $\tilde{\theta}$                           | : İstenilen faz payı kısıtlaması                                                                                       |
| $\tilde{G}_0(s)$                           | : İstenilen faz payı için kontrol edilecek zaman gecikmesiz sistemin transfer fonksiyonu                               |
| $\tilde{N}(s)$                             | : $\tilde{G}_0(s)$ sisteminin kompleks kat sayılı pay polinomu                                                         |
| $\tilde{X}(w)$                             | : $s = jw$ için $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin reel kısmının pay polinomu                                                      |
| $\tilde{Y}(w)$                             | : $s = jw$ için $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin sanal kısmının pay polinomu                                                     |
| $\tilde{w}_1^*, \dots, \tilde{w}_\gamma^*$ | : $\tilde{Y}(w)$ 'nin pozitif reel kökleri ( $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş frekansları) |
| $\tilde{y}_1$                              | : $\tilde{Y}(w)$ 'nin baş katsayısı                                                                                    |
| $\tilde{x}_i$                              | : $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş noktaları                                               |
| $\tilde{u}_i$                              | : $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin kararsız kutup sayısı                                                                         |
| $\tilde{d}_i$                              | : $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin geçiş yönleri                                                               |
| $\tilde{r}_i$                              | : $\tilde{G}_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçişlerinin sayısı                                           |
| $\psi$                                     | : Kesin nedensel sistemlerin Nyquist eğrilerinin $w \rightarrow \infty$ için orijine gidiş açısı                       |
| $\max KP$                                  | : Maksimum kazanç payı                                                                                                 |
| $\min KP^-$                                | : Minimum negatif kazanç payı                                                                                          |
| $\max KP^*$                                | : Minimum simetrik kazanç payı                                                                                         |
| $\max FP$                                  | : Maksimum faz payı                                                                                                    |
| $K_{p180\max}$                             | : Açık çevrim kararlı sistemlerde $\max FP$ 'nı sağlayan en büyük kazanç                                               |
| $K_{p180\min}$                             | : Açık çevrimde kararsız tersi de nedensel olan sistemlerde $180^\circ$ faz payını sağlayan en küçük kazanç            |
| $\mathbb{W}_i$                             | : Kararlı kılan $\mathbb{K}_i$ kazanç aralıklarına ilişkin kararlılık frekans aralıkları                               |

|                               |                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta$                      | : Birden küçük $H_\infty$ normuna sahip tüm sistemleri gösteren yapısal olmayan belirsizlikleri içeren blok                                                                     |
| $W(s)$                        | : Ağırlık transfer fonksiyonu                                                                                                                                                   |
| $\overset{\Delta}{G}(s)$      | : Yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz kontrol edilecek sistemin transfer fonksiyonu                                                                             |
| $r(w)$                        | : $\overset{\Delta}{G}(jw)$ sistemine ilişkin bir belirsizlik diskinin yarı çapı                                                                                                |
| $p_k(w^2)$                    | : $\overset{\Delta}{G}(jw)$ 'ne ilişkin bir belirsizlik diskinin reel eksen kesim yerleri                                                                                       |
| $X_w(w^2)$                    | : Ağırlık transfer fonksiyonunun reel kısmının pay polinomu                                                                                                                     |
| $Y_w(w^2)$                    | : Ağırlık transfer fonksiyonunun sanal kısmının pay polinomu                                                                                                                    |
| $Z_w(w^2)$                    | : Ağırlık transfer fonksiyonunun payda polinomu                                                                                                                                 |
| $p'_k(w^2)$                   | : $p_k(w^2)$ 'nin $w$ 'ye göre birinci türevi                                                                                                                                   |
| $W_\infty$                    | : $s \rightarrow \infty$ için ağırlık transfer fonksiyonu                                                                                                                       |
| $x_k$                         | : $\overset{\Delta}{G}(jw)$ 'ye ilişkin Nyquist eğri ailesinin reel eksen kesim yerleri                                                                                         |
| $p_{k \min}$                  | : $x_k$ 'nin alt sınırı                                                                                                                                                         |
| $p_{k \max}$                  | : $x_k$ 'nin üst sınırı                                                                                                                                                         |
| $\overset{\Delta}{\bar{K}}_p$ | : Belirsizlik kazanç aralıkları                                                                                                                                                 |
| $\tilde{K}_p$                 | : Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapacak kazanç aralıkları                                                                     |
| $G(s)$                        | : Kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin transfer fonksiyonu                                                                                                                   |
| $L$                           | : Zaman gecikmesi                                                                                                                                                               |
| $e^{-sL}$                     | : Zaman gecikmesi terimi                                                                                                                                                        |
| $S_0$                         | : $G_0(s)$ sistemini kararlı yapacak oransal $K_p$ kontrolörlerinin tam bir kümesi $S_N : \lim_{s \rightarrow \infty}  K_p G_0(s)  \geq 1$ olmasını sağlayan kazançların kümesi |
| $S_1$                         | : $S_0$ 'dan $S_N$ hariç kazanç kümesi                                                                                                                                          |
| $S_R$                         | : $L \in [0, L_0]$ zaman gecikmesi aralığı için zaman gecikmeli sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak kazançların ortak kümesi                                             |
| $P_d(s)$                      | : Zaman gecikmesi teriminin Padé eş değeri                                                                                                                                      |
| $\hat{G}(s)$                  | : Kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin Padé eş değerinin transfer fonksiyonu                                                                                                 |
| $\hat{N}(s)$                  | : $\hat{G}(s)$ sisteminin pay polinomu                                                                                                                                          |
| $\hat{D}(s)$                  | : $\hat{G}(s)$ sisteminin payda polinomu                                                                                                                                        |
| $\hat{m}$                     | : $\hat{N}(s)$ 'nin derecesi                                                                                                                                                    |
| $\hat{n}$                     | : $\hat{D}(s)$ 'nin derecesi                                                                                                                                                    |
| $d$                           | : Padé yaklaşımının mertebesi                                                                                                                                                   |
| $W_{pd}(s)$                   | : Zaman gecikmesi terimi ile Padé eş değerinin arasındaki hata fonksiyonu                                                                                                       |

|                                    |                                                                                                                                                             |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varepsilon(w)$                   | : $W_{pd}(s)$ hata fonksiyonunun tanımladığı diskin yarı çapı                                                                                               |
| $\hat{w}_{pc}$                     | : Kritik frekans değeri                                                                                                                                     |
| $\hat{G}_\Delta(s)$                | : Kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin Padé eş değerlerinin hata içeren transfer fonksiyonu                                                              |
| $P_x(w^2)$                         | : Zaman gecikmesi teriminin Padé eş değer fonksiyonunun reel kısmının pay polinomu                                                                          |
| $P_y(w^2)$                         | : Zaman gecikmesi teriminin Padé eş değer fonksiyonunun sanal kısmının pay polinomu                                                                         |
| $P_z(w^2)$                         | : Zaman gecikmesi teriminin Padé eş değer fonksiyonunun payda polinomu                                                                                      |
| $x_{\ell \min}, x_{\ell \max}$     | : $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından küçük negatif olmayan kökler için $\hat{G}_\Delta(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin reel eksen kesim yerleri            |
| $\check{x}_\ell$                   | : $\hat{G}_\Delta(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından küçük negatif olmayan köklere ilişkin reel eksen kesim yerleri kümesi |
| $\check{K}_{p\ell}$                | : $\check{x}_\ell$ kesim aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları                                                                                             |
| $C_1$                              | : $\check{K}_{p\ell}$ kazanç aralıklarının birleşimi                                                                                                        |
| $x_{\sigma \min}, x_{\sigma \max}$ | : $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından büyük negatif olmayan kökler için $\hat{G}_\Delta(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin reel eksen kesim yerleri            |
| $\check{x}_\sigma$                 | : $\hat{G}_\Delta(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından büyük negatif olmayan köklere ilişkin reel eksen kesim yerleri kümesi |
| $\check{K}_{p\sigma}$              | : $\check{x}_\sigma$ kesim aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları                                                                                           |
| $C_2$                              | : $\check{K}_{p\sigma}$ kazanç aralıklarının birleşimi                                                                                                      |
| $\check{x}_{pc}$                   | : $\hat{G}_\Delta(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansına ilişkin reel eksen kesim yerleri kümesi                                 |
| $\check{K}_{pc} (C_3)$             | : $\check{x}_{pc}$ kesim aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları                                                                                             |
| $C_u$                              | : Padé yaklaşımı kullanılması sonucu ortaya çıkan belirsizlik kazanç aralıkları                                                                             |
| $\hat{G}_{Re}(jw)$                 | : Kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin Padé eş değerinin reel kısmı                                                                                      |
| $\hat{G}_{Im}(jw)$                 | : Kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin Padé eş değerinin sanal kısmı                                                                                     |
| $ G_0(jw) $                        | : $G_0(jw)$ 'nin genliği                                                                                                                                    |
| $C_p$                              | : Zaman gecikmeli sistemin Padé eş değeri $\hat{G}(s)$ 'yi kapalı çevrimde kararlı kılan kazanç aralıkları                                                  |

|                                                  |                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C_{ds}$                                         | : $\hat{G}_{\Delta}(s)$ sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı yapacak kazanç kümesi                                                                                  |
| $C_{ds \min}, C_{ds \max}$                       | : $C_{ds}$ kazanç kümesinin alt ve üst sınırları                                                                                                                       |
| $\Delta_0$                                       | : Sıfıra yakın $0 < \Delta_0 \ll 1$ şeklinde olan çok küçük pozitif sayılar                                                                                            |
| $\hat{C}_{ds, KP}$                               | : İstenilen $(\hat{KP})_{\min}$ kazanç payı kısıtlaması için zaman gecikmeli bir sistemi kesin kararlı yapan kazanç aralıkları                                         |
| $G_{FP}(s)$                                      | : İstenilen faz payı için kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin transfer fonksiyonu                                                                                  |
| $\hat{G}_{FP}(s)$                                | : İstenilen faz payı için kontrol edilen zaman gecikmeli sistemin Padé eşdeğerinin transfer fonksiyonu                                                                 |
| $\hat{X}(w^2)$                                   | : Zaman gecikmeli sistemin Padé eşdeğeri $\hat{G}(jw)$ 'nin reel kısmının pay polinomu                                                                                 |
| $\hat{Y}(w^2)$                                   | : Zaman gecikmeli sistemin Padé eşdeğeri $\hat{G}(jw)$ 'nin sanal kısmının pay polinomu                                                                                |
| $\hat{Z}(w^2)$                                   | : Zaman gecikmeli sistemin Padé eşdeğeri $\hat{G}(jw)$ 'nin payda polinomu                                                                                             |
| $\hat{X}_{FP}(w)$                                | : $s = jw$ için $\hat{G}_{FP}(jw)$ sisteminin reel kısmının pay polinomu                                                                                               |
| $\hat{Y}_{FP}(w)$                                | : $s = jw$ için $\hat{G}_{FP}(jw)$ sisteminin sanal kısmının pay polinomu                                                                                              |
| $\hat{w}_{FP_1}^*, \dots, \hat{w}_{FP_\gamma}^*$ | : $\hat{Y}_{FP}(w)$ 'nin pozitif reel kökleri (geçiş frekansları)                                                                                                      |
| $\hat{y}_{FP_1}$                                 | : $\hat{Y}_{FP}(w)$ 'nin baş katsayısı                                                                                                                                 |
| $\hat{x}_{FP_i}$                                 | : $\hat{G}_{FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş noktaları                                                                                              |
| $\hat{u}_{FP_i}$                                 | : $\hat{G}_{FP}(jw)$ 'nin kararsız kutup sayısı                                                                                                                        |
| $\hat{d}_{FP_i}$                                 | : $\hat{G}_{FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin geçiş yönleri                                                                                                              |
| $\hat{r}_{FP_i}$                                 | : $\hat{G}_{FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçişlerinin sayısı                                                                                          |
| $\hat{\psi}$                                     | : Kesin nedensel $\hat{G}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin $w \rightarrow \infty$ için orijine gidiş açısı                                                                  |
| $\hat{C}_p$                                      | : Verilen faz payı için zaman gecikmeli sistemin Padé eş değeri $\hat{G}_{FP}(jw)$ 'yi kapalı çevrimde kararlı kılan kazanç aralıkları                                 |
| $\hat{G}_{\Delta, FP}(s)$                        | : Verilen bir faz payı için zaman gecikmeli sistemin Padé eş değerlerinin hata içeren transfer fonksiyonu                                                              |
| $\hat{x}_{\ell \min}, \hat{x}_{\ell \max}$       | : $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından mutlak değerce küçük negatif olmayan kökler için $\hat{G}_{\Delta, FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin reel ekseni kesim yerleri |

|                                |                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\check{\chi}_{FP,\ell}$       | : $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından mutlak değerce küçük negatif olmayan köklere ilişkin reel eksen kesim yerleri kümesi             |
| $\check{K}_{p_{FP,\ell}}$      | : $\check{\chi}_{FP,\ell}$ kesim aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları                                                                                                                     |
| $\hat{C}_1$                    | : $\check{K}_{p_{FP,\ell}}$ kazanç aralıklarının birleşimi                                                                                                                                  |
| $\check{K}_{p_{FP,\sigma}}$    | : $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansından mutlak değerce büyük negatif olmayan kökler için $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksen kesim yerlerine ilişkin kazanç aralıkları |
| $\hat{C}_2$                    | : $\check{K}_{p_{FP,\sigma}}$ kazanç aralıklarının birleşimi                                                                                                                                |
| $\check{\chi}_{FP,pc}$         | : $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$ 'nin Nyquist eğri ailesinin $\hat{w}_{pc}$ kritik frekansına ilişkin reel eksen kesim yerleri kümesi                                                            |
| $\check{K}_{FP,pc}(\hat{C}_3)$ | : $\check{\chi}_{FP,pc}$ kesim aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları                                                                                                                       |
| $\hat{C}_{u,FP}$               | : İstenen faz payı kısıtlaması ve Padé yaklaşımı kullanılması sonucu ortaya çıkan belirsizlik kazanç aralıkları                                                                             |
| $\hat{C}_{p,FP}$               | : İstenen faz payı için zaman gecikmeli sistemin Padé eş değeri $\hat{G}_{FP}(s)$ 'yi kapalı çevrimde kararlı kılan kazanç aralıkları                                                       |
| $\hat{C}_{ds,FP}$              | : $\hat{G}_{\Delta,FP}(s)$ sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı yapacak kazanç kümesi                                                                                                    |
| $\max \hat{KP}_{ds}$           | : Zaman gecikmeli sistemler için maksimum kazanç payı                                                                                                                                       |
| $\max \hat{FP}$                | : Zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payı                                                                                                                                          |
| $\hat{K}_{p180\max}$           | : Açık çevrim kararlı $G_0(s)$ sistemine sahip zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payını sağlayan en büyük kazanç değeri                                                           |
| $G_0(z)$                       | : Ayrık zamanlı bir sistemin transfer fonksiyonu                                                                                                                                            |
| $N(z)$                         | : Ayrık zamanlı bir sistemin transfer fonksiyonunun pay polinomu                                                                                                                            |
| $D(z)$                         | : Ayrık zamanlı bir sistemin transfer fonksiyonunun payda polinomu                                                                                                                          |
| $\delta(z)$                    | : Ayrık zamanlı bir kontrol sisteminin karakteristik polinomu                                                                                                                               |
| $c_k(t)$                       | : Birinci tip Chebyshev polinomları                                                                                                                                                         |
| $s_k(t)$                       | : İkinci tip Chebyshev polinomları                                                                                                                                                          |
| $\delta_c(t)$                  | : $\delta(z)$ 'nin Chebyshev gösterimi                                                                                                                                                      |
| $R(t)$                         | : $\delta_c(t)$ 'nin birinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan kısmı                                                                                                                     |
| $T(t)$                         | : $\delta_c(t)$ 'nin ikinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan kısmı                                                                                                                      |
| $R_N(t)$                       | : $N(z)$ 'nin birinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan Chebyshev gösterimi                                                                                                              |
| $T_N(t)$                       | : $N(z)$ 'nin ikinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan Chebyshev gösterimi                                                                                                               |

|                                                                 |                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $R_D(t)$                                                        | : $D(z)$ 'nin birinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan Chebyshev gösterimi                                  |
| $T_D(t)$                                                        | : $D(z)$ 'nin ikinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan Chebyshev gösterimi                                   |
| $G_0(t)$                                                        | : $G_0(z)$ 'nin Chebyshev gösterimi                                                                             |
| $N(t)$                                                          | : $N(z)$ 'nin Chebyshev gösterimi                                                                               |
| $D(t)$                                                          | : $D(z)$ 'nin Chebyshev gösterimi                                                                               |
| $\widehat{G}_0(w)$                                              | : Ayrık zamanlı $G_0(z)$ sisteminin bilineer dönüşüğünün transfer fonksiyonu                                    |
| $\widehat{N}(w)$                                                | : $\widehat{G}_0(w)$ sisteminin pay polinomu                                                                    |
| $\widehat{D}(w)$                                                | : $\widehat{G}_0(w)$ sisteminin payda polinomu                                                                  |
| $\widehat{N}_{re}(w)$                                           | : $\widehat{N}(w)$ 'nin reel kısmı                                                                              |
| $\widehat{N}_{im}(w)$                                           | : $\widehat{N}(w)$ 'nin sanal kısmı                                                                             |
| $\widehat{D}_{re}(w)$                                           | : $\widehat{D}(w)$ 'nin reel kısmı                                                                              |
| $\widehat{D}_{im}(w)$                                           | : $\widehat{D}(w)$ 'nin sanal kısmı                                                                             |
| $\widehat{N}_e(-\omega^2)$                                      | : $\omega$ 'nın çift kuvvetlerini içeren $N(\omega)$ 'nın bir polinomu                                          |
| $\widehat{N}_o(-\omega^2)$                                      | : $\omega$ 'nın tek kuvvetlerini içeren $N(\omega)$ 'nın bir polinomu                                           |
| $\widehat{D}_e(-\omega^2)$                                      | : $\omega$ 'nın çift kuvvetlerini içeren $D(\omega)$ 'nın bir polinomu                                          |
| $\widehat{D}_o(-\omega^2)$                                      | : $\omega$ 'nın tek kuvvetlerini içeren $D(\omega)$ 'nın bir polinomu                                           |
| $\widehat{X}(\omega^2)$                                         | : $w = j\omega$ için $\widehat{G}_0(w)$ 'nin reel kısmının pay polinomu                                         |
| $\widehat{Y}(\omega^2)$                                         | : $w = j\omega$ için $\widehat{G}_0(w)$ 'nin sanal kısmının pay polinomu                                        |
| $\widehat{Z}(\omega^2)$                                         | : $w = j\omega$ için $\widehat{G}_0(w)$ 'nin payda polinomu                                                     |
| $\widehat{v}_1^*, \widehat{v}_2^*, \dots, \widehat{v}_\gamma^*$ | : $\widehat{v} \triangleq \omega^2$ için $\widehat{Y}(\widehat{v})$ 'nin pozitif reel kökleri                   |
| $\widehat{y}_1$                                                 | : $\widehat{Y}(\widehat{v})$ 'nin baş katsayısı                                                                 |
| $\widehat{y}_0$                                                 | : $\widehat{Y}(\widehat{v})$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı                                                |
| $\widehat{x}_i$                                                 | : $i = 1, 2, \dots, \gamma$ için $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksen den geçiş noktaları |
| $\widehat{u}_i$                                                 | : $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'nin kararsız kutup sayısı                                                           |
| $\widehat{d}_{i,j}$                                             | : $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin geçiş yönleri                                                 |
| $\widehat{r}_i$                                                 | : $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin reel eksen den geçişlerinin sayısı                            |
| $F(s)$                                                          | : PI kontrolör                                                                                                  |
| $N_F(s)$                                                        | : $F(s)$ 'nin pay polinomu                                                                                      |
| $D_F(s)$                                                        | : $F(s)$ 'nin payda polinomu                                                                                    |
| $T_i$                                                           | : İntegral zaman sabiti                                                                                         |

|                      |                                                                                                                                     |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $G_c(s)$             | : PI kontrolör kullanılarak zaman gecikmesiz bir sistemin kapalı çevrim transfer fonksiyonu                                         |
| $p_{0c}(s)$          | : PI kontrolör kullanılarak zaman gecikmesiz bir sistemin kapalı çevrim karakteristik polinomu                                      |
| <b>P</b>             | : Parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısı $\delta$ 'nın aynı kaldığı $P$ -bölgeleri                                  |
| $\tau$               | : Zaman sabiti                                                                                                                      |
| $K$                  | : Kalıcı durum kazancı                                                                                                              |
| $\hat{p}_c(s)$       | : PI kontrolör kullanılarak zaman gecikmeli bir sistemin Padé eşdeğerinin kapalı çevrim karakteristik polinomu                      |
| $\xi$                | : Sönüm oranı                                                                                                                       |
| $w_n$                | : Doğal frekans                                                                                                                     |
| $a$                  | : 0.5 ile 4 arasındaki serbest parametre                                                                                            |
| $P_e(s)$             | : Rezidü polinomu                                                                                                                   |
| $P_\lambda(s)$       | : Atanmak istenen kutuplardan oluşan polinom                                                                                        |
| $\lambda_i$          | : Atanmak istenen kutuplar                                                                                                          |
| $\tau_{cl}$          | : İç model kontrole (IMC) ilişkin serbest parametre                                                                                 |
| $F_R(jw)$            | : PI kontrolör $F(jw)$ 'nin reel kısmı                                                                                              |
| $F_I(jw)$            | : PI kontrolör $F(jw)$ 'nin sanal kısmı                                                                                             |
| $P_{dN}(s)$          | : Padé eş değerindeki $P_d(s)$ fonksiyonunu pay polinomu                                                                            |
| $P_{dD}(s)$          | : Padé eş değerindeki $P_d(s)$ fonksiyonunu payda polinomu                                                                          |
| $\varepsilon_G(w)$   | : $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin yarı çapı                                                                              |
| $\mathcal{C}G(jw)$   | : $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin üzerindeki noktaların kümesi                                                           |
| $G_{0R}(jw)$         | : $G_0(jw)$ 'nin reel kısmı                                                                                                         |
| $G_{0I}(jw)$         | : $G_0(jw)$ 'nin sanal kısmı                                                                                                        |
| $s_5, s_6$           | : $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen bir belirsizlik diskini en sıkı biçimde içine alan sektörün bu diske teğet olan noktaları |
| $F_5, F_6$           | : $s_5$ ve $s_6$ noktalarının $F(jw)$ düzlemine olan iz düşüm noktaları                                                             |
| $F_1 F_2 F_3 F_4$    | : Dörtgen yöntemi uyarınca $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik bir belirsizlik diskini sıkıca üstten çevreleyen bir yamuk                   |
| $F_7 F_8 F_9 F_{10}$ | : Dörtgen yöntemi uyarınca $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik bir belirsizlik diskinin içindeki bir eş kenar dörtgen                       |

## DAYANIKLI P VE PI TİPİ KONTROLÖR TASARIMI

### ÖZET

Kontrolör tasarımı, kapalı çevrim sistemin kararlılığını ve çeşitli performans özelliklerini sağlamak gereklidir. Yerleşme zamanı, yükselme zamanı ve aşım gibi zaman bölgesi kriterleri kadar kazanç payı, faz payı ve kapalı çevrim transfer fonksiyonlarının  $H_\infty$  normları gibi frekans bölgesi kriterleri de önemli performans özellikleri arasında sayılabilir. Doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için kazanç ve faz payları, dayanıklılık ölçütleri olarak sıklıkla kullanılırlar. Kapalı çevrimde sistemin kararlılığını bozmaksızın açık çevrim sistemde izin verilebilen maksimum kazanç belirsizliği olarak tanımlanabilen kazanç payı ve faz belirsizliği için benzer olarak tanımlanabilen faz payı, göreceli kararlılığın ölçütleridir. Bu nedenle verilen bir kazanç payı kısıtlamasını veya faz payı kısıtlamasını sağlayan tüm düşük dereceli kontrolörleri bulmak çok önemlidir. Bu tezde, kazanç ve faz payları kısıtlamalarını sağlayan tüm kararlı kılan oransal kontrolörleri (P) belirlemek için yöntemler verildikten sonra; oransal kontrolörler kullanılarak erişilebilir maksimum kazanç ve faz paylarını hesaplayan yeni bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem Nyquist kararlılık kriterinin bir genelleştirilmesi üzerine kuruludur. Nyquist kararlılık kriterinin bu genelleştirilmesi, Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerin ve yönünün hesaplanmasıyla bulunan kazanç aralıkları için kararsız kutup sayılarının belirlenmesini gerektirir. Maksimum faz payını hesaplamak için üç farklı durum incelenir ki bunlar açık çevrim kararlı sistemler, açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararlı sistemler ile son olarak açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız sistemlerdir.

Zaman gecikmeli doğrusal zamanla değişmeyen sistemler, sonsuz sayıda köke sahip polinomsu olarak bilinen karakteristik fonksiyonlar verir. Bu nedenle zaman gecikmeli sistemlerin maksimum kazanç ve faz paylarının hesabı ve kararlılık analizi, zordur. Zaman gecikmeli sistemlerde tüm kararlı kılan kazançları hesaplamak için bu çalışmada önerilen yöntem, Padé yaklaşımının ve Nyquist kararlılık kriterinin bir genelleştirilmesinin kullanılması üzerine kuruludur. Bu yöntem kullanılarak hem Padé yaklaşımlarından kaynaklanan belirsizlik kazanç aralıkları hem de dayanıklı kararlı kılan kazançların tam bir kümesi, bulunur. Zaman gecikmeli bir sistem için maksimum kazanç payı, dayanıklı kararlı yapan kazanç aralıklarının kullanılmasıyla hesaplanabilir.

Bu tezde, zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payını hesaplayan yeni ve hızlı bir yöntem de önerilmiştir. Üstel gecikme teriminin varlığına rağmen; maksimum faz payını bulmak için önerilen bu yöntem, reel katsayılı bir polinomun (polinomsu olmayan) reel köklerinin hesabını gerektirir. Bu polinomun köklerinin sayısı sonsuz olmadığı için; verilen zaman gecikmeli bir sistemin maksimum faz payının hesabı, çok kolay olur.

Özel bir durum olarak; zaman gecikmeli birinci mertebeden sistemler için Padé yaklaşımını kullanan kutup atama tabanlı yeni bir oransal-integral (PI) kontrolör



ayarlama yöntemi de önerilmiştir. Önerilen ayarlama formülasyonunun önemli bir özelliği, çoğu sistemler için aşırı hızlı bir yanıt vermesidir. Verilen sistem için bir ayarlama parametresi de tedarik edilir. Teorik yaklaşımlar ve simülasyonlar kadar gerçek deneyler de yapılarak bulunan sonuçlar, birkaç iyi bilinen PI ayarlama formülleriyle karşılaştırılmıştır.

P ve PI kontrolörler kullanılarak, yapısal olmayan belirsizliğe sahip sürekli zamanlı tek girişli-tek çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerin dayanıklı kararlı kılınması da bu tezde ele alınmıştır. Yapısal olmayan belirsizliklere sahip bir sistemin Nyquist eğrisi, tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesidir ve reel eksen bir noktada değil bölgeler biçiminde keser. Gerçekte, yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemin frekans cevabı, verilen bir frekans için, bir disktr. Belirsizlik içeren verilen bir doğrusal zamanla değişmeyen sistemi dayanıklı kararlı kılan tüm P ve PI kontrolörlerinin Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi ve parametre uzayı yaklaşımı kullanılarak bulunabileceği gösterilebilir. Kökleri sol yarı düzlemde bulunan kararlı bir karakteristik polinomun kararsız olması için gerek ve yeter koşul, en az bir kökünün sanal eksenden geçmesidir. Bu kök geçişleri, parametre uzayında üç tip kararlılık sınırı oluşturur ki bunlar reel kök sınırı, sonsuz kök sınırı ve kompleks kök sınırıdır. Bu kararlılık sınırları, parametre uzayını kararsız kapalı çevrim kutup sayısının değişmediği bölgelere ayırır. Dayanıklı kararlı yapan tüm P ve PI kontrolörleri belirlemek için önerilen yöntem, iki reel polinomun köklerinin hesabını gerektirirken, bir parametre üzerinde herhangi bir tarama yapmayı gerektirmez ve bunun bir sonucu olarak literatürde var olan yöntemler üzerine hesap açısından avantajlar sağlar. Ayrıca verilen yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörleri bulmak için yeni iki geometrik yöntem de önerilmiştir. Birinci yöntem, dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin tam kümesini verir; fakat yavaş bir yöntemdir. Diğer alternatif yöntem, bir yaklaşım verir ve dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin tutucu bir kümesini bulur; fakat birinci yöntemden daha hızlıdır.

Bu tezde, ayrık zamanlı sistemleri kararlı yapan tüm kazançları hesaplamak için de iki yöntem verilmiştir. Birinci yöntem, problemin çözümünde Chebyshev polinomlarının kullanılmasını gerektirirken; ikinci yöntem, bilineer bir dönüşüm kullanılarak problemin düzenlenmesine odaklanır.

## ROBUST P AND PI CONTROLLER DESIGN

### SUMMARY

In controller design, it is essential to achieve stability of the closed-loop system and various performance specifications. Frequency domain criteria such as gain margin, phase margin and  $H_\infty$  norms of the closed-loop transfer functions as well as time domain criteria such as settling time, rise time and overshoot can be counted among the important performance specifications. Gain and phase margins are frequently used as robustness indicators for linear time invariant systems. Gain margin, which can be defined as the maximum gain uncertainty that can be tolerated in the open loop system without losing stability in the closed-loop system, and phase margin, which can be defined similarly for phase uncertainty, are measures of relative stability. Therefore, finding all low order controllers that satisfy a given gain margin constraint or phase margin constraint is very important. In this thesis, after providing methods for determining all stabilizing proportional controllers (P) that satisfy gain and phase margins constraints, a new method for calculating maximum achievable gain and phase margins using proportional controllers is proposed. The method is based on a generalization of Nyquist stability criterion. The generalization of Nyquist stability criterion suggests to determine the number of unstable poles for gain intervals obtained by calculating the location and direction of the crossing of the Nyquist plot with the real axis. Three different cases are examined to calculate maximum achievable phase margin, namely: open-loop stable systems, open-loop unstable and high gain closed-loop stable systems, and lastly, open-loop unstable and high gain unstable systems.

Linear time-invariant systems with delays give characteristic functions known as quasi-polynomials which have infinite number of roots. Therefore analysis of stability and calculation of maximum achievable gain and phase margins of systems with time delay is difficult. To compute all stabilizing gains for the time delay systems, in this study, a method is proposed that is based on using Padé approximation and a generalization of Nyquist stability criterion. As this method is used, both uncertainty gain intervals which stem from Padé approximations and the entire set of robust stabilizing gains are found. Maximum achievable gain margin for a time delay system can be calculated using the robust stabilizing gain intervals.

In this thesis, a new and fast method is also proposed to compute maximum achievable phase margin for time delay systems. Despite the presence of the exponential delay term, the method which proposes to find maximum achievable phase margin involves calculation of real roots of a polynomial (not a quasi-polynomial) with real coefficients. Since the number of roots of this polynomial is not infinite, calculation of the maximum achievable phase margin of a given system with time delay is very easy.

As a especial case, a new proportional-integral (PI) controller tuning method based on pole placement is also proposed for first order plus time delay processes using

Padé approximation. An important property of the proposed tuning formulation is that it results in a fast response with no overshoot for a wide range of systems. A tuning parameter is also provided to fine-tune a given system. The results are compared with several well-known PI tuning formulas using theoretical approximations, simulations, as well as, real experiments.

Using P and PI controllers, robust stabilization of continuous time single-input single-output linear time invariant systems with unstructured uncertainty is also considered in this thesis. Nyquist plot of a system with unstructured uncertainties is a family of curves rather than a single curve and crosses the real axis in segments of the real axis instead of at single points. Actually, the frequency response of a system with unstructured uncertainty at a given frequency is a disk. In particular, it has been shown that all P and PI controllers that robustly stabilize a given uncertain linear time invariant system can be found by utilizing a generalization of the Nyquist theorem and the parameter space approach. A stable characteristic polynomial, whose roots are in the left half plane, becomes unstable if and only if at least one root crosses the imaginary axis. The parameter values of the root crossing form the stability boundaries in the parameter space, which can be classified into three cases: the real root boundary, the infinite root boundary, and the complex root boundary. These stability boundaries separate regions in which the number of closed loop system unstable poles do not change in the parameter space. The method, which is proposed to determine all robustly stabilizing P and PI controllers, involves calculation of roots of two real polynomials and does not require any search or gridding over a parameter, and as a result offers computational advantages over existing methods in literature. Furthermore, two new geometric methods are also proposed to find PI controllers that robustly stabilize a given system with unstructured uncertainty. The first method gives exact set of robustly stabilizing PI controllers; but it is slow. Another alternative method suggests an approximation and finds a conservative set of robustly stabilizing PI controllers; but it is faster than the first one.

In this thesis, two methods for calculating all stabilizing gains for discrete-time systems are also given. The first method demonstrates the use of Chebyshev polynomials in the solution of the problem and the second method focuses on converting the problem using a bilinear transformation.

## 1. GİRİŞ

Teknolojinin ilerlemesindeki önemi son yıllarda gittikçe artmakta olan kontrol sistemleri, günlük hayatımızdaki etkinliklerden endüstrideki pek çok uygulamaya kadar sayısız alanlarda kullanılmaktadır. Kontrol sistemleri, en genel durumda açık çevrimli ve kapalı çevrimli kontrol sistemleri olarak iki gruba ayrılır. Açık çevrimli kontrol sistemleri, kontrolör ve kontrol edilen sistem olmak üzere iki kısımdan oluşur ve aynı zamanda çıkış işareti, giriş işaretinin bir fonksiyonu olan sistemdir. Kapalı çevrimli kontrol sistemleri ise; giriş işareti, çıkış işaretine veya çıkış işaretinden üretilen bir işaretle referans giriş işareti arasındaki farka veya toplama bağlı olan geribeslemeli bir kontrol sistemidir. Kontrol sistemlerinde geribeslemenin kararlılık, parametre değişimlerine karşı dayanıklılık ve bozucuları etkisiz kılma gibi sistem davranışları üzerine önemli etkileri vardır. Bu etkiler, kontrol sistemlerinin en önemli tasarım kriterlerini oluşturur.

İstenen tasarım kriterlerini gerçekleştirebilmek için geribesleme kadar uygun kontrolör türünün seçimi de önemlidir. Mühendislik uygulamaları gereği, istenen tasarım koşullarını sağlayan en basit yapıları kontrolörlerin seçimi tercih edilir. Gerçekte çoğu pratik sistem doğrusal olmayan bölümler içerebildiğinden; çok işlem gerektiren yüksek dereceli kontrolörlerin kullanımı, maliyeti artırır ve sistem cevabının istenilenden farklı olmasına neden olabilir. Bu durumda basit yapıları olan düşük dereceli kontrolörlerin kullanımı önem kazanır. Bu tür kontrolörler içinde en yaygın olarak kullanılanları oransal kazanç (P), oransal-integral (PI), oransal-türev (PD) ve oransal-integral-türev (PID) kontrolörlerdir. Bu nedenle bu tezde, zaman gecikmesiz ve zaman gecikmeli sistemler için önemli performans özellikleri arasında yer alan kararlılığı ve özellikle yapısal olmayan belirsizliklere karşı dayanıklılığı sağlayan P kontrolörlerin kümesini ve PI kontrolörlerin bölgesini, analitik ve hızlı bir biçimde bulabilen yeni çözüm yolları geliştirilmiştir.

Sistemlerdeki model belirsizlikleri, yapısal olan ve yapısal olmayan belirsizlikler olmak üzere iki türdür. Yapısal belirsizlik içeren sistemlerde modelde bulunan sistem parametre değerlerinin kesin doğru olarak ölçülememesinden kaynaklanan hatalar veya zaman içerisinde bu parametrelerin değişebileceği göz önüne alınır. Yapısal olmayan belirsizlikler ise, bazı sistem dinamikleri üzerindeki bilgi eksikliği veya yapılan indigemelerden kaynaklanan modelde yer almayan terimlerden

kaynaklanır. Yapısal olan veya olmayan belirsizlikler sistemlerde kararsızlığa neden olabildikleri için, bunlara karşı sistemleri dayanıklı kararlı kılacak kontrolörlerin tasarlanması günümüzde oldukça önem kazanmaktadır.

Kontrol sistemlerinin tasarlanmasında genellikle sistemin kapalı çevrimde kararlı yapılması ve sistem cevaplarının istenilen performans kriterlerini sağlaması amaçlanır. Tasarımda sistem modellenmesinden ortaya çıkabilecek ölçüm hataları, yüksek dereceli sistemlerin düşük dereceli modeller ile gösterilimi ve sistem dışı bozucuların varlığı sistemlerde belirsizliklerin oluşmasına ve böylece istenen performans kriterlerinin sağlanamamasına ve özellikle kararsızlığa yol açabilir. Bu performans kriterleri içinde dayanıklı kararlılığın bir göstergesi olan kazanç payı ( $KP$ ) ve faz payı ( $FP$ ) gibi ölçütler ile  $H_\infty$  normları gibi frekans tanım bölgesi kriterleri yer aldığı gibi; yerleşme zamanı, yükselme zamanı ve aşım gibi zaman tanım bölgesi kriterleri de önemli yer alır. Dayanıklı kararlılıkta amaç, sistemin her türlü belirsizliğe, bozuculara ve ölçüm hatalarına karşı her zaman kararlı kalmasıdır.

Zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı kılabilen  $P$ ,  $PI$  ve  $PID$  kontrolörlerin hızlı bir hesap yöntemi, Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesiyle Munro ve diğ. (1999) ve Söylemez ve diğ. (2003) tarafından verilmiştir. Bu yöntem, Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerin ve yönünün hesaplanması ile kararsız kutup sayılarının belirlenmesi üzerine kuruludur. Belirsizliğin bir ölçütü olan kazanç payı ve faz payı kısıtlamaları için sistemi kararlı kılacak kontrolörlerin hesabını yapmak amacıyla Munro ve diğ. (1999) tarafından önerilen bu yöntem, tezin üçüncü bölümünde bazı ek koşullar ilave edilmiştir. Frekans tanım bölgesinde göreceli kararlılığın ölçütleri olan kazanç payı ve faz payı, dayanıklı kararlılık için de önemli kavramlardır. Dayanıklı kararlılık için bir kontrol sisteminin yüksek kazanç payı ve yüksek faz payına sahip olması gerekir. Kazanç payı, bir sistemin ileri yol kazancının kararlılığı etkilemeksizin ne kadar arttırılabileceğini gösteren bir büyüklüktür. Faz payı ise, kapalı çevrimde kararsızlığa neden olmaksızın izin verilebilen maksimum faz belirsizliği olarak tanımlanabilir. Dayanıklılık açısından önemli bir kriter olan istenen bir kazanç belirsizliği için sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak oransal kontrolörler kümesi, bu belirsizliğin olmadığı nominal sistemi kararlı kılan kazanç aralıklarının üst sınırlarının istenen kazanç payına bölünmesiyle bulunan alt kümesidir (Bayhan ve Söylemez, 2006a). Faz belirsizliğine sahip bir sistemin ise açık çevrim transfer fonksiyonu reel katsayılı olmayıp kompleks katsayılı olacağı için böyle bir sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak oransal kontrolörlerin hesabı kolay olmayacaktır. Böyle sistemleri kararlı kılacak kazançları bulabilmek amacıyla faz belirsizliğine sahip bir sistemi kararlı yapacak oransal kontrolörleri bulmak için Munro ve diğ. (1999) tarafından verilen yöntem, uyarlanarak üçüncü bölümde

kullanılmıştır. Özellikle burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus, nominal sistemler kesin nedensel ise; faz belirsizliğinden dolayı Nyquist eğrisinin geçiş yönünü bulmak için eğrinin orijine geliş açısının da hesaplanması gerektiğidir. İstenen kazanç payı ve istenen faz payı kriterlerini aynı anda sağlayan oransal kontrolörleri bulmak için her iki kriteri ayrı ayrı sağlayan oransal kontrolörlerin ortak kümesinin alınması yeterlidir. Bu noktada sistemin kararlılığını bozmadan kazanç payı ve faz payının en çok ne kadar değer alabileceğinin hesaplanması önem kazanır. Bu değerler, bu tezde maksimum kazanç payı ( $\max KP$ ) ve maksimum faz payı ( $\max FP$ ) olarak tanımlanmış ve üçüncü bölümde zaman gecikmesinden bağımsız sistemler için oransal kontrolör kullanılarak erişilebilecek maksimum kazanç payı ve maksimum faz payını hesaplayan Bayhan ve Söylemez (2007a) ile Bayhan ve Söylemez (2007b) tarafından önerilmiş yeni teoremler verilmiştir. Maksimum faz payı hesabında özel inceleme gerektiği için bu çalışmada üç tür sistem ele alınmıştır. Bunlardan biri açık çevrim kararlı olan, diğeri açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararlı olan ve sonuncusu açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız olan sistemlerdir.

Kontrolör tasarımında dayanıklılık, sistemin yapısal olan ve yapısal olmayan belirsizliklere karşı gösterilen tolerans ölçütü olarak düşünülebilir. Yapısal olmayan belirsizlikler kontrol sistemlerinde genelde çarpım veya toplam biçiminde gösterilirler. Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemin Nyquist eğrisi, tek bir eğri olmayıp bir eğri ailesi biçiminde olacağından reel eksen, bölgeler biçiminde keser. Bu eğri ailesi, belirsizlik disklerinden oluşan bir bant içinden geçer (Skogestad ve Postlethwaite, 2005). Diğeri bir değişle belirsizlik bantı nominal sistemin Nyquist eğrisini çevreler. Belirsizlik bantının reel eksen kesim yerlerinden bulunan kazanç kümeleri için sistemin kararlılığı hakkında kesin bir şey söylenemez. Nominal sistemi kararlı yapan kazanç kümeleri ile belirsizlik kazanç kümelerinden yararlanarak yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemi dayanıklı kararlı kılan kazanç kümelerinin hesabı hızlıca yapılabilir. Bu amaçla zaman gecikmesinden bağımsız sistemler için bütün olası yapısal olmayan belirsizlikler altında kapalı çevrim sistemi kararlı kılan kazanç kümelerini bulan Söylemez ve Bayhan (2008) tarafından önerilen yeni bir yöntem, tezin üçüncü bölümünde verilmiştir.

Zaman gecikmesiz sistemler, karakteristik polinomlarının reel katsayılı olmasından dolayı sonlu sayıda köke sahipken; zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik polinomlarının zaman gecikmesi teriminden kaynaklanan polinomu (quasi-polinom) biçiminde olmasından dolayı sonsuz sayıda kökü vardır. Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık incelemesi, zaman gecikmesiz sistemlerinkinden daha zor olması nedeniyle zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak

kontrolörlerin hesap yöntemleri, zaman gecikmeli sistemlere her zaman doğrudan uygulanamaz. Uygun Padé yaklaşımının kullanılmasıyla zaman gecikmesi terimi, rasyonel bir fonksiyon biçimine getirilebilir. Böylece zaman gecikmesiz sistemler için geliştirilmiş pek çok kararlılık analiz yöntemleri, zaman gecikmeli sistemlerin Padé eşdeğerleri için kullanılabilir. Ancak bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar, Padé eşdeğerlerinin kullanılmasından kaynaklanan ve yaklaşımın mertebesine bağlı olan hatalar içerebilir. Nyquist teoreminin genelleştirilmesine dayanan Munro ve diğ. (1999) tarafından önerilmiş olan yöntemi, zaman gecikmeli sistemlerin Padé eşdeğerlerini veren yeni sistemleri kapalı çevrimde kararlı kılabacak oransal kontrolörlerin kümesini belirlemek amacıyla kullanabiliriz. Bu noktada Padé yaklaşımının istenilen keyfi bir derecesi için oluşan hata paylarının hesaplanması önem kazanır. Bu amaçla tezin dördüncü bölümünde, kullanılan Padé yaklaşımının mertebesi ne olursa olsun yapılan hata belirlenerek sistemi kapalı çevrimde kesin kararlı yapacak kazanç aralıklarının analitik hesabını veren yeni bir yöntem, önerilmiştir. Zaman gecikmesi terimi ile bunun Padé eşdeğeri arasındaki hata fonksiyonlarını, Padé yaklaşımının mertebesine bağlı olarak hesaplayan önemli bir teorem, Lam (1990) tarafından verilmiştir. Bu hata fonksiyonlarının teorem gereği tanımladığı disk kümelerinden yararlanarak zaman gecikmeli sistemlerin yerine kullanılan Padé eşdeğerlerini kapalı çevrimde kararlı yapacak kazanç kümelerine ilişkin hata paylarının hesabını içeren yeni bir yöntem ilk defa, bu tezin dördüncü bölümünde tanıtılmıştır. Pade eşdeğerini kapalı çevrimde kararlı yapan kazançlar ile bölüm dörtte önerilen bu yöntemle hesapladığımız kararlılığın belirsiz olduğu hata payları arasındaki kümesel fark, bize sistemi kesin kararlı kılan kazanç aralıklarını verecektir.

Zaman gecikmeli bir sistemin Nyquist eğrisi ile keyfi mertebeden Padé yaklaşımlarıyla bulunan Nyquist eğrilerinin oluşturduğu eğri ailesi, Padé yaklaşımından kaynaklanan hataya ilişkin disk kümelerinin oluşturduğu bantın içinden geçerken reel eksen çeşitli noktalarda kesecektir. Bu kesim noktalarının yerlerini cebrik olarak hesaplayan dördüncü bölümdeki bu yeni yöntemi, üçüncü bölümde bulunan bazı sonuçlardan yararlanarak kazanç-faz belirsizliğine sahip zaman gecikmeli sistemler için de ilave koşullar koyarak kullanabiliriz. Zaman gecikmesiz sistemlerde hesaplanabildiği gibi zaman gecikmeli sistemlerde de maksimum kazanç payı ve maksimum faz payının hesabı yapılabilir. Bunun için üçüncü bölümde verilen bazı sonuçlardan yararlanarak tezin dördüncü bölümünde zaman gecikmeli sistemler için maksimum kazanç payı ve maksimum faz payı hesabına ilişkin iki yeni teorem verilmiştir. Bu teoremlerden ilki zaman gecikmeli sistemleri kapalı çevrimde kesin kararlı kılan kazanç değerlerinin mutlak değerce büyük olan üst sınırının alt sınıra olan oranından maksimum kazanç payının

bulunacağını ifade eder. İkinci teorem ise zaman gecikmeli sistemlerin maksimum faz payı hesabı için üstel biçimde olan zaman gecikmesi terimini içermeyen tam çözümü veren pratik bir sonuçtur. Bu çözüm polinomsu biçiminde olmayıp reel katsayılı polinom biçiminde olan bir ifadenin köklerinin hesabını içerdiğinden; sonlu sayıda reel kök için hesap yapılır ve bu nedenle oldukça hızlı ve kullanışlı bir yöntemdir.

Bölüm beşte ise, ayrık zamanlı sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapan kazançların hesabı için Bayhan ve Söylemez (2006b) tarafından önerilmiş iki yöntem verilmiştir. Birinci yöntem, ayrık zamanlı sistemlerde Chebyshev polinomları kullanılarak bulunan yeni sistemin Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerlerin hesaplanması ve bunlara ilişkin kazanç aralıkları için kararsız kutupların sayısının belirlenmesi üzerine kuruludur. İkinci yöntem ise, Munro ve diğ. (1999) tarafından sürekli zamanlı sistemler için verilmiş genelleştirilmiş Nyquist teoreminin, ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşümleri olan sistemlere uyarlanmış biçimidir. Zaman gecikmesiz sistemlere ilişkin üçüncü bölümde verilen tüm sonuçlar, ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşümleri olan eşdeğer sistemleri için de geçerli olacaktır. Bu sonuçlar arasında istenilen kazanç ve faz payları için ayrık zamanlı sistemleri kararlı yapan tüm kazançların hesabı, maksimum kazanç ve maksimum faz paylarının hesabı ile yapısal olmayan belirsizlik içeren ayrık zamanlı sistemleri dayanıklı kararlı kılan kazançların hesabı yer alır.

Zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı kılan PI kontrolörler bölgesini hesaplayan Ackermann ve diğ. (2002a) tarafından verilmiş parametre uzayı yaklaşımı, tezin altıncı bölümünde zaman gecikmeli sistemlerin PI kontrolü için uyarlanarak kullanılmıştır. Parametre uzayı yaklaşımında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı PI düzlemindeki bölgeler bulunarak kararlılık sınırları oluşturulur. PI kontrolörün oransal ve integral kazanç parametrelerinden oluşan frekans tanım bölgesindeki bu uzayda, kararsız kutup sayısının sıfır olduğu bölgeler sistemi kararlı yapan PI kontrolörler bölgesini verir. Frekans tanım bölgesinde kararlılık sınırları frekansın sıfıra eşit olmasına, sonsuza gitmesine ve sıfır ile sonsuz arasında değer almasına göre sırasıyla reel kök sınırı, sonsuz kök sınırı ve kompleks kök sınırı adı verilen üç tip sınırdan oluşur. Parametre uzayı yaklaşımı, yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesinin bulunmasında da kullanılabilir. Yapısal olmayan belirsizlikten dolayı sistemin Nyquist eğrisi, bir eğri ailesi tanımlar ve bu Nyquist eğrilerinin etrafına belirsizlik disklerinden oluşan bir bant konulabilir. Parametre uzayı yaklaşımından yararlanarak böyle sistemleri dayanıklı kararlı kılacak tüm PI kontrolörlerin hesabı için altıncı bölümde iki yöntem önerilmiştir.



Birinci yöntem, belirsizlik disklerinin orijini içermesi ve içermemesine göre iki aşama içeren bir yöntemdir. Belirsizlik bölgesini bulmak için orijini içermeyen belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin iç kısımları alınırken; orijini içeren belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin ise dış kısımları alınır. Belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu bölge, dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesidir. Birinci yönteme alternatif olarak hesabı kolaylaştırmak ve işlem hızını arttırmak için geometrik tabanlı cebrik bir yöntem de altıncı bölümde önerilmiştir. Dayanıklı kararlı kılan bölgeye ilişkin yaklaşık sonuç veren bu yönteme göre orijini içermeyen belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin etrafı, dışarıdan yamuklarla kaplanıp iç kısımları alınır ve ilave olarak da orijini içeren belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik diskleri içeriden eş kenar dörtgenlerle çevrelenip dış kısımları alınır. Böylece parametre uzayında kararlılık sınırlarını da kaplayan bu yamukların içiyle dörtgenlerin dışından oluşan bölge, sistemin kapalı çevrim kararlılığı açısından kesin bir şey söylenemiyen belirsizlik bölgesidir. Hızlı sonuç veren fakat tutuculuğa neden olan bu yöntemin dışında parametre uzayında dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörlerinin tam bir kümesini bulmak için ikinci bir yöntem de altıncı bölümde önerilmiştir. Yaklaşık olmayan kesin sonuç veren bu yöntem, PI kontrolör parametrelerini kutupsal koordinatlarda yazıp elde edilen yeni sistem için birim dairenin taranmasına ve üçüncü bölümde verilen sonuçların kullanılmasına dayanır. Ancak bu ikinci yöntemin birinci yönteme göre işlem yoğunluğu fazladır; fakat her ikisi de tutucu olmayan ve sistemi dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörler bölgesinin tamamını bulur.

Özel bir durum olarak bölüm altıda, birinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için PI kontrolör parametrelerini ayarlamak amacıyla Padé yaklaşımını kullanan ve kutup atamaya dayalı olan; Bayhan ve diğ. (2007) tarafından önerilmiş bir yöntem verilmiştir. Genelde aşırı ve oldukça küçük yerleşme zamanına sahip birim basamak yanıtlarına neden olan bu yöntemi deneysel olarak test etmek için, İTÜ kontrol laboratuvarında yer alan PT326 sıcaklık kontrol deney seti ve İTÜ Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenen 31685 proje nolu doktora tez projesi kapsamında alınan DAQ kartı kullanılmış ve bulunan sonuçlar, literatürde iyi bilinen bazı PI kontrolör katsayılarını ayarlamaya yönelik yöntemlerle de karşılaştırılmıştır.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Sürekli zamanlı sistemlerin kararlılık analizinde kapalı çevrim sistemin karakteristik polinomunu esas alarak inceleme yapan cebirsel kararlılık testleri arasında en önemli olanları Routh-Hurwitz kararlılık kriteri ve Hermite-Biehler teoremidir. Sürekli zamanlı sistemler için açık çevrim sistemi esas alarak kapalı çevrim sistemin kararlılık incelemesini yapan başlıca yöntemler içinde ise köklerin yer eğrisi tekniği, Nyquist kararlılık kriteri (Nyquist, 1932) ve Bode diyagramları vardır. Karakteristik denklemin köklerinin kararlılığın test edilmesinde belirleyici olacağı düşüncesini, Routh (1877) ispatlamıştır ve ilave olarak Hurwitz (1895) ise, karakteristik denklemin sistem kararlılığının analizinde nasıl kullanılması gerektiği problemini çözmüştür. Verilen sonlu boyutta doğrusal zamanla değişmeyen sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak tüm kazançların Nyquist kriteri ve Routh-Hurwitz kriteri gibi klasik yöntemler kullanılarak bulunabilmesine rağmen; bu yöntemlerin düşük dereceli kontrolörler kümesinde önemli yere sahip PI veya PID kontrolörlerin kullanılmasını gerektiren daha karmaşık durumlara nasıl uygulanabileceği çok da açık değildir. Ayırık zamanlı sistemlerin kararlılık analizi için ise Jury kararlılık kriteri ve Schur-Cohn matris testi, oldukça yaygın kullanılmaktadır (Jury, 1974); ancak ayırık zamanlı sistemleri kapalı çevrimde oransal kazançla kararlı kılmak için kullanılan bu kararlılık kriterleri, doğrusal olmayan eşitsizliklerden oluşan kazanç aralıkları verdiğinden, yüksek mertebeli sistemlerde pratik olmayan çözümlere neden olur (Keel ve Bhattacharyya, 2002).

Verilen bir sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin tam bir parametrizasyonu Youla ve diğ. (1974) ile Youla ve diğ. (1976) tarafından verilmiştir. Youla parametrizasyonu, cebirsel bir yöntem olduğu için;  $H_\infty$  ve  $H_2$  optimal kontrol gibi modern kontrol sentez yöntemlerine uygundur (Skogestad ve Postlethwaite, 2005; Sanchez-Pena ve Sznajer, 1998). Ancak önemli bir dezavantajı, bulunan optimal kontrolörlerin mertebesinin oldukça yüksek olmasıdır. Ayrıca optimal kontrolörler, tasarım kriterlerini sağlamak için kontrolör parametreleri üzerinde ayarlama yapmaya çok da uygun olmadıkları için; kırılğan kontrolörlerin ortaya çıkmasına neden olabilirler (Keel ve diğ., 1997; Makila, 1998; Kim ve diğ., 2007).

PID kontrolörler düşük dereceli basit yapısı ve dayanıklı performans özellikleri gibi nedenlerden dolayı endüstride oldukça sık kullanılırlar. Endüstride kullanılan

kontrolörlerin %90'dan fazlası PID tipi kontrolörlerdir (Astrom ve Hagglund, 2001). Pek çok sektörde de türevsel kısmının gerekmemesinden dolayı PI kontrolörlerin kullanımı da yaygındır. Buna örnek olarak kağıt endüstrisinde kullanılan kontrolörlerin %97'si PI tipidir (Bialkowski, 1993). Böyle kontrolörleri belirlemek için pek çok yöntem vardır. En yaygın olanlarından başlıcaları arasında: Ziegler-Nichols ayarlama yöntemi (Ziegler ve Nichols, 1942), Cohen-Coon yöntemi (Cohen ve Coon, 1953), Astrom-Hagglund yöntemi (Astrom ve Hagglund, 1995), gelişmiş (refined) Ziegler-Nichols yöntemi (Hang ve diğ., 1991), iç model kontrol yaklaşımı (Morari ve Zafiriou, 1989; Chien ve Fruehauf, 1990), kazanç ve faz payına dayanan tasarımlar (Ho ve diğ., 1995a; Ho ve diğ., 1995b; Ho ve diğ., 1996), ve integral performans kriterlerine dayanan yöntemler (Smith ve Corripio, 1985; Shinskey, 1985; Zhuang ve Atherton, 1993; Atherton ve Majhi, 1999) gelir.

Zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak P, PI ve PID kontrolörler gibi düşük dereceli kontrolörlerin tasarımı için literatürdeki yöntemlerden üç tanesi çok kullanılır. Bunlardan ilki Hermite-Biehler teoreminin bir genelleştirilmesine dayanan yöntemlerdir (Ho ve diğ., 1997a; Ho ve diğ., 1997b; Ho ve diğ., 1998; Ho ve diğ., 1999; Ho ve diğ., 2000; Tan, 2003). İkincisi Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerlerin ve yönlerinin bulunmasıyla Nyquist teoreminin (Nyquist, 1932) bir genelleştirilmesine dayanan yöntemdir (Munro ve diğ., 1999; Munro ve diğ., 2000; Söylemez ve diğ., 2003). Sonuncusu ise parametre uzayı ve tekil frekans kavramları üzerine kuruludur (Ackermann ve Kaesbauer, 2001; Ackermann ve diğ., 2002a; Bajcinca, 2001; Bajcinca, 2006; Kiani ve Bozorg, 2006). Bu üç yöntem de ayrık zamanlı kontrol sistemlerine uyarlanmıştır. Ho ve diğ. (1997c) ile Ho ve diğ. (2004) tarafından Hermite-Biehler teoreminin genelleştirilmesi, ayrık zamanlı sistemler için kullanılmıştır. Ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşüklerine genelleştirilmiş Hermite-Biehler teoremini uygulayarak kararlı kılan P ve PID kontrolörlerinin hesabı, Xu ve diğ. (2001a) ile Xu ve diğ. (2001b) tarafından yapılmıştır. Hermite-Biehler teoreminin genelleştirilmesini esas alan ve karakteristik polinomun birim daire boyunca Chebyshev dizisi ile elde edilen görüntüsünün faz değişimini kullanarak kararsız kök sayısını ve özellikle kararlılığa ilişkin kısıtlamalar kümesini veren bir yöntemle ayrık zamanlı sistemleri kararlı yapan tek parametrelili kontrolörlerin tam bir kümesi elde edilebilir (Datta ve diğ., 2000; Keel ve Bhattacharyya, 2001a; Keel ve Bhattacharyya, 2001b; Keel ve Bhattacharyya, 2002). Fakat yöntemin önemli bir dezavantajı, sistemi kararlı yapan kontrolörler kümesini bulmaya yarayan bu kısıtlamaların herbirinin sistem derecesine bağlı olarak üstel olarak artan sayıda işaret fonksiyonunun analizini gerektirmesidir. Bu nedenle daha hızlı iki yöntem, Bayhan ve Söylemez (2005) ile Bayhan ve Söylemez (2006b) tarafından önerilmiştir.

İlk yöntem açık çevrim transfer fonksiyonu bilinen ayrık zamanlı bir sistemi kararlı kılan oransal kontrolörleri bulmak için Chebyshev dizisinin iki tipinden de yararlanarak sıradan bir reel polinom biçimine gelen sistemin Chebyshev gösterimini bulur ve sonra Nyquist teoreminin genelleştirilmesini kullanır (Bayhan ve Söylemez, 2005). İkinci yöntem de, ayrık zamanlı sistemin bilineer dönüşüğü için Nyquist teoreminin genelleştirilmesini kullanarak sistemi kararlı yapan kazançları hesaplar (Bayhan ve Söylemez, 2006b). Parametre uzayı yöntemi ise Ackermann ve diğ. (2002b) tarafından ayrık zamanlı sistemlere uyarlanmıştır. Özel bir kontrolör türü olarak ayrık zamanlı birinci mertebeden  $C(z) = (zx_1 + x_2)/(z + x_3)$  biçimindeki kontrolörler ile ayrık zamanlı sistemlerin Chebyshev gösterilimi kullanılarak kararlı kılınması, Tantis ve diğ. (2003a) tarafından önerilmiştir.

Verilen doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemin karakteristik polinomunun tüm kökleri, kompleks düzlemin açık sol yarı düzleminde bulunuyorsa; sistem kararlıdır. Karakteristik polinomun asli köklerini bulmaksızın sistemin kararlılığını belirlemek için klasik Hermite-Biehler Teoreminden yararlanılabilir. Bu teorem, verilen reel katsayılı bir polinomun kararlı olması için belirli bir iç içelik özelliğinin sağlanmasının gerek ve yeter olduğunu ifade eder (Datta ve diğ., 2000). Hermite-Biehler teoreminin bir genelleştirilmesi, Ho ve diğ. (1999) tarafından reel katsayılı polinomlar için yapıldıktan sonra kompleks katsayılı polinomlar için de düzenlenmiştir (Ho ve diğ., 2000). Bu genelleştirme, karakteristik polinomun sağ yarı düzlemdeki kök sayısı ile sol yarı düzlemdeki kök sayısı arasındaki farktan yararlanan analitik bir bağıntıya dayanır. Bu nedenle kullanışlıdır; fakat sistem derecesine bağlı olarak üstel olarak artan sayıda işaret fonksiyonunun analizini gerektirdiğinden hızlı sonuç veren bir yöntem değildir. Diğer taraftan Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerlerin ve yönlerinin hesaplanmasından hareketle kazanç aralıkları için kararsız kutup sayılarını bularak Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi olan hızlı bir yöntem, Munro ve diğ. (1999) tarafından önerilmiş ve daha sonra kararlı yapan tüm PID kontrolörlerin hesaplanması için Söylemez ve diğ. (2003) tarafından genişletilmiştir. Bu yöntem, sabitlenmiş bir oransal kazanç parametre değeri için kararlı kılan PID kontrolörler kümesinin konveks poligonlardan oluşturulması üzerine kuruludur ve 3-boyutta kararlı kılan bölgeleri bulmak için PID kontrolörün oransal kazanç parametresinin taranması gerekir (Söylemez ve diğ., 2003). Sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan PID kontrolörler kümesini bulmak için bir diğer yöntem de Bajcinca ve Hulin (2004) ile Bajcinca (2006) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem ise, tekil frekanslarda PID parametre uzayının ayrıştırılması üzerine kurulu bir yöntemdir. Konveks olmayan kararlılık bölgeleri, konveks poligonal dilimler yardımıyla oluşturulabilir. Burada problem iki kısma ayrılır. Birinci kısım, kararlı poligonlar ile oransal kazanç parametresinin

aralıklarının belirlenmesidir. İntegral kazanç parametresi ve türev kazanç parametresinden bağımsız olarak oransal kazanç parametresinin kararlı kılan aralıkları belirlenebilir. Bu problemin çözümü bir arama gerektirir. Bu arama, PID kontrolör için gerekli olan ve tekil frekansların oluşturduğu oransal kazanç parametre eğrisi yardımıyla yapılır (Söylemez ve diğ., 2003). Verilen bir sistemi kararlı kılmak için belli sayıda tekil frekans gerekmektedir. Bu yöntemin ilk kısmı, gerekli tekil frekans sayısını hesaplar. Bu yöntemin ikinci kısmı ise, oransal kazanç parametresinin sabitlenmiş bir değeri için integral-türev kazanç parametreleri düzleminde kararlı kılan poligonların ortaya çıkartılmasıdır. Yöntem, aslında özdeğerlerin hareketiyle tanımlanan geçişler üzerine kuruludur. Diğer taraftan kararlılık sınır eğrisinin PI düzleminde çizilmesine dayanan bir yöntem ise, Tan (2005) ile Tan ve diğ. (2006) tarafından tanıtılmıştır. Kararlılık sınır eğrisi, frekansa bağlı olduğundan; frekans sıfır ile sonsuz arasında değişebilir. Sistemi kararlı yapacak kontrolör parametrelerinin hangi frekans aralığına ilişkin olacağı, kararlılık sınır eğrisi yardımıyla bulunur. Ayrıca bu yöntem gerekli kazanç payı ve faz payı değerlerini de sağlayan tüm kontrolör parametre değerlerini de hesaplar; ancak dezavantajı grafiksel bir yöntem olmasıdır. Parametre uzayında kararlılık sınırlarının çizilmesine ve kararsız kutup sayılarının sabit kaldığı bölgelerin hızlı bir şekilde belirlenmesine dayalı olan bir başka PID kontrolör tasarlama yöntemi ise, Saeki (2007) tarafından önerilmiştir. Bu yöntemin önemli bir özelliği de özel tanımlanmış olan  $\Gamma$ -kararlılık bölgesi için de yöntemin uyarlanmış olmasıdır. Özel olarak  $C(s) = (sx_1 + x_2)/(s + x_3)$  biçimindeki birinci mertebeden kontrolörler ile zaman gecikmesiz sürekli zamanlı sistemlerin parametre uzayı yaklaşımı yardımıyla kararlı yapılması için bir yöntem, Tantarıs ve diğ. (2002) tarafından önerilmiştir.

Kazanç payı ve faz payı, açık çevrim transfer fonksiyonu ile ilgili kriterler olup; aynı zamanda kontrol sistemlerinin kapalı çevrimiyle ilgili olan dayanıklı kararlılık açısından da önemli ölçütlerdir. Ayarlanabilir parametrelili tek giriş-tek çıkışlı bir kontrol sisteminin parametre uzayında belirtilmiş kazanç payı ve faz payı bölgelerini bulmak için Shenton ve Shafiei (1994) ile Shafiei ve Shenton (1997) tarafından bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemde parametre uzayında belirtilmiş kazanç payı veya faz payı bölgelerinin gerekli sınırları, kompleks düzlemde kazanç payı veya faz payına ilişkin bir noktanın izdüşürülmesi (mapping) ile bulunur. Bu yöntemde açık çevrim D-bölgesi (OLDP) yöntemi (Aizerman, 1963), kullanılmıştır; ancak bu yöntem bir, iki veya üç parametrelili sistemlerin göreceli kararlılığının araştırılmasıyla sınırlıdır. Sınırlandırılmış (interval) polinom ailesine sahip bir kontrol sistemi için Hermite-Biehler teoremi kullanılarak kazanç payı ve faz payı hesabı ise Tan (2004) tarafından yapılmıştır. Zaman gecikmesiz sistemler için istenen kazanç payı ve faz payını sağlayan özel kontrolör türü olan  $C(s) = (sx_1 + x_2)/(s + x_3)$  kontrolörlerinin

bölgesi, parametre uzayı yaklaşımı kullanılarak Tantarıs ve diğ. (2003b) tarafından verilmiştir. Diğer taraftan Munro ve diğ. (1999) tarafından önerilen Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi olan yöntemden hareketle istenilen kazanç payı ve faz payı için kapalı çevrimde sistemin kararlılığını sağlayacak oransal kontrolörlerin hesabı ile erişilebilecek maksimum kazanç ve faz paylarının hesabı, Bayhan ve Söylemez (2007a) ile Bayhan ve Söylemez (2007b) tarafından yapılmıştır.

Buraya kadar incelenen sistemlerin transfer fonksiyonları, polinomların oranı ile kolayca ifade edilebiliyordu. Uygulamada çeşitli fiziksel, kimyasal, biyolojik ve ekonomik sistemlerde zaman gecikmesiyle karşılaşılır. Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığına ve performans kriterlerine ilişkin bazı sonuçlar Marshall ve diğ. (1992) tarafından verilmiştir. Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizine ilişkin gelişmiş bir literatür tarama çalışması, O'Dwyer (2003) tarafından yapılmıştır.

Doğrusal zamanla değişmeyen zaman gecikmeli sistemlerin polinomsu biçimindeki karakteristik polinomların kararlılığını analiz etmek için Pontryagin (1955)'in sonuçları ile Datta ve diğ. (2000) tarafından önerilen Hermite-Biehler teoreminin bir genelleştirmesi kullanılarak zaman gecikmeli birinci ve ikinci dereceden sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapan P, PI ve PID kontrolörler kümesi bulunabilir (Silva ve diğ., 2005). Bundan hareketle Hermite-Biehler teoreminin genelleştirilmesi kullanılarak zaman gecikmeli açık çevrim kararlı ve açık çevrim kararsız birinci ve ikinci dereceden sistemlerin oransal kontrolü, Silva ve diğ. (2000) ile Silva ve diğ. (2001a) tarafından yapılmıştır. Benzer olarak Hermite-Biehler teoreminin bir genelleştirmesinin kullanılmasıyla zaman gecikmeli birinci dereceden sistemlerin PI kontrolü Silva ve diğ. (2001b) tarafından önerilmişken; PID kontrolü ise Silva ve diğ. (2001c) ile Silva ve diğ. (2002) tarafından yapılmıştır. Ancak bu yöntemin bir dezavantajı, zaman gecikmeli sistemin sonsuz sayıdaki kökleri arasından kararlılık analizi için yeterli olan kökleri bulmak için grafik bir arama gerektirmesi ve sadece zaman gecikmeli birinci ve ikinci dereceden sistemler için geliştirilmiş olmasıdır. Zaman gecikmeli keyfi dereceden sistemler için çözüm verilmemiştir. Zaman gecikmeli keyfi dereceden sistemlerin kararlı yapılması için grafiksel bir hesap yöntemi, Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem, Nyquist kriterinin bir genelleştirilmesi olup; Pontryagin (1955)'in teoremleri üzerine kuruludur. Bu yöntemin dezavantajı ise, sistemin zaman gecikmesi elemanın sıfırdan istenilen keyfi bir değerine kadar sınırlandırılmış bir aralıkta değiştiğinin kabul edilmesi ve bu zaman gecikmesi aralığı için sistemi kararlı kılacak oransal kontrolörlerin ortak kümesini hesaplamasıdır. Diğer taraftan sınırlandırılmış zaman gecikmesi aralığına sahip sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak tüm oransal kontrolörlerin ortak kümesi, benzer bir grafik yöntemle Naimark ve Zeheb (1996) ile Naimark ve Zeheb

(1997) tarafından hesaplanmıştır. Bu iki grafik yöntemin de dezavantajı tutuculuğa neden olmaları ve ayrıca zaman gecikmesi aralığı içindeki her değer için kapalı çevrim sistem kararlı yapılamayabilir. Bu noktada, açık çevrim kararsız bir sistemin zaman gecikmesi ile kararlı hale getirilmesini sağlayan ve Niculescu ve diğ. (2003) tarafından önerilen bir yöntem dikkat çekicidir. Bu yöntem, uygun zaman gecikmesinin önemini de göstermektedir. Bu nedenle bir gecikme aralığı için kararlı kılan kazançların ortak kümesini bulmak yerine verilen bir gecikme için sistemi kararlı yapacak oransal kontrolörler kümesinin hesabının yapılması daha büyük önem taşır. Bu amaçla tezin dördüncü bölümünde Padé yaklaşımı kullanılarak sabit bir zaman gecikmesine sahip sistemi kesin kararlı kılan kazançlar kümesinin hesabı, hata paylarının hesabı da yapılarak verilmiştir. Bunun için Lam (1990) tarafından verilen bir teoremden yararlanılmıştır. Bu teorem, zaman gecikmesi elemanı ile Padé eş değeri arasındaki hata fonksiyonunu hesaplar. Bu hata fonksiyonları, disk kümeleri tanımlar (Özbay, 2000). Parametre uzayı yöntemini kullanarak zaman gecikmeli sistemleri kararlı yapan ve konveks poligonlardan oluşan PID kontrolör bölgelerin hesabı, Hohenbichler ve Ackermann (2003) tarafından yapılmıştır.

Parametrik belirsizliklere sahip bir sistem modelinde pratikte bu belirsizlikleri göstermek her zaman mümkün olmayabilir. Böyle belirsizliklere sahip sistemleri dayanıklı kararlı yapacak kontrolörler  $H_\infty$  kontrol teorisi yardımıyla bulunabilir; ancak bu şekilde bulunan kontrolörlerin mertebesi, en az kontrol edilmek istenen sistemin mertebesi kadar olur veya son derece kırılğan kontrolörler bulunabilir (Ho ve diğ., 2001).  $H_\infty$  kontrolörlerin mertebesini kısıtlandırmak için bazı çalışmalar yapılmıştır (Iwasaki ve Skelton, 1995). Ancak bu çalışmaların çoğunun cebrik açıdan kontrol edilmesi, zordur (Ho, 2001). İstenen  $H_\infty$  performans kriterini sağlayan PID kontrolörlerin kümesini bulmak için Ho (2001) ile Ho ve Lin (2003) tarafından bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem, PID kontrolörün oransal kontrolör parametresi üzerinde bir tarama yapmayı ve Hermite-Biehler teoremini kullanarak kompleks katsayılı bir polinom kümesi için ID düzleminde kararlı kılan bölgelerin belirlenmesini gerektirir. Alternatif bir yöntem, Blanchini ve diğ. (2004) tarafından verilmiştir. Bu yöntem, verilen  $H_\infty$  özelliklerini sağlayan ikinci dereceden kontrolörleri bulmak için grafiksel tabanlı olan ve PID kontrolörün üçüncü bir parametresi üzerindeki genelde oransal kontrolör parametresi üzerinde bir tarama yapmayı gerektiren bir yöntemdir. Ancak pek çok pratik durumda dayanıklı kararlılığı sağlayan oransal kontrolörün doğrudan belirlenmesi gerekir. Bu amaçla yapısal olmayan belirsizlikler içeren sistemler için dayanıklı kararlılığı sağlayan oransal kontrolörlerin kümesini doğrudan bulmak için Söylemez ve Bayhan (2008) tarafından yeni bir yöntem geliştirilmiş ve tezin üçüncü bölümünde de verilmiştir.

Zaman gecikmeli birinci mertebeden sistemler için dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörleri hesaplamak amacıyla bir yöntem, Krajewski ve diğ. (2004) ile Krajewski ve diğ. (2005) tarafından önerilmiştir. Kontrol edilmek istenen sistemin normalize edilmesine ve parametre uzayında kararlılık payları (kazanç ve faz payları) ile geçiş frekansına bağlı eliptik biçimli eğri ailesinin çizilmesine dayanan bir yöntemdir. Yapısal olmayan belirsizliklere karşı dayanıklı olan ve bazı performans özelliklerini de sağlayan PI kontrolörleri hesaplayan bir yöntem olmasına karşılık, sadece zaman gecikmeli birinci mertebeden sistemler için uygulanabilir olması bu yöntemin bir dezavantajıdır. Bu amaçla zaman gecikmeli keyfi mertebeden sistemleri dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin bulunmasına yönelik yeni bir yöntem, tezin altıncı bölümünde önerilmiştir.



### 3. ZAMAN GECİKMESİZ SİSTEMLERDE DAYANIKLI P TİPİ KONTROL

Kontrol sistemlerinin tasarım kriterleri, sistemin ne yapması gerektiğinin belirlenmesi ve nasıl yaptığının değerlendirilmesi üzerine kuruludur. Bu kriterler içinde kararlılık, parametre değişimlerine karşı dayanıklılık ve bozucuları etkisiz kılma gibi kavramlar ilk akla gelenleridir. Bu nedenle çeşitli performans özelliklerini ve özellikle kararlılığı sağlayan kontrolörlerin tam bir kümesini analitik ve hızlı olarak hesaplayabilmek önem kazanmıştır. İlgilenilen performans özellikleri arasında frekans tanım bölgesi için kazanç payı ( $KP$ ), faz payı ( $FP$ ) ve kapalı çevrim transfer fonksiyonlarının  $H_\infty$  normları gibi ölçütler ile zaman tanım bölgesi için ise yerleşme zamanı ve aşım gibi ölçütler sayılabilir. Kontrolörler kümesi içinde derecesinin düşüklüğü nedeniyle oransal kazanç ( $P$ ), oransal-integral ( $PI$ ) ve oransal-integral türev ( $PID$ ) kontrolörler oldukça önem kazanmaktadır. Düşük dereceli kontrolörler kümesinin hesaplanmasında hızlı ve pratik bir tasarım yöntemi, Munro ve diğ. (1999) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem, Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesine dayalı olup; sürekli zamanlı sistemlerin kararlılığı, ayrık zamanlı sistemlerin kararlılığı, zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığı ve bölgesel kutup yerleştirme probleminin çözümünü de içeren geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Görelî kararlılığın ölçütleri olan kazanç ve faz payı, doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için dayanıklılığın bir göstergesi olarak sıklıkla kullanılır. Birçok kontrol sisteminin tasarımı sırasında bir kısıtlama olarak kazanç ve faz belirsizliğine sahip sistemleri kararlı kılacak kazanç kümesinin bulunması beklenebilir. Bu amaçla istenen kazanç payı ve faz payını sağlayan tüm oransal kontrolörlerin bulunmasına yönelik yeni bir yöntem geliştirilmiş ve bu bölümde tanıtılmıştır. Önerilen bu yöntem, Munro ve diğ. (1999) tarafından verilen tasarım yöntemine ilave ek koşullar ekler. Fakat bazı durumlarda istenen kazanç payı ve faz payı kısıtlamalarını sağlayan kazançlar olmayabilir. Bu durumun bir sonucu olarak oransal kontrolörler kullanıldığında erişilebilecek maksimum kazanç payı ( $\max KP$ ) ve maksimum faz payının ( $\max FP$ ) hesabı oldukça önem kazanır. Bu tezde, zaman gecikmesinden bağımsız sistemler için oransal kontrolör kullanılarak erişilebilecek  $\max KP$  ve  $\max FP$ 'nı hesaplayan yeni teoremler inşa edilmiştir. Bu teoremler, sabit katsayılı reel polinomların köklerinin hesabını gerektiren formüller içerdiklerinden işlemleri oldukça basite indirgemektedirler. Kazanç payının klasik tanımı bazı durumlar için yetersiz kalabilir. Bu nedenle “negatif kazanç payı” ( $KP^-$ ) ve

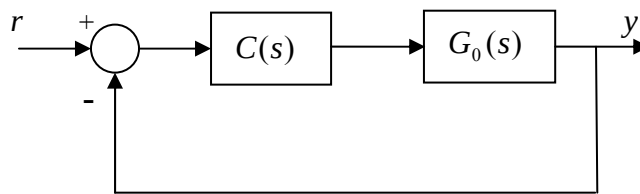
“simetrik kazanç payı” ( $KP^*$ ) kavramları da bu çalışmada tanıtılmış ve  $\max KP$ ’i hesaplamak için geliştirilen teorem, bu kavramlar için de uyarlanmıştır. Açık çevrim kararlı sistemlerin durumu ayrıca düşünülerek  $\max FP$ ’nı sağlayan en büyük kazancın hesabı için alternatif bir hesap yöntemi de geliştirilmiştir.

Sürekli zamanlı tek girişli-tek çıkışlı doğrusal zamanla değişmeyen yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemleri dayanıklı kararlı kılabilen tüm kazançlar, Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi kullanılarak bulunabilir. Bu amaçla bu tezde geliştirilen yeni bir yöntem, iki reel katsayılı polinomun köklerinin hesabına dayanır ve literatürdeki pek çok yöntemle göre avantajları vardır (Söylemez ve Bayhan, 2008).

### 3.1 Kararlılığı Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması

Zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı kılabilen oransal kontrolörler kümesini bulmak için, Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi üzerine kurulu olan Munro ve diğ. (1999) tarafından geliştirilmiş analitik bir hesap yönteminden yararlanabiliriz. Kapalı çevrim sistemin kararlı olduğu kazanç aralığı, açık çevrim sistemin Nyquist yer eğrisi incelenerek bulunabilir. Bu yöntemle Nyquist yer eğrisinin reel eksenini kestiği yer ve yönünün hesaplanması sonucu bulunan kazanç aralıkları için kararsız kutupların sayısını belirlemek mümkündür (Munro ve diğ., 2000); (Munro ve diğ., 2003).

Şekil 3.1’de tek girişli-tek çıkışlı bir kontrol sistemi görülmektedir.



**Şekil 3.1 : Sabit Kazançlı Kapalı Çevrim Kontrol Sistemi.**

Kontrol edilmek istenen sistemin transfer fonksiyonu

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.1)$$

biçimindedir. Burada  $N(s)$  ve  $D(s)$  reel katsayılı polinomlar olup sırasıyla,

$$N(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (3.2)$$

$$D(s) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 \quad (3.3)$$

biçimindedir ve  $m \leq n$  olduğu varsayılır. Sabit kazanç kontrolörü

$$C(s) = K_p \quad (3.4)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda kapalı çevrim karakteristik polinomu,

$$\delta(s, K_p) = D(s) + K_p N(s) \quad (3.5)$$

olur.  $G_0(s)$  'de  $s = jw$  yazarsak,

$$G_0(jw) = \frac{N(jw)}{D(jw)} = \frac{N_{re} + jN_{im}}{D_{re} + jD_{im}} \quad (3.6)$$

bulunur. Burada  $D_{re} \triangleq \text{Re}\{D(jw)\}$ ,  $D_{im} \triangleq \text{Im}\{D(jw)\}$  biçimindedir.  $N_{re}$  ve  $N_{im}$  'de benzer olarak tanımlanmıştır. Dikkat edilirse,

$$D_{re} = D_e(-w^2) \quad D_{im} = D_o(-w^2)w \quad (3.7)$$

$$N_{re} = N_e(-w^2) \quad N_{im} = N_o(-w^2)w \quad (3.8)$$

olarak yazılabilir. Burada  $D_e(s^2)$  ve  $sD_o(s^2)$ , sırasıyla  $s$ 'nin çift ve tek kuvvetlerini içeren  $D(s)$ 'nin elemanlarıdır. Örneğin  $D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2)$  biçimindedir.  $N(s)$ 'de benzer biçimde yazılabilir. Bu durumda  $G_0(jw)$ 'i aşağıdaki biçimlerde yazabiliriz:

$$G_0(jw) = \frac{N_e + jwN_o}{D_e + jwD_o} = \frac{D_e N_e + D_o N_o w^2}{D_e^2 + D_o^2 w^2} + jw \left[ \frac{D_e N_o - D_o N_e}{D_e^2 + D_o^2 w^2} \right] \quad (3.9)$$

$$G_0(jw) = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} + jw \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (3.10)$$

Burada

$$X(w^2) \triangleq D_e N_e + D_o N_o w^2 \quad (3.11)$$

$$Y(w^2) \triangleq D_e N_o - D_o N_e \quad (3.12)$$

$$Z(w^2) \triangleq D_e^2 + D_o^2 w^2 \quad (3.13)$$

biçimindedir.  $D_e$ ,  $D_o$ ,  $N_e$  ve  $N_o$  gösterimleri sırasıyla  $D_e(-w^2)$ ,  $D_o(-w^2)$ ,  $N_e(-w^2)$  ve  $N_o(-w^2)$  yerine kullanılmıştır. (3.10)'dan  $G_0(jw)$ 'nin sanal kısmının

$$\text{Im}\{G_0(jw)\} = w \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (3.14)$$

biçiminde olduğu görülür.  $v \triangleq w^2$  olarak tanımlayalım.  $Y(v)$ 'nin pozitif reel köklerinin  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_\gamma^*$  olduğu kabul edilirse;  $G_0(jw)$ 'nin Nyquist yer eğrisi,  $i = 1, 2, \dots, \gamma$  için  $w = 0$ ,  $w = \infty$  veya  $w = \pm\sqrt{v_i^*}$ 'da reel eksen geçer. Böylece  $v_{\gamma+1}^* = 0$  ve  $v_{\gamma+2}^* = \infty$  olduğu gösterildiğinde;  $i = 1, 2, \dots, \gamma + 2$  için reel eksenden geçiş noktaları,  $x_i = X(v_i^*)/Z(v_i^*)$  olarak bulunur. Her  $j = 1, 2, \dots, p_i$  için  $x_i < x_{i+1}$  ve  $x_i = X(v_{i,j}^*)/Z(v_{i,j}^*)$  sağlanabilecek biçimde  $(x_i, v_i^*)$  çiftlerini ( $i = 1, 2, \dots, \gamma + 2$  için),  $(x_i, v_{i,j}^*)$  olarak yeniden tanımlarsak; Munro ve diğ. (1999) tarafından verilen aşağıdaki teoremi ifade etmek mümkün olur.

### 3.1.1 Teorem 3.1 (Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi)

Uygun (proper) rasyonel transfer fonksiyonu (3.1) ile verilen doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi düşünelim.  $D(s)$ 'in sanal ekseninde hiç bir köke sahip olmadığını kabul edelim.  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$  ve  $Z(w^2)$  (3.11), (3.12) ve (3.13) bağıntılarında tanımlandığı gibi polinomlar olsun. Ayrıca  $i = 1, 2, \dots, q$  için  $(x_i, v_{i,j}^*)$  çiftleri de, yukarıda tanımlandığı gibi olsun. Üstelik  $Y(v)$ 'nin baş katsayısı  $y_1$  ile gösterilirken;  $Y(v)$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı  $y_0$  ile gösterilsin. O zaman verilen bir  $k \in \mathbb{K}_i \triangleq (-1/x_{i-1}, -1/x_i)$  kazancı için, kapalı çevrim sistemin kararsız kutuplarının sayısı

$$u_i = u_0 + \sum_{t=1}^{i-1} r_t \quad (3.15)$$

ile verilir. Burada  $u_0$ ,  $G_0(s)$ 'nin kararsız kutuplarının sayısıdır. Reel eksenden geçişlerin sayısı

$$r_i = \sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j} \quad (3.16)$$

olup; geçiş yönü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$d_{i,j} = \begin{cases} (1 - (-1)^l) \text{Sgn}(Y^{(l)}(v_{i,j}^*)), & 0 < v_{i,j}^* < \infty & \text{ise} \\ \text{Sgn}(y_0), & v_{i,j}^* = 0 & \text{ise} \\ -\text{Sgn}(y_1), & v_{i,j}^* = \infty & \text{ise} \end{cases} \quad (3.17)$$

Burada  $Y^{(l)}(v)$ ,  $Y(v)$ 'nin  $v_{i,j}^*$  noktasındaki sıfır olmayan birinci türevidir. (3.17)'deki “Sgn” sembolü, işaret fonksiyonunu göstermektedir. (3.15)'den  $u_i = 0$  olan kazanç aralıkları, kararlı kılan kazanç kümelerini verir.  $\text{Sgn}(x_{i-1}) \neq \text{Sgn}(x_i)$  ise, buna ilişkin kararlı kılan kazanç aralığı

$$\mathbb{K}_i \triangleq \underbrace{(-1/x_{i-1}, \infty)}_{K_{ia}} \cup \underbrace{(-\infty, -1/x_i)}_{K_{ib}} \quad (3.18)$$

biçiminde kazanç aralıkları kümesinden oluşur (Söylemez ve diğ., 2003).

Sistemi kararlı yapan kazanç aralıklarının bulunması için Algoritma 3.1 verilmiştir.

### 3.1.2 Algoritma 3.1 (Nyquist teoreminin genelleştirilmesi için)

**Adım 1:** (3.15)'den kararsız kök sayısı  $u_0$  bul ve (3.11), (3.12) ve (3.13)'de  $v \triangleq w^2$  yazarak  $X(v)$ ,  $Y(v)$  ve  $Z(v)$  polinomlarını oluştur.

**Adım 2:** Eşitlik (3.14)'ü sağlayan  $w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*$  frekanslarını yani  $Y(v) = 0$ 'ı sağlayan  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*$  frekansları bul ve bunlar içinden reel pozitif olanlarını seç.

**Adım 3:** Nyquist eğrisinin reel eksenini kesme yerleri için  $x_i = \text{Re}\{G_0(jw_i^*)\}$  veya (3.10)'dan hareketle  $x_i = X(v_i^*)/Z(v_i^*)$  bağıntılarından yararlan.

**Adım 4:**  $x_{i-1} > x_i$  olacak biçimde  $-1/K_{p_i}$  aralıklarını düzenle.

**Adım 5:** (3.17)'den geçişlerinin yönleri bul ve pozitif geçişlerinin toplam sayıları  $r_i$ 'i hesapla.

**Adım 6:**  $u_i = 0$ 'ı sağlayan  $K_{p_i}$  aralıklarını belirle. Bu aralıklar, kapalı çevrimde sistemi kararlı kılan kazanç aralıklarıdır.

### 3.1.2.1 Örnek 3.1

Aşağıdaki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak oransal kazançları hesaplayalım.

$$N(s) = s^2 + 2s + 4, \quad D(s) = s^5 + 11.3s^4 + 37.86s^3 + 39.7s^2 + 19.64s - 2.4 \quad (3.19)$$

(3.19)'da verilen  $N(s)$  ve  $D(s)$  polinomlarında  $s = jw$  yazılarak, tek-çift ayrıştırması yapılırsa

$$N_e(-w^2) = -w^2 + 4, \quad N_o(-w^2) = 2 \quad (3.20)$$

$$D_e(-w^2) = 11.3w^4 - 39.7w^2 - 2.4, \quad D_o(-w^2) = w^4 - 37.86w^2 + 19.64 \quad (3.21)$$

elde edilir. Bu son bağıntılarda  $v \triangleq w^2$  yazılırsa,

$$N_e(-v) = -v + 4, \quad N_o(-v) = 2 \quad (3.22)$$

$$D_e(-v) = 11.3v^2 - 39.7v - 2.4, \quad D_o(-v) = v^2 - 37.86v + 19.64 \quad (3.23)$$

bulunur. (3.11), (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden

$$X(v) = -9.3v^3 + 9.18v^2 - 117.12v - 9.6 \quad (3.24)$$

$$Y(v) = v^3 - 19.26v^2 + 91.68v - 83.36 \quad (3.25)$$

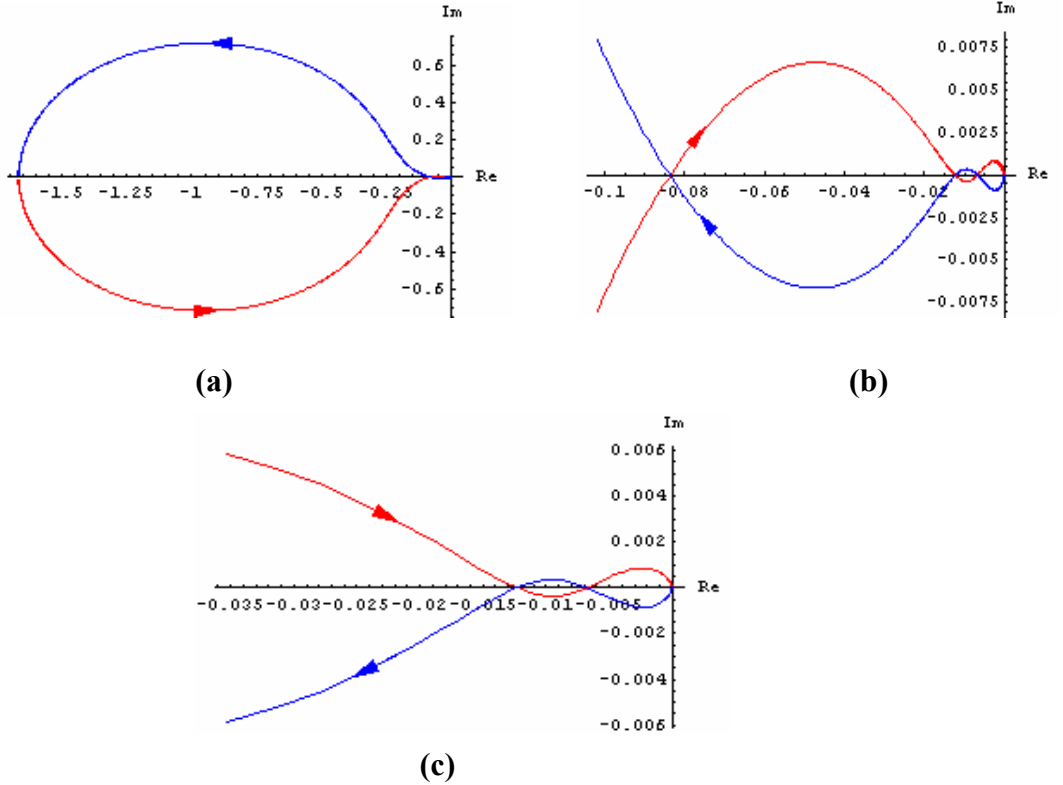
$$Z(v) = v^5 + 51.97v^4 + 575.44v^3 + 34.7092v^2 + 576.29v + 5.76 \quad (3.26)$$

hesaplanır.  $D(s)$ 'nin kökleri -6, -4, 0.1,  $-0.7 \pm j0.714143$  olduğundan;  $u_0 = 1$  olur.  $Y(v)$ 'nin pozitif reel kökleri  $v_1^* = 1.187$ ,  $v_2^* = 5.65552$ ,  $v_3^* = 12.4175$ 'dür. Bu köklere  $v_4^* = 0$  ve  $v_5^* = \infty$ 'da eklenince, bu problem için beş tane reel eksenden geçiş frekansı olur. Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş yerleri sırasıyla  $x_1 = -0.083714$ ,  $x_2 = -0.012308$ ,  $x_3 = -0.00675$ ,  $x_4 = -1.66667$  ve  $x_5 = 0$ 'dir. (3.16) ve (3.17)'den geçiş yönleri  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = -2$ ,  $r_3 = 2$ ,  $r_4 = \text{Sgn}[y_0] = -1$  ve  $r_5 = -\text{Sgn}[y_1] = -1$  bulunur. Beş geçiş frekansı için Teorem 3.1'den bulunan  $\mathbb{K}_i$  kazanç aralıkları, Tablo 3.1'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.1** : Örnek 3.1 İçin Teorem 3.1'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $v_i^*$  | $w_i^*$  | $x_i^*$   | $r_i$ | $u_i$ | $\mathbb{K}_i$            |
|-----|----------|----------|-----------|-------|-------|---------------------------|
| 1   | 0        | 0        | -1.66667  | -1    | 1     | $0 < K_p < 0.6$           |
| 2   | 1.187    | 1.0895   | -0.083714 | 2     | 0     | $0.6 < K_p < 11.9455$     |
| 3   | 5.65552  | 2.37813  | -0.012308 | -2    | 2     | $11.9455 < K_p < 81.2466$ |
| 4   | 12.4175  | 3.52384  | -0.00675  | 2     | 0     | $81.2466 < K_p < 148.146$ |
| 5   | $\infty$ | $\infty$ | 0         | -1    | 2     | $148.146 < K_p < \infty$  |
| 6   | -        | -        | $\infty$  | -     | 1     | $-\infty < K_p < 0$       |

Kapalı çevrim sistemin kararsız kutup sayısının sıfır olmasını yani  $u_i = 0$  olmasını sağlayan  $\mathbb{K}_i$  kazanç aralıkları, kapalı çevrim sistemi kararlı kılan kazanç değerleridir. Tablo 3.1'den kapalı çevrim sisteminin  $K_p \in \mathbb{K}_2 \cup \mathbb{K}_4$  kazanç aralıklarını gösteren  $K_p \in (0.6, 11.9455) \cup (81.2466, 148.146)$  kazançları için kararlı olduğu bulunur. Bu sistemin Şekil 3.2'de farklı skalalar için görülen reel eksenden yineli geçişli Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerler, Tablo 3.1'de bulunan sonuçları doğrulamaktadır.



**Şekil 3.2** : Örnek 3.1'deki Sistemin Farklı Skalalar İçin Nyquist Eğrisi.

### 3.1.2.2 Örnek 3.2

Aşağıdaki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak oransal kazançları hesaplayalım.

$$N(s) = 0.5s^4 + 2.5s^3 + 5s^2 + 24.375s + 31.22 \quad (3.27)$$

$$D(s) = 1.09s^4 - 13.12s^3 + 64.23s^2 - 151.11s + 70.89 \quad (3.28)$$

$N(s)$  ve  $D(s)$  polinomlarında tek-çift ayrıştırması yapılarak  $v \triangleq w^2$  yazılırsa,

$$N_e(-v) = 0.5v^2 - 5v + 31.22, \quad N_o(-v) = -2.5v + 24.375 \quad (3.29)$$

$$D_e(-v) = 1.09v^2 - 64.23v + 70.89, \quad D_o(-w^2) = 13.12v - 151.11 \quad (3.30)$$

bulunur. (3.11), (3.12) ve (3.13) eşitliklerinden

$$X(v) = 0.545v^4 - 70.365v^3 + 1088.2v^2 - 6043.02v + 2213.19 \quad (3.31)$$

$$Y(v) = -9.285v^3 + 328.299v^2 - 2907.99v + 6445.6 \quad (3.32)$$

$$Z(v) = 1.1881v^4 + 32.113v^3 + 314.907v^2 + 13727.7v + 5025.39 \quad (3.33)$$

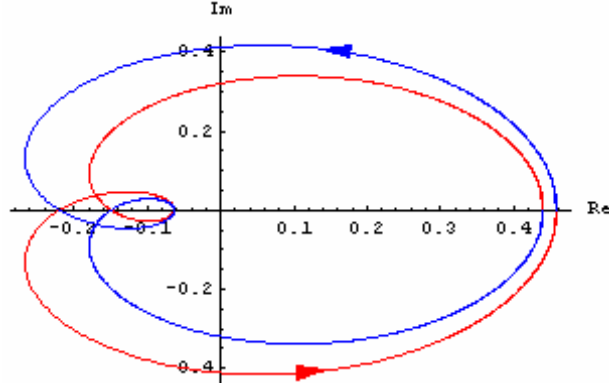
elde edilir.  $D(s)$ 'nin kökleri 0.607524,  $2.94995 \pm j3.26477$  ve 5.52928 olduğu için;  $u_0 = 4$ 'dür yani  $D(s)$ 'nin tüm kökleri, kompleks düzlemde sol yarı düzlemde dir.  $Y(v)$ 'nin pozitif reel kökleri  $v_1^* = 3.38864$ ,  $v_2^* = 8.86778$ ,  $v_3^* = 23.1016$ 'dır. Bu köklere  $v_4^* = 0$  ve  $v_5^* = \infty$ 'da eklenince, beş tane reel eksenden geçiş frekansı olur. Bu geçiş frekansları için Teorem 3.1'den elde edilen sonuçlar ve kazanç aralıkları, Tablo 3.2'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.2 :** Örnek 3.2 İçin Teorem 3.1'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $v_i^*$  | $w_i^*$  | $x_i^*$   | $r_i$ | $u_i$ | $\mathbb{K}_i$             |
|-----|----------|----------|-----------|-------|-------|----------------------------|
| 1   | 23.1016  | 4.80641  | -0.219624 | -2    | 4     | $0 < K_p < 4.566$          |
| 2   | 3.38864  | 1.84083  | -0.149116 | -2    | 2     | $4.566 < K_p < 6.71$       |
| 3   | 8.86778  | 2.97788  | -0.063442 | 2     | 0     | $6.71 < K_p < 15.75$       |
| 4   | 0        | 0        | 0.440402  | 1     | 2     | $K_p > 15.75, K_p < -2.27$ |
| 5   | $\infty$ | $\infty$ | 0.457     | 1     | 3     | $-2.27 < K_p < -2.188$     |
| 6   | -        | -        | $\infty$  | -     | 4     | $-2.188 < K_p < 0$         |



Tablo 3.2'den kapalı çevrim sisteminin  $K_p \in \mathbb{K}_3$  kazanç aralıklarını veren  $6.71 < K_p < 15.75$  kazançlar için kararlı olduğu bulunur. Bu sistemin Şekil 3.3'de görülen Nyquist eğrisi, Tablo 3.2'de bulunan sonuçları teyit etmektedir.



**Şekil 3.3 :** Örnek 3.2'deki Sistemin Nyquist Eğrisi.

### 3.1.2.3 Örnek 3.3

Aşağıdaki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan kazançları hesaplayalım.

$$N(s) = 0.143s + 0.145 \quad D(s) = s^3 + s^2 + 2.64s + 2.32 \quad (3.34)$$

Bu sistem için

$$X(v) = -0.143v^2 + 0.23252v + 0.3364, \quad Y(v) = 0.002v - 0.05104 \quad (3.35)$$

$$Z(v) = v^3 - 4.28v^2 + 2.3296v + 5.3824 \quad (3.36)$$

olarak bulunur.  $D(s)$ 'nin köklerinin hepsi sol yarı düzlemde olduğundan;  $u_0 = 0$  'dır ve sistem açık çevrim kararlıdır.  $Y(v)$ 'nin pozitif reel kökü  $v_1^* = 25.52$  'dir. Bu köklere  $v_2^* = 0$  ve  $v_3^* = \infty$  'da eklenince, üç tane reel eksenden geçiş frekansı olur. Bu geçiş frekansları için Teorem 3.1'den bulunan sonuçlar, Tablo 3.3'de gösterilmiştir.

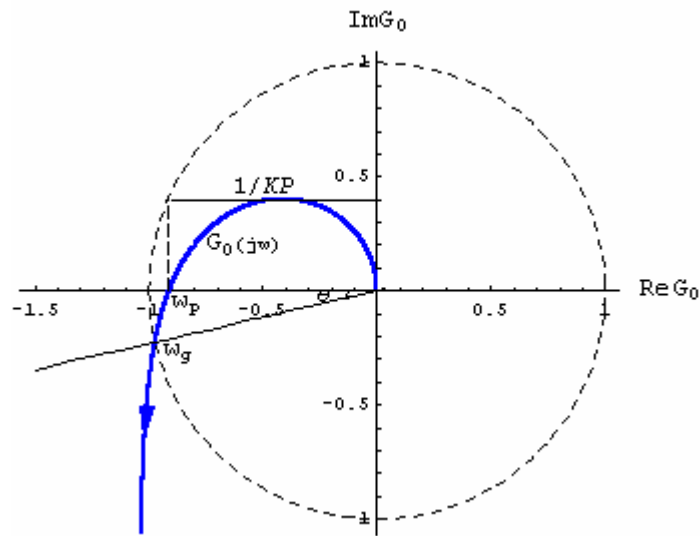
**Tablo 3.3 :** Örnek 3.3 İçin Kapalı Çevrimde Sistemi Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $v_i^*$  | $w_i^*$  | $x_i^*$  | $r_i$ | $u_i$ | $\mathbb{K}_i$        |
|-----|----------|----------|----------|-------|-------|-----------------------|
| 1   | 25.52    | 5.05173  | -0.00625 | 2     | 0     | $0 < K_p < 160$       |
| 2   | $\infty$ | $\infty$ | 0        | -1    | 2     | $160 < K_p < \infty$  |
| 3   | 0        | 0        | 0.0625   | -1    | 1     | $-\infty < K_p < -16$ |
| 4   | -        | -        | $\infty$ | -     | 0     | $-16 < K_p < 0$       |

Tablo 3.3'den kapalı çevrim sistemin  $K_p \in \mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_4$  kazanç aralıklarından oluşan  $K_p \in (-16, 160)$  kazançları için kararlı kılınabilir olduğu gözlenmektedir.

### 3.2 Kazanç Payı ve Faz Payı Kavramları

Zaman tanım bölgesinde doğrusal zamanla değişmeyen tek girişli-tek çıkışlı kontrol sisteminin görelî kararlılığı en büyük üst aşım, yerleşme zamanı vs. gibi parametrelerle ölçülür. Frekans tanım bölgesinde ise görelî kararlılık, çevrim transfer fonksiyonu  $G_0(s)$ 'nin Nyquist eğrisinin ölçümleriyle belirlenebilir. Genel olarak Nyquist eğrisinin kritik nokta  $(-1, j0)$ 'a yakınlığı, kapalı çevrim sisteminin kararlılık mertebesini verir. Örneğin Şekil 3.4'den Nyquist eğrisi verilen sistem için çevrim kazancı arttıkça; Nyquist eğrisi ile negatif reel eksenin kesişim noktası, kritik noktaya doğru yaklaşır, kritik noktadan geçer ve sonra kritik noktayı çevreler ve böylece kararsızlık oluşur.



**Şekil 3.4 :** Kararlı Bir Sistem İçin Kazanç Payı (KP) ve Faz Payı (FP).

Kazanç payı, Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim yeriyle  $(-1, j0)$  kritik noktası arasındaki mesafeyi ölçmek için kullanılır (Shenton ve Shafiei, 1994). Kesişme, orijinden  $|G_0(jw_p)|$  kadar uzak mesafede olursa; kazancın  $1/|G_0(jw_p)|$  çarpanı ile çarpılması, kapalı çevrim sistemini sınırda kararlı yapacaktır.  $1/|G_0(jw_p)|$  çarpanı, kazanç payıdır. Burada  $w_p$  frekansı, fazın  $180^\circ$  olduğu ( $\angle G_0(jw_p) = 180^\circ$ ) frekanstır ve faz geçiş frekansı olarak adlandırılır.  $w_p$  frekansına karşı düşen  $|G_0(jw_p)|$  modülü için dB cinsinden kazanç payı,

$$KP_{dB} \triangleq 20 \log \left( 1 / |G_0(j\omega_p)| \right) = -20 \log |G_0(j\omega_p)| \quad (3.37)$$

biçiminde yazılır. Genel olarak kazanç payı, kararlı bir sistemin kararsız olmadan kazancının ne kadar arttırılabileceğini gösterir.

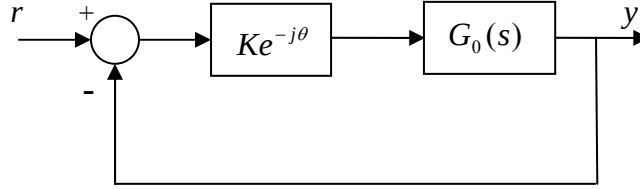
Frekanstan bağımsız kompleks bir  $Ke^{j\theta}$  kazancı kullanılarak Şekil 3.5 ile verilen bir sistemin kazanç ve faz payı belirlenebilir (Bayhan ve Söylemez, 2006a).  $K = 1$  ve  $\theta = 0$  için kapalı çevrim sistemin kararlı olduğunu kabul edelim. O zaman kazanç payı,

$$KP \triangleq \min_{\substack{G_0(j\omega_p) = -1/K \\ K \geq 1}}(K) \quad (3.38)$$

olarak tanımlanabilir. (3.38)'den hareketle kazanç payı  $dB$  cinsinden

$$KP_{dB} = 20 \log(KP) \quad (3.39)$$

biçiminde yazılabilir.



**Şekil 3.5 :** Kazanç-Faz Belirsizliğine Sahip Kapalı Çevrim Sistem.

Dikkat edilirse (3.38) ile verilen kazanç payı ifadesi, yalnızca 1'den büyük kazanç belirsizliklerini ele alır ve bu nedenle  $dB$  cinsinden kazanç payı negatif olmayan bir sayıdır yani  $KP_{dB} \geq 0$  olur. Bu durum, bazen yanıltıcı olabilir; çünkü  $K \leq 1$  için kazanç payı, ne kadar kazanç belirsizliğine izin verilebileceği bilgisini içermez.  $0 < K \leq 1$  için kazanç belirsizlikleri düşünüldüğünde; “negatif kazanç payı” ( $KP^-$ ) için,

$$KP^- \triangleq \max_{\substack{G_0(j\omega_p) = -1/K \\ 0 < K \leq 1}}(K) \quad (3.40)$$

olarak tanımlanabilir. O halde  $dB$  cinsinden negatif kazanç payı

$$KP_{dB}^- \triangleq 20 \log(KP^-) \quad (3.41)$$

olacaktır. Dikkat edilecek olursa  $KP_{dB}^-$ , her zaman negatif değerler olacaktır. Sonuç olarak  $\theta = 0$  olduğu durumda  $KP^- < K < KP$  için kapalı çevrim sistem, kararlıdır. Bu noktada logaritmik skalada hem pozitif hem de negatif yönde izin verilebilen en büyük kazanç belirsizliğini göstermek için “simetrik kazanç payı” ( $KP^*$ )’ı dB cinsinden

$$KP_{dB}^* \triangleq \min(-KP_{dB}^-, KP_{dB}) = 20 \log(KP^*) \quad (3.42)$$

olarak tanımlayabiliriz. Dikkat edilecek olursa  $KP_{dB}^*$ , her zaman pozitif değerler alır ve kararlılık etkilenmeksizin çevrim kazancının ne kadar artırılabilceğini veya azaltılabileceğini gösterir.

Kazanç payı,  $KG_0(s)$ ’nin Nyquist eğrisinin reel ekseninde  $(-1, j0)$  kritik noktasını kesmesi için  $K$ ’nın alması gereken en küçük değeri gösterir. Diğer bir deyişle kazanç payı,  $G_0(s)$ ’nin Nyquist eğrisinin reel ekseninde  $(-1/K, j0)$  kritik noktasını kesmesi için  $K$ ’nın alması gereken minimum değeridir.

Faz payı da göreceli kararlılığın bir ölçüsüdür. Modülün 1 yani 0 dB olduğu  $w_g$  frekansına kazanç geçiş frekansı denir. Buna göre faz payı,  $|G_0(jw_g)|=1$  yapan  $w_g$  frekansındaki faz  $\angle G_0(jw_g)$  olmak üzere

$$FP \triangleq \angle G_0(jw_g) - 180^\circ \quad (3.43)$$

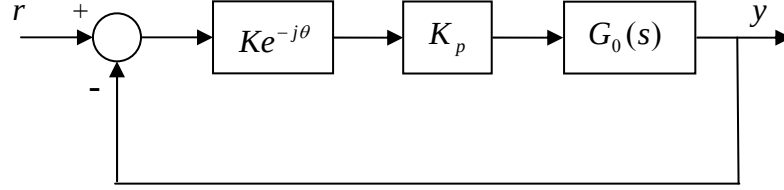
olarak tanımlanır. Faz payı, Nyquist eğrisinin  $(-1, j0)$  kritik noktasını çevrelemesi için kaç derece döndürülmesi gerektiğini belirleyen açıdır. Diğer bir ifadeyle faz payı, kapalı çevrimde kararsızlığa neden olmaksızın izin verilebilen maksimum faz belirsizliği olarak da tanımlanabilir ve

$$FP \triangleq \min_{\substack{G_0(jw_g)=e^{j(180+\theta)} \\ 0 \leq \theta \leq 180^\circ}}(\theta) \quad (3.44)$$

olarak ifade edilebilir. Reel katsayılı rasyonel transfer fonksiyonuna sahip sistemlerde Nyquist eğrisi, reel eksene göre simetrik olduğu için; faz payı hem pozitif hem de negatif faz belirsizliklerini içerir. Bu nedenle negatif faz payı kavramını tanımlamaya gerek yoktur. Kapalı çevrim sistemin  $K=1$  ve  $-FP < \theta < FP$  için kararlı olduğunu ifade edebiliriz.

### 3.3 İstenen Kazanç Payı ve Faz Payını Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması

İstenen faz payını sağlayan bütün oransal kazançları bulmak için (3.2)'deki  $N(s)$  polinomu kompleks katsayılı olacağından Teorem 3.1'e bazı özel durumlar eklenmiştir. İstenen kazanç ve faz payını bulmak için kazanç-faz belirsizliğine sahip Şekil 3.5'deki sisteme  $K_p$  kazanç kontrolörü ilave edilerek Şekil 3.6'daki geri beslemeli kontrol sistemi elde edilmiştir.



Şekil 3.6 : Kazanç-Faz Belirsizliğine Sahip Bir Sistemin Oransal Kontrolü.

#### 3.3.1 İstenen kazanç payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı

##### 3.3.1.1 Lemma 3.1 (Bayhan ve Söylemez, 2007a)

Verilen bir  $G_0(s)$  sistemini kararlı hale getiren tüm kazançlara ilişkin aralıklar  $\mathbb{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_t\}$ , Teorem 3.1 yardımıyla  $i=1,2,\dots,t$  için  $\mathbb{K}_i \triangleq (K_{i\min}, K_{i\max})$  şeklinde bulunmuş olsun. İstenilen  $(KP)_{\min}$  kazanç payı kısıtlamasını sağlayan tüm kararlı kılan kazançlar,  $\bar{K} = \{\bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_t\}$  olmak üzere

$$\bar{K}_i = \begin{cases} \emptyset, & K_{i\min} > \frac{K_{i\max}}{(KP)_{\min}} \text{ ise} \\ \left( K_{i\min}, \frac{K_{i\max}}{(KP)_{\min}} \right), & \text{Aksi durumda} \end{cases} \quad (3.45)$$

aralıkları ile belirlenir. Burada  $\emptyset$ , boş kümeyi göstermekte olup; tüm  $\bar{K}_i$  aralıklarının boş küme olması durumu istenilen kazanç payını sağlayacak oransal kontrolör olmaması şeklinde yorumlanır (Bayhan ve Söylemez, 2007a).

##### 3.3.1.2 Lemma 3.1'in ispatı

Kapalı çevrim sistemi kararlı hale getiren en küçük kazancın  $K_{i\min}$  ile verildiği ayrıca  $K_p \in \mathbb{K}_i \triangleq (K_{i\min}, K_{i\max})$  arasında seçildiği zaman kapalı çevrim sistemin kararlı

olacağı ve tanım gereği kazanç payının  $K_{i\max}/K_p$  değeri ile ifade edilebileceği görölerek ispat tamamlanır.

Benzer sonuçlar, negatif kazanç payı ve simetrik kazanç payı için sırasıyla aşağıdaki iki lemma ile verilebilir.

### 3.3.1.3 Lemma 3.2 (Bayhan ve Söylemez)

Verilen bir maksimum negatif kazanç payı  $(KP^-)_{\max}$  kısıtlamasını sağlayan tüm kararlı kılan kazançlar  $\bar{K} = \{ \bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_t \}$  olmak üzere

$$\bar{K}_i = \begin{cases} \emptyset, & K_{i\max} < \frac{K_{i\min}}{(KP^-)_{\max}} \text{ ise} \\ \left( \frac{K_{i\min}}{(KP^-)_{\max}}, K_{i\max} \right), & \text{Aksi durumda} \end{cases} \quad (3.46)$$

aralıkları ile belirlenir.

### 3.3.1.4 Lemma 3.3 (Bayhan ve Söylemez)

Verilen bir minimum simetrik kazanç payı  $(KP^*)_{\min}$  kısıtlamasını sağlayan tüm kararlı kılan kazançlar  $\bar{K} = \{ \bar{K}_1, \bar{K}_2, \dots, \bar{K}_t \}$  olmak üzere

$$\bar{K}_i = \begin{cases} \emptyset, & (KP^*)_{\min}^2 < \frac{K_{i\max}}{K_{i\min}} \text{ ise} \\ \left( K_{i\min} (KP^*)_{\min}, \frac{K_{i\max}}{(KP^*)_{\min}} \right), & \text{Aksi durumda} \end{cases} \quad (3.47)$$

aralıkları ile belirlenir.

## 3.3.2 İstenen faz payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı

İstenen faz payı  $\tilde{\theta}$  için (3.1) ile verilen sistem,

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{e^{-j\tilde{\theta}} N(s)}{D(s)} = \frac{(\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta}) N(s)}{D(s)} \triangleq \frac{\tilde{N}(s)}{D(s)} \quad (3.48)$$

biçiminde faz payına bağımlı bir sistem olarak yazılabilir. Dikkat edilirse (3.48) ile verilen yeni sistemin pay polinomu  $\tilde{N}(s)$ , kompleks katsayıdır ve bu nedenle sistemi kararlı kılacak tüm kazançları bulabilmek için Teorem 3.1'in genişletilerek düzenlenmesi gerekir (Bayhan ve Söylemez, 2007a; Bayhan ve Söylemez, 2007b ). Bu amaçla (3.48)'de  $s = jw$  yazılırsa

$$\tilde{G}_0(jw) = \frac{\tilde{N}(jw)}{D(jw)} = \frac{(\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta})N(jw)}{D(jw)} = (\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta})G_0(jw) \quad (3.49)$$

bulunur. (3.49)'da (3.10) yazılıp düzenlenirse

$$\tilde{G}_0(jw) = \frac{(X(w^2) \cos \tilde{\theta} + wY(w^2) \sin \tilde{\theta})}{Z(w^2)} + j \frac{(wY(w^2) \cos \tilde{\theta} - X(w^2) \sin \tilde{\theta})}{Z(w^2)} \quad (3.50)$$

bulunur. Burada aşağıdaki iki polinomu tanımlayalım:

$$\tilde{X}(w) \triangleq X(w^2) \cos \tilde{\theta} + wY(w^2) \sin \tilde{\theta} \quad (3.51)$$

$$\tilde{Y}(w) \triangleq wY(w^2) \cos \tilde{\theta} - X(w^2) \sin \tilde{\theta} \quad (3.52)$$

(3.51) ve (3.52)'i (3.50)'de yazarsak

$$\tilde{G}_0(jw) = \frac{\tilde{X}(w)}{Z(w^2)} + j \frac{\tilde{Y}(w)}{Z(w^2)} \quad (3.53)$$

biçimine gelir. Teorem 3.1'e benzer olarak  $\tilde{Y}(w)$ 'nin pozitif reel kökleri  $\tilde{w}_1^*, \tilde{w}_2^*, \dots, \tilde{w}_\gamma^*$  olmak üzere;  $i=1,2,\dots,\gamma$  için reel eksenden geçiş noktaları,  $\tilde{x}_i = \tilde{X}(\tilde{w}_i^*) / Z(\tilde{w}_i^{*2})$  olarak bulunur. İstenen faz payını sağlayacak ve kapalı çevrimde sistemi bu kısıt için kararlı kılacak kazançları bulmak amacıyla Teorem 3.1 genişletilmiş aşağıdaki teoreme dönüştürülmüştür.

### 3.3.2.1 Teorem 3.2 (Bayhan ve Söylemez, 2007b)

Uygun (proper) bir rasyonel transfer fonksiyonu (3.1) ile verilen doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi düşünelim.  $D(s)$ 'nin sanal eksende hiç bir köke sahip olmadığını kabul edelim.  $\tilde{X}(w)$  ve  $\tilde{Y}(w)$ , (3.51) ve (3.52) bağıntılarında tanımlanan polinomlar olsun.  $i=1,2,\dots,\gamma+1$  için  $(\tilde{x}_i, \tilde{w}_{i,j}^*)$  çiftleri, yukarıdaki gibi tanımlansın. Verilen bir  $k \in \mathbb{K}_i \triangleq (-1/\tilde{x}_{i-1}, -1/\tilde{x}_i)$  kazancı için, kapalı çevrim sistemin kararsız kutuplarının sayısı

$$\tilde{u}_i = u_0 + \sum_{t=1}^{i-1} \tilde{r}_t \quad (3.54)$$

ile verilir. Burada  $u_0$ ,  $G_0(s)$ 'nin kararsız kutuplarının sayısıdır. Reel eksen den geçişlerin sayısı,

$$\tilde{r}_i = \sum_{i=1}^{p_i} \tilde{d}_i \quad (3.55)$$

olup; geçiş yönü,

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} \frac{(1-(-1)^l)}{2} \text{Sgn}(\tilde{Y}^{(l)}(\tilde{w}_i^*)), & 0 < \tilde{w}_i^* < \infty \text{ ise} \\ -\text{Sgn}(\tilde{y}_1), & \tilde{w}_i^* = \infty \text{ ise} \end{cases} \quad (3.56)$$

ile tanımlıdır. Kesin nedensel (strictly proper) sistemlerin geçiş yönü hesabında  $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin  $\tilde{w} \rightarrow \infty$  için, orijine gidiş açısı  $\psi$  önem kazanır.  $D(s)$ 'in derecesi  $n$  ve  $N(s)$ 'nin derecesi  $m$  olmak üzere; bu açı  $\psi \triangleq (n-m)\pi/2$  bağıntısıyla hesaplanır. (3.56)'da verilen geçiş yönü hesabı için sistem kesin nedensel ise ve  $\psi = \pi/2$  veya  $\psi = 3\pi/2$  ise;  $(\tilde{x}_i^*, \tilde{w}_i^*)$  çiftlerine,  $\tilde{w}_i^* = \infty$  ve  $\tilde{x}_i^* = 0$ 'da eklenir. Sistem tersi de nedensel (biproper) ise; (3.56)'da  $\tilde{w}_i^* = \infty$  için olan ikinci koşul olmayacaktır. (3.56)'daki  $\tilde{Y}^{(l)}(\tilde{w}_i^*)$ ,  $\tilde{Y}(w)$ 'nin  $\tilde{w}_i^*$  noktasındaki sıfır olmayan birinci türevini gösterirken;  $\tilde{y}_1$  ise  $\tilde{Y}(w)$ 'nin baş katsayısını gösterir. O zaman verilen bir faz payı  $FP = \tilde{\theta} > 0$  kısıtlamasını sağlayan tüm kararlı kılan kazanç aralıkları,  $\tilde{u}_i = 0$  olan kazanç aralıklarıdır. İstenen faz payı için Nyquist eğrisi, döndürülmüş olduğundan ve artık simetrik olmayacağından; yeni Nyquist eğrisinin reel eksen den geçişleri, çiftler halinde olmayacaktır.

### 3.3.2.2 Uyarı 3.1

İstenen kazanç payı ve istenen faz payı kriterlerini aynı anda sağlayan oransal kontrolörleri bulmak için her iki kriteri ayrı ayrı sağlayan oransal kontrolörlerin ortak kümesi alınır.

### 3.3.2.3 Örnek 3.4 (Verilen KP ve FP'nı sağlayan kazançlar için)

Örnek 3.1'de verilen sistem için 5dB kazanç payını ve 20° ile 60° faz paylarını sağlayan tüm kazançları hesaplayalım.



5dB kazanç payı için sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazançları bulmak için Lemma 3.1'den yararlanabiliriz. Bu amaçla (3.39)'dan

$$KP_{dB} = 5dB = 20 \log(KP)_{\min} \Rightarrow (KP)_{\min} = 1.7783 \quad (3.57)$$

bulunur. Tablo 3.1'den kapalı çevrim sisteminin  $K_p \in \mathbb{K}_2 \cup \mathbb{K}_4$  kazançlarını oluşturan  $\mathbb{K}_2 = (K_{2\min}, K_{2\max}) = (0.6, 11.9455)$  ve  $\mathbb{K}_4 = (K_{4\min}, K_{4\max}) = (81.2466, 148.146)$  kazanç aralıkları için kararlı olduğu göz önüne alınarak; Lemma 3.1'den

$$\overline{K_2} = \left( K_{2\min}, \frac{K_{2\max}}{(KP)_{\min}} \right) = (0.6, 6.7174) , \quad \overline{K_4} = (81.2466, 83.3077) \quad (3.58)$$

bulunur.  $K_p \in (0.6, 6.7174) \cup (81.2466, 83.3077)$  kazanç aralıklarında kapalı çevrim sistem, en az 5dB'lik kazanç payı ile birlikte kararlı olacaktır.

$\tilde{\theta} = 20^\circ$  faz payı için sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazançları bulmada Teorem 3.2'den yararlanabiliriz. Öncelikle  $e^{-j20} = \cos 20 - j \sin 20 = 0.93969 - j0.342$  ifadesinden istenilen faz payı için (3.51) ve (3.52)'den

$$\tilde{X}(w) = -9.02 - 28.51w - 110.056w^2 + 31.35w^3 + 8.63w^4 - 6.59w^5 - 8.74w^6 + 0.342w^7 \quad (3.59)$$

$$\tilde{Y}(w) = 3.28 - 78.33w + 40.06w^2 + 86.15w^3 - 3.139w^4 - 18.098w^5 + 3.18w^6 + 0.939w^7 \quad (3.60)$$

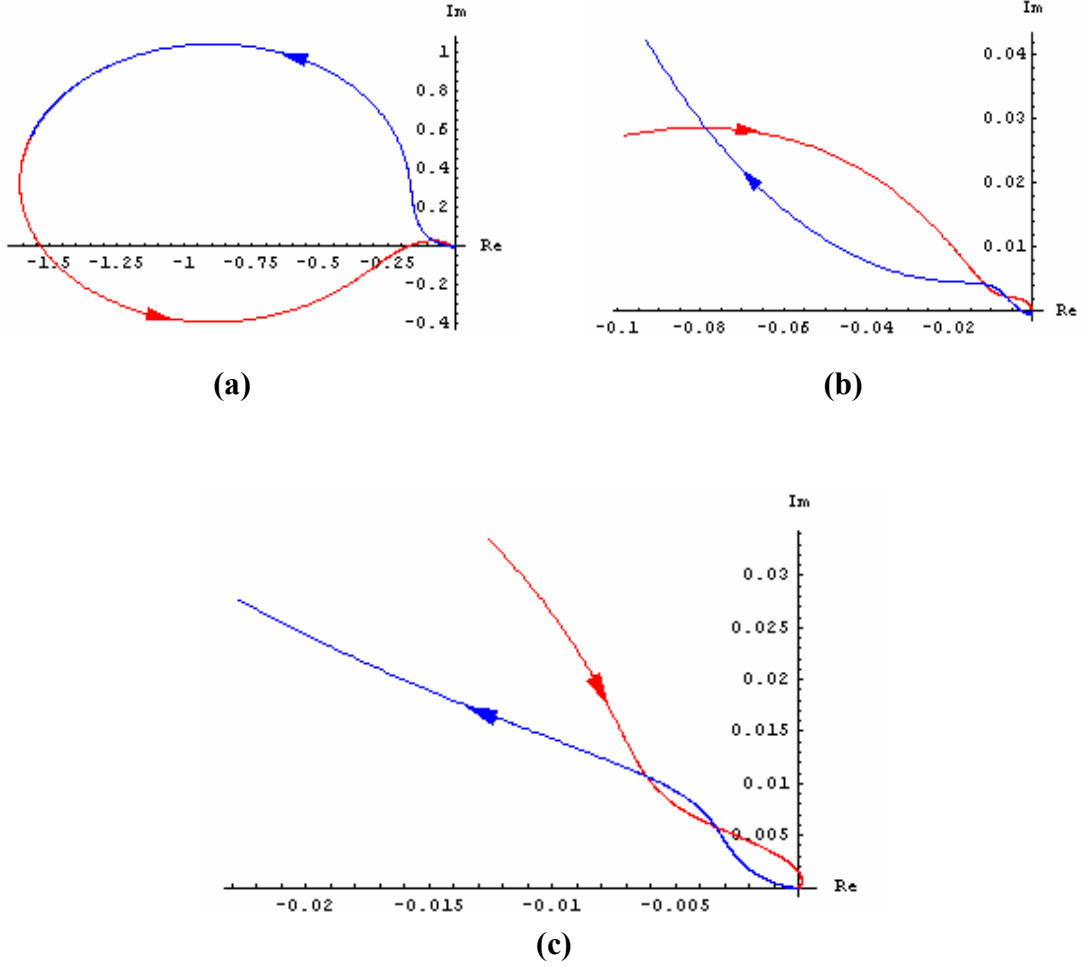
olarak hesaplanır. Teorem 3.2'den  $\tilde{Y}(w)$ 'nin reel kökleri  $\tilde{w}_1^* = -6.09176$ ,  $\tilde{w}_2^* = 0.0429435$  ve  $\tilde{w}_3^* = 0.76177$ 'dir. (3.19)'daki kesin nedensel sistemde  $\psi = 3\pi/2$  olduğundan;  $\tilde{w}_4^* = \infty$  frekansı için de reel eksenden geçiş olacağından; dört tane reel eksenden geçiş frekansı olur.  $\tilde{\theta} = 20^\circ$  için dönmüş Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş yerleri sırasıyla  $\tilde{x}_1 = -0.002505$ ,  $\tilde{x}_2 = -1.53099$ ,  $\tilde{x}_3 = -0.172634$  ve  $\tilde{x}_4 = 0$ 'dır. Geçiş yönleri ise  $\tilde{r}_1 = 1$ ,  $\tilde{r}_2 = -1$ ,  $\tilde{r}_3 = 1$  ve  $\tilde{r}_4 = -1$  olarak bulunur. Bu geçiş frekansları için bulunan  $\mathbb{K}_i$  kazanç aralıkları, Tablo 3.4'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.4 :** Örnek 3.4'de  $FP=20^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$           |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------------------|
| 1   | 0.0429435       | -1.53099        | -1            | 1             | $0 < K_p < 0.65317$      |
| 2   | 0.76177         | -0.172634       | 1             | 0             | $0.65317 < K_p < 5.7926$ |
| 3   | -6.09176        | -0.002505       | 1             | 1             | $5.7926 < K_p < 399.202$ |
| 4   | $\infty$        | 0               | -1            | 2             | $399.202 < K_p < \infty$ |
| 5   | -               | $\infty$        | -             | 1             | $-\infty < K_p < 0$      |

$20^\circ$  faz payı için kapalı çevrim sistemin kararsız kutup sayısının sıfır olmasını sağlayan  $K_i$  kazanç aralıkları, Tablo 3.4'den  $0.65317 < K_p < 5.7926$  olarak bulunur.

Bu sistem için  $5dB$  kazanç payı ve  $20^\circ$  faz payını birlikte sağlayan kazanç kümesini veren kazançlar,  $20^\circ$  faz payını sağlayan kazançlar olduğu görülür. Şekil 3.7 (a), (b), (c)'de  $20^\circ$  faz payı için döndürülmüş yineli geçişli Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerler, Tablo 3.4'de bulunan sonuçlarla uyushmaktadır.



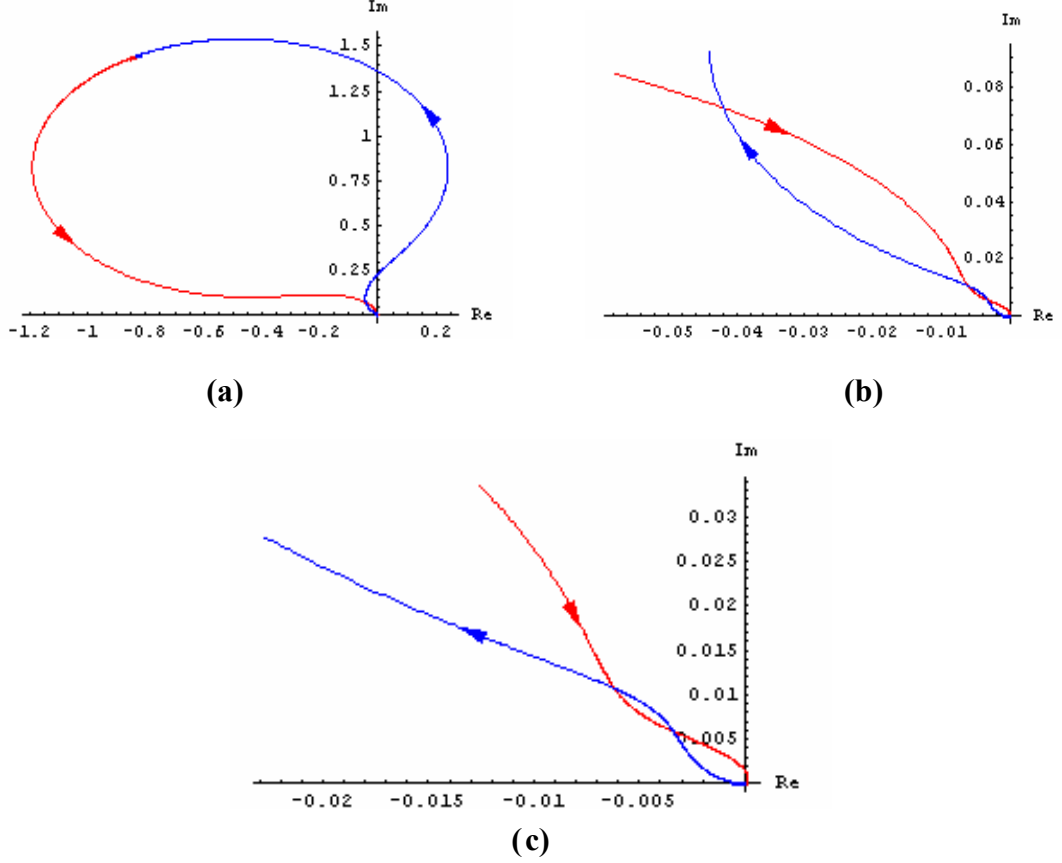
**Şekil 3.7 :** Örnek 3.4'de  $FP = 20^\circ$  İçin Dönmüş Yineli Geçişli Nyquist Eğrisi.

$\tilde{\theta} = 60^\circ$  için Teorem 3.2'nin kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 3.5'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.5 :** Örnek 3.4'de  $FP=60^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $K_i$                     |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------------------|
| 1   | -17.1607        | -0.0001807      | 1             | 1             | $0 < K_p < 5534.034$      |
| 2   | $\infty$        | 0               | -1            | 2             | $5534.034 < K_p < \infty$ |
| 3   | -               | $\infty$        | -             | 1             | $-\infty < K_p < 0$       |

Tablo 3.5’den görüldüğü üzere  $60^\circ$  faz payı için bu sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazanç değeri yoktur. Doğal olarak bu sistem için  $5dB$  kazanç payı ve  $60^\circ$  faz payını birlikte sağlayan kazanç kümesi de yoktur. Şekil 3.8 (a), (b), (c)’de  $60^\circ$  döndürülmüş yineli geçişli Nyquist eğrisi verilmiştir.



Şekil 3.8 : Örnek 3.4’de  $FP=60^\circ$  İçin Dönmüş Yineli Geçişli Nyquist Eğrisi.

### 3.3.2.4 Örnek 3.5 (Verilen KP ve FP’nı sağlayan kazançlar için)

Tersi de nedensel olan Örnek 3.2’de verilen sistem için  $5dB$  kazanç payını ve  $70^\circ$  ile  $10^\circ$  faz paylarını sağlayan tüm kazançları hesaplayalım.

$KP_{dB} = 5dB$  kazanç payı için sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak kazançları bulmada (3.57)’den  $(KP)_{\min} = 1.7783$  olarak bulunduğu göz önüne alınarak ve Tablo 3.2’den kapalı çevrim sisteminin  $K_p \in \mathbb{K}_3 = (K_{3\min}, K_{3\max}) = (6.71, 15.75)$  kazançları için kararlı olduğu dikkate alınarak; Lemma 3.1’den  $5dB$  kazanç payı için

$$\overline{K_3} = (6.71, 8.8568) \quad (3.61)$$

kazanc aralıklarında kapalı çevrim sistem, kararlı olacaktır.

$\tilde{\theta} = 70^\circ$  için Teorem 3.2'nin kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 3.6'da verilmiştir. Sistem tersi de nedensel olduğundan; (3.56)'da  $\tilde{w}_i^* = \infty$  için olan ikinci koşul olmayacaktır.

**Tablo 3.6 :** Örnek 3.5'de  $FP=70^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$              |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|-----------------------------|
| 1   | 8.56879         | -0.385629       | -1            | 4             | $0 < K_p < 2.59$            |
| 2   | -0.820568       | -0.280562       | -1            | 3             | $2.59 < K_p < 3.564$        |
| 3   | 0.460587        | 0.360168        | 1             | 2             | $3.564 < K_p, -2.776 > K_p$ |
| 4   | -13.7418        | 0.431431        | 1             | 3             | $-2.776 < K_p < -2.3179$    |
| 5   | -               | $\infty$        | -             | 4             | $-2.3179 < K_p < 0$         |

Tablo 3.6'dan görüldüğü üzere  $70^\circ$  faz payı için bu sistemi kapalı çevrimde kararlı kılabacak kazanç değeri yoktur; bu nedenle 5dB kazanç payı ve  $70^\circ$  faz payını birlikte sağlayan kazanç kümesi de yoktur.

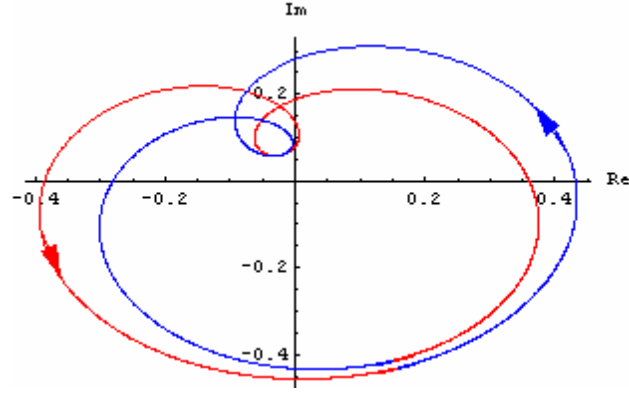
$\tilde{\theta} = 10^\circ$  için elde edilen sonuçlar ise, Tablo 3.7'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.7 :** Örnek 3.5'de  $FP=10^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$                  |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------------------------|
| 1   | 5.20146         | -0.251885       | -1            | 4             | $0 < K_p < 3.970066$            |
| 2   | -4.41234        | -0.182829       | -1            | 3             | $3.970066 < K_p < 5.469592$     |
| 3   | -1.64254        | -0.169564       | -1            | 2             | $5.469592 < K_p < 5.89748$      |
| 4   | 2.08992         | -0.124508       | -1            | 1             | $5.89748 < K_p < 8.03161$       |
| 5   | 2.80351         | -0.067545       | 1             | 0             | $8.03161 < K_p < 14.80488$      |
| 6   | -3.13778        | -0.066093       | 1             | 1             | $14.80488 < K_p < 15.1302$      |
| 7   | 0.06003         | 0.438471        | 1             | 2             | $15.1302 < K_p, -2.28065 > K_p$ |
| 8   | -97.6082        | 0.458178        | 1             | 3             | $-2.28065 < K_p < -2.18256$     |
| 9   | -               | $\infty$        | -             | 4             | $-2.18256 < K_p < 0$            |

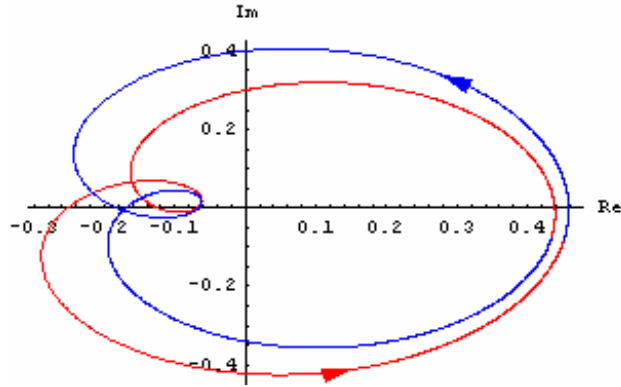
Tablo 3.7'den  $10^\circ$  faz belirsizliği için kapalı çevrim sistemi kararlı kılan kazançlar  $8.03161 < K_p < 14.80488$  aralığında hesaplanmıştır. Bu sistem için 5dB kazanç payı ve  $10^\circ$  faz payını birlikte sağlayan kazanç kümesi  $8.03161 < K_p < 8.8568$  değerleridir.

Şekil 3.9'da görüldüğü gibi  $70^\circ$  faz payı için döndürülmüş Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerler, Tablo 3.4'de bulunan sonuçlarla uyushmaktadır.



**Şekil 3.9 :** Örnek 3.5’de  $FP=70^\circ$  İçin Nyquist Eğrisi.

Şekil 3.10’da ise bu sistemin  $10^\circ$  döndürülmüş Nyquist eğrisi verilmiştir.



**Şekil 3.10 :** Örnek 3.5’de  $FP=10^\circ$  İçin Nyquist Eğrisi.

$70^\circ$  faz payı için sistemi kararlı kılan kazanç değerleri yokken;  $10^\circ$  faz payı için sistemi kararlı kılan kazanç aralığı vardır. O halde burada sistemin kararlılığını bozmadan kazanç payı ve faz payının en çok ne kadar değer alabileceği sorusu akla gelmektedir. Bu değerlere maksimum kazanç payı ( $\max KP$ ) ve maksimum faz payı ( $\max FP$ ) denilir. Önceki bölümlerde verilen sonuçlar yardımıyla bu değerlerin hesap yöntemleri izleyen iki bölümde verilmiştir.

### 3.4 Maksimum Kazanç Payı Hesabı

Maksimum kazanç payını hesaplamak için Teorem 3.1’den bulunan ve kapalı çevrim sistemi kararlı kılan kazanç değerlerinin mutlak değerce büyük olan üst sınırının alt sınıra olan oranından yararlanılır. Kararlı kılan birkaç kazanç aralığının olması durumunda, her kazanç aralığının ayrı ayrı oranlarının içinde en büyük olanı, maksimum kazanç payıdır (Bayhan ve Söylemez, 2007b). Bu, matematiksel olarak aşağıdaki lemma ile ifade edilebilir.

### 3.4.1 Lemma 3.4 (Bayhan ve Söylemez, 2007b)

$G_0(s)$  sistemini kararlı kılan  $\mathbb{K}_i \triangleq (K_{i\min}, K_{i\max})$  kazanç aralıklarının her biri için, kazanç payları

$$KP_i \triangleq \frac{\max(|K_{i\min}|, |K_{i\max}|)}{\min(|K_{i\min}|, |K_{i\max}|)} \quad (3.62)$$

olarak tanımlanırsa; maksimum kazanç payı,

$$\max KP = \max_i \{KP_i\} \quad (3.63)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Dikkat edilirse  $i \in [1, 2, \dots, t]$  için  $\max KP$ 'na  $K_p = K_{i\min}$  kazancında erişilir. Fakat  $K_p = K_{i\min}$  ise; negatif kazanç payı ( $KP^-$ ), 0dB olur. Yani birden küçük kazanç belirsizliklerine ( $K < 1$ ) müsamaha edilmez.

Benzer sonuçlar, minimum negatif kazanç payı  $\min(KP^-)$  ve maksimum simetrik kazanç payı  $\max(KP^*)$  için de aşağıdaki iki lemma ile verilebilir.

### 3.4.2 Lemma 3.5 (Bayhan ve Söylemez)

$G_0(s)$  sistemini kararlı kılan  $\mathbb{K}_i \triangleq (K_{i\min}, K_{i\max})$  kazanç aralıklarının her biri için, negatif kazanç payları

$$KP_i^- \triangleq \frac{\min(|K_{i\min}|, |K_{i\max}|)}{\max(|K_{i\min}|, |K_{i\max}|)} \quad (3.64)$$

olarak tanımlanırsa; minimum negatif kazanç payı,

$$\min KP^- = \min_i \{KP_i^-\} = \frac{1}{\max KP} \quad (3.65)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Dikkat edilirse  $i \in [1, 2, \dots, t]$  için  $\min KP^-$ 'na  $K_p = K_{i\max}$  kazancında erişilir. Fakat bu kazanç için kazanç payı, 0dB olur. Yani kapalı çevrim sistem, birden büyük kazanç belirsizliklerine izin vermez.

### 3.4.3 Lemma 3.6 (Bayhan ve Söylemez)

$G_0(s)$  sistemini kararlı kılan  $\mathbb{K}_i \triangleq (K_{i\min}, K_{i\max})$  kazanç aralıklarının her biri için, simetrik kazanç payları

$$KP_i^* = \sqrt{\frac{\max(|K_{i\min}|, |K_{i\max}|)}{\min(|K_{i\min}|, |K_{i\max}|)}} \quad (3.66)$$

olarak tanımlanırsa; maksimum simetrik kazanç payı,

$$\max KP^* = \min_i \{KP_i^*\} = \sqrt{\max KP} \quad (3.67)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.  $\max KP^*$ 'a,  $K_p = \sqrt{K_{\min} K_{\max}}$  kazancında erişilir.

### 3.4.4 Uyarı 3.2

Lemma 3.4, Lemma 3.5 ve Lemma 3.6'dan hareketle, açık çevrim kararlı olan (yani  $K_p \rightarrow 0$  için kapalı çevrim kararlı olan) veya yüksek kazançta kapalı çevrim kararlı olan (yani  $K_p \rightarrow \infty$  için kapalı çevrim kararlı olan) sistemlerde  $\max KP = \max KP^* = \infty$  ve  $\min KP^- = 0$ 'dır.

## 3.5 Maksimum Faz Payı Hesabı

Zaman gecikmesiz sistemlerde maksimum faz payı hesabı için Teorem 3.1'den hareketle bazı özel durumlar eklenmiştir.  $K_p \rightarrow \infty$  veya  $K_p \rightarrow 0$  için kapalı çevrim sistemin kararlılığı söz konusu ise, maksimum faz payı hesabında özel inceleme gerekmektedir. Bu nedenle üç ayrı çeşit sistem ele alınmıştır. Bunlardan biri açık çevrim kararlı (yani  $K_p \rightarrow 0$  için kapalı çevrim kararlı) olan, diğeri açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararlı (yani  $K_p \rightarrow \infty$  için kapalı çevrim kararlı) olan ve sonuncusu açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız (yani  $K_p \rightarrow \infty$  için kapalı çevrim kararsız) olan sistemlerdir (Bayhan ve Söylemez, 2007a; Bayhan ve Söylemez, 2007b).

### 3.5.1 Açık çevrim kararlı sistemler için maksimum faz payı hesabı

Böyle sistemlerde maksimum faz payı, herhangi bir hesaba gerek kalmaksızın aşağıdaki lemma ile belirlenir.

### 3.5.1.1 Lemma 3.7

Açık çevrim kararlı olan bir  $G_0(s)$  sistemi için oransal bir kontrolör kullanılarak elde edilebilecek maksimum faz payı  $180^\circ$  'dir (Bayhan ve Söylemez, 2007b).

### 3.5.1.2 Lemma 3.7'nin ispatı

Böyle sistemlerde yeterince küçük  $K_p$  değeri için  $K_p G_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin tamamıyla birim çemberin içine gireceği gözlemiyle ispat doğrudan yapılır. Bu durumda  $K_p G_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi, reel eksen kesmez ve doğal olarak reel eksenden geçiş frekansları yoktur.

Bu noktada açık çevrim kararlı sistemler için maksimum faz payını sağlayan en büyük kazancın ne olacağı sorusu önem kazanır. Maksimum faz payını sağlamak için  $K_p$  kazancını çok küçük seçmek pratik olmayabilir. Açık çevrim kararlı sistemlerde maksimum faz payını sağlayan kritik bir değer olan ve  $K_{p180\max}$  adını verdiğimiz en büyük kazancın hesabı için aşağıdaki lemma verilebilir (Bayhan ve Söylemez, 2007a).

### 3.5.1.3 Lemma 3.8

Açık çevrim kararlı sistemler için  $180^\circ$  faz payını sağlayan en büyük sabit kazanç değeri  $K_{p180\max}$ ,

$$K_{p180\max} = \min_i \frac{1}{|G_0(j\omega_i)|} \quad (3.68)$$

kullanılarak hesaplanır. Burada  $\omega_i$  frekansları,

$$S(\omega) \triangleq Z(\omega^2) \left( X(\omega^2) \frac{\partial X(\omega^2)}{\partial \omega} + Y_\omega(\omega) \frac{\partial Y_\omega(\omega)}{\partial \omega} \right) - (X^2(\omega^2) + Y_\omega^2(\omega)) \frac{\partial Z(\omega^2)}{\partial \omega} = 0 \quad (3.69)$$

polinomunun negatif olmayan reel kökleridir ve

$$Y_\omega(\omega) \triangleq \omega Y(\omega^2) \quad (3.70)$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca  $X(\omega^2)$ ,  $Y(\omega^2)$  ve  $Z(\omega^2)$ , (3.11), (3.12) ve (3.13) bağıntılarında verildiği gibidir.

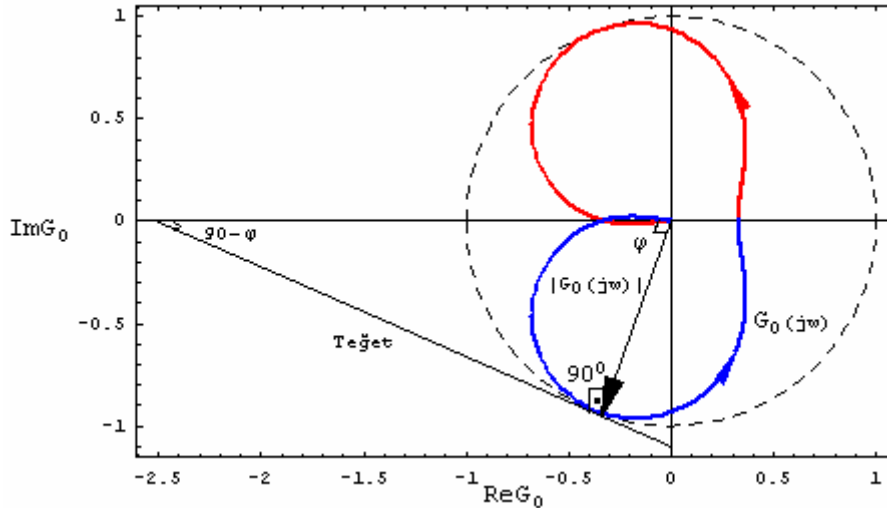


### 3.5.1.4 Lemma 3.8'in ispatı

Açık çevrim kararlı sistemlerde  $K_p \rightarrow 0$  için  $K_p G_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi birim çemberin içine doğru girer ve  $K_p$ 'nin öyle kritik bir değerine gelirki; Nyquist eğrisi, Şekil 3.9'da görüldüğü gibi birim çembere teğet olur.  $K_p$ 'nin bu değeri için faz payı  $180^\circ$  olur ve artık  $K_p$ , ne kadar küçültülürse küçültülsün faz payı hep  $180^\circ$  olarak kalacaktır.  $K_p$ 'nin bu kritik değerini,  $K_{p180\max}$  olarak adlandırabiliriz (Bayhan ve Söylemez, 2007a).  $K_p G_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin birim çembere teğet olduğu yere ilişkin kritik  $\omega_i$  frekansı

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |G_0(j\omega)| = 0 \quad (3.71)$$

bağıntısının pozitif reel köklerinden bulunur.  $K_p G_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisinin birim çember tarafından tamamıyla kapsanması için;  $G_0(j\omega)$ 'nin genliğinin en büyük değerini verecek  $\omega_i$  frekansının bulunması gerekir. Bu kritik frekans değerinin  $K_p = 1/|G_0(j\omega)|$  ifadesinde yazılmasıyla (3.68) ile verilen  $K_{p180\max}$  bulunur. Şekil 3.11'den görüldüğü üzere açık çevrim kararlı sistemler için  $180^\circ$  faz payını sağlayan en büyük sabit kazanç değeri  $K_{p180\max}$ ,  $|G_0(j\omega)|$  yarı çaplı bir dairenin  $G_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisine teğet olduğunda hesaplanabilir.



Şekil 3.11 :  $K_{p180\max}$  Kazancının Hesabı.

(3.10) ve (3.70)'den yararlanarak elde edilen

$$G_0(j\omega) = \frac{X(\omega^2)}{Z(\omega^2)} + j \frac{Y_\omega(\omega)}{Z(\omega^2)} \quad (3.72)$$

bağıntısının (3.71)'de yazılmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial w} |G_0(jw)| = \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\sqrt{X^2(w^2) + Y_\omega^2(w)}}{Z(w^2)} \right) \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial w} |G_0(jw)| = \frac{S(w)}{Z^2(w^2) \sqrt{X^2(w^2) + Y_\omega^2(w)}} \quad (3.74)$$

bulunur.  $S(w)$ , (3.69)'da tanımlandığı gibidir. (3.74)'de  $Z(w^2) = 0$  olması, açık çevrim kararlı  $G_0(s)$  sisteminin sanal ekseninde kutupları olduğunu ima eder ve bu durum, açık çevrim kararlı sistem için olamaz. (3.74)'den  $X^2(w^2) + Y_\omega^2(w) = 0$  olması için  $X(w^2) = 0$  ve  $Y_\omega(w) = 0$  bağıntılarının sağlanması gerekir. O zaman  $|G_0(jw)| = 0$  olması ve dolayısıyla (3.68)'den kazancın sonsuz olması gerekeceğinden olası değildir. Bu nedenle  $S(w) = 0$ 'dır ve böylece (3.71) dolayısıyla (3.74)'ün (3.69)'a özdeş olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

### 3.5.2 Açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararlı sistemler için maksimum faz payı hesabı

Bu durum,  $G_0(s)$ 'nin en az bir kutubunun sağ yarı düzlemde olduğu ve  $G_0(s)$ 'nin tüm sıfırlarının sol yarı düzlemde olduğu durumu kapsar. Böyle sistemlerde maksimum faz payının hesabı için aşağıdaki lemma verilebilir.

#### 3.5.2.1 Lemma 3.9 (Bayhan ve Söylemez)

$K_p \rightarrow \infty$  için kapalı çevrimde kararlı olduğu bilinen açık çevrim kararsız bir  $G_0(s)$  sisteminin maksimum faz payı,

- a.) Sistemin göreceli derecesi  $n - m = 0$  ise yani tersi de nedensel sistemse,  $180^\circ$ 'dir.
- b.) Sistemin göreceli derecesi tek ise,  $90^\circ$ 'dir.
- c.) Sistemin göreceli derecesi  $n - m \neq 0$  ve çift ise, bir sonraki alt bölümde verilen Lemma 3.11 yardımıyla bulunur.

#### 3.5.2.2 Lemma 3.9'un ispatı

İspat,  $G_0(s)$  sistemi kesin nedensel ise,  $K_p \rightarrow \infty$  için açık çevrim sistemin Nyquist eğrisinin birim çemberi sanal ekseninde kesmesi ve  $G_0(s)$  sistemi tersi de nedensel ise

bu eğrinin yüksek kazançlarda birim çemberi kesmemesi gözlemi üzerine kuruludur.

Sistemin göreceli derecesi olan  $n-m \neq 0$  ise,  $K_p \rightarrow \infty$  'a giderken  $G_0(jw)$  'nin Nyquist eğrisi orijine gider. Orijine gidiş açısı  $\psi = (n-m)\pi/2$  ile bulunabilir. Bu bakımdan  $n-m$  çift ise, orijine reel eksen üzerinden gidileceğinden;  $K_p \rightarrow \infty$  için faz payı  $0^\circ$  olur.  $n-m$  tek ise, orijine sanal eksen üzerinden gidileceğinden;  $K_p \rightarrow \infty$  için faz payı  $90^\circ$  olur.

Bu noktada  $G_0(s)$  sisteminin tersi de nedensel ise,  $180^\circ$  faz payını sağlayan en küçük oransal kazancın ne olabileceği sorusu önem kazanır. Bu amaçla aşağıdaki lemma verilebilir.

### 3.5.2.3 Lemma 3.10 (Bayhan ve Söylemez)

$K_p \rightarrow \infty$  'a giderken kapalı çevrimde kararlı olduğu bilinen ancak açık çevrimde kararsız tersi de nedensel olan bir  $G_0(s)$  sistemi için  $180^\circ$  faz payını sağlayan en küçük kazanç  $K_{p180\min}$ ,

$$K_{p180\min} = \max_i \frac{1}{|G_0(jw_i)|} \quad (3.75)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. Burada  $w_i$  frekansları, (3.69) ile verilen  $S(w)$  polinomunun pozitif reel kökleridir.

Bu lemmanın ispatı, Lemma 3.9'un ispatına benzerdir. Tek farkı,  $K_p = K_{p180\min}$  için  $K_p G_0(jw)$  'nin Nyquist eğrisinin dokunan bir nokta haricinde tamamıyla birim çemberin dışında olmasıdır.

### 3.5.3 Açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız sistemler için maksimum faz payı hesabı

Açık çevrim kararsız olan ve en az bir sıfırı sağ yarı düzlemde olan bir sistem için genelde maksimum faz payı,  $90^\circ$  'den daha küçüktür. Böyle sistemlerde maksimum faz payını hesaplamak için aşağıdaki lemma önerilebilir.

#### 3.5.3.1 Lemma 3.11 (Bayhan ve Söylemez, 2007b)

Kararlı kılan  $\mathbb{K}_i \triangleq (-1/x_{i-1}, -1/x_i)$  kazanç aralıklarına ilişkin kararlılık frekans aralıklarını  $\mathbb{W}_i \triangleq \{w_{i-1}, w_i\}$  olarak tanımlayalım. Bu frekans aralıklarında bulunan ve

$$X(w^2) \frac{\partial Y_\omega(w)}{\partial w} - Y_\omega(w) \frac{\partial X(w^2)}{\partial w} = 0 \quad (3.76)$$

bağıntısını sağlayan reel  $w_k^* \in \mathbb{W}_i$  frekanslarını ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) ele alalım (Bayhan ve Söylemez, 2007b). Burada  $X(w^2)$  ve  $Y_\omega(w)$  sırasıyla (3.11) ve (3.70)'de tanımlandığı gibidir.  $k = 1, 2, \dots, r$  ve  $r > 0$  olmak üzere, (3.76) bağıntısını sağlayan kararlılık frekans aralıklarında bulunan reel  $w_k^*$  frekansları içinde  $\theta_k \triangleq \angle G(jw_k^*)$  şeklinde bulunan faz payları arasındaki en büyük  $\theta_k$  teğet açısı, maksimum faz payıdır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\max FP = \max_{1 \leq k \leq r} (\theta_k) \quad (3.77)$$

### 3.5.3.2 Lemma 3.11'in ispatı

Maksimum faz payı, kararlılık frekans aralığı  $\mathbb{W}_i$  içinde bir  $w^*$  frekansında  $|G_0(jw^*)|$  yarıçaplı çembere teğet olan Şekil 3.11'deki gibi Nyquist eğrisi yardımıyla hesaplanabilir. Şekil 3.11'den görüldüğü üzere

$$\angle \frac{\partial G_0(jw)}{\partial w} = \varphi - 90^\circ = \angle G_0(jw) - 90^\circ \quad (3.78)$$

yazmak mümkündür. Bu son bağıntıda her iki tarafın tanjantı alınır,

$$\tan \angle \frac{\partial G_0(jw)}{\partial w} = \tan(\varphi - 90^\circ) = \tan \varphi = \tan \angle G_0(jw) \quad (3.79)$$

bulunur. Yukarıdaki bağıntıdan,

$$\frac{\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial w} G_0(jw)\right\}}{\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial w} G_0(jw)\right\}} = \frac{\operatorname{Re}\{G_0(jw)\}}{\operatorname{Im}\{G_0(jw)\}} \quad (3.80)$$

olduğu açıktır. (3.80)'i sağlayan kararlılık frekans aralıklarında bulunan reel  $w_k^*$  frekanslarının  $\angle G_0(jw)$  teğet açısında yazılmasıyla bulunan en büyük faz açısı, maksimum faz payını verecektir. (3.80)'nin (3.76)'a eş olduğunu göstermek için (3.72)'yi ve türevini (3.80)'de yazmak gerekir. Bu amaçla (3.72)'nin türevini alırsak,

$$\frac{\partial G_0(jw)}{\partial w} = \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Z^2(w^2)} + j \left( \frac{Y'_\omega(w)Z(w^2) - Z'(w^2)Y_\omega(w)}{Z^2(w^2)} \right) \quad (3.81)$$

bulunur. Burada  $X'(w^2)$ ,  $Y'_\omega(w)$  ve  $Z'(w^2)$  sırasıyla  $X(w^2)$ ,  $Y_\omega(w)$  ve  $Z(w^2)$  polinomlarının  $w$ 'a göre birinci türevlerini göstermektedir. (3.72)'den

$$\operatorname{Re}\{G_0(jw)\} = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} \quad (3.82)$$

$$\operatorname{Im}\{G_0(jw)\} = \frac{Y_\omega(w)}{Z(w^2)} \quad (3.83)$$

yazmak mümkündür. Benzer biçimde (3.81)'i düzenlersek

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial w} G_0(jw)\right\} = \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Z^2(w^2)} \quad (3.84)$$

ve

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial w} G_0(jw)\right\} = \frac{Y'_\omega(w)Z(w^2) - Z'(w^2)Y_\omega(w)}{Z(w^2)} \quad (3.85)$$

elde edilir. (3.82), (3.83), (3.84) ve (3.85) bağıntılarını, (3.80)'de yazarak bulunan

$$\frac{X(w^2)}{Y_\omega(w)} = \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Y'_\omega(w)Z(w^2) - Z'(w^2)Y_\omega(w)} \quad (3.86)$$

bağıntısını düzenlersek

$$Z(w^2)(X(w^2)Y'_\omega(w) - Y_\omega(w)X'(w^2)) = 0 \quad (3.87)$$

biçimine gelir.  $Z(w^2) > 0$  olacağından  $\forall w$  için (3.87)'nin (3.78)'e eşit olduğu görülür. (3.76)'nın eşiti (3.87)'nin bulunmasıyla ispat tamamlanır. (3.76)'nın pozitif reel kökleri arasında Teorem 3.1'den bulunan kararlılık frekans bölgesi  $W_i$  içinde kalanları seçilip  $\angle G_0(jw)$  'da yazılır ve bulunan faz payları içinde en büyük olan faz açısı alınır. Bu açı, maksimum faz payıdır.

### 3.5.4 Algoritma 3.2 (Maksimum faz payı hesabı)

**Adım 1:** Açık çevrim  $G_0(s)$  sistemi kararlıysa;  $\max FP = 180^\circ$ 'dir. Bu tür sistemler için algoritmanın sonraki adımlarına gitmeye gerek yoktur ve algoritmadan çıkılır. Diğer iki tipteki sistemler için algoritmaya devam edilir.

**Adım 2:** (3.11), (3.12) ve (3.70)'i kullanarak  $X(w^2)$  ve  $Y_\omega(w)$ 'i bul.

**Adım 3:** Teorem 3.1'den kararlı kılan  $\mathbb{K}_i \triangleq (-1/x_{i-1}, -1/x_i)$  kazanç aralıkları ve bunlara ilişkin kararlılık frekans aralıkları  $\mathbb{W}_i \triangleq \{w_{i-1}, w_i\}$ 'i bul.

**Adım 4:** Eğer kararlı kılan kazanç aralıkları sonsuzu içeriyorsa; o zaman tersi de uygun sistemler için  $\max FP = 180^\circ$  iken; kesin nedensel sistemler için maksimum faz payı sistemin göreceli derecesi  $n-m$ 'nin tek veya çift olmasına göre ayrı inceleme gerektirir. Bu durumda sistemin göreceli derecesi tek ise,  $\max FP = 90^\circ$ 'e eşittir. Lemma 3.9a ve Lemma 3.9b'de verilen sistemler için algoritmanın sonraki adımlarına gitmeye gerek yoktur ve algoritmadan çıkılır. Sistemin göreceli derecesi çift ise maksimum faz payı  $90^\circ$ 'den küçüktür. Böyle sistemler ve üçüncü tipteki sistemler için Lemma 3.11 kullanılarak algoritmaya devam edilir.

**Adım 5:**  $X(w^2)$  ve  $Y_\omega(w)$ 'nin  $w$ 'e göre birinci türevlerini hesapla.

**Adım 6:** (3.78)'i sağlayan reel  $w_i^*$  frekanslarını bul ve bunlar arasında kararlılık frekans aralıkları  $w_i^* \in \mathbb{W}_i \triangleq \{w_{i-1}, w_i\}$  içinde kalanları belirle.

**Adım 7:** Her  $w_i^*$  frekansına ilişkin  $FP_i = \angle G_0(jw_i^*)$  faz paylarını hesapla.

**Adım 8:** Adım 7'den bulunan faz payları içinde  $\max FP = \max_i (FP_i)$  koşulunu sağlayan faz, maksimum faz payıdır.

#### 3.5.4.1 Örnek 3.6

Örnek 3.1'de verilen sistem için maksimum kazanç payı ve maksimum faz payını hesaplayalım.

Maksimum kazanç payını bulmak için Lemma 3.4'ü kullanabiliriz. Tablo 3.1'den  $\mathbb{K}_2 = (K_{2\min}, K_{2\max}) = (0.6, 11.9455)$  ve  $\mathbb{K}_4 = (K_{4\min}, K_{4\max}) = (81.2466, 148.146)$  kazanç aralıkları için kapalı çevrim sisteminin kararlı olduğu göz önüne alınarak; (3.62)'den bu aralıkların her birine ilişkin kazanç payları,  $KP_2 = K_{2\max} / K_{2\min} = 19.909$  ve  $KP_4 = K_{4\max} / K_{4\min} = 1.8234$  olarak bulunur. O halde (3.63)'den maksimum kazanç payı,

$$\max KP = KP_2 = 19.909 \quad (3.88)$$

olarak bulunur. Lemma 3.5'den minimum negatif kazanç payı

$$\min KP^- = \frac{1}{\max KP} = 0.0502 \quad (3.89)$$

olarak hesaplanırken Lemma 3.6'dan maksimum simetrik kazanç payı ise

$$\max KP^* = \sqrt{\max KP} = 4.46195 \quad (3.90)$$

biçiminde elde edilir. Kararlı kılan kazanç aralıklarına ilişkin kararlılık frekans aralıklarının  $\mathbb{W}_2 = \{w_1, w_2\} = (0, 1.0895)$  ve  $\mathbb{W}_4 = \{w_3, w_4\} = (2.37813, 3.52384)$  olduğu, Tablo 3.1'den görülür. Tablo 3.1'den sistemin açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız yapıda olduğunun belirlenmesi nedeniyle maksimum faz payını hesaplamada Lemma 3.11 kullanılabilir. (3.76)'dan bulunan

$$800.256 - 12403.5w^2 - 7517.35w^4 + 1982.13w^6 + 1795.48w^8 - 151.58w^{10} - 9.3w^{12} = 0 \quad (3.91)$$

bağıntısını sağlayan reel frekanslar  $w_i = \pm 0.249426, \pm 1.54415, \pm 2.88377$  olup; bunlar arasında  $\mathbb{W}_2 = (0, 0.56642)$  aralığında kalan kararlılık frekansı  $w_1^* = 0.249426$  ve  $\mathbb{W}_4 = (2.37813, 3.52384)$  aralığına ilişkin olanı da  $w_2^* = 2.88377$  değeridir. Bu değerlerin  $G_0(jw)$ 'da yazılmasıyla sırasıyla  $\theta_1 = \angle G(jw_1^*) = 49.001^\circ$  ve  $\theta_2 = \angle G(jw_2^*) = 2.25489^\circ$  olarak hesaplanır. (3.77)'den  $\max FP = \theta_1 = 49.001^\circ$  olarak bulunur. Böylece  $49.001^\circ$  ve bu açıdan daha büyük faz paylarını sağlayan oransal kazanç olmadığı sonucuna varılır.

Bu noktada hem maksimum faz payından az küçük olan örneğin  $47^\circ$  için hem de maksimum faz payı koşullarını sağlayan kazanç değerlerinin olup olmadığını test edelim.

Deneme amaçlı olarak  $\tilde{\theta} = 47^\circ$  faz payı için sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazançları bulalım.  $e^{-j47} = 0.6819 - j0.7314$  için (3.51) ve (3.52)'den

$$\tilde{X}(w) = -6.55 - 60.97w - 79.86w^2 + 67.05w^3 + 6.26w^4 - 14.09w^5 - 6.34w^6 + 0.73w^7 \quad (3.92)$$

$$\tilde{Y}(w) = 7.02 - 56.85w + 85.66w^2 + 65.53w^3 + 6.71w^4 - 13.14w^5 + 6.8w^6 + 0.68w^7 \quad (3.93)$$

olarak hesaplanır. Teorem 3.2'den  $\tilde{Y}(w)$ 'nin reel kökleri  $\tilde{w}_1^* = -11.5185$ ,  $\tilde{w}_2^* = 0.176042$  ve  $\tilde{w}_3^* = 0.344$ 'dir. Sistemin orijine gidiş açısı  $\psi = (n-m)\pi/2 = 3\pi/2$  olduğu için bu frekanslara  $\tilde{w}_4^* = \infty$ 'da eklenir ve böylece  $\tilde{\theta} = 47^\circ$  için reel eksenden geçiş frekansları dört tane olur.  $\tilde{\theta} = 47^\circ$  için reel eksenden geçiş yerleri ise sırasıyla  $\tilde{x}_1 = -0.00054$ ,  $\tilde{x}_2 = -0.81899$ ,  $\tilde{x}_3 = -0.45398$  ve  $\tilde{x}_4 = 0$ 'dır. (3.56)'dan geçiş yönleri ise  $\tilde{r}_1 = 1$ ,  $\tilde{r}_2 = -1$ ,  $\tilde{r}_3 = 1$  ve  $\tilde{r}_4 = -1$  olarak bulunur. Bu geçiş frekansları için bulunan kazanç aralıkları, Tablo 3.8'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.8 :** Örnek 3.6'da  $FP = 47^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$           |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|--------------------------|
| 1   | 0.176042        | -0.81899        | -1            | 1             | $0 < K_p < 1.221$        |
| 2   | 0.344           | -0.45398        | 1             | 0             | $1.221 < K_p < 2.2028$   |
| 3   | -11.5185        | -0.00054        | 1             | 1             | $2.2028 < K_p < 1851.19$ |
| 4   | $\infty$        | 0               | -1            | 2             | $1851.19 < K_p < \infty$ |
| 5   | -               | $\infty$        | -             | 1             | $-\infty < K_p < 0$      |

Tablo 3.8'den görüldüğü gibi  $47^\circ$  faz payını sağlayan kazanç aralığı vardır ve  $K_p \in (1.221, 2.2028)$ 'dir. Faz payı  $49.001^\circ$  olduğu anda Tablo 3.9'dan görüldüğü gibi kararlı yapan kazanç değerleri yok olur.

**Tablo 3.9 :** Örnek 3.6'da  $\max FP = 49.001^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$             |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|----------------------------|
| 1   | -12.1665        | -0.000467       | 1             | 1             | $0 < K_p < 2141.3276$      |
| 2   | $\infty$        | 0               | -1            | 2             | $2141.3276 < K_p < \infty$ |
| 3   | -               | $\infty$        | -             | 1             | $-\infty < K_p < 0$        |

### 3.5.4.2 Örnek 3.7

Örnek 3.2'de verilen sistem için maksimum kazanç payı ve maksimum faz payını hesaplayalım.

Tablo 3.2'den kapalı çevrim sistemin  $\mathbb{K}_3 = (6.71, 15.75)$  kazanç aralığı için kararlı olduğu göz önüne alınarak; Lemma 3.4'den  $\max KP = 2.3472$  olarak bulunur. Lemma 3.5 ve Lemma 3.6'dan sırasıyla  $\min KP^- = 0.426$  ve  $\max KP^* = 1.532$  olduğu görülür.

Açık çevrim kararsız ve yüksek kazançta kapalı çevrim kararsız yapıda olduğu Tablo 3.2'den görülen bu sistem için  $\mathbb{K}_3$  kazanç aralığına ilişkin kararlılık frekans



aralığı  $\mathbb{W}_3 = (1.84083, 2.97788)$ 'dir. (3.76)'yı sağlayan reel frekanslar  $\pm 3.62618$  ve  $\pm 2.48131$  olup; bunlar arasında  $\mathbb{W}_3$  içinde kalan frekans  $w_1^* = 2.48131$ 'dir. Bu frekans değeri için  $\max FP = 17.342^\circ$  olarak hesaplanır.

Maksimum faz payına çok yakın olan örneğin  $\tilde{\theta} = 17.3^\circ$  faz payı için Teorem 3.2'nin kullanılmasıyla bulunan sonuçlar, Tablo 3.10'da verilmiştir.

**Tablo 3.10 :** Örnek 3.7'de  $FP=17.3^\circ$  İçin Teorem 3.2'den Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\tilde{w}_i^*$ | $\tilde{x}_i^*$ | $\tilde{r}_i$ | $\tilde{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$                   |
|-----|-----------------|-----------------|---------------|---------------|----------------------------------|
| 1   | 5.50314         | -0.27334        | -1            | 4             | $0 < K_p < 3.658447$             |
| 2   | -1.51471        | -0.183384       | -1            | 3             | $3.658447 < K_p < 5.45304$       |
| 3   | -4.09399        | -0.150471       | -1            | 2             | $5.45304 < K_p < 6.645799$       |
| 4   | 2.45496         | -0.091003       | -1            | 1             | $6.645799 < K_p < 10.98865$      |
| 5   | 2.50726         | -0.086682       | 1             | 0             | $10.98865 < K_p < 11.53647$      |
| 6   | -3.28855        | -0.073789       | 1             | 1             | $11.53647 < K_p < 13.55199$      |
| 7   | 0.104292        | 0.434699        | 1             | 2             | $13.55199 < K_p, -2.30044 > K_p$ |
| 8   | -56.3686        | 0.457145        | 1             | 3             | $-2.30044 < K_p < -2.18749$      |
| 9   | -               | $\infty$        | -             | 4             | $-2.18749 < K_p < 0$             |

Tablo 3.10'dan  $K_p \in (10.98865, 11.53647)$  kazançları,  $17.3^\circ$  faz payı için kapalı çevrimde sistemi kararlı yapar.

### 3.5.4.3 Örnek 3.8

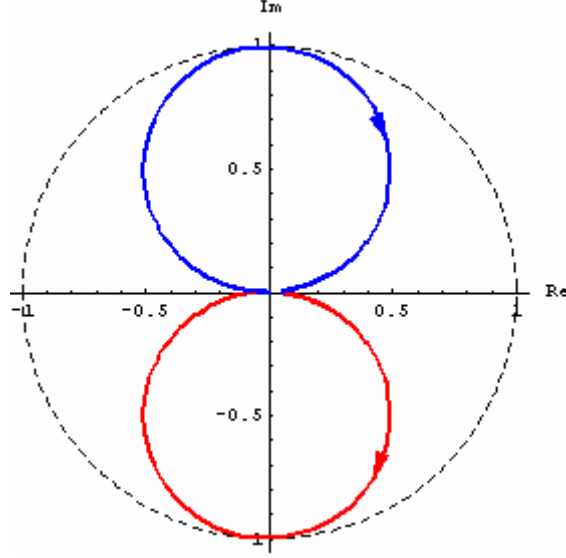
Örnek 3.3'de verilen sistem için maksimum kazanç payı, maksimum faz payı ve  $K_{p180\max}$ 'ı hesaplayalım.

Tablo 3.3'den kapalı çevrim sistem  $K_p \in (-16, 160)$  kazançları için kararlı olacağından, sistem açık çevrim kararlıdır. Bu nedenle Uyarı 3.2'den  $\max KP = \infty$  ve Lemma 3.7'den  $\max FP = 180^\circ$  bulunur. Ayrıca  $\max KP^* = \infty$  ve  $\min KP^- = 0$ 'dır.  $K_{p180\max}$ 'ı hesaplamak için, Lemma 3.8'i kullanalım. Örnek 3.3'de bulunan  $X(v)$ ,  $Y(v)$  ve  $Z(v)$ 'de  $v = w^2$  yazıp elde edilen polinomların ve bunların türevlerinin (3.69)'da yazılmasıyla

$$S(w) = 0.329w + 1.11w^3 + 0.289w^5 - 0.872w^7 - 0.019w^9 + 0.19w^{11} - 0.041w^{13} \quad (3.94)$$

oluşturulur.  $S(w)$ 'i sağlayan negatif olmayan reel frekanslar  $w_1 = 0$  ve  $w_2 = 1.5974$  olarak hesaplanır. Bu frekansların  $K_{p_i} = 1/|G_0(jw_i)|$ 'de yazılmasıyla sırasıyla  $K_{p1} = 16$  ve  $K_{p2} = 1.00256$  kazançları bulunur. (3.68)'den  $180^\circ$  faz payını sağlayan

en büyük sabit kazanç değerinin  $K_{p180\max} = K_{p2} = 1.00256$  olduğu görülür. Ayrıca Şekil 3.12'den görüldüğü gibi  $K_{p180\max} G_0(j\omega)$  'nın Nyquist eğrisi, tamamıyla birim çemberin içindedir.



**Şekil 3.12 :** Örnek 3.8 İçin  $K_{p180\max} G_0(j\omega)$  'nin Nyquist Eğrisi.

#### 3.5.4.4 Örnek 3.9

Aşağıdaki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan kazançları hesaplayarak maksimum kazanç payı ve maksimum faz payını bulalım.

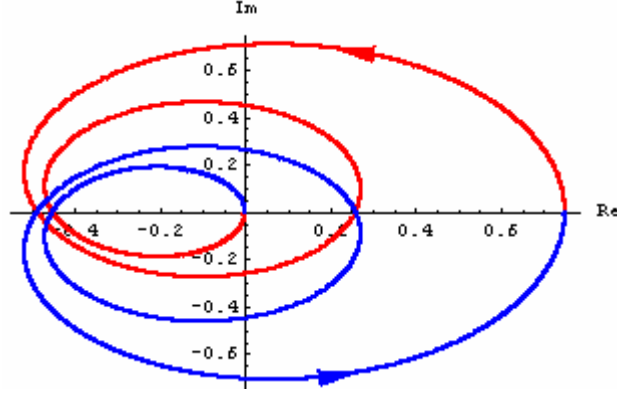
$$N(s) = 5s^3 + 14.75s^2 + 49.5s + 72 \quad D(s) = s^4 - 11s^3 + 48s^2 - 104s + 96 \quad (3.95)$$

Bu sistem için Teorem 3.1'den elde edilen sonuçlar, Tablo 3.11'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.11 :** Örnek 3.9 İçin Kapalı Çevrimde Sistemi Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $w_i^*$  | $x_i^*$   | $r_i$ | $u_i$ | $K_i$                       |
|-----|----------|-----------|-------|-------|-----------------------------|
| 1   | 1.8026   | -0.487176 | -2    | 4     | $0 < K_p < 2.052646$        |
| 2   | 8.79559  | -0.451564 | -2    | 2     | $2.052646 < K_p < 2.21453$  |
| 3   | $\infty$ | 0         | 1     | 0     | $2.21453 < K_p < \infty$    |
| 4   | 3.12063  | 0.258999  | 2     | 1     | $-\infty < K_p < -3.861019$ |
| 5   | 0        | 0.75      | 1     | 3     | $-3.861019 < K_p < -1.3333$ |
| 6   | -        | $\infty$  | -     | 4     | $-1.3333 < K_p < 0$         |

Tablo 3.11'den kapalı çevrim sistem  $K_p \in (2.21453, \infty)$  kazançları için kararlı kılınabilir. Sistem açık çevrim kararsız ve  $K_p \rightarrow \infty$ 'a giderken kapalı çevrim kararlıdır. Ayrıca sistem, kesin nedenseldir. Bu nedenlerle Uyarı 3.2'den  $\max KP = \max KP^* = \infty$  ve  $\min KP^- = 0$  ve Lemma 3.9b'den  $\max FP = 90^\circ$  olduğu görülür. Bu sistemin Şekil 3.13'de görülen Nyquist eğrisi, Tablo 3.13'de bulunan sonuçları teyit etmektedir.



**Şekil 3.13 :** Örnek 3.9 İçin Orijinal Sistemin Nyquist Eğrisi.

#### 3.5.4.5 Örnek 3.10

Aşağıdaki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan kazançları hesaplayarak maksimum kazanç payı, maksimum faz payı ve  $K_{p180\min}$ 'i hesaplayalım.

$$N(s) = 2s^4 + 2s^3 + 7s^2 + 5s + 1 \quad D(s) = s^4 + 3s^3 + 5s^2 - 6s + 5 \quad (3.96)$$

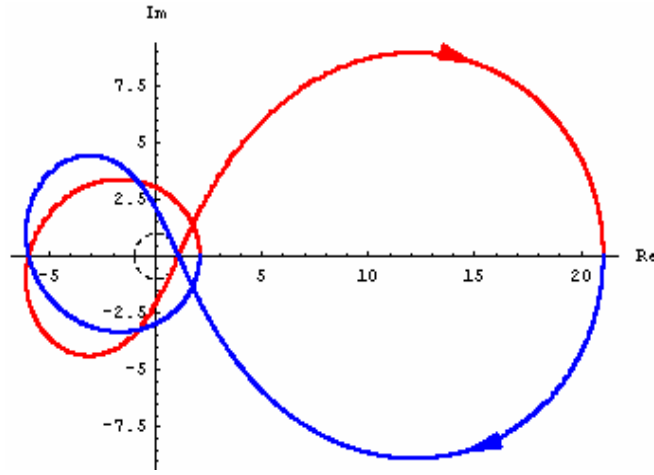
Bu sistem için Teorem 3.1'den elde edilen sonuçlar, Tablo 3.12'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.12 :** Örnek 3.10 İçin Kapalı Çevrimde Sistemi Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $w_i^*$  | $x_i^*$   | $r_i$ | $u_i$ | $\mathbb{K}_i$                                    |
|-----|----------|-----------|-------|-------|---------------------------------------------------|
| 1   | 0.66267  | -0.563279 | -2    | 2     | $0 < K_p < 1.7753$                                |
| 2   | 1.82808  | 0.105066  | 2     | 0     | $1.7753 < K_p < \infty, -\infty < K_p < -9.51782$ |
| 3   | 0        | 0.2       | 1     | 2     | $-9.51782 < K_p < -5$                             |
| 4   | $\infty$ | 2         | -1    | 3     | $-5 < K_p < -0.5$                                 |
| 5   | -        | $\infty$  | -     | 2     | $-0.5 < K_p < 0$                                  |

Tablo 3.12'den kapalı çevrim sistem  $K_p \in (-\infty, -9.51782) \cup (1.7753, \infty)$  kazançları için kararlı kılınabilir. Sistem açık çevrim kararsız ve  $K_p \rightarrow \infty$ 'a giderken

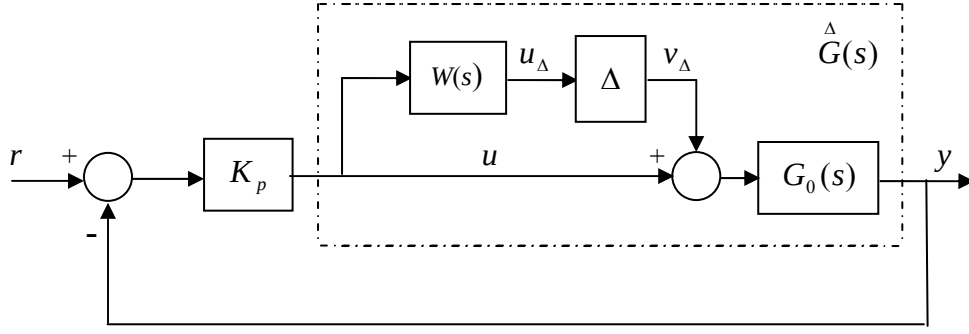
kapalı çevrim kararlıdır. Sistem tersi de nedenseldir. Bu nedenlerle Uyarı 3.2'den  $\max KP = \infty$  ve Lemma 3.9 a.)'dan  $\max FP = 180^\circ$  'dir.  $180^\circ$  faz payını sağlayan en küçük kazanç  $K_{p180\min}$  'ı hesaplamak için, Lemma 3.10'u kullanalım. (3.69) ile verilen  $S(w)$  'i sağlayan negatif olmayan reel frekanslar  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 0.808481$  ve  $w_3 = 1.77542$  olarak hesaplanır. Bu frekansların  $i = 1, 2, 3$  olmak üzere  $K_{p_i} = 1/|G_0(jw_i)|$  'de yazılmasıyla  $K_{p1} = 5$ ,  $K_{p2} = 1.68062$  ve  $K_{p3} = 10.5394$  kazançları bulunur. (3.75)'den  $K_{p180\min} = K_{p3} = 10.5394$  olarak bulunur. Dikkat edilirse Şekil 3.14'de verilen  $K_{p180\min} G_0(jw)$  'nin Nyquist eğrisi, tamamıyla birim çemberin dışındadır.



Şekil 3.14 : Örnek 3.10 İçin  $K_{p180\min} G_0(jw)$  'nin Nyquist Eğrisi.

### 3.6 Yapısal Olmayan Belirsizlik İçeren Sistemlerde Dayanıklı Kararlılığı Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması

Sürekli zamanlı doğrusal zamanla değişmeyen sistemlerde var olabilen yapısal olmayan belirsizlikleri göstermek için Şekil 3.15'deki gibi bir kapalı çevrim sistem ele alınıp dayanıklı kararlı kılatabilecek tüm kazançları bulmak amacıyla Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi kullanılabilir. Şekil 3.15'de görülen  $G_0(s)$ , (3.1)'de verilen sistemi gösterirken;  $\Delta$  ise birden küçük ( $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ )  $H_\infty$  normuna sahip tüm sistemleri gösteren yapısal olmayan belirsizlikleri içeren bloktur. Ayrıca  $W(s)$ , ağırlık transfer fonksiyonudur.



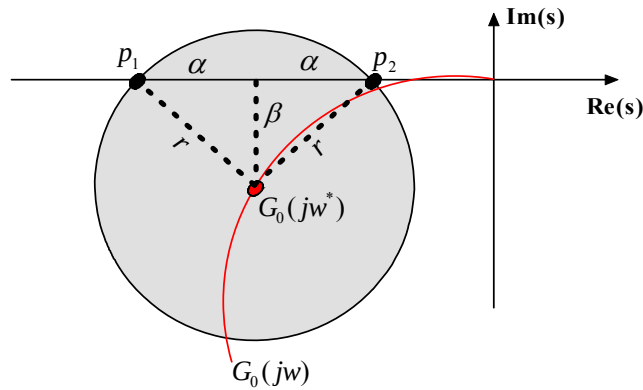
**Şekil 3.15 :** Yapısal Olmayan Belirsizlik İçeren Sistemin Kapalı Çevrim Kontrolü.

Şekil 3.15’de kontrol edilen sistem

$$\hat{G}(s) \triangleq G_0(s) (1 + W(s)\Delta) \quad (3.97)$$

ile gösterilebilir. Burada amaç, bütün olası yapısal olmayan belirsizlikler altında kapalı çevrim sistemi kararlı kılan  $K_p$  kazanç kümelerini bulmaktır. Problem,  $\|W(s)T(s)\|_\infty < 1$  koşulunu gerçekleyen  $T(s) = K_p G_0(s) / (1 + K_p G_0(s))$  ağırlıklı kapalı çevrim transfer fonksiyonundaki  $H_\infty$  kısıtlamasını sağlayan kazançları bulabilmek olarak da formüle edilebilir.  $\hat{G}(j\omega)$ ’nin Nyquist eğrisi, tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesi tanımladığı için; bu eğri reel eksenin tek noktalar değil bölgeler (segments) biçimine keser.

$\hat{G}(j\omega)$  sisteminin verilen bir  $\omega^*$  için frekans cevabı,  $G_0(j\omega^*)$  merkezli ve  $r = |G_0(j\omega)W(j\omega)|$  yarı çaplı Şekil 3.16’deki gibi bir disk tanımlar (Skogestad ve Postlethwaite, 2005).  $\omega = \omega^*$  frekansı için  $\hat{G}(j\omega)$ ’nin Nyquist eğrisinin reel eksenin kesim yerleri,  $p_1 \leq \text{Re}(s) \leq p_2$  olmak üzere Şekil 3.16’den yararlanarak bulunabilir.



**Şekil 3.16 :** Verilen  $\omega^*$  Frekansı İçin  $G_0(j\omega)$ ’nin Frekans Cevabı.

Şekil 3.16'dan

$$p_{1,2}(w^2) = \operatorname{Re}\{G_0(jw)\} \mp \alpha(w^2) \quad (3.98)$$

olduğu görülür. Burada (3.10)'dan bulunan

$$a(w^2) \triangleq \operatorname{Re}\{G_0(jw)\} = X(w^2)/Z(w^2) \quad (3.99)$$

tanımıyla ve Şekil 3.16'dan bulunan

$$\alpha(w^2) = \sqrt{r^2(w) - \beta^2(w)} \quad (3.100)$$

bağıntısının (3.98)'de yazılmasıyla

$$p_{1,2}(w^2) = a(w^2) \mp \sqrt{r^2(w) - \beta^2(w)} \quad (3.101)$$

bulunur. Burada

$$b(w^2) \triangleq r^2(w) - \beta^2(w) \quad (3.102)$$

biçiminde tanımlayalım. Şekil 3.16 ve (3.14)'den

$$\beta(w) \triangleq \operatorname{Im}\{G_0(jw)\} = w \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (3.103)$$

ve

$$r^2(w) = |G_0(jw)|^2 |W(jw)|^2 \quad (3.104)$$

yazmak mümkündür.  $W(jw)$ , (3.10)'a benzer biçimde

$$W(jw) = \frac{X_w(w^2)}{Z_w(w^2)} + jw \frac{Y_w(w^2)}{Z_w(w^2)} \quad (3.105)$$

olarak yazılabilir. (3.10) ve (3.105)'in (3.104)'de yazılmasıyla

$$r^2(w) = \frac{(X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2)) (X_w^2(w^2) + w^2 Y_w^2(w^2))}{Z^2(w^2) Z_w^2(w^2)} \quad (3.106)$$

elde edilir. O halde (3.99) ve (3.102)'nin (3.101)'de yazılmasıyla

$$p_{1,2}(w^2) = a(w^2) \mp \sqrt{b(w^2)} \quad (3.107)$$

bulunur. Burada

$$b(w^2) \triangleq \frac{N_b(w^2)}{D_b(w^2)} \quad (3.108)$$

olarak da yazılabilir. (3.99) ve (3.108)'in (3.107)'de yazılmasıyla

$$p_{1,2}(w^2) = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} \mp \sqrt{\frac{N_b(w^2)}{D_b(w^2)}} \quad (3.109)$$

biçimine gelir. (3.109)'un  $w$ 'ya göre türevini alınıp sıfıra eşitlersek

$$p'_{1,2}(w^2) = \frac{X'(w^2)Z(w^2) - X(w^2)Z'(w^2)}{Z^2(w^2)} \mp \frac{N'_b(w^2)D_b(w^2) - N_b(w^2)D'_b(w^2)}{2\sqrt{D_b^3(w^2)}\sqrt{N_b(w^2)}} = 0 \quad (3.110)$$

polinomunu ve eş değer olarak

$$2\sqrt{D_b^3}\sqrt{N_b}(X'Z - XZ') \mp Z^2(N'_bD_b - N_bD'_b) = 0 \quad (3.111)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu son bağıntıda yer alan polinomların hepsi  $w^2$ 'nin fonksiyonlarıdır ve kolaylık olması açısından her bir polinom için tek tek  $w^2$ 'e bağımlılık gösterilmemiştir. (3.111)'in her iki tarafının karesi alınıp düzenlenirse,

$$R(w^2) \triangleq Z^4(N_bD'_b - D_bN'_b)^2 - 4N_bD_b^3(XZ' - ZX') = 0 \quad (3.112)$$

bulunur. Burada  $D'_b$ ,  $N'_b$ ,  $Z'$  ve  $X'$  sırasıyla  $D_b$ ,  $N_b$ ,  $Z$  ve  $X$  polinomlarının  $w$ 'a göre birinci türevlerini gösterir.  $N_b(w^2)$  ve  $D_b(w^2)$ , (3.103) ve (3.106)'nın (3.102)'deki  $b(w^2)$ 'de yazılıp düzenlenmesiyle elde edilen polinomun pay ve paydası olup sırasıyla

$$N_b(w^2) \triangleq (X^2(w^2) + w^2Y^2(w^2)) (X_w^2(w^2) + w^2Y_w^2(w^2)) - w^2Y^2(w^2)Z_w^2(w^2) \quad (3.113)$$

$$D_b(w^2) \triangleq Z^2(w^2)Z_w^2(w^2) \quad (3.114)$$

biçimindedir.  $R(w^2)$ 'nin negatif olmayan reel kökleri,  $w_k \leq w_{k+1}$  koşulunu sağlayacak biçimde  $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3, w_4, \dots, w_{2t-1}, w_{2t}$  olarak sıralanmıştır. Her bir  $w_{2k-1}$  ve  $w_{2k}$  kök çiftine ilişkin reel eksen kesim yerleri,  $k = 1, 2, \dots, t$  olmak üzere

$$p_{k \min} \triangleq \min(p_1(w_{2k-1}), p_1(w_{2k})) \quad (3.115)$$

$$p_{k \max} \triangleq \max(p_2(w_{2k-1}), p_2(w_{2k})) \quad (3.116)$$

olarak tanımlanmıştır (Söylemez ve Bayhan, 2008).  $G_0(s)W(s)$  tersi de nedensel ise; aşağıdaki iki noktayı tanımlayabiliriz.

$$p_{(t+1) \min} \triangleq a_n (1 - W_\infty) \quad (3.117)$$

$$p_{(t+1) \max} \triangleq a_n (1 + W_\infty) \quad (3.118)$$

Burada

$$a_n = \lim_{s \rightarrow \infty} G_0(s) \quad (3.119)$$

$$W_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) \quad (3.120)$$

biçimindedir. Nyquist eğrisinin reel eksen kesim yerlerinin oluşturduğu

$$x_k \triangleq (p_{k \min} \quad p_{k \max}) \quad (3.121)$$

aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları

$$\bar{K}_{pk} \triangleq \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{-1}{p_{k \min}} \quad \frac{-1}{p_{k \max}} \right), & Sgn(p_{k \min}) = Sgn(p_{k \max}) \text{ ise} \\ \left( -\infty \quad \frac{-1}{p_{k \max}} \right) \cup \left( \frac{-1}{p_{k \min}} \quad \infty \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (3.122)$$

olup bunların birleşimi



$$\overset{\Delta}{\tilde{K}}_p = \bigcup_{k \in [1, 2, \dots, t]} \tilde{K}_{pk} \quad (3.123)$$

biçiminde tanımlıdır.

### 3.6.1 Lemma 3.12 (Söylemez ve Bayhan, 2008)

(3.97) ile tanımlanan ve yapısal olmayan belirsizlikler içeren  $\overset{\Delta}{G}$  sisteminin Nyquist eğrisi, reel ekseni (3.121) ile verilen  $x_k$  aralıklarında keser. Şekil 3.15’de verilen kapalı çevrim sistemin sağ yarı düzlemdeki kutuplarının sayısının model belirsizliğiyle değişmesinin gerek ve yeter koşulu,  $K_p \in \overset{\Delta}{\tilde{K}}_p$  olmasıdır.

### 3.6.2 Lemma 3.12’nin ispatı

(3.97) ile verilen sistemin Nyquist eğrisinin reel eksenden geçiş yerlerine ilişkin reel  $p_{1,2}(w^2) \in \mathfrak{R}$  frekansları

$$\frac{\partial}{\partial w} p_{1,2}(w^2) = 0 \quad (3.124)$$

koşulundan bulunabilir. (3.107)’i (3.124)’de yazarak bulunan

$$\left( \frac{\partial}{\partial w} b(w^2) \right)^2 = 4b(w^2) \left( \frac{\partial}{\partial w} a(w^2) \right)^2 \quad (3.125)$$

bağıntısı, (3.112) ile verilen  $R(w^2) = 0$  ifadesine eş değerdir.  $R(w^2)$ ’nin negatif olmayan reel kökleri, yapısal olmayan belirsizlik içeren  $\overset{\Delta}{G}$  sisteminin Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim noktalarındaki frekansları verir ve bu frekanslara ilişkin kesim yerleri, bir bant oluşturur (Söylemez ve Bayhan, 2008).

$G_0(s)W(s)$ ’nin tersi de nedensel ise;  $w \rightarrow \infty$  için Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim yerleri, özel inceleme gerektirir. Böyle sistemlerde  $\lim_{w \rightarrow \infty} [\overset{\Delta}{G}(jw)]$  ifadesi,  $a_n$  merkezli ve  $a_n w_\infty$  yarı çaplı bir disk tanımlar. Böylece Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim yeri, (3.117) ve (3.118)’de verilen  $p_{(t+1) \min}$  ve  $p_{(t+1) \max}$  arasındadır. Bu sonuçlardan hareketle, aşağıdaki teorem verilebilir.

### 3.6.3 Teorem 3.3 (Söylemez ve Bayhan, 2008)

Şekil 3.15'deki  $G_0(s)$  sistemini kararlı kılan kazanç aralıkları  $\tilde{K}_{p0}$ , Teorem 3.1'deki gibi belirlenebilir. (3.97)'de verilen  $\overset{\Delta}{G}(s)$  sistemini dayanıklı kararlı kılacak kazanç kümesi

$$\tilde{K}_p \triangleq \tilde{K}_{p0} \setminus \overset{\Delta}{K}_p \quad (3.126)$$

ile bulunur. Burada  $\overset{\Delta}{K}_p$ , (3.123)'de verildiği gibi tanımlıdır. (3.126)'daki “\” işareti, kümeler üzerinde çıkarma işlemini gösterir.

#### 3.6.3.1 Örnek 3.11

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{0.109693s^4 + 0.0728112s^3 + 0.7354s^2 + 0.318s + 1}{1.41834s^5 + 3.39206s^4 + 7.62744s^3 + 5.9986s^2 + 3.33s + 1} \quad (3.127)$$

Şekil 3.13'deki yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemde  $G_0(s)$  yukarıdaki gibi verilmiş olup ağırlık transfer fonksiyonu ise  $W(s) = \frac{5s + 0.5}{s + 500}$  olarak tanımlanmıştır.

Bu sistemi dayanıklı kararlı kılacak kazanç aralıkları bulunacaktır.

Bu ağırlık transfer fonksiyonu, düşük frekanslar için modelde %0.1 civarı belirsizlik olduğunu ima ederken yüksek frekanslar için ise %500 civarı belirsizlik olduğunu ifade eder. Bu sistem için

$$X(w^2) = 0.268815w^8 - 2.14613w^6 + 5.24513w^4 - 5.67506w^2 + 1 \quad (3.128)$$

$$Y(w^2) = -0.155583w^8 + 1.63275w^6 - 5.8774w^4 + 8.09596w^2 - 3.012 \quad (3.129)$$

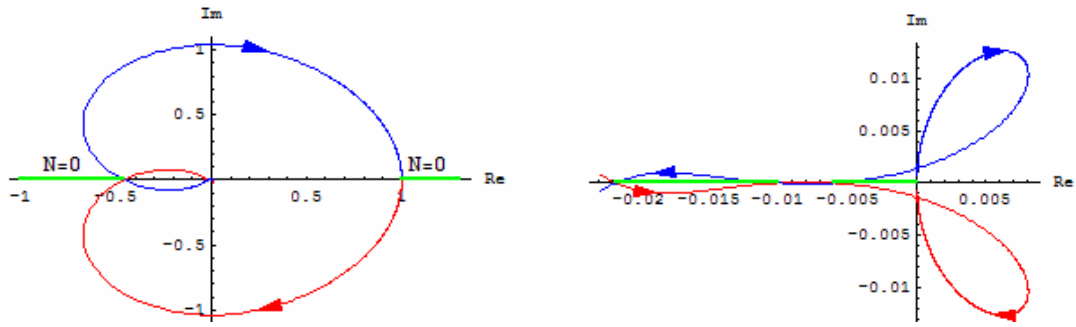
$$Z(w^2) = 2.0117w^{10} - 10.1306w^8 + 26.9288w^6 - 8.03144w^4 - 0.9083w^2 + 1 \quad (3.130)$$

olarak bulunur.  $D(s)$ 'in köklerinin hepsi sol yarı düzlemde olduğundan;  $u_0 = 0$  'dır ve sistem açık çevrim kararlıdır.  $Y(w^2)$  'nin pozitif reel kökleri  $w_1^* = 0.759835$ ,  $w_2^* = 1.53309$ ,  $w_3^* = 1.88847$  ve  $w_4^* = 2.0001$  'dir. Bu köklere  $w_5^* = 0$  ve  $w_6^* = \infty$  'da eklenince, altı tane reel eksenden geçiş frekansı olur. Bu geçiş frekansları için Teorem 3.1'den elde edilen sonuçlar, Tablo 3.13'de gösterilmiştir.

**Tablo 3.13 :** Örnek 3.11 İçin  $G_0(s)$ ’i Kararlı Kılan Kazançlar.

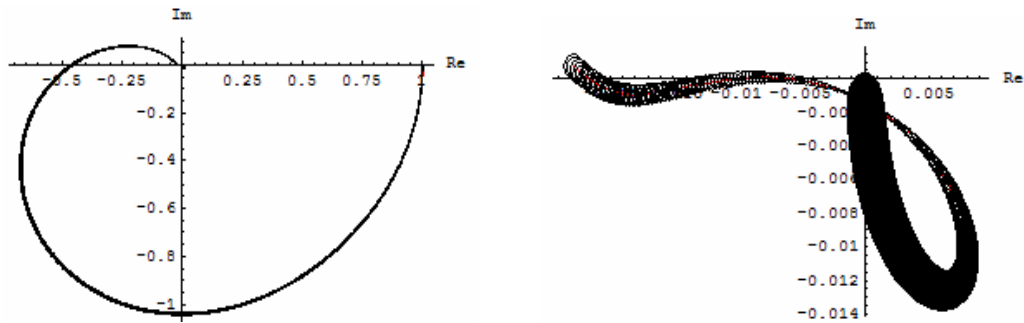
| $i$ | $w_i^*$  | $x_i^*$   | $r_i$ | $u_i$    | $\tilde{K}_{p0}$             |
|-----|----------|-----------|-------|----------|------------------------------|
| 1   | 0.759835 | -0.459237 | 2     | <b>0</b> | $0 < K_{p0} < 2.17752$       |
| 2   | 1.53309  | -0.021719 | -2    | 2        | $2.17752 < K_{p0} < 46.0416$ |
| 3   | 1.88847  | -0.010001 | 2     | <b>0</b> | $46.0416 < K_{p0} < 99.9875$ |
| 4   | 2.0001   | -0.005959 | -2    | 2        | $99.9875 < K_{p0} < 167.803$ |
| 5   | $\infty$ | 0         | 1     | <b>0</b> | $167.803 < K_{p0} < \infty$  |
| 6   | 0        | 1         | -1    | 1        | $-\infty < K_{p0} < -1$      |
| 7   | -        | $\infty$  | -     | <b>0</b> | $-1 < K_{p0} < 0$            |

Tablo 3.13’den  $\tilde{K}_{p0} \in (-1, 2.17752) \cup (46.0416, 99.9875) \cup (167.803, \infty)$  kazanç aralıkları için belirsizlik durumu olmadan  $W(s)=0$  için  $G_0(s)$  sistemi kapalı çevrimde kararlı kılınabilir. Bulunan sonuçlar, Şekil 3.17 ile uyushmaktadır.



**Şekil 3.17 :** Örnek 3.11’de  $G_0(s)$ ’nin Farklı Skalalar İçin Nyquist Eğrisi.

Yapısal olmayan belirsizlik içeren  $\Delta G(s)$  sistemine ilişkin Nyquist eğrisi, farklı skalalarda  $w > 0$  için Şekil 3.18’de gösterilmiştir. Şekil 3.16’da görüldüğü gibi Nyquist eğrisinin reel eksen kesim yerleri bir bant tanımlar.



**Şekil 3.18 :** Örnek 3.11’de  $\Delta G(s)$ ’nin Farklı Skalalar İçin Nyquist Eğrisi.

(3.113) ve (3.114)'den

$$N_b(w^2) = 0.58 \times 10^{-9} w^{22} + 1.39 \times 10^{-9} w^{20} - 1.52 w^{18} + 31.77 w^{16} - 281 w^{14} + 1357 w^{12} - 3870 w^{10} + 6563 w^8 - 6309 w^6 + 3048 w^4 - 567 w^2 + 6.25 \times 10^{-5} \quad (3.131)$$

$$D_b(w^2) = 4.05 \times 10^{-9} w^{24} + 2.02 \times 10^{-3} w^{22} + 252.9 w^{20} - 2547 w^{18} + 13185.6 w^{16} - 36119.8 w^{14} + 55264 w^{12} - 25633 w^{10} - 292 w^8 + 4278 w^6 - 952.3 w^4 - 113.5 w^2 + 62.5 \quad (3.132)$$

biçiminde bulunur. (3.112)'den  $R(w^2)$  'nin negatif olmayan reel kökleri

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0.7581, \quad w_4 = 0.7616, \quad w_5 = 1.5191, \quad w_6 = 1.5506, \\ w_7 = 1.8313, \quad w_8 = 2.028, \quad w_9 = 247.85, \quad w_{10} = 252.17 \quad (3.133)$$

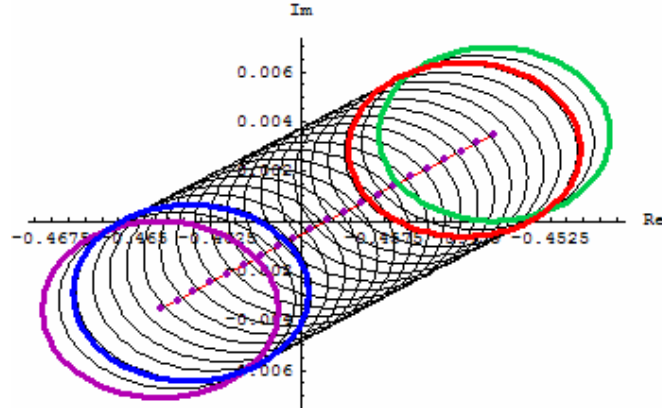
olarak hesaplanır. Bu köklerin (3.109)'da yazılmasıyla reel eksen kesim yerleri bulunur. Kesim yerlerinin (3.115) ve (3.116)'daki gibi düzenlenmesi ve (3.122)'den kazançların bulunmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 3.14'de verilmiştir.

**Tablo 3.14 :** Örnek 3.11 İçin Belirsizlik Kazanç Aralıkları.

| $k$ | $w_{2k-1}$ | $w_{2k}$ | $p_{k \min}$          | $p_{k \max}$          | $\overset{\Delta}{K}_p$                                    |
|-----|------------|----------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------|
| 1   | 0          | 0        | 0.999                 | 1.001                 | $-1.001 < K_{pk} < -0.999$                                 |
| 2   | 0.7581     | 0.7616   | -0.46537              | -0.45309              | $2.1488 < K_{pk} < 2.2071$                                 |
| 3   | 1.5191     | 1.5506   | -0.02236              | -0.02101              | $44.718 < K_{pk} < 47.5813$                                |
| 4   | 1.8313     | 2.028    | -0.01211              | -0.00498              | $82.584 < K_{pk} < 200.91$                                 |
| 5   | 247.85     | 252.17   | $-6.16 \cdot 10^{-4}$ | $-6.21 \cdot 10^{-4}$ | $-\infty < K_{pk} < -1610.7$<br>$1621.9 < K_{pk} < \infty$ |

Tablo 3.13 ve Tablo 3.14'den bulunan sonuçlar kullanılarak Teorem 3.3'den kapalı çevrim sistem  $\overset{\Delta}{K}_p \in (-0.999, 2.1488) \cup (47.5813, 82.584) \cup (200.91, 1621.9)$  kazanç aralıkları için dayanaklı kararlıdır.

$\overset{\Delta}{G}(s)$  sisteminin Nyquist eğrisinin  $w = 0.757708$  ile  $w = 0.761995$  frekansları arasındaki parçası, Şekil 3.19'da verilmiştir. Şekil 3.19'dan görüldüğü gibi bu eğri reel eksen  $w = 0.757708$  frekansında (mor çember) kesmeye başlar ve kesim yeri,  $w_3 = 0.7581$  frekansında (mavi çember) minimum değerini alırken;  $w_4 = 0.7616$  frekansında (kırmızı çember) maksimum değerini alır ve sonra  $w = 0.761995$  frekansında (yeşil çember) biter.



**Şekil 3.19 :** Örnek 3.11’de  $w = 0.757708$  ile  $w = 0.761995$  Arası Nyquist Eğrisi.

Bu sistem için ağırlık transfer fonksiyonu  $W(s) = \frac{10s+1}{s+10}$  olursa; Lemma 3.12’den  $\overset{\Delta}{K}_p \in (-\infty, -16.307) \cup (-1.1111, -0.9091) \cup (0.9589, \infty)$  bulunur. Teorem 3.3’den Şekil 3.15’de verilen sistem kapalı çevrimde  $\check{K}_p \in (-0.9091, 0.9589)$  kazanç aralıkları için dayanıklı kararlı olur.

### 3.6.3.2 Örnek 3.12

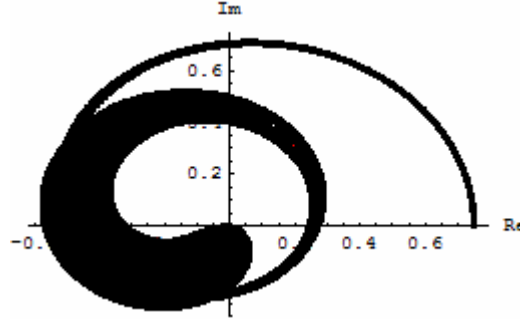
Örnek 3.9’da verilen  $G_0(s)$  sistemi için  $W(s) = \frac{1.2s^2 + 2s + 1}{s^2 + 40s + 100}$  ağırlık transfer fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu sistemi dayanıklı kararlı kılacak kazanç aralıklarını bulalım.

Hem  $G_0(s)$  hem de  $W(s)$ , kararsızdır. Tablo 3.11’den  $G_0(s)$  sisteminin  $W(s) = 0$  durumunda  $\check{K}_{p0} \in (2.21453, \infty)$  için kararlı olduğu bulunmuştur. Lemma 3.12’den bulunan sonuçlar, Tablo 3.15’de verilmiştir.

**Tablo 3.15 :** Örnek 3.12 İçin Belirsizlik Kazanç Aralıkları.

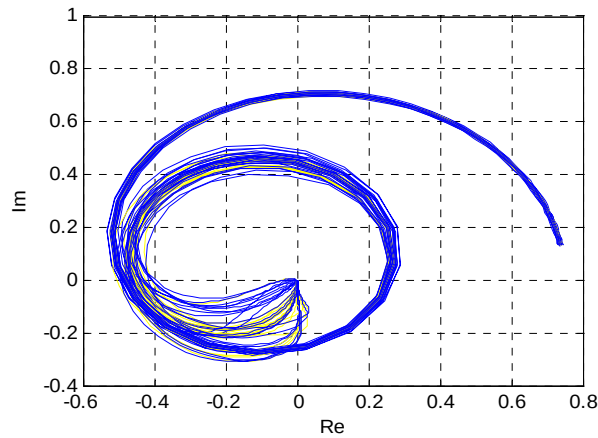
| $k$ | $w_{2k-1}$ | $w_{2k}$ | $p_{k \min}$ | $p_{k \max}$ | $\overset{\Delta}{K}_p$                                     |
|-----|------------|----------|--------------|--------------|-------------------------------------------------------------|
| 1   | 0          | 0        | 0.7425       | 0.7575       | $-1.346 < K_{p k} < -1.32$                                  |
| 2   | 1.7955     | 1.8104   | -0.5071      | -0.4671      | $1.972 < K_{p k} < 2.141$                                   |
| 3   | 3.1119     | 3.1309   | 0.2376       | 0.2807       | $-4.208 < K_{p k} < -3.563$                                 |
| 4   | 8.5332     | 10.12048 | -0.5743      | -0.3114      | $1.741 < K_{p k} < 3.21$                                    |
| 5   | 61.0083    | 100.2833 | -0.0439      | 0.0196       | $-\infty < K_{p k} < -51.048$<br>$22.75 < K_{p k} < \infty$ |

$\bar{K}_p^\Delta \in (-\infty, -51.048) \cup (-4.208, -3.563) \cup (-1.346, -1.32) \cup (1.741, 3.21) \cup (22.75, \infty)$  kazanç aralıkları haricinde  $\bar{K}_{p0} \in (2.21453, \infty)$  kümesinin kalan elemanları olan  $\bar{K}_p \in (3.21, 22.75)$  kazançları için bu sistem kapalı çevrimde dayanıklı kararlıdır.  $G_0(s)$  sistemi için Şekil 3.13'deki Nyquist eğrisine benzer olarak  $\bar{G}(s)$  sisteminin verilen ağırlık transfer fonksiyonu için Nyquist eğrisi, Şekil 3.20'de gösterilmiştir.

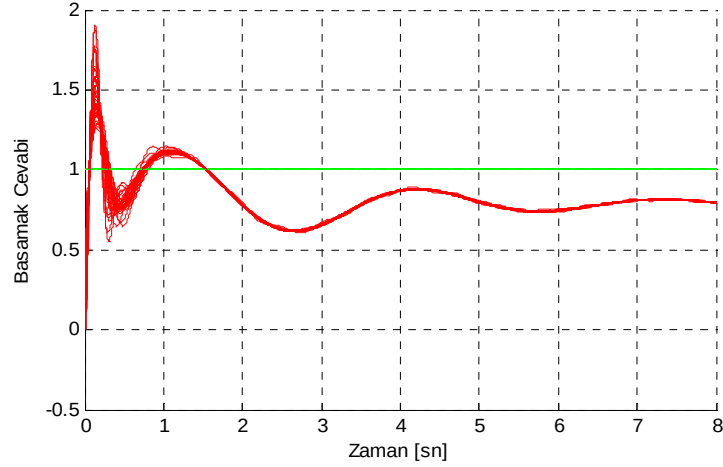


**Şekil 3.20 :** Örnek 3.12 İçin  $\bar{G}(s)$  sisteminin Nyquist Eğrisi.

Yapısal olmayan çeşitli belirsizlikler için  $\bar{G}(s)$  sisteminin simulink simülasyonu sonucu bulunan Nyquist eğrileri Şekil 3.21'de gösterilmiştir. Şekil 3.15'de verilen sistemin simulink modeli kullanılarak yapısal olmayan çeşitli belirsizlikler içeren bu sistem için bulunan birim basamak cevapları, Şekil 3.22'de verilmiştir. Bu amaçla kullanılan Matlab 7.1 sürümüne ilişkin simülasyon programı, Ekler bölümünde verilmiştir.



**Şekil 3.21 :**  $\bar{G}(s)$  'nin Simulink Simülasyonu ile Bulunan Nyquist Eğrileri.



**Şekil 3.22 :** Örnek 3.12’de Verilen Sistemin Birim Basamak Cevapları.

### 3.7 Sonuç

Bu bölümde verilen kazanç ve faz payları için doğrusal, tek giriş- tek çıkışlı, zaman gecikmesiz sistemleri kararlı yapacak tüm kazançların hesabı yapılmıştır. Kazanç ve faz payı kısıtlamalarının istenen her değeri için kapalı çevrimde sistemi kararlı kılmak her durumda mümkün olmayacağından bunların sınırlarını bulmak amacıyla erişilebilir maksimum kazanç payının ve maksimum faz payının hesabında başta açık çevrim sistemin kararlılık durumuna göre üç tür sisteme ilişkin yeni yöntemler önerilmiş ve sayısal örneklerle de incelenmiştir. Daha sonra sisteme ağırlık transfer fonksiyonu ilave edilerek oluşturulan ve yapısal olmayan belirsizlik içeren sistem yapısını kapalı çevrimde kararlı yapacak oransal kontrolörlerin hesabı için yeni bir yöntem önerilmiştir. Sayısal örneklerle sonuçlar teyit edilmiştir.

#### 4. ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE DAYANIKLI P TİPİ KONTROL

Zaman gecikmesiz sistemlerden zaman gecikmeli sistemlere geçişte; reel katsayılı polinomlardan quasi-polinomlara geçilmek zorunda kalınır. Zaman gecikmesiz sistemlerin kararlılığı kolayca incelenebilir; çünkü böyle sistemlerin karakteristik polinomlarının kök sayısı sonludur. Zaman gecikmeli sistemlerin karakteristik polinomlarının kök sayısı sonlu olmadığından kararlılık analizi zordur. Zaman gecikmeli keyfi mertebeli doğrusal sistemlerin kararlı yapılması için bir hesap yöntemi, Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilmiştir. Bu yöntem, Nyquist kriterinin bir genelleştirilmesi olup; Pontryagin (1955)'nin teoremleri üzerine kuruludur. Yöntemin bir dezavantajı, sistemin zaman gecikmesi elemanın sıfırdan istenilen keyfi bir değerine kadar sınırlandırılmış bir aralıkta değiştiğinin kabul edilmesi bu zaman gecikmesi aralığı için sistemi kararlı kılacak oransal kontrolörlerin ortak kümesini hesaplamasıdır. Üstelik bu hesabı yaparken gerekli frekans değerlerini bulmada pozitif ve negatif kazançlar için faz koşulundan bulunan iki fonksiyonu çizdirip grafik bir arama tekniği içerdiğinden, bu yöntemle hızlı ve analitik olarak kararlı kılacak kazançların bulunması zor olmaktadır. Bazı durumlarda zaman gecikmesi aralığı içerisindeki her eleman sistemi kapalı çevrimde kararlı yapmayabilir. Bu nedenle bir gecikme aralığı için kararlı kılan kazançların ortak kümesini bulmak yerine verilen bir gecikme için sistemi kararlı yapacak oransal kontrolörler kümesinin hesabının yapılması daha büyük önem taşır. Bu amaçla zaman gecikmeli sistemlerin Padé eşdeğeri bulunarak elde edilen yeni sistem için Bölüm 3'de verilen Munro ve diğ. (1999) tarafından önerilmiş olan yöntemi esas alarak sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazanç aralıklarını belirlemek mümkündür. Bu yolla bulunan kazançlar Padé yaklaşımı kullanılmasından dolayı bir miktar hata içerebilir. Bu bölümde, kullanılan Padé yaklaşımının mertebesi ne olursa olsun yapılan hata belirlenerek sistemi kapalı çevrimde kesin kararlı yapacak kazanç aralıklarının hesabı için yeni bir yöntem önerilmiştir. Bunun için Lam (1990) tarafından verilen bir teoremden yararlanılmıştır. Bu teorem, zaman gecikmesi elemanı ile Padé eş değeri arasındaki hata fonksiyonunu hesaplar (Özbay, 2000). Bu hata fonksiyonları, disk kümeleri tanımlar. Verilen zaman gecikmeli sistemin Nyquist eğrisi ile Padé yaklaşımıyla bulunan sistemin Nyquist eğrisi arasındaki fark düşünüldüğünde, yaklaşımın mertebesine göre tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesinin ele alınması mümkündür ve Padé yaklaşımıyla ortaya çıkan hata disk



kümeleri ile temsil edilebilirler. Böylece Nyquist eğrilerinin reel eksenini kesim noktaları bir bant oluşturur. Kaçınıcı mertebeden Padé yaklaşımı kullanılırsa kullanılsın verilen zaman gecikmeli sistemin kapalı çevrimde kesin kararlı olmasını sağlayabilen kazançlara ilişkin reel eksenini kesim yerleri, bu hat içindedir ve bu bölümde önerilen yeni yöntemle analitik olarak hesaplanabilir.

Bu bölümde önerilen yöntemle bulunan ve zaman gecikmeli sistemleri kapalı çevrimde kesin kararlı kılan kazançlar için Bölüm 3’de verilen yöntemlerin kullanılmasıyla zaman gecikmeli sistemlerde istenilen kazanç payı ve faz payını sağlayan oransal kontrolörlerin hesabı ve maksimum kazanç payı hesabı yapılabilir. Bu tezde verilen önemli bir yenilik de zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payı hesabının tam çözüm olarak bulunabilmesidir. Bu tam çözüm, üstel biçimde olan zaman gecikmesi terimini içermez ve böylece maksimum faz payının hesabı, sonsuz sayıda kökü olan bir quasi-polinomla ilgilenmek yerine reel katsayılı sıradan bir polinomun sonlu sayıda reel kökünün bulunmasına dayanır ve hesabı önemli ölçüde kolaylaştırır. Ayrıca bu bölümde zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payını sağlayan en büyük kazancın hesabı da yapılmıştır.

#### 4.1 Kararlılığı Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması

Doğrusal zamanla değişmeyen zaman gecikmeli sistemler, kapalı çevrimde polimomsu (quasi-polinom) olarak bilinen karakteristik polinomlara neden olurlar. Böyle sistemlerin kararlılığını analiz etmek için Pontryagin (1955)’nin teoremlerini esas alarak Nyquist teoreminin bir genelleştirmesi üzerine kurulu olan Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilmiş grafik bir yöntemden yararlanabiliriz.  $h(\tau, t)$ , reel sabit katsayılı olan ve  $\tau$  ile  $t$  değişkenlerine sahip

$$h(\tau, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tau^m t^n \quad (4.1)$$

biçiminde quasi-polinom olsun.  $h(\tau, t)$  polinomunun iki değişkeninin de en büyük dereceye sahip olduğu teriminin  $a_{mn}$  katsayısının sıfırdan farklı olması koşulu altında, bu terime baş (principle) terim denilir. Daha açık bir ifadeyle baş terimi,  $a_{M N} \tau^M t^N$  ile gösterirsek;  $a_{mn} \neq 0$  olmak üzere  $a_{mn} \tau^m t^n$  terimi için, ya  $M > m$ ,  $N > n$  veya  $M = m$ ,  $N > n$  yada  $M > m$ ,  $N = n$  olur. Örneğin  $h(\tau, t) = 3\tau + t^2$  baş terime sahip değilken;  $h(\tau, t) = \tau^2 + t + 2\tau^2 t$  baş terime sahiptir.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık analizinde Nyquist kriterinin kullanılabilmesini amaçlayan Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilen yöntemi ele

almadan önce Pontryagin'ın aşağıdaki teoremini vermek yerinde olacaktır (Pontryagin, 1955).

#### 4.1.1 Teorem 4.1 (Pontryagin, 1955)

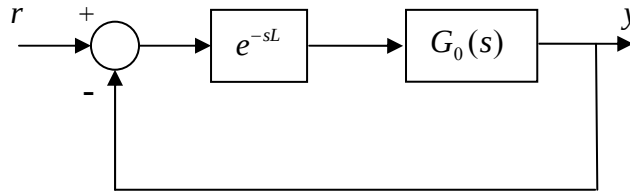
(4.1)'de verilen polinom baş terime sahip değilse, o zaman

$$H(\tau) = h(\tau, e^\tau) \quad (4.2)$$

fonksiyonu keyfi büyüklükte pozitif reel kısmı olan sonsuz sayıda sıfıra sahiptir.

■

Pek çok sistem giriş işareti ile çıkış işareti arasında bir saf zaman gecikmesi içerir. Bu zaman gecikmesi, transfer fonksiyonuna  $e^{-sL}$  şeklinde bir terim olarak yansır. Şekil 4.1'de zaman gecikmesine sahip tek girişli-tek çıkışlı bir kontrol sistemi görülmektedir.



Şekil 4.1 : Zaman Gecikmeli Kontrol Sistemi.

Zaman gecikmeli sistemi,

$$G(s) \triangleq G_0(s) e^{-sL} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-sL} \quad (4.3)$$

olarak tanımlayalım. Burada  $L$ , zaman gecikmesidir.  $G_0(s)$ , (3.1)'de verilen zaman gecikmesinden bağımsız sistemdir.  $N(s)$  polinomu, (3.2)'de verildiği gibidir. Payda polinomu  $D(s)$  ise,

$$D(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \quad (4.4)$$

biçimindedir. Nyquist kriterinin kullanılabilmesi için sağlanması gereken koşullar, Xu ve diğ. (2003) tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

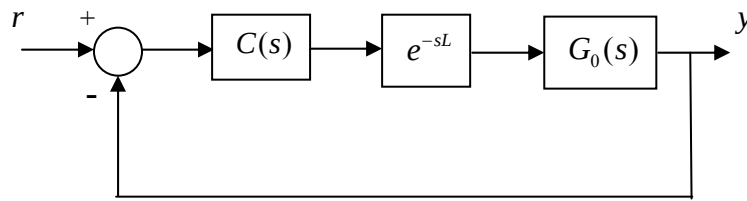
#### 4.1.2 Teorem 4.2 (Xu, Datta ve Bhattacharyya, 2003)

Şekil 4.1’de görülen birim geri beslemeli (4.3) ile verilen bir sistemin  $N(s)$  ve  $D(s)$  polinomları sırasıyla  $m$  ve  $n$ . dereceden reel katsayılı polinomlar olup; (3.2) ve (4.4)’de verildiği gibi olsun. O zaman aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

**a.)** Eğer  $n < m$  ise veya  $n = m$  ve  $|a_n / b_n| \geq 1$  ise; Nyquist kriteri uygulanamaz ve kapalı çevrimde sistem kararsızdır. Burada  $a_n$  ve  $b_n$ , sırasıyla  $N(s)$  ve  $D(s)$  polinomlarının baş katsayılarıdır.

**b.)** Eğer  $n > m$  ise veya  $n = m$  ve  $|a_n / b_n| < 1$  ise; Nyquist kriteri uygulanarak kapalı çevrim sistemin kararlılığı test edilebilir. ■

Şekil 4.1’de görülen sisteme (3.4)’dekine benzer şekilde bir oransal kontrolör ilave edilerek Şekil 4.2’deki geri beslemeli kontrol sistemi elde edilebilir.



**Şekil 4.2 :** Zaman Gecikmeli Bir Sistemin Oransal Kontrolü.

Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilen yöntemin amacı, verilen bir  $L \in [0, L_0]$  zaman gecikmesi aralığı için (4.3) ile verilen doğrusal zamanla değişmeyen sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak  $K_p$  kazanç kontrolörlerinin ortak kümesini bulma problemini çözmektir. Bu problemi çözmek için Xu ve diğ. (2003) tarafından aşağıdaki algoritma verilmiştir.

#### 4.1.3 Algoritma 4.1

**Adım 1:** Zaman gecikmesinden bağımsız  $G_0(s)$  sistemini kararlı yapacak oransal  $K_p$  kontrolörlerinin tam bir kümesini bul ve bu kümeyi  $S_0$  ile göster. Bu amaçla Teorem 3.1’i de kullanabiliriz.

**Adım 2:**  $\lim_{s \rightarrow \infty} |K_p G_0(s)| \geq 1$  olmasını sağlayan kazançların kümesi olan  $S_N$ ’i tanımla. Sisteme zaman gecikmesi eklendikten sonra  $S_N$  kümesindeki elemanlar, kapalı çevrim sistemi kararsız yapar. Bu nedenle  $S_0$ ’dan  $S_N$  hariç olan  $S_1$  kümesini oluştur ve  $S_1 \triangleq S_0 \setminus S_N$  olarak tanımla.

**Adım 3:** Aşağıda tanımı verilen  $S_L$  kazançlar kümesini hesapla.

$$S_L = \left\{ K_p \mid K_p \notin S_N \text{ ve } \exists L \in [0, L_0], w \in \mathbb{R} \Rightarrow K_p G_0(jw) e^{-jLw} = -1 \right\} \quad (4.5)$$

**Adım 4:**  $L \in [0, L_0]$  zaman gecikmesi için  $G(s)$  sistemini kapalı çevrimde kararlı yapacak  $S_R \triangleq S_1 \setminus S_L$  ile gösterilen  $K_p$  kontrolörlerinin kümesini bul.

Bu algorithmada önemli olan  $S_L$  kümesini bulmaktır. (4.5) ile verilen tanım, aşağıdaki iki koşula eşdeğerdir. Buna göre faz koşulu ve genlik koşulu sırasıyla,

$$\text{Arg}[K_p G_0(jw)] - Lw = 2k\pi - \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

$$|K_p G_0(jw)| = 1 \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Nyquist eğrisi, simetrik olduğundan; yalnızca  $w > 0$  frekanslarını düşünmek yeterlidir. (4.6) ile verilen faz koşulunu eş değer olarak

$$\text{Arg}[K_p G_0(jw)] - Lw = -\pi \quad (4.8)$$

biçiminde yazmak mümkündür. Böylece (4.6) ve (4.7) ile verilen iki koşuldan

$$L(w, K_p) = \frac{\text{Arg}[K_p G_0(jw)] + \pi}{w} \quad (4.9)$$

$$K_p(w) = \pm \frac{1}{|G_0(jw)|} \quad (4.10)$$

elde edilir.  $K_p > 0$  için

$$L(w, K_p) = L(w) = \frac{\text{Arg}[G_0(jw)] + \pi}{w} \quad (4.11)$$

bağıntısından  $w$ 'nin  $\Omega^+$  diye adlandırılan kümesini bulmak için  $L(w) \leq L_0$  'ı ele almak gerekir.  $\Omega^+$  kümesindeki  $w$  frekanslarının sınır değerlerinin (4.10) ile verilen genlik koşulunda yazılmasıyla bu frekanslara ilişkin pozitif  $K_p$  değerleri kümesinin sınırları bulunabilir. Sınır değerleri bulunan bu kazanç aralıkları kümesini  $S_L^+$  ile

gösterelim.  $S_L^+$  kümesindeki pozitif  $K_p$  değerleri için kapalı çevrim sistem sanal eksende kutuplara sahip olur. Benzer olarak  $K_p < 0$  için, faz koşulundan

$$L(w) = \frac{\text{Arg}[-G_0(jw)] + \pi}{w} \quad (4.12)$$

bağıntısı yazılabilir. Bu son bağıntıdan  $w$  frekanslarına ilişkin  $\Omega^-$  kümesi bulunabilir.  $\Omega^-$  kümesindeki frekasların sınır değerlerinin (4.10)'da yazılmasıyla bunlara ilişkin kazanç aralıklarının sınırları bulunur. Bu kazanç aralıkları kümesini  $S_L^-$  ile gösterirsek;  $S_L^+$  ve  $S_L^-$  kümelerinin birleşimi,

$$S_L = S_L^+ \cup S_L^- \quad (4.13)$$

kümesini verir.  $S_R$ 'nin hesabını daha kolaylaştırmak için; Algoritma 4.1, aşağıdaki algoritma ile genişletilebilir (Xu ve diğ., 2003).

#### 4.1.4 Algoritma 4.2

**Adım 1:** Zaman gecikmesinden bağımsız  $G_0(s)$  sistemini kararlı yapan  $S_0$  kazanç kümesini bul.

**Adım 2:** Aşağıdaki üç koşul yardımıyla  $S_N$  kazanç kümesini oluştur.

a.) Eğer  $n < m$  ise;  $S_N = \mathbb{R}$  ve  $S_R = \emptyset$ 'dir.

b.) Eğer  $n > m$  ise;  $S_N = \emptyset$ 'dir.

c.) Eğer  $n = m$  ise;  $S_N = \{ |K_p| \geq |b_n / a_n| \}$ 'dir. Burada  $a_n$  ve  $b_n$  sırasıyla  $N(s)$  ve  $D(s)$  polinomlarının baş katsayılarıdır.

**Adım 3:**  $S_1 = S_0 \setminus S_N$  kümesini bul.

**Adım 4:**  $S_L^+$  ve  $S_L^-$  kümelerinin kombinasyonu  $S_L$  kümesini hesapla.

**Adım 5:**  $S_R \triangleq S_1 \setminus S_L$  kazançlar kümesini bul.

Bu yöntem, gerekli frekans değerlerini bulmak için (4.9) ve (4.12) ile verilen faz koşulunu çizdirip grafik bir arama tekniği içerdiğinden; bu noktada faz koşulunun hangi frekans değerine kadar çizdirilebileceğinin bilinmesi önem taşır. Bu kritik frekans değeri  $w_c$ ,

$$w_c = \frac{2\pi}{L_0 - L_1} \quad (4.14)$$

bağıntısıyla hesaplanabilir (Naimark ve Zeheb, 1996). Burada  $L_1$  ve  $L_0$  sırasıyla,  $L \in [L_1, L_0]$  biçimindeki zaman gecikmesi aralığının alt ve üst sınırını göstermekte olup yukarıda anlatıldığı üzere  $[0, L_0]$  aralığı için  $L_1 = 0$  alınır. Bu yöntemi, aşağıdaki örneklerle inceleyelim.

#### 4.1.4.1 Örnek 4.1

$L \in [0, 1.8]$  zaman gecikmesi için aşağıdaki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak oransal kazançları hesaplamak için Algoritma 4.2’i kullanalım.

$$G(s) = G_0(s)e^{-sL} = \frac{N(s)}{D(s)}e^{-sL} = \frac{s^2 + 3s - 2}{s^3 + 2s^2 + 3s + 2}e^{-sL} \quad (4.15)$$

**Adım 1:** Yukarıda verilen zaman gecikmesinden bağımsız  $G_0(s)$  sistemini kapalı çevrimde kararlı yapacak kazanç kümesi  $S_0$ ’ı bulmak için Teorem 3.1’den elde edilen sonuçlar, Tablo 4.1’de gösterilmiştir.

**Tablo 4.1 :** Örnek 4.1 İçin Kararlı Kılan  $S_0$  Kazanç Kümesi.

| $i$ | $w_i^*$  | $x_i^*$  | $r_i$ | $u_i$ | $K_i$                      |
|-----|----------|----------|-------|-------|----------------------------|
| 1   | 0        | -1       | 1     | 0     | $0 < K_p < 1$              |
| 2   | $\infty$ | 0        | 1     | 1     | $1 < K_p < \infty$         |
| 3   | 1.33117  | 2.443    | -2    | 2     | $-\infty < K_p < -0.40933$ |
| 4   | -        | $\infty$ | -     | 0     | $-0.40933 < K_p < 0$       |

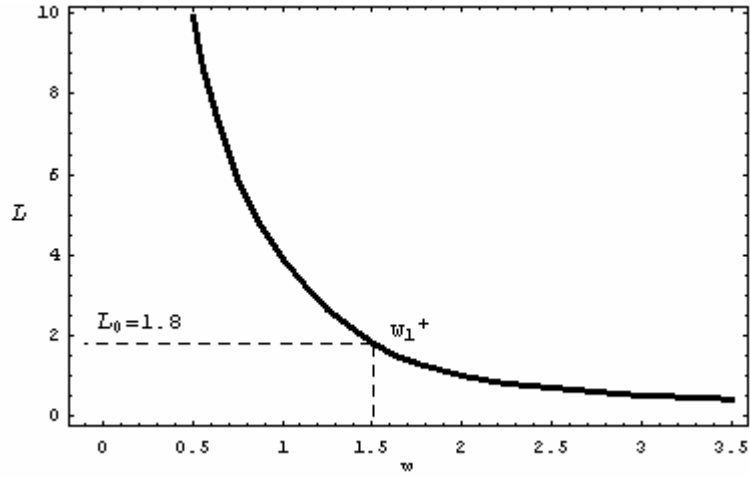
Tablo 4.1’den  $G_0(s)$  sistemi kapalı çevrimde  $S_0 = (-0.40933, 1)$  kazançları için kararlı kılınabilir.

**Adım 2:**  $n = 3 > 2 = m$  olduğundan;  $S_N = \emptyset$ ’dir.

**Adım 3:**  $S_1 = S_0 \setminus S_N = S_0$  olacağından;  $S_1 = (-0.40933, 1)$  olur.

**Adım 4:**  $L_0 = 1.8$  sn ve  $L_1 = 0$  sn olmak üzere (4.14)’den  $w_c \cong 3.5$  bulunur.

$K_p > 0$  için,  $\Omega^+$ ’a ilişkin frekansları bulmak amacıyla (4.11) ile verilen faz koşulunun  $w \in (0, w_c)$ ’a göre grafiği, Şekil 4.3’de verilmiştir.

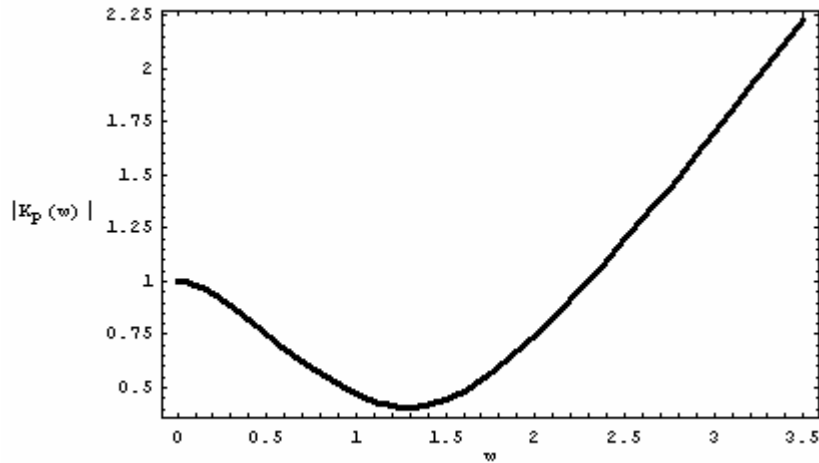


**Şekil 4.3 :** Örnek 4.1’de  $K_p > 0$  İçin Faz Eğrisi.

$L_0 = 1.8$  sn için Şekil 4.3’den  $w_1^+ = 1.5129$  bulunur. Böylece  $\Omega^+ = [1.5129, +\infty)$  bulunur.  $K_p > 0$  için, (4.10)’dan genlik koşulu

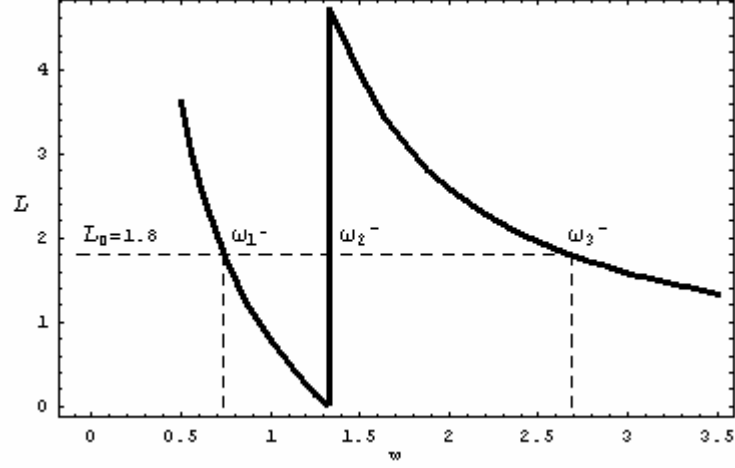
$$K_p(w) = \frac{\sqrt{(2-2w^2)^2 + (3w-w^3)^2}}{\sqrt{(-2-w^2)^2 + 3w^2}} \quad (4.16)$$

olarak bulunur. (4.16)’da  $w_1^+ = 1.5129$  yazılarak  $K_p(w_1^+) = 0.4473$  bulunur. Böylece  $S_L^+ = [0.4473, +\infty)$  olarak bulunur.  $K_p > 0$  için, (4.16) ile verilen genlik koşulunun  $w \in (0, w_c)$ ’a göre grafiği, Şekil 4.4’de verilmiştir.



**Şekil 4.4 :** Örnek 4.1’de  $K_p > 0$  İçin Genlik Eğrisi.

Benzer olarak  $K_p < 0$  için,  $\Omega^-$ ’a ilişkin frekansları bulmak amacıyla (4.12) ile verilen faz koşulunun  $w \in (0, w_c)$ ’a göre grafiği, Şekil 4.5’de verilmiştir.



**Şekil 4.5 :** Örnek 4.1’de  $K_p < 0$  İçin Faz Eğrisi.

$L_0 = 1.8$  sn için Şekil 4.5’den  $w_1^- = 0.7359$ ,  $w_2^- = 1.3312$  ve  $w_3^- = 2.6817$  olarak bulunur. Böylece  $\Omega^- = [0.7359, 1.3312) \cup [2.6817, +\infty)$  olduğu görülür.  $K_p < 0$  için, (4.10)’dan genlik koşulu

$$K_p(w) = \frac{-\sqrt{(2-2w^2)^2 + (3w-w^3)^2}}{\sqrt{(-2-w^2)^2 + 3w^2}} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. (4.17)’de  $w_1^-$ ,  $w_2^-$  ve  $w_3^-$  yazılarak sırasıyla  $K_p(w_1^-) = -0.6025$ ,  $K_p(w_2^-) = -0.4135$  ve  $K_p(w_3^-) = -1.3691$  olarak hesaplanır. Böylece  $K_p > 0$  için,  $S_L^- = [-0.6025, -0.4135] \cup (-\infty, -1.3691]$  olarak bulunur. (4.13)’den

$$S_L = [-0.6025, -0.4135] \cup (-\infty, -1.3691] \cup [1.5129, +\infty) \quad (4.18)$$

bulunur.

**Adım 5:**  $L \in [0, 1.8]$  zaman gecikmesi için sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan

$$S_R = S_1 \setminus S_L = (-0.4093, 0.4473) \quad (4.19)$$

kazançlar kümesi elde edilir. (4.19) ile bulunan kazanç kümesi,  $L \in [0, 1.8]$  zaman gecikmesi aralığı için kararlı kılan kazançların ortak kümesidir.  $L_0 = 1.8$  sn ve  $K_p = -0.45$  için Şekil 4.2’deki kontrol sisteminin birim basamak cevabı, Şekil 4.6’da verilmiştir. Birim basamak cevabı incelendiğinde verilen sistemin kapalı çevrimde  $K_p = -0.45$  için kararlı olduğu görülür. Oysa bu kazanç değeri, (4.19)’da verilen kazanç aralığının dışındadır; ama kapalı çevrim sistem kararlı olmuştur. Bunun nedeni, Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilen bu yöntemin amacının sabit bir



The graph illustrates the step response of a system. The vertical axis represents the 'Basamak Cevabı' (Step Response) and the horizontal axis represents 'Zaman [sn]' (Time [s]). The response begins at 0, exhibits an initial undershoot to about -0.3 at 4 seconds, followed by a series of damped oscillations. The peaks of the oscillations occur at approximately 8, 16, 24, 32, and 40 seconds, while the troughs occur at approximately 4, 12, 20, 28, and 36 seconds. The system eventually settles to a steady-state value of approximately 0.3.

#### 4.2 Padé Yaklaşımı Yardımıyla Kazanç Kümesi Hesaplamada Hata Paylarının Bulunması

The diagram shows a control system with a disturbance path. The reference signal  $r(t)$  is split into two parallel paths. The upper path contains a disturbance block  $P_d(s)$  followed by a plant block  $G_0(s)$ , producing a disturbance signal  $\hat{y}(t)$ . The lower path contains a delay block  $e^{-sL}$  followed by a plant block  $G_0(s)$ , producing the system output  $y(t)$ . The signals  $\hat{y}(t)$  and  $y(t)$  are combined at a summing junction, where  $\hat{y}(t)$  is subtracted (indicated by a minus sign) and  $y(t)$  is added (indicated by a plus sign), resulting in the error signal  $h(t)$ .

70

Amaç, olası tüm giriş işaretleri için hata işareti  $h(t)$ 'i (enerjiyi) en küçük yapan  $P_d(s)$  transfer fonksiyonunu bulmaktır. (4.3) ile verilen zaman gecikmeli sistemin Padé yaklaşımıyla bulunan eş değerini

$$\hat{G}(s) \triangleq G_0(s)P_d(s) = \frac{N(s)}{D(s)}P_d(s) = \frac{\hat{N}(s)}{\hat{D}(s)} \quad (4.20)$$

olarak tanımlayalım. Burada

$$e^{-sL} \cong P_d(s) = \frac{\sum_{k=0}^i (-1)^k c_k (sL)^k}{\sum_{k=0}^t c_k (sL)^k} \quad (4.21)$$

ve

$$c_k = \frac{(2d-k)! d!}{2d! k!(d-k)!} \quad (4.22)$$

biçimindedir.  $d$ , Padé yaklaşımının mertebesini gösterir. Örneğin birinci ve ikinci mertebeden Padé yaklaşımları sırasıyla,

$$P_d(s) = \frac{1 - \frac{L}{2}s}{1 + \frac{L}{2}s} \quad (4.23)$$

ve

$$P_d(s) = \frac{1 - \frac{L}{2}s + \frac{L^2}{12}s^2}{1 + \frac{L}{2}s + \frac{L^2}{12}s^2} \quad (4.24)$$

biçiminde olur. Bu noktada Padé yaklaşımında ne kadar hata yapıldığı ve dolayısıyla kaçınıcı mertebeden Padé yaklaşımının kullanılması gerektiği sorusu önem kazanır. Bu amaçla aşağıdaki teorem kullanılabilir (Lam, 1990).

#### 4.2.1 Teorem 4.3

$$|W_{Pd}(jw)| \triangleq |e^{-jwL} - P_d(jw)| \leq \begin{cases} 2 \left( \frac{eLw}{4d} \right)^{2d+1}, & w \leq \frac{4d}{eL} \text{ ise} \\ 2, & w \geq \frac{4d}{eL} \text{ ise} \end{cases} \quad (4.25)$$

hata fonksiyonu olmak üzere; eğer

$$\sup_w |G(jw) - \hat{G}(jw)| \leq \gamma \Rightarrow \sup_w |G(jw)| |e^{-jwL} - P_d(jw)| \leq \gamma \quad (4.26)$$

olması isteniyorsa; aşağıdaki algoritma kullanılabilir (Özbay, 2000). Keyfi mertebeden Padé yaklaşımlarının kullanılmasıyla oluşan hatalar nedeniyle zaman gecikmeli bir  $G(s)$  sisteminin Padé eş değerleri fonksiyonlar kümesi tanımlayacağından; (3.97)'dekine benzer olarak belirsizlik içeren kontrol edilen sistem

$$\hat{G}_\Delta(s) \triangleq \hat{G}(s)(1 + W_{Pd}(s)\Delta) \quad (4.27)$$

olarak yazılabilir.

#### 4.2.2 Algoritma 4.3 (Özbay, 2000)

**Adım 1:**  $|G_0(jw)|$  eğrisinden  $w \geq w_x$  olmak üzere  $|G_0(jw)| \leq \gamma/2$  şartını sağlayan  $w_x$  değerini belirle.  $d = 1$  olarak seç.

**Adım 2:**  $w_d \triangleq \max\{w_x, 4d/eL\}$  olarak tanımla ve

$$\varepsilon(w) \triangleq \begin{cases} 2 |G_0(jw)| \left( \frac{eLw}{4d} \right)^{2d+1}, & w \leq \frac{4d}{eL} \text{ ise} \\ 2 |G_0(jw)|, & w_d \geq w \geq \frac{4d}{eL} \text{ ise} \end{cases} \quad (4.28)$$

foksiyonunu çiz.

**Adım 3:**  $E_d \triangleq (1/\gamma) \max\{\varepsilon(w) : w \in [0, w_x]\}$  olarak tanımla. Eğer  $E_d \leq 1$  ise,  $d$  aranan değer olup; algoritmaya son verilebilir. Aksi halde  $d$ 'i bir artır ve Adım 2'e geri dön.

Teorem 4.3'e dikkat edersek (4.25) ile verilen hata fonksiyonu, Şekil 4.8'deki gibi  $\varepsilon(w)$  yarı çaplı disk bölgeleri tanımlar ve (4.28)'de  $w < (4d / eL)$  için

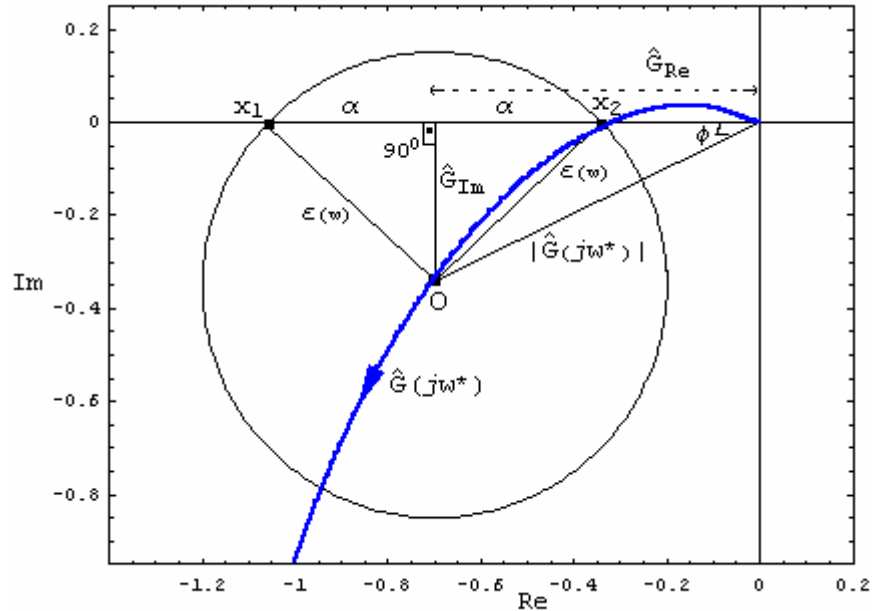
$$W_{pd1}(w) \triangleq 2 \left( \frac{eLw}{4d} \right)^{2d+1} \quad (4.29)$$

tanımı yapılırken;  $w > (4d / eL)$  için ise

$$W_{pd2}(w) \triangleq 2 \quad (4.30)$$

tanımını yapabiliriz. Böylece (4.29) ve (4.30)'da verilen her iki durum için de (4.28)'in, (3.104)'e benzediğini görürüz. (3.104)'deki  $r(w)$  yarı çapı ve  $|W(jw)|$  ağırlık fonksiyonunun yerini, burada sırasıyla diskin  $\varepsilon(w)$  yarı çapı ve  $W_{pd1}(w)$  veya  $W_{pd2}(w)$  hata fonksiyonlarının aldığını görürüz. Bu nedenle bu bölümde tanıtılacak yöntem, Bölüm 3.6'da verilen yöntemin zaman gecikmeli sistemlere uyarlanmış biçimidir. Burada kritik frekans, aşağıdaki bağıntıyla tanımlıdır.

$$\hat{w}_{pc} \triangleq \frac{4d}{eL} \quad (4.31)$$



**Şekil 4.8 :** Padé Yaklaşımıyla Oluşan Örnek Bir Hata Bölgesi.

(4.25) ile verilen hata fonksiyonunun tanımladığı disk kümesi içinde reel eksenini kesen Şekil 4.8'deki gibi bir diski ele alalım. Verilen zaman gecikmeli  $G(s)$

sisteminin Nyquist eğrisi  $s = jw$  için bu diskin içinden geçer.  $\varepsilon(w)$  yarı çaplı diskin O merkezinin orijine olan uzaklığı  $|\hat{G}(jw)|$  genliğine eşittir.  $\hat{G}_\Delta(jw)$  'nin Nyquist eğrisi, Padé yaklaşımıyla yapılan hata da göz önüne alındığında tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesi tanımladığı için; reel ekseni tek noktalarda değil bölgeler biçimine keser.  $w = w^*$  frekansı için  $\hat{G}_\Delta(jw)$  'nin Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim yerleri,  $x_1 \leq \text{Re}(s) \leq x_2$  olmak üzere Şekil 4.8'den yararlanarak aşağıda önerilen lemma yardımıyla bulunabilir. Burada (4.28) göz önüne alındığında;  $w < (4d/eL)$ ,  $w > (4d/eL)$  ve  $\hat{w}_{pc} = (4d/eL)$  olarak üç ayrı durum için inceleme yapmak gerekir. Aşağıda verilen lemma, Lemma 3.2'i temel alır. Bu lemma, Padé yaklaşımıyla bulunan kazanç aralıklarının gerçek değerlerden en fazla ne kadar farklı olabileceğinin hesaplanmasına yardım edecektir.

#### 4.2.3 Lemma 4.1 (Bayhan ve Söylemez)

Padé yaklaşımında yapılan hatanın etkisi nedeniyle  $\hat{G}_\Delta(jw)$  'nin Nyquist eğrilerinin oluşturduğu eğri ailesinin reel ekseni kesim yerlerini ve bu kesim yerlerine ilişkin kazançları bulmak için aşağıda verilen üç koşulun incelenmesi gerekir.

a.) (4.20) ile tanımlanan ve Padé yaklaşımından kaynaklanan (4.29)'da verilen hata fonksiyonunu içeren  $\hat{G}_\Delta(jw)$  sisteminin Nyquist eğri ailesinin reel ekseni kesim yerlerine karşı düşen reel  $w$  frekansları,

$$\left( \frac{X'_E(w) Z_x(w)}{2} - Z'_x(w) X_E(w) \right)^2 - \left( X'_R(w) Z_x(w) - Z'_x(w) X_R(w) \right)^2 X_E(w) = 0 \quad (4.32)$$

biçiminde tanımlanmış polinomun  $\ell = 1, 2, \dots, k$  olmak üzere  $w_\ell \leq w_{\ell+1}$  biçimde çiftler halinde  $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3, w_4, \dots, w_{2k-1}, w_{2k}$  olarak sıralı negatif olamayan reel kökleri içinden  $w < (4d/eL)$  koşulu sağlanacak şekilde belirlenir. Burada  $Z_x(w)$ ,  $X_R(w)$  ve  $X_E(w)$  sırasıyla

$$Z_x(w) \triangleq Z(w^2)P_z(w^2) \quad (4.33)$$

$$X_R(w) \triangleq X(w^2)P_x(w^2) - w^2 Y(w^2)P_y(w^2) \quad (4.34)$$

$$X_E(w) \triangleq 4P_z^2(w^2) \left( X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2) \right) (eLw/4d)^{4d+2} - w^2 \left( X(w^2)P_y(w^2) + Y(w^2)P_x(w^2) \right)^2 \quad (4.35)$$

biçiminde tanımlanmış polinomlardır.  $X'_E(w)$  ve  $Z'_x(w)$  sırasıyla,  $X_E(w)$  ve  $Z_x(w)$  polinomlarının  $w$ 'ye göre birinci türevlerini göstermektedir.  $P_x(w^2)$ ,  $P_y(w^2)$  ve  $P_z(w^2)$ , (4.21) ile verilen  $P_d(jw)$ 'nin (3.10)'dakine benzer şekilde yazılmasıyla bulunan

$$P_d(jw) = \frac{P_x(w^2)}{P_z(w^2)} + jw \frac{P_y(w^2)}{P_z(w^2)} \quad (4.36)$$

polinomunun birleşenleridir. Ayrıca  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$  ve  $Z(w^2)$  ise (3.11), (3.12) ve (3.13)'de tanımlanmış polinomları göstermektedir.  $L$  ise, zaman gecikmesidir.  $\ell = 1, 2, \dots, k$  olmak üzere (4.32)'nin  $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3, w_4, \dots, w_{2k-1}, w_{2k}$  biçiminde çiftler halinde sıralanmış ve (4.31)'de verilen  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından küçük olan negatif olmayan her bir  $w_{2\ell-1}$  ve  $w_{2\ell}$  kök çiftine ilişkin reel ekseni kesim yerleri,

$$x_{\ell \min} \triangleq \min(x_1(w_{2\ell-1}), x_1(w_{2\ell})) \quad (4.37)$$

$$x_{\ell \max} \triangleq \max(x_2(w_{2\ell-1}), x_2(w_{2\ell})) \quad (4.38)$$

olarak tanımlanmıştır. Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim yerlerinin oluşturduğu

$$\tilde{\chi}_{\ell} \triangleq (x_{\ell \min} \quad x_{\ell \max}) \quad (4.39)$$

aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları

$$\tilde{K}_{p\ell} \triangleq \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{-1}{x_{\ell \min}} \quad \frac{-1}{x_{\ell \max}} \right), & Sgn(x_{\ell \min}) = Sgn(x_{\ell \max}) \text{ ise} \\ \left( -\infty \quad \frac{-1}{x_{\ell \max}} \right) \cup \left( \frac{-1}{x_{\ell \min}} \quad \infty \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (4.40)$$

olup bunların birleşimi

$$C_1 \triangleq \bigcup_{\ell \in [1, 2, \dots, k]} \tilde{K}_{p\ell} \quad (4.41)$$

biçiminde tanımlıdır.

**b.)**  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından büyük olan frekanslar için hata fonksiyonu, artık (4.30)'da verildiği gibi olacağından (4.35)'de verilen  $X_E(w)$  polinomu,

$$X_E(w) = 4P_z^2(w^2) \left( X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2) \right) - w^2 \left( X(w^2)P_y(w^2) + Y(w^2)P_x(w^2) \right)^2 \quad (4.42)$$

biçimine gelir.  $Z_x(w)$  ve  $X_R(w)$ , (4.33) ve (4.34)'de verildiği gibidir. Padé yaklaşımından kaynaklanan (4.30)'da verilen hata fonksiyonunu içeren  $\hat{G}_\Delta(jw)$  sisteminin Nyquist eğri ailesinin reel eksenini kesim yerlerine karşı düşen reel  $w$  frekansları, (4.33), (4.34) ve (4.42)'nin (4.32)'de yazılmasıyla bulunan polinomun  $\sigma = 1, 2, \dots, t$  olmak üzere  $w_\sigma \leq w_{\sigma+1}$  biçimindeki  $w_1, w_2, w_3, w_4, \dots, w_{2t-1}, w_{2t}$  negatif olmayan reel kök çiftleri içinden  $w > (4d/eL)$  koşulu sağlanacak şekilde belirlenir.  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından büyük olan ve negatif olmayan bu  $w_{2\sigma-1}$  ve  $w_{2\sigma}$  kök çiftlerine ilişkin reel eksenini kesim yerleri, (4.37) ve (4.38)'e benzer olarak

$$x_{\sigma \min} = \min(x_1(w_{2\sigma-1}), x_1(w_{2\sigma})) \quad (4.43)$$

$$x_{\sigma \max} = \max(x_2(w_{2\sigma-1}), x_2(w_{2\sigma})) \quad (4.44)$$

olarak yazılabilir. Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim yerlerinin oluşturduğu

$$\tilde{\chi}_\sigma = (x_{\sigma \min} \quad x_{\sigma \max}) \quad (4.45)$$

aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları

$$\tilde{K}_{p\sigma} \triangleq \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{-1}{x_{\sigma \min}} \quad \frac{-1}{x_{\sigma \max}} \right), & Sgn(x_{\sigma \min}) = Sgn(x_{\sigma \max}) \text{ ise} \\ \left( -\infty \quad \frac{-1}{x_{\sigma \max}} \right) \cup \left( \frac{-1}{x_{\sigma \min}} \quad \infty \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (4.46)$$

olup bunların birleşimi,

$$C_2 \triangleq \bigcup_{\sigma \in [1, 2, \dots, t]} \tilde{K}_{p\sigma} \quad (4.47)$$

biçiminde tanımlanabilir.

c.)  $w = \hat{w}_{pc}$  kritik frekansı için  $\hat{G}_\Delta(jw)$  sisteminin Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim yerleri,

$$\tilde{\chi}_{pc} = (x_1(\hat{w}_{pc}), x_2(\hat{w}_{pc})) \quad (4.48)$$

aralığını oluşturur. Burada, Şekil 4.8'deki  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarının yerine ilişkin olan kabul gereğince

$$x_1(w) \triangleq \frac{1}{Z_x(w)} \left( X_R(w) - \sqrt{X_E(w)} \right) \quad (4.49)$$

$$x_2(w) \triangleq \frac{1}{Z_x(w)} \left( X_R(w) + \sqrt{X_E(w)} \right) \quad (4.50)$$

biçiminde tanımlıdır. Eğer  $X_E(\hat{w}_{pc}) < 0$  ise, bu frekans için reel eksenini kesim söz konusu değildir ve  $C_3 = \emptyset$  alınır; aksi halde (4.48)'e ilişkin kazanç aralıkları, (4.40) ve (4.46)'dakilere benzer olarak

$$C_3 \triangleq \tilde{K}_{pc_i} = \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{-1}{x_1(\hat{w}_{pc})} \quad \frac{-1}{x_2(\hat{w}_{pc})} \right), & Sgn(x_1(\hat{w}_{pc})) = Sgn(x_2(\hat{w}_{pc})) \text{ ise} \\ \left( -\infty \quad \frac{-1}{x_2(\hat{w}_{pc})} \right) \cup \left( \frac{-1}{x_1(\hat{w}_{pc})} \quad \infty \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

biçiminde yazılabilir. Bu üç koşuldan bulunan kazanç aralıklarının birleşimi yardımıyla Padé yaklaşımı kullanılması sonucu ortaya çıkan belirsizlik kazanç aralıkları,

$$C_u \triangleq C_1 \cup C_2 \cup C_3 \quad (4.52)$$

biçiminde tanımlıdır.

#### 4.2.4 Lemma 4.1'in ispatı

Şekil 4.8'de görülen O merkezli  $\varepsilon(w)$  yarı çaplı disk için Pisagor teoreminden

$$\alpha(w) = \sqrt{\varepsilon^2(w) - \hat{G}_{lm}^2(jw)} \quad (4.53)$$



bulunur. Burada  $\hat{G}_{\text{Im}}(jw)$ ,  $\hat{G}(jw)$  'nin

$$\hat{G}(jw) = \hat{G}_{\text{Re}}(jw) + j\hat{G}_{\text{Im}}(jw) \quad (4.54)$$

biçiminde reel ve sanal kısımlarına ayrılmasıyla elde edilir. Şekil 4.8'den  $x_1$  ve  $x_2$ , Nyquist eğrilerinin reel eksenini kesim yerleri olmak üzere (4.53)'den yararlanarak

$$x_{1,2}(w) = \hat{G}_{\text{Re}}(jw) \mp \sqrt{\varepsilon^2(w) - \hat{G}_{\text{Im}}^2(jw)} \quad (4.55)$$

yazılabilir. (4.20)'den  $\hat{G}(jw)$ , (3.10) ve (4.36)'nın çarpımına eşit olduğundan;

$$\hat{G}(jw) = \left\{ \frac{X(w^2)P_x(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} - w^2 \frac{Y(w^2)P_y(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} \right\} + jw \left\{ \frac{X(w^2)P_y(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} + \frac{Y(w^2)P_x(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} \right\} \quad (4.56)$$

elde edilir. Burada

$$\hat{G}_{\text{Re}}(jw) \triangleq \frac{X(w^2)P_x(w^2) - w^2 Y(w^2)P_y(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} \quad (4.57)$$

ve

$$\hat{G}_{\text{Im}}(jw) \triangleq w \left( \frac{X(w^2)P_y(w^2) + Y(w^2)P_x(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} \right) \quad (4.58)$$

olarak tanımlıdır. (3.10) kullanılarak  $G_0(jw)$  'nin genliği

$$|G_0(jw)| = \sqrt{\frac{X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2)}{Z^2(w^2)}} \quad (4.59)$$

olarak yazılır.  $w < (4d / eL)$  için (4.28), (4.57) ile (4.58)'in (4.55)'de yazılmasıyla

$$x_{1,2}(w) = \left\{ \frac{X(w^2)P_x(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} - w^2 \frac{Y(w^2)P_y(w^2)}{Z(w^2)P_z(w^2)} \right\} \mp \sqrt{4 \frac{(X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2))}{Z^2(w^2)} \left( \frac{eLw}{4d} \right)^{4d+2} - \frac{w^2 (X(w^2)P_y(w^2) + Y(w^2)P_x(w^2))^2}{Z^2(w^2)P_z^2(w^2)}} \quad (4.60)$$

bulunur ve eş değer olarak

$$x_{1,2}(w) = \frac{1}{Z(w^2)P_z(w^2)} \left( \left\{ X(w^2)P_x(w^2) - w^2 Y(w^2)P_y(w^2) \right\} \mp \sqrt{4P_z^2(w^2)(X^2(w^2) + w^2 Y^2(w^2))(eLw/4d)^{4d+2} - w^2(X(w^2)P_y(w^2) + Y(w^2)P_x(w^2))^2} \right) \quad (4.61)$$

yazılabilir. (4.33), (4.34) ve (4.35)'de verilmiş olan  $Z_x(w)$ ,  $X_R(w)$  ve  $X_E(w)$  tanımları, bu son bağıntıda yazılıp düzenlenirse; Nyquist eğrilerinin kesim yerleri için (4.49) ve (4.50)'de ayrı ayrı verilen

$$x_{1,2}(w) = \frac{1}{Z_x(w)} \left( X_R(w) \mp \sqrt{X_E(w)} \right) \quad (4.62)$$

bağıntısı elde edilir. Lemma 3.12'de önerildiği gibi (4.62)'nin  $w$ 'ye göre birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$x'_{1,2}(w) = \frac{1}{Z_x^2(w)} \left( \left( X'_R(w) \mp \frac{X'_E(w)}{2\sqrt{X_E(w)}} \right) Z_x(w) - Z'_x(w) \left( X_R(w) \mp \sqrt{X_E(w)} \right) \right) = 0 \quad (4.63)$$

olarak bulunur. (4.63) düzenlenirse,

$$x'_{1,2}(w) = \left( X'_R(w)\sqrt{X_E(w)} \mp \frac{X'_E(w)}{2} \right) Z_x(w) - Z'_x(w) \left( \sqrt{X_E(w)} X_R(w) \mp X_E(w) \right) = 0 \quad (4.64)$$

bağıntısı elde edilir ve eş değer olarak

$$x'_{1,2}(w) = \left( X'_R(w)Z_x(w) - Z'_x(w)X_R(w) \right) \sqrt{X_E(w)} \mp \left( \frac{X'_E(w)Z_x(w)}{2} - Z'_x(w)X_E(w) \right) = 0 \quad (4.65)$$

yazılabilir. (4.65)'i ayrıca

$$\left( X'_R(w)Z_x(w) - Z'_x(w)X_R(w) \right) \sqrt{X_E(w)} = \pm \left( \frac{X'_E(w)Z_x(w)}{2} - Z'_x(w)X_E(w) \right) \quad (4.66)$$

biçiminde de yazabiliriz. (4.66)'nın her iki tarafının karesi alınıp düzenlenirse,

$$\left( \frac{X'_E(w) Z_x(w)}{2} - Z'_x(w) X_E(w) \right)^2 - \left( X'_R(w) Z_x(w) - Z'_x(w) X_R(w) \right)^2 X_E(w) = 0 \quad (4.67)$$

bulunur. Böylece (4.32)'da verilen polinom elde edimiş olur.

(4.28)'den  $w > 4d / eL$  ise;  $X_E(w)$ 'nin (4.35)'de verilen ifadesindeki  $(eLw/4d)^{4d+2}$  terimi yok olur ve böylece (4.42)'de verilen  $X_E(w)$  için (4.32) kullanılır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Bu sonuçlardan hareketle, aşağıdaki teorem verilebilir.

#### 4.2.5 Teorem 4.4 (Bayhan ve Söylemez)

Şekil 4.2'de verilen  $G(s) = G_0(s) e^{-sL}$  sistemi için,  $d$ . mertebeden Padé yaklaşımı kullanılarak bulunan  $\hat{G}(s) = G_0(s)P_d(s)$  sistemini kararlı kılan kazanç aralıkları  $C_p$ , Teorem 3.1 ile belirlenebilir.  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemini kesin kararlı yapacak kazanç kümesi

$$C_{ds} \triangleq C_p \setminus C_u \quad (4.68)$$

ile bulunur. (4.52)'de verilen  $C_u$  kümesi,  $q = 1, 2, \dots, f$  olmak üzere

$$C_u \triangleq \bigcup C_{u_q} \quad (4.69)$$

olarak yazılabilir. Burada  $C_{u_q}$ ,

$$C_{u_q} = [K_{\min q}, K_{\max q}] \quad (4.70)$$

olacak biçimde tanımlanmış kazanç aralıklarının bir kümesidir. Padé yaklaşımı kullanılması sonucu kazançlarda ortaya çıkan hata payları,

$$C_{ps} = \bigcup_{C_{u_q} \cap C_p \neq \emptyset} C_{u_q} \quad (4.71)$$

ile hesaplanır.  $C_{ps}$  kazanç aralıkları için, sistemin kapalı çevrimdeki kararlılığı hakkında kesin bir şey söylenemez. Burada  $\setminus$  işareti, kümeler üzerinde çıkarma işlemini gösterir.

Bu bölümde önerilen yöntem için aşağıdaki algoritma verilebilir.

#### 4.2.6 Algoritma 4.4 (Padé yaklaşımıyla yapılan hata paylarının hesabı)

**Adım 1:** Verilen  $G(s) = G_0(s) e^{-sL}$  sistemi için,  $d$ . mertebeden Padé yaklaşımını kullanarak  $\hat{G}(s) = G_0(s)P_d(s)$  sistemini oluştur.

**Adım 2:** (4.20)'de verilen  $\hat{G}(s) = \hat{N}(s) / \hat{D}(s)$  sistemini kapalı çevrimde kararlı yapan  $C_p$  kazanç kümesini, Teorem 3.1'den hesapla.

**Adım 3:** Lemma 4.1'deki ilk koşuldan hareketle (4.33), (4.34) ve (4.35)'i kullanarak (4.32)'de verilen polinomu oluştur. Bu polinomun çiftler halindeki negatif olmayan reel köklerini hesapla ve bunlar içinden  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından küçük olan frekansları belirle.

**Adım 4:**  $\hat{w}_{pc}$  'den küçük olan bu reel kökler için (4.49) ve (4.50)'i kullanarak Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim noktalarını bul ve (4.39)'dan  $\tilde{\chi}_\ell$  kümesini belirle. Bu kümeye ilişkin  $\tilde{K}_{p\ell}$  kazanç aralıklarını (4.40)'dan hesaplayıp (4.41)'deki  $C_1$  kazanç kümesini oluştur.

**Adım 5:** Lemma 4.1'deki ikinci koşuldan hareketle (4.33), (4.34) ve (4.42)'i (4.32)'de yazarak oluşturulan polinomun çiftler halindeki negatif olmayan reel köklerini hesapla ve bunlar içinden  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından büyük olan frekansları belirle.

**Adım 6:**  $\hat{w}_{pc}$  'den büyük olan bu reel kökler için, Adım 4'dekine benzer yolla  $\tilde{\chi}_\sigma$  kümesini (4.45)'den bul ve bu kümeye ilişkin  $\tilde{K}_{p\sigma}$  kazanç aralıklarını (4.46)'dan hesaplayıp (4.47)'deki  $C_2$  kazanç kümesini oluştur.

**Adım 7:** Lemma 4.1'deki üçüncü koşuldan hareketle  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansı için (4.48)'den  $\tilde{\chi}_{pc}$  kümesini bul.  $i = 1, 2$  için (4.51)'de verilen  $\tilde{K}_{pc_i}$  kazanç aralıklarını yani  $C_3$  kazanç kümesini oluştur.

**Adım 8:**  $C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_3$  'ü kullanarak (4.52)'den  $C_u$  belirsizlik kazanç aralıklarını bul.

**Adım 9:** Teorem 4.4'de (4.68)'den  $\hat{G}(s)$  sistemini kesin kararlı yapan  $C_{ds}$  kazanç kümesini bul.

**Adım 10:**  $C_u$  kümesini oluşturan  $C_{u_q}$  kazanç aralıklarını bularak; (4.71)'den  $C_{ps}$  hata paylarını hesapla.

#### 4.2.6.1 Örnek 4.2

Örnek 4.1’de (4.15) ile verilen sistemde  $L = 1.8$  sn kadar zaman gecikmesi için 2, 3 ve 4. dereceden Padé yaklaşımları kullanarak zaman gecikmeli sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan kazançları bulalım ve sonra Algoritma 4.4’ü kullanarak  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemini kesin kararlı kılacak kazançları ve 2, 3 ve 4. dereceden Padé yaklaşımlarıyla hesaplanan kazanç kümelerindeki hata paylarını belirleyelim.

**Adım 1:** (4.24)’den  $e^{-1.8s}$  gecikme terimi için 2. mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan

$$P_d(s) = e^{-1.8s} = \frac{0.27s^2 - 0.9s + 1}{0.27s^2 + 0.9s + 1} \quad (4.72)$$

fonksiyonu için  $\hat{G}(s) = \hat{N}(s) / \hat{D}(s)$ ’nin pay polinomu

$$\hat{D}(s) = 27s^5 + 954s^4 + 11881s^3 + 22754s^2 + 31800s + 20000 \quad (4.73)$$

biçimine gelir.

**Adım 2:** Teorem 3.1’den  $\hat{D}(s)$ ’nin kararsız kök sayısı,  $\hat{u}_0 = 0$ ’dır.  $\hat{Y}(w^2)$ ’nin pozitif reel kökleri  $\hat{w}_1 = 0.737263$ ,  $\hat{w}_2 = 1.54988$  ve  $\hat{w}_3 = 4.036$ ’dır. Bu köklere  $\hat{w}_4 = 0$  ve  $\hat{w}_5 = \infty$ ’da eklenince, beş tane reel eksenden geçiş frekansı olur. Bu geçiş frekansları için Teorem 3.1’den elde edilen sonuçlar, Tablo 4.2’de gösterilmiştir.

**Tablo 4.2:** Örnek 4.2’de  $d = 2$  için  $\hat{G}(s)$ ’i Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $\hat{w}_{pi}$ | $\hat{x}_{pi}$ | $\hat{r}_{pi}$ | $\hat{u}_{pi}$ | $C_{pi}$                        |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|
| 1   | 1.54988        | -2.168         | 2              | 0              | $0 < C_{p_1} < 0.461254$        |
| 2   | 0              | -1             | 1              | 2              | $0.461254 < C_{p_2} < 1$        |
| 3   | $\infty$       | 0              | 1              | 3              | $1 < C_{p_3} < \infty$          |
| 4   | 4.036          | 0.355265       | -2             | 4              | $-\infty < C_{p_4} < -2.8148$   |
| 5   | 0.737263       | 1.66199        | -2             | 2              | $-2.8148 < C_{p_4} < -0.601687$ |
| 6   | -              | $\infty$       | -              | 0              | $-0.601687 < C_{p_5} < 0$       |

Tablo 4.2’den görüldüğü üzere  $C_p \in [C_{p_{\min}}, C_{p_{\max}}] = (-0.601687, 0.461254)$  kazançları için  $\hat{G}(s)$  sistemi kapalı çevrimde kararlı yapılabilir.

**Adım 3:** Teorem 3.1 kullanılarak  $N(s)$  ve  $D(s)$  için (3.11), (3.12) ve (3.13)’den

$$X(w^2) = -w^4 + 11w^2 - 4 \quad (4.74)$$

$$Y(w^2) = -w^4 - 5w^2 + 12 \quad (4.75)$$

$$Z(w^2) = w^6 - 2w^4 + w^2 + 4 \quad (4.76)$$

yazmak mümkündür. Benzer biçimde  $P_d(s)$  için (4.36)'dan

$$P_x(w^2) = 7.29 \times 10^{-2} w^4 - 1.35w^2 + 1 \quad (4.77)$$

$$P_y(w^2) = 0.486w^2 - 1.8 \quad (4.78)$$

$$P_z(w^2) = 7.29 \times 10^{-2} w^4 + 0.27w^2 + 1 \quad (4.79)$$

elde edilir. Bunların (4.33), (4.34) ve (4.35)'de yazılmasıyla bulunan  $Z_x(w)$ ,  $X_R(w)$  ve  $X_E(w)$  polinomlarından elde edilen (4.32)'nin negatif olmayan reel kök çiftleri,

$$\tilde{w}_a = \{0 - \Delta_0, 0 + \Delta_0; 0.735461, 0.740416\} \quad (4.80)$$

kümesini oluşturur. Burada  $\Delta_0$ , sıfıra yakın  $0 < \Delta_0 \ll 1$  şeklinde olan çok küçük pozitif sayıları temsil etmektedir. (4.31)'den kritik frekans,

$$\hat{w}_{pc} = \frac{4d}{eL} = 1.63502 \quad (4.81)$$

olarak bulunur.  $\tilde{w}_a$  kümesindeki tüm frekanslar,  $\hat{w}_{pc}$ 'den küçük olduğu için, hepsi için reel eksen kesim noktaları hesaplanabilir.

**Adım 4:** İkinci mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$ 'e ilişkin Tablo 4.2'den bulunan 0.737263 frekansı, (4.80)'deki 0.735461 ile 0.740416 arasında bir değere sahiptir. (4.80)'deki frekansların (4.49) ve (4.50)'de yazılmasıyla

$$\tilde{x}_{1a} = \{-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0; 1.599, 1.60659\} \quad (4.82)$$

$$\tilde{x}_{2a} = \{-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0; 1.719133, 1.727229\} \quad (4.83)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilenler için kesim yerlerinin (4.37), (4.38) ve (4.39)'daki gibi düzenlenmesi ve (4.40)'dan kazançların bulunmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 4.3'de verilmiştir.

**Tablo 4.3 :** Örnek 4.2’de  $d = 2$ ’e ilişkin  $w < \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$  | $w_{2\ell}$    | $x_{\ell \min}$ | $x_{\ell \max}$ | $\tilde{K}_{p\ell}$                       |
|--------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|
| 1      | $0 - \Delta_0$ | $0 + \Delta_0$ | $-1 - \Delta_0$ | $-1 + \Delta_0$ | $1 - \Delta_0 < K_{p\ell} < 1 + \Delta_0$ |
| 2      | 0.735461       | 0.740416       | 1.599           | 1.727229        | $-0.625392 < K_{p\ell} < -0.578939$       |

Tablo 4.3’den bulunan sonuçlar kullanılarak (4.41)’den

$$C_1 = (1 - \Delta_0, 1 + \Delta_0) \cup (-0.625392, -0.578939) \quad (4.84)$$

bulunur.

**Adım 5:** Lemma 4.1’deki ikinci koşuldan hareketle  $w > 4d / eL$  için;  $X_E(w)$ ’deki  $(eLw/4d)^{4d+2}$  terimi yok olacağından (4.32)’nin negatif olmayan reel yeni kök çiftleri en sondaki kökün çifti sonsuzda olması kabulü ile,

$$\tilde{w}_b = \{0 - \Delta_0, 0 + \Delta_0; 0.6062, 0.8723; 1.4567, 2.01498; 2.14849, \infty\} \quad (4.85)$$

biçiminde olacaktır. Bu kökler içinden  $w > \hat{w}_{pc} = 1.63502$  koşulunu sağlayan frekanslar

$$\tilde{w}_b = \underbrace{\{1.4567 < \hat{w}_{pc}, 2.01498; 2.14849, \infty\}}_{ihmal} \quad (4.86)$$

kümesini oluşturur.

**Adım 6:**  $w > \hat{w}_{pc}$  koşulundan gelen ihmalden dolayı  $\tilde{w}_b$  kümesinde çiftliği bozulan ve diğer teki alınmayan tek kalan kök olduğu için  $\tilde{x}_{1_b}$  ve  $\tilde{x}_{2_b}$  reel eksen kesim noktaları (4.49) ve (4.50)’den

$$\tilde{x}_{1_b} = \{-2.77652; -2.10942, 0\} \quad (4.87)$$

$$\tilde{x}_{2_b} = \{1.88389; 1.88536, 0\} \quad (4.88)$$

biçimine gelir. Yukarıda verilenler için reel eksen kesim yerlerinin (4.43), (4.44) ve (4.45)’deki gibi düzenlenmesi ve (4.46)’dan kazançların bulunmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 4.4’de verilmiştir.

**Tablo 4.4 :** Örnek 4.2’de  $d = 2$ ’e ilişkin  $w > \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\sigma$ | $w_{2\sigma-1}$ | $w_{2\sigma}$ | $x_{\sigma \min}$ | $x_{\sigma \max}$ | $\tilde{K}_{p\sigma}$                                                    |
|----------|-----------------|---------------|-------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1        | –               | 2.01498       | -2.77652          | 1.88389           | $0.360164 < K_{p\sigma} < \infty$ ,<br>$-\infty < K_{p\sigma} < -0.5308$ |
| 2        | 2.14849         | $\infty$      | -2.10942          | 1.88536           | $0.474065 < K_{p\sigma} < \infty$ ,<br>$-\infty < K_{p\sigma} < -0.5304$ |

Tablo 4.4’den bulunan sonuçlar kullanılarak (4.47)’den

$$C_2 = (-\infty, -0.5308) \cup (-\infty, -0.5304) \cup (0.360164, \infty) \cup (0.474065, \infty) \quad (4.89)$$

**Adım 7:**  $\hat{w}_{pc} = 1.63502$  kritik frekansı için (4.27)’de verilen  $\hat{G}_\Delta(jw)$  sisteminin Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim yerleri (4.48)’den,

$$\tilde{\chi}_{pc} = (x_1(\hat{w}_{pc}), x_2(\hat{w}_{pc})) = (-5.8831, 2.03794) \quad (4.90)$$

bulunur. Bu kesim noktalarına ilişkin (4.51)’den

$$C_3 = (-\infty, -0.49069) \cup (0.16998, \infty) \quad (4.91)$$

kazançları bulunur.

**Adım 8:** (4.52)’den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (-\infty, -0.49069) \cup (0.16998, \infty) \quad (4.92)$$

olarak bulunur. Burada  $q = 1, 2$  olmak üzere, (4.70)’den  $C_{u_1} = (-\infty, -0.49069)$  ve  $C_{u_2} = (0.16998, \infty)$  olarak bulunur.

**Adım 9:** Teorem 4.4’de (4.68)’den  $\hat{G}(s)$  sistemi

$$C_{ds} = C_p \setminus C_u = (-0.49069, 0.16998) \quad (4.93)$$

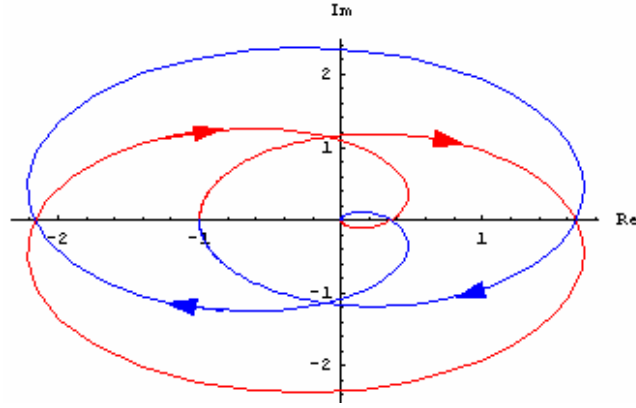
kazanç aralıkları için kesin kararlıdır.  $C_{ds}$  aralığı,  $C_p = (-0.601687, 0.461254)$  olarak Tablo 4.2’den bulunan kazanç aralığı tarafından sarmalanmıştır.

**Adım 10:**  $C_{u_1} \cap C_p \neq \emptyset$  ve  $C_{u_2} \cap C_p \neq \emptyset$ ’nin kullanılmasıyla (4.71)’den bulunan

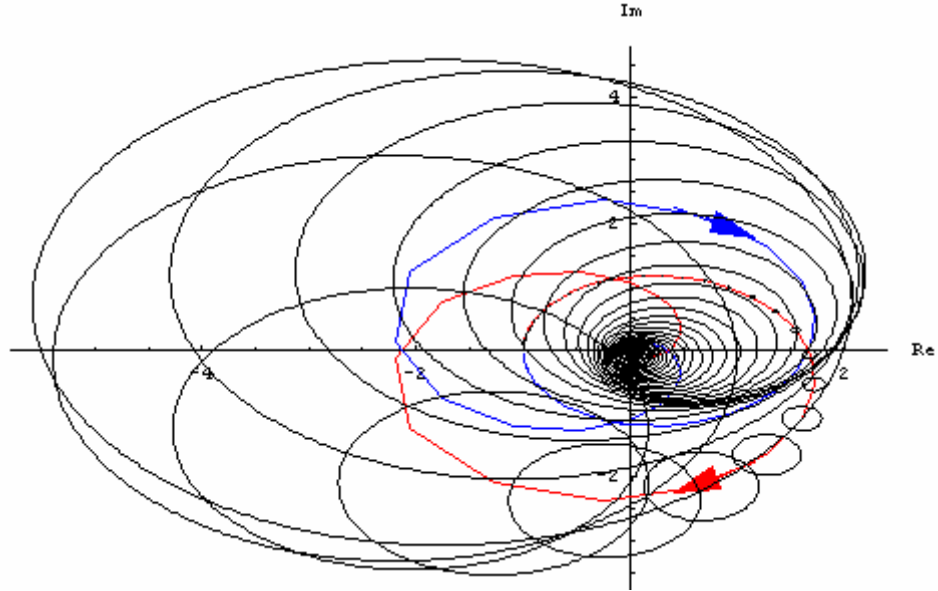
$$C_{ps} = (-\infty, -0.49069) \cup (0.16998, \infty) \quad (4.94)$$



kazanç aralıkları için, sistemin kapalı çevrimdeki kararlılığı hakkında kesin bir şey söylenemez. Bu son iki kazanç aralığı, aynı zamanda bize ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanıldığı zaman bulunan kazanç kümelerindeki hata paylarını verir. İkinci mertebeden Padé yaklaşımı kullanılarak bulunan  $\hat{G}(s)$  sisteminin Nyquist eğrisi, Şekil 4.9'da verilmiştir. Şekil 4.9'da görülen Nyquist eğrisinin reel eksenini kesim noktaları, Tablo 4.2'de bulunan sonuçları teyit etmektedir. Şekil 4.10'da ise Şekil 4.9'da verilen Nyquist eğrisinin etrafındaki ikinci mertebeden Padé yaklaşımı kullanılması nedeniyle oluşan hata bantları görülmektedir.



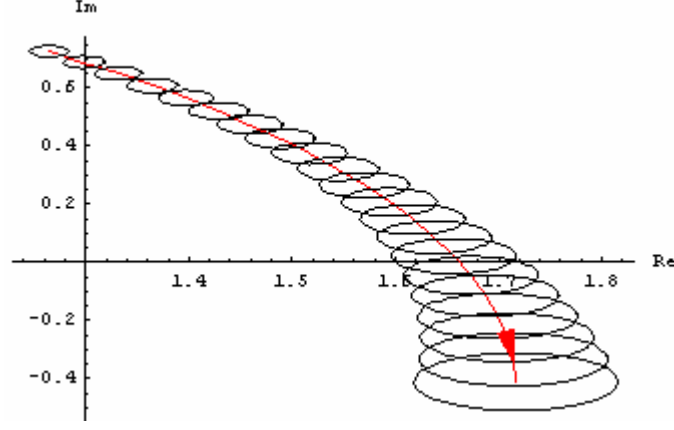
**Şekil 4.9 :** Örnek 4.2'de 2. Mertebeden Padé Yaklaşımı İçin  $\hat{G}(s)$  'nin Nyquist Eğrisi



**Şekil 4.10 :** Örnek 4.2'de 2. Mertebeden Padé Yaklaşımıyla Oluşan Hata Bantları ( $\hat{G}_\Delta(j\omega)$  'nin Nyquist eğrisi).

Şekil 4.11'de ise, daha anlaşılır olması açısından Şekil 4.10'daki hata bantlarının bir parçası gösterilmiştir. Bu parçadaki disk kümelerinin reel eksenini kesim yerlerine dikkat edersek, (4.82) ve (4.83)'de verilen kesim noktalarının bir kısmını veren

disklere aittir. Aslında Şekil 4.10 ve Şekil 4.11, Şekil 4.9’da verilene benzer disklerin oluşturduğu ve Nyquist eğrisini çevreleyen hata bantları kümesidir. Şekil 4.10 ve Şekil 4.11, yöntemin teyit edilebilmesi ve daha kolay anlaşılabilmesi için verilmiştir. Yöntemin işleyişi açısından gerekli değerlerdir.



**Şekil 4.11 :** Şekil 4.10’da Görülen Hata Bantlarının Bir Kısmı.

$d = 3$ . mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sistemi

$$C_p \in [C_{p \min}, C_{p \max}] = (-0.602464, 0.448061) \quad (4.95)$$

kazançları için kapalı çevrimde kararlı yapılabilir. Lemma 4.1’in ilk koşulundan (4.32)’nin negatif olmayan reel kök çiftleri,

$$\tilde{w}_a = \{0 - \Delta_0, 0 + \Delta_0; 0.7335, 0.7359; 1.5128, 1.52036\} \quad (4.96)$$

kümesini oluşturur. (4.31)’den  $d = 3$  için kritik frekans,

$$\hat{w}_{pc} = 2.45 \quad (4.97)$$

olarak bulunur.  $\tilde{w}_a$  kümesindeki tüm frekanslar,  $\hat{w}_{pc}$ ’den küçük olduğu için; hepsi için reel eksen kesim noktaları hesaplanabilir. (4.96)’daki frekanslar için  $\hat{G}_\Delta(s)$ ’nin Nyquist eğrisinin reel eksen kesim noktaları,

$$\tilde{x}_{1a} = \{-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0; 1.6591, 1.65919; -2.386, -2.371\} \quad (4.98)$$

$$\tilde{x}_{2a} = \{-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0; 1.6605, 1.6606; -2.085, -2.072\} \quad (4.99)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilenler için kesim yerlerinin (4.37), (4.38) ve (4.39)'daki gibi düzenlenmesi ve (4.40)'dan kazançların bulunmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 4.5'de verilmiştir.

**Tablo 4.5 :** Örnek 4.2'de  $d = 3$ 'e ilişkin  $w < \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$  | $w_{2\ell}$    | $x_{\ell \min}$ | $x_{\ell \max}$ | $\tilde{K}_{p\ell}$                       |
|--------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-------------------------------------------|
| 1      | $0 - \Delta_0$ | $0 + \Delta_0$ | $-1 - \Delta_0$ | $-1 + \Delta_0$ | $1 - \Delta_0 < K_{p\ell} < 1 + \Delta_0$ |
| 2      | 0.7335         | 0.7359         | 1.6591          | 1.6606          | $-0.60273 < K_{p\ell} < -0.60219$         |
| 3      | 1.5128         | 1.52036        | -2.386          | -2.072          | $0.419 < K_{p\ell} < 0.482$               |

Tablo 4.5'den bulunan sonuçlar kullanılarak (4.41)'den

$$C_1 = (1 - \Delta_0, 1 + \Delta_0) \cup (-0.60273, -0.60219) \cup (0.419, 0.482) \quad (4.100)$$

bulunur.

Lemma 4.1'deki ikinci koşuldan hareketle (4.32)'nin negatif olmayan reel yeni kök çiftleri içinden  $w > \hat{w}_{pc} = 2.65$  koşulunu sağlayan frekanslar

$$\tilde{w}_b = \underbrace{\{2.302 < \hat{w}_{pc}, 3.519; 4.86, \infty\}}_{ihmal} \quad (4.101)$$

kümesini oluşturur. Bu kümeye ilişkin reel eksen kesim noktaları

$$\tilde{x}_{1_b} = \{-0.549; -0.595, 0\} \quad (4.102)$$

$$\tilde{x}_{2_b} = \{1.08; 0.362, 0\} \quad (4.103)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilenler için reel eksen kesim yerlerinin (4.43), (4.44) ve (4.45)'deki gibi düzenlenmesi ve (4.46)'dan kazançların bulunmasıyla (4.47)'den

$$C_2 = (-\infty, -0.925) \cup (1.678, \infty) \quad (4.104)$$

bulunur.  $\hat{w}_{pc} = 2.65$  kritik frekansı için  $\hat{G}_\Delta(jw)$  sisteminin Nyquist eğrisinin reel eksen kesim yerleri (4.48)'den,

$$\tilde{\chi}_{pc} = (x_1(\hat{w}_{pc}), x_2(\hat{w}_{pc})) = (-0.963, 2.374) \quad (4.105)$$

olarak hesaplanır ve böylece (4.51)'den

$$C_3 = (-\infty, -0.421) \cup (1.038, \infty) \quad (4.106)$$

bulunur. (4.52)'den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -0.421) \cup (1-\Delta_0, 1+\Delta_0) \cup (0.419, 0.482) \cup (1.038, \infty) \quad (4.107)$$

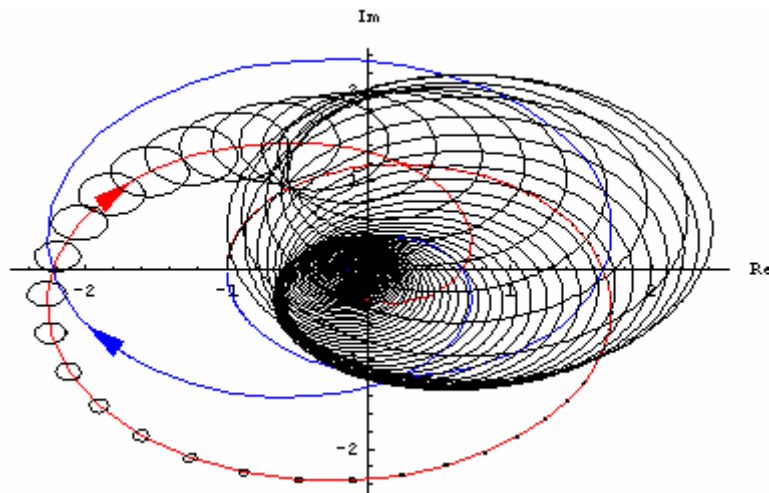
olarak bulunur. (4.107)'de görüldüğü gibi  $q=1,2,3,4$  olmak üzere, (4.70)'den  $C_{u_1}=(-\infty, -0.421)$ ,  $C_{u_2}=(1-\Delta_0, 1+\Delta_0)$ ,  $C_{u_3}=(0.419, 0.482)$  ve  $C_{u_4}=(1.038, \infty)$  olarak bulunur. Üçüncü mertebeden Pade yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = C_p \setminus C_u = (-0.421, 0.419) \quad (4.108)$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıyken

$$C_{ps} = (-\infty, -0.421) \cup (0.419, 0.482) \quad (4.109)$$

kazanç aralıkları için ise, kesin bir şey söylenemez. Şekil 4.12'de üçüncü mertebeden Padé yaklaşımı kullanılması sonucu  $\hat{G}(s)$  sisteminin Nyquist eğrisinin etrafında oluşan hata bantları görülmektedir. Şekil 4.12, Şekil 4.10 ile karşılaştırılırsa; Padé yaklaşımının mertebesi ikiden üçe çıktığında hata paylarının küçüldüğü görülmektedir. Bu sonuç grafiksel gösterime gerek olmaksızın (4.94) ve (4.109)'dan da görülmektedir.



**Şekil 4.12 :** Örnek 4.2'de 3. Mertebeden Padé Yaklaşımıyla Oluşan Hata Bantları.

$d = 4$  . mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sistemi

$$C_p \in [C_{p_{\min}}, C_{p_{\max}}] = (-0.602474, 0.44734) \quad (4.110)$$

kazançları için kapalı çevrimde kararlı yapılabilir ve bu durumda kritik frekans  $\hat{w}_{pc} = 3.27$  'dir. Lemma 4.1'deki ilk koşuldan

$$C_1 = (1 - \Delta_0, 1 + \Delta_0) \cup (-0.6024759, -0.6024722) \cup (0.4465, 0.4482) \quad (4.111)$$

bulunur. Lemma 4.1'deki ikinci koşuldan ise

$$C_2 = (-\infty, -2.823) \cup (-\infty, -3.272) \cup (1.119, \infty) \cup (6.337, \infty) \quad (4.112)$$

kazanç aralıkları bulunur.  $\hat{w}_{pc} = 3.27$  kritik frekansı için Lemma 4.1'deki üçüncü koşuldan

$$C_3 = (-\infty, -0.868) \cup (1.505, \infty) \quad (4.113)$$

olarak hesaplanır. Bu sonuçlardan hareketle belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -0.868) \cup (-0.6024759, -0.6024722) \cup (0.4465, 0.4482) \cup (1.119, \infty) \quad (4.114)$$

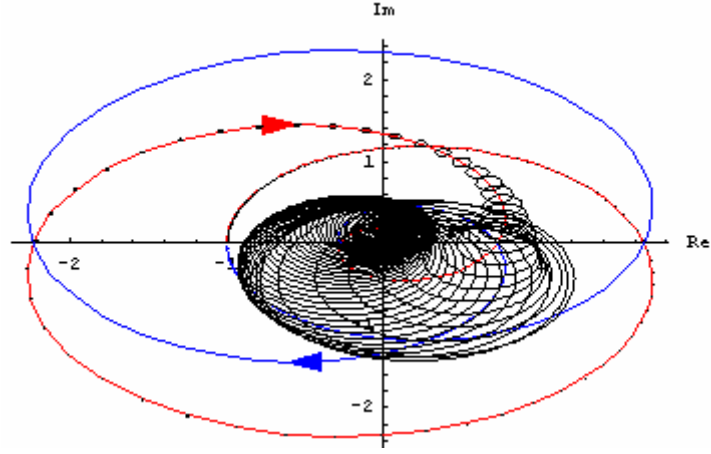
olarak bulunur. Dördüncü mertebeden Pade yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = (-0.6024722, 0.4465) \quad (4.115)$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıyken

$$C_{ps} = (-0.6024759, -0.6024722) \cup (0.4465, 0.4482) \quad (4.116)$$

hata payları için ise, kesin bir şey söylenemez ve kararlı da olabilir kararsız da olabilir. Padé yaklaşımının mertebesi arttırıldıkça  $C_{ps}$  hata payları küçülmektedir. Şekil 4.13'de dördüncü mertebeden Padé yaklaşımı kullanılması sonucu  $\hat{G}(s)$  sisteminin Nyquist eğrisinin etrafındaki oluşan hata bantları görülmektedir. Xu ve diğ. (2003) tarafından önerilmiş yöntemde bu sistem için  $L \in [0, 1.8]$  zaman gecikmesi aralığında kararlı kılan kazanç kümesi  $S_R = (-0.4093, 0.4473)$  olarak bulunmuştu.



**Şekil 4.13 :** Örnek 4.2’de 4. Mertebeden Padé Yaklaşımıyla Oluşan Hata Bantları.

#### 4.2.6.2 Örnek 4.3

Örnek 3.9’da (3.95) ile verilen sistemde  $L = 0.04$  sn kadar zaman gecikmesi için 2., 3. ve 4. mertebelerden Padé yaklaşımları kullanarak bulunan  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemini kesin kararlı kılabacak kazançları hesaplayalım ve Padé yaklaşımlarıyla hesaplanan kazanç kümelerindeki hata paylarını belirleyelim.

2. mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  için Teorem 3.1’den elde edilen sonuçlar, Tablo 4.6’da gösterilmiştir.

**Tablo 4.6 :** Örnek 4.3’de  $d = 2$  İçin  $\hat{G}(s)$ ’i Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $\hat{w}_{pi}$ | $\hat{x}_{pi}$ | $\hat{r}_{pi}$ | $\hat{u}_{pi}$ | $C_{p_i}$                      |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| 1   | 1.84279        | -0.473501      | -2             | 4              | $0 < C_{p_1} < 2.11193$        |
| 2   | 13.4327        | -0.337039      | -2             | 2              | $2.11193 < C_{p_2} < 2.96702$  |
| 3   | 25.8202        | -0.188486      | 2              | 0              | $2.96702 < C_{p_3} < 5.30543$  |
| 4   | $\infty$       | 0              | 1              | 2              | $5.30543 < C_{p_4} < \infty$   |
| 5   | 180.402        | 0.0277006      | -2             | 3              | $-\infty < C_{p_5} < -36.1003$ |
| 6   | 3.18177        | 0.26839        | 2              | 1              | $-36.1003 < C_{p_6} < -3.7258$ |
| 7   | 0              | 0.75           | 1              | 3              | $-3.7258 < C_{p_7} < -1.33$    |
| 8   | -              | $\infty$       | -              | 4              | $-1.33 < C_{p_8} < 0$          |

Tablo 4.6’dan  $C_p \in [C_{p_{\min}}, C_{p_{\max}}] = (2.96702, 5.30543)$  kazançları için  $\hat{G}(s)$  sistemi kapalı çevrimde kararlı yapılabilir.

Teorem 3.1 kullanılarak  $N(s)$  ve  $D(s)$  için (3.11), (3.12) ve (3.13)’den

$$X(w^2) = -69.75w^6 + 1844.5w^4 - 10020w^2 + 6912 \quad (4.117)$$

$$Y(w^2) = -5w^6 + 451.75w^4 - 5182w^2 + 12240 \quad (4.118)$$

$$Z(w^2) = w^8 + 25w^6 + 208w^4 + 1600w^2 + 9216 \quad (4.119)$$

bulunur.  $e^{-0.04s}$  zaman gecikmesi için 2. mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan

$$P_d(s) = \frac{0.0001333s^2 + 0.02s + 1}{0.0001333s^2 - 0.02s + 1} \quad (4.120)$$

fonksiyonu için (4.36)'dan

$$P_x(w^2) = 1.78 \times 10^{-8} w^4 - 6.67 \times 10^{-4} w^2 + 1 \quad (4.121)$$

$$P_y(w^2) = 2.13 \times 10^{-7} w^2 - 0.04 \quad (4.122)$$

$$P_z(w^2) = 1.78 \times 10^{-8} w^4 + 1.33 \times 10^{-4} w^2 + 1 \quad (4.123)$$

elde edilir. Bunların (4.33), (4.34) ve (4.35)'de yazılmasıyla bulunan  $Z_x(w)$ ,  $X_R(w)$  ve  $X_E(w)$  polinomlarından elde edilen (4.32)'nin negatif olmayan reel kök çiftleri,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_a = \{ & 0 - \Delta_0, 0 + \Delta_0; \quad 1.8428 - \Delta_0, 1.8428 + \Delta_0; \quad 3.1818 - \Delta_0, 3.1818 + \Delta_0; \\ & 13.4232, 13.4423; \quad 25.3587, 26.3734 \} \end{aligned} \quad (4.124)$$

olarak hesaplanır.  $d = 2$  için (4.31)'den kritik frekans,

$$\hat{w}_{pc} = 75.5759 \quad (4.125)$$

olarak bulunur.  $\tilde{w}_a$  kümesindeki tüm frekanslar,  $\hat{w}_{pc}$ 'den küçük olduğu için; hepsi için reel eksen kesim noktaları hesaplanır ve böylece Lemma 4.1'in ilk koşulundan

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1a} = \{ & 0.75 - \Delta_0, 0.75 + \Delta_0; \quad -0.4735 - \Delta_0, -0.4735 + \Delta_0; \\ & 0.2684 - \Delta_0, 0.2684 + \Delta_0; \quad -0.3373, -0.3369; \quad -0.1926, -0.1857 \} \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{2a} = \{ & 0.75 - \Delta_0, 0.75 + \Delta_0; \quad -0.4735 - \Delta_0, -0.4735 + \Delta_0; \\ & 0.2684 - \Delta_0, 0.2684 + \Delta_0; \quad -0.3372, -0.3368; \quad -0.1908, -0.1838 \} \end{aligned} \quad (4.127)$$

olarak bulunur. Yukarıda verilenler için kesim yerlerinin (4.37), (4.38) ve (4.39)'daki gibi düzenlenmesi ve (4.40)'dan kazançların bulunmasıyla elde edilen sonuçlar, Tablo 4.7'de verilmiştir.

**Tablo 4.7 :** Örnek 4.3'de  $d = 2$ 'e ilişkin  $w < \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$       | $w_{2\ell}$         | $x_{\ell \min}$      | $x_{\ell \max}$      | $\tilde{K}_{p\ell}$                                   |
|--------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|-------------------------------------------------------|
| 1      | $0 - \Delta_0$      | $0 + \Delta_0$      | $0.75 - \Delta_0$    | $0.75 + \Delta_0$    | $-1.33 - \Delta_0 < K_{p\ell} < -1.33 + \Delta_0$     |
| 2      | $1.8428 - \Delta_0$ | $1.8428 + \Delta_0$ | $-0.4735 - \Delta_0$ | $-0.4735 + \Delta_0$ | $2.11 - \Delta_0 < K_{p\ell} < 2.11 + \Delta_0$       |
| 3      | $3.1818 - \Delta_0$ | $3.1818 + \Delta_0$ | $0.2684 - \Delta_0$  | $0.2684 + \Delta_0$  | $-3.7258 - \Delta_0 < K_{p\ell} < -3.7258 + \Delta_0$ |
| 4      | 13.4232             | 13.4423             | -0.3373              | -0.3368              | $2.96471 < K_{p\ell} < 2.96935$                       |
| 5      | 25.3587             | 26.3734             | -0.1926              | -0.1838              | $5.19178 < K_{p\ell} < 5.44116$                       |

Tablo 4.7'den bulunan sonuçlar kullanılarak (4.41)'den

$$C_1 = (-1.33 - \Delta_0, -1.33 + \Delta_0) \cup (2.11 - \Delta_0, 2.11 + \Delta_0) \cup (-3.7258 - \Delta_0, -3.7258 + \Delta_0) \cup (2.96471, 2.96935) \cup (5.19178, 5.44116) \quad (4.128)$$

olarak bulunur. Lemma 4.1'deki ikinci koşuldan hareketle; (4.32)'nin negatif olmayan reel yeni kök çiftleri içinden  $w > \hat{w}_{pc} = 75.5759$  koşulunu sağlayan

$$\tilde{w}_b = \{103.806, \infty\} \quad (4.129)$$

frekansları için reel ekseni kesim noktaları

$$\tilde{x}_{1_b} = \{-0.06189, 0\} \quad (4.130)$$

$$\tilde{x}_{2_b} = \{0.11208, 0\} \quad (4.131)$$

olarak hesaplanır ve böylece

$$C_2 = (-\infty, -8.92201) \cup (16.1575, \infty) \quad (4.132)$$

elde edilir.  $\hat{w}_{pc} = 75.5759$  kritik frekansı için  $\hat{G}_\Delta(jw)$  sisteminin Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim yerleri,

$$\tilde{\chi}_{pc} = (x_1(w_{pc}), x_2(w_{pc})) = (-0.13037, 0.10557) \quad (4.133)$$



olarak bulunur. Bu kesim noktaları için Lemma 4.1'in üçüncü koşulundan

$$C_3 = (-\infty, -9.47286) \cup (7.67051, \infty) \quad (4.134)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece (4.52)'den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -8.92201) \cup (-3.7258 - \Delta_0, -3.7258 + \Delta_0) \cup (-1.33 - \Delta_0, -1.33 + \Delta_0) \cup \\ (2.11 - \Delta_0, 2.11 + \Delta_0) \cup (2.96471, 2.96935) \cup (5.19178, 5.44116) \cup (7.67051, \infty) \quad (4.135)$$

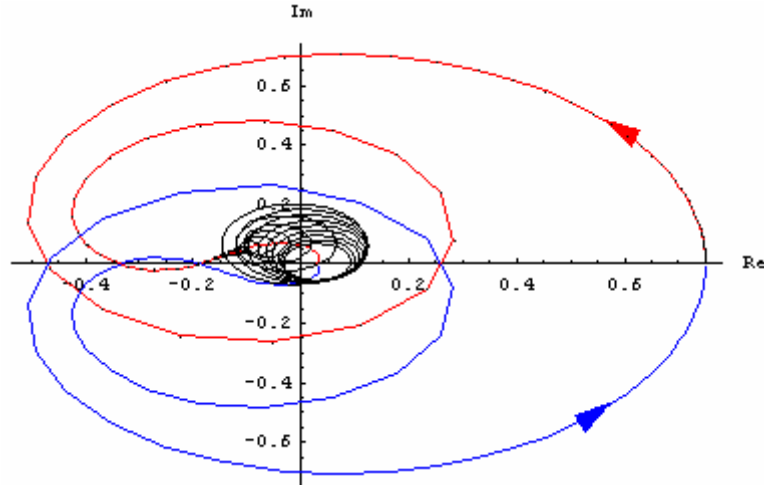
olarak bulunur. Teorem 4.4'den  $d = 2$  için  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = (2.96935, 5.19178) \quad (4.136)$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıyken

$$C_{ps} = (2.96471, 2.96935) \cup (5.19178, 5.44116) \quad (4.137)$$

kazanç aralıkları için kararlılık hakkında kesin bir şey söylenemez. Şekil 4.14'de ikinci mertebeden Padé yaklaşımı kullanılması sonucu  $\hat{G}(s)$  sisteminin Nyquist eğrisinin etrafında oluşan hata bantları görülmektedir.



**Şekil 4.14 :** Örnek 4.3'de 2. Mertebeden Padé Yaklaşımıyla Oluşan Hata Bantları.

Üçüncü mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sistemi,

$$C_p \in [C_{p \min}, C_{p \max}] = (2.96732, 5.28998) \quad (4.138)$$

kazançları için kapalı çevrimde kararlı yapılabilir ve bu durumda kritik frekans  $\hat{w}_{pc} = 110.364$  'dür. Lemma 4.1'deki ilk koşuldan

$$C_1 = (-1.33 - \Delta_0, -1.33 + \Delta_0) \cup (2.11 - \Delta_0, 2.11 + \Delta_0) \cup (-3.7258 - \Delta_0, -3.7258 + \Delta_0) \cup (2.96731, 2.96732) \cup (5.28912, 5.29085) \quad (4.139)$$

bulunur. Lemma 4.1'deki ikinci koşuldan ise

$$C_2 = (-\infty, -10.1326) \cup (-\infty, -40.9746) \cup (19.5374, \infty) \cup (25.9838, \infty) \quad (4.140)$$

kazanç aralıkları bulunur.  $\hat{w}_{pc} = 110.364$  kritik frekansı için Lemma 4.1'deki üçüncü koşuldan

$$C_3 = (-\infty, -7.54792) \cup (21.58, \infty) \quad (4.141)$$

olarak hesaplanır. Bu sonuçlardan hareketle belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -7.54792) \cup (-3.7258 - \Delta_0, -3.7258 + \Delta_0) \cup (-1.33 - \Delta_0, -1.33 + \Delta_0) \cup (2.11 - \Delta_0, 2.11 + \Delta_0) \cup (2.96731, 2.96732) \cup (5.28912, 5.29085) \cup (19.53, \infty) \quad (4.142)$$

olarak bulunur. Üçüncü mertebeden Pade yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = (2.96732, 5.28912) \quad (4.143)$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıyken

$$C_{ps} = (2.96731, 2.96732) \cup (5.28912, 5.29085) \quad (4.144)$$

kazanç aralıkları için ise, kesin bir şey söylenemez.

Dördüncü mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sisteminin

$$C_p = (2.96732, 5.28987) \quad (4.145)$$

kazançları için kapalı çevrimde kararlı yapılabilir olduğu gösterilebilir.

Lemma 4.1'den belirsizlik kazanç aralıkları

$$\begin{aligned}
C_u = & (-\infty, -13.5356) \cup (-3.7258 - \Delta_0, -3.7258 + \Delta_0) \cup (-1.33 - \Delta_0, -1.33 + \Delta_0) \cup \\
& (13.8858, \infty) \cup (2.11 - \Delta_0, 2.11 + \Delta_0) \cup \\
& (2.96732 - \Delta_0, 2.96732 + \Delta_0) \cup (5.28986, 5.28987)
\end{aligned} \tag{4.146}$$

olarak bulunur. Dördüncü mertebeden Pade yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}_\Delta(s)$  sisteminin

$$C_{ds} = (2.96732 + \Delta_0, 5.28986) \tag{4.147}$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlı olduğu söylenebilirken,

$$C_{ps} = (2.96732 - \Delta_0, 2.96732 + \Delta_0) \cup (5.28986, 5.28987) \tag{4.148}$$

kazanç aralıkları için ise, kesin bir şey söylenemez

#### 4.2.6.3 Örnek 4.4

Silva ve diğ. (2005) tarafından Örnek 6.1’de verilen

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+3s} \tag{4.149}$$

birinci mertebeden zaman gecikmeli sisteminde  $L=1.8$  sn için 2., 3. ve 4. mertebeden Padé yaklaşımlarının kullanılmasıyla kullanarak bulunan  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemini kesin kararlı kılacak kazançları hesaplayalım ve kazanç kümelerindeki Padé yaklaşımından kaynaklanan hata paylarını belirleyelim.

2. mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  için Teorem 3.1’den elde edilen sonuçlar, Tablo 4.8’de gösterilmiştir.

**Tablo 4.8 :** Örnek 4.4’de  $d = 2$  İçin  $\hat{G}(s)$ ’i Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $\hat{w}_{pi}$ | $\hat{x}_{pi}$ | $\hat{r}_{pi}$ | $\hat{u}_{pi}$ | $C_{p_i}$                      |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------|
| 1   | 1.0576         | -0.3006        | 2              | 0              | $0 < C_{p_1} < 3.3267$         |
| 2   | $\infty$       | 0              | 1              | 2              | $3.3267 < C_{p_2} < \infty$    |
| 3   | 4.4297         | 0.07504        | -2             | 3              | $-\infty < C_{p_3} < -13.3262$ |
| 4   | 0              | 1              | -1             | 1              | $-13.3562 < C_{p_4} < -1$      |
| 5   | -              | $\infty$       | -              | 0              | $-1 < C_{p_5} < 0$             |

Tablo 4.8’den  $C_p \in [C_{p_{\min}}, C_{p_{\max}}] = (-1, 3.3267)$  kazançları için  $\hat{G}(s)$  sistemi kapalı çevrimde kararlı yapılabilir.

Lemma 4.1'in ilk koşulundan hareketle (4.32)'nin negatif olmayan reel kök çiftleri,

$$\tilde{w}_a = \{0 - \Delta_0, 0 + \Delta_0; 1.05856, 1.28789\} \quad (4.150)$$

olarak bulunur.  $d = 2$  için kritik frekans,

$$\hat{w}_{pc} = 1.63502 \quad (4.151)$$

olarak hesaplanır.  $\tilde{w}_a$  kümesindeki tüm frekanslar,  $\hat{w}_{pc}$ 'den küçük olduğu için; hepsi için reel eksen kesim noktaları hesaplanır ve böylece

$$\tilde{x}_{1a} = \{1 - \Delta_0, 1 + \Delta_0; -0.3687, -0.3386\} \quad (4.152)$$

$$\tilde{x}_{2a} = \{1 - \Delta_0, 1 + \Delta_0; -0.232, -0.1172\} \quad (4.153)$$

olur.  $w < \hat{w}_{pc}$  için belirsizlik kazanç aralıklarını bulmak için elde edilen sonuçlar, Tablo 4.9'da verilmiştir.

**Tablo 4.9 :** Örnek 4.4'de  $d = 2$ 'e ilişkin  $w < \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$  | $w_{2\ell}$    | $x_{\ell \min}$ | $x_{\ell \max}$ | $\tilde{K}_{p\ell}$                         |
|--------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|---------------------------------------------|
| 1      | $0 - \Delta_0$ | $0 + \Delta_0$ | $1 - \Delta_0$  | $1 + \Delta_0$  | $-1 - \Delta_0 < K_{p\ell} < -1 + \Delta_0$ |
| 2      | 1.05856        | 1.28789        | -0.3687         | -0.1172         | $2.712355 < K_{p\ell} < 8.531598$           |

Tablo 4.9'daki sonuçlardan

$$C_1 = (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (2.712355, 8.531598) \quad (4.154)$$

olarak bulunur. Lemma 4.1'deki ikinci koşuldan hareketle; (4.32)'nin negatif olmayan reel yeni kök çiftleri içinden  $w > \hat{w}_{pc} = 1.63502$  koşulunu sağlayan

$$\tilde{w}_b = \{2.6947, \infty\} \quad (4.155)$$

frekansları için reel eksen kesim noktaları

$$\tilde{x}_{1b} = \{-0.1522, 0\} \quad (4.156)$$

$$\tilde{x}_{2b} = \{0.2971, 0\} \quad (4.157)$$

olarak hesaplanır ve böylece

$$C_2 = (-\infty, -3.3661) \cup (6.5704, \infty) \quad (4.158)$$

elde edilir. Lemma 4.1'in üçüncü koşulundan  $\hat{G}_\Delta(j\omega)$  sisteminin Nyquist eğrisinin kritik frekansa ilişkin reel eksen kesim yerleri,

$$\check{\chi}_{pc} = (x_1(\hat{w}_{pc}), x_2(\hat{w}_{pc})) = (-0.4713, 0.254) \quad (4.159)$$

olarak bulunur. Bu kesim noktaları için

$$C_3 = (-\infty, -3.9365) \cup (2.122, \infty) \quad (4.160)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece (4.52)'den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -3.9365) \cup (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (2.122, \infty) \quad (4.161)$$

olarak bulunur. İkinci mertebeden Padé yaklaşımı için  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = (-1 + \Delta_0, 2.122) \quad (4.162)$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıyken

$$C_{ps} = (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (2.122, 3.3267) \quad (4.163)$$

kazançları, ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılması sonucu ortaya çıkan hata paylarıdır ve bu kazanç aralıkları için kararlılık hakkında kesin bir şey söylenemez.

Silva ve diğ. (2005) tarafından önerilen ve Hermite-Biehler teoremini kullanan ve sadece 1. ve 2. dereceden sistemler için geliştirilmiş grafiksel yöntemlerinde, (4.149)'de verilen  $L = 1.8$  zaman gecikmene sahip sistemin kapalı çevrimde

$$K_c \in (-1, 3.2887) \quad (4.164)$$

kazanç aralığı için kararlı olacağı belirtilmiştir. Bu tezde önerilen yöntemle bulunan ve (4.162)'de verilen  $C_{ds}$  kazanç aralığı, (4.164)'de verilen aralığın içindedir. Silva ve diğ. (2005) tarafından zaman gecikmeli bu sistemin ikinci dereceden Padé eş değeri için Hermite-Biehler teoremi kullanıldığında ise

$$K_c \in (-1, 3.3267) \quad (4.165)$$

kazanç aralığı için kararlı olacağı belirtilmiştir. Aynı sonuç, zaman gecikmeli bu sistemin ikinci dereceden Padé eş değeri için Teorem 3.1 ile Tablo 4.8'den de bulunmuştur. Dikkat edilirse bu tezde önerilen yeni yöntem için de ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılmasına rağmen; kesin kararlı kılan  $C_{ds}$  kazanç aralığı, (4.165)'de verilen kadar geniş değildir.

Zaman gecikmeli bu sistemin üçüncü mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  eş değer sistemi

$$C_p = (-1, 3.28965) \quad (4.166)$$

kazançları için kapalı çevrimde kararlı yapılabilir. Kritik frekans  $\hat{w}_{pc} = 2.4525$ 'dir. Lemma 4.1'den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -2.6826) \cup (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (3.2717, 3.308) \cup (6.8354, \infty) \quad (4.167)$$

olarak bulunur. Böylece 3. dereceden Padé yaklaşımı için  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi kapalı çevrimde,

$$C_{ds} = (-1 + \Delta_0, 3.2717) \quad (4.168)$$

kazanç aralıkları için kesin kararlıdır ve üçüncü dereceden Padé yaklaşımı kullanıldığı için oluşan hata payları,

$$C_{ps} = (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (3.2717, 3.308) \quad (4.169)$$

kazanç aralıklarıdır. Dördüncü dereceden Padé yaklaşımına Lemma 4.1'den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -4.119) \cup (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (3.2884, 3.2889) \cup (4.7728, \infty) \quad (4.170)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi kapalı çevrimde

$$C_{ds} = (-1 + \Delta_0, 3.2884) \quad (4.171)$$

kazanç aralıkları için kesin kararlıdır. Böylece dördüncü dereceden Padé yaklaşımı kullanıldığında oluşan hata payları, aşağıdaki gibi bulunur.

$$C_{ps} = (-1 - \Delta_0, -1 + \Delta_0) \cup (3.2884, 3.2889) \quad (4.172)$$

#### 4.2.6.4 Örnek 4.5

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s-0.8}{s^3 + s^2 + 30s - 2} \quad (4.173)$$

yukarda verilen sistemde  $L=0.5$  sn için 2. ve 4. mertebeden Padé yaklaşımları kullanılmasıyla oluşan  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi kesin kararlı kılacak kazançları hesaplayalım ve Padé yaklaşımları kullanılmasından kaynaklanan kazanç kümelerindeki hata paylarını belirleyelim.

2. mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  için Teorem 3.1'den elde edilen sonuçlar, Tablo 4.10'da verilmiştir.

**Tablo 4.10 :** Örnek 4.5'de  $d=2$  için  $\hat{G}(s)$ 'i Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $\hat{w}_{pi}$ | $\hat{x}_{pi}$ | $\hat{r}_{pi}$ | $\hat{u}_{pi}$ | $C_{pi}$                        |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|
| 1   | 5.04237        | -0.14247       | 2              | 1              | $0 < C_{p_1} < 7.019$           |
| 2   | $\infty$       | 0              | 1              | 3              | $7.019 < C_{p_2} < \infty$      |
| 3   | 8.01973        | 0.02847        | -2             | 4              | $-\infty < C_{p_3} < -35.1247$  |
| 4   | 1.07598        | 0.04298        | -2             | 2              | $-35.1247 < C_{p_4} < -23.2653$ |
| 5   | 0              | 0.4            | 1              | 0              | $-23.2653 < C_{p_5} < -2.5$     |
| 6   | -              | $\infty$       | -              | 1              | $-2.5 < C_{p_6} < 0$            |

Tablo 4.10'dan  $\hat{G}(s)$  sistemi  $C_p \in [C_{p_{\min}}, C_{p_{\max}}] = (-23.2653, -2.5)$  kazançları için kapalı çevrimde kararlı yapılabilir.

Lemma 4.1'in ilk koşulundan hareketle (4.32)'nin negatif olmayan ve kritik frekanstan küçük olan reel kökleri,

$$\tilde{w}_a = \{0 - \Delta_0, 0 + \Delta_0; 1.07587, 1.0761; 5.31582, \infty\} \quad (4.174)$$

olarak bulunur.  $d=2$  için kritik frekans,

$$\hat{w}_{pc} = 5.88607 \quad (4.175)$$

olarak hesaplanır.  $\tilde{w}_a$  kümesindeki frekanslar için reel eksen kesim noktaları

$$\tilde{x}_{1a} = \{0.4 - \Delta_0, 0.4 + \Delta_0; 0.042967, 0.042964; -0.3327, 0\} \quad (4.176)$$

$$\tilde{x}_{2a} = \{0.4 - \Delta_0, 0.4 + \Delta_0; 0.043, 0.04299; 0.0385, 0\} \quad (4.177)$$

olarak bulunur.  $w < \hat{w}_{pc}$  için belirsizlik kazanç aralıklarını bulmak için elde edilen sonuçlar, Tablo 4.11’de verilmiştir.

**Tablo 4.11 :** Örnek 4.5’de  $d = 2$ ’e ilişkin  $w < \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$  | $w_{2\ell}$    | $x_{\ell \min}$  | $x_{\ell \max}$  | $\tilde{K}_{p\ell}$                                            |
|--------|----------------|----------------|------------------|------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1      | $0 - \Delta_0$ | $0 + \Delta_0$ | $0.4 - \Delta_0$ | $0.4 + \Delta_0$ | $-2.5 - \Delta_0 < K_{p\ell} < -2.5 + \Delta_0$                |
| 2      | 1.07587        | 1.0761         | 0.042964         | 0.043            | $-23.2751 < K_{p\ell} < -23.2554$                              |
| 3      | 5.31582        | $\infty$       | -0.3327          | 0.0385           | $-\infty < K_{p\ell} < -25.9715, \quad 3 < K_{p\ell} < \infty$ |

Tablo 4.11’den görüldüğü üzere

$$C_1 = (-\infty, -25.9715) \cup (-23.2751, -23.2554) \cup (-2.5 - \Delta_0, -2.5 + \Delta_0) \cup (3, \infty) \quad (4.178)$$

olarak bulunur Lemma 4.1’deki ikinci koşuldan hareketle; (4.32)’nin negatif olmayan reel kök çiftleri içinden  $w > \hat{w}_{pc}$  şartını sağlayan frekanslar olmadığı için

$$C_2 = \emptyset \quad (4.179)$$

olur. Lemma 4.1’in üçüncü koşulundan

$$C_3 = (-\infty, -4.11859) \cup (4.79537, \infty) \quad (4.180)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece (4.52)’den belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -4.11859) \cup (-2.5 - \Delta_0, -2.5 + \Delta_0) \cup (3, \infty) \quad (4.181)$$

olarak bulunur. İkinci mertebeden Padé yaklaşımı için  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = (-4.11859, -2.5 - \Delta_0) \quad (4.182)$$

kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıdır ve

$$C_{ps} = (-\infty, -4.11859) \cup (-2.5 - \Delta_0, -2.5 + \Delta_0) \quad (4.183)$$

kazançları ise, ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılması sonucu ortaya çıkan hata paylarıdır ve bu kazanç aralıkları için kararlılık hakkında kesin bir şey söylenemez.

4. mertebeden Padé yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}(s)$  sistemi için Teorem 3.1’den elde edilen sonuçlar, Tablo 4.12’de verilmiştir.



**Tablo 4.12 :** Örnek 4.5’de  $d = 4$  İçin  $\hat{G}(s)$ ’i Kararlı Kılan Kazançlar.

| $i$ | $\hat{w}_{pi}$ | $\hat{x}_{pi}$ | $\hat{r}_{pi}$ | $\hat{u}_{pi}$ | $C_{pi}$                        |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------------------------|
| 1   | 4.98532        | -0.13595       | 2              | 1              | $0 < C_{p_1} < 7.3556$          |
| 2   | 13.3362        | -0.00675       | 2              | 3              | $7.3556 < C_{p_2} < 148.148$    |
| 3   | $\infty$       | 0              | 1              | 5              | $148.148 < C_{p_3} < \infty$    |
| 4   | 26.6527        | 0.00147        | -2             | 6              | $-\infty < C_{p_4} < -680.272$  |
| 5   | 1.07592        | 0.04298        | -2             | 4              | $-680.272 < C_{p_5} < -23.267$  |
| 6   | 7.17758        | 0.04418        | -2             | 2              | $-23.6327 < C_{p_6} < -22.6347$ |
| 7   | 0              | 0.4            | 1              | 0              | $-22.6347 < C_{p_7} < -2.5$     |
| 8   | -              | $\infty$       | -              | 1              | $-2.5 < C_{p_8} < 0$            |

Tablo 4.12’den  $C_p = (-22.6327, -2.5)$  kazançları için,  $\hat{G}(s)$  sistemi kapalı çevrimde kararlı yapılabilir.

Lemma 4.1’in ilk koşulundan hareketle  $w < \hat{w}_{pc}$  için elde edilen sonuçlar, Tablo 4.13’de verilmiştir.

**Tablo 4.13 :** Örnek 4.5’de  $d = 4$ ’e İlişkin  $w < \hat{w}_{pc}$  İçin Belirsizlik Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$      | $w_{2\ell}$        | $x_{\ell \min}$     | $x_{\ell \max}$     | $\tilde{K}_{p\ell}$                                 |
|--------|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|-----------------------------------------------------|
| 1      | $0 - \Delta_0$     | $0 + \Delta_0$     | $0.4 - \Delta_0$    | $0.4 + \Delta_0$    | $-2.5 - \Delta_0 < K_{p\ell} < -2.5 + \Delta_0$     |
| 2      | $1.076 - \Delta_0$ | $1.076 + \Delta_0$ | $0.0429 - \Delta_0$ | $0.0429 + \Delta_0$ | $-23.26 - \Delta_0 < K_{p\ell} < -23.26 + \Delta_0$ |
| 3      | 4.98506            | 4.9856             | -0.13608            | -0.1358             | $7.3486 < K_{p\ell} < 7.3631$                       |
| 4      | 7.156              | 7.202              | 0.0427              | 0.0455              | $-23.3818 < K_{p\ell} < -21.9582$                   |

Tablo 4.13’den görüldüğü gibi

$$C_1 = (-23.3818, -21.9582) \cup (-23.26 - \Delta_0, -23.26 + \Delta_0) \cup$$

$$(-2.5 - \Delta_0, -2.5 + \Delta_0) \cup (7.3486, 7.3631) \quad (4.184)$$

olarak bulunur. Lemma 4.1’deki ikinci koşuldan hareketle; (4.32)’nin negatif olmayan reel yeni kök çiftleri içinden  $w > \hat{w}_{pc}$  koşulunu sağlayan

$$\tilde{w}_b = \{15.833, 20.013\} \quad (4.185)$$

frekansları için reel ekseni kesim noktaları

$$\tilde{x}_{1_b} = \{-0.01103, -0.0036\} \quad (4.186)$$

$$\tilde{x}_{2_b} = \{0.0056, 0.0061\} \quad (4.187)$$

olarak hesaplanır ve böylece

$$C_2 = (-\infty, -164.335) \cup (90.6796, \infty) \quad (4.188)$$

elde edilir. Lemma 4.1'in üçüncü koşulundan

$$C_3 = (-\infty, -97.1466) \cup (40.7566, \infty) \quad (4.189)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece belirsizlik kazanç aralıkları

$$C_u = (-\infty, -97.1466) \cup (-23.3818, -21.9582) \cup (-23.26 - \Delta_0, -23.26 + \Delta_0) \cup \\ (-2.5 - \Delta_0, -2.5 + \Delta_0) \cup (7.3486, 7.3631) \cup (40.7566, \infty) \quad (4.190)$$

olarak bulunur. Böylece 4. dereceden Padé yaklaşımı için  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemi,

$$C_{ds} = (-21.9582, -2.5 - \Delta_0) \quad (4.191)$$

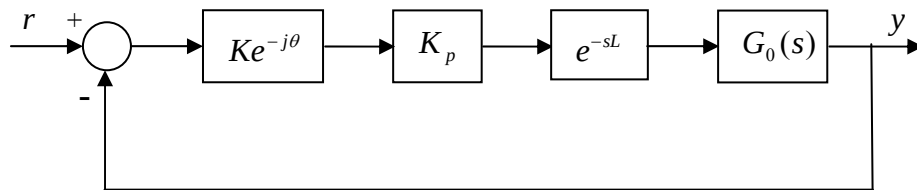
kazanç aralıkları için kapalı çevrimde kesin kararlıdır ve

$$C_{ps} = (-23.3818, -21.9582) \cup (-2.5 - \Delta_0, -2.5 + \Delta_0) \quad (4.192)$$

kazanç aralıkları içinse, kararlılık hakkında kesin bir şey söylenemez.

### 4.3 İstenen Kazanç Payı ve Faz Payını Sağlayan Kazanç Kümesinin Bulunması

İstenen kazanç ve faz payını bulmak için kazanç-faz belirsizliğine sahip Şekil 3.6'daki sisteme  $e^{-sL}$  gecikme elemanı ilave edilerek Şekil 4.15'deki geri beslemeli kontrol sistemi elde edilmiştir.



**Şekil 4.15 :** Kazanç-Faz Belirsizliği Olan Zaman Gecikmeli Sistemin Oransal Kontrolü

### 4.3.1 İstenen kazanç payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı

İstenen kazanç payını sağlayan bütün oransal kazançları bulmada Teorem 4.4'de (4.68)'den bulunan ve zaman gecikmeli sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı kılacak kazançlar için, Lemma 3.1 aşağıdaki gibi uyarlanarak kullanılabilir.

#### 4.3.1.1 Lemma 4.2 (Bayhan ve Söylemez)

Verilen zaman gecikmeli bir sistemi kesin kararlı yapan kazanç aralıkları, Teorem 4.4'deki (4.68)'den  $i=1,2,\dots,r$  için  $C_{ds_i} \triangleq (C_{ds_i \min}, C_{ds_i \max})$  şeklinde bulunmuş olsun. İstenilen  $(\hat{KP})_{\min}$  kazanç payı kısıtlamasını kesinlikle sağlayan tüm kazançlar  $\hat{C}_{ds, KP_i} = \{\hat{C}_{ds, KP_1}, \hat{C}_{ds, KP_2}, \dots, \hat{C}_{ds, KP_r}\}$  olmak üzere,

$$\hat{C}_{ds, KP_i} = \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset, & C_{ds_i \min} > \frac{C_{ds_i \max}}{(\hat{KP})_{\min}} \text{ ise} \\ \left( C_{ds_i \min}, \frac{C_{ds_i \max}}{(\hat{KP})_{\min}} \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (4.193)$$

ile belirlenir. Burada  $\emptyset$ , boş kümeyi göstermekte olup;  $\hat{C}_{ds, KP}$  kümesinin boş küme olması, istenilen kazanç payını kesin sağlayacak oransal kontrolörlerin olmaması anlamına gelir. Burada istenilen kazanç payını sağlama olasılığı bulunan kazanç değerleri, (4.71)'deki  $C_{ps}$  kazanç kümesi üzerinde yukarıda  $C_{ds}$  üzerinde yapılanlara benzer işler yapılarak belirlenebilir.

### 4.3.2 İstenen faz payını sağlayan kazanç kümesinin hesabı

İstenen faz payı  $\tilde{\theta}$  için (4.3) ile verilen zaman gecikmeli sistem,

$$G_{FP}(s) = \frac{e^{-j\tilde{\theta}} N(s)}{D(s)} e^{-sL} = \frac{(\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta}) N(s) e^{-sL}}{D(s)} \quad (4.194)$$

biçiminde yazılabilir. (4.194)'deki zaman gecikmeli sistemde (4.20)'de verilen Padé eş değerinin yazılmasıyla

$$\hat{G}_{FP}(s) \triangleq \frac{e^{-j\tilde{\theta}} N(s)}{D(s)} P_d(s) = \frac{(\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta}) N(s)}{D(s)} P_d(s) \quad (4.195)$$

bulunur. (4.20)'de  $s = jw$  yazıp bulunan

$$\frac{N(jw)}{D(jw)} P_d(jw) = \frac{\hat{N}(jw)}{\hat{D}(jw)} \quad (4.196)$$

bağıntısı için (4.195)'den

$$\hat{G}_{FP}(jw) \triangleq \frac{e^{-j\tilde{\theta}} \hat{N}(jw)}{\hat{D}(jw)} = \frac{(\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta}) \hat{N}(jw)}{\hat{D}(jw)} = (\cos \tilde{\theta} - j \sin \tilde{\theta}) \hat{G}(jw) \quad (4.197)$$

elde edilir.  $\hat{G}(jw)$ , (3.9) ve (3.10)'da verilenlere benzer biçimde yazılırsa

$$\hat{G}(jw) = \frac{\hat{N}_e + jw\hat{N}_o}{\hat{D}_e + jw\hat{D}_o} = \frac{\hat{D}_e\hat{N}_e + \hat{D}_o\hat{N}_ow^2}{\hat{D}_e^2 + \hat{D}_o^2w^2} + jw \left[ \frac{\hat{D}_e\hat{N}_o - \hat{D}_o\hat{N}_e}{\hat{D}_e^2 + \hat{D}_o^2w^2} \right] \quad (4.198)$$

bağıntısı ve eş değer olarak

$$\hat{G}(jw) = \frac{\hat{X}(w^2)}{\hat{Z}(w^2)} + jw \frac{\hat{Y}(w^2)}{\hat{Z}(w^2)} \quad (4.199)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\hat{X}(w^2) \triangleq \hat{D}_e\hat{N}_e + \hat{D}_o\hat{N}_ow^2 \quad (4.200)$$

$$\hat{Y}(w^2) \triangleq \hat{D}_e\hat{N}_o - \hat{D}_o\hat{N}_e \quad (4.201)$$

$$\hat{Z}(w^2) \triangleq \hat{D}_e^2 + \hat{D}_o^2w^2 \quad (4.202)$$

biçimindedir. (4.197)'de (4.199) bağıntısı yazılıp düzenlenirse

$$\hat{G}_{FP}(jw) = \frac{(\hat{X}(w^2) \cos \tilde{\theta} + w\hat{Y}(w^2) \sin \tilde{\theta})}{\hat{Z}(w^2)} + j \frac{(w\hat{Y}(w^2) \cos \tilde{\theta} - \hat{X}(w^2) \sin \tilde{\theta})}{\hat{Z}(w^2)} \quad (4.203)$$

bulunur. Burada (3.51) ve (3.52)'de verilen polinomlara benzer olarak aşağıdaki iki polinomu tanımlayalım:

$$\hat{X}_{FP}(w) \triangleq \hat{X}(w^2) \cos \tilde{\theta} + w\hat{Y}(w^2) \sin \tilde{\theta} \quad (4.204)$$

$$\hat{Y}_{FP}(w) \triangleq w\hat{Y}(w^2)\cos\tilde{\theta} - \hat{X}(w^2)\sin\tilde{\theta} \quad (4.205)$$

(4.204) ve (4.205)'i (4.203)'de yazarsak

$$\hat{G}_{FP}(jw) = \frac{\hat{X}_{FP}(w)}{\hat{Z}(w^2)} + j \frac{\hat{Y}_{FP}(w)}{\hat{Z}(w^2)} \quad (4.206)$$

biçimine gelir. Teorem 3.2'e benzer olarak  $\hat{Y}_{FP}(w)$ 'nin pozitif reel kökleri  $\hat{w}_{FP_1}^*, \hat{w}_{FP_2}^*, \dots, \hat{w}_{FP_\gamma}^*$  olmak üzere;  $i = 1, 2, \dots, \gamma$  için reel eksenden geçiş noktaları,  $\hat{x}_{FP_i} = \hat{X}_{FP}(\hat{w}_{FP_i}^*) / Z(\hat{w}_{FP_i}^*)$  olarak bulunur. Zaman gecikmeli sistemin Padé eş değeri için istenen faz payını sağlayacak kazançları bulmak amacıyla Teorem 3.2'den hareketle aşağıdaki teorem verilebilir.

#### 4.3.2.1 Teorem 4.5 (Bayhan ve Söylemez)

$\hat{X}_{FP}(w)$  ve  $\hat{Y}_{FP}(w)$ , (4.204) ve (4.205) bağıntılarında tanımlanan polinomlar olmak üzere  $i = 1, 2, \dots, \gamma + 1$  için  $(\hat{x}_{FP_i}, \hat{w}_{FP_{i,j}}^*)$  çiftleri, yukarıdaki gibi tanımlansın. Verilen bir  $\hat{C}_p \in \hat{K}_{FP_i} \triangleq (-1/\hat{x}_{FP_{i-1}}, -1/\hat{x}_{FP_i})$  kazancı için, kapalı çevrim sistemin kararsız kutuplarının sayısı

$$\hat{u}_{FP_i} = \hat{u}_0 + \sum_{t=1}^{i-1} \hat{r}_{FP_t} \quad (4.207)$$

ile verilir. Burada  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{G}_{FP}(s)$ 'nin kararsız kutuplarının sayısıdır. Reel eksenden geçişlerin sayısı,

$$\hat{r}_{FP_i} = \sum_{i=1}^{p_i} \hat{d}_{FP_i} \quad (4.208)$$

olup; geçiş yönü,

$$\hat{d}_{FP_i} = \begin{cases} \frac{(1-(-1)^l)}{2} \text{Sgn}\left(\hat{Y}_{FP}^{(l)}(\hat{w}_{FP_i}^*)\right), & 0 < \hat{w}_{FP_i}^* < \infty \text{ ise} \\ -\text{Sgn}(\hat{y}_{FP_1}), & \hat{w}_{FP_i}^* = \infty \text{ ise} \end{cases} \quad (4.209)$$

ile tanımlıdır. Zaman gecikmeli sistemin Padé eş değeri  $\hat{G}(s)$  kesin nedensel ise; geçiş yönü hesabında  $\hat{G}(jw)$ 'nin Nyquist eğrisinin  $w \rightarrow \infty$  için orijine gidiş açısı  $\hat{\psi}$

önem kazanır.  $\hat{D}(s)$  'nin derecesi  $\hat{n}$  ve  $\hat{N}(s)$  'nin derecesi  $\hat{m}$  olmak üzere; bu açı  $\hat{\psi} \triangleq (\hat{n} - \hat{m})\pi/2$  bağıntısıyla hesaplanır. (4.209)'da verilen geçiş yönü hesabı için sistem kesin nedensel ise ve  $\hat{\psi} = \pi/2$  veya  $\hat{\psi} = 3\pi/2$  ise;  $(\hat{x}_{FP_i}^*, \hat{w}_{FP_i}^*)$  çiftlerine,  $\hat{w}_{FP_i}^* = \infty$  ve  $\hat{x}_{FP_i}^* = 0$  'da eklenir. (4.209)'daki  $\hat{Y}_{FP}^{(l)}(\hat{w}_{FP_i}^*)$ ,  $\hat{Y}_{FP}(w)$  'nin  $\hat{w}_{FP_i}^*$  noktasındaki sıfır olmayan birinci türevini gösterirken;  $\hat{y}_{FP_1}$  ise  $\hat{Y}_{FP}(w)$  'nin baş katsayısını gösterir. Bu teoremden istenen faz payı kısıtlaması için Padé yaklaşımıyla bulunan kazanç aralıklarının gerçek değerlerden en fazla ne kadar farklı olabileceğini hesaplamak amacıyla Lemma 4.1'den hareketle aşağıdaki lemma verilebilir.

#### 4.3.2.2 Lemma 4.3 (Bayhan ve Söylemez)

Zaman gecikmeli sistemlerde istenen faz payı kısıtlamasını sağlayan kazançları bulmak amacıyla Teorem 4.5'in kullanılmasıyla elde edilen sonuçlar, sistemin Padé eş değerinin kullanılmasından kaynaklanan hatalar içerir. Bu hataların etkisi nedeniyle  $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$  'nin Nyquist eğrilerinin oluşturduğu eğri ailesinin reel eksen kesim yerlerini ve bu kesim yerlerine ilişkin kazançlar, Lemma 4.1'in bu duruma uyarlanmasıyla hesaplanabilir. Bunun için Lemma 4.1'de verilen üç koşul aşağıdaki biçimde dönüştürülür.

a.) (4.203)'de verilen hata fonksiyonunu içeren  $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$  sisteminin Nyquist eğri ailesinin reel eksen kesim yerlerine karşı düşen reel  $w$  frekansları,

$$\left( \frac{\hat{X}'_E(w) \hat{Z}_x(w)}{2} - \hat{Z}'_x(w) \hat{X}_E(w) \right)^2 - \left( \hat{X}'_R(w) \hat{Z}_x(w) - \hat{Z}'_x(w) \hat{X}_R(w) \right)^2 \hat{X}_E(w) = 0 \quad (4.210)$$

biçiminde tanımlanmış polinomun Lemma 4.1'deki gibi çiftler halinde sıralı reel kökleri içinden  $|w| < (4d/eL)$  koşulu sağlanacak şekilde belirlenir. Burada  $\hat{Z}_x(w)$ ,  $\hat{X}_R(w)$  ve  $\hat{X}_E(w)$  polinomları sırasıyla,

$$\hat{Z}_x(w) \triangleq \hat{Z}(w^2) \quad (4.211)$$

$$\hat{X}_R(w) \triangleq \hat{X}(w^2) \cos \tilde{\theta} + w \hat{Y}(w^2) \sin \tilde{\theta} = \hat{X}_{FP}(w) \quad (4.212)$$

$$\hat{X}_E(w) \triangleq 4 \left( \hat{X}^2(w^2) + w^2 \hat{Y}^2(w^2) \right) (eLw/4d)^{4d+2} - \hat{Y}_{FP}^2(w^2) \quad (4.213)$$

biçiminde tanımlanmış polinomlardır.  $\hat{X}(w^2)$ ,  $\hat{Y}(w^2)$  ve  $\hat{Z}(w^2)$ , (4.200), (4.201) ve (4.202)'de verildiği gibidir.  $\hat{X}_{FP}(w)$  ve  $\hat{Y}_{FP}(w)$  polinomları sırasıyla (4.204) ve

(4.205)'deki istenilen faz payı kısıtlamasından gelen polinomları göstermektedir. (4.210)'nun çiftler halinde sıralanmış olan ve (4.31)'de verilen  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından mutlak değerce küçük olan her bir kök çiftine ilişkin reel eksen kesim yerleri (4.37) ve (4.38)'e benzer olarak  $\ell = 1, 2, \dots, k$  olmak üzere,

$$\hat{x}_{\ell \min} \triangleq \min(\hat{x}_1(w_{2\ell-1}), \hat{x}_1(w_{2\ell})) \quad (4.214)$$

$$\hat{x}_{\ell \max} \triangleq \max(\hat{x}_2(w_{2\ell-1}), \hat{x}_2(w_{2\ell})) \quad (4.215)$$

olarak tanımlanmıştır. Nyquist eğrisinin reel eksen kesim yerlerinin oluşturduğu

$$\tilde{\chi}_{FP,\ell} \triangleq (\hat{x}_{\ell \min} \quad \hat{x}_{\ell \max}) \quad (4.216)$$

aralıklarına ilişkin kazanç aralıkları

$$\tilde{K}_{p_{FP,\ell}} \triangleq \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{-1}{\hat{x}_{\ell \min}} \quad \frac{-1}{\hat{x}_{\ell \max}} \right), & Sgn(\hat{x}_{\ell \min}) = Sgn(\hat{x}_{\ell \max}) \text{ ise} \\ \left( -\infty \quad \frac{-1}{\hat{x}_{\ell \max}} \right) \cup \left( \frac{-1}{\hat{x}_{\ell \min}} \quad \infty \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (4.217)$$

olup bunların birleşimi

$$\hat{C}_1 \triangleq \bigcup_{\ell \in [1, 2, \dots, k]} \tilde{K}_{p_{FP,\ell}} \quad (4.218)$$

biçiminde tanımlıdır.

**b.)**  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından büyük olan frekanslar için Lemma 4.1b'e benzer olarak  $\hat{X}_E(w)$  polinomu,

$$\hat{X}_E(w) \triangleq 4 \left( \hat{X}^2(w^2) + w^2 \hat{Y}^2(w^2) \right) - \hat{Y}_{FP}^2(w^2) \quad (4.219)$$

biçimine gelir.  $\hat{Z}_x(w)$  ve  $\hat{X}_R(w)$  (4.211) ve (4.212)'de verildiği gibidir.  $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$  sistemin Nyquist eğri ailesinin reel eksen kesim yerlerine karşı düşen reel  $w$  frekansları, (4.211), (4.212) ve (4.219)'un (4.210)'da yazılmasıyla bulunan polinomun  $\sigma = 1, 2, \dots, t$  olmak üzere  $w_\sigma \leq w_{\sigma+1}$  biçimindeki reel kök çiftleri içinden  $|w| > (4d / eL)$  koşulu sağlanacak şekilde belirlenir.  $\hat{w}_{pc}$  kritik frekansından mutlak değerce büyük olan bu köklere ilişkin reel eksen kesim yerleri, (4.43) ve (4.44)'e

benzer olarak hesaplanır.  $\hat{G}_{\Delta,FP}(j\omega)$  Nyquist eğrisi ailesinin reel eksen kesim yerlerine ilişkin  $\check{K}_{p_{FP},\sigma}$  kazanç aralıkları (4.46)'dakine benzer yolla hesaplanır ve bulunan bu kazanç aralıklarının birleşimi

$$\hat{C}_2 \triangleq \bigcup_{\sigma \in [1,2,\dots,t]} \check{K}_{p_{FP},\sigma} \quad (4.220)$$

kümesini oluşturur.

c.)  $w = \hat{w}_{pc}$  kritik frekansı için  $\hat{G}_{\Delta,FP}(j\omega)$  Nyquist eğrisi ailesinin reel eksen kesim yerleri,

$$\check{\chi}_{FP,pc} = (\hat{x}_1(\hat{w}_{pc}), \hat{x}_2(\hat{w}_{pc})) \quad (4.221)$$

aralığını oluşturur.  $\hat{x}_1$  ve  $\hat{x}_2$ , (4.49) ve (4.50)'ye benzer olarak

$$\hat{x}_1(w) \triangleq \frac{1}{\hat{Z}_x(w)} \left( \hat{X}_R(w) - \sqrt{\hat{X}_E(w)} \right) \quad (4.222)$$

$$\hat{x}_2(w) \triangleq \frac{1}{\hat{Z}_x(w)} \left( \hat{X}_R(w) + \sqrt{\hat{X}_E(w)} \right) \quad (4.223)$$

biçiminde tanımlıdır. Böylece (4.221)'e ilişkin kazanç aralıkları, (4.51)'e benzer olarak

$$\hat{C}_3 \triangleq \check{K}_{FP,pc_i} = \left\{ \begin{array}{ll} \left( \frac{-1}{\hat{x}_1(\hat{w}_{pc})} \quad \frac{-1}{\hat{x}_2(\hat{w}_{pc})} \right), & Sgn(\hat{x}_1(\hat{w}_{pc})) = Sgn(\hat{x}_2(\hat{w}_{pc})) \text{ ise} \\ \left( -\infty \quad \frac{-1}{\hat{x}_2(\hat{w}_{pc})} \right) \cup \left( \frac{-1}{\hat{x}_1(\hat{w}_{pc})} \quad \infty \right), & \text{Aksi durumda} \end{array} \right\} \quad (4.224)$$

biçiminde yazılabilir. Bu üç koşuldan bulunan kazanç aralıklarının birleşimi yardımıyla istenen faz payı kısıtlaması ve Padé yaklaşımı kullanılması sonucu ortaya çıkan belirsizlik kazanç aralıkları,

$$\hat{C}_u \triangleq \hat{C}_1 \cup \hat{C}_2 \cup \hat{C}_3 \quad (4.225)$$

biçiminde tanımlıdır.



#### 4.3.2.3 Lemma 4.3'ün ispatı

(4.203)'ü eş değer olarak

$$\hat{G}_{FP}(jw) \triangleq \text{Re}(\hat{G}_{FP}(jw)) + j \text{Im}(\hat{G}_{FP}(jw)) \quad (4.226)$$

biçiminde yazarsak; reel ve sanal kısımları sırasıyla

$$\text{Re}(\hat{G}_{FP}(jw)) = \frac{(\hat{X}(w^2) \cos \tilde{\theta} + w \hat{Y}(w^2) \sin \tilde{\theta})}{\hat{Z}(w^2)} = \frac{\hat{X}_{FP}(w)}{\hat{Z}(w^2)} \quad (4.227)$$

ve

$$\text{Im}(\hat{G}_{FP}(jw)) = \frac{(w \hat{Y}(w^2) \cos \tilde{\theta} - \hat{X}(w^2) \sin \tilde{\theta})}{\hat{Z}(w^2)} = \frac{\hat{Y}_{FP}(w)}{\hat{Z}(w^2)} \quad (4.228)$$

olarak yazılır.  $\hat{G}_{\Delta,FP}(jw)$  'nin Nyquist eğrisi, Padé yaklaşımıyla yapılan hata da göz önüne alındığında tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesi tanımladığı için; Şekil 4.8'de görülen O merkezli  $\varepsilon(w)$  yarı çaplı diske benzer diskler hata bantı oluşturur.  $\varepsilon(w)$  yarı çaplı böyle bir disk için  $\hat{x}_1$  ve  $\hat{x}_2$  Nyquist eğrilerinin reel eksenini kesim yerleri olmak üzere (4.55)'e benzer olarak

$$\hat{x}_{1,2}(w) = \text{Re}(\hat{G}_{FP}(jw)) \mp \sqrt{\varepsilon^2(w) - \left\{ \text{Im}(\hat{G}_{FP}(jw)) \right\}^2} \quad (4.229)$$

biçiminde yazılabilir.  $\varepsilon(w)$  yarı çapı, (4.28)'de tanımlandığı gibidir. (4.28)'de görülen  $|G_0(jw)|$  teriminin yerini  $|\hat{G}(jw)|$  genliği alır. Böylece Böylece (4.59)'a benzer olarak  $\hat{G}(jw)$  'nin genliği (4.200), (4.201) ve (4.202)'nin kullanılmasıyla

$$|\hat{G}(jw)| = \sqrt{\frac{\hat{X}^2(w^2) + w^2 \hat{Y}^2(w^2)}{\hat{Z}^2(w^2)}} \quad (4.230)$$

biçimine gelir.  $w < (4d / eL)$  için (4.230)'un ( $|G_0(jw)|$  teriminin yerine) (4.28)'de yazılmasıyla  $\varepsilon(w)$  için bulunan bağıntının ve ayrıca (4.227) ile (4.228)'in (4.230)'da yazılıp düzenlenmesiyle

$$\hat{x}_{1,2}(w) = \frac{1}{\hat{Z}(w^2)} \left\{ \left( \hat{X}(w^2) \cos \tilde{\theta} + w \hat{Y}(w^2) \sin \tilde{\theta} \right) \mp \sqrt{4 \left( \hat{X}^2(w^2) + w^2 \hat{Y}^2(w^2) \right) \left( \frac{eLw}{4d} \right)^{4d+2} - \left( w \hat{Y}(w^2) \cos \tilde{\theta} - \hat{X}(w^2) \sin \tilde{\theta} \right)^2} \right\} \quad (4.231)$$

elde edilir. Bu son bağıntıda (4.204) ve (4.205) yazılırsa eş değer olarak

$$\hat{x}_{1,2}(w) = \frac{1}{\hat{Z}(w^2)} \left( \hat{X}_{FP}(w) \mp \sqrt{4 \left( \hat{X}^2(w^2) + w^2 \hat{Y}^2(w^2) \right) \left( \frac{eLw}{4d} \right)^{4d+2} - Y_{FP}^2(w)} \right) \quad (4.232)$$

bulunur. (4.211), (4.212) ve (4.213)'de verilmiş olan  $\hat{Z}_x(w)$ ,  $\hat{X}_R(w)$  ve  $\hat{X}_E(w)$  tanımlarının (4.232)'de yazılırsa; Nyquist eğrilerinin kesim yerleri için (4.62)'e benzer olarak

$$\hat{x}_{1,2}(w) = \frac{1}{\hat{Z}_x(w)} \left( \hat{X}_R(w) \mp \sqrt{\hat{X}_E(w)} \right) \quad (4.233)$$

bağıntısı elde edilir. (4.233)'ün  $w$ 'a göre birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\hat{x}'_{1,2}(w) = \frac{1}{\hat{Z}_x^2(w)} \left( \left( \hat{X}'_R(w) \mp \frac{\hat{X}'_E(w)}{2\sqrt{\hat{X}_E(w)}} \right) \hat{Z}_x(w) - \hat{Z}'_x(w) \left( \hat{X}_R(w) \mp \sqrt{\hat{X}_E(w)} \right) \right) = 0 \quad (4.234)$$

olarak bulunur. Son bağıntı düzenlenirse eş değer olarak

$$\left( \hat{X}'_R(w) \hat{Z}_x(w) - \hat{Z}'_x(w) \hat{X}_R(w) \right) \sqrt{\hat{X}_E(w)} = \pm \left( \frac{\hat{X}'_E(w) \hat{Z}_x(w)}{2} - \hat{Z}'_x(w) \hat{X}_E(w) \right) \quad (4.235)$$

biçiminde olur. (4.235)'in her iki tarafının karesi alınırsa

$$\left( \frac{\hat{X}'_E(w) \hat{Z}_x(w)}{2} - \hat{Z}'_x(w) \hat{X}_E(w) \right)^2 - \left( \hat{X}'_R(w) \hat{Z}_x(w) - \hat{Z}'_x(w) \hat{X}_R(w) \right)^2 \hat{X}_E(w) = 0 \quad (4.236)$$

bulunur. Böylece (4.210)'da verilen polinom elde edilmiş olur. (4.28)'den  $w > (4d/eL)$  ise;  $\hat{X}_E(w)$  'nin (4.213)'de verilen ifadesindeki  $(eLw/4d)^{4d+2}$  terimi yok olur ve böylece (4.219)'da verilen  $\hat{X}_E(w)$  için (4.210) kullanılır ve ispat tamamlanmış olur. ■

Zaman gecikmeli sistemlerde istenen faz payını sağlayan kazançları Padé yaklaşımı kullanarak bulmak için yukarıda verilen sonuçlardan hareketle Teorem 4.4'ü aşağıdaki biçimde dönüştürebiliriz.

#### 4.3.2.4 Teorem 4.6 (Bayhan ve Söylemez)

Şekil 4.15'de görülen faz belirsizliğine sahip (4.194)'deki  $G_{FP}(s) = e^{-j\tilde{\theta}} G_0(s) e^{-sL}$  sistemi için,  $d$ . mertebeden Padé yaklaşımı kullanılarak bulunan ve (4.195) ile verilen  $\hat{G}_{FP}(s) = e^{-j\tilde{\theta}} G_0(s) P_d(s)$  sistemini kararlı kılan  $\hat{C}_{p,FP}$  kazanç aralıkları, Teorem 3.5 ile belirlenebilir.  $\hat{G}_{\Delta,FP}(s)$  sistemini kesin kararlı yapacak kazanç kümesi

$$\hat{C}_{ds,FP} \triangleq \hat{C}_{p,FP} \setminus \hat{C}_{u,FP} \quad (4.237)$$

ile bulunur. (4.225)'de verilen  $\hat{C}_{u,FP}$  kümesi,  $q = 1, 2, \dots, f$  olmak üzere

$$\hat{C}_{u,FP} \triangleq \bigcup \hat{C}_{u,FP_q} \quad (4.238)$$

olarak yazılabilir. Burada  $\hat{C}_{u,FP_q} = [\hat{K}_{\min_q}, \hat{K}_{\max_q}]$  olacak biçimde tanımlanmış kazanç aralıklarının bir kümesidir. Padé yaklaşımı kullanılması sonucu kazançlarda ortaya çıkan hata payları,

$$\hat{C}_{ps,FP} \triangleq \bigcup_{\hat{C}_{u,FP_q} \cap \hat{C}_{p,FP} \neq \emptyset} \hat{C}_{u,FP_q} \quad (4.239)$$

ile hesaplanır.  $\hat{C}_{ps,FP}$  kazanç aralıkları için, sistemin kapalı çevrimdeki kararlılığı hakkında kesin bir şey söylenemez.

#### 4.3.2.5 Örnek 4.6 (Verilen KP ve FP'nı sağlayan kazançlar için)

$L = 0.5$  sn zaman gecikmesine sahip Örnek 4.5'de (4.173) ile verilen sistemde  $5dB$  kazanç payı ve  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  faz payı için 2. ve 4. mertebeden Padé yaklaşımları kullanılmasıyla kapalı çevrim sistemi kesin kararlı kılacak kazançları hesaplayalım ve Padé yaklaşımlarının kullanılmasından kaynaklanan kazanç kümelerindeki hata paylarını bulalım.

İkinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla  $5dB$  kazanç payı için zaman gecikmeli bu sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazançları bulmak amacıyla Lemma 4.2'den yararlanabiliriz. Bu amaçla (4.193)'den

$$KP_{dB} = 5dB = 20 \log(\hat{KP})_{\min} \Rightarrow (\hat{KP})_{\min} = 1.7783 \quad (4.240)$$

olarak bulunur. (4.182)'den ikinci mertebeden Padé yaklaşımı için zaman gecikmeli sistemin kapalı çevrimde  $C_{ds} = (-4.11859, -2.5 - \Delta_0)$  kazanç aralığı için kesin kararlı olduğu göz önüne alınarak; Lemma 4.2'den bulunan

$$\hat{C}_{ds,KP} = \left( C_{ds \min}, \frac{C_{ds \max}}{(\hat{KP})_{\min}} \right) = (-4.11859, -0.52095 - \Delta_0) \quad (4.241)$$

kazanç aralıklarında kapalı çevrim sistem, en az  $5dB$ 'lik kazanç payı ile birlikte kesin kararlı olacaktır. (4.183)'de verilen  $C_{ps}$  kazanç aralıkları yardımıyla Lemma 4.2'den bulunan  $\hat{C}_{ps,KP} = (-\infty, -2.316) \cup (-2.5 - \Delta_0, -0.52095 + \Delta_0)$  kazanç aralıkları,  $5dB$ 'lik kazanç payını sağlama olasılığı olan kazanç değerleridir.

İkinci dereceden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  faz payı için zaman gecikmeli sistemi kapalı çevrimde kesin kararlı kılacak kazançları ve hata paylarını bulmak amacıyla Lemma 4.3 ve Teorem 4.6'dan yararlanabiliriz. Bu amaçla öncelikle Teorem 4.5'den zaman gecikmeli sistemin ikinci dereceden Padé eş değeri için  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  faz payını sağlatacak  $\hat{C}_{p,FP}$  kazançlarını bulmak gerekir. Böylece zaman gecikmeli  $G(s)$  sisteminin ikinci dereceden Padé eş değeri  $\hat{G}(s)$  için (4.200), (4.201) ve (4.202)'den sırasıyla

$$\hat{X}(w^2) = 3686.4 + 95923.2w^2 - 12296w^4 + 314w^6 - w^8 \quad (4.242)$$

$$\hat{Y}(w^2) = 48844.8 - 44870.4w^2 + 2345.2w^4 - 25.8w^6 \quad (4.243)$$

$$\hat{Z}(w^2) = 9216 + 2.08 \times 10^6 w^2 - 92540w^4 + 376w^6 - 11w^8 + w^{10} \quad (4.244)$$

olarak bulunur.  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  faz payı için (4.204) ve (4.205)'den sırasıyla

$$\begin{aligned} \hat{X}_{FP}(w) = & 3192.52 + 24422.4w + 83071.9w^2 - 22435.2w^3 - 10648.6w^4 + \\ & 1172.6w^5 + 271.93w^6 - 12.9w^7 - 0.87w^8 \end{aligned} \quad (4.245)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{FP}(w) = & -1843.2 + 42300.8w - 47961.6w^2 - 38858.9w^3 + 6148w^4 + \\ & 2031w^5 - 157w^6 - 22.34w^7 + 0.5w^8 \end{aligned} \quad (4.246)$$

elde edilir.  $L = 0.5$  sn zaman gecikmesine sahip Örnek 4.5’de (4.173) ile verilen zaman gecikmeli sistemin 2. dereceden Padé eş değeri olan  $\hat{G}(s)$  sistemi, kesin nedensel olduğu ve  $\hat{\psi} = \pi$  olduğundan;  $\hat{w}_{FP_i}^* = \infty$  frekansı için de reel eksenden geçiş yoktur. Yukarıda bulunan polinomların kullanılmasıyla Teorem 4.5’den bulunan sonuçlar, Tablo 4.14’de verilmiştir.

**Tablo 4.14 :** Örnek 4.6’da  $d = 2$  İçin  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  Faz Payını Sağlayan Kazançlar.

| $i$ | $\hat{w}_{FP_i}$ | $\hat{x}_{FP_i}$ | $\hat{r}_{FP_i}$ | $\hat{u}_{FP_i}$ | $\hat{C}_{p,FP_i}$                                       |
|-----|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------------------------------------------------|
| 1   | -5.3156          | -0.16987         | 1                | 1                | $0 < \hat{C}_{p_1} < 5.8869$                             |
| 2   | 4.6354           | -0.10243         | 1                | 2                | $5.8869 < \hat{C}_{p_2} < 9.7625$                        |
| 3   | 49.296           | -0.00042         | 1                | 3                | $9.7625 < \hat{C}_{p_3} < 2400.3$                        |
| 4   | -9.7203          | 0.01538          | -1               | 4                | $-65.0235 > \hat{C}_{p_4}, \quad 2400.3 < \hat{C}_{p_4}$ |
| 5   | -1.7111          | 0.04055          | -1               | 3                | $-65.0235 < \hat{C}_{p_5} < -24.6625$                    |
| 6   | 6.8809           | 0.05363          | -1               | 2                | $-24.6625 < \hat{C}_{p_6} < -18.645$                     |
| 7   | 0.5756           | 0.05718          | -1               | 1                | $-18.645 < \hat{C}_{p_7} < -17.4888$                     |
| 8   | 0.0461           | 0.32939          | 1                | 0                | $-17.4888 < \hat{C}_{p_8} < -3.03593$                    |
| 9   | -                | $\infty$         | -                | 1                | $-3.03593 < C_{p_9} < 0$                                 |

Tablo 4.14’den  $\hat{C}_{p,FP} \in [\hat{C}_{p,FP_8 \min}, \hat{C}_{p,FP_8 \max}] = (-17.4888, -3.03593)$  kazançları,  $30^\circ$  faz payı için ikinci dereceden Padé yaklaşımıyla bulunan  $\hat{G}_{FP}(s)$  sistemini kapalı çevrimde kararlı yapar.

$d = 2$  için kritik frekansın  $\hat{w}_{pc} = 5.88607$  olduğu (4.175)’de verilmiştir.  $30^\circ$  faz payı için Lemma 4.3’ün ilk koşulundan hareketle (4.210)’un mutlak değerce kritik frekanstan küçük olan reel kökleri,

$$\tilde{w}_{a,FP} = \{-5.446; -1.71135, -1.71107; 0.046 - \Delta_0, 0.046 + \Delta_0; 0.575615, 0.575636; 5.1537\} \quad (4.247)$$

olarak bulunur.  $\tilde{w}_{a,FP}$  kümesindeki frekanslar için reel ekseni kesim noktaları

$$\tilde{x}_{1a,FP} = \{-0.395; 0.0403792, 0.040379; 0.329 - \Delta_0, 0.329 + \Delta_0; 0.0571793, 0.057178; -0.239\} \quad (4.248)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{2,a,FP} = \{ & 0.064; \quad 0.0407159, 0.0407157; \quad 0.329 - \Delta_0, 0.329 + \Delta_0; \\ & 0.0571808, 0.0571795; \quad 0.006 \} \end{aligned} \quad (4.249)$$

olarak bulunur.  $|w| < \hat{w}_{pc}$  için belirsizlik kazanç aralıklarını bulmak için elde edilen sonuçlar, Tablo 4.15’de verilmiştir.

**Tablo 4.15 :** Örnek 4.6’da  $d = 2$ ’e ilişkin  $|w| < \hat{w}_{pc}$  ve  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  Faz Payı Kısıtlamaları İçin Belirsizlik Kazanç Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$      | $w_{2\ell}$        | $\hat{x}_{\ell \min}$ | $\hat{x}_{\ell \max}$ | $\tilde{K}_{p_{FP}, \ell}$                                                         |
|--------|--------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | -                  | -5.446             | -0.395                | 0.064                 | $-\infty < K_{p_{FP}, \ell} < -15.6904, \quad 2.5257 < K_{p_{FP}, \ell} < \infty$  |
| 2      | -1.71135           | -1.71107           | 0.040379              | 0.0407159             | $-24.7654 < K_{p_{FP}, \ell} < -24.5604$                                           |
| 3      | $0.046 - \Delta_0$ | $0.046 + \Delta_0$ | $0.329 - \Delta_0$    | $0.329 + \Delta_0$    | $-3.03593 - \Delta_0 < K_{p_{FP}, \ell} < -3.03593 + \Delta_0$                     |
| 4      | 0.575615           | 0.575636           | 0.057178              | 0.0571808             | $-17.4893 < K_{p_{FP}, \ell} < -17.4884$                                           |
| 5      | 5.1537             | -                  | -0.239                | 0.006                 | $-\infty < K_{p_{FP}, \ell} < -168.354, \quad 4.17109 < K_{p_{FP}, \ell} < \infty$ |

Tablo 4.15’den

$$\hat{C}_1 = (-\infty, -15.6904) \cup (-3.03593 - \Delta_0, -3.03593 + \Delta_0) \cup (2.5257, \infty) \quad (4.250)$$

olarak bulunur. Lemma 4.3’deki ikinci koşuldan hareketle; (4.210)’nun reel yeni kök çiftleri içinden  $|w| > \hat{w}_{pc}$  koşulunu sağlayan frekanslar olmadığı için

$$\tilde{w}_{b,FP} = \emptyset \quad (4.251)$$

yazılabilir ve dolayısıyla reel eksen kesim noktaları için

$$\tilde{x}_{1,b,FP} = \emptyset \quad (4.252)$$

$$\tilde{x}_{2,b,FP} = \emptyset \quad (4.253)$$

yazılabilir ve böylece

$$\hat{C}_2 = \emptyset \quad (4.254)$$

elde edilir. Lemma 4.3’ün üçüncü koşulundan

$$\hat{C}_3 = (-\infty, -3.14679) \cup (6.2763, \infty) \quad (4.255)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece  $30^\circ$  faz payı için belirsizlik kazanç aralıkları

$$\hat{C}_{u,FP} = (-\infty, -3.14679) \cup (-3.03593 - \Delta_0, -3.03593 + \Delta_0) \cup (2.5257, \infty) \quad (4.256)$$

olarak bulunur. Teorem 4.6'dan  $30^\circ$  faz payı için 2. mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla kapalı çevrim sistemi kesin kararlı kılacak kazançlar,

$$\hat{C}_{ds,FP} = (-3.14679, -3.03593 - \Delta_0) \quad (4.257)$$

olarak bulunur. Bu durumda  $30^\circ$  faz payı için 2. mertebeden Padé yaklaşımı için

$$\hat{C}_{ps,FP} = (-\infty, -3.14679) \cup (-3.03593 - \Delta_0, -3.03593 + \Delta_0) \quad (4.258)$$

kazanç aralıklarında kararlılık hakkında kesin bir şey söylenemez. İkinci mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla  $30^\circ$  faz payı için kapalı çevrim sistemi kesin kararlı kılacak kazançlar ile  $5dB$  kazanç payını birlikte sağlayan kazanç aralığı (4.257)'de  $30^\circ$  faz payı için olan kazançlardır; yani  $\hat{C}_{ds,KP+FP} = \hat{C}_{ds,KP} \cap \hat{C}_{ds,FP} = \hat{C}_{ds,FP}$  'dir.

Dördüncü dereceden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla  $5dB$  kazanç payı için zaman gecikmeli bu sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazançları bulmak amacıyla (4.240)'daki  $(\hat{KP})_{\min} = 1.7783$  ve (4.191)'de verilen  $C_{ds} = (-21.9582, -2.5 - \Delta_0)$  kazançları kullanılır ve böylece Lemma 4.2'den bulunan

$$\hat{C}_{ds,KP} = (-21.9592, -0.52095 - \Delta_0) \quad (4.259)$$

kazanç aralıklarında kapalı çevrim sistem, en az  $5dB$ 'lik kazanç payı ile birlikte kesin kararlı olacaktır. (4.192)'de verilen  $C_{ps}$  kazanç aralıkları yardımıyla Lemma 4.2'den bulunan  $\hat{C}_{ps,KP} = (-23.3818, -12.3479) \cup (-2.5 - \Delta_0, -0.52095 + \Delta_0)$  kazanç aralıkları,  $5dB$ 'lik kazanç payını sağlama olasılığı olan kazanç değerleridir.

Teorem 4.5'den zaman gecikmeli bu sistemin dördüncü dereceden Padé eş değeri  $\hat{G}_{FP}(s)$  için  $30^\circ$  faz payını sağlayan kazançlar

$$\hat{C}_{p,FP} = (-13.8946, -3.03593) \quad (4.260)$$

olarak bulunur. Dördüncü dereceden Padé yaklaşımının kullanılmasıyla  $30^\circ$  faz payı kısıtlaması için Lemma 4.3'ün ilk koşulundan bulunan sonuçlar, Tablo 4.16'da verilmiştir.

**Tablo 4.16 :** Örnek 4.6’da  $d = 4$ ’e ilişkin  $|w| < \hat{w}_{pc}$  ve  $\tilde{\theta} = 30^\circ$  Faz Payı Kısıtlamaları İçin Belirsizlik Kazanç Aralıkları.

| $\ell$ | $w_{2\ell-1}$      | $w_{2\ell}$        | $\hat{x}_{\ell \min}$ | $\hat{x}_{\ell \max}$ | $\tilde{K}_{p_{FP}, \ell}$                                     |
|--------|--------------------|--------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1      | -8.0969            | -7.961             | 0.0261                | 0.0307                | $-38.3093 < K_{p_{FP}, \ell} < -32.5988$                       |
| 2      | -5.2636            | -5.2634            | -0.166265             | -0.165778             | $6.0145 < K_{p_{FP}, \ell} < 6.03216$                          |
| 3      | $-1.71 - \Delta_0$ | $-1.71 + \Delta_0$ | $0.0405 - \Delta_0$   | $0.0405 + \Delta_0$   | $-24.6629 - \Delta_0 < K_{p_{FP}, \ell} < -24.6629 + \Delta_0$ |
| 4      | $0.046 - \Delta_0$ | $0.046 + \Delta_0$ | $0.03294 - \Delta_0$  | $0.03294 + \Delta_0$  | $-3.03593 - \Delta_0 < K_{p_{FP}, \ell} < -3.03593 + \Delta_0$ |
| 5      | $0.576 - \Delta_0$ | $0.576 + \Delta_0$ | $0.05718 - \Delta_0$  | $0.05718 + \Delta_0$  | $-17.488 - \Delta_0 < K_{p_{FP}, \ell} < -17.488 + \Delta_0$   |
| 6      | 4.5736             | 4.5741             | -0.09793              | -0.09784              | $10.2109 < K_{p_{FP}, \ell} < 10.2209$                         |
| 7      | 6.4918             | 6.5061             | 0.07103               | 0.0729                | $-14.0792 < K_{p_{FP}, \ell} < -13.7173$                       |

Böylece Tablo 4.16’dan

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 = & (-38.3093, -32.5988) \cup (-24.6629 - \Delta_0, -24.6629 + \Delta_0) \cup (-17.488 - \Delta_0, -17.488 + \Delta_0) \cup \\ & (-14.0792, -13.7173) \cup (-3.03593 - \Delta_0, -3.03593 + \Delta_0) \cup \\ & (6.0145, 6.03216) \cup (10.2109, 10.2209) \end{aligned} \quad (4.261)$$

olarak bulunur. Lemma 4.3’deki ikinci koşuldan

$$\begin{aligned} \hat{C}_2 = & (-\infty, -215.02) \cup (-\infty, -127.96) \cup (-\infty, -96.2438) \cup \\ & (50.899, \infty) \cup (71.67, \infty) \cup (120.24, \infty) \end{aligned} \quad (4.262)$$

kazançları bulunur ve eş değer olarak

$$\hat{C}_2 = (-\infty, -96.2438) \cup (50.899, \infty) \quad (4.263)$$

biçimine gelir. Lemma 4.3’ün üçüncü koşulundan kritik frekans için

$$\hat{C}_3 = (-\infty, -108.303) \cup (36.5583, \infty) \quad (4.264)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece  $30^\circ$  faz payı için belirsizlik kazanç aralıkları

$$\begin{aligned} \hat{C}_{u,FP} = & (-\infty, -96.2438) \cup (-38.3093, -32.5988) \cup (-24.6629 - \Delta_0, -24.6629 + \Delta_0) \cup \\ & (-17.488 - \Delta_0, -17.488 + \Delta_0) \cup (-14.0792, -13.7173) \cup (-3.03593 - \Delta_0, -3.03593 + \Delta_0) \cup \\ & (6.0145, 6.03216) \cup (10.2109, 10.2209) \cup (36.5583, \infty) \end{aligned} \quad (4.265)$$



olarak bulunur. Teorem 4.6'dan  $30^\circ$  faz payı için 4. mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla kapalı çevrim sistemi kesin kararlı kılacak kazançlar,

$$\hat{C}_{ds,FP} = (-13.7173, -3.03593 - \Delta_0) \quad (4.266)$$

olarak bulunur. Böylece dördüncü dereceden Padé yaklaşımı kullanıldığında ortaya çıkan hata payları

$$\hat{C}_{ps,FP} = (-14.0792, -13.7173) \cup (-3.03593 - \Delta_0, -3.03593 + \Delta_0) \quad (4.267)$$

kazanç aralıklarıdır. Zaman gecikmeli bu sistemde 4. dereceden Padé yaklaşımının kullanılmasıyla  $5dB$  kazanç payı ve  $30^\circ$  faz payını birlikte sağlayan kazançlar (4.266)'da verilen kazanç kümesidir.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığını bozmadan kazanç payı ve faz payının en büyük alabileceği değerler olan maksimum kazanç payı ve maksimum faz payının hesabı, izleyen iki bölümde verilmiştir.

#### 4.4 Maksimum Kazanç Payı Hesabı

Zaman gecikmeli sistemlerde maksimum kazanç payını hesaplamak için Teorem 4.4'den bulunan ve  $i=1,2,\dots,r$  için kapalı çevrim sistemi kesin kararlı kılan  $C_{ds_i} \triangleq (C_{ds_i \min}, C_{ds_i \max})$  kazanç değerlerinin mutlak değerce büyük olan üst sınırının alt sınıra olan oranından yararlanılır. Kararlı kılan birkaç kazanç aralığının olması durumunda, her kazanç aralığının ayrı ayrı oranlarının içinde en büyük olanı, maksimum kazanç payını verir. Bunun için zaman gecikmesiz sistemler için önerilen Lemma 3.4, zaman gecikmeliler için Teorem 4.4'ün yardımıyla aşağıdaki gibi uyarlanarak kullanılabilir.

##### 4.4.1 Lemma 4.4 (Bayhan ve Söylemez)

Zaman gecikmeli  $G(s)$  sistemini kesin kararlı kılan  $C_{ds_i} \triangleq (C_{ds_i \min}, C_{ds_i \max})$  kazanç aralıklarının her biri için kazanç payları

$$\hat{KP}_{ds_i} \triangleq \frac{\max(|C_{ds_i \min}|, |C_{ds_i \max}|)}{\min(|C_{ds_i \min}|, |C_{ds_i \max}|)} \quad (4.268)$$

olarak tanımlanırsa; maksimum kazanç payı, aşağıdaki bağıntıyla hesaplanabilir.

$$\max \hat{KP}_{ds} = \max_i \{ \hat{KP}_{ds_i} \} \quad (4.269)$$

#### 4.5 Maksimum Faz Payı Hesabı

(4.3) ile verilen zaman gecikmeli sistemde  $s = jw$  yazarsak,

$$G(jw) = G_0(jw) e^{-jwL} \quad (4.270)$$

sahip oluruz. Burada

$$e^{-jLw} = \cos(Lw) - j\sin(Lw) \quad (4.271)$$

bağıntısını ve (3.9)'da verilen  $G_0(jw)$ 'yi (4.270)'de yazarsak,

$$G(jw) = \frac{N(jw)}{D(jw)} e^{-jwL} = \frac{(N_e + jwN_o)}{(D_e + jwD_o)} (\cos(Lw) - j\sin(Lw)) \quad (4.272)$$

elde edilir. Bu son bağıntı eş değer olarak

$$G(jw) = \frac{(N_e \cos(Lw) + wN_o \sin(Lw)) + j (wN_o \cos(Lw) - N_e \sin(Lw))}{(D_e + jwD_o)} \quad (4.273)$$

biçiminde yazılabilir. (4.273)'ün pay ve paydasını, paydanın eşleniğiyle çarpar ve düzenlersek,

$$G(jw) = \frac{(D_e N_e \cos(Lw) + wD_e N_o \sin(Lw) - wD_o N_e \sin(Lw) + w^2 D_o N_o \cos(Lw))}{(D_e^2 + w^2 D_o^2)} + j \frac{(wD_e N_o \cos(Lw) - D_e N_e \sin(Lw) - w^2 D_o N_o \sin(Lw) - wD_o N_e \cos(Lw))}{(D_e^2 + w^2 D_o^2)} \quad (4.274)$$

bulunur. Bu son bağıntıyı eş değer olarak,

$$G(jw) = \frac{\left( \cos(Lw) (D_e N_e + w^2 D_o N_o) + w \sin(Lw) (D_e N_o - D_o N_e) \right)}{(D_e^2 + w^2 D_o^2)} +$$

$$j \frac{\left( w \cos(Lw) (D_e N_o - D_o N_e) - \sin(Lw) (D_e N_e + w^2 D_o N_o) \right)}{(D_e^2 + w^2 D_o^2)} \quad (4.275)$$

biçiminde yazabiliriz. (3.11), (3.12) ve (3.13) bağıntıları, (4.275)'de yazılırsa,

$$G(jw) = \frac{\left( \cos(Lw) X(w^2) + w \sin(Lw) Y(w^2) \right)}{Z(w^2)} +$$

$$j \frac{\left( w \cos(Lw) Y(w^2) - \sin(Lw) X(w^2) \right)}{Z(w^2)} \quad (4.276)$$

bulunur. Burada  $G(jw)$ 'nin reel ve sanal kısımları sırasıyla,

$$G_R(jw) \triangleq \operatorname{Re}\{G(jw)\} = \frac{\left( \cos(Lw) X(w^2) + w \sin(Lw) Y(w^2) \right)}{Z(w^2)} \quad (4.277)$$

$$G_I(jw) \triangleq \operatorname{Im}\{G(jw)\} = \frac{\left( w \cos(Lw) Y(w^2) - \sin(Lw) X(w^2) \right)}{Z(w^2)} \quad (4.278)$$

biçiminde tanımlanabilir. Zaman gecikmeli sistemlerde maksimum faz payını hesaplamak için aşağıdaki teorem önerilebilir. Bu teorem, zaman gecikmeli sistemlerde üstel  $e^{-sL}$  terimini içeren bir quasi-polinom yerine reel katsayılı sonlu sayıda reel köke sahip sıradan bir polinomun hesabını gerektirdiği için ve tam çözümü vermesi açısından oldukça önemlidir.

#### 4.5.1 Teorem 4.7 (Bayhan ve Söylemez)

Tam uygun transfer fonksiyonuna sahip zaman gecikmeli (4.3) ile verilen  $G(s)$  sistemini düşünelim.  $X(w^2)$  ve  $Y(w^2)$ , (3.11) ve (3.12)'de verilen polinomlardır. Zaman gecikmeli olan bir  $G(s)$  sistemi için

$$wY(w^2)A(w^2) - X(w^2)B(w^2) = 0 \quad (4.279)$$

bağıntısını sağlayan ve aynı zamanda Teorem 3.1’de verilen kararlı kılan  $\mathbb{K}_i \triangleq (-1/x_{i-1}, -1/x_i)$  kazanç aralıklarına ilişkin kararlılık frekans aralıkları  $\mathbb{W}_i \triangleq \{w_{i-1}^*, w_i^*\}$  içinde olan reel frekasların  $\theta_i = \angle G_0(jw)$  şeklindeki faz paylarında yazılmasıyla bulunan en büyük faz açısı, maksimum faz payıdır. Burada  $A(w^2)$  ve  $B(w^2)$  polinomları sırasıyla,

$$A(w^2) \triangleq X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2) + LwY(w^2)Z(w^2) = 0 \quad (4.280)$$

$$B(w^2) \triangleq wY'(w^2)Z(w^2) - wZ'(w^2)Y(w^2) + Y(w^2)Z(w^2) - L X(w^2)Z(w^2) = 0 \quad (4.281)$$

biçiminde tanımlanmıştır.  $Z(w^2)$ , (3.13)’de verildiği gibidir.  $X'(w^2)$ ,  $Y'(w^2)$  ve  $Z'(w^2)$  polinomları ise sırasıyla  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$  ve  $Z(w^2)$  polinomlarının  $w$ ’ye göre birinci türevlerini göstermektedir.  $L$ , zaman gecikmesidir.

#### 4.5.2 Teorem 4.7’nin ispatı

(3.80) ile verilen bağıntıyı, zaman gecikmeli bir  $G(s)$  sistemi için

$$\frac{\text{Im}\{G(jw)\}}{\text{Re}\{G(jw)\}} = \frac{\text{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial w} G(jw)\right\}}{\text{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial w} G(jw)\right\}} \quad (4.282)$$

biçiminde yazabiliriz. İspata (4.282)’nin sol tarafını kullanarak başlayalım. (4.270)’in  $w$ ’ye göre birinci türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) = \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw)) e^{-jwL} - j L G_0(jw) e^{-jwL} \quad (4.283)$$

bulunur ve  $G_0(jw)$ ’yi reel ve sanal kısımlarına ayırarak

$$G_0(jw) = G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw) \quad (4.284)$$

biçiminde yazabiliriz. (4.271) ve (4.284)’ü, (4.283)’de yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) &= \frac{\partial}{\partial w} (G_{0R}(jw) + G_{0I}(jw)) (\cos(Lw) - j\sin(Lw)) - \\ &\quad jL(G_{0R}(jw) + G_{0I}(jw)) (\cos(Lw) - j\sin(Lw)) \end{aligned} \quad (4.285)$$

bulunur ve (4.285)'i

$$\frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} + j \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} \quad (4.286)$$

biçiminde yazarsak, (4.285)'in reel ve sanal kısımları sırasıyla

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} &\triangleq \cos(Lw) \left( \frac{\partial}{\partial w} G_{0R}(jw) + L G_{0I}(jw) \right) + \\ &\sin(Lw) \left( \frac{\partial}{\partial w} G_{0I}(jw) - L G_{0R}(jw) \right) \end{aligned} \quad (4.287)$$

ve

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} &\triangleq \cos(Lw) \left( \frac{\partial}{\partial w} G_{0I}(jw) - L G_{0R}(jw) \right) - \\ &\sin(Lw) \left( \frac{\partial}{\partial w} G_{0R}(jw) + L G_{0I}(jw) \right) \end{aligned} \quad (4.288)$$

şekline gelir. (4.284) ile (3.10)'u eşitlersek  $G_0(jw)$  'yi

$$G_0(jw) = G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw) = \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} + jw \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \quad (4.289)$$

biçiminde yazabiliriz. Bu son bağıntının  $w$ 'ye göre birinci türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_0(jw)}{\partial w} &= \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Z^2(w^2)} + \\ &+ j \left( w \left( \frac{Y'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)Y(w^2)}{Z^2(w^2)} \right) + \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \right) \end{aligned} \quad (4.290)$$

bulunur. (4.290)'ı

$$\frac{\partial G_0(jw)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} G_{0R}(jw) + j \frac{\partial}{\partial w} G_{0I}(jw) \quad (4.291)$$

biçiminde yazarsak, (4.290)'nın reel ve sanal kısımları sırasıyla,

$$\frac{\partial}{\partial w} G_{0R}(jw) \triangleq \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Z^2(w^2)} \quad (4.292)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial w} G_{0I}(jw) \triangleq \left( w \left( \frac{Y'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)Y(w^2)}{Z^2(w^2)} \right) + \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \right) \quad (4.293)$$

şeklinde olur. (4.292) ve (4.293)'ü (4.287)'de yazarsak

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} &\triangleq \cos(Lw) \left( \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Z^2(w^2)} + wL \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \right) + \\ &\sin(Lw) \left( w \left( \frac{Y'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)Y(w^2)}{Z^2(w^2)} \right) + \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} - L \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} \right) \end{aligned} \quad (4.294)$$

bağıntısını ve bazı düzenlemelerle eş değer olarak da

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} &\triangleq \cos(Lw) \left( \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2) + wLY(w^2)Z(w^2)}{Z^2(w^2)} \right) + \\ &\sin(Lw) \left( \frac{wY'(w^2)Z(w^2) - wZ'(w^2)Y(w^2) + Y(w^2)Z(w^2) - LX(w^2)Z(w^2)}{Z^2(w^2)} \right) \end{aligned} \quad (4.295)$$

bağıntısını buluruz. Burada (4.280) ve (4.281)'de tanımlanan  $A(w^2)$  ve  $B(w^2)$  polinomları, (4.295)'de yazılırsa,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} (G_0(jw) e^{-jwL}) \right\} = \frac{1}{Z^2(w^2)} (\cos(Lw) A(w^2) + \sin(Lw) B(w^2)) \quad (4.296)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.292) ve (4.293)'ü, (4.288)'de yazarsak

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left(G_0(jw) e^{-jwL}\right)\right\} &\triangleq \cos(Lw) \left( w \left( \frac{Y'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)Y(w^2)}{Z^2(w^2)} \right) + \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} - L \frac{X(w^2)}{Z(w^2)} \right) - \\ &\quad \sin(Lw) \left( \frac{X'(w^2)Z(w^2) - Z'(w^2)X(w^2)}{Z^2(w^2)} + wL \frac{Y(w^2)}{Z(w^2)} \right) \end{aligned} \quad (4.297)$$

buluruz. Bu son bağıntıda  $A(w^2)$  ve  $B(w^2)$  polinomları yazılırsa,

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial w}\left(G_0(jw) e^{-jwL}\right)\right\} \triangleq \frac{1}{Z^2(w^2)} \left( \cos(Lw) B(w^2) - \sin(Lw) A(w^2) \right) \quad (4.298)$$

elde edilir. (4.277), (4.278), (4.296) ve (4.298)'i (4.282)'de yazarak bulunan

$$\frac{w \cos(Lw) Y(w^2) - \sin(Lw) X(w^2)}{\cos(Lw) X(w^2) + w \sin(Lw) Y(w^2)} = \frac{\cos(Lw) B(w^2) - \sin(Lw) A(w^2)}{\cos(Lw) A(w^2) + \sin(Lw) B(w^2)} \quad (4.299)$$

bağıntısında içler dışlar çarpımı yapıp düzenlenirse,

$$wY(w^2)A(w^2)(\cos^2(Lw) + \sin^2(Lw)) = X(w^2)B(w^2)(\cos^2(Lw) + \sin^2(Lw)) \quad (4.300)$$

bulunur.  $\cos^2(Lw) + \sin^2(Lw) = 1$  olduğu göz önüne alınarak (4.300)'ün, (4.279)'a eşit olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

#### 4.5.3 Uyarı 4.1

Teorem 4.5'de (4.279) ile verilen polinom, üstel  $e^{-sL}$  zaman gecikme terimini içermeyen reel katsayılı sonlu sayıda reel köke sahip bir polinom olduğundan; zaman gecikmeli sistemlerde maksimum faz payı hesabı için önerilen bu yöntem, tam çözüm verir. ■

Zaman gecikmeli sistemlerde maksimum faz payı hesabı için özel bir durum olarak zaman gecikmesinden bağımsız  $G_0(s)$  sistemi, açık çevrim kararlı (yani  $K_p \rightarrow 0$  için kapalı çevrim kararlı) ise hesaba gerek kalmaksızın aşağıdaki lemma verilebilir.

#### 4.5.4 Lemma 4.5

Zaman gecikmeli sistemlerde Lemma 3.7'e benzer olarak açık çevrim kararlı olan bir  $G_0(s)$  sistemi için oransal bir kontrolör kullanılarak elde edilebilecek maksimum faz payı  $180^\circ$  'dir. ■

Açık çevrim kararlı  $G_0(s)$  sistemine sahip zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payını sağlayan kritik bir değer olan ve  $\hat{K}_{p180\max}$  adını verdiğimiz en büyük kazancın hesabı önemlidir. Bu amaçla Lemma 3.8'den hareketle aşağıdaki Lemma verilebilir.

#### 4.5.5 Lemma 4.6 (Bayhan ve Söylemez)

Açık çevrim kararlı  $G_0(s)$  sistemine sahip zaman gecikmeli sistemler için  $180^\circ$  faz payını sağlayan en büyük kazanç değeri  $\hat{K}_{p180\max}$ ,

$$\hat{K}_{p180\max} = \min_i \frac{1}{|G(j\omega_i)|} \quad (4.301)$$

bağıntısı kullanılarak hesaplanır. Burada  $\hat{\omega}_i$  frekansları,

$$\hat{S}(w) \triangleq Z(w^2) \left( X(w^2) \frac{\partial X(w^2)}{\partial w} + Y_\omega(w) \frac{\partial Y_\omega(w)}{\partial w} \right) - (X^2(w^2) + Y_\omega^2(w)) \frac{\partial Z(w^2)}{\partial w} = 0 \quad (4.302)$$

polinomunun negatif olmayan reel kökleridir. Burada  $Y_\omega(w)$ , (3.122)'de tanımlandığı gibidir. Ayrıca  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$  ve  $Z(w^2)$ , (3.11), (3.12) ve (3.13) bağıntılarında verildiği gibidir.

#### 4.5.6 Lemma 4.6'nın ispatı

(4.3) ile verilen zaman gecikmeli  $G(s)$  sisteminin zaman gecikmesinden bağımsız kısmı  $G_0(s)$ , açık çevrim kararlı ise bu lemmanın ispatı, Lemma 3.8'deki gibi Şekil 3.9'dan yararlanarak yapılabilir. Şekil 3.9'dan Nyquist eğrisinin birim çembere teğet olduğu yere ilişkin kritik  $\hat{\omega}_i$  frekansı

$$\frac{\partial}{\partial w} |G(jw)| = 0 \quad (4.303)$$



bağıntısının pozitif reel köklerinden bulunur. (4.289)'un genliği

$$|G(jw)| = \sqrt{G_R^2(jw) + G_I^2(jw)} \quad (4.304)$$

biçimindedir. (4.277) ve (4.278)'in  $|G(jw)|$ 'de yazılmasıyla

$$|G(jw)| = \frac{\sqrt{\left(\cos(Lw)X(w^2) + w\sin(Lw)Y(w^2)\right)^2 + \left(w\cos(Lw)Y(w^2) - \sin(Lw)X(w^2)\right)^2}}{Z(w^2)} \quad (4.305)$$

bulunur. (4.305)'in düzenlenmesiyle,

$$|G(jw)| = \frac{\sqrt{(X^2 + w^2Y^2)(\cos^2(Lw) + \sin^2(Lw)) + 2wXY(\cos(Lw)\sin(Lw) - \cos(Lw)\sin(Lw))}}{Z(w^2)} \quad (4.306)$$

elde edilir. Burada kolaylık için  $X(w^2)$  ve  $Y(w^2)$  yerine  $X$  ve  $Y$  kullanılmıştır. (4.306)'da  $(\cos(Lw)\sin(Lw) - \cos(Lw)\sin(Lw)) = 0$  ve  $\cos^2(Lw) + \sin^2(Lw) = 1$  olduğu görülerek ve (3.70) kullanılarak,

$$|G(jw)| = \frac{1}{Z(w^2)} \sqrt{X^2(w^2) + Y_w^2(w^2)} \quad (4.307)$$

elde edilir. (4.307)'yi (4.303)'de yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial w}|G(jw)| = \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\sqrt{X^2(w^2) + Y_w^2(w^2)}}{Z(w^2)} \right) \quad (4.308)$$

bağıntısını ve eş değer olarak

$$\frac{\partial}{\partial w}|G(jw)| = \frac{\hat{S}(w)}{Z^2(w^2) \sqrt{X^2(w^2) + Y_w^2(w^2)}} \quad (4.309)$$

eşitliğini buluruz. Burada  $\hat{S}(w)$ , (4.302)'de tanımlandığı gibidir. Aynı sonuç, Lemma 3.8'de de elde edilmişti. Dikkat edilirse, (4.309) ile (3.74) eşit bulunmuştur. Dolayısıyla (4.302) ile (3.69)'da eşittir. Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir.

#### 4.5.7 Uyarı 4.2

Zaman gecikmeli sistemlerde  $\hat{K}_{p180\max}$ , zaman gecikmesinden bağımsızdır. Böylece zaman gecikmesiz sistemler için verilen Lemma 3.8, aslında zaman gecikmeli sistemler için de geçerlidir.

#### 4.5.8 Örnek 4.7 (Zaman gecikmeli sistemlerde maxKP ve maxFP için)

Örnek 4.5’de tanımlanan zaman gecikmeli sistemi ele alalım ve maksimum faz payı ve  $d = 4$  için maksimum kazanç payını hesaplayalım.

Zaman gecikmeli sistemin maksimum kazanç payını hesaplamak için Lemma 4.4’ü kullanabiliriz. Örnek 4.5’de  $d = 4$  için zaman gecikmeli bu sistemin kapalı çevrimde  $C_{ds} = (C_{ds\min}, C_{ds\max}) = (-21.9582, -2.5 - \Delta_0)$  kazanç aralığı için kesin kararlı olduğu bulunmuştur. O halde  $|C_{ds\min}| > |C_{ds\max}|$  olduğu için, (4.268)’den maksimum kazanç payı

$$\max \hat{KP}_{ds} = \frac{|C_{ds\min}|}{|C_{ds\max}|} \cong 8.7833 \quad (4.310)$$

olarak bulunur.

Maksimum faz payı ise Teorem 4.7’den hesaplanabilir. Bu amaçla Teorem 3.1 kullanılarak  $N(s)$  ve  $D(s)$  için (3.11), (3.12) ve (3.13)’den

$$X(w^2) = -w^4 + 30.8w^2 + 1.6 \quad (4.311)$$

$$Y(w^2) = -1.8w^2 + 22 \quad (4.312)$$

$$Z(w^2) = w^6 - 59w^4 + 904w^2 + 4 \quad (4.313)$$

bulunur.  $L = 0.5$  sn zaman gecikmesi ile  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$  ve  $Z(w^2)$  polinomları ve bunların türevleri, (4.280) ve (4.281)’de yazılarak

$$A(w^2) = -2602.4w + 10302w^3 + 354.2w^5 - 59.1w^7 + 1.1w^9 \quad (4.314)$$

$$B(w^2) = 84.8 - 20694.4w^2 - 11605.6w^4 + 1143.6w^6 - 39.5w^8 + 0.5w^{10} \quad (4.315)$$

polinomları bulunur.  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$ ,  $A(w^2)$  ve  $B(w^2)$  polinomlarının (4.279)'da yazılmasıyla elde edilen polinomun reel kökleri hesaplanırsa,  $w_1^* = 0.184921$  frekansı bulunur. Örnek 4.5'de verilen zaman gecikmeli sistemin zaman gecikmesinden bağımsız kısmı olan ve (4.173)'deki sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan kazançlar Teorem 3.1'den  $\mathbb{K}_i \in (-17.7778, -2.5)$  olarak hesaplanır. Bu kazanç aralığına ilişkin kararlılık frekans aralığı  $\mathbb{W}_i \in \{0, 3.49603\}$ 'dür.  $w_1^* = 0.184921$  frekansı, bu kararlılık frekans aralığı içindedir. Böylece bu frekans değeri için maksimum faz payı,

$$\max \hat{FP} = 51.529^\circ \quad (4.316)$$

olarak hesaplanır. Deneme amaçlı olarak (4.305)'de bulunan maksimum faz payına çok yakın olan  $\tilde{\theta} = 51.5^\circ$  için kapalı çevrimde sistemi kararlı yapacak kazanç olup olmadığına bakalım. Bu test için 2. ve 4. dereceden Padé yaklaşımlarını kullanalım. Teorem 4.5'den hareketle zaman gecikmeli bu sistemin  $51.5^\circ$  için ikinci dereceden Padé eş değeri  $\hat{G}_{FP}(s)$ 'i kapalı çevrimde kesin kararlı kılan kazançlar

$$\hat{C}_{p,FP} = (-7.45243, -6.93512) \quad (4.317)$$

olarak bulunur. İkinci dereceden Padé yaklaşımının kullanılmasıyla  $51.5^\circ$  faz payı kısıtlaması için Lemma 4.3'ün ilk koşulundan

$$\hat{C}_1 = (-\infty, -3.62511) \cup (2.3883, \infty) \quad (4.318)$$

kazanç kümesi bulunur. Lemma 4.3'deki ikinci koşuldan; (4.210)'nun reel yeni kök çiftleri içinden  $|w| > \hat{w}_{pc}$  koşulunu sağlayan frekanslar olmadığı için  $\tilde{w}_{b,FP} = \emptyset$  olacağından,

$$\hat{C}_2 = \emptyset \quad (4.319)$$

elde edilir. Lemma 4.3'ün üçüncü koşulundan kritik frekans için

$$\hat{C}_3 = (-\infty, -2.75821) \cup (7.16049, \infty) \quad (4.320)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece  $51.5^\circ$  faz payı için belirsizlik kazanç aralıkları

$$\hat{C}_{u,FP} = (-\infty, -2.75821) \cup (2.3883, \infty) \quad (4.321)$$

olarak bulunur. Teorem 4.6'dan  $51.5^\circ$  faz payı için 2. mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla  $\hat{G}_{\Delta,FP}(s)$  sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı kılacak kazançlar olmadığından,

$$\hat{C}_{ds,FP} = \emptyset \quad (4.322)$$

olur. Böylece ikinci dereceden Padé yaklaşımı kullanıldığında  $51.5^\circ$  faz payı için ortaya çıkan hata payı

$$\hat{C}_{ps,FP} = (-\infty, -2.75821) \quad (4.323)$$

kazanç aralığıdır. Daha kesin bir inceleme için 4. dereceden Padé yaklaşımı kullanalım.

Teorem 4.5'den zaman gecikmeli bu sistemin  $51.5^\circ$  için dördüncü dereceden Padé eş değeri  $\hat{G}_{FP}(s)$ 'yi kapalı çevrimde kesin kararlı kılan kazançlar (4.317)'deki gibi

$$\hat{C}_{p,FP} = (-7.45243, -6.93512) \quad (4.324)$$

olarak bulunur. Dördüncü dereceden Padé yaklaşımının kullanılmasıyla  $51.5^\circ$  faz payı kısıtlaması için Lemma 4.3'ün ilk koşulundan

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 = & (-56.22, -40.22) \cup (-23.7235, -23.7234) \cup (-10.0569, -9.9098) \cup (13.249, 13.255) \cup \\ & (-7.45243 - \Delta_0, -7.45243 + \Delta_0) \cup (-6.93512 - \Delta_0, -6.93512 + \Delta_0) \cup (5.75, 5.77) \end{aligned} \quad (4.325)$$

kazanç kümesi bulunur. Lemma 4.3'deki ikinci koşuldan

$$\hat{C}_2 = (-\infty, -107.912) \cup (60.1583, \infty) \quad (4.326)$$

elde edilir. Lemma 4.3'ün üçüncü koşulundan kritik frekans için

$$\hat{C}_3 = (-\infty, -107.718) \cup (36.7567, \infty) \quad (4.327)$$

kazanç aralıkları bulunur. Böylece  $51.5^\circ$  faz payı için belirsizlik kazanç aralıkları

$$\begin{aligned} \hat{C}_{u,FP} = & (-56.22, -40.22) \cup (-23.7235, -23.7234) \cup (-10.0569, -9.9098) \cup \\ & (-7.45243 - \Delta_0, -7.45243 + \Delta_0) \cup (-6.93512 - \Delta_0, -6.93512 + \Delta_0) \cup (5.75, 5.77) \cup \\ & (13.249, 13.255) \cup (-\infty, -107.718) \cup (36.7567, \infty) \end{aligned} \quad (4.328)$$

olarak bulunur. Teorem 4.6'dan  $51.5^\circ$  faz payı için 4. mertebeden Padé yaklaşımı kullanılmasıyla  $\hat{G}_{\Delta,FP}(s)$  sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı kılacak kazançlar,

$$\hat{C}_{ds,FP} = (-7.45243 + \Delta_0, -6.93512 - \Delta_0) \quad (4.329)$$

olarak hesaplanır. 4. dereceden Padé yaklaşımı kullanıldığında  $51.5^\circ$  faz payı için ortaya çıkan hata payı

$$\hat{C}_{ps,FP} = (-7.45243 - \Delta_0, -7.45243 + \Delta_0) \cup (-6.93512 - \Delta_0, -6.93512 + \Delta_0) \quad (4.330)$$

kazanç aralığıdır.

(4.329)'dan görüldüğü üzere maksimum faz payına çok yakın da olsa  $51.5^\circ$  faz payı için  $\hat{G}_{\Delta,FP}(s)$  sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı kılacak küçük bir kazanç aralığı vardır. Faz payı  $51.529^\circ$  olduğu anda zaman gecikmeli sistemin ikinci dereceden veya daha yüksek derecelerden Padé eş değerlerini, kapalı çevrimde kararlı kılan kazançların olmadığı Teorem 4.5'in kullanılmasıyla görülür. Maksimum faz payı için  $\hat{C}_{p,FP} = \emptyset$  olması nedeniyle Teorem 4.6'nın kullanılmasının da bir anlamı kalmayacaktır. Çünkü hem  $\hat{C}_{ds,FP} = \emptyset$  olacak hem de  $\hat{C}_{ps,FP} = \emptyset$  olacaktır. Bu durum  $51.529^\circ$ 'un maksimum faz payı olduğunu göstermektedir.

#### 4.5.9 Örnek 4.8 (Zaman gecikmeli sistemlerde maxKP ve maxFP için)

Örnek 4.3'de tanımlanan zaman gecikmeli sistemi ele alalım ve maksimum faz payı ve  $d = 2$  için maksimum kazanç payını hesaplayalım.

Zaman gecikmeli sistemin maksimum kazanç payını hesaplamak için Lemma 4.4'ü kullanabiliriz. Örnek 4.3'de  $d = 2$  için zaman gecikmeli bu sistemin kapalı çevrimde  $C_{ds} = (C_{ds \min}, C_{ds \max}) = (2.96935, 5.19178)$  kazanç aralığı için kesin kararlı olduğu bulunmuştu. O halde (4.268) ve (4.269)'den maksimum kazanç payı

$$\max \hat{KP}_{ds} = 1.74846 \quad (4.331)$$

olarak bulunur.  $\max \hat{KP}$ 'i bulmak için  $d = 3$  veya  $d = 4$  için bulunan  $C_{ds_i}$  kazançları da kullanılabilirdi.

Maksimum faz payını hesaplamak için Teorem 4.7'den  $L = 0.04$  sn ile (4.117), (4.118) ve (4.119)'da verilen  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$  ve  $Z(w^2)$  polinomları ve bunların türevleri, (4.280) ve (4.281)'de yazılırsa

$$A(w^2) = -2.023 \times 10^8 w + 6.1 \times 10^7 w^3 + 5.1 \times 10^6 w^5 + 496499 w^7 - 62374.8 w^9 - 7175.13 w^{11} + 152.57 w^{13} - 0.2 w^{15} \quad (4.332)$$

ve

$$B(w^2) = 1.1 \times 10^8 - 1.596 \times 10^8 w^2 + 4.79 \times 10^6 w^4 + 1.378 \times 10^6 w^6 + 355795 w^8 + 10632.9 w^{10} - 1484.28 w^{12} + 7.79 w^{14} \quad (4.333)$$

polinomları bulunur.  $X(w^2)$ ,  $Y(w^2)$ ,  $A(w^2)$  ve  $B(w^2)$  polinomlarının (4.279)'de yazılmasıyla elde edilen polinomun reel kökleri hesaplanırsa,  $w_1^* = 18.604$  frekansı bulunur. Bu frekans değeri, Örnek 3.9'da Tablo 3.11'de görülen kararlılık frekans aralığı içindedir. Bu frekans için maksimum faz payı,

$$\max \hat{FP} = 4.5131^\circ \quad (4.334)$$

olarak hesaplanır. Bu frekans için kazanç,  $K_p = 3.9191$  olarak bulunur. Kazancın bu değeri, Örnek 4.3'de hem  $d = 2, 3, 4$  için (4.136), (4.143) ve (4.147)'de verilen  $\hat{G}_\Delta(s)$  sistemini kapalı çevrimde kesin kararlı kılan  $C_{ds_i}$  kazanç aralıkları içindedir.

#### 4.6 Sonuç

Bu bölümde, zaman gecikmeli sistemlerin Padé eşdeğeri bulunarak elde edilen yeni sistemi kapalı çevrimde kararlı kılacak kazanç aralıklarınının olması gereken kazanç aralığından ne kadar farklı olduğunun hesabı yapılmış ve sistemi kesin kararlı yapan kazançların hesabı için yeni bir yöntem önerilmiştir.

Hem zaman gecikmesi hem de kazanç payı ve faz payı kısıtlamaları altında kapalı çevrim sistemi kararlı yapan kazançların hesabı yapılmıştır. Zaman gecikmeli sistemlerde maksimum kazanç payı ve maksimum faz payının hesabı için Bölüm 3'de verilen sonuçlar temel alınarak hesap yolları verilmiştir. Özellikle zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payı hesabında üstel biçimde olan zaman gecikmesi terimini içermeyen tam çözüm bulunmuştur. Bu çözümün quasi-polinom biçiminde olmayıp reel katsayılı polinom biçiminde olduğu ve sonlu sayıda reel köke sahip olduğu gösterilmiştir. Bu durumun hesabı önemli ölçüde kolaylaştırdığı gösterilmiştir. Bu bölümde verilen tüm hesap yöntemleri, sayısal örneklerle de anlatılmıştır.

## 5. AYRIK ZAMANLI SİSTEMLERDE DAYANIKLI P TİPİ KONTROL

Verilen ayrık zamanlı bir sistemi kararlı yapan tek parametrelili kontrolörlerin tam bir parametrizasyonu, bir teorem ile Keel ve Bhattacharyya (2001a) tarafından verilmiştir. Hermite-Biehler Teoreminin bir genelleştirilmesine dayanan bu teorem, bir polinomun birim daire boyunca Chebyshev dizisi ile elde edilen görüntüsünün faz değişiminden yararlanarak kök dağılımını ve özellikle kararsız kök sayısını bularak kararlılığa ilişkin kısıtlamalar kümesini vermesi açısından uygundur; ancak önemli bir dezavantajı, kapalı çevrimde sistemi kararlı yapan kontrolörler kümesini bulmaya yarayan bu kısıtlamaların herbirinin sistem derecesine bağlı olarak üstel olarak artan sayıda işaret fonksiyonunun analizini gerektirmesidir (Datta ve diğ., 2000; Keel ve Bhattacharyya, 2001b; Keel ve Bhattacharyya, 2002).

Bu bölümde ayrık zamanlı kontrol sistemlerini kapalı çevrimde kararlı kılacak kazançları bulmak için iki yeni yöntem, Bayhan ve Söylemez (2006b) tarafından önerilmiştir. İlk yöntem, ayrık zamanlı sistemin birim daire boyunca hesaplanan karakteristik polinomunun Chebyshev gösterimi kullanılarak sıradan reel katsayılı bir polinoma dönüştürülmesi ve sonra kararlı kılan kazanç kümesinin bulunması üzerine kuruludur (Bayhan ve Söylemez, 2005). Bu kazançlar, kapalı çevrim sistem kutuplarının birim daire içinde olmasını sağlar. Kapalı çevrim sistemin kararlı olduğu kazanç aralıkları, açık çevrim sistemin Nyquist eğrisi incelenerek bulunabilir. Nyquist kararlılık kriteri gereği, Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerlerin hesaplanmasıyla bulunan kazanç aralıkları için kararsız kutupların sayısını belirlemek mümkündür. Buradaki kurgu, kararlı kılan kontrolörlerin tam bir kümesini lineer eşitsizliklerin çözümü arasından bulmaktır. İkinci yöntem, ayrık zamanlı bir sistemin bilineer dönüşümü kullanılarak bulunan eş değer sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak kazançları hesaplamak için Teorem 3.1'in kullanılmasına dayanır (Bayhan ve Söylemez, 2006b). Ayrık zamanlı bir sistemin bilineer dönüşümle bulunan eş değer sistemi için Bölüm 3'de verilen tüm yöntemler geçerlidir.

## 5.1 Chebyshev Polinomları Kullanılarak P Tipi Kontrol

Bu yöntemde açık çevrim transfer fonksiyonu bilinen ayrık zamanlı bir  $G_0(z)$  sistemini kararlı kılan kazançları bulmak için önce Chebyshev dizisinin iki tipinden de yararlanarak sıradan bir reel katsayılı polinom biçimine gelen karakteristik polinomun Chebyshev gösteriminin bulunması gerekir. Kontrol edilmek istenen ayrık zamanlı sistemin transfer fonksiyonu

$$G_0(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (5.1)$$

biçimindedir. Burada  $N(z)$  ve  $D(z)$  reel katsayılı polinomlardır. Doğrusal zamanla değişmeyen ayrık zamanlı bir kontrol sisteminin karakteristik polinomu,

$$\delta(z) = q_p z^p + q_{p-1} z^{p-1} + \dots + q_1 z + q_0 \quad (5.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Sistemin kararlılığı,  $\delta(z)$  'nin bütün köklerinin birim daire içinde olması koşuluna bağlıdır. Kararlılık bölgesi olarak birim daireye ilişkin kararlılık analizi için, (5.2) ile verilen  $\delta(z)$  'nin birim daire görüntüsünü belirlemek gerekir.

$$\{\delta(z): z \triangleq e^{j\theta} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (5.3)$$

Reel katsayılı  $\delta(z)$  'de  $z \triangleq e^{j\theta}$  yazılarak bulunan  $\delta(e^{j\theta})$  polinomunun  $\delta(e^{-j\theta})$  ile karmaşık eşlenik olduğu dikkate alındığında birim dairenin üst yarısının görüntüsünü belirlemek yeterlidir ve böylece

$$\{\delta(z): z \triangleq e^{j\theta} \quad 0 \leq \theta \leq \pi\} \quad (5.4)$$

yazılabilir. (5.2) ile verilen  $\delta(z)$  'de

$$z^k \Big|_{z=e^{j\theta}} = \cos k\theta + j \sin k\theta \quad (5.5)$$

bağıntısının yazılmasıyla

$$\delta(e^{j\theta}) = (q_p e^{j\theta p} + q_{p-1} e^{j\theta p-1} + \dots + q_1 e^{j\theta} + q_0) \quad (5.6)$$

ve

$$\delta(e^{j\theta}) = [q_p \cos p\theta + q_{p-1} \cos (p-1)\theta + \dots + q_1 \cos \theta + q_0] + j [q_p \sin p\theta + \dots + q_1 \sin \theta] \quad (5.7)$$



polinomları elde edilir. Burada

$$\bar{R}(\theta) \triangleq (q_p \cos p\theta + q_{p-1} \cos (p-1)\theta + \dots + q_1 \cos \theta + q_0) \quad (5.8)$$

$$\bar{I}(\theta) \triangleq (q_p \sin p\theta + q_{p-1} \sin (p-1)\theta + \dots + q_1 \sin \theta) \quad (5.9)$$

tanımlarının yapılmasıyla  $\delta(e^{j\theta})$  polinomu,

$$\delta(e^{j\theta}) \triangleq \bar{R}(\theta) + j\bar{I}(\theta) \quad (5.10)$$

biçimine gelir.  $\cos k\theta$  ve  $\sin k\theta / \sin \theta$  sırasıyla birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomlarını verir.  $t \triangleq -\cos \theta$  olarak tanımlanırsa, (5.4)'den  $\theta : 0 \rightarrow \pi$  için  $t$ 'nin  $-1$  ile  $+1$  arası değiştiği görülür. O halde  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  'den

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - t^2} \quad (5.11)$$

bulunur. Böylece (5.5)'den

$$z \triangleq e^{j\theta} = -t + j\sqrt{1 - t^2} \quad (5.12)$$

yazılır.

### 5.1.1 Chebyshev dizisi ve temel özellikleri

Birinci tip Chebyshev polinomlarının  $t \in [-1, +1]$  için analitik formu,  $t \triangleq -\cos \theta$  olmak üzere

$$c_k(t) \triangleq \cos k\theta \quad (5.13)$$

biçiminde olup;  $r = 0, 1, 2, \dots$  ve  $k = 1, 2, 3, \dots$  için,

$$c_k(t) = (-1)^k \left[ \sum_{r=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^r (k)!}{(2r)! (k-2r)!} (1-t^2)^r t^{k-2r} \right] \quad (5.14)$$

olarak yazılabilir (Bayhan ve Tonyalı, 2002). Buradaki  $[k/2]$  notasyonu,  $k = 1, 2, 3, \dots$  için,  $k/2$ 'ye eşit yada daha küçük en büyük tam sayıyı kasteder. Böylece (5.14)'den birinci tip Chebyshev polinomlarının ilk altı tanesi,

$$\left. \begin{aligned} c_1(t) &= -t \\ c_2(t) &= 2t^2 - 1 \\ c_3(t) &= -4t^3 + 3t \\ c_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1 \\ c_5(t) &= -16t^5 + 20t^3 - 5t \\ c_6(t) &= 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

olarak bulunur. İkinci tip Chebyshev polinomlarının  $t \in [-1, +1]$  için analitik formu,

$$s_k(t) = \frac{\sin[k \cos^{-1} t]}{(1 - t^2)^{1/2}} \quad (5.16)$$

biçiminde olup;  $t = -\cos \theta$ ,  $\theta = -\cos^{-1} t$  ve  $\sin \theta = \sqrt{1 - t^2}$  bağıntılarından hareketle (5.16)'yı,  $r = 0, 1, 2, \dots$  ve  $k = 1, 2, 3, \dots$  için,

$$s_k(t) = \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \quad (5.17)$$

olarak yazabiliriz (Bayhan, 2001). (5.17), eş değer olarak

$$s_k(t) = (-1)^{k-1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{(k-1-r)!}{(k-1-2r)!} (-1)^r (2t)^{k-1-2r} \quad (5.18)$$

biçiminde yazılabilir (Fox ve Parker, 1968). Böylece (5.18)'den ikinci tip Chebyshev polinomlarının ilk altı tanesi,

$$\left. \begin{aligned} s_1(t) &= +1 \\ s_2(t) &= -2t \\ s_3(t) &= 4t^2 - 1 \\ s_4(t) &= -8t^3 + 4t \\ s_5(t) &= 16t^4 - 12t^2 + 1 \\ s_6(t) &= -32t^5 + 32t^3 - 6t \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları arasında  $k = 1, 2, 3, \dots$  için

$$s_k(t) = -\frac{c'_k(t)}{k} \quad (5.20)$$

ilişkisi vardır. Ayrıca Chebyshev polinomlarının iki tipi arasında

$$c_{k+1}(t) = -t c_k(t) - (1-t^2) s_k(t) \quad (5.21)$$

biçiminde yineli bir bağıntı da vardır. (5.7)'de (5.13) ve (5.17) yazılırsa

$$\delta(e^{j\theta}) = [q_p c_p(t) + q_{p-1} c_{p-1}(t) + \dots + q_1 c_1(t) + q_0] + j [q_p s_p(t) \sin \theta + \dots + q_1 s_1(t) \sin \theta] \quad (5.22)$$

bulunur. Bu son bağıntıda  $\sin \theta = \sqrt{1-t^2}$  yazılıp düzenlenirse,

$$\delta(e^{j\theta})|_{t=-\cos \theta} = [q_p c_p(t) + q_{p-1} c_{p-1}(t) + \dots + q_1 c_1(t) + q_0] + j \sqrt{1-t^2} [q_p s_p(t) + q_{p-1} s_{p-1}(t) \dots + q_1 s_1(t)] \quad (5.23)$$

elde edilir. Burada

$$R(t) \triangleq q_p c_p(t) + q_{p-1} c_{p-1}(t) + \dots + q_1 c_1(t) + q_0 \quad (5.24)$$

$$T(t) \triangleq q_p s_p(t) + q_{p-1} s_{p-1}(t) \dots + q_1 s_1(t) \quad (5.25)$$

tanımları yapılırsa, (5.23) bağıntısı,

$$\delta(e^{j\theta})|_{t=-\cos \theta} = R(t) + j \sqrt{1-t^2} T(t) \triangleq \delta_c(t) \quad (5.26)$$

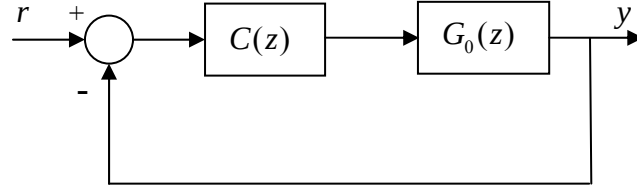
biçimine gelir. Burada  $\delta_c(t)$ ,  $\delta(z)$ 'nin Chebyshev gösterimidir.  $R(t)$  ve  $T(t)$  ise eşit büyüklükte ve ters işaretli baş katsayılara sahip sırasıyla  $p$  ve  $p-1$  dereceden reel polinomlardır. Ayrıca  $R(t)$ ,  $\delta_c(t)$ 'nin birinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan kısmıyken;  $T(t)$  ise,  $\delta_c(t)$ 'nin ikinci tip Chebyshev polinomlarından oluşan kısmıdır.

### 5.1.2 Chebyshev gösterimi kullanılarak oransal kontrolör ile kararlı kılma

Bu bölümde, Şekil 5.1'de görülen ve (5.1)'de verilen ayrık zamanlı bir  $G_0(z)$  sisteminin oransal kontrolörle kararlı kılınması problemine bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar uygulanmıştır. Şekil 5.1'deki oransal kontrolör

$$C(z) = K_p \quad (5.27)$$

biçimindedir.



**Şekil 5.1 :** Sabit Kazançlı Ayrık Zamanlı Kontrol Sistemi.

Bu durumda kapalı çevrim karakteristik polinomunun

$$\delta(z, K_p) = D(z) + K_p N(z) \quad (5.28)$$

olduğu görülür.  $\delta(z, K_p)$ 'yi kararlı yapacak tüm kazançları bulmak için  $N(z)$  ve  $D(z)$ 'nin önceki bölümde  $\delta(z)$ 'e yapılanlara benzer olarak Chebyshev dizisi gösterimleri bulunacaktır. Buna göre  $N(z)$  ve  $D(z)$ 'nin (5.26)'a benzer olarak yazılan Chebyshev gösterimleri sırasıyla,

$$N(e^{j\theta})|_{t=-\cos\theta} = R_N(t) + j\sqrt{1-t^2} T_N(t) \quad (5.29)$$

$$D(e^{j\theta})|_{t=-\cos\theta} = R_D(t) + j\sqrt{1-t^2} T_D(t) \quad (5.30)$$

biçimindedir. Son iki bağıntı,  $G_0(z)$ 'nin pay ve payda polinomlarında yazılırsa

$$G_0(t) = \frac{N(t)}{D(t)} = \frac{R_N(t) + j\sqrt{1-t^2} T_N(t)}{R_D(t) + j\sqrt{1-t^2} T_D(t)} \quad (5.31)$$

bulunur. (5.31)'in pay ve paydası, paydanın kompleks eşleniği ile çarpılıp düzenlenirse;

$$G_0(t) = \frac{[R_N(t)R_D(t) + (1-t^2)T_N(t)T_D(t)]}{R_D^2(t) + (1-t^2)T_D^2(t)} + j\sqrt{1-t^2} \frac{[R_D(t)T_N(t) - R_N(t)T_D(t)]}{R_D^2(t) + (1-t^2)T_D^2(t)} \quad (5.32)$$

elde edilir. O halde  $G_0(t)$ 'nin reel ve sanal kısımları sırasıyla

$$\text{Re}\{G_0(t)\} = \frac{[R_N(t)R_D(t) + (1-t^2)T_N(t)T_D(t)]}{R_D^2(t) + (1-t^2)T_D^2(t)} \quad (5.33)$$

$$\text{Im}\{G_0(t)\} = \sqrt{1-t^2} \frac{[R_D(t)T_N(t) - R_N(t)T_D(t)]}{R_D^2(t) + (1-t^2)T_D^2(t)} \quad (5.34)$$

biçimindedir. Nyquist kriterinden yararlanarak, (5.34)'ün sifıra eşitlenmesiyle bulunan

$$R_D(t)T_N(t) - R_N(t)T_D(t) = 0 \quad (5.35)$$

ve

$$1 - t^2 = 0 \quad (5.36)$$

polinomlarının kökleri arasından (5.36) için  $t = \pm 1$  kökleri ve (5.35) için  $t \in [-1, +1]$  aralığı içinde kalan reel kökler seçilir ve bunlar (5.33)'de verilen  $\text{Re}\{G_0(t)\}$ 'de yazılarak Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerler ve bunlara ilişkin kazanç aralıkları hesaplanır. Bu kazanç aralıkları için kararsız kutup sayıları belirlenir. Kararsız kutup sayısının sıfır olduğu kazanç aralıkları, kararlı kılan kazanç değerlerini verir.

#### 5.1.2.1 Örnek 5.1

Verilen ayrık zamanlı

$$G_0(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z + 0.5}{z^2 - 2z} \quad (5.37)$$

sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan kazançları, Chebyshev polinomlarını kullanarak hesaplayalım.

$D(z)$ , 2. dereceden olduğu için ilk iki tane birinci tip Chebyshev polinomu  $D(z)$ 'de yazılarak  $R_D(t)$  bulunur; yani  $z^2 = 2t^2 - 1$  ve  $z = -t$  polinomları,  $D(z)$ 'de yazılırsa

$$R_D(t) = 2t^2 + 2t - 1 \quad (5.38)$$

bulunur. Benzer olarak ilk iki tane ikinci tip Chebyshev polinomu kullanılarak  $D(z)$ 'de  $z^2 = -2t$  ve  $z = 1$  yazılırsa

$$T_D(t) = -2t - 2 \quad (5.39)$$

bulunur.  $N(z)$  için benzer işlemler yapılarak

$$R_N(t) = -t + 0.5 \quad (5.40)$$

$$T_N(t) = 1 \quad (5.41)$$

elde edilir. (5.33) ve (5.34)'den sırasıyla

$$\operatorname{Re}\{G_0(t)\} = \frac{t^2 - 2.5}{4t + 5} \quad (5.42)$$

$$\operatorname{Im}\{G_0(t)\} = \sqrt{1 - t^2} \frac{t}{4t + 5} \quad (5.43)$$

bulunur.  $\operatorname{Im}\{G_0(t)\} = 0$  'dan  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 0$  ve  $t_3 = 1$  olarak hesaplanır. Bu köklerin hepsi reeldir ve  $t \in [-1, +1]$  aralığındadır. Böylece kararsız kutup sayısının sabit kaldığı kazanç aralıkları

$$\operatorname{Re}\{G_0(-1)\} = -1.5 \Rightarrow -1/K_p > -1.5 \Rightarrow K_p > 0.67 \quad (5.44)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(0)\} = -0.5 \Rightarrow -1/K_p > -0.5 \Rightarrow K_p > 2 \quad (5.45)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(1)\} = -0.167 \Rightarrow -1/K_p > -0.167 \Rightarrow K_p < 6 \quad (5.46)$$

doğrusal eşitsizliklerini verir. Böylece kapalı çevrim sistemi,  $2 < K_p < 6$  kazanç aralığında kararlıdır.

### 5.1.2.2 Örnek 5.2

Keel ve Bhattacharyya (2002) tarafından verilmiş ayrık zamanlı

$$G_0(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^4 + 2z^3 - 0.3z^2 - 0.15z + 1.5}{z^5 + 0.4z^4 - 1.89z^3 - 0.651z^2 + 0.235z - 0.606} \quad (5.47)$$

sistemini kapalı çevrimde kararlı yapan kazançları, Chebyshev polinomlarını kullanarak hesaplayalım.

Sistemin kapalı çevrim karakteristik polinomu,

$$\delta = z^5 + (0.4 + K_p)z^4 + (-1.89 + 2K_p)z^3 + (-0.651 - 0.3K_p)z^2 + (0.235 - 0.15K_p)z + (-0.606 + 1.5K_p) \quad (5.48)$$

biçimindedir. Bu polinomdan yararlanarak Jury kararlılık kriteri kullanıldığında; kazanç aralıkları için aşağıdaki lineer olmayan eşitsizlikler bulunur (Ackermann, 1985).

$$\left. \begin{aligned}
-3.75K_p^2 + 1.674K_p + 1.110164 &> 0 \\
-0.75K_p^2 + 1.962K_p + 0.1554 &> 0 \\
-4.616K_p^4 + 7.663K_p^3 - 14.655K_p^2 + 12.906K_p - 3.086 &> 0 \\
-9.109K_p^4 + 16.135K_p^3 - 24.877K_p^2 + 20.712K_p - 5.029 &> 0
\end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

Kararlı kılma problemi, bu dört doğrusal olmayan eşitsizlikten  $K_p$ 'nin uygun aralığının bulunmasına bağlı olduğu için, oldukça zordur. Bu nedenle Chebyshev polinomları gösterimi ile çözüm yapmak daha kolay ve avantajlıdır.

$D(z)$  ve  $N(z)$ 'de birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları yazılarak sırasıyla,

$$R_D(t) = -16t^5 + 3.2t^4 + 27.56t^3 - 4.502t^2 - 10.905t + 0.445 \quad (5.50)$$

$$T_D(t) = 16t^4 - 3.2t^3 - 19.56t^2 + 2.902t + 3.125 \quad (5.51)$$

$$R_N(t) = 8t^4 - 8t^3 - 8.6t^2 + 6.15t + 2.8 \quad (5.52)$$

$$T_N(t) = -8t^3 + 8t^2 + 4.6t - 2.15 \quad (5.53)$$

bulunur. Bu dört polinomun (5.33) ve (5.34)'de yazılmasıyla sırasıyla,

$$\operatorname{Re}\{G_0(t)\} = \frac{-0.48t^7 + 0.48t^6 - 23.48t^5 - 1.62t^4 + 46.52t^3 + 3.624t^2 - 19.66t - 5.47}{2.27 \cdot 10^{-13}t^6 + 19.39t^5 - 0.12t^4 - 28.95t^3 - 8.68t^2 + 8.43t + 9.96} \quad (5.54)$$

$$\frac{\operatorname{Im}\{G_0(t)\}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{0.48t^6 - 0.48t^5 - 24.28t^4 + 8.58t^3 + 26.87t^2 - 1.85t - 9.71}{2.27 \cdot 10^{-13}t^6 + 19.39t^5 - 0.12t^4 - 28.95t^3 - 8.68t^2 + 8.43t + 9.96} \quad (5.55)$$

bulunur. (5.55)'in sıfıra eşitlenmesinden bulunan reel köklerden  $t \in [-1, +1]$  aralığında olanlarının (5.54)'de yazılmasıyla bulunan reel eksen kesim yerleri ve bunlara ilişkin kararsız kutup sayısının sabit kaldığı kazanç aralıkları

$$\operatorname{Re}\{G_0(-1)\} = -2.679 \Rightarrow K_p < 0.373334 \rightarrow 3 \text{ kararsız kutup} \quad (5.56)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(0.986)\} = -2.576 \Rightarrow 0.373334 < K_p < 0.388238 \rightarrow 2 \text{ kararsız kutup} \quad (5.57)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(1)\} = -1.733 \Rightarrow 0.388238 < K_p < 0.577144 \rightarrow 0 \text{ kararsız kutup} \quad (5.58)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(0.751)\} = -1.218 \Rightarrow 0.577144 < K_p < 0.820749 \rightarrow 1 \text{ kararsız kutup} \quad (5.59)$$

$$0.820749 < K_p \rightarrow 3 \text{ kararsız kutup} \quad (5.60)$$

olarak bulunur. Böylece  $0.388238 < K_p < 0.577144$  kazanç aralığında kapalı çevrim sisteminin kararlı olduğu bulunmuş olunur. Aynı sistem için, Keel ve Bhattacharyya (2002) tarafından Hermite-Biehler Teoreminin bir genelleştirilmesi kullanılarak aynı sonuç bulunmuştur. Buradaki yöntemin Keel ve Bhattacharyya (2002) tarafından önerilen yönteme göre avantajı, sistemi kararlı yapan kazançlar kümesini bulmaya yarayan kısıtlamaların herbiri için ayrıca işaret fonksiyonu analizi yapmaya gerek olmamasıdır.

### 5.1.2.3 Örnek 5.3

Xu ve diğ. (2001) tarafından verilmiş ayrık zamanlı

$$G_0(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{100z^3 + 2z^2 + 3z + 11}{100z^5 + 2z^4 + 5z^3 - 41z^2 + 52z + 70} \quad (5.61)$$

sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan kazançları, Chebyshev polinomlarını kullanarak hesaplayalım.

$D(z)$  ve  $N(z)$ 'de birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları yazılarak sırasıyla,

$$R_D(t) = -1600t^5 + 16t^4 + 1980t^3 - 98t^2 - 537t + 113 \quad (5.62)$$

$$T_D(t) = 1600t^4 - 16t^3 - 1180t^2 + 90t + 147 \quad (5.63)$$

$$R_N(t) = -400t^3 + 4t^2 + 297t + 9 \quad (5.64)$$

$$T_N(t) = 400t^2 - 4t - 97 \quad (5.65)$$

bulunur. Bu dört polinomun (5.33) ve (5.34)'de yazılmasıyla sırasıyla,

$$\text{Re}\{G_0(t)\} = \frac{-8800t^5 - 1288t^4 + 3522t^3 - 13620t^2 - 9705t + 6621}{112000t^5 - 42720t^4 - 154584t^3 + 47104t^2 + 47451t - 17189} \quad (5.66)$$

$$\text{Im}\{G_0(t)\} = \frac{\sqrt{1-t^2} (4400t^4 - 644t^3 - 10039t^2 - 1792t + 3071)}{112000t^5 - 42720t^4 - 154584t^3 + 47104t^2 + 47451t - 17189} \quad (5.67)$$

olarak hesaplanır. (5.67)'nin sıfıra eşitlenmesinden bulunan reel köklerden  $t \in [-1, +1]$  aralığında olan  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = -0.861$ ,  $t_3 = 0.486$  ve  $t_4 = 1$  köklerinin (5.66)'da yazılmasıyla bulunan reel eksen kesim yerleri ve bunlara ilişkin kararsız kutup sayısının sabit kaldığı kazanç aralıkları



$$\operatorname{Re}\{G_0(-1)\} = 0.624 \quad \Rightarrow \quad K_p < -1.606897 \quad \rightarrow 2 \text{ kararsız kutup} \quad (5.68)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(1)\} = 0.714 \quad \Rightarrow \quad -1.606897 < K_p < -1.4 \quad \rightarrow 3 \text{ kararsız kutup} \quad (5.69)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(-0.861)\} = 2.394 \quad \Rightarrow \quad -1.4 < K_p < -0.4177598 \quad \rightarrow 2 \text{ kararsız kutup} \quad (5.70)$$

$$\operatorname{Re}\{G_0(0.486)\} = 7.919 \quad \Rightarrow \quad -0.4177598 < K_p < -0.12627 \quad \rightarrow 0 \text{ kararsız kutup} \quad (5.71)$$

$$-0.12627 < K_p \quad \rightarrow 2 \text{ kararsız kutup} \quad (5.72)$$

olarak bulunur. Böylece  $-0.4177598 < K_p < -0.12627$  kazanç aralığında kapalı çevrim sistem kararlıdır. Bu sonuç, Xu ve diğ. (2001a) ve Xu ve diğ. (2001b) tarafından bulunan sonuçla aynıdır.

## 5.2 Bilineer Dönüşüm Kullanılarak P Tipi Kontrol

Bilineer dönüşüm, ayrık zamanlı kontrol sistemlerinin kararlılık analizini yapmak için kullanılabilir. Bu,  $z$  -düzleminde kompleks  $w$  -düzlemine olan bir dönüşümdür. Çeşitli bilinear dönüşümler arasında burada önerilen yöntem için

$$z \triangleq \frac{w+1}{w-1} \quad (5.73)$$

biçimindeki bilinear dönüşüm seçilmiştir. Bu yolla kararlılık bölgesi,  $z$  -düzleminde birim dairenin içinden  $w$  -düzleminde sol yarı düzleme dönüştürülmüş olur.

Bilineer dönüşüm kullanarak bulunan dönüşmüş sistemler için Teorem 3.1, kullanılabilir. Şekil 5.1'de görülen kontrol edilmek istenen ayrık zamanlı sistemin (5.1)'de verilen transfer fonksiyonu, (5.73)'deki bilinear dönüşüm uygulanınca

$$\widehat{G}_0(w) \triangleq \frac{\widehat{N}(w)}{\widehat{D}(w)} \quad (5.74)$$

biçimine gelir. Burada

$$w \triangleq j\omega$$

tanımı yapılarak (5.74)'de yazılırsa ve sonra reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa

$$\widehat{G}_0(j\omega) \triangleq \frac{\widehat{N}(j\omega)}{\widehat{D}(j\omega)} = \frac{\widehat{N}_{re}(\omega) + j\widehat{N}_{im}(\omega)}{\widehat{D}_{re}(\omega) + j\widehat{D}_{im}(\omega)} \quad (5.75)$$

elde edilir. Burada  $\widehat{D}_{re}$ ,  $\widehat{D}_{im}$ ,  $\widehat{N}_{re}$  ve  $\widehat{N}_{im}$  için tek-çift ayrıştırılması yapılarak

$$\widehat{D}_{re} = \widehat{D}_e(-\omega^2) \quad \widehat{D}_{im} = \widehat{D}_o(-\omega^2)\omega \quad (5.76)$$

$$\widehat{N}_{re} = \widehat{N}_e(-\omega^2) \quad \widehat{N}_{im} = \widehat{N}_o(-\omega^2)\omega \quad (5.77)$$

yazılabilir.  $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'yı

$$\widehat{G}_0(j\omega) = \frac{\widehat{N}_e + j\omega\widehat{N}_o}{\widehat{D}_e + j\omega\widehat{D}_o} = \frac{\widehat{X}(\omega^2)}{\widehat{Z}(\omega^2)} + j\omega \frac{\widehat{Y}(\omega^2)}{\widehat{Z}(\omega^2)} \quad (5.78)$$

biçiminde yazmak mümkündür. Burada,

$$\widehat{X}(\omega^2) \triangleq \widehat{D}_e \widehat{N}_e + \widehat{D}_o \widehat{N}_o \omega^2 \quad (5.79)$$

$$\widehat{Y}(\omega^2) \triangleq \widehat{D}_e \widehat{N}_o - \widehat{D}_o \widehat{N}_e \quad (5.80)$$

$$\widehat{Z}(\omega^2) \triangleq \widehat{D}_e^2 + \widehat{D}_o^2 \omega^2 \quad (5.81)$$

olarak tanımlıdır.  $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'nın sanal kısmı

$$\text{Im}\{\widehat{G}_0(j\omega)\} = \omega \frac{\widehat{Y}(\omega^2)}{\widehat{Z}(\omega^2)} \quad (5.82)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\widehat{v} \triangleq \omega^2 \quad (5.83)$$

olarak tanımlayalım.  $\widehat{Y}(\widehat{v})$ 'nin pozitif reel köklerinin  $\widehat{v}_1^*, \widehat{v}_2^*, \dots, \widehat{v}_\gamma^*$  olduğu kabul edilirse;  $\widehat{G}_0(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi,  $i = 1, 2, \dots, \gamma$  için  $\omega = 0$ ,  $\omega = \infty$  ve  $\omega = \pm\sqrt{\widehat{v}_i^*}$ 'da reel eksenden geçer. Böylece  $\widehat{v}_{\gamma+1}^* = 0$  ve  $\widehat{v}_{\gamma+2}^* = \infty$  olarak tanımlanırsa;  $i = 1, 2, \dots, \gamma + 2$  için reel eksenden geçiş noktaları,  $\widehat{x}_i = \widehat{X}(\widehat{v}_i^*)/\widehat{Z}(\widehat{v}_i^*)$  olarak bulunur. Böylece Teorem 3.1'den yararlanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

### 5.2.1 Teorem 5.1

Uygun rasyonel transfer fonksiyonu (5.74) ile verilen doğrusal zamanla değişmeyen bir sistemi düşünelim.  $D(w)$ 'nin sanal eksende köke sahip olmadığını kabul edelim.  $\widehat{X}(\omega^2)$ ,  $\widehat{Y}(\omega^2)$  ve  $\widehat{Z}(\omega^2)$  (5.79), (5.80) ve (5.81)'de tanımlanan polinomlar olsun.

Ayrıca  $i = 1, 2, \dots, h$  için  $(\hat{x}_i, \hat{v}_{i,j}^*)$  çiftleri de, yukarıda tanımlandığı gibidir.  $\hat{Y}(\hat{v})$ 'nin baş katsayısı  $\hat{y}_1$  ile gösterilirken;  $\hat{Y}(\hat{v})$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı  $\hat{y}_0$  ile gösterilmiştir. Verilen bir  $\hat{k} \in \mathbb{K}_i \triangleq (-1/\hat{x}_{i-1}, -1/\hat{x}_i)$  kazancı için, kapalı çevrim sistemin kararsız kutuplarının sayısı

$$\hat{u}_i = \hat{u}_0 + \sum_{t=1}^{i-1} \hat{r}_t \quad (5.84)$$

ile verilir. Burada  $\hat{u}_0$ ,  $\hat{G}_0(j\omega)$ 'nin kararsız kutuplarının sayısıdır. Reel eksen den geçişlerin sayısı

$$\hat{r}_i = \sum_{j=1}^{p_i} \hat{d}_{i,j} \quad (5.85)$$

olup, geçiş yönü ise

$$\hat{d}_{i,j} = \begin{cases} (1 - (-1)^l) \text{Sgn}(\hat{Y}^{(l)}(\hat{v}_{i,j}^*)), & 0 < \hat{v}_{i,j}^* < \infty & \text{ise} \\ \text{Sgn}(\hat{y}_0), & \hat{v}_{i,j}^* = 0 & \text{ise} \\ -\text{Sgn}(\hat{y}_1), & \hat{v}_{i,j}^* = \infty & \text{ise} \end{cases} \quad (5.86)$$

ile bulunur. Burada  $\hat{Y}^{(l)}(\hat{v})$ ,  $\hat{Y}(\hat{v})$ 'nin  $\hat{v}_{i,j}^*$  noktasındaki sıfır olmayan birinci türevidir. (5.84)'den  $\hat{u}_i = 0$  olan kazanç aralıkları, kararlı kılan kazanç kümelerini verir.

#### 5.2.1.1 Örnek 5.4

Örnek 5.3'de (5.61)'de verilmiş ayrık zamanlı sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan kazançları, Bilineer dönüşüm kullanarak hesaplayalım.

(5.61)'de verilmiş  $G_0(z)$  sisteminde (5.73)'teki bilineer dönüşüm yazılarak bulunan  $\hat{G}_0(w)$  sisteminin pay ve payda polinomları sırasıyla

$$\hat{N}(w) = 116w^5 + 34w^4 - 88w^3 - 300w^2 + 148w + 90 \quad (5.87)$$

$$\hat{D}(w) = 188w^5 + 46w^4 + 1880w^3 + 308w^2 + 652w + 126 \quad (5.88)$$

olarak bulunur.  $\hat{N}(w)$  ve  $\hat{D}(w)$ 'de  $w \triangleq j\omega$  yazılarak ve sonra tek-çift ayrıştırılması yapılarak elde edilen polinomlarda  $v \triangleq \omega^2$  dönüşümü yapılırsa,

$$\widehat{N}_e(-\widehat{v}) = 34\widehat{v}^2 + 300\widehat{v} + 90 \quad (5.89)$$

$$\widehat{N}_o(-\widehat{v}) = 116\widehat{v}^2 + 88\widehat{v} + 148 \quad (5.90)$$

$$\widehat{D}_e(-\widehat{v}) = 46\widehat{v}^2 - 308\widehat{v} + 126 \quad (5.91)$$

$$\widehat{D}_o(-\widehat{v}) = 188\widehat{v}^2 - 1880\widehat{v} + 652 \quad (5.92)$$

elde edilir. (5.79), (5.80) ve (5.81)'de  $v \triangleq \omega^2$  dönüşümü yapılırsa,

$$\widehat{X}(\widehat{v}) = 21808\widehat{v}^5 - 199972\widehat{v}^4 - 58656\widehat{v}^3 - 304840\widehat{v}^2 + 106576\widehat{v} + 11340 \quad (5.93)$$

$$\widehat{Y}(\widehat{v}) = -1056\widehat{v}^4 - 24160\widehat{v}^3 + 519232\widehat{v}^2 - 60896\widehat{v} - 40032 \quad (5.94)$$

$$\widehat{Z}(\widehat{v}) = 35344\widehat{v}^5 - 704764\widehat{v}^4 + 3751216\widehat{v}^3 - 2345064\widehat{v}^2 + 347488\widehat{v} + 15876 \quad (5.95)$$

bulunur.  $D(w)$ 'nin kararsız kök sayısı iki olduğundan;  $\widehat{u}_0 = 2$  'dir.  $\widehat{Y}(\widehat{v})$  'nin pozitif reel kökleri  $\widehat{v}_1^* = 0.3459$  ve  $\widehat{v}_2^* = 13.4212$  'dir. Bu köklere  $\widehat{v}_3^* = 0$  ve  $\widehat{v}_4^* = \infty$  'da eklenince, dört tane reel eksenden geçiş frekansı olur. Bu geçiş frekansları için Teorem 5.1'den bulunan sonuçlar, Tablo 5.1'de gösterilmiştir.

**Tablo 5.1 :** Örnek 5.4 İçin Bilineer Dönüşümle Bulunan Kazançlar.

| $i$ | $\widehat{v}_i^*$ | $\widehat{x}_i^*$ | $\widehat{r}_i$ | $\widehat{u}_i$ | $\mathbb{K}_i$                                    |
|-----|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|---------------------------------------------------|
| 1   | $\infty$          | 0.61702           | 1               | 2               | $0 < K_p < \infty, \quad -\infty < K_p < -1.6206$ |
| 2   | 0                 | 0.71428           | -1              | 3               | $-1.6206 < K_p < -1.3999$                         |
| 3   | 13.4212           | 2.39371           | -2              | 2               | $-1.3999 < K_p < -0.41776$                        |
| 4   | 0.3459            | 7.91936           | 2               | 0               | $-0.41776 < K_p < -0.1263$                        |
| 5   | -                 | $\infty$          | -               | 2               | $-0.1263 < K_p < 0$                               |

Tablo 5.1'den görüldüğü üzere bilineer dönüşüm kullanılarak kapalı çevrim sistem  $K_p \in (-0.41776, -0.1263)$  kazançları için kararlı yapılabilir. Bu sonuç, Chebyshev polinomları kullanılarak bulunan sonuca son derece yakın olup; aradaki fark nümerik hesaplama hatalarından kaynaklanmaktadır. Bu bölümde önerilen her iki yöntemle hesaplanan kazanç aralıkları, Xu ve diğ. (2001) tarafından bulunan kazanç aralığına oldukça yakındır.

### 5.2.2 Uyarı 5.1

Ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşümle bulunan (5.74)'deki gibi eş değer sistemleri için Bölüm 3'de verilen tüm hesap yöntemleri kullanılabilir. Ayrık zamanlı sistemlerde verilen kazanç ve faz payları için kararlı yapacak tüm kazançların hesabı, maksimum kazanç payı, maksimum faz payı hesabı ve yapısal olmayan belirsizlik içeren ayrık zamanlı sistemlerin kararlı kılınması gibi problemleri çözmek için Bölüm 3'de verilen tüm lemma ve teoremler, bilineer dönüşümle bulunan eş değer sistemlerde kullanılabilir.

### 5.3 Sonuç

Bu bölümde, ayrık zamanlı sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak kazançların hesabı için iki yöntem önerilmiştir. Birinci yöntem, ayrık zamanlı sistemlerde Chebyshev polinomları kullanılarak bulunan yeni sistemin Nyquist eğrisinin reel eksenini kestiği yerlerin hesaplanması ve bunlara ilişkin kazanç aralıkları için kararsız kutupların sayısını belirlemesi üzerine kuruludur. İkinci yöntem ise, ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşümü kullanılarak bulunan eş değer sistemlerinin Nyquist eğrilerinin reel eksenini kestiği yerler ve yönlerinin hesaplanması sonucu bulunan kazanç aralıkları için kararsız kutupların sayısını belirlemek üzerine kuruludur. Örnek bir ayrık zamanlı sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak kazançları bulmak için her iki yöntem de kullanılmış ve çok yakın sonuçlar bulunmuştur.

## 6. DAYANIKLI PI TİPİ KONTROL

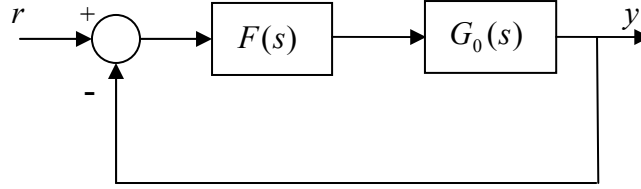
Bu bölümde, oransal-integral (PI) kontrolörler yardımıyla zaman gecikmesiz ve gecikmeli sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak bölgeleri hesaplamak parametre uzayı yaklaşımı (Ackermann ve diğ., 2002a) kullanılmıştır. Parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı bölgeler bulunarak kararlılık sınırları oluşturulur. Özel bir durum olarak birinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için PI kontrolör parametrelerini ayarlamanın yeni bir yolu önerilmiştir (Bayhan ve diğ., 2007). Önerilen yöntem, Padé yaklaşımı kullanarak birinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için kutup atamaya dayalı bir yöntemdir. Bu yöntemin en önemli özelliği, birim basamak yanıtının genelde aşısız olması ve oldukça küçük bir yerleşme zamanına sahip olmasıdır. Yöntemi test etmek için değişik sistemlerin bilgisayar simülasyonları yapılmıştır. Ayrıca yöntem, İTÜ kontrol laboratuvarında yer alan PT326 sıcaklık kontrol deney seti üzerinde DAQ kartı kullanılarak da test edilmiştir.

Parametre uzayı yaklaşımından yararlanarak yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz bir sistemi kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılabilen tüm PI kontrolörlerin hesabı için iki yöntem önerilmiştir. Kontrol edilen sistemin Nyquist eğrisi, yapısal olmayan belirsizlik içerdiğinden tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesi tanımlar ve bu eğri ailesi, Bölüm 3.6'da ifade edildiği gibi belirsizlik disklerinin oluşturduğu bir bantın içinden geçer. İlk yöntemde belirsizlik bölgesini bulabilmek amacıyla  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin iç kısımları alınırken;  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin orijini içeren belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümlerinin ise dış kısımları alınır. Bu yolla bulunan belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve nominal sistemi kararlı yapan bölge, kararsız kutup sayısının sıfır olduğu ve sistemi kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörlerinin bölgesidir. İlk yönteme alternatif olarak belirsizlik bölgesini hızlıca bulabilmek ve hesabı kolaylaştırmak amacıyla  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin etrafı, dışarıdan yamuklarla kaplanıp iç kısımları alınırken;  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin orijini içeren belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri ise içeriden eş kenar dörtgenlerle çevrelenip dış kısımları alınır. Bu yöntem, hızlı çözüm vermesine rağmen; tutucudur. Belirsizlik bölgesini ve sistemi dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini bulmak için bu bölümde

ikinci bir yöntem de önerilmiştir. Bu yöntem, PI kontrolör parametrelerinin kutupsal koordinatlarda yazılmasıyla oluşturulan yeni sistem için Bölüm 3.6’da verilen sonuçların uyarlanması dayanır. Bu yöntemin işlem yoğunluğu fazladır; fakat tutucu olmayan sonuç verir.

### 6.1 Zaman Gecikmesiz Sistemlerde Parametre Uzaı Yaklaşımı Kullanılarak PI Tipi Kontrolör İçin Kararlı Kılan Bölgelerin Belirlenmesi

Şekil 6.1’de PI kontrolör ile kontrol edilen tek girişli-tek çıkışlı kontrol sistemi görölmektedir.



Şekil 6.1 : Zaman Gecikmesiz Bir Sistemin PI Kontrolü.

Şekil 6.1’de görölen  $F(s)$ , zaman gecikmesiz sistemi kontrol etmek için kullanılan PI kontrolörüdür ve yapısı

$$F(s) \triangleq \frac{N_F(s)}{D_F(s)} = \frac{1}{s} (K_i + K_p s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right) \quad (6.1)$$

biçimindedir. Burada  $K_p$  ve  $K_i$  sırasıyla kontrolörün oransal ve integral kazanç parametreleridir.  $T_i$  ise integral zaman sabitidir. Şekil 6.1’deki zaman gecikmesiz  $G_0(s)$  sistemi,

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (6.2)$$

biçimindedir. Şekil 6.1 ile verilen sistemin kapalı çevrim sistem transfer fonksiyonu

$$G_{0c}(s) = \frac{G_0(s)F(s)}{1 + G_0(s)F(s)} = \frac{N(s)(K_i + K_p s)}{sD(s) + N(s)(K_i + K_p s)} \quad (6.3)$$

olur ve buradan

$$p_{0c}(s) = 1 + G_0(s)F(s) = 0 \quad (6.4)$$

biçimindeki kapalı çevrim karakteristik polinomu PI kontrolör parametreleri cinsinden

$$p_{0c}(s) = sD(s) + N(s)(K_i + K_p s) = 0 \quad (6.5)$$

olarak yazılabilir. Parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısı  $\delta$  'nın aynı kaldığı bölgeye, *P-bölgesi* denilir ve **P** ile gösterilir. *P*-bölgelerinin sınırlarına, *kararlılık sınırları* denilir. Parametre uzayında kararlı kılan bölgeleri bulmak için uygun bir yöntem, kararlılık sınırlarını bulmaktır. (6.4) ve (6.5)'de verilen karakteristik polinomunda  $s \triangleq jw$  yazılmasıyla,

$$p_{0c}(jw) = 1 + G_0(jw)F(jw) = 0 \quad (6.6)$$

ve

$$p_{0c}(jw) = jwD(jw) + N(jw)(K_i + jwK_p) = 0 \quad (6.7)$$

elde edilir.  $p_{0c}(jw) = 0$  olmasını sağlayan  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri, kararlılık sınırını oluşturur.  $w$  değiştirilerek  $K_p - K_i$  düzleminde  $K_p - K_i$  eğrisi çizdirilir ve kararlılık sınırları belirlenir ve kararlı kılan bölgeler bulunur.  $N(jw)$  ile  $D(jw)$  polinomlarının (3.6)'daki gibi reel ve sanal kısımlarına ayrılmasıyla elde edilen bağıntılarının (6.7)'de yazılmasıyla bulunan

$$p_{0c}(jw) = jw(D_{re} + jD_{im}) + (N_{re} + jN_{im})(K_i + jwK_p) = 0 \quad (6.8)$$

polinomu, reel ve sanal kısımlarına ayrılırsa sırasıyla;

$$\text{Re}\{p_{0c}(jw)\} = -wD_{im}(w) + N_{re}(w)K_i - wN_{im}(w)K_p = 0 \quad (6.9)$$

$$\text{Im}\{p_{0c}(jw)\} = wD_{re}(w) + N_{im}(w)K_i + wN_{re}(w)K_p = 0 \quad (6.10)$$

elde edilir. Son iki denklem, vektör-matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} N_{re}(w) & -wN_{im}(w) \\ N_{im}(w) & wN_{re}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wD_{im}(w) \\ -wD_{re}(w) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\Omega(w) \triangleq \begin{bmatrix} N_{re}(w) & -wN_{im}(w) \\ N_{im}(w) & wN_{re}(w) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$



matrisinin ve

$$\underline{h}(w) \triangleq \begin{bmatrix} wD_{im}(w) \\ -wD_{re}(w) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

vektörünün tanımlanması ve (6.11)'de yazılmasıyla,

$$\Omega(w) \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \underline{h}(w) \quad (6.14)$$

bulunur.  $K_p$  ve  $K_i$  için (6.14)'den

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \Omega^{-1}(w) \underline{h}(w) \quad (6.15)$$

elde edilir. Böylece  $0 < w < \infty$  için, parametre uzayında  $K_p - K_i$  eğrisi çizdirilebilir. Çizdirilen bu eğri, parametre uzayını alt bölgelere böler. Herbir alt bölgede için kapalı çevrim sistemin kararsız kutup sayısı sabittir. (6.9) ve (6.10), parametre uzayında doğrular gösterir (Ackermann ve diğ., 2002a). (6.15)'de verilen çözüm, bu doğruların kesişimidir.  $w = w_s$  tekil frekansı için bu doğrular birbirine paraleldir ve bu durumda  $\Omega(w)$ 'nin determinanı için,

$$|\Omega(w_s)| = w_s (N_{re}^2(w_s) + N_{im}^2(w_s)) = 0 \quad (6.16)$$

yazılabilir. O zaman bir çözümün olmasının gerek ve yeter koşulu, bu doğruların birbirine özdeş olması yani tekil frekanslar ( $w_s$ ) için

$$\frac{-D_{im}(w_s)}{D_{re}(w_s)} = \frac{N_{re}(w_s)}{N_{im}(w_s)} = \frac{-N_{im}(w_s)}{N_{re}(w_s)} \quad (6.17)$$

koşulunun sağlanmasıdır. Dikkat edilirse bu durumda çözüm, bir noktada olmak yerine parametre uzayında bir doğrudur. Bu doğru boyunca reel bir kök, sanal eksenden geçer. (6.15)'de verilen çözümün olabilmesi için  $\Omega(w)$ 'nin determinanı  $|\Omega(w)|$ 'nin sıfırdan farklı olması gerekir. Diğer yandan bu determinantın sıfıra eşit olması  $w = 0$  veya  $N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w) = 0$  olması ile gerçekleşir. İkinci şartın sağlanabilmesi için  $N_{re}(w) = 0$  ve  $N_{im}(w) = 0$  olması gerekir. Bu şart altında  $w = w_s$  noktasında (6.9) ve (6.10)'dan bulunan  $-w_s D_{im}(w_s) = 0$  ve  $w_s D_{re}(w_s) = 0$  bağıntılarının sağlanması için  $D_{re}(w_s) = 0$  ve  $D_{im}(w_s) = 0$  olmalıdır. Bu durumda sistemde sıfır kutup götürmesi olacağından (6.17) gerçekleşemez. Bu nedenle PI kontrol kullanıldığında;  $w = w_s$  tekil frekansı için inceleme yapmaya gerek yoktur.

$w = 0$  için, (6.10) ile verilen bağıntı, sıfırdır. Bu nedenle kararlılık sınırı, (6.9) ile tanımlanmış bir doğrudur. Böylece  $w = 0$  için (6.9)'dan

$$N_{re}(0)K_i = 0 \quad (6.18)$$

elde edilir.  $N_{re}(0) \neq 0$  yani  $a_0 \neq 0$  ise;  $K_i = 0$  doğrusu bir kararlılık sınırındır ve *reel kök sınırı* (real root boundary) adını alır.

(6.4)'de (6.1) ve (6.2)'nin yazılmasıyla bulunan

$$p_{0c}(s) = \left( 1 + \left( \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \right) \left( \frac{K_i}{s} + K_p \right) \right) = 0 \quad (6.19)$$

bağıntısından hareketle  $w \rightarrow \infty$  için,  $G_0(s)$  sistemi tersi de nedensel ( $m = n$ ) ise

$$K_p = -1/a_m \quad (6.20)$$

doğrusu, bir kararlılık sınırındır ve *sonsuz kök sınırı* (infinite root boundary) adını alır.

$0 < w < \infty$  için, (6.12) ve (6.13)'ü kullanarak (6.15)'i

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \frac{1}{|\Omega|} \begin{bmatrix} wN_{re}(w) & wN_{im}(w) \\ -N_{im}(w) & N_{re}(w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wD_{im}(w) \\ -wD_{re}(w) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

biçiminde yazabiliriz. (6.21)'den  $K_i$  ve  $K_p$  için sırasıyla

$$K_i = \frac{wN_{re}(w)D_{im}(w) - wN_{im}(w)D_{re}(w)}{N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w)} \quad (6.22)$$

$$K_p = \frac{-N_{im}(w)D_{im}(w) - N_{re}(w)D_{re}(w)}{N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w)} \quad (6.23)$$

yazılabilir. (3.7) ve (3.8)'in (6.22) ve (6.23)'de yazılıp düzenlenmesiyle,

$$K_i = \frac{-w^2(N_o(w)D_e(w) - N_e(w)D_o(w))}{N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w)} \quad (6.24)$$

$$K_p = \frac{-(N_e(w)D_e(w) + w^2 N_o(w)D_o(w))}{N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w)} \quad (6.25)$$

bulunur. Burada

$$M(w^2) \triangleq (N_{re}^2 + N_{im}^2) = \frac{|\Omega(w)|}{w} \quad (6.26)$$

tanımı ile bulunan polinomun ve (3.11) ile (3.12)'nin, (6.24) ve (6.25)'de yazılmasıyla

$$K_i = \frac{-w^2 Y(w^2)}{M(w^2)} \quad (6.27)$$

$$K_p = \frac{-X(w^2)}{M(w^2)} \quad (6.28)$$

bulunur. (6.27) ve (6.28)'deki iki denklemle verilen  $K_p - K_i$  uzayındaki parametrik eğriye, *kompleks kök sınırı* (complex root boundary) adı verilir. Dikkat edilecek olursa kompleks kök sınırı,  $w=0$  için  $K_i=0$  olan bir noktadan başlamaktadır ve parametre uzayında  $K_p$  eksenini  $Y(w^2)$ 'nin kökleri olan  $w_1, w_2, \dots, w_p$  frekansları için kesmektedir. Ayrıca  $K_i$  eksenini de  $X(w^2)$ 'nin köklerinde kesilmektedir.  $w$  arttıkça kompleks kök sınırının sol tarafında kalan bölgelerindeki kararsız kutup sayısı, sağ tarafındakilere oranla 2 daha fazladır (Saeki, 2007). Böylece bir alt bölgedeki kararsız kutup sayısı belirlendikten sonra diğer bölgeler için bu belirleme çok hızlı bir şekilde yapılabilir.

### 6.1.1 Örnek 6.1

Aşağıda verilen birinci mertebeden sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini ve  $K_p - K_i$  parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgelerini belirleyelim.

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s+1} \quad (6.29)$$

Kesin nedensel olan bu sistem için (6.7)'den bulunan

$$p_{0c}(jw) = -w^2 + K_i + jw(1 + K_p) = 0 \quad (6.30)$$

karakteristik polinomunun reel ve sanal kısımlarına ayrılmasıyla sırasıyla

$$\text{Re}\{p_{0c}(jw)\} = -w^2 + K_i = 0 \quad (6.31)$$

$$\text{Im}\{p_{0c}(jw)\} = w(1 + K_p) = 0 \quad (6.32)$$

elde edilir. Böylece (6.12), (6.13) ve (6.16)'dan bulunan

$$\Omega(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$\underline{h}(w) = \begin{bmatrix} w^2 \\ -w \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$|\Omega(w)| = w \quad (6.35)$$

ifadelerinden yararlanarak (6.15)'den

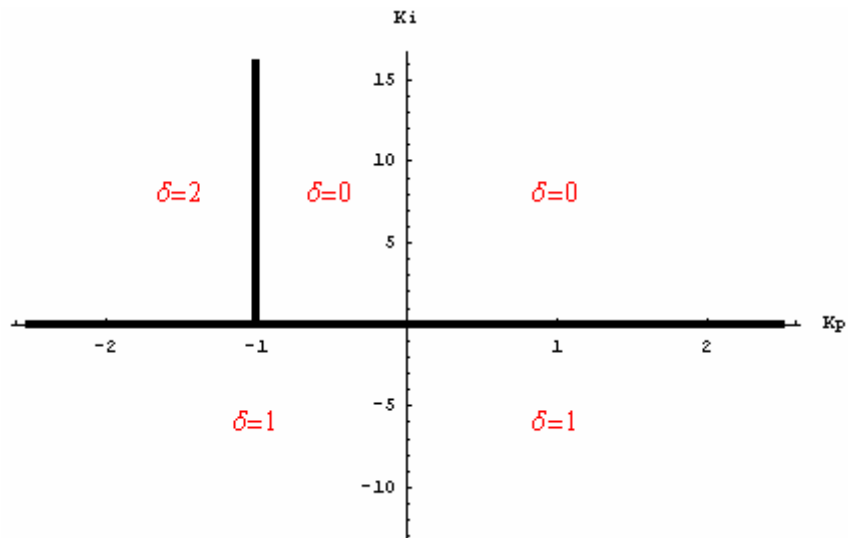
$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

elde edilir. (6.36)'dan  $0 < w < \infty$  için,

$$K_i = w^2 \quad (6.37)$$

$$K_p = -1 \quad (6.38)$$

bulunur.  $K_p = -1$  doğrusunun üst kısmı, kompleks kök sınırını verir.  $w = 0$  için, (6.31)'den bulunan  $K_i = 0$  doğrusu reel kök sınırını verir. Bu iki sınırın  $K_p - K_i$  düzleminde oluşturduğu ve kararsız kapalı çevrim kutup sayısı  $\delta$ 'nın aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri de Şekil 6.2'de gösterilmiştir.  $\delta = 0$  olan bölge, sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan PI kontrolörlerinin bölgesidir.



**Şekil 6.2 :** Örnek 6.1 için  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları

### 6.1.2 Örnek 6.2

Tersi de nedensel olan

$$G_0(s) = \frac{2s^4 + 6s^3 + 14.75s^2 + 55.5s + 72}{s^4 + 21s^3 + 58s^2 + 104s + 96} \quad (6.39)$$

sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini ve  $K_p - K_i$  parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgelerini belirleyelim.

Bu sistem için (6.9) ve (6.10)'dan sırasıyla

$$\text{Re}\{p_{0c}(jw)\} = 21w^4 - 104w^2 + K_i(2w^4 - 14.75w^2 + 72) + K_p(6w^4 - 55.5w^2) = 0 \quad (6.40)$$

$$\text{Im}\{p_{0c}(jw)\} = w^5 - 58w^3 + 96w + K_i(-6w^3 + 55.5w) + K_p(2w^5 - 14.75w^3 + 72w) = 0 \quad (6.41)$$

elde edilir. Böylece (6.12), (6.13) ve (6.16)'dan bulunan

$$\Omega(w) = \begin{bmatrix} 6w^4 - 55.5w^2 & 2w^4 - 14.75w^2 + 72 \\ 2w^5 - 14.75w^3 + 72w & -6w^3 + 55.5w \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

$$\underline{h}(w) = \begin{bmatrix} -21w^4 + 104w^2 \\ -w^5 + 58w^3 - 96w \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$|\Omega(w)| = -4w^9 + 23w^7 + 160.437w^5 - 956.25w^3 - 5184w \quad (6.44)$$

bağıntılarından yararlanarak  $0 < w < \infty$  için,

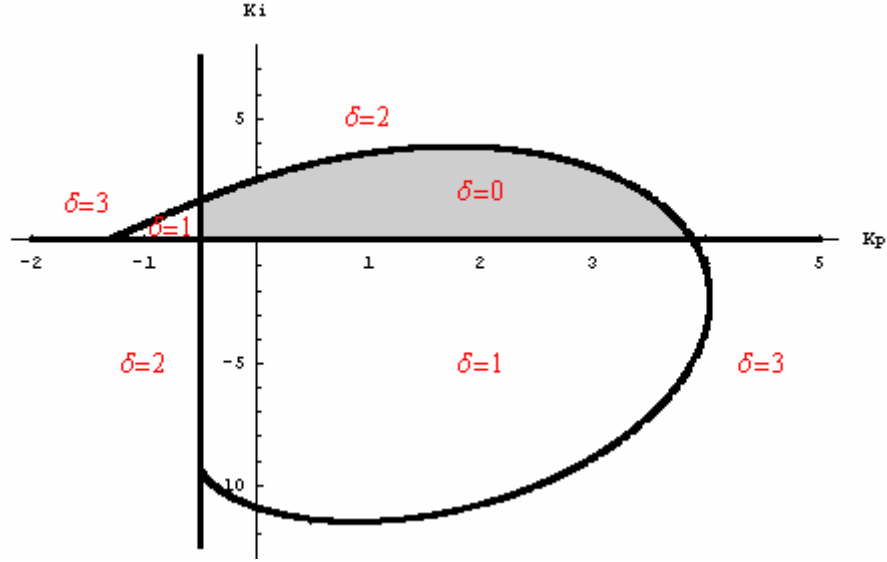
$$K_i = \frac{2w^8 - 4.75w^6 - 670w^4 + 180w^2 + 6912}{-4w^8 + 23w^6 + 160.437w^4 - 956.25w^2 - 5184} \quad (6.45)$$

$$K_p = \frac{36w^8 - 114.25w^6 - 749w^4 - 2160w^2}{-4w^8 + 23w^6 + 160.437w^4 - 956.25w^2 - 5184} \quad (6.46)$$

denklemlerinden  $K_p - K_i$  uzayında parametrik kompleks kök sınırı eğrisi bulunur.  $w = 0$  için (6.40)'dan bulunan  $K_i = 0$  doğrusu, reel kök sınırı verir. (6.39)'da verilen  $G_0(s)$  sistemi, tersi de nedensel olduğu için; (6.20)'den bulunan

$$K_p = -0.5 \quad (6.47)$$

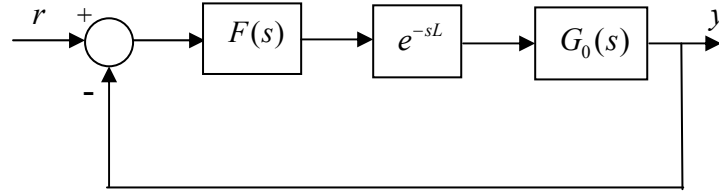
doğrusu, sonsuz kök sınırı verir. Böylece  $K_p - K_i$  düzleminde oluşan ve kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri Şekil 6.3’de gösterilmiştir. Şekil 6.3’deki gölgeli bölge, sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan PI kontrolörlerinin bölgesidir.



**Şekil 6.3 :** Örnek 6.2 İçin  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları

## 6.2 Zaman Gecikmeli Sistemlerde Parametre Uzayı Yaklaşımı Kullanılarak PI Tipi Kontrolör İçin Kararlı Kılan Bölgelerin Belirlenmesi

Şekil 4.1’de görülen zaman gecikmeli  $G(s)$  sistemine PI kontrolör ilave edilerek Şekil 6.4’deki geri beslemeli kontrol sistemi elde edilebilir.



**Şekil 6.4 :** Zaman Gecikmeli Bir Sistemin PI Kontrolü.

Zaman gecikmeli  $G(s)$  sistemi, (4.3)’de verildiği gibidir. Şekil 6.4’de görülen  $F(s)$ , (6.1)’de verildiği gibi PI kontrolörüdür. Şekil 6.4 ile verilen sistemin kapalı çevrim sistem transfer fonksiyonu

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{N(s)(K_i + K_p s)e^{-sL}}{sD(s) + N(s)(K_i + K_p s)e^{-sL}} \quad (6.48)$$

olur ve buradan kapalı çevrim karakteristik polinomu,

$$p_c(s) = 1 + G(s)F(s) = 0 \quad (6.49)$$

biçiminde veya PI kontrolör parametreleri cinsinden

$$p_c(s) = sD(s) + N(s)(K_i + K_p s)e^{-sL} = 0 \quad (6.50)$$

olarak polinomsu biçimindedir.  $G(s)$  sisteminin zaman gecikmesinden bağımsız kısmı (6.2)'de verildiği gibidir. (6.49) ve (6.50)'de verilen karakteristik polinomunda  $s = jw$  yazılırsa sırasıyla,

$$p_c(jw) = 1 + G(jw)F(jw) = 0 \quad (6.51)$$

ve

$$p_c(jw) = jwD(jw) + N(jw)(K_i + jwK_p)e^{-jwL} = 0 \quad (6.52)$$

elde edilir. (4.3)'de (6.51)'den,  $G(jw)F(jw) = -1$  olduğunda kapalı çevrim sistemin sanal eksen üzerinde kökü vardır.  $w$ 'yi negatif olmayan reel sabit  $w^*$  değerine sabitleyip (6.51)'de yazıp reel ve sanal kısımlarına ayırırsak

$$\text{Re}\{G(jw^*)F(jw^*)\} = -1 \quad (6.53)$$

$$\text{Im}\{G(jw^*)F(jw^*)\} = 0 \quad (6.54)$$

buluruz.  $K_p$  ve  $K_i$  kontrolör parametrelerine bağlı (6.53) ve (6.54) denklemleri çözülerek  $w^*$  frekansında kapalı çevrim sistemin kutuplarının olmasını sağlayan  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri hesaplanabilir.  $K_p - K_i$  düzlemindeki kararlılık sınırlarını bulmak için Bölüm 6.1'de verilen sonuçlardan yararlanılabilir. Buradan hareketle  $K_p - K_i$  düzleminde oluşan  $P$ -bölgelerini belirlemek için aşağıdaki teorem verilebilir.

### 6.2.1 Teorem 6.1

Tam uygun transfer fonksiyonu ile tanımlanmış (6.2)'deki  $G_0(s)$  sistemi verildiğinde ve Şekil 6.4'deki zaman gecikmeli sistem bir PI kontrolör ile kontrol edilmek istenildiğinde; bulunan kararlılık sınırları aşağıdaki gibi belirlenir:

a.)  $w = 0$  için,  $a_0 \neq 0$  ( $N(0) \neq 0$ ) ise;  $K_i = 0$  doğrusu bir kararlılık sınırı olan reel kök sınırırır.

b.)  $w \rightarrow \infty$  için, kararlılık sınırı yoktur.

c.)  $0 < w < \infty$  için, (6.52)'nin reel ve sanal kısımlarından hareketle kararlılık sınırları

$$K_p \triangleq \frac{-\cos(Lw)X(w^2) - w\sin(Lw)Y(w^2)}{M(w^2)} \quad (6.55)$$

ve

$$K_i \triangleq \frac{w\sin(Lw)X(w^2) - w^2\cos(Lw)Y(w^2)}{M(w^2)} \quad (6.56)$$

denklemlerinden elde edilen  $K_p - K_i$  parametre düzlemindeki  $K_p - K_i$  eğrisi ile bulunur. Bu eğri, parametre uzayını  $P$ -bölgelerine bölen kompleks kök sınırırır. Herbir  $P$ -bölgesi için  $p_c(s)$ 'nin kararsız kök sayısı  $\delta$ , sabittir. (6.55) ve (6.56)'da görülen  $X(w^2)$  ve  $Y(w^2)$ , (3.11) ve (3.12)'de verilen polinomlardır.  $M(w^2)$  ise (6.26)'da tanımlanmış bir polinomdur.  $N_e$  ve  $N_o$ ,  $N(s)$  polinomunun (3.8)'deki gibi tek-çift ayrıştırmasıyla bulunur.

### 6.2.2 Teorem 6.1'in ispatı

a.)  $w = 0$  için (6.52) ile verilen karakteristik polinom

$$N(0)K_i = 0 \quad (6.57)$$

ifadesine eş değer olur. Burada (6.2)'den hareketle  $w = 0$  için; (6.57) polinomu,

$$a_0 K_i = 0 \quad (6.58)$$

biçimine gelir. Böylece eğer  $a_0 \neq 0$  ise,

$$K_i = 0 \quad (6.59)$$

için bir kararlılık sınırı vardır.

b.)  $w \rightarrow \infty$  için, (6.52)'den

$$\lim_{w \rightarrow \infty} p_c(jw) \neq 0 \quad (6.60)$$



bulunacağından; sonsuz kök sınırı bulunmaz.

c.)  $0 < w < \infty$  için, (6.52)'deki gecikme terimi için bulunan

$$e^{-jwL} \triangleq \cos(Lw) - j \sin(Lw) \quad (6.61)$$

bağıntısı ve  $N(jw)$  ile  $D(jw)$  polinomlarının (3.6)'daki gibi reel ve sanal kısımlarına ayrılmasıyla elde edilen bağıntıların, (6.52)'de yazılmasıyla

$$jw(D_{re}(w) + jD_{im}(w)) + (N_{re}(w) + jN_{im}(w))(K_i + jwK_p)(\cos(Lw) - j \sin(Lw)) = 0 \quad (6.62)$$

elde edilir. (6.62) ile verilen polinom düzenlenip; reel ve sanal kısımları ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$-wD_{im} + (N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw))K_i - w(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw))K_p = 0 \quad (6.63)$$

ve

$$wD_{re} + (N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw))K_i + w(N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw))K_p = 0 \quad (6.64)$$

bulunur. Burada kolaylık olması açısından;  $N_{re}(w)$ ,  $N_{im}(w)$ ,  $D_{re}(w)$  ve  $D_{im}(w)$  yerine sırasıyla  $N_{re}$ ,  $N_{im}$ ,  $D_{re}$  ve  $D_{im}$  yazılmıştır.  $K_p$  ve  $K_i$ , (6.63) ve (6.64)'den çözülebilir. Bu iki denklem, vektör-matris biçiminde

$$\begin{bmatrix} N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw) & -w(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw)) \\ N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw) & w(N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wD_{im} \\ -wD_{re} \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathfrak{U}(w) \triangleq \begin{bmatrix} N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw) & -w(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw)) \\ N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw) & w(N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw)) \end{bmatrix} \quad (6.66)$$

olarak tanımlanan matrisin ve (6.13)'de verilen  $\underline{h}(w)$  vektörünün (6.65)'de yazılmasıyla,

$$\mathfrak{U}(w) \begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \underline{h}(w) \quad (6.67)$$

bulunur.  $K_p$  ve  $K_i$  katsayıları vektörü için (6.67)'den

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \mathfrak{U}^{-1}(w) \underline{h}(w) \quad (6.68)$$

elde edilir. Çözümün olabilmesi için  $\mathfrak{U}(w)$  'nin determinanı için,

$$|\mathfrak{U}(w)| = w(N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w)) \neq 0 \quad (6.69)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Bu determinantın sıfıra eşit olabilmesi için  $w = 0$  veya  $N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w) = 0$  olması gerekir.  $w = 0$  için teoremin ilk koşulundan reel kök sınırı çözümü yapılmıştır.  $N_{re}^2(w) + N_{im}^2(w) = 0$  olması için  $N_{re}(w) = 0$  ve  $N_{im}(w) = 0$  olması gerekir. Bu durumda  $N(jw) = 0$  olacağından;  $N(s)/D(s)$  'nin  $s = jw$  'da sıfırı olduğunu ima eder. Ancak verilen bir  $w = w_{fix}$  frekansı için  $N(jw_{fix}) = 0$  olursa; (6.63) ve (6.64) denklemleri sırasıyla,

$$-w_{fix} D_{im}(w_{fix}) = 0 \quad (6.70)$$

$$w_{fix} D_{re}(w_{fix}) = 0 \quad (6.71)$$

biçimine gelir. Bu durum ancak  $s = jw_{fix}$  için  $N(s)/D(s)$  'nin bir kutubu olması halinde mümkün olacağından; böyle bir durumda bir kararlılık sınırından söz edilemez. O halde her zaman  $|\mathfrak{U}(w)| \neq 0$  ifadesi sağlanır.

(6.68)'i daha açık biçimde (6.65) ve (6.69)'dan hareketle

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathfrak{U}(w)|} \begin{bmatrix} w(N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw)) & w(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw)) \\ -(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw)) & N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wD_{im} \\ -wD_{re} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

olarak buluruz. (6.72)'den  $K_i$  ve  $K_p$  için sırasıyla

$$K_i = \frac{w^2(N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw))D_{im} - w^2(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw))D_{re}}{w(N_{re}^2 + N_{im}^2)} \quad (6.73)$$

$$K_p = \frac{-w(N_{im} \cos(Lw) - N_{re} \sin(Lw))D_{im} - w(N_{re} \cos(Lw) + N_{im} \sin(Lw))D_{re}}{w(N_{re}^2 + N_{im}^2)} \quad (6.74)$$

bulunur. (6.73) ve (6.74), eş değer olarak

$$K_i = \frac{-w^2 \cos(Lw)(D_{re}N_{im} - D_{im}N_{re}) + w^2 \sin(Lw)(N_{re}D_{re} + N_{im}D_{im})}{w(N_{re}^2 + N_{im}^2)} \quad (6.75)$$

$$K_p = \frac{-w \cos(Lw)(N_{re}D_{re} + N_{im}D_{im}) - w \sin(Lw)(D_{re}N_{im} - D_{im}N_{re})}{w(N_{re}^2 + N_{im}^2)} \quad (6.76)$$

biçiminde yazılabilir. (3.7) ve (3.8)'in (6.75) ve (6.76)'da yazılmasıyla

$$K_i = \frac{-w^3 \cos(Lw)(D_eN_o - D_oN_e) + w^2 \sin(Lw)(N_eD_e + w^2N_oD_o)}{w(N_{re}^2 + N_{im}^2)} \quad (6.77)$$

$$K_p = \frac{-w \cos(Lw)(N_eD_e + w^2N_oD_o) - w^2 \sin(Lw)(D_eN_o - D_oN_e)}{w(N_{re}^2 + N_{im}^2)} \quad (6.78)$$

bulunur. Burada (6.24)'de verilen polinomunun ve (3.11) ile (3.12)'nin, (6.77) ve (6.78)'de yazılmasıyla

$$K_i = \frac{-w^2 \cos(Lw)Y(w^2) + w \sin(Lw)X(w^2)}{M(w^2)} \quad (6.79)$$

$$K_p = \frac{-\cos(Lw)X(w^2) - w \sin(Lw)Y(w^2)}{M(w^2)} \quad (6.80)$$

bağıntıları bulunur ve ispat tamamlanmış olur. ■

### 6.2.3 Uyarı 6.1

$L = 0$  için (6.55) ve (6.56)'da verilen iki denklem, (6.27) ve (6.28)'de verilen iki denkleme dönüşür. ■

$G_0(s)$  tersi de nedensel bir sistem ise,  $w \rightarrow \infty$  için zaman gecikmeli sistemin kararlılığına ilişkin aşağıdaki Lemma verilebilir.

### 6.2.4 Lemma 6.1

(4.3)'de görülen  $G_0(s)$  sisteminin tersi de nedensel olması durumunda,  $w \rightarrow \infty$  için zaman gecikmeli sistemin kararlılığına ilişkin gerek koşul

$$K_p \in \left[ -\frac{1}{|a_m|}, \frac{1}{|a_m|} \right] \quad (6.81)$$

ile verilir. Burada  $a_m$ , (6.2)'de görülen  $N(s)$ 'nin en yüksek dereceli teriminin baş katsayısıdır.

### 6.2.5 Lemma 6.1'in ispatı

(6.51)'de (4.3)'ün yazılmasıyla bulunan

$$F(jw) = -D(jw)e^{jwL} / N(jw) \quad (6.82)$$

bağıntısında (6.1)'in  $s = jw$  için yazılıp düzenlenmesiyle

$$K_p = -\frac{D(jw)}{N(jw)} e^{jwL} - \frac{K_i}{jw} \quad (6.83)$$

elde edilir. (6.83)'de (6.2)'nin yazılmasıyla oluşturulan

$$K_p = -\frac{(jw)^n + b_{n-1}(jw)^{n-1} + \dots + jwb_1 + b_0}{a_m(jw)^m + a_{m-1}(jw)^{m-1} + \dots + jwa_1 + a_0} e^{jwL} - \frac{K_i}{jw} \quad (6.84)$$

bağıntısından hareketle  $\text{Re}\left\{\lim_{w \rightarrow \infty} e^{jwL}\right\} \in [-1, +1]$  ifadesi kullanılarak;  $a_m > 0$  ve  $m = n$  olmak üzere  $w \rightarrow \infty$  için,

$$K_p = \mp 1/a_m \quad (6.85)$$

elde edilir.  $a_m < 0$  olması durumunda elde edilen  $K_p = \pm 1/a_m$  bağıntısını ve (6.85)'i birlikte ifade eden (6.81), bulunur ve ispat tamamlanmış olur. ■

### 6.2.6 Uyarı 6.2

Zaman gecikmeli sistemin Padé eş değeri kullanılarak kararlılık sınırlarının oluşturduğu  $P$ -bölgelerinin tespit edilmesinde ve bu bölgelere ilişkin kararsız kutup sayılarının hesaplanmasında, Bölüm 6.1'de verilen sonuçlar kullanılır. (4.3) ile verilen zaman gecikmeli  $G(s)$  sisteminin zaman gecikmesinden bağımsız kısmı  $G_0(s)$  tersi de nedensel ise;  $G(s)$  sisteminin Padé eş değeri olan  $\hat{G}(s)$  sistemi de tersi de nedensel olacağından, Padé yaklaşımının mertebesine göre  $w \rightarrow \infty$  için,  $K_p = 1/a_m$  veya  $K_p = -1/a_m$  doğrularında sonsuz kök sınırı vardır.

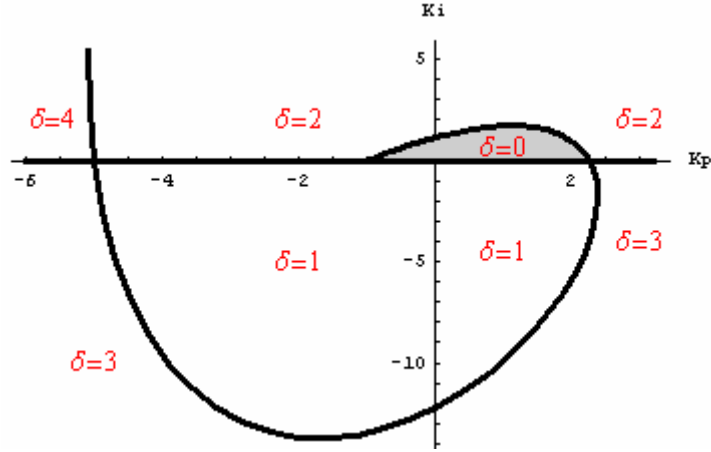
### 6.2.7 Örnek 6.3

Örnek 6.1'de verilen sisteme  $L = 1$  sn kadar zaman gecikmesi ekleyerek bulunan

$$G(s) = G_0(s)e^{-s} = e^{-s}/(s+1) \quad (6.86)$$

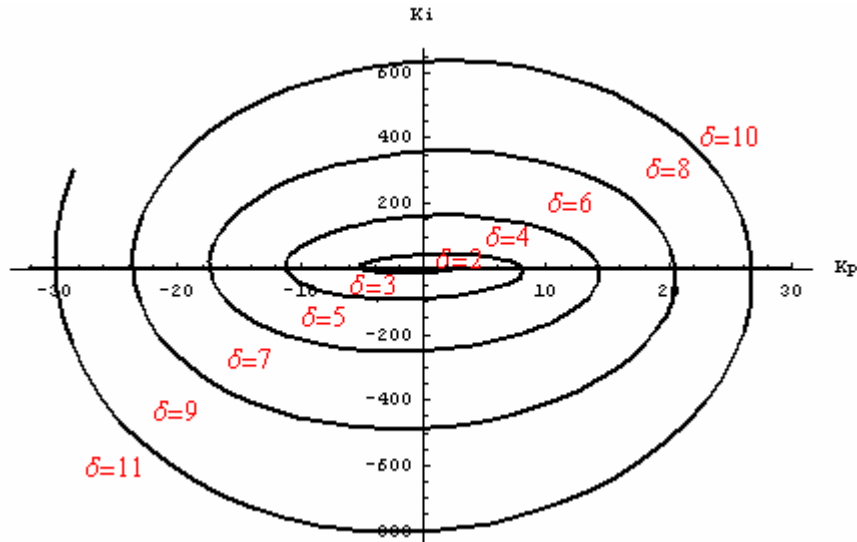
sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini ve  $K_p - K_i$  parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgelerini belirleyelim.

Teorem 6.1a'dan  $w = 0$  için  $K_i = 0$  doğrusunda reel kök sınırı vardır. Teorem 6.1c'den  $0 < w < \infty$  için (6.55) ve (6.56)'dan  $K_p - K_i$  eğrisi çizdirilerek kompleks kök sınırı belirlenir. Böylece  $w_{\max} = 5.2$  için,  $K_p - K_i$  parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri Şekil 6.5'deki gibi oluşur. Şekil 6.5'deki gölgeli bölge, zaman gecikmeli bu sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan PI kontrolörlerinin bölgesidir.



**Şekil 6.5 :** Örnek 6.3'de  $w_{\max} = 5.2$  ( $0 < w < 5.2$ ) için  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları.

$w \rightarrow \infty$ 'a giderken  $K_p - K_i$  eğrisi, orijin etrafında spiral şeklinde dönecektir. Bu duruma örnek olması açısından  $w_{\max} = 30.3$  için  $K_p - K_i$  parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri, Şekil 6.6'da gösterilmiştir.



**Şekil 6.6 :** Örnek 6.3'de  $w_{\max} = 30.3$  için  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları.

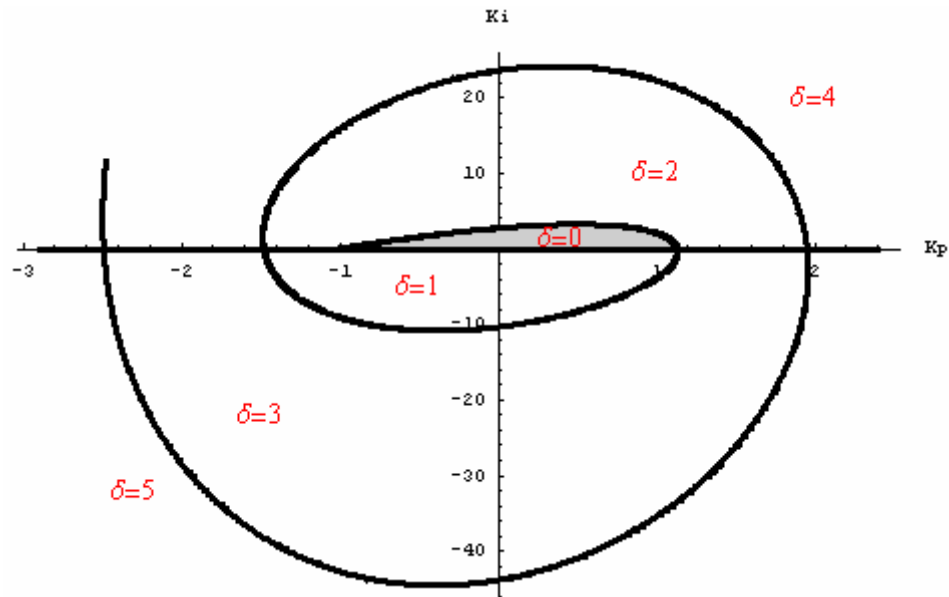
### 6.2.8 Örnek 6.4

Verilen zaman gecikmeli

$$G(s) = \frac{1}{0.1s + 1} e^{-0.5s} \quad (6.87)$$

sistemini kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini ve parametre uzayında  $P$ -bölgelerini belirleyelim.

Teorem 6.1'den  $w = 0$  için bulunan  $K_i = 0$  doğrusu ve  $0 < w < \infty$  arasında örneğin  $w_{\max} = 23.2$  için parametre uzayında çizdirilen  $K_p - K_i$  eğrisi yardımıyla oluşturulan  $P$ -bölgeleri ile bunlar içinde kararsız kutup sayısının sıfır olduğu gölgeli bölge de dahil, Şekil 6.7'de gösterilmiştir.



**Şekil 6.7 :** Örnek 6.4’de  $w_{\max} = 23.2$  İçin  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları.

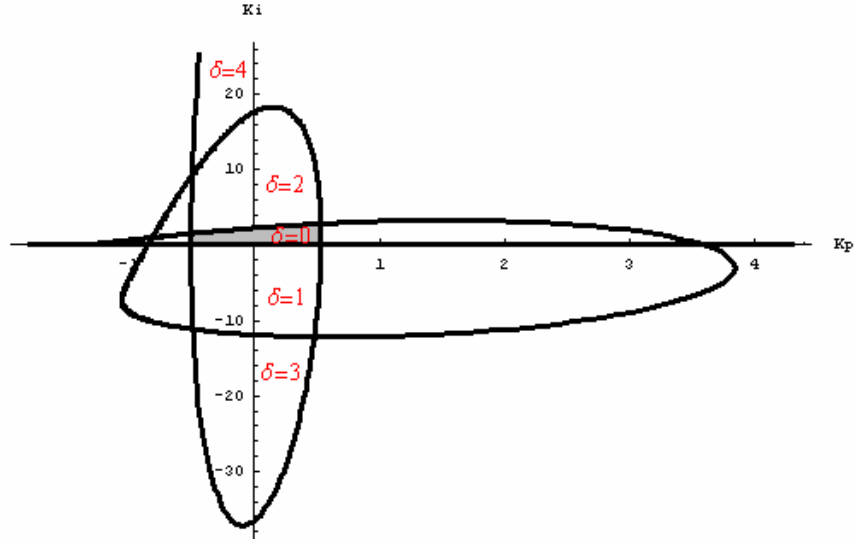
### 6.2.9 Örnek 6.5

Örnek 6.2’de verilen tersi de nedensel sistemine  $L = 0.07$  sn kadar zaman gecikmesi ekleyerek bulunan

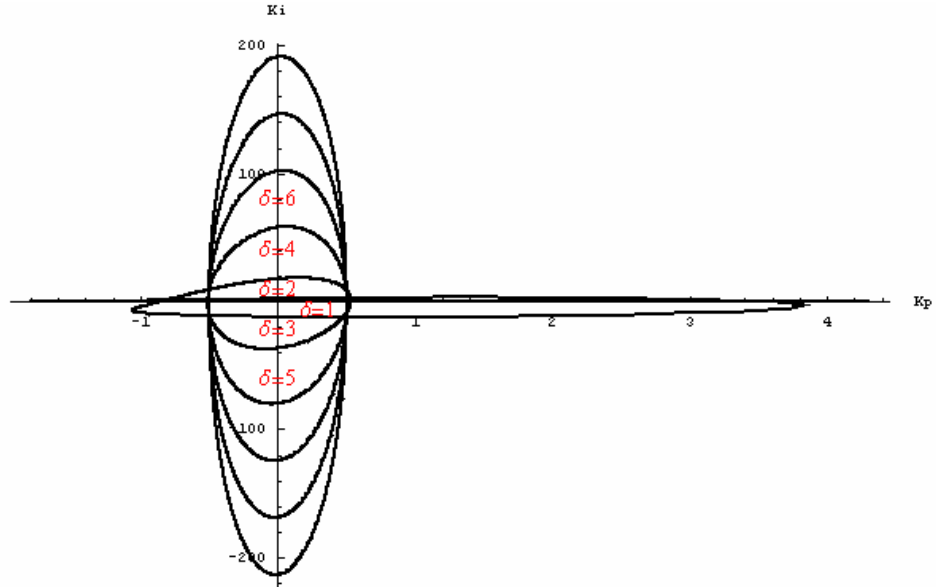
$$G(s) = \frac{2s^4 + 6s^3 + 14.75s^2 + 55.5s + 72}{s^4 + 21s^3 + 58s^2 + 104s + 96} e^{-0.07s} \quad (6.88)$$

sistemini kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini ve  $K_p - K_i$  parametre uzayındaki  $P$ -bölgelerini belirleyelim.

$w=0$  için bulunan  $K_i=0$  doğrusu ve  $w_{\max}=100$  için parametre uzayındaki  $K_p-K_i$  eğrisi yardımıyla oluşturulan  $P$ -bölgeleri ile bunlar içinde kararsız kutup sayısının sıfır olduğu gölgeli bölge de dahil, Şekil 6.8’de verilmişken;  $w_{\max}=450$  için olanı ise Şekil 6.9’da gösterilmiştir. Şekil 6.9’dan da görüldüğü gibi frekans yükseldikçe, eğri orijin etrafında spiraller çizer ve bu spirallerin dışında kalan  $P$ -bölgeleri için zaman gecikmesinden dolayı sonsuz sayıda kararsız kutup vardır.



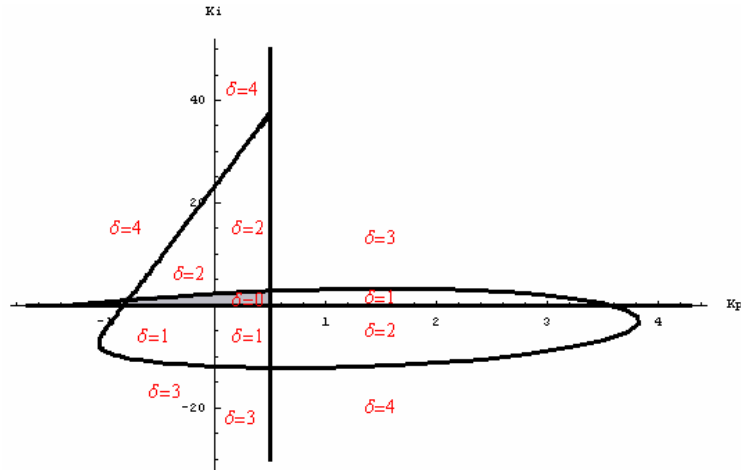
**Şekil 6.8 :** Örnek 6.5’de  $w_{\max}=100$  İçin  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları.



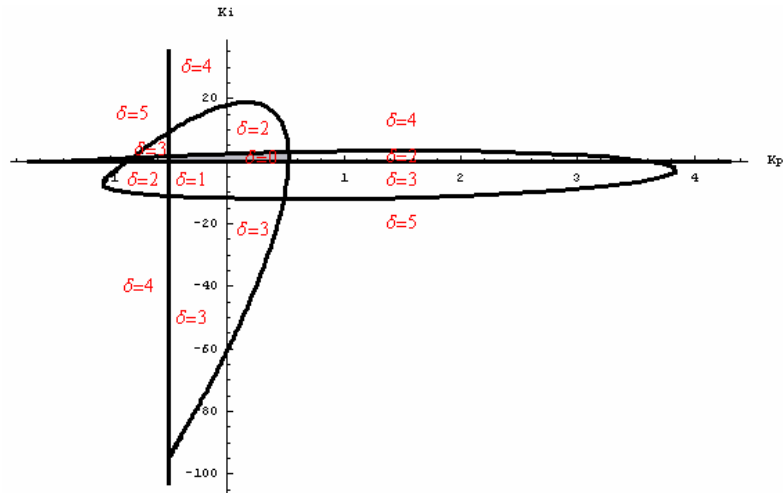
**Şekil 6.9 :** Örnek 6.5’de  $w_{\max}=450$  İçin  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları.

(6.88)’de verilen zaman gecikmeli sistemin Padé eşdeğerleri bulunursa;  $w \rightarrow \infty$  için Uyarı 6.2’den hareketle Şekil 6.8 ve Şekil 6.9’da olmayan sonsuz kök sınırlarının var olduğu görülür. Sistemin 1., 2. ve 3. derecelerden Padé eş değerleri için sırasıyla  $K_p=0.5$ ,  $K_p=-0.5$  ve  $K_p=0.5$ ’de olan sonsuz kök sınırları ve  $P$ -bölgelerindeki

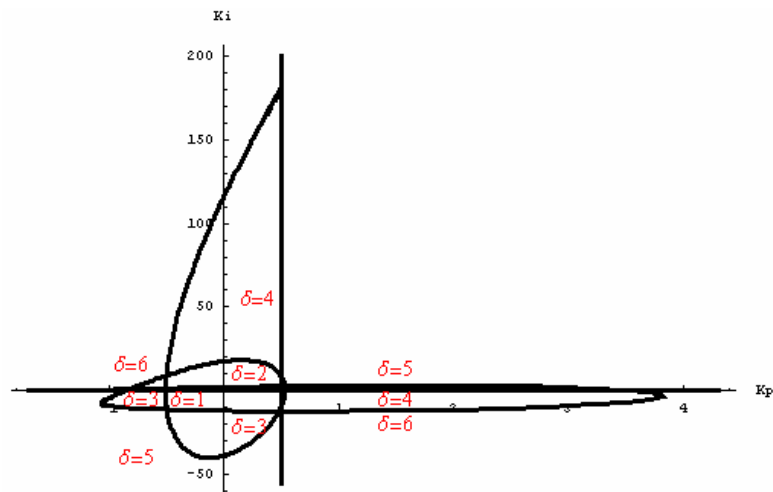
kararsız kutup sayıları,  $w_{\max} = 100$  için Şekil 6.10, Şekil 6.11 ve Şekil 6.12’de gösterilmiştir.



Şekil 6.10 : Örnek 6.5’de 1. Dereceden Padé Yaklaşımıyla Bulunan  $P$ -bölgeleri.



Şekil 6.11 : Örnek 6.5’de 2. Dereceden Padé Yaklaşımıyla Bulunan  $P$ -bölgeleri.



Şekil 6.12 : Örnek 6.5’de 3. Dereceden Padé Yaklaşımıyla Bulunan  $P$ -bölgeleri.



### 6.3 Padé Yaklaşımı Kullanılarak Zaman Gecikmeli Birinci Mertebeden Sistemler İçin Kutup Atama Tabanlı Bir PI Kontrolör Katsayı Ayarlama

Bu bölümde, Padé yaklaşımı kullanarak birinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için PI kontrolör tasarlamada kutup atamaya dayalı bir yöntem önerilmiştir (Bayhan ve diğ., 2007). Önerilen yöntemin en önemli özelliği, birim basamak yanıtının genelde aşısız olmasıdır. Örnek birkaç sistem için simülasyon sonuçları verilerek bu bölümde önerilen formüllerin başarımı, literatürde iyi bilinen bazı PI kontrolör tasarım yöntemleri ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca yöntem, İTÜ kontrol laboratuvarında yer alan PT326 sıcaklık kontrol deney seti üzerinde yapılan deneysel çalışmalarla da test edilmiş ve elde edilen sonuçlar verilmiştir. Birinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için literatürde yer alan yöntemlerin başlıcaları şunlardır: Ziegler-Nichols basamak cevabı (ZN) (Ziegler ve Nichols, 1942); Cohen-Coon (CC) (Cohen ve Coon, 1953); iç model kontrol (IMC-PI) (Ho ve diğ., 1995b); referans girişin veya bozucu etkilerin değişimine bağlı hatanın mutlak değerinin integralinin en küçüklenmesine dayalı yöntemler (IAE-setpoint, IAE-load) (Smith ve Corripio, 1985; Shinskey, 1985); benzer durum için hatanın zaman ağırlıklı integralinin en küçüklenmesine dayalı yöntemler (ITAE-setpoint, ITAE load) (Smith ve Corripio, 1985); hatanın karesinin en küçüklenmesine yönelik yöntemler (ISE-setpoint, ISE-load) (Smith ve Corripio, 1985); ve hatanın karesinin zaman ağırlıklı integralinin en küçüklenmesine dayalı yöntemler (ITSE-setpoint, ITSE-load) (Zhuang ve Atherton, 1993). Bu yöntemlerin çoğu belli bir başarıım ölçütünü göz önüne alarak sistem için olabilecek en iyi PI katsayılarını bulan zaman tanım bölgesi kriterlerine dayalı yöntemlerdir. Ziegler-Nichols basamak yanıtı PI kontrolör tasarlamak için ilk bilinen yöntemlerden birisi olup; açık çevrim sistemin basamak cevabını kullanır. Cohen-Coon, baskın kutuplara dayalı bir tasarım yöntemidir. Bu ayarlama yönteminin en önemli özelliği, hatanın integralinin minimize edilmesidir. Böylece bu yöntem, iyi bir bozucu reddi verir. IMC-PI ise, PI kontrolör tarafından getirilen sıfır ile kutup silme fikri üzerine kurulu bir yöntem olmakla birlikte kapalı çevrim sistem cevabını ayarlamak için bir  $\tau_{cl}$  serbest parametresini kullanır. Diğer PI kontrolör katsayı ayarlama yöntemlerinin temel dayanağı, bir integral maliyet fonksiyonunu en küçük yapabilecek PI kontrolör parametrelerini seçmektir. Bu amaçla aşağıdaki maliyet fonksiyonları kullanılır.

$$IAE = \int_0^T |r(t) - y(t)| dt, \quad ITAE = \int_0^T t |r(t) - y(t)| dt \quad (6.89)$$

$$ISE = \int_0^T |r(t) - y(t)|^2 dt, \quad ITSE = \int_0^T t |r(t) - y(t)|^2 dt \quad (6.90)$$

Burada  $r(t)$ , referans girişini gösterirken;  $y(t)$  sistem çıkışını gösterir. Zaman gecikmeli sistem  $G(s)$  sisteminin zaman gecikmesinden bağımsız kısmının,

$$G_0(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (6.91)$$

biçiminde birinci mertebeden bir sistem olduğunu kabul edelim. Burada  $K$  sürekli hal kazancını gösterirken;  $\tau$  ise zaman sabitini göstermektedir. (4.3) ile verilen zaman gecikmeli sistemin (4.20)'deki Padé eş değerindeki  $P_d(s)$  fonksiyonunu

$$P_d(s) \triangleq \frac{P_{dN}(s)}{P_{dD}(s)} \quad (6.92)$$

olarak yazabiliriz. (6.92)'yi (4.20)'de yazarsak

$$\hat{G}(s) \triangleq G_0(s) P_d(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{P_{dN}(s)}{P_{dD}(s)} \triangleq \frac{\hat{N}(s)}{\hat{D}(s)} \quad (6.93)$$

bulunur. Şekil 6.4 ile verilen sistemin Padé yaklaşımıyla bulunan kapalı çevrim sistem transfer fonksiyonu

$$\hat{G}_c(s) = \frac{\hat{G}(s)F(s)}{1 + \hat{G}(s)F(s)} \quad (6.94)$$

olarak bulunur ve kapalı çevrim karakteristik polinomu ise

$$\hat{p}_c(s) = 1 + \hat{G}(s)F(s) = 0 \quad (6.95)$$

biçiminde olacaktır. (6.94)'de (6.1) ve (6.93) yazılırsa,

$$\hat{G}_c(s) = \frac{N_F(s) \hat{N}(s)}{N_F(s) \hat{N}(s) + D_F(s) \hat{D}(s)} \quad (6.96)$$

elde edilir ve kapalı çevrim sistem karakteristik polinomu, (6.95)'e özdeş olarak

$$\hat{p}_c(s) = N_F(s) \hat{N}(s) + D_F(s) \hat{D}(s) = 0 \quad (6.97)$$

biçiminde olur.  $\hat{p}_c(s)$  karakteristik polinomu, (6.1) kullanılarak kontrolör parametreleri cinsinden

$$\hat{p}_c(s) = s\hat{D}(s) + K_p s\hat{N}(s) + K_i \hat{N}(s) \quad (6.98)$$

olarak yazılabilir. Tasarımda ikinci mertebeden Padé yaklaşımının kullanılması yeterli görülmüştür.  $\hat{D}(s)$  ve  $\hat{N}(s)$  polinomlarının ikinci mertebeden Padé yaklaşımları,

$$\hat{D}(s) = (1 + \tau s) \left( 1 + \frac{L}{2} s + \frac{L^2}{12} s^2 \right) \quad (6.99)$$

$$\hat{N}(s) = K \left( 1 - \frac{L}{2} s + \frac{L^2}{12} s^2 \right) \quad (6.100)$$

biçimindedir. (6.99) ve (6.100)'ün (6.98)'de yazılmasıyla karakteristik polinomu, monik polinom biçiminde

$$\begin{aligned} \hat{P}_c(s) = \frac{1}{L^2 \tau} [12 K K_i + s (12 + 12 K K_p - 6 K K_i L) + s^2 (6L - 6 K K_p L + K K_i L^2 + 12\tau) + \\ s^3 (L^2 + K K_p L^2 + 6L\tau) + s^4 L^2 \tau] \end{aligned} \quad (6.101)$$

olarak düzenleyelim. Dikkat edilirse kapalı çevrim karakteristik polinomun mertebesi dördtür. (6.101)'de verilen karakteristik polinomun 2 kutubu (örneğin  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$ ),  $K_p$  ve  $K_i$  serbest parametreleri kullanılarak her zaman keyfi olarak atanabilir (Söylemez, 1999). Atanan kutuplara ilişkin polinom,

$$P_\lambda(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 \quad (6.102)$$

biçimindedir. Burada  $\xi$  ve  $w_n$  sırasıyla sönüm oranı ve doğal frekansı göstermektedir. Kapalı çevrim sistemin kalan iki kutubunun atanan iki kutubunun oldukça solunda olması kabulü altında; kapalı çevrim sistemin zaman tanım bölgesi davranışı (6.102) ile tanımlanan sönüm oranı ve doğal frekans yardımıyla belirlenebilir. Pek çok pratik sistemde küçük yerleşme zamanı arzu edilirken; aşım ise istenmez. Böylece  $\xi=1$  olarak seçmek çoğu pratik sistem için anlamlı olur.  $a_i \in \mathbb{R}^+$  kapalı çevrim sistemin yerleşme zamanı ve hızını ayarlamakta kullanılan bir parametre olmak üzere

$$w_n = a / \tau \quad (6.103)$$

olarak ifade edelim. Burada açık çevrim sistem dinamiğinden çok uzaklaşmamak için  $a$ 'nın 0.5 ile 4 arasında seçilebileceği öngörülmüştür (Bayhan ve diğ., 2007). O halde kapalı çevrim karakteristik polinomu

$$\hat{P}_c(s) = P_\lambda(s) P_e(s) \quad (6.104)$$

olarak yazılabilir. (6.103)'ü (6.102)'de yazarsak

$$P_\lambda(s) = s^2 + \frac{2a}{\tau}s + \frac{a^2}{\tau^2} = \left(s + \frac{a}{\tau}\right)^2 \quad (6.105)$$

elde ederiz.  $P_e(s)$ , kapalı çevrim karakteristik polinomunun kalan kutuplarının oluşturduğu bir polinom olup *rezidü polinomu* adını alır ve

$$P_e(s) = s^2 + c_1 s + c_0 \quad (6.106)$$

biçimindedir. (6.105) ve (6.106)'yı (6.104)'de yazarsak

$$P_\lambda(s)P_e(s) = \left[\frac{a^2 c_0}{\tau^2} + s\left(\frac{2ac_0}{\tau} + \frac{a^2 c_1}{\tau^2}\right) + s^2\left(\frac{a^2}{\tau^2} + c_0 + \frac{2ac_1}{\tau}\right) + s^3\left(\frac{2a}{\tau} + c_1\right) + s^4\right] \quad (6.107)$$

buluruz. (6.101) ve (6.107) eşitlenirse, 4 tane denklem ve 4 tane bilinmeyen ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $c_0$  ve  $c_1$ ) olduğu görülür. Bu denklemler çözülürse, bilinenler cinsinden sırasıyla

$$K_p = \frac{a^4(2a-1)L^4 + 12(a-1)a^3\tau L^3 - 12a^2(2a-1)\tau^2 L^2 - 144(a-1)a\tau^3 L + 144(2a-1)\tau^4}{K\Delta} \quad (6.108)$$

$$K_i = \frac{a^2(a^4 L^4 + 12a^3\tau L^3) + a^2(-12a^2\tau(L+\tau)L^2) + a^2(-144a\tau^3 L + 144\tau^3(L+\tau))}{\tau K\Delta} \quad (6.109)$$

$$c_0 = \frac{12(a^4 L^4 + 12a^3\tau L^3 - 12a^2\tau(L+\tau)L^2) + 12(-144a\tau^3 L + 144\tau^3(L+\tau))}{L^2\Delta} \quad (6.110)$$

$$c_1 = \frac{-6a^4 L^4 - 72(a-1)a^2\tau L^3 - 72(a-4)a\tau^2 L^2 + 864a\tau^3 L + 864\tau^4}{L\Delta} \quad (6.111)$$

olarak bulunur. Burada

$$\Delta \triangleq (a^2 L^2 + 6a\tau L + 12\tau^2)^2 \quad (6.112)$$

biçimindedir. (6.108) ve (6.109) formülleri karmaşık görünmesine rağmen; kontrolör parametrelerinin doğrudan hesabını verir. Dikkat edilirse kararlılık için  $a > 0$  ve  $p_e(s)$ 'nin Hurwitz olması gerekir.  $p_e(s)$  ikinci dereceden polinom olduğu için; Hurwitz olmasının gerek ve yeter koşulları katsayıları olan  $c_0$  ve  $c_1$ 'in pozitif olmasıdır. Yukarıda verilenler uyarınca baskın kutup atama yaklaşımı için gerek koşul,  $p_e(s)$  rezidü polinomunun köklerinin baskın kutuplar olan  $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/\tau$

kutuplarının solunda olmasıdır. Bu amaçla aşağıda verilen polinomun Hurwitz olması gerekir.

$$P_e(s - \frac{a}{\tau}) = (s - \frac{a}{\tau})^2 + c_1(s - \frac{a}{\tau}) + c_0 = s^2 + (c_1 - 2\frac{a}{\tau})s + c_0 - c_1\frac{a}{\tau} + (\frac{a}{\tau})^2 \quad (6.113)$$

Bu nedenle  $a$  'nın değeri seçilirken aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

$$c_1 > 2\frac{a}{\tau}, \quad c_0 + (\frac{a}{\tau})^2 > c_1\frac{a}{\tau} \quad (6.114)$$

Burada  $c_0$  ve  $c_1$ , (6.110) ve (6.111)'de tanımlandığı gibidir. Ayrıca PI kontrolörün  $s = -K_i / K_p$  'de eklediği sıfırın  $a / \tau$  noktasının solunda olması amacıyla

$$\frac{K_i}{K_p} \tau > a \quad (6.115)$$

koşulu sağlanmalıdır. Karşılaştırma amacıyla literatürde iyi bilinen bazı PI kontrolör katsayılarının doğrudan belirlenmesine yönelik ayarlama yöntemleri, Tablo 6.1'de verilmiştir (Ho ve diğ., 1995). Yöntemin anlaşılabilirliği açısından üç sayısal örnek üzerinde çözüm yapılacaktır.

**Tablo 6.1 :** Bazı İyi Bilinen PI Kontrolör Ayarlama Formülleri.

| <i>Formüller</i>        | $K_p$                                                    | $T_i$                                                                                |
|-------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Ziegler-Nichols (ZN)    | $0.9\tau / KL$                                           | $3L$                                                                                 |
| Cohen-Coon (CC)         | $\frac{\tau}{KL} \left( 0.9 + \frac{L}{12\tau} \right)$  | $\frac{1}{K} \left( \frac{3.33L / \tau + 0.33(L / \tau)^2}{1 + 2.2L / \tau} \right)$ |
| IMC-PI (IMC)            | $\frac{\tau}{K(\tau_{cl} + L)}$                          | $\tau$                                                                               |
| ISE-load (ISE)          | $\frac{1.305}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.959}$ | $\frac{\tau}{0.492} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{0.739}$                           |
| IAE-load (IAE)          | $\frac{0.984}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.986}$ | $\frac{\tau}{0.608} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{0.707}$                           |
| IAE-setpoint (IAESPC)   | $\frac{0.758}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.861}$ | $\frac{\tau}{1.02 - 0.323(L / \tau)}$                                                |
| ITSE-load (ITSE)        | $\frac{1.279}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.945}$ | $\frac{\tau}{0.535} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.586}$                          |
| ITSE-setpoint (ITSESPC) | $\frac{0.712}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.921}$ | $\frac{\tau}{0.968 - 0.247(L / \tau)}$                                               |
| ITAE-load (ITAE)        | $\frac{0.859}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.977}$ | $\frac{\tau}{0.674} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{0.68}$                            |
| ITAE-setpoint (ITAESPC) | $\frac{0.586}{K} \left( \frac{L}{\tau} \right)^{-0.916}$ | $\frac{\tau}{1.03 - 0.165(L / \tau)}$                                                |

### 6.3.1 Simülasyon sonuçları

Bu bölümde önerilen kutup atamaya dayalı ayarlama yöntemi (PA) (pole assignment) ile Tablo 6.1’de görülen PI kontrolör ayarlama formülleri, iki örnek üzerinde bilgisayar simülasyonlarıyla karşılaştırılmıştır.

#### 6.3.1.1 Örnek 6.6

Örnek 6.3’de verilen birinci mertebeden zaman gecikmeli bir sistemi düşünelim. Bu bölümde önerilen yöntem için serbest parametre, yapılan deneme yanıtları sonucu en uygun olarak  $a = 0.85$  seçilmiştir. Tablo 6.1’den IMC-PI için optimal sonuçlara yakın olarak  $\tau_{cl} = 0.06$  seçelim. Zaman tanım bölgesinde simülasyon sonuçları, Tablo 6.2’de verilmiştir. Tablo 6.2’den görüldüğü gibi PA ve ZN hariç diğerleri için basamak yanıtlarında bir miktar aşım vardır. PA için gecikme ve yükselme zamanları genelde diğerlerinden büyükken; yerleşme zamanı küçüktür. Tablo 6.1’deki formüllerden bulunan PI kontrolör katsayıları Tablo 6.3’de verilmiştir.

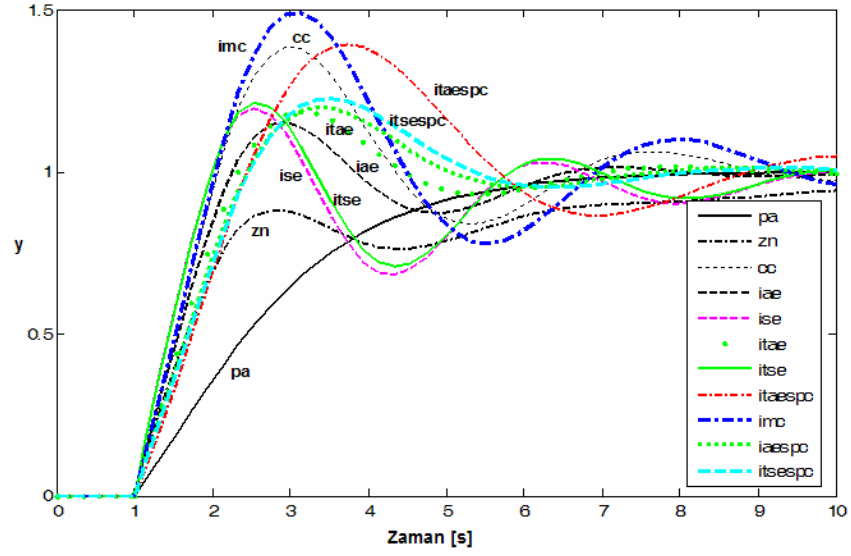
**Tablo 6.2 :** Örnek 6.6 İçin Zaman Tanım Bölgesi Özellikleri.

|         | Aşım     | Yerleşme Zamanı | Gecikme Zamanı | Yükselme Zamanı |
|---------|----------|-----------------|----------------|-----------------|
| PA      | 0        | 6.968           | 2.44847        | 3.55304         |
| ZN      | 0        | 14.8902         | 1.67084        | 6.09366         |
| CC      | 0.385003 | 10.4116         | 1.52124        | 0.86928         |
| IMC     | 0.488472 | 1.2919          | 1.52795        | 0.85714         |
| ISE     | 0.188593 | 12.3218         | 1.43686        | 0.81332         |
| IAE     | 0.146076 | 6.26416         | 1.55743        | 1.01991         |
| IAESPC  | 0.196914 | 7.05629         | 1.97159        | 1.16463         |
| ITSE    | 0.206331 | 12.0776         | 1.44665        | 0.82287         |
| ITSESPC | 0.223533 | 7.47669         | 1.69999        | 1.18129         |
| ITAE    | 0.179998 | 6.58986         | 1.61488        | 1.08624         |
| ITAESPC | 0.392946 | 11.3851         | 1.75155        | 1.16353         |

**Tablo 6.3 :** Örnek 6.6 İçin PI Kontrolör Parametreleri.

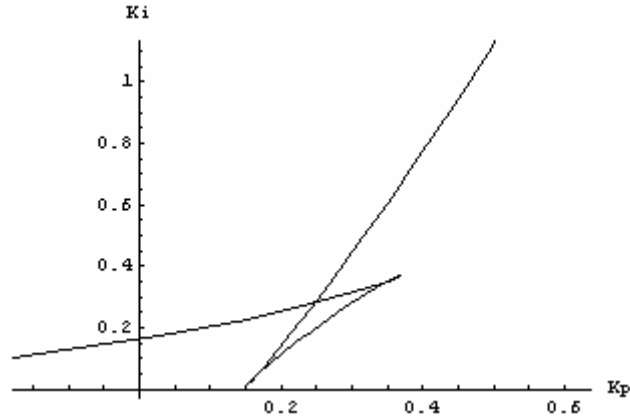
|         | $K_p$    | $K_i$    |
|---------|----------|----------|
| PA      | 0.353704 | 0.355179 |
| ZN      | 0.9      | 0.33333  |
| CC      | 0.98333  | 0.878788 |
| IMC     | 0.94339  | 1        |
| ISE     | 1.305    | 0.492    |
| IAE     | 0.984    | 0.608    |
| IAESPC  | 0.758    | 0.697    |
| ITSE    | 1.279    | 0.535    |
| ITSESPC | 0.712    | 0.721    |
| ITAE    | 0.859    | 0.674    |
| ITAESPC | 0.586    | 0.865    |

Verilen sistem için simulink model kullanılarak bulunan kapalı çevrim basamak yanıtları, Şekil 6.13’de görülmektedir.



**Şekil 6.13 :** Örnek 6.6 İçin PI Ayarlama Yöntemlerine İlişkin Birim Basamak Cevapları.

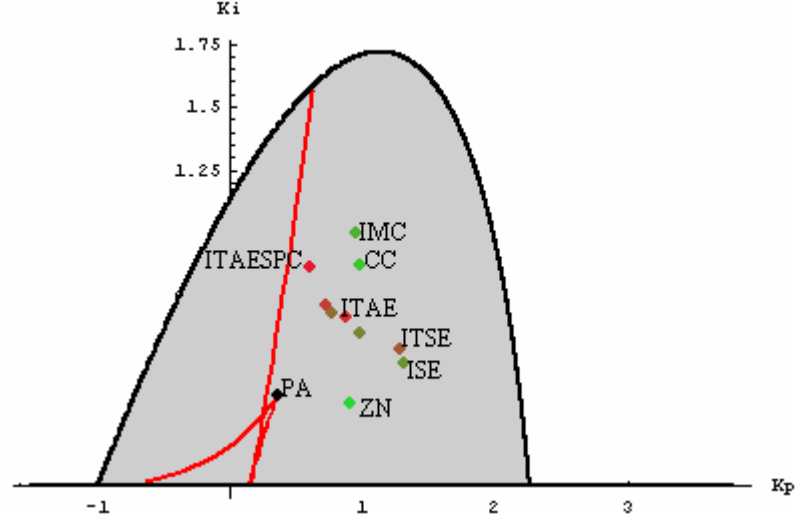
(6.108) ve (6.109)’dan çeşitli  $a$  değerleri için  $K_p - K_i$  düzleminde elde edilen eğri, Şekil 6.14’de verilmiştir. Bu eğri üzerinde, kapalı çevrim sistem iki adet çakışık reel köke sahiptir.



**Şekil 6.14 :** Örnek 6.6’da Çeşitli  $a$  Değerleri İçin  $K_p - K_i$  Düzlemindeki Eğri.

Şekil 6.5’deki  $\delta = 0$  olan kararlı kılan PI kontrolörlerin oluşturduğu bölge ile Şekil 6.14’deki eğri birlikte Şekil 6.15’de gösterilmiştir. Aşım yapmayan PI kontrolörler içinde en uygun olan  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri, PA ile gösterilen uçtaki noktadır. Bu nokta, burada önerilen yöntemle  $a$ ’yı optimum aldığımız  $K_p$  ve  $K_i$

değerleridir. Diğer noktalar ise, Tablo 6.1’de verilen PI kontrolör katsayılarını ayarlamaya yönelik olan diğer yöntemlere ilişkindir. Bu noktaların koordinatları olan  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri, Tablo 6.3’de verilen değerlerdir.



**Şekil 6.15 :** Örnek 6.6 İçin Kararlı Yapan PI Kontrolörler Bölgesinde  $\xi = 1$ ’i Sağlayan  $K_p - K_i$  Eğrisi.

### 6.3.1.2 Örnek 6.7

Örnek 6.4’te verilen birinci mertebeden zaman gecikmeli bir sistemi ele alalım. Sistem hızını arttırmak için  $a = 0.3$  olarak seçilmiştir. Simulasyon sonuçları, Tablo 6.4 ve Tablo 6.5’de verilmiştir. Tablo 6.4’e dikkat edilirse; CC, IMC, IAESPC, ITSE ve ITSESPC ile kapalı çevrimde sistem kararsız olduğu gözlenmektedir. Basamak cevapları için simulasyon sonuçları, Şekil 6.16’da verilmiştir.

**Tablo 6.4 :** Örnek 6.7 İçin Zaman Tanım Bölgesi Özellikleri.

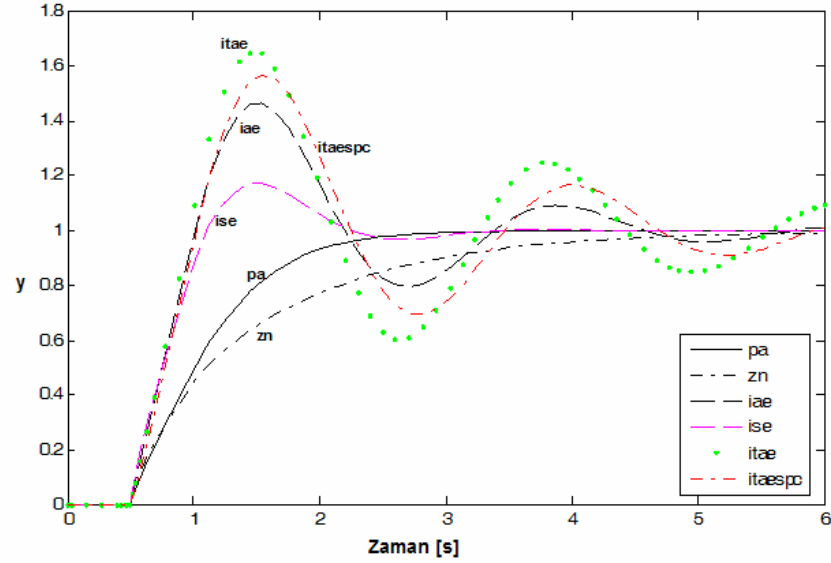
|         | Aşım     | Yerleşme Zamanı | Gecikme Zamanı | Yükselme Zamanı |
|---------|----------|-----------------|----------------|-----------------|
| PA      | 0        | 2.52977         | 1.01191        | 1.26750         |
| ZN      | 0        | 4.83355         | 1.10845        | 2.41678         |
| CC      | $\infty$ | $\infty$        | $\infty$       | $\infty$        |
| IMC     | $\infty$ | $\infty$        | $\infty$       | $\infty$        |
| ISE     | 0.167544 | 2.9570          | 0.754868       | 0.510187        |
| IAE     | 0.463710 | 5.4673          | 0.757844       | 0.421024        |
| IAESPC  | $\infty$ | $\infty$        | $\infty$       | $\infty$        |
| ITSE    | $\infty$ | $\infty$        | $\infty$       | $\infty$        |
| ITSESPC | $\infty$ | $\infty$        | $\infty$       | $\infty$        |
| ITAE    | 0.652645 | 9.66782         | 0.740829       | 0.388894        |
| ITAESPC | 0.568035 | 7.91538         | 0.788447       | 0.417413        |



Tablo 6.4’den görüldüğü gibi önerilen yöntem (PA), çıkışta aşısız basamak yanıtı verir. Aşımı, sonsuz olarak veren Tablo 6.4’deki CC, IMC, IAESPC, ITSE ve ITSESPC yöntemleri için basamak yanıtları Şekil 6.16’da gösterilmemiştir.

**Tablo 6.5 :** Örnek 6.7 İçin PI Kontrolör Parametreleri.

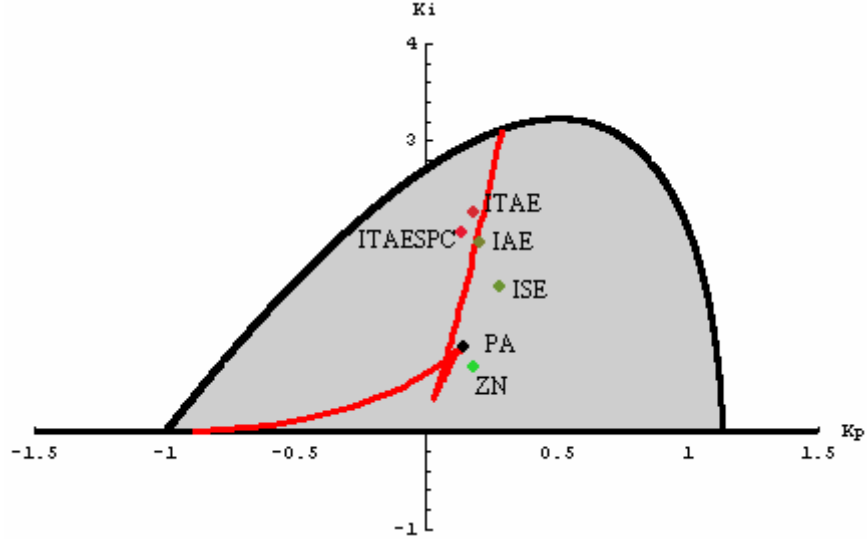
|         | $K_p$    | $K_i$    |
|---------|----------|----------|
| PA      | 0.136941 | 0.885016 |
| ZN      | 0.18     | 0.666667 |
| CC      | 0.263333 | 4.84444  |
| IMC     | 0.178571 | 10       |
| ISE     | 0.278804 | 1.4977   |
| IAE     | 0.201285 | 1.94864  |
| IAESPC  | 0.189608 | -5.95    |
| ITSE    | 0.279476 | 13.7388  |
| ITSESPC | 0.161707 | -2.67    |
| ITAE    | 0.178279 | 2.25611  |
| ITAESPC | 0.134166 | 2.05     |



**Şekil 6.16 :** Örnek 6.7 İçin PI Ayarlama Metodlarına İlişkin Birim Basamak Cevapları.

Şekil 6.7’deki  $\delta = 0$  olan gölgeli bölge içinde kalan ve çeşitli  $a$  değerleri için (6.108) ve (6.109)’dan bulunan  $K_p - K_i$  eğrisi, Şekil 6.17’de gösterilmiştir. Aşım yapmayan PI kontrolörler içinde en uygun olan  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri, Şekil 6.17’de PA ile gösterilen uçtaki noktadır. CC, IMC, IAESPC, ITSE ve ITSESPC için kapalı çevrimde sistem kararsız olduğundan, Tablo 6.1’de verilen yöntemler içinden bu beş

yöntemin dışında kalan yöntemlere ilişkin olan noktalarda PA noktasına ilave olarak Şekil 6.17’de gösterilmiştir.



**Şekil 6.17 :** Örnek 6.7 İçin Kararlı Yapan PI Kontrolörler Bölgesinde  $\xi = 1$  'i Sağlayan  $K_p - K_i$  Eğrisi.

### 6.3.2 Deney sonuçları

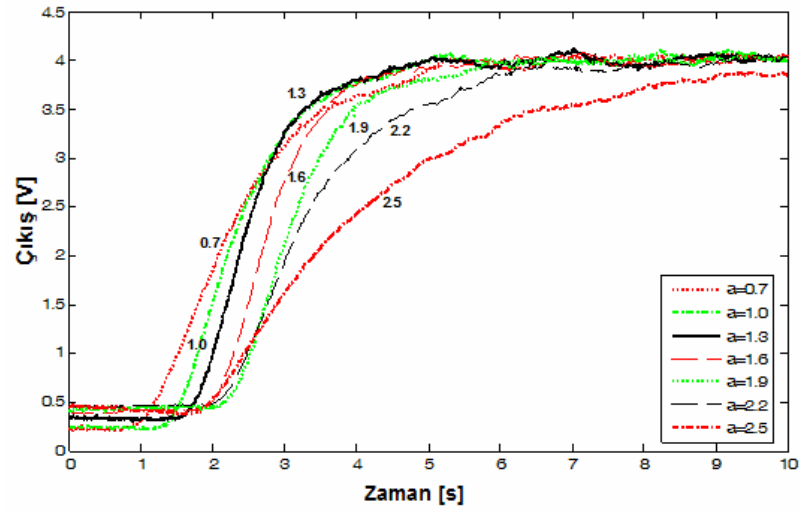
Bu bölümde önerilen yöntem, İTÜ kontrol laboratuvarında bulunan PT326 sıcaklık kontrol deney seti ve İTÜ Rektörlüğü Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenen 31685 proje nolu doktora tez projesi kapsamında alınan DAQ kartı kullanılarak test edilmiştir. Bazı testlerden sonra (Bayhan ve diğ., 2007) deney setinin transfer fonksiyonun

$$G(s) = \frac{0.875 e^{-0.43s}}{0.62s + 1} \quad (6.116)$$

birinci dereceden zaman gecikmeli sistem olduğu görülmüştür. Serbest parametre olan  $a$  'nın farklı değerleri için bulunan basamak cevapları, Tablo 6.6 ve Şekil 6.18’de verilmişken; PI kontrolör katsayılarını ayarlamaya yönelik verilen yöntemler için elde edilen basamak yanıtları ise Şekil 6.19’da verilmiştir. Bu sistem için en iyi seçimin  $a = 1.3$  olduğu, Tablo 6.6 ve Şekil 6.18’den görülmektedir.

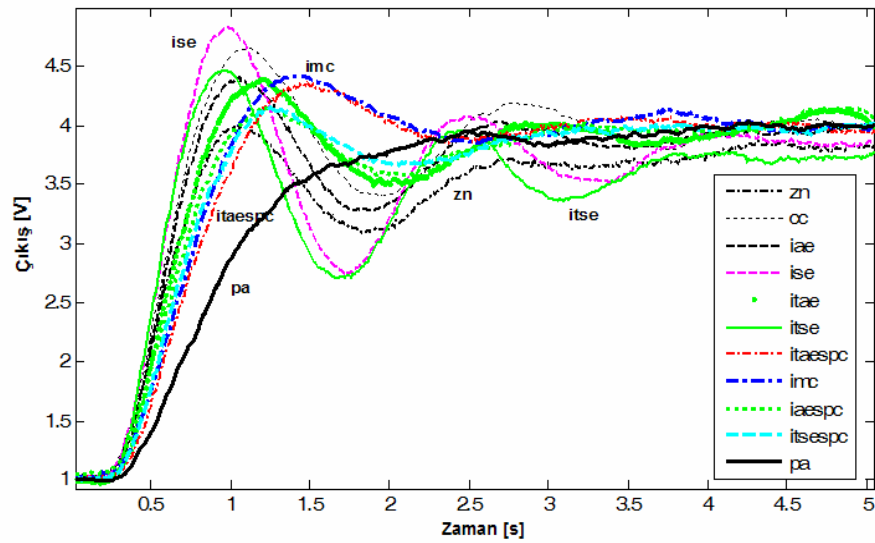
**Tablo 6.6 :** Farklı  $a$  Değerleri İçin Zaman Tanım Bölgesi Özellikleri.

| $a$ | Aşım | Yerleşme Zamanı | Gecikme Zamanı | Yükselme Zamanı |
|-----|------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0.7 | 0    | 4.8717          | 1.39983        | 2.58484         |
| 1   | 0    | 3.15309         | 1.07205        | 1.6008          |
| 1.3 | 0    | 2.63601         | 1.01473        | 1.3695          |
| 1.6 | 0    | 3.2768          | 1.06758        | 1.61063         |
| 1.9 | 0    | 5.43093         | 1.23087        | 2.65608         |
| 2.2 | 0    | 11.2958         | 1.77701        | 5.90266         |
| 2.5 | 0    | 62.0064         | 7.98102        | 34.2433         |



**Şekil 6.18 :** PT326 Deney Setine İlişkin Farklı  $a$  Değerleri İçin Basamak Cevapları.

Bu sistem için zaman tanım bölgesi özellikleri ve PI kontrolör katsayı parametre değerleri sırasıyla Tablo 6.7 ve Tablo 6.8’de verilmiştir.



**Şekil 6.19 :** PT326 Deney Setinde Farklı PI Katsayı Ayarlama Yöntemlerine İlişkin Basamak Cevapları ( $a = 1.3$  ve  $\tau_{cl} = 0.3$ ).

Şekil 6.19 ve Tablo 6.7’den bulunan sonuçlar karşılaştırılırsa; PA için basamak yanıtında hiç aşım olmadığı ve yerleşme zamanında ITAESP ve IMC’den hemen sonra olduğu görülür.

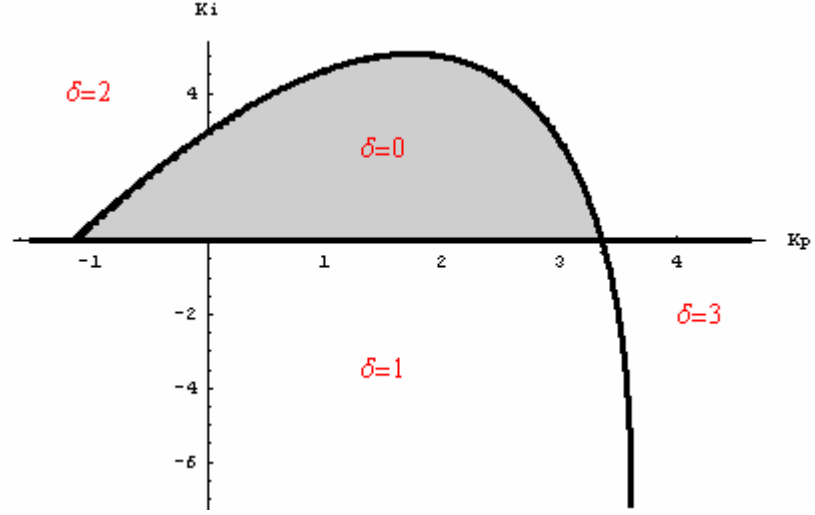
**Tablo 6.7 :** PT326 Deney Seti İçin Zaman Tanım Bölgesi Özellikleri.

|        | Aşım     | Yerleşme Zamanı | Gecikme Zamanı | Yükselme Zamanı |
|--------|----------|-----------------|----------------|-----------------|
| PA     | 0        | 2.63601         | 1.014730       | 1.369500        |
| ZN     | 0        | 8.73308         | 0.701337       | 0.586048        |
| CC     | 0.205814 | 4.20087         | 0.669370       | 0.420087        |
| IMC    | 0.123508 | 2.52361         | 0.791232       | 0.638538        |
| ISE    | 0.239953 | 7.25167         | 0.614278       | 0.343038        |
| IAE    | 0.112110 | 4.58730         | 0.670459       | 0.443612        |
| IAESP  | 0.012682 | 3.42157         | 0.749056       | 0.624841        |
| ITSE   | 0.147242 | 11.7985         | 0.622339       | 0.375996        |
| ITSESP | 0.007180 | 3.39640         | 0.760554       | 0.652436        |
| ITAE   | 0.088757 | 3.06532         | 0.699875       | 0.497988        |
| ITAESP | 0.077215 | 2.45982         | 0.809115       | 0.698166        |

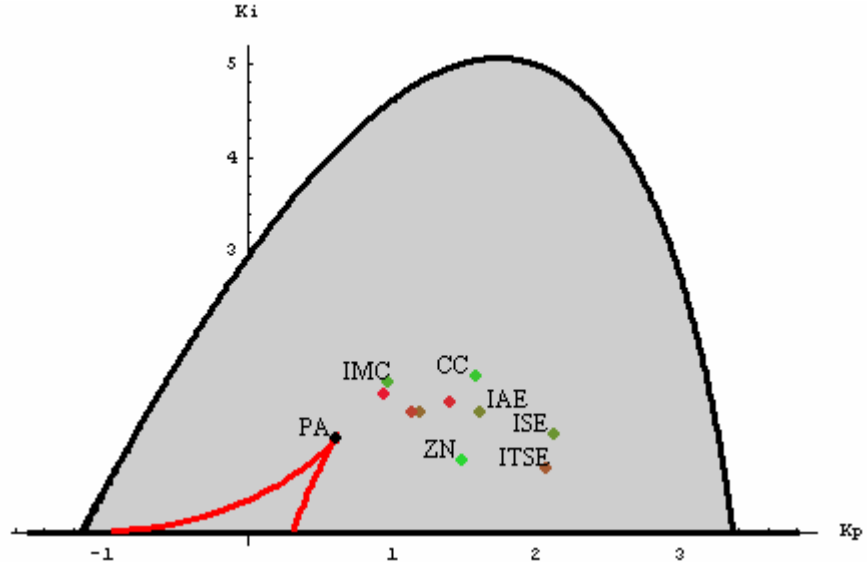
**Tablo 6.8 :** PT326 Deney Seti İçin PI Kontrolör Parametreleri.

|        | $K_p$   | $K_i$   |
|--------|---------|---------|
| PA     | 0.61792 | 1.00357 |
| ZN     | 1.48306 | 0.77519 |
| CC     | 1.57829 | 1.65796 |
| IMC    | 0.97065 | 1.61290 |
| ISE    | 2.11841 | 1.03996 |
| IAE    | 1.61319 | 1.27020 |
| IAESP  | 1.18712 | 1.28384 |
| ITSE   | 2.06559 | 0.69636 |
| ITSESP | 1.13983 | 1.28499 |
| ITAE   | 1.40363 | 1.39424 |
| ITAESP | 0.93640 | 1.47672 |

Bu sistemde  $w=5.3$  için kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri ve bunların içinden sistemi kapalı çevrimde kararlı kılan PI kontrolörlerinin bölgesi olan gölgelendirilmiş bölge, Şekil 6.20’de gösterilmiştir. Çeşitli  $a$  değerleri için (6.108) ve (6.109)’dan bulunan  $K_p - K_i$  eğrisi ve bunun kırılma noktası olan PA noktası, Şekil 6.21’de gösterilmiştir. Bu nokta, aşım yapmayan PI kontrolörler içinde en uygun olan  $K_p$  ve  $K_i$  değerlerine ilişkindir. Diğer noktalar ise, Tablo 6.1’de verilen PI kontrolör katsayılarını ayarlamaya yönelik olan yöntemlere ilişkindir. Bu noktaların koordinatları olan  $K_p$  ve  $K_i$  değerleri, Tablo 6.8’de verilen değerlerdir.



Şekil 6.20 : PT326 Deney Seti İçin  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ( $w_{\max} = 5.3$ ).



Şekil 6.21 : PT326 Deney Seti İçin Kararlı Yapan PI Kontrolörler Bölgesinde  $\xi = 1$ 'i Sağlayan  $K_p - K_i$  Eğrisi.

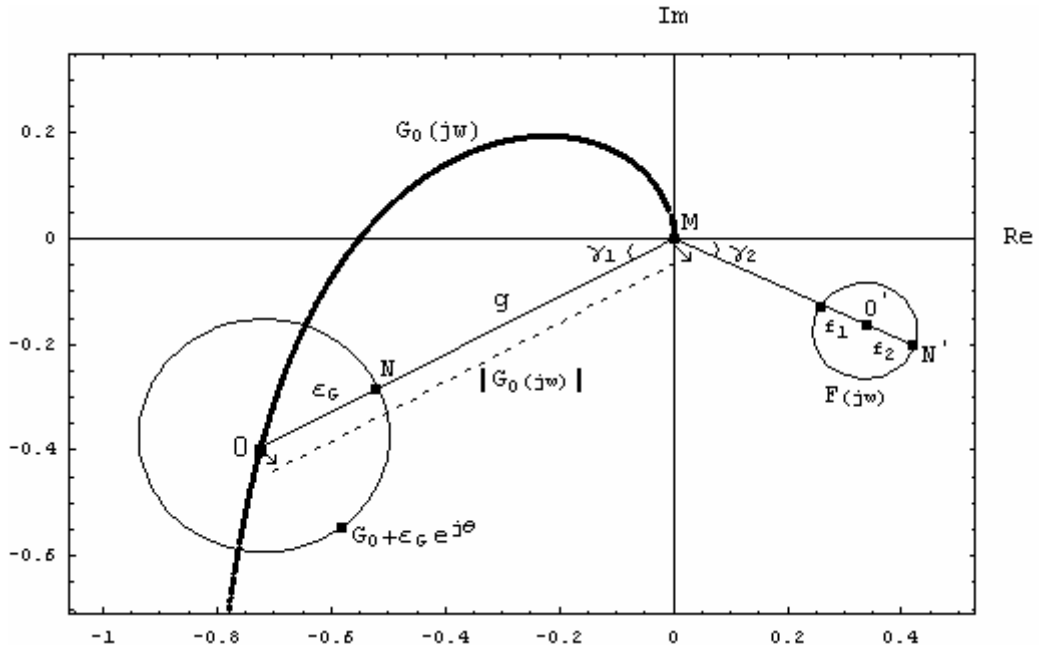
#### 6.4 Yapısal Olmayan Belirsizlik İçeren Zaman Gecikmesiz Sistemlerde Dayanıklılığını Sağlayan PI Tipi Kontrolör Kümesinin Bulunması

Bu bölümde, sürekli zamanlı doğrusal zamanla değişmeyen tek girişli tek çıkışlı yapısal olmayan belirsizlik içeren Şekil 3.15'deki gibi bir kapalı çevrim sistem ele alınarak dayanıklı kararlı kılabilen tüm PI kontrolörlerin nasıl bulunabileceği gösterilmiş ve bu amaçla iki yöntem önerilmiştir. Şekil 3.15'de görülen oransal

kontrolör yerine (6.1)'de  $F(s)$  olarak verilen PI kontrolör kullanılmıştır. Burada ağırlık transfer fonksiyonu,  $W(s) \in RH_\infty$  olmak üzere

$$W(s) = \frac{a_{w_m} s^{w_m} + a_{w_{m-1}} s^{w_{m-1}} + \dots + a_{w_1} s + a_{w_0}}{s^{w_n} + b_{w_{n-1}} s^{w_{n-1}} + \dots + b_{w_1} s + b_{w_0}} \quad (6.117)$$

biçiminde olsun. Burada  $w_m \leq w_n$  olup;  $W(s)$  kararlıdır. Şekil 3.15'de görülen  $G_0(s)$ , (6.5)'de verilen sistemi gösterirken;  $\Delta$  birden küçük  $H_\infty$  normuna sahip tüm sistemleri gösteren yapısal olmayan belirsizlikleri içeren bloktur. Kontrol edilen sistem  $\hat{G}(s)$ 'nin yapısı (3.97)'de verildiği gibidir.  $\hat{G}(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi, yapısal olmayan belirsizlik içerdiğinden tek bir eğriden ziyade bir eğri ailesi tanımlar ve bu eğri ailesi, reel eksen tek noktalarda değil bölgeler biçimine keser.  $\hat{G}(j\omega)$  sisteminin verilen bir  $\omega^*$  için frekans cevabı, O merkezli ve  $\varepsilon_G(\omega) = |G_0(j\omega)W(j\omega)|$  yarı çaplı Şekil 6.22'deki gibi bir disk tanımlar (Skogestad ve Postlethwaite, 2005).  $\varepsilon_G(\omega)$  yarıçaplı diskin merkezinin orijine olan uzaklığı  $|G_0(j\omega)|$  genliğine eşittir.  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin O merkezli belirsizlik diskinin PI düzlemine iz düşürülmesiyle Şekil 6.22'de görülen  $F(j\omega)$ 'ye ilişkin O' merkezli eliptik belirsizlik diski elde edilir.



Şekil 6.22 :  $G_0(j\omega)$  ve  $F(j\omega)$  Etrafındaki Belirsizliklerin Grafik Gösterilimi.

$F(j\omega)$ 'ye ilişkin O' merkezli eliptik belirsizlik diskinin elde edilmesindeki kurgu, kapalı çevrim sistem karakteristik denklemi olan

$$1 + F(s) \overset{\Delta}{G}(s) = 0 \quad (6.118)$$

bağıntısından (3.97) yazılarak elde edilen

$$F(s) = -\frac{1}{\overset{\Delta}{G}(s)} = -\frac{1}{G_0(s)(1+W(s)\Delta)} \quad (6.119)$$

sistemi için ters Nyquist eğrisinin söz konusu olmasıdır. Şekil 6.22'deki  $G(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskindeki tüm noktaların  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskindeki bütün noktalarla çarpımı, (6.118)'i sağlar.

Şekil 6.22'den  $\overrightarrow{MN}$  arası mesafe ve  $\gamma_1$  faz açısı sırasıyla

$$g(w) \triangleq \overrightarrow{MN} = |G_0(jw)| - \varepsilon_G(w) \quad (6.120)$$

ve

$$\gamma_1 \triangleq \angle G_0(jw) - 180^\circ \quad (6.121)$$

olarak bulunur. Benzer olarak PI kontrolör için genlik ve faz bağıntıları sırasıyla

$$|F_0(jw)| = \frac{1}{|G_0(jw)|} = \frac{1}{g(w) + 2\varepsilon_G(w)} + f_1(w) = \frac{1}{g(w)} - f_2(w) = \overrightarrow{MN'} - f_2(w) \quad (6.122)$$

ve

$$\gamma_2 \triangleq -\angle F(jw) = \angle G_0(jw) - 180^\circ = \gamma_1 \quad (6.123)$$

olarak bulunur. Burada

$$f_1(w) \triangleq \frac{1}{|G_0(jw)|} - \frac{1}{|G_0(jw)| + \varepsilon_G(w)} \quad (6.124)$$

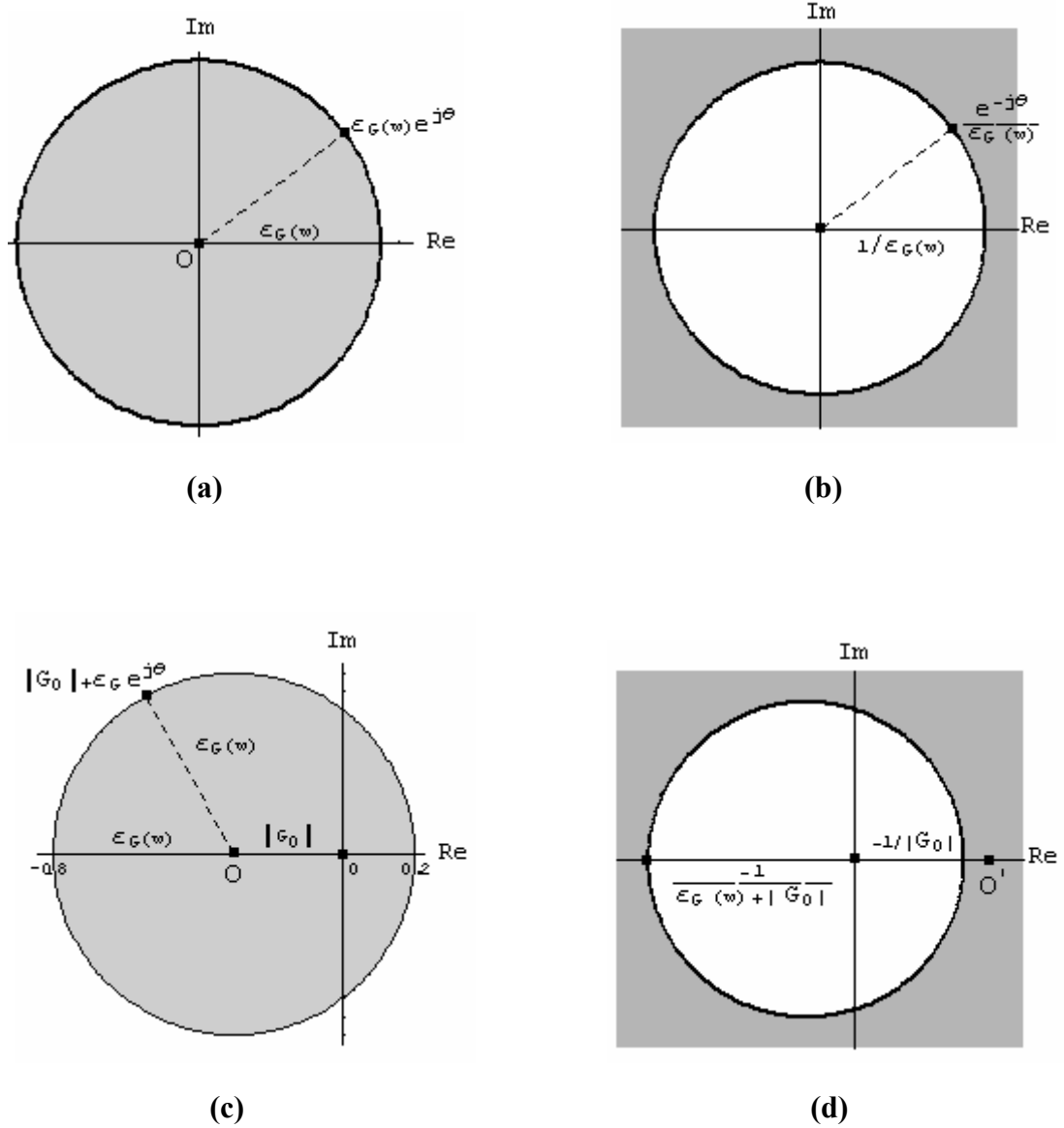
ve

$$f_2(w) \triangleq \frac{1}{|G_0(jw)| - \varepsilon_G(w)} - \frac{1}{|G_0(jw)|} \quad (6.125)$$

olduğu, Şekil 6.22'den görülmektedir.

Şekil 6.22'de görülen  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diski, orijini içermediği sürece bu diskin iz düşürülmesiyle elde edilen  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik diskin içi belirsizlik

bölgesidir.  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içermesi durumunda  $F(j\omega)$  için elde edilen diskin dışı belirsizlik bölgesi olur.  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin orijini içeren iki örnek belirsizlik diski Şekil 6.23a ve Şekil 6.23c'de verilmiştir. Bu iki diskin de iz düşümüyle elde edilen  $F(j\omega)$ 'ye ilişkin Şekil 6.23b ve Şekil 6.23d'de görülen iki diskin dışı, belirsizlik bölgesi olacaktır.

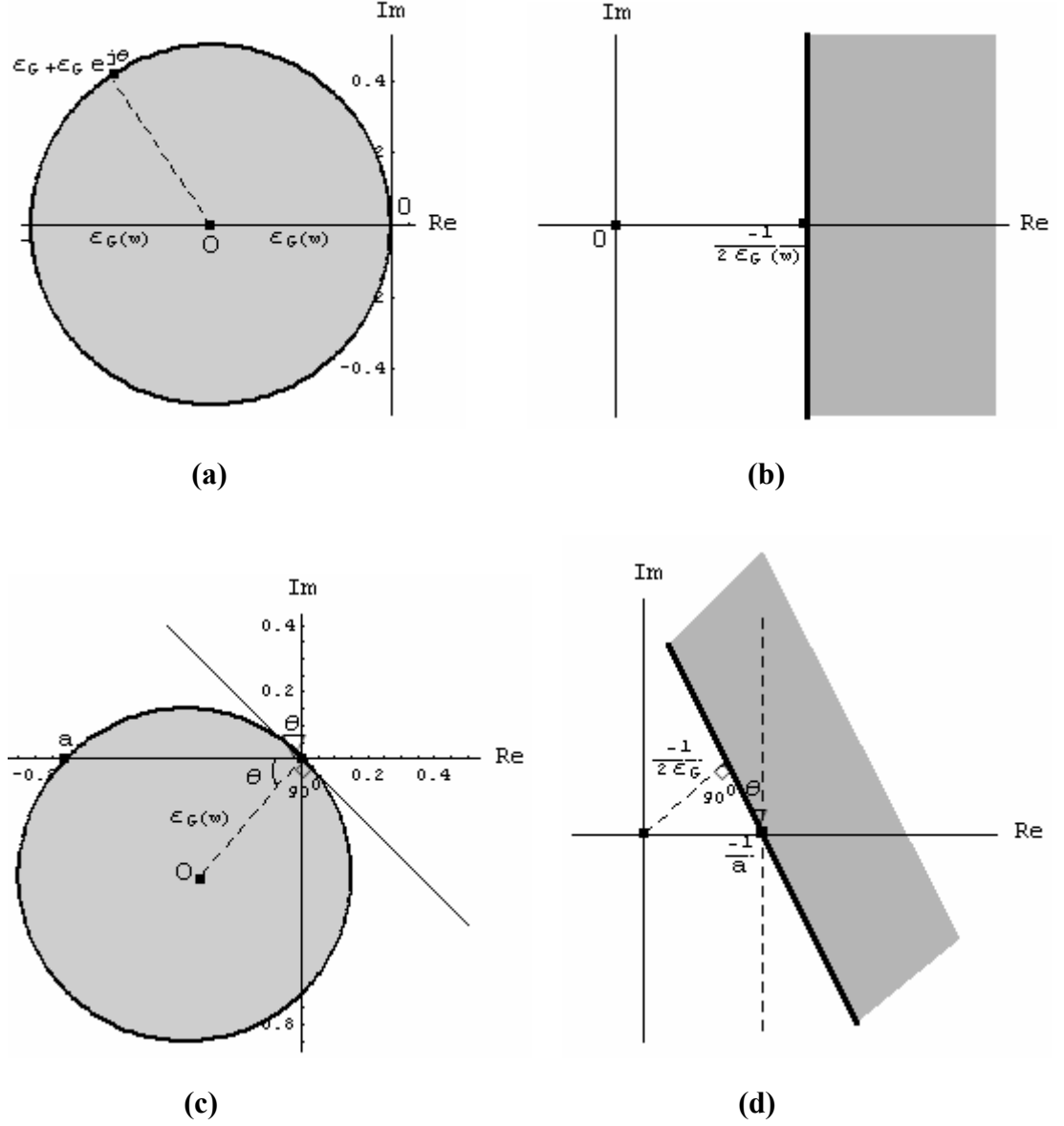


**Şekil 6.23 :** Orijini İçeren  $G_0(j\omega)$ 'ye İlişkin Belirsizlik Disklerinin ve  $F(j\omega)$  Etrafındaki Belirsizliklerin Grafik Gösterilimleri (Gölge Bölgeler, belirsizlik bölgeleridir).

Şekil 6.24a ve Şekil 6.24c'deki gibi  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diski orijine bir noktada teğetse; bu disklerin  $F(j\omega)$  düzlemindeki iz düşümleri, Şekil 6.24b ve Şekil 6.24d'deki gibi gölgelendirilmiş yarı düzlemlere dönüşür. Bu duruma örnek



olabilecek  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin iki belirsizlik diski ve bunların  $F(jw)$ 'daki iz düşümleri, Şekil 6.24'de görülmektedir.



**Şekil 6.24 :** Orijine Bir Noktadan Teğet Olan  $G_0(jw)$ 'ye İlişkin Belirsizlik Disklerinin ve  $F(jw)$  Etrafındaki Belirsizliklerin Grafik Gösterimleri.

Şekil 6.24a'daki  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diski sınırındaki noktalar,

$$\mathcal{C} \overset{\Delta}{G}(jw) = |G_0(jw)| + |G_0(jw)| e^{j\theta} = \varepsilon_G(w) (1 + e^{j\theta}), \quad \theta: (0-2\pi) \quad (6.126)$$

olarak parametrelendirilebilir.  $F(jw)$  üzerindeki belirsizliği bulmak için;  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin Şekil 6.24a'daki belirsizlik diskindeki noktaların iz düşürülmesiyle (6.126)'dan yararlanarak

$$\mathcal{C}\overset{\Delta}{F}(jw) = -\frac{1}{\varepsilon_G(w)(1+e^{j\theta})} \quad (6.127)$$

biçiminde parametrelendirebiliriz. (6.127)'de  $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$  yazılarak bulunan

$$\mathcal{C}\overset{\Delta}{F}(jw) = -\frac{1}{\varepsilon_G(w)((1+\cos\theta) + j\sin\theta)} \quad (6.128)$$

bağıntısının pay ve paydasını paydanın eşleniği ile çarparsak

$$\mathcal{C}\overset{\Delta}{F}(jw) = -\frac{1}{\varepsilon_G(w)} \left( \frac{1+\cos\theta - j\sin\theta}{1+2\cos\theta + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \right) \quad (6.129)$$

eşitliğini buluruz. Bu son bağıntıda düzenleme yaparak eş değer olarak

$$\mathcal{C}\overset{\Delta}{F}(jw) = -\frac{1}{\varepsilon_G(w)} \left( \frac{1}{2} - j \frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} \right) \quad (6.130)$$

bulunur. (6.130)'un reel kısmının  $\theta$ 'dan bağımsız olduğu görülürse, (6.130)'un  $\theta:(0-2\pi)$  için Şekil 6.24b'de görülen doğruyu verdiği görülür. Şekil 6.24a'daki belirsizlik diskinin  $\theta$  açısı kadar döndürülmesiyle Şekil 6.24c'de görülen belirsizlik diski elde edilir. Bu nedenle Şekil 6.24c'deki gibi  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diskinin  $F(jw)$  düzlemine iz düşürülmesiyle bulunan Şekil 6.24d'deki yarı düzlem, Şekil 6.24b'deki yarı düzlemin  $\theta$  açısı kadar döndürülmüş biçimidir.

Bölüm 6.1'de verilen yöntemden yararlanarak  $0 < w < \infty$  için, parametre uzayında  $K_p - K_i$  eğrisi çizdirilip kararlılık sınırları bulunur. Parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısı  $\delta$ 'nın aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri tespit edilerek; sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan bölgeler bulunur. Bu amaçla (6.118)'de  $s = jw$  yazılarak bulunan polinomda (3.97)'yi de yazarsak

$$1 + F(jw)(G_0(jw)(1+W(jw)\Delta)) = 0 \quad (6.131)$$

elde edilir. Bu son bağıntıda (6.1)'in yazılmasıyla elde edilen

$$jw + (jwK_p + K_i)(G_0(jw)(1+W(jw)\Delta)) = 0 \quad (6.132)$$

polinomundan hareketle Şekil 3.15'deki gibi yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemin  $w = 0$  için kararlılık sınırının sistemin orijinde sıfırının olmaması koşuluyla

$$K_i = 0 \quad (6.133)$$

doğrusu olduğu görülür.

(6.119)'da (6.1)'in yazılmasıyla  $s \rightarrow \infty$  için,

$$K_p = -\frac{1}{G_0(\infty)(1+W(\infty)\Delta)} \quad (6.134)$$

bulunur.  $s \rightarrow \infty$  için  $\Delta$ , -1 ile +1 arasındaki tüm reel sayıları ifade ettiğinden dolayı; son bağıntı  $K_p - K_i$  düzleminde

$$K_p = -\frac{1}{G_0(\infty)(1-W(\infty))} \quad (6.135)$$

ve

$$K_p = -\frac{1}{G_0(\infty)(1+W(\infty))} \quad (6.136)$$

arasında belirsizlik bölgesi olan bir bant tanımlar.  $G_0(s)W(s)$  tersi de nedensel ise; (6.135) ve (6.136)'da (6.2) ve (6.117)'nin yazılmasıyla  $w \rightarrow \infty$  için belirsizlik bantı,

$$K_p = -\frac{1}{a_m(1-a_{w_m})} \quad (6.137)$$

ve

$$K_p = -\frac{1}{a_m(1+a_{w_m})} \quad (6.138)$$

arasındadır. (6.2)'deki  $G_0(jw)$  'yi reel ve sanal kısımlarına ayırarak

$$G_0(jw) = G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw) \quad (6.139)$$

olarak yazabiliriz. Şekil 6.22'den  $G_0(jw)$  'ye ilişkin belirsizlik diskindeki noktalar,

$$\mathcal{C} \overset{\Delta}{G}(jw) = (G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw)) + \varepsilon_G(w)e^{j\theta}, \quad \theta: (0-2\pi) \quad (6.140)$$

olarak parametrelendirilebilir. (6.140)'da  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  yazılırsa

$$\mathcal{C}^{\Delta} G(jw) = (G_{0R}(jw) + \varepsilon_G(w) \cos \theta) + j(G_{0I}(jw) + \varepsilon_G(w) \sin \theta) \quad (6.141)$$

biçiminde olduğu görülür.  $F(jw)$  üzerindeki belirsizliği bulmak için;  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskindeki noktalar,  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskindeki noktaların Şekil 6.22'deki gibi iz düşürülmesiyle (6.140)'dan yararlanarak

$$\mathcal{C}^{\Delta} F(jw) = -\frac{1}{(G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw)) + \varepsilon_G(w)e^{j\theta}} \quad (6.142)$$

biçiminde parametrelendirilebilir.  $F(jw)$ 'yi reel ve sanal kısımlarına ayırarak bulunan

$$F(jw) = F_R(jw) + jF_I(jw) \quad (6.143)$$

bağıntısı ile (6.142)'nin eşleştirilip  $\theta: (0-2\pi)$  için taranmasıyla;  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diski elde edilir.

$(K_p, K_i)$ 'de ortaya çıkan belirsizliği bulmak için (6.1)'de verilen PI kontrolörün transfer fonksiyonunda  $s = jw$  yazarsak

$$F(jw) = \frac{jwK_p + K_i}{jw} = K_p + \frac{K_i}{jw} = K_p - j\frac{K_i}{w} \quad (6.144)$$

biçimine gelir. Bu son bağıntı ile (6.143)'ün eşitlenmesiyle bulunan

$$F_R(jw) + jF_I(jw) = K_p - j\frac{K_i}{w} \quad (6.145)$$

bağıntısının reel ve sanal kısımlardan

$$K_p = F_R(jw) \quad (6.146)$$

$$K_i = -wF_I(jw) \quad (6.147)$$

elde edilir. O halde  $F(jw)$ 'deki belirsizlik diskinden,  $(K_p, K_i)$ 'dekine geçişte elde edilen yeni diskin  $K_p$ -eksenine iz düşümü aynı kalırken;  $K_i$ -eksenine iz düşümü  $w = -w_{fix}$  frekansı kadar ölçeklenir.

(6.140)'da  $\theta: (0-2\pi)$  arası değerler için oluşturulan belirsizlik disklerinden  $0 < w < \infty$ 'a tüm frekanslar için,  $G_0(jw)$ 'nin Nyquist eğrisi etrafına yapısal olmayan belirsizlik içeren bir bant koyulabilir. Benzer biçimde (6.146) ve (6.147)'den

hareketle  $0 < w < \infty$  için,  $K_p - K_i$  düzleminde kararlılık sınırındaki belirsiz bölge oluşturulabilir. Bu bölgeye ilaveten  $K_p - K_i$  düzleminde  $P$ -bölgeleri belirlenirken (6.133)'den gelen  $K_i = 0$  doğrusu ile tersi de nedensel sistemler için (6.135) ve (6.136)'dan gelen bant da dikkate alınmalıdır.

$F(jw)$  üzerindeki belirsizlik bölgesini hızlıca hesaplayabilmek için, (6.6)'da (6.139) ve (6.143)'ü yazarsak

$$(G_{0R}(jw) + jG_{0I}(jw))(F_R(jw) + jF_I(jw)) = -1 \quad (6.148)$$

buluruz. Bu son bağıntıyı düzenlersek, reel ve sanal kısımlarından sırasıyla

$$G_{0R}(jw)F_I(jw) + G_{0I}(jw)F_R(jw) = 0 \quad (6.149)$$

$$G_{0R}(jw)F_R(jw) - G_{0I}(jw)F_I(jw) = -1 \quad (6.150)$$

elde ederiz. (6.149) ve (6.150)'yi matrisel biçimde yazarsak,

$$\begin{bmatrix} G_{0R}(jw) & -G_{0I}(jw) \\ G_{0I}(jw) & G_{0R}(jw) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_R(jw) \\ F_I(jw) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.151)$$

bulunur. Son bağıntı eşdeğer olarak

$$\begin{bmatrix} F_R(jw) \\ F_I(jw) \end{bmatrix} = \frac{1}{|G_0(jw)|^2} \begin{bmatrix} G_{0R}(jw) & G_{0I}(jw) \\ -G_{0I}(jw) & G_{0R}(jw) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{|G_0(jw)|^2} \begin{bmatrix} -G_{0R}(jw) \\ G_{0I}(jw) \end{bmatrix} \quad (6.152)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$|G_0(jw)|^2 = G_{0R}^2(jw) + G_{0I}^2(jw) \quad (6.153)$$

olarak ifade edilmiştir. (6.152)'den  $0 < w < \infty$  için,

$$F_R(jw) = \frac{-G_{0R}(jw)}{|G_0(jw)|^2} \quad (6.154)$$

$$F_I(jw) = \frac{G_{0I}(jw)}{|G_0(jw)|^2} \quad (6.155)$$

bulunur.  $K_p - K_i$  düzlemi için (6.154) ve (6.155)'de verilen bağıntılar, (6.146) ve (6.147)'den yararlanarak

$$K_p = \frac{-G_{0R}(jw)}{|G_0(jw)|^2} \quad (6.156)$$

$$K_i = -w \frac{G_{0I}(jw)}{|G_0(jw)|^2} \quad (6.157)$$

biçiminde yazılabilir.  $0 < w < \infty$  için (6.146) ve (6.147)'den yararlanarak  $K_p - K_i$  düzlemindeki belirsizlik bölgesi oluşturulabilir. Bu bölgeyi oluşturmaya yönelik ilk yöntem için, aşağıdaki algoritma verilebilir.

#### 6.4.1 Belirsizlik bölgesinin bulunmasına yönelik algoritma (Yöntem 1)

Yukarıdaki teorik gelişmelerden hareketle belirsizlik bantının bulunması için şu algoritma verilebilir.

##### 6.4.1.1 Algoritma 6.1: (Bayhan ve Söylemez)

**Adım 1:**  $0 < w < w_{\max}$  ve  $0 < \theta < 2\pi$  için  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin O merkezli  $\varepsilon_G(w) = |G_0(jw)W(jw)|$  yarı çaplı belirsizlik disklerini oluştur.

**Adım 2:** Adım 1'den bulunan  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerini

$$F(jw) = \frac{-1}{(G_0(jw) + \varepsilon_G(w)e^{j\theta})} \quad (6.158)$$

bağıntısından yararlanarak  $F(jw)$  düzlemine iz düşürerek; Şekil 6.22'deki gibi O' merkezli eliptik belirsizlik disklerini oluştur.

**Adım 3:**  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik disklerini, (6.146) ve (6.147)'den yararlanarak  $K_p - K_i$  düzlemine iz düşürerek belirsizlik bölgesini çiz.  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin iç kısımları ile orijini içeren belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin dış kısımlarından belirsizlik bölgesini oluştur.

**Adım 4:** Adım 3'den bulunan belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu  $K_p - K_i$  düzlemindeki bölgeyi belirle. Bu bölge, sistemi kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılacak PI kontrolörler bölgesidir.

Dayanıklı kararlı kılan tüm PI kontrolörleri bulmak için diğer bir yöntem, izleyen bölümde verilmiştir.

#### 6.4.2 Birim dairenin taranması yöntemiyle dayanıklı PI kontrolörlerin hesaplanması (Yöntem 2)

Dayanıklı kararlı kılan tüm PI kontrolörleri bulmak için bu bölümde önerilen yöntem, Teorem 3.1'in kullanılmasına dayanır. Bu yöntem, belirsizlik bölgelerinin belirlenmesinde ve dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesinin hesaplanmasında tutucu olmayan bir sonuç verir; fakat işlem yoğunluğu fazla olduğundan oldukça yavaş bir yöntemdir. Teorem 3.1'den yararlanabilmek amacıyla PI kontrolör parametrelerini kutupsal koordinatlarda

$$K_p = K \cos \theta \quad (6.159)$$

$$K_i = K \sin \theta \quad (6.160)$$

biçiminde yazabiliriz. (6.159) ve (6.160)'ın (6.1)'de yazılmasıyla bulunan

$$F(s) = K \left( \cos \theta + \frac{\sin \theta}{s} \right), \quad \theta: (0 - \pi) \quad (6.161)$$

bağıntısından

$$F(s)G(s) = K \underbrace{\left( \cos \theta + \frac{\sin \theta}{s} \right)}_{\triangleq G_p(s)} G(s) = K G_p(s) \quad (6.162)$$

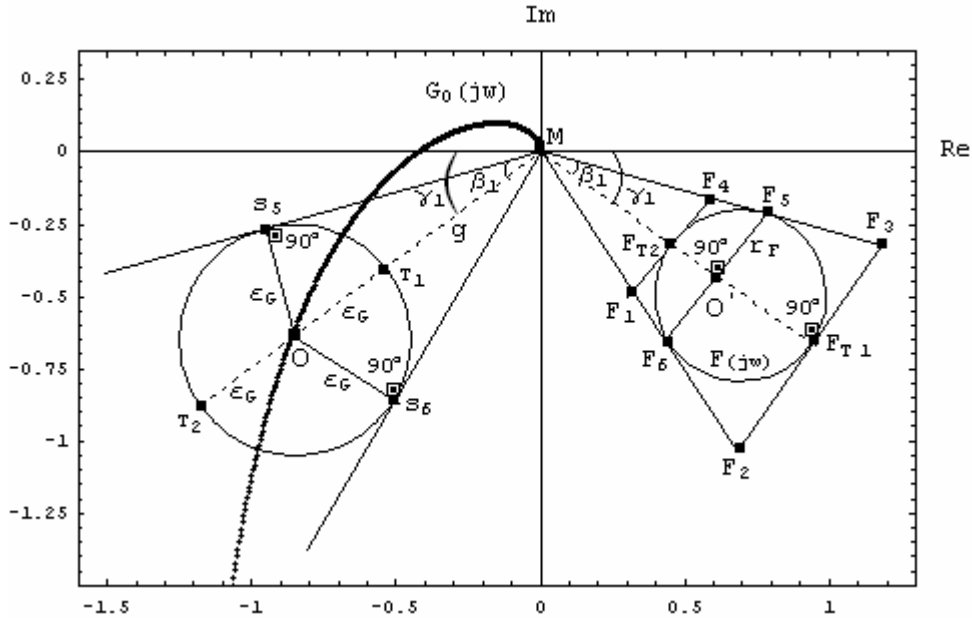
elde edilir. Burada  $\theta$ , sabitlenip bulunan  $G_p(s)$  sistemi için önce Teorem 3.1 kullanılarak kararlı kılan kazançlar bulunur ve sonra verilen ağırlık fonksiyonu için Bölüm 3.6'daki yöntem kullanılarak belirsizlik kazançları aralığı bulunur.  $\theta: (0 - \pi)$  arasında değiştirilerek, dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesi ve belirsizlik bölgeleri belirlenir. Bu yöntem, kesin sonuç vermesine rağmen; Bölüm 3.6'da anlatılan kök hesabını içermesi ve  $\theta$  açısı aralıklarının sık taranması gibi fazla işlem gerektirdiğinden hız açısından yavaştır.

Bölüm 6.4.1'de verilen birinci yönteme alternatif olarak hesabı kolaylaştırmak ve işlem hızını arttırmak için geometrik tabanlı cebrik bir yöntem de, aşağıda verilmiştir.

### 6.4.3 Belirsizlik bantının üstten çevrenilmesi (Dörtgen yöntemi)

Geometrik tabanlı bu yöntem,  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin orijini içerip içermemesine göre iki aşamadan oluşur. Buna göre belirsizlik bölgesini hızlıca oluşturabilmek için,  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içerip içermemesine göre ayrı inceleme yapılır. Dikkat edilecek olursa belirsizlik diskinin orijini içermesi için gerek ve yeter koşul,  $|W(jw)| > 1$  olmasıyken; orijini içermemesi için ise  $|W(jw)| < 1$  olmasıdır.

İlk aşama olarak  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içermediği durumu ele alalım. Bu durumda  $F(jw)$  düzlemindeki belirsizlik bantını hızlı bir şekilde elde edebilmenin yolu, orijini içermeyen  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin O merkezli  $\varepsilon_G(w) = |G_0(jw)W(jw)|$  yarı çaplı belirsizlik diskinin Şekil 6.25'deki gibi mümkün olan en küçük sektör ile çevrenilmesi ve sonra Şekil 6.22'deki gibi (6.6)'dan da yararlanarak iz düşümünün alınmasıdır.  $F(jw)$  düzleminde  $K_p - K_i$  düzlemine geçmek için (6.146) ve (6.147)'den yararlanılır.  $0 < w < \infty$  için  $K_p - K_i$  düzlemindeki böyle oluşturulmuş sektörlerden belirsizlik bantı oluşturulabilir. Bu çevreleme yönteminin hızlı bir çözüm vermesine karşılık bu çözümün tutucu olduğu unutulmamalıdır.



**Şekil 6.25 :**  $G_0(jw)$ 'ye İlişkin Orijini İçermeyen Bir Belirsizlik Diskini İçine Alan En Küçük Sektör ve  $F(jw)$  Düzlemine Olan İz Düşümü.

$G_0(jw)$ 'ye ilişkin O merkezli belirsizlik diskini en sıkı biçimde içine alan bu sektör  $s_5$  ve  $s_6$  noktalarında bu diske teğettir.  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin  $F(jw)$



düzlemine iz düşürülmesiyle Şekil 6.25’de görülen eliptik biçimli belirsizlik diski elde edilir.  $G_0(jw)$  düzlemindeki  $s_5$  ve  $s_6$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemine olan iz düşümleri,  $F_5$  ve  $F_6$  noktalarıdır. Benzer olarak  $G(jw)$  düzlemindeki  $T_1$  ve  $T_2$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemine iz düşürülmesiyle sırasıyla  $F_{T_1}$  ve  $F_{T_2}$  noktaları bulunur.  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diskinin O merkezinin  $F(jw)$  düzlemindeki iz düşümü de eliptik belirsizlik diskinin O’ merkezini verir. Böylece  $F(jw)$ ’ye ilişkin eliptik belirsizlik diskini en sıkı biçimde içine alan Şekil 6.25’de görülen sektör,  $F_5$  ve  $F_6$  noktalarında bu diske teğettir. Bu sektörün uç noktalarını  $F(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diskine  $F_{T_2}$  noktasında teğet olacak biçimde birleştirirsek  $\overline{F_1F_4}$  doğru parçası elde edilir.  $\overline{F_1F_4}$  doğru parçasına paralel olan  $\overline{F_2F_3}$  doğru parçasının oluşturulmasıyla bu diske  $F_{T_1}$  noktasında teğet olunur. Gerekli noktaların birleştirilmesiyle bulunan  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğu,  $F(jw)$  düzlemindeki sektörün eliptik biçimli belirsizlik diskini en sıkı biçimde içine alacak ve dolayısıyla tutuculuğu azaltacak parçasıdır. (6.146) ve (6.147)’den yararlanılarak  $F(jw)$  düzlemindeki  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğu,  $K_p - K_i$  düzlemine dönüştürülür. Böylece  $0 < w < \infty$  için dönüştürülmüş yamuklardan yararlanılarak  $K_p - K_i$  düzlemindeki belirsizlik bölgelerinin etrafına bir bant konulabilir.

Şekil 6.25’den görüldüğü üzere  $\overline{MO}$  arası uzaklık,  $|G_0(jw)|$ ’ye eşittir.  $\overline{MT_1}$  doğru parçası, (6.120)’de verildiği gibi  $g(w)$ ’ye eşittir ve

$$g(w) \triangleq \overline{MT_1} = \overline{MO} - \varepsilon_G(w) = |G_0(jw)| - \varepsilon_G(w) \quad (6.163)$$

biçiminde yazılır. Şekil 6.25’den

$$g_2(w) \triangleq \overline{MT_2} = |G_0(jw)| + \varepsilon_G(w) \quad (6.164)$$

olarak bulunur. Birbirine eşit olan  $M s_5 O$  veya  $M s_6 O$  dik üçgenlerinden

$$\beta_1 = \arcsin \left( \frac{\varepsilon_G(w)}{|G_0(jw)|} \right) \quad (6.165)$$

ve

$$\ell_5(w) \triangleq \overline{Ms_5} = \ell_6(w) \triangleq \overline{Ms_6} = \sqrt{|G_0(jw)|^2 - \varepsilon_G^2(w)} \quad (6.166)$$

olarak hesaplanır.  $\gamma_1$  ise, (6.121)'de verildiği gibi  $\angle G_0(jw) - 180^\circ$ 'ye eşittir. Şekil 6.25'den  $s_5$  ve  $s_6$  teğet noktaları için sırasıyla

$$s_5(jw) = \ell_5(w) e^{j(180^\circ + \gamma_1 - \beta_1)} \quad (6.167)$$

$$s_6(jw) = \ell_6(w) e^{j(180^\circ + \gamma_1 + \beta_1)} \quad (6.168)$$

olarak yazılır.

$G_0(jw)$  düzlemindeki  $s_5$  ve  $s_6$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemine iz düşürülmesiyle elde edilen  $F_5$  ve  $F_6$  noktalarının orijine olan uzaklıkları arasında

$$|F_5(jw)| = |F_6(jw)| \quad (6.169)$$

eşitliği vardır.  $\overrightarrow{MO'}$  arası mesafe ise,

$$|F_0(jw)| = \frac{1}{|G_0(jw)|} \quad (6.170)$$

olarak bulunur.  $F_2MF_3$  üçgenini simetrik iki eş dik üçgene ayıran  $\overrightarrow{MF_{T_1}}$  doğru parçası için

$$\overrightarrow{MF_{T_1}} = \frac{1}{g(w)} \quad (6.171)$$

yazılır.  $F_5$  ve  $F_6$  noktalarının eliptik belirsizlik diskinin  $O'$  merkezine olan uzaklıkları için

$$r_F(w) \triangleq \overrightarrow{F_5O'} = \overrightarrow{F_6O'} \quad (6.172)$$

tanımını yapalım.  $MO'F_5$  veya  $MO'F_6$  dik üçgenleri için,

$$r_F(w) = \sqrt{|F_5(jw)|^2 - |F_0(jw)|^2} = \sqrt{|F_6(jw)|^2 - |F_0(jw)|^2} \quad (6.173)$$

ve

$$\beta_1 = \arctan\left(\frac{r_F(w)}{|F_0(jw)|}\right) = \arctan(r_F(w)|G_0(jw)|) \quad (6.174)$$

olarak hesaplanır. Şekil 6.25’de  $MF_{T_2}F_1$  ve  $MF_{T_2}F_4$  dik üçgenlerinden,

$$\overrightarrow{MF_{T_2}} = |F_{T_2}(jw)| = \frac{1}{g_2(w)} = \frac{1}{g(w) + 2\varepsilon_G(w)} \quad (6.175)$$

$$\overrightarrow{MF_1} = |F_1(jw)| = \overrightarrow{MF_4} = |F_4(jw)| = \frac{1}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w)) \cos \beta_1} \quad (6.176)$$

olduğu görülür. Benzer olarak (6.171)’den yararlanarak  $MF_{T_1}F_2$  ve  $MF_{T_1}F_3$  dik üçgenlerinden,

$$\overrightarrow{MF_2} = |F_2(jw)| = \overrightarrow{MF_3} = |F_3(jw)| = \frac{1}{g(w) \cos \beta_1} \quad (6.177)$$

olarak bulunur. (6.176) ve (6.177) kullanılarak, Şekil 6.25’deki  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğunun köşe noktaları için sırasıyla

$$F_1(jw) = |F_1(jw)| \angle F_1(jw) = \frac{1}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w)) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 + \beta_1)} \quad (6.178)$$

$$F_2(jw) = \frac{1}{g(w) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 + \beta_1)} \quad (6.179)$$

$$F_3(jw) = \frac{1}{g(w) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 - \beta_1)} \quad (6.180)$$

$$F_4(jw) = \frac{1}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w)) \cos \beta_1} e^{j(-\gamma_1 - \beta_1)} \quad (6.181)$$

yazılabilir.  $\overrightarrow{F_5F_6}$  doğru parçasının her zaman  $F(jw)$ ’ye ilişkin eliptik belirsizlik diskinin O’ merkezinden geçtiğini, Şekil 6.25’den yararlanarak ispatlayabiliriz. Buna göre  $MF_{T_2}F_4$  dik üçgeninden (6.176) kullanılarak bulunan

$$\cos \beta_1 = \frac{|F_{T_2}(jw)|}{|F_4(jw)|} = \frac{1}{|F_4(jw)| (g(w) + 2\varepsilon_G(w))} \quad (6.182)$$

bağıntısı ile  $MS_5O$  dik üçgeninden bulunan

$$\cos \beta_1 = \frac{|s_5(jw)|}{(g(w) + \varepsilon_G(w))} \quad (6.183)$$

bağıntısının eşitlenmesinden

$$|F_4(jw)| = \frac{(g(w) + \varepsilon_G(w))}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w))|s_5(jw)|} \quad (6.184)$$

elde edilir.  $MF_{T_2}F_4$  dik üçgeniyle  $MO'F_5$  dik üçgeninin benzerliğinden bulunan

$$\frac{|F_4(jw)|}{|F_5(jw)|} = \frac{|F_{T_2}(jw)|}{\overrightarrow{MO'}} \quad (6.185)$$

bağıntısında (6.175)'in yazılmasıyla

$$\frac{|F_4(jw)|}{|F_5(jw)|} = \frac{1}{\overrightarrow{MO'}(g(w) + 2\varepsilon_G(w))} \quad (6.186)$$

elde edilir. (6.184)'ün her iki tarafının  $|F_5(jw)|$  'e bölünmesiyle bulunan

$$\frac{|F_4(jw)|}{|F_5(jw)|} = \frac{(g(w) + \varepsilon_G(w))}{(g(w) + 2\varepsilon_G(w))} \quad (6.187)$$

bağıntısıyla, (6.186)'nın eşitlenmesinden

$$\overrightarrow{MO'} = \frac{1}{g(w) + \varepsilon_G(w)} = \frac{1}{\overrightarrow{MO}} \quad (6.188)$$

elde edilir ve böylece  $\overrightarrow{F_5F_6}$  doğru parçasının her zaman  $O'$  merkezinden geçtiği ispatlanmış olur. ■

Şekil 6.25'deki  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğunun  $K_p - K_i$  düzlemine dönüştürülmesi için (6.146) ve (6.147)'den yararlanılır. Böylece  $F_1(jw)$  noktası için (6.145)'den bulunan

$$F_1(jw) = F_{1R}(jw) + jF_{1I}(jw) = K_{p_1} - j\frac{K_{i_1}}{w} \quad (6.189)$$

bağıntısının reel ve sanal kısımlarının eşitlenmesinden

$$K_{p_1} = F_{1R}(jw) \quad (6.190)$$

$$K_{i_1} = -wF_{1I}(jw) \quad (6.191)$$

elde edilir. Diğer köşeleri için (6.190) ve (6.191)'e benzer olarak

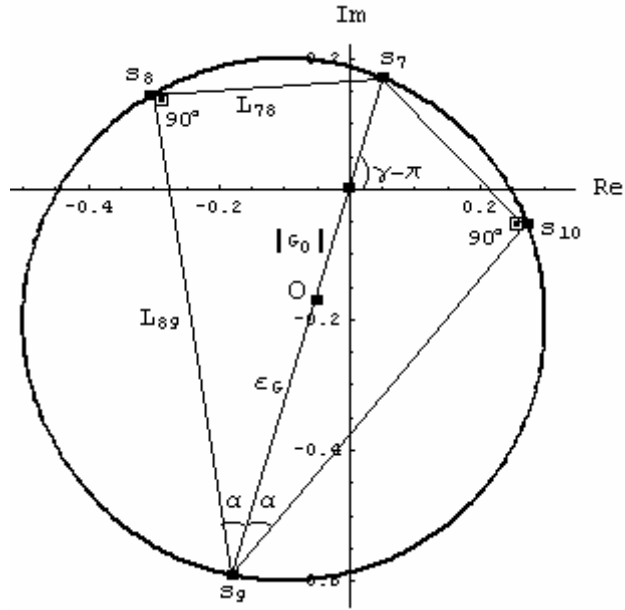
$$K_{p_2} = F_{2R}(jw), \quad K_{i_2} = -wF_{2I}(jw) \quad (6.192)$$

$$K_{p_3} = F_{3R}(jw), \quad K_{i_3} = -wF_{3I}(jw) \quad (6.193)$$

$$K_{p_4} = F_{4R}(jw), \quad K_{i_4} = -wF_{4I}(jw) \quad (6.194)$$

yazabiliriz.  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içermediği yani  $|W(jw)| < 1$  olduğu duruma ilişkin olan tüm frekanslar için  $(K_{p_1}, K_{i_1})$ ;  $(K_{p_2}, K_{i_2})$ ;  $(K_{p_3}, K_{i_3})$  ve  $(K_{p_4}, K_{i_4})$  köşe noktalarından  $K_p - K_i$  düzleminde belirsizlik bantı hızlı bir biçimde oluşturulabilir.

Bu yöntemin ikinci aşaması olarak bazı frekans değerleri için,  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içerdiği durumu incelemek amacıyla O merkezli  $\varepsilon_G(w)$  yarı çaplı Şekil 6.26'daki gibi en genel durumdaki bir belirsizlik diskini ele alalım.



**Şekil 6.26 :**  $G_0(jw)$ 'ye İlişkin Orijini İçeren Bir Belirsizlik Diski.

Şekil 6.26'dan görüldüğü üzere  $\overline{s_7 s_9}$  uzaklığı,  $2\varepsilon_G(w)$ 'ye eşittir.  $\gamma$  ise,  $\angle G_0(jw)$ 'ye ve aynı zamanda  $\angle s_9(jw)$ 'ye eşittir.  $s_9(jw)$  noktasının simetrisi  $s_7(jw)$ 'nin açısının

$$\angle s_7(jw) = \gamma - 180^\circ \quad (6.195)$$

olduğu görülür. Şekil 6.26'dan  $s_7(jw)$  ve  $s_9(jw)$ 'nin genlikleri

$$|s_7(jw)| = \varepsilon_G(w) - |G_0(jw)| \quad (6.196)$$

$$|s_9(jw)| = |G_0(jw)| + \varepsilon_G(w) \quad (6.197)$$

olarak hesaplanır. Bu durumda  $s_7(jw)$  ve  $s_9(jw)$  noktaları için sırasıyla

$$s_7(jw) = |s_7(jw)| e^{j(\gamma-180^\circ)} \quad (6.198)$$

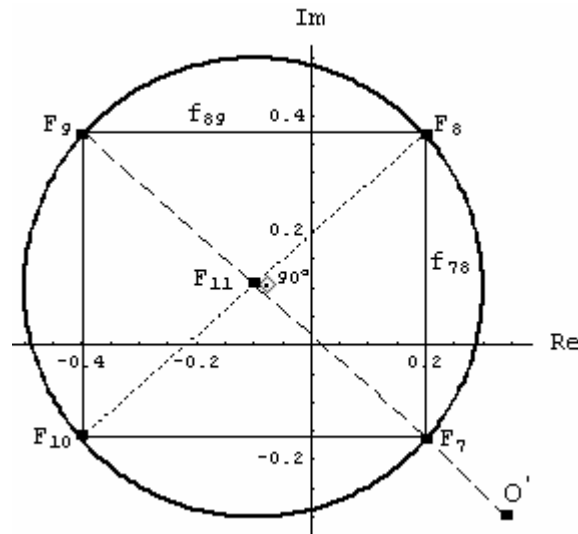
$$s_9(jw) = |s_9(jw)| e^{j\gamma} \quad (6.199)$$

olarak yazılır. Şekil 6.26'da  $s_7(jw)$  noktasının  $s_8(jw)$  noktasına olan uzaklığı  $L_{78}(w)$  ile gösterilmişken;  $s_8(jw)$  noktasının  $s_9(jw)$  noktasına olan uzaklığı  $L_{89}(w)$  ile gösterilmiştir. Böylece

$$L_{78}(w) \triangleq |s_8(jw) - s_7(jw)| \quad (6.200)$$

$$L_{89}(w) \triangleq |s_9(jw) - s_8(jw)| \quad (6.201)$$

olarak tanımlanır. Şekil 6.26'daki  $G_0(jw)$  düzlemindeki belirsizlik diskine ilişkin  $s_7(jw)$ ,  $s_8(jw)$ ,  $s_9(jw)$  ve  $s_{10}(jw)$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemine iz düşürülmesiyle elde edilen eliptik belirsizlik diskine ilişkin  $F_7(jw)$ ,  $F_8(jw)$ ,  $F_9(jw)$  ve  $F_{10}(jw)$  noktaları, Şekil 6.27'de gösterilmiştir.  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin O merkezinin  $F(jw)$  düzlemindeki iz düşümü olan O', Şekil 6.27'de görüldüğü gibi diskin dışında olacaktır.



Şekil 6.27 :  $F(jw)$  'ye İlişkin Orijini İçeren Eliptik Bir Belirsizlik Diski.

$F_7(jw)$ ,  $F_8(jw)$ ,  $F_9(jw)$  ve  $F_{10}(jw)$  noktalarının birleşiminden Şekil 6.27'deki  $F_7F_8F_9F_{10}$  dörtgeni elde edilir. Bu dörtgen,  $F(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin içine tutuculuğu en aza indirebilecek ve işlem hızını arttıracak şekilde yerleştirilmelidir. Bu amaçla Şekil 6.26'da görülen  $s_8(jw)$  noktasının yeri öyle seçilmelidir ki bu noktanın  $F(jw)$  düzlemine iz düşümü olan  $F_8(jw)$  noktasının  $F_9(jw)$  noktasına olan uzaklığı  $f_{89}(w)$  ile bu  $F_8(jw)$  noktasının  $F_7(jw)$  noktasına olan uzaklığı  $f_{78}(w)$ 'in eşit olması sağlanmalıdır. Böylece oluşturulan  $F_7F_8F_9F_{10}$  dörtgeni, eş kenar dörtgen olacaktır.  $F_{11}(jw)$  noktası,  $F_7(jw)$  noktası ile  $F_9(jw)$  noktasının orta noktasıdır ve  $O'$  ekseninin üzerindedir. Buna göre

$$F_7(jw) = \frac{-1}{s_7(jw)}, \quad F_8(jw) = \frac{-1}{s_8(jw)}, \quad F_9(jw) = \frac{-1}{s_9(jw)} \quad (6.202)$$

$$f_{78}(w) \triangleq |F_7(jw) - F_8(jw)| \quad (6.203)$$

$$f_{89}(w) \triangleq |F_8(jw) - F_9(jw)| \quad (6.204)$$

olarak yazılır. Diğer taraftan çapı gören çember üzerindeki bir noktanın açısının  $90^\circ$  olacağı bilgisinden hareketle, Şekil 6.26'dan

$$\widehat{s_7 s_8 s_9} = \widehat{s_7 s_{10} s_9} = 90^\circ \quad (6.205)$$

olduğu görülmektedir. Böylece Şekil 6.26'da görülen  $s_7 s_8 s_9$  dik üçgeni için Pisagor teoreminden,

$$L_{78}^2(w) + L_{89}^2(w) = 4\varepsilon^2(w) \quad (6.206)$$

olarak yazılabilir. (6.203)'de (6.202) ve sonra (6.200) yazılırsa,

$$f_{78}(w) = \left| \frac{1}{s_7(jw)} - \frac{1}{s_8(jw)} \right| = \frac{|s_8(jw) - s_7(jw)|}{|s_7(jw)| |s_8(jw)|} = \frac{L_{78}(w)}{|s_7(jw)| |s_8(jw)|} \quad (6.207)$$

bulunur. Benzer olarak  $f_{89}(w)$  için,

$$f_{89}(w) = \left| \frac{s_9(jw) - s_8(jw)}{s_8(jw) s_9(jw)} \right| = \frac{|s_9(jw) - s_8(jw)|}{|s_8(jw)| |s_9(jw)|} = \frac{L_{89}(w)}{|s_8(jw)| |s_9(jw)|} \quad (6.208)$$

elde edilir.  $f_{78}(w)$  ile  $f_{89}(w)$ 'un eşitlenmesinde (6.207) ve sonra (6.208) kullanılarak bulunan

$$L_{78}(w) = \frac{|s_7(jw)|}{|s_9(jw)|} L_{89}(w) \quad (6.209)$$

bağıntısının (6.206)'da yazılıp düzenlenmesiyle

$$L_{89}(w) = \frac{2\varepsilon(w)|s_9(jw)|}{\sqrt{|s_7(jw)|^2 + |s_9(jw)|^2}} \quad (6.210)$$

elde edilir.  $L_{78}(w)$  için benzer olarak,

$$L_{78}(w) = \frac{2\varepsilon(w)|s_7(jw)|}{\sqrt{|s_7(jw)|^2 + |s_9(jw)|^2}} \quad (6.211)$$

yazabiliriz. (6.196) ve (6.197)'den bulunan

$$|s_7(jw)|^2 + |s_9(jw)|^2 = 2(|G_0(jw)|^2 + \varepsilon^2(w)) \quad (6.212)$$

bağıntısını (6.210) ve (6.211)'de yazarak  $L_{89}(w)$  ve  $L_{78}(w)$  hesaplanabilir. Şekil 6.26'dan,

$$\tan \alpha = \frac{L_{78}(w)}{L_{89}(w)} = \frac{|s_7(jw)|}{|s_9(jw)|} \quad (6.213)$$

olarak hesaplanır. Hesap kolaylığı açısından Şekil 6.26'daki  $s_9(jw)$ , orijine ötelenirse;  $s_7(jw)$ ,  $s_8(jw)$ ,  $s_{10}(jw)$  ve  $s_9(jw)$ 'nin yerine sırasıyla  $s_7(jw) - s_9(jw)$ ,  $s_8(jw) - s_9(jw)$ ,  $s_{10}(jw) - s_9(jw)$  ve yeni orijin durumunda olan  $s_9(jw) - s_9(jw)$  noktaları gelir.  $s_9(jw)$  kadar orijine ötelenmeyle Şekil 6.26'daki her nokta için ötelenme söz konusu olacağından; hiçbir açı veya mesafe değişmeyecektir.  $s_8(jw)$ 'nin  $s_9(jw)$  kadar ötelenmesiyle bulunan

$$s_8(jw) - s_9(jw) = L_{89}(w) e^{j(\alpha + \gamma - \pi)} \quad (6.214)$$

bağıntısından yararlanarak  $s_8(jw)$ 'nin yeni koordinatları

$$s_8(jw) = s_9(jw) - L_{89}(w) e^{j(\alpha + \gamma)} \quad (6.215)$$

olarak elde edilir. Benzer olarak  $s_{10}(jw)$ 'nin  $s_9(jw)$  kadar ötelenmesiyle

$$s_{10}(jw) = s_9(jw) - L_{89}(w) e^{j(-\alpha + \gamma)} \quad (6.216)$$



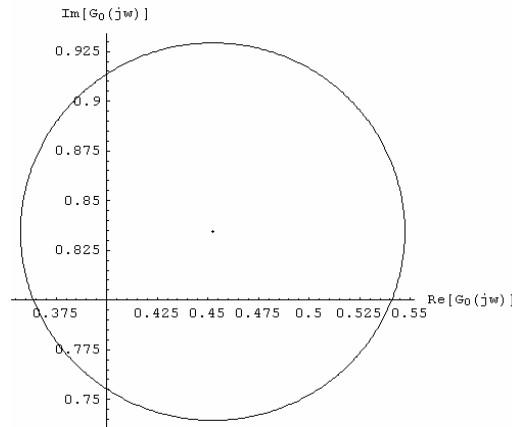
olarak bulunur. Böylece bilinmeyen  $s_8(jw)$  ve  $s_{10}(jw)$  noktalarının ve dolayısıyla  $F_8(jw)$  ve  $F_{10}(jw)$  noktalarının koordinatları hesaplanmış olur.  $F_8(jw)$  ve  $F_{10}(jw)$  noktaları ile baştan bilinen  $F_7(jw)$  ve  $F_9(jw)$  noktalarının birleştirilmesiyle Şekil 6.27'deki  $F_7F_8F_9F_{10}$  eş kenar dörtgeni oluşturulur ve (6.189), (6.190), (6.191), (6.192), (6.193) ve (6.194)'e benzer olarak  $F_7F_8F_9F_{10}$  eş kenar dörtgeni  $K_p - K_i$  düzlemindeki başka bir dörtgene dönüştürülür.  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinin orijini içermesini sağlayan frekans değerleri için;  $K_p - K_i$  düzlemindeki bu dörtgenlerin dışında kalan bölgeler, belirsizlik bölgeleri olarak ele alınır. Böylece  $0 < w < \infty$  arasında hem orijini içermeyen  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskleri için  $K_p - K_i$  düzleminde bulunan belirsizlik bölgeleri hem de orijini içerenlere ilişkin  $K_p - K_i$  düzleminde bulunan belirsizlik bölgelerinin birleşim bölgesi bulunarak tüm belirsizlik bölgesi belirlenmiş olur.

Burada önerilen yöntemlere ilişkin iki sayısal örnek aşağıda verilmiştir.

#### 6.4.3.1 Örnek 6.8 (Yöntem 1, Yöntem 2 ve Dörtgen yöntemi için)

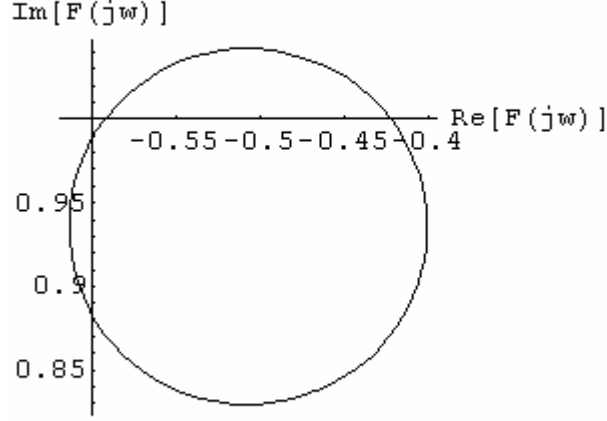
Şekil 3.15'deki yapısal olmayan belirsizlik içeren tersi de nedensel  $G_0(s)$  sistemi, (6.39) ile verilmiş olup ağırlık transfer fonksiyonu ise,  $W(s) = \frac{s+1}{s+100}$  olarak tanımlanmıştır. Bu sistemi dayanıklı kararlı kılacak PI kontrolörler bölgesi önerilen yöntemlerle bulunacaktır.

İlk olarak Bölüm 6.4.1'deki birinci yöntemi ele alalım.  $w_{fix} = 10$  olarak seçilmek üzere  $\varepsilon_G(w) = |G_0(jw)W(jw)|$ 'den  $\varepsilon_G(w_{fix}) = 0.09491$  olarak bulunur.  $w_{fix} = 10$  olmak üzere  $\theta: (0 - 2\pi)$  için (6.140)'dan  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diski, Şekil 6.28'de görülmektedir. Bu diskin merkezinin koordinatları,  $G_{0R} = 0.45237$  ve  $G_{0I} = 0.83435$  olarak bulunur. Şekil 6.28'deki bu disk, orijini içermemektedir.



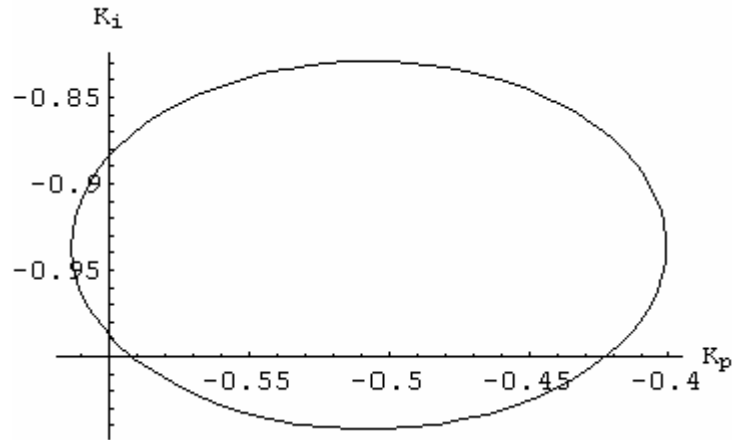
Şekil 6.28 : Örnek 6.8'de  $w_{fix} = 10$  İçin  $G_0(jw)$ 'ye İlişkin Bir Belirsizlik Diski.

$F(j\omega)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskindeki noktalar,  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskindeki noktaların Şekil 6.22'deki gibi iz düşürülmesiyle  $w_{fix} = 10$  olmak üzere  $\theta: (0 - 2\pi)$  için (6.142)'den oluşturulabilir ve grafiksel olarak Şekil 6.29'daki gibi gösterilebilir.



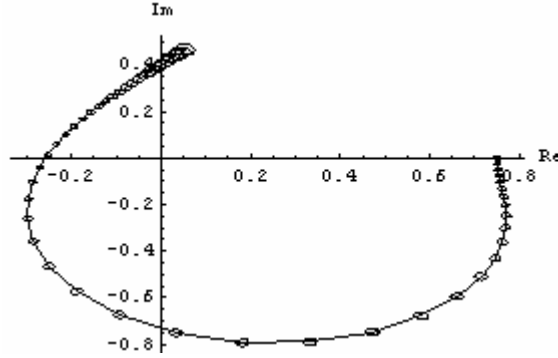
**Şekil 6.29 :** Örnek 6.8'de  $w_{fix} = 10$  için  $F(j\omega)$ 'ye ilişkin Bir Eliptik Belirsizlik Diski.

$w_{fix} = 10$  için  $F(j\omega)$  düzlemindeki eliptik belirsizlik diskinin (6.146) ve (6.147)'den yararlanılarak  $K_p - K_i$  düzlemine iz düşürülmesi sonucu Şekil 6.30'daki gibi dönüştürülmüş bir eliptik disk elde edilir. Şekil 6.29'da görülen  $F(j\omega)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskinden Şekil 6.30'daki  $(K_p, K_i)$ 'e ilişkin olanına geçişte; birinci diskin  $\text{Re}[F(j\omega)]$  ekseninden ikinci diskin  $K_p$ -eksenine iz düşümü aynı kalırken;  $\text{Im}[F(j\omega)]$  ekseninden  $K_i$ -eksenine iz düşüm  $-w_{fix}$  yani -10 kadar ölçeklenmiştir.

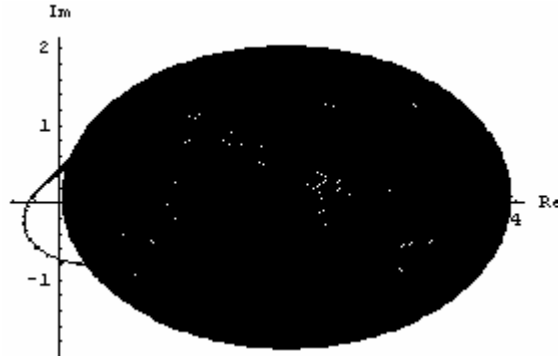


**Şekil 6.30 :** Örnek 6.8'de  $w_{fix} = 10$  için  $K_p - K_i$  Düzleminde Eliptik Belirsizlik Diski

Şekil 6.25'deki belirsizlik diskinin elde edilişinden hareketle  $0 < \omega < \infty$ 'a çeşitli frekanslar için oluşturulan disk kümeleri ile  $\hat{G}(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi etrafına belirsizlik bölgesini içeren bir bant koyulabilir. Seçilen alçak ve daha yüksek frekans değerleri için  $\hat{G}(j\omega)$ 'nin Nyquist eğrisi etrafında oluşan belirsizlik bantları, Şekil 6.31 ve Şekil 6.32'de gösterilmiştir. Dikkat edilirse yüksek frekans için belirsizlik bölgesi artmaktadır.



Şekil 6.31 : Örnek 6.8'de  $0 < \omega < 5$  İçin  $\hat{G}(j\omega)$ 'nin Nyquist Eğrisi.



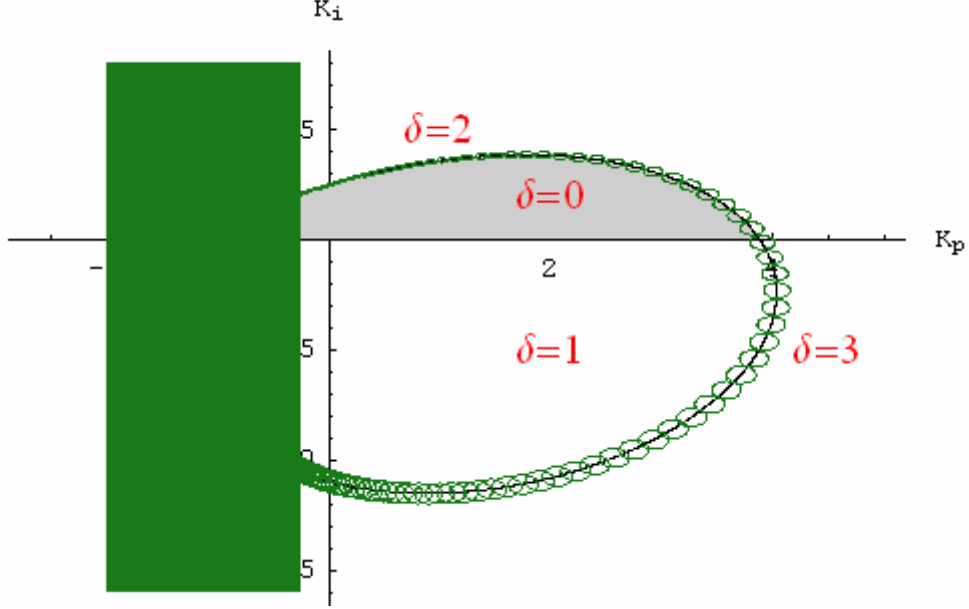
Şekil 6.32 : Örnek 6.8'de  $0 < \omega < 500$  İçin  $\hat{G}(j\omega)$ 'nin Nyquist Eğrisi.

$0 < \omega < \infty$  arası frekanslar için (6.156) ve (6.157)'den yararlanarak  $K_p - K_i$  düzleminde kompleks kök sınırını çevreleyen belirsizlik bantı bulunabilir.  $P$ -bölgelerini çevreleyen bu bant, Şekil 6.33'de gösterilmiştir.  $G_0(s)W(s)$  tersi de nedensel olduğundan  $\omega \rightarrow \infty$  için sonsuz kök sınırındaki belirsizlik bantının sınırları (6.137) ve (6.138)'den,

$$K_{p1} = -\infty \quad (6.217)$$

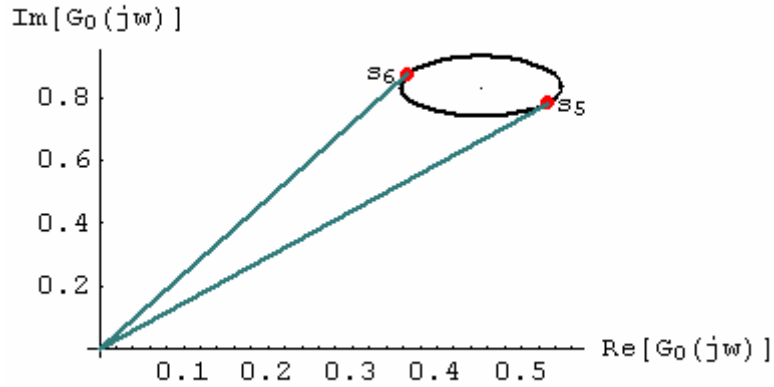
$$K_{p2} = -0.25 \quad (6.218)$$

olarak bulunur. Bu sınırlar arasında oluşan belirsiz bölge de, Şekil 6.33’de gösterilmiştir.  $w = 0$  için, (6.133)’den bulunan  $K_i = 0$  doğrusu da reel kök sınırı verir.  $K_p - K_i$  düzlemindeki Şekil 6.33’de görülen eğri, Şekil 6.3’deki eğrinin etrafında belirsizlik disklerinden oluşan bant bulunan biçimdir ve  $0 < w < \infty$  için yeşil renkle gösterilen belirsizlik bölgesi, orijini içermemektedir.



**Şekil 6.33 :** Örnek 6.8 İçin 1. Yöntemle Bulunan  $K_p - K_i$  Düzlemindeki  $P$ -bölgeleri ve Belirsizlik Bantları (Yeşil Renkliler, 1. Yöntemle Bulunan Belirsizlik Bölgesidir).

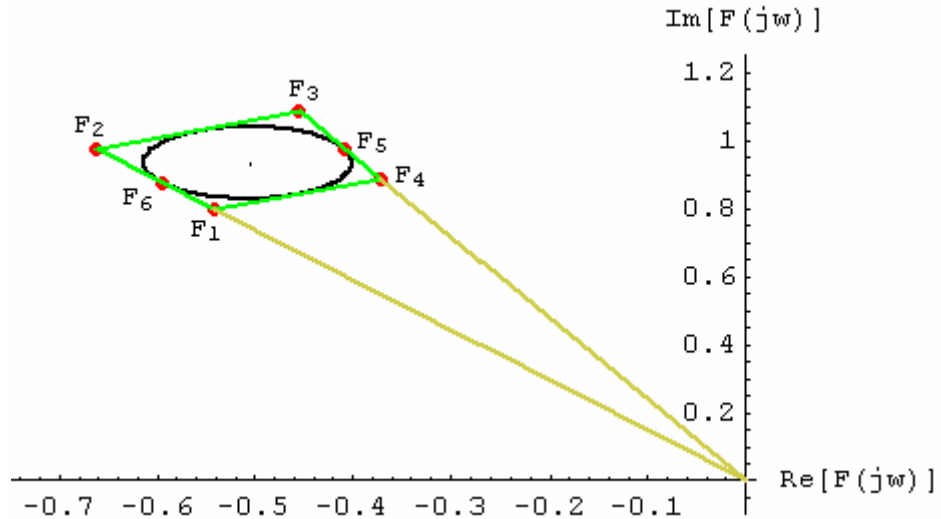
Bölüm 6.4.3’de verilen dörtgen yöntemi kullanarak sistemi kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini bulalım. Bu amaçla Şekil 6.28’de verilen  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diskini en sıkı biçimde içine alan bir sektör,  $w_{fix} = 10$  için Şekil 6.34’de gösterilmiştir. Bu sektörün belirsizlik diskine teğet olduğu  $s_5$  ve  $s_6$  noktaları da, Şekil 6.34’de gösterilmiştir.



**Şekil 6.34 :**  $w_{fix} = 10$  İçin Şekil 6.28’deki  $G_0(jw)$ ’ye İlişkin Belirsizlik Diskini İçine Alan Sektör.

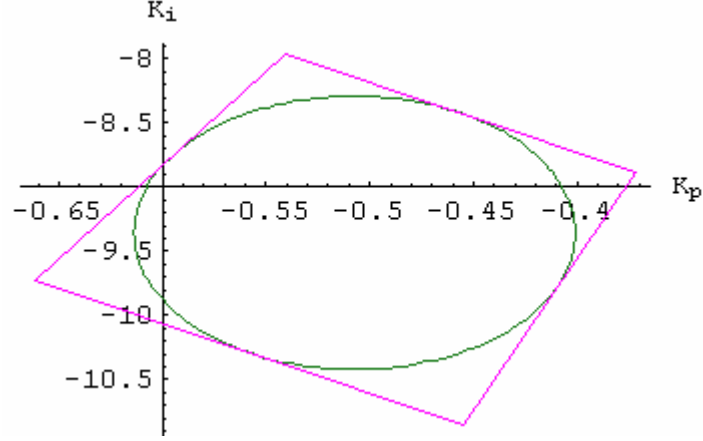
Seçilen  $w_{fix} = 10$  frekansı için,  $G_{0R}(jw_{fix}) = 0.45237$  ve  $G_{0I}(jw_{fix}) = 0.83435$  kullanılarak  $|G_0(jw_{fix})| = \sqrt{G_{0R}^2(jw_{fix}) + G_{0I}^2(jw_{fix})} = 0.9491$  olarak hesaplanır.  $\varepsilon_G(w_{fix}) = 0.09491$  ve  $|G_0(jw_{fix})| = 0.9491$  için, (6.163) ve (6.164)'den  $g(w_{fix}) = 0.85419$  ve  $g_2(w_{fix}) = 1.044$  olarak bulunur. Şekil 6.34 için, (6.166)'dan  $|s_5(jw_{fix})| = \ell_5(w_{fix}) = |s_6(jw_{fix})| = \ell_6(w_{fix}) = 0.944337$  olarak hesaplanır. Ayrıca  $\gamma_1 = \arctan[G_{0I}(jw_{fix})/G_{0R}(jw_{fix})] = 61.565^\circ$  olduğu görülür.

$G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskini ile  $s_5$  ve  $s_6$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemindeki iz düşümleri olan Şekil 6.29'daki eliptik bir belirsizlik diskini ve buna ilişkin  $F_5$  ve  $F_6$  noktaları Şekil 6.35'de gösterilmiştir.  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskini üzerindeki  $F_5$  ve  $F_6$  noktaları ile orijini birleştiren doğru parçaları yardımıyla Şekil 6.35'deki bu eliptik disk sıkıca içine alan Şekil 6.25'dekine benzer bir sektörü elde edebiliriz. Şekil 6.35'de gösterildiği gibi tutuculuğu azaltacak ve  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskini tam olarak sıkıca içine alacak biçimde birbirine paralel  $\overrightarrow{F_1F_4}$  ve  $\overrightarrow{F_2F_3}$  doğru parçaları çizdirilerek  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğunu oluştururuz.  $w_{fix} = 10$  için (6.170)'den  $|F_0(jw_{fix})| = 1.0536$  bulunur.  $F_5$  ve  $F_6$  noktalarının orijine olan uzaklıkları  $|F_5(jw_{fix})| = 1/|s_5(jw_{fix})| = |F_6(jw_{fix})| = 1/|s_6(jw_{fix})| = 1.05894$  olarak hesaplanır. (6.173)'den  $r_F(w_{fix}) = 0.10589$  olarak bulunurken; (6.174)'den ise  $\beta_1 = 5.7390^\circ$  olarak hesaplanır. Bu sonuçlardan yararlanarak  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğunun köşe noktalarının koordinatları, (6.178), (6.179), (6.180) ve (6.181) kullanılarak hesaplanabilir.



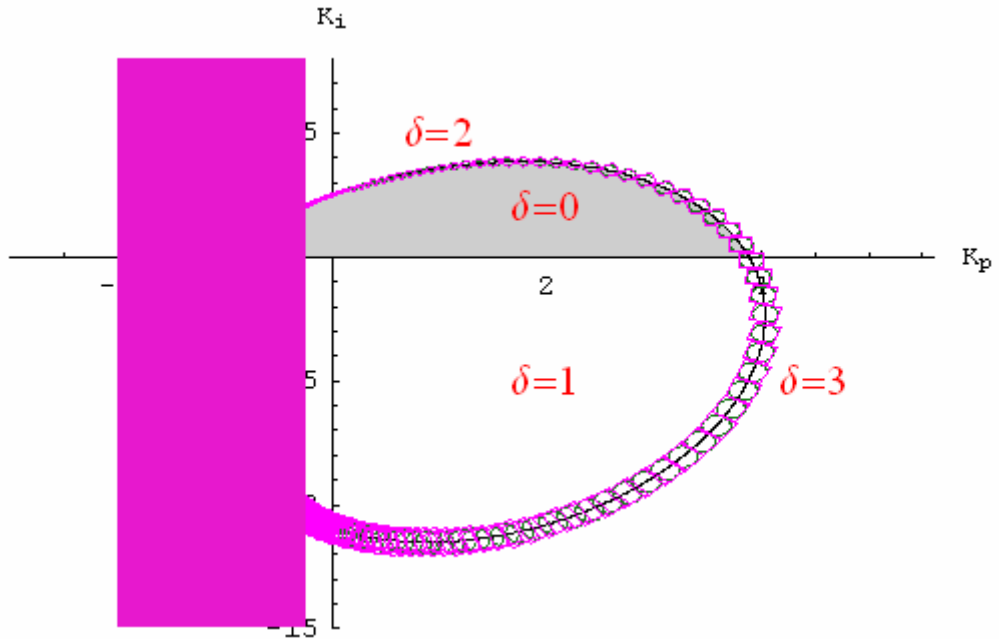
**Şekil 6.35 :**  $w_{fix} = 10$  İçin Şekil 6.29'daki  $F(jw)$ 'ye İlişkin Eliptik Belirsizlik Diskini Yamuk İle Çevreleme.

Şekil 6.35'deki  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğunun ve  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskinin  $K_p - K_i$  düzlemine iz düşürülmesiyle, Şekil 6.36 elde edilir. Şekil 6.36, gerçekte Şekil 6.30'daki eliptik belirsizlik diskinin yamukla çevrelenmiş biçimidir.  $K_p - K_i$  düzlemindeki bu yamuğun köşe noktalarının yerlerini belirlemek için; (6.190), (6.191), (6.192), (6.193), (6.194) bağıntıları kullanılır.



**Şekil 6.36 :**  $w_{fix} = 10$  İçin Şekil 6.30'daki Eliptik Belirsizlik Diskinin Yamuk İle Çevrelenmiş Biçimi.

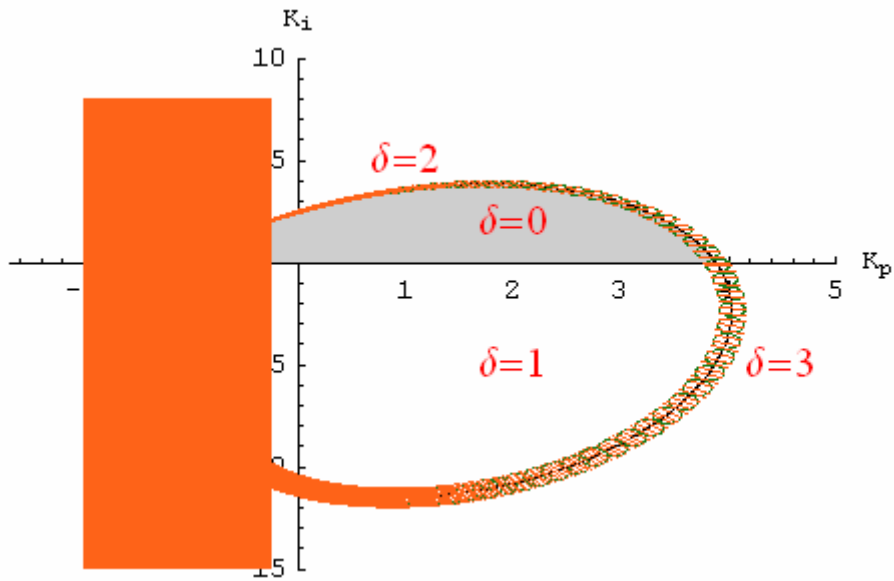
$w = w_{fix}$  için Şekil 6.36'nın elde edilişindeki yöntemin, Şekil 6.33'de görülen tüm eliptik disklere uygulanmasıyla;  $K_p - K_i$  düzlemindeki  $P$ -bölgelerinin sınırlarına, Şekil 6.37'de görülen yamuklardan oluşan belirsizlik bantını koyabiliriz.



**Şekil 6.37 :** Örnek 6.8 İçin Dörtgen Yöntemi Kullanılarak  $K_p - K_i$  Düzlemindeki  $P$ -bölgelerinin Yamuklarla Çevrelemesiyle Oluşan Belirsizlik Bantı (Mor Renkli).

Şekil 6.37'ye dikkat edersek, belirsizlik bantındaki hiçbir disk, orijini ne içerir ne de ( $w \rightarrow \infty$  için olan hariç) teğettir. Bu nedenle belirsizlik bölgeleri, belirsizlik disklerini çevreleyen yamukların içlerinden oluşan bantın da bulunduğu mor renkle gösterilen yerlerdir. Bu sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörlerinin bölgesi ise, Şekil 6.37'de görülen mor renkli yerlerin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu gri renkli bölgedir.

Belirsizlik bölgesini ve sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesini bulmanın diğer bir yolu da, Bölüm 3.6'da verilen sonuçların  $\theta: (0-\pi)$  arasında değişmek üzere (6.162)'de verilen yeni sisteme uyarlanmasını öneren ikinci yöntemdir. Karşılaştırma amacıyla birinci yöntemle bulunan Şekil 6.33'deki belirsizlik disklerinin üzerine Bölüm 6.4.2'de verilen ikinci yöntemle bulunan belirsizlik bölgesi turuncu renkle taratılarak Şekil 6.38'de gösterilmiştir. Burada dikkat çekmesi gereken nokta, Pentium 4 CPU, 2.8 GHz işlemcili ve 512 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda Mathematica 5 yazılımı kullanılarak yapılan simülasyonda birinci yöntem yardımıyla bulunan Şekil 6.33'deki belirsizlik bölgelerinin hesaplanmasının 60.703 saniye kadar sürdüğü ve buna karşılık ikinci yöntemle bulunan Şekil 6.38'deki belirsizlik bölgelerinin hesaplanmasının ise 172.406 saniye sürdüğüdür. Aynı bilgisayarda Bölüm 6.4.3'de verilen dörtgen yöntemi kullanılarak yaklaşık hesapla bulunan Şekil 6.37'deki üstten çevrelemeyle yamuklardan oluşan ve mor renkle gösterilen belirsizlik bölgesinin elde edilmesi ise 0.484 saniye sürmüştür. Bu sistem için dörtgen yöntemi kullanılarak yapılan yaklaşık hesapların sonucunda işlem hızı, birinci yönteme kıyasla 120 kat kadar arttırılmışken; ikinci yönteme kıyasla ise 345 kat kadar arttırılmıştır.



**Şekil 6.38 :** Örnek 6.8 İçin Bölüm 6.4.2'deki 2. Yöntemle Bulunan  $K_p - K_i$  Düzlemindeki Belirsizlik Bölgesi (Turuncu, 2. Yöntemle; Yeşil 1. Yöntemle bulunandır).

Belirsizlik disklerinin bir kısmının orijini içermesi veya bir noktada dokunması durumuna örnek olması açısından aşağıdaki sayısal örnek verilmiştir.

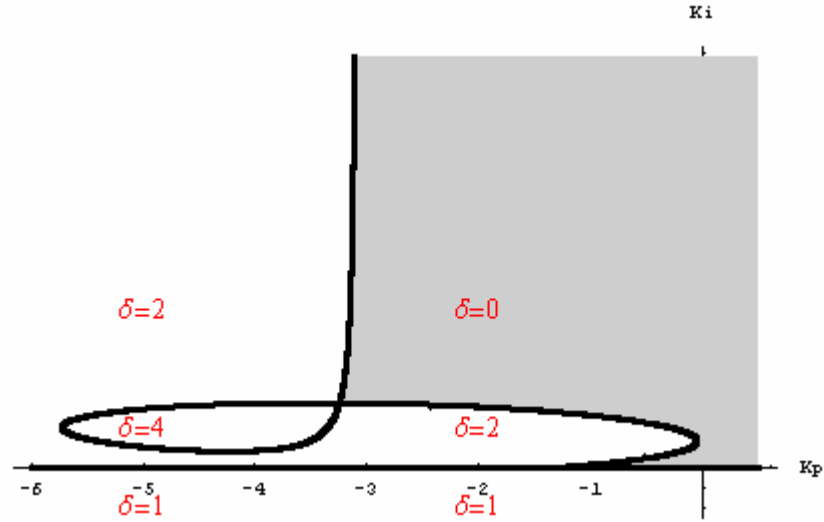
#### 6.4.3.2 Örnek 6.9 (Yöntem 1, Yöntem 2 ve Dörtgen yöntemi için)

Kesin nedensel olan

$$G_0(s) = \frac{6s^3 + 14.75s^2 + 55.5s + 72}{s^4 + 21s^3 + 58s^2 + 104s + 96} \quad (6.219)$$

sistemi ve  $W(s) = \frac{2s+1}{s+100}$  ağırlık transfer fonksiyonunun oluşturduğu Şekil 3.15'deki yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemi, dayanıklı kararlı kılacak PI kontrolörler bölgesini bulalım.

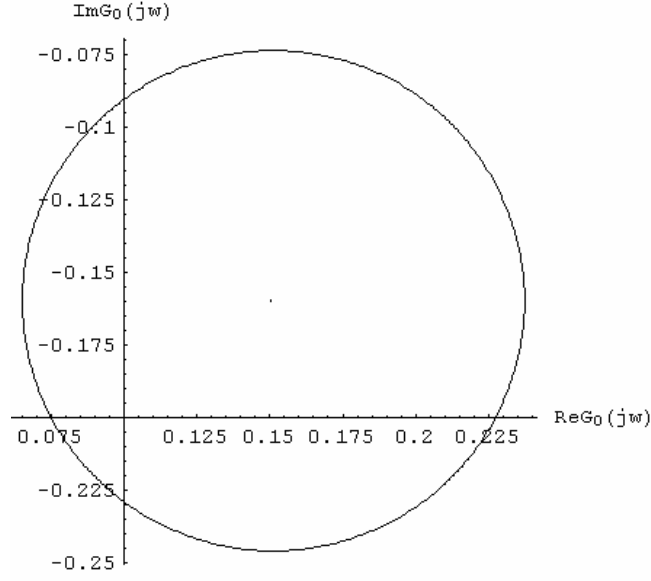
Bölüm 6.1'de verilen yöntem yardımıyla belirsizliğin olmadığı durumda  $K_p - K_i$  parametre uzayında kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı  $P$ -bölgeleri, Şekil 6.39'da gösterilmiştir.  $G_0(s)$  sistemi, kesin nedensel olduğundan;  $w \rightarrow \infty$  için bir kararlılık sınırı yoktur.  $w = 0$  için,  $K_i = 0$  doğrusu bir kararlılık sınırıdır. Ayrıca (6.27) ve (6.28)'den oluşturulan kararlılık sınırı vardır. Gölgeleştirilmiş olan bölge,  $G_0(s)$  sistemini kararlı kılan PI kontrolörler bölgesidir.



**Şekil 6.39 :** Örnek 6.9'da Belirsizliğin Olmadığı Durum İçin  $K_p - K_i$  Düzleminde  $P$ -bölgeleri ve Kararsız Kutup Sayıları ( $w = 25$ ).

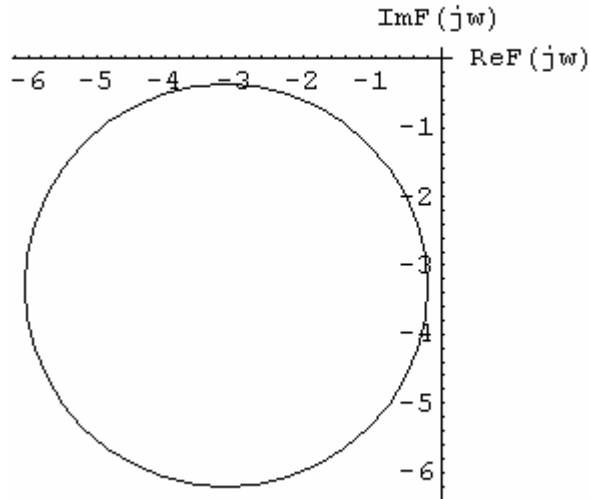
Şimdi belirsizlik olan sistem için birinci yöntemi kullanalım. Bu yöntemin ilk aşaması için  $w_{fix} = 20$  olarak seçilmek üzere  $\theta: (0 - 2\pi)$  arasında değişmek üzere (6.140)'dan  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin bir belirsizlik diski, Şekil 6.40'da görülmektedir.





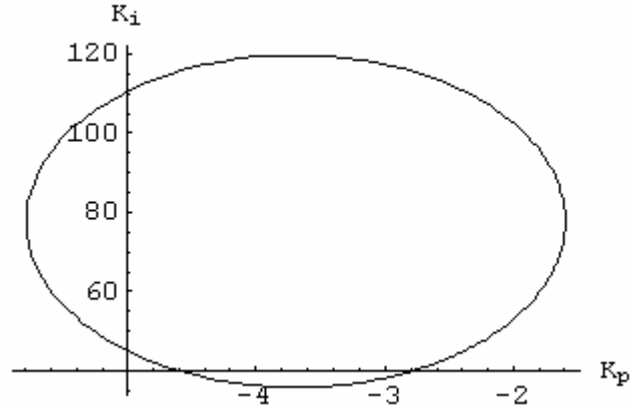
**Şekil 6.40 :** Örnek 6.9’da  $w_{fix} = 20$  İçin  $G_0(jw)$ ’ye İlişkin Bir Belirsizlik Diski.

$w_{fix} = 20$  için  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diski orijini içermemektedir.  $w_{fix} = 20$  için  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diskindeki noktaların  $F(jw)$  düzlemine iz düşürülmesiyle bulunan eliptik belirsizlik diski, Şekil 6.41’de gösterilmiştir.



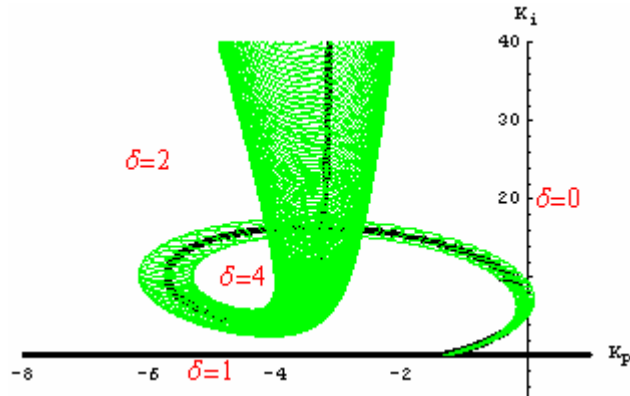
**Şekil 6.41 :** Örnek 6.9’da  $w_{fix} = 20$  İçin  $F(jw)$ ’ye İlişkin Bir Eliptik Belirsizlik Diski.

$w_{fix} = 20$  için  $F(jw)$  düzlemindeki belirsizlik diskinin  $K_p - K_i$  düzlemine iz düşürülmesi sonucu Şekil 6.42’deki gibi dönüştürülmüş bir eliptik disk elde edilir.



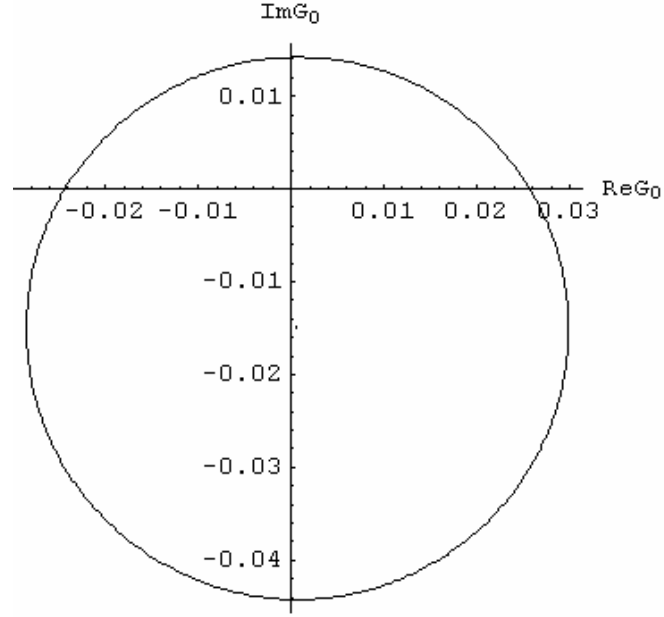
**Şekil 6.42 :** Örnek 6.9’da  $w_{fix} = 20$  İçin  $K_p - K_i$  Düzleminde Eliptik Belirsizlik Diski

Orijini içermeyen  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki dönüşükleri olan eliptik belirsizlik disklerinin oluşturduğu yeşil renkli belirsizlik bölgesinin bir kısmı,  $K_i = 0$  doğrusu ve civarındaki  $P$ -bölgelerindeki kararsız kutup sayısı,  $K_p - K_i$  düzlemi için Şekil 6.43’de gösterilmiştir.



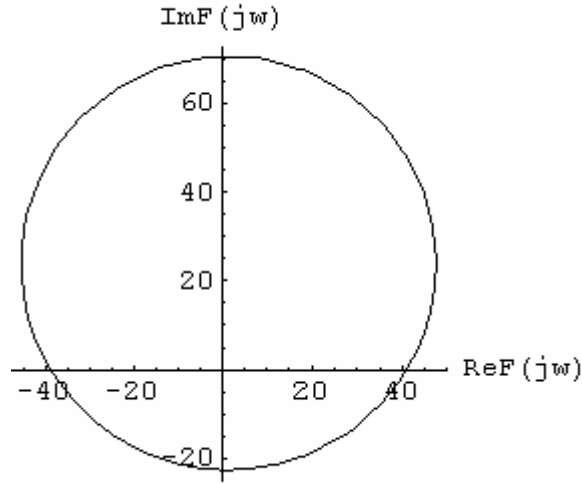
**Şekil 6.43 :** Örnek 6.9 İçin Orijini İçermeyen Belirsizlik Disklerinden Kaynaklanan ve 1. Yöntemle Bulunan  $K_p - K_i$  Düzlemindeki Belirsizlik Bantı.

Buraya kadar seçilen  $w_{fix}$  frekansı için belirsizlik diskleri, orijini içermiyordu. Birinci yöntemin ikinci aşaması olarak  $w_{fix}$  frekansı arttırılırsa; belli bir frekanstan sonra belirsizlik diskleri, orijini içermeye başlar. Örnek olması açısından  $w_{fix} = 400$  olarak seçelim. Bu frekans için  $\theta: (0 - 2\pi)$  arasında değişmek üzere  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diskleri, Şekil 6.44’de gösterilmiştir. Bu disk, orijini içerdiğinden Şekil 6.23c’deki gibi bir yapıya uymaktadır. Bu nedenle bu diskin  $F(jw)$  düzlemindeki iz düşümünden elde edilen diskin dışı, belirsizlik bölgesine dahil olacaktır.



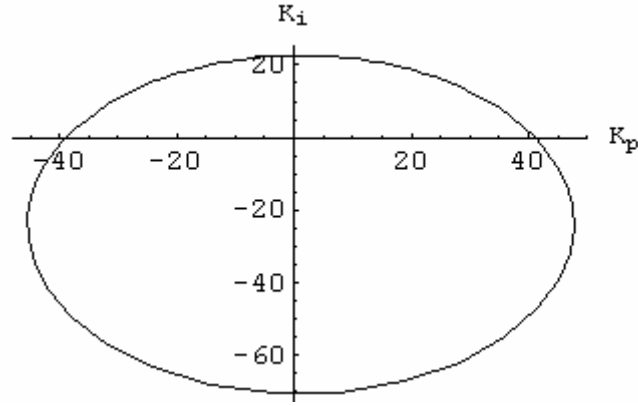
**Şekil 6.44 :** Örnek 6.9’da  $w_{fix} = 400$  İçin  $G_0(jw)$ ’ye İlişkin Bir Belirsizlik Diski.

$w_{fix} = 400$  için  $F(jw)$ ’ye ilişkin eliptik belirsizlik diski ise,  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin olanından yararlanarak Şekil 6.45’deki gibi grafiksel olarak gösterilebilir.



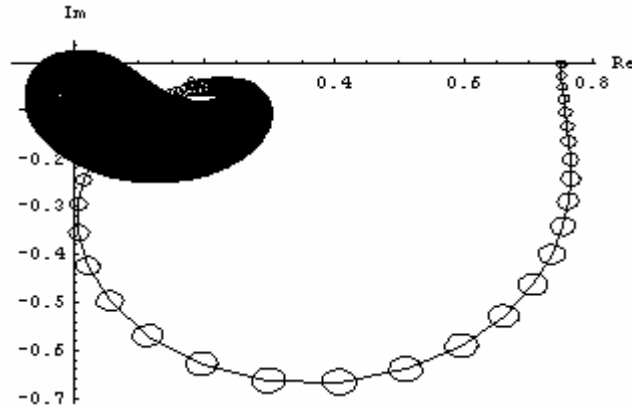
**Şekil 6.45 :** Örnek 6.9’da  $w_{fix} = 400$  İçin  $F(jw)$ ’ye İlişkin Bir Belirsizlik Diski.

$w_{fix} = 400$  için  $F(jw)$  düzlemindeki belirsizlik diskinin  $K_p - K_i$  düzlemine iz düşürülmesi sonucu Şekil 6.46’daki gibi orijini içeren bir eliptik disk elde edilir. Bu nedenle  $K_p - K_i$  düzlemindeki kararlılık sınırlarının etrafındaki belirsizlik bantı oluşturulurken; bu disklerin dış kısımları dikkate alınacaktır.



**Şekil 6.46 :** Örnek 6.9’da  $w_{fix} = 400$  İçin  $K_p - K_i$  Düzlemindeki Eliptik Bir Belirsizlik Diski.

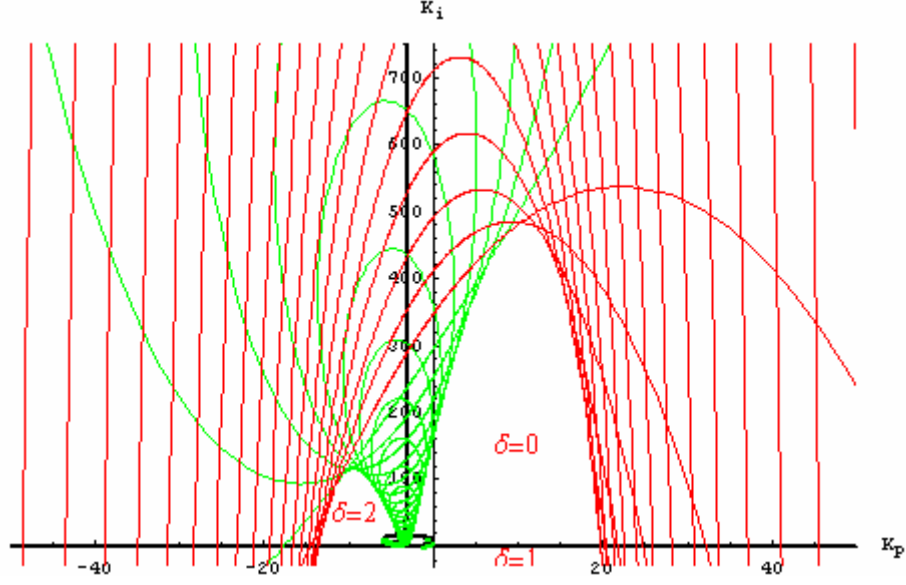
$G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik disklerinin elde edilişinden hareketle  $0 < w < 200$  arası için  $\hat{G}(jw)$ ’nin Nyquist eğrisi etrafında oluşan belirsizlik bantları, Şekil 6.47’de gösterilmiştir.



**Şekil 6.47 :** Örnek 6.9’da  $0 < w < 200$  İçin  $\hat{G}(jw)$ ’nin Nyquist Eğrisi.

$G_0(s)W(s)$  nedensel olduğundan;  $w \rightarrow \infty$  için  $K_p - K_i$  düzleminde sonsuz kök sınırı ve bu sınır etrafında herhangi bir belirsizlik bantı yoktur.  $0 < w < \infty$  arası frekanslar için (6.156) ve (6.157)’den yararlanarak  $K_p - K_i$  düzleminde kompleks kök sınırını çevreleyen belirsizlik bantı, Şekil 6.48’deki gibi bulunur. Birinci yöntemin kullanılmasıyla bulunan Şekil 6.48’deki yeşil renkli bölgenin içi, orijini içermeyen belirsizlik disklerinden oluşmuşken; kırmızı renkli bölge ise, orijini içeren disklerin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümlerinin dış kısımlarından oluşmuştur. Aslında Şekil 6.48, orijini içermeyen  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik disklerinden kaynaklanan Şekil 6.43’deki yeşil renkli belirsizlik bölgesinin üzerine ilave olarak, orijini içeren belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki dönüşüklerinin dışında kalan bölgelerden oluşan kırmızı renkli belirsizlik bölgesinin de eklenmiş biçimidir.  $w = 0$  için,  $K_i = 0$

doğrusu, reel kök sınırıdır. Şekil 6.48’de  $\delta = 0$  olan bölge, verilen ağırlık transfer fonksiyonu için sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörlerin bölgesidir.

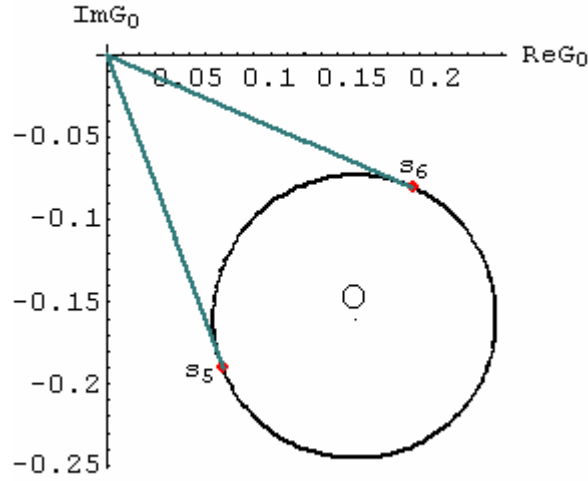


**Şekil 6.48 :** Örnek 6.9 İçin  $K_p - K_i$  Düzlemindeki P-bölgeleri ve 1. Yöntemle

Bulunan Belirsizlik Bölgeleri (Yeşil renk, Orijini İçermeyen Disklere İlişkin Olmasına Karşılık; Kırmızı Renk, Orijini İçeren Belirsizlik Disklerine ilişkindir).

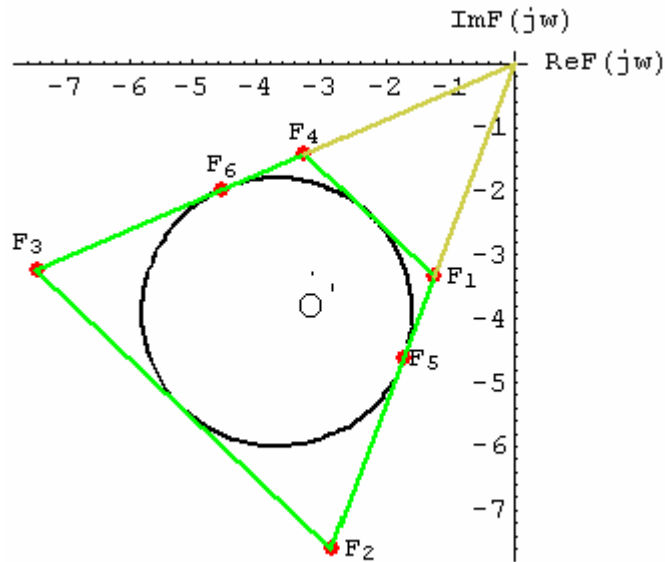
Şekil 6.48’in elde edilmesiyle dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerin bölgesinin bulunması, oldukça zaman alır ve cebrik olmayan hesaba nümerik olarak bulunabilir. Bu nedenle Bölüm 6.4.3’de verilen dörtgen yöntemini kullanarak  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik disklerinin olduğu durum için  $K_p - K_i$  düzleminde oluşan belirsizlik bölgesini üstten çevreleyip iç kısımlarını almakla ve  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin orijini içeren belirsizlik disklerinin olduğu durum için ise  $K_p - K_i$  düzleminde oluşan belirsizlik bölgesinin tutuculuğu en aza indirecek biçimde dış kısımlarını almakla, hızlı bir çözüm elde edebiliriz.

Orijini içermeyen  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik disklerini üstten sıkı bir sektör ile çevrelemeyi amaçlayan Bölüm 6.4.3’deki yöntem, hızlı bir şekilde cebirsel işlemleri yapabilmek açısından dikkate değerdir. Şekil 6.40’da verilen  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik diskini en sıkı biçimde içine alan bir sektör,  $w_{fix} = 20$  için Şekil 6.49’da gösterilmiştir. Burada  $\varepsilon_G(w_{fix}) = 0.0861$  olarak hesaplanırken;  $G_{0R}(jw_{fix}) = 0.1513$ ,  $G_{0I}(jw_{fix}) = -0.1596$  ve  $|G_0(jw_{fix})| = 0.219$  olarak bulunur.  $g(w_{fix}) = 0.134$  ve  $g_2(w_{fix}) = 0.306$  olarak hesaplanır. (6.166)’dan ise  $|s_5(jw_{fix})| = |s_6(jw_{fix})| = 0.2024$  olarak bulunur. Ayrıca  $\gamma_1 = -46.43^\circ$  olduğu görülür.



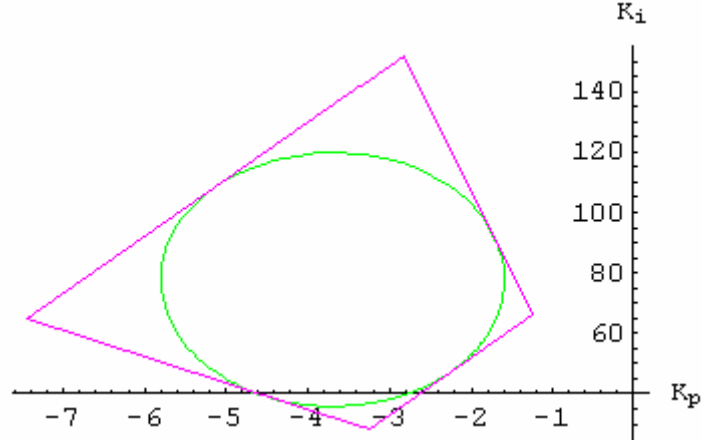
**Şekil 6.49 :**  $w_{fix} = 20$  İçin Şekil 6.40'daki  $G_0(jw)$ 'ye İlişkin Belirsizlik Diskini İçine Alan Sektör.

$w_{fix} = 20$  için  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik diskini  $s_5$  ve  $s_6$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemindeki iz düşümleri, Şekil 6.50'de gösterilmiştir.  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskini sıkıca içine alan  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğu için  $|F_0(jw_{fix})| = 4.5468$  ve  $|F_5(jw_{fix})| = |F_6(jw_{fix})| = 4.9411$  olarak hesaplanır. Ayrıca  $r_F(w_{fix}) = 1.93424$  olarak bulunurken;  $\beta_1 = 23.057^\circ$  olarak hesaplanır. Şekil 6.49'daki O merkezinin  $F(jw)$  düzlemine iz düşümü, O' olarak Şekil 6.50'de gösterilmiştir.



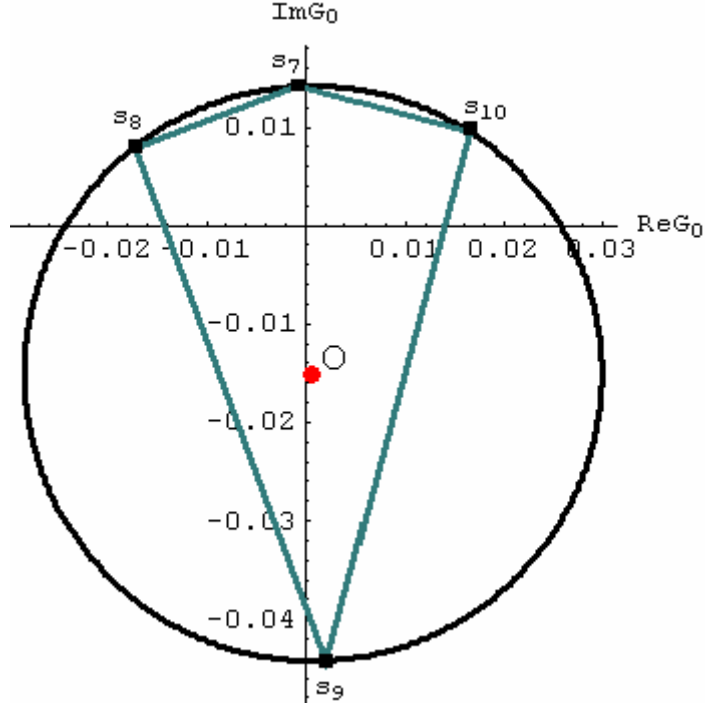
**Şekil 6.50 :**  $w_{fix} = 20$  İçin Şekil 6.41'deki  $F(jw)$ 'ye İlişkin Eliptik Belirsizlik Diskini Yamuk İle Çevreleme.

Şekil 6.50'deki  $F_1F_2F_3F_4$  yamuğunun ve  $F(jw)$ 'ye ilişkin eliptik belirsizlik diskinin  $K_p - K_i$  düzlemine iz düşürülmesiyle, Şekil 6.51 elde edilir.



**Şekil 6.51 :**  $w_{fix} = 20$  İçin Şekil 6.42'deki Eliptik Belirsizlik Diskinin Yamuk İle Çevrelenmiş Biçimi.

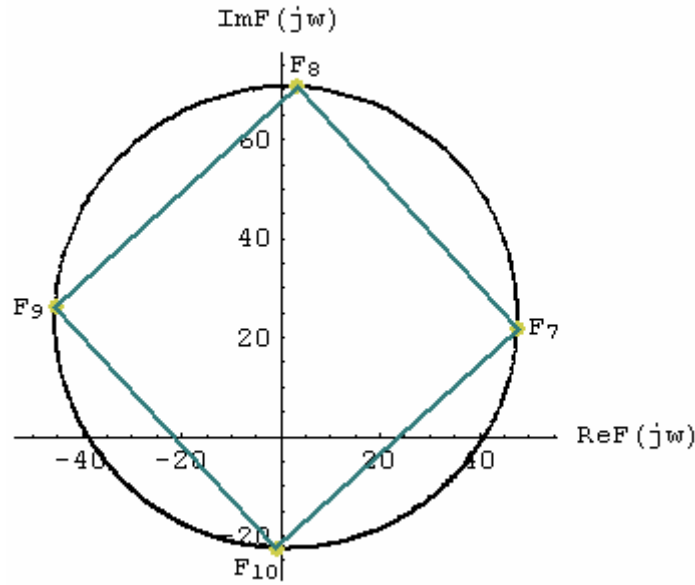
Bölüm 6.4.3'deki yaklaşık yöntemin ikinci aşaması olarak  $w_{fix}$  frekansı arttırılıp seçilen  $w_{fix} = 400$  için bulunan Şekil 6.44'deki  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içeren belirsizlik diskinin içine Şekil 6.52'de görülen  $s_7s_8s_9s_{10}$  dörtgenini yerleştirelim.



**Şekil 6.52 :** Örnek 6.9'da  $w_{fix} = 400$  İçin, Şekil 6.44 İle Verilen  $G_0(jw)$ 'ye İlişkin Orijini İçeren Belirsizlik Diski ve  $s_7s_8s_9s_{10}$  Dörtgeni.

Şekil 6.52'ye ilişkin olarak  $w_{fix} = 400$  için,  $\varepsilon_G(w_{fix}) = 0.0292$  olarak hesaplanırken;  $G_{0R}(jw_{fix}) = -0.01504$ ,  $G_{0I}(jw_{fix}) = 0.01415$  ve  $|G_0(jw_{fix})| = 0.0007$  olarak bulunur.  $s_7(jw)$  ve  $s_9(jw)$ 'nin genlikleri, (6.196) ve (6.197)'den  $|s_7(jw_{fix})| = 0.0141$  ve  $|s_9(jw_{fix})| = 0.0443$  olarak bulunur. (6.211)'den  $L_{78}(w_{fix}) = 0.0556$  olarak hesaplanır. Ayrıca (6.213)'den yararlanarak  $\alpha = 17.74^\circ$  olduğu görülür. Şekil 6.52'den hareketle (6.215) ve (6.216)'dan  $w_{fix} = 400$  için,  $s_8(jw_{fix})$  ve  $s_{10}(jw_{fix})$  noktalarının koordinatları elde edilir. Bu iki noktanın  $F(jw)$  düzlemine iz düşümüyle elde edilen  $F_8(jw_{fix})$  ve  $F_{10}(jw_{fix})$  noktaları, aynı eksen üzerinde olacaktır.

Şekil 6.52'de görülen  $G_0(jw)$  düzlemindeki belirsizlik diskine ilişkin  $s_7(jw)$ ,  $s_8(jw)$ ,  $s_9(jw)$  ve  $s_{10}(jw)$  noktalarının  $F(jw)$  düzlemine iz düşürülmesiyle elde edilen ve Şekil 6.45'deki eliptik belirsizlik diski üzerinde yer alan  $F_7(jw)$ ,  $F_8(jw)$ ,  $F_9(jw)$  ve  $F_{10}(jw)$  noktalarının oluşturduğu  $F_7F_8F_9F_{10}$  eş kenar dörtgeni, Şekil 6.53'de verilmiştir.

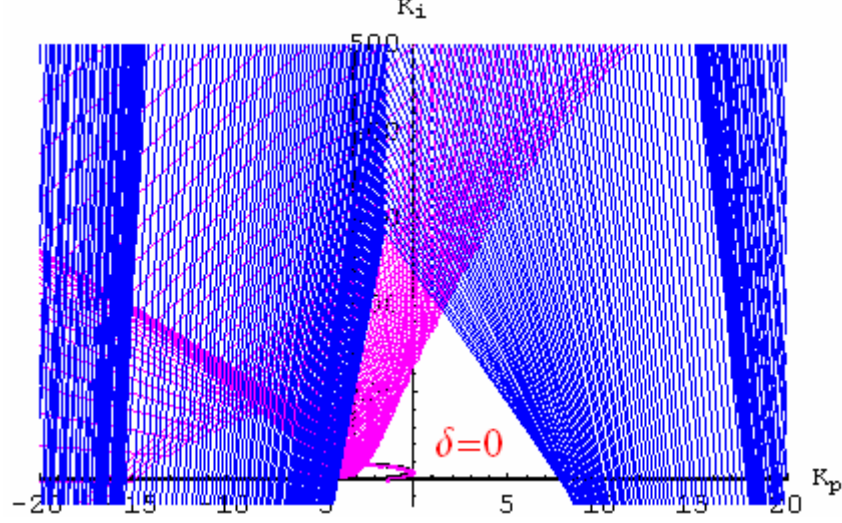


**Şekil 6.53 :** Örnek 6.9'da Şekil 6.48 ile verilen  $F(jw)$ 'ye İlişkin Eliptik Belirsizlik Diski ve  $F_7F_8F_9F_{10}$  Dörtgeni.

Böylece orijini içeren ve içermeyen  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin içerden ve dışarıdan çevrelenmesine dayanan Bölüm 6.4.3'deki yaklaşık yöntemin kullanılmasıyla  $K_p - K_i$  düzleminde oluşan belirsizlik bölgesi, Şekil 6.54'de gösterilmiştir. Bölüm 6.4.3'deki yaklaşık yöntemle bulunan Şekil 6.54'deki mor renkli bölgenin içi, orijini içermeyen belirsizlik disklerinden oluşmuşken; mavi renkli bölge ise, orijini içeren disklerin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümlerinin dış

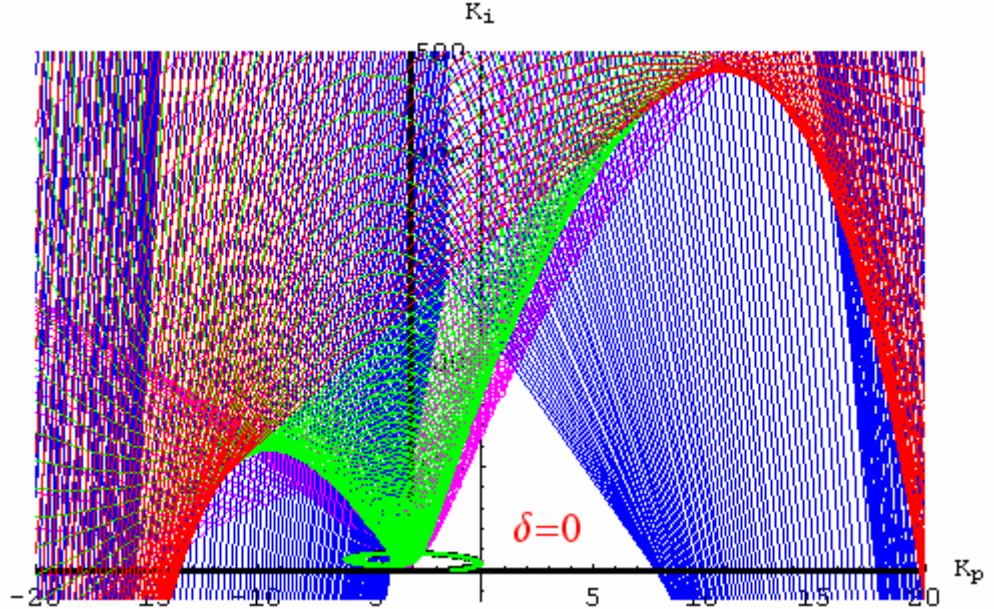


kısımlarından oluşmuştur.  $\delta = 0$  olan bölge, bu yöntemle bulunan ve kapalı çevrimde sistemi dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörlerin bölgesidir. Bu bölgenin Şekil 6.48'deki kapalı çevrim kutup sayısının sıfır olduğu gerçek bölgeye göre daha küçük olması, Bölüm 6.4.3'deki yaklaşık yöntemin tutucu sonuç verdiğinin bir göstergesidir.



**Şekil 6.54 :** Örnek 6.9 İçin  $K_p - K_i$  Düzleminde Belirsizlik Disklerinin İçeriden ve Dışarıdan Çevrenmesine Dayalı Dayanıklı Kararlı Kılan PI Kontrolörler Bölgesi.

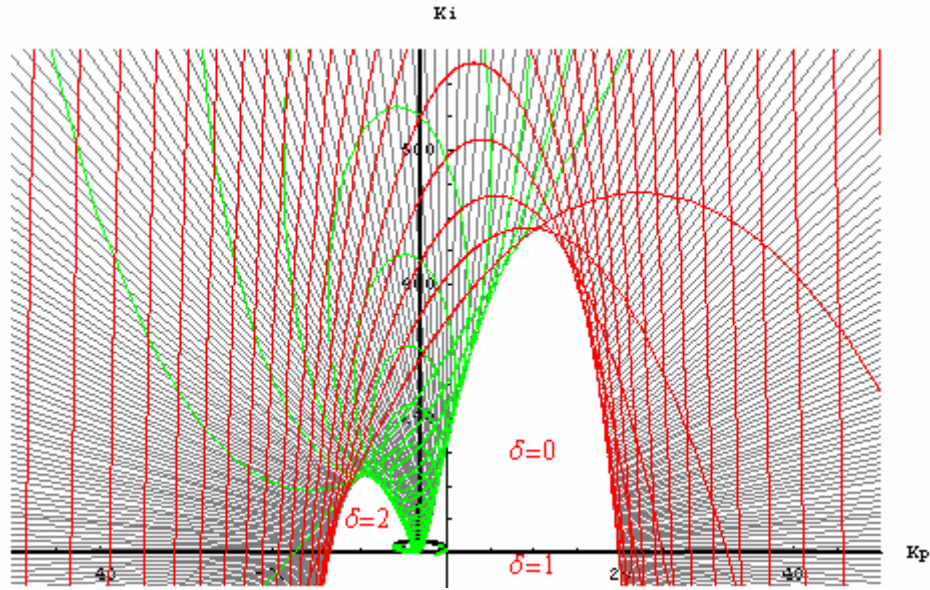
Şekil 6.48'deki belirsizlik bölgelerinin Şekil 6.54'deki belirsizlik bölgeleri tarafından kaplanmasıyla, Şekil 6.55 elde edilir.



**Şekil 6.55 :** Örnek 6.9 İçin Şekil 6.48 ile Şekil 6.54'ün Karşılaştırılması (Maviler Orijini İçeren; Morlar Orijini İçermeyen Disklere İlişkin Dörtgen Yöntemiyle Bulunan Yaklaşık Belirsizlik Bölgeleridir. Diğer Taraftan Kırmızılar ise Orijini İçeren; Yeşiller Orijini İçermeyen Disklere İlişkin 1. Yöntemle Bulunan Gerçek Belirsizlik Bölgeleridir).

Şekil 6.55'e dikkat edersek orijini içermeyen belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümlerinin iç kısımlarından oluşan yeşil renkli gerçek bölgenin tutucu sonuç veren Bölüm 6.4.3'deki dörtgen yöntemiyle bulunan orijini içermeyen belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümlerinin iç kısımlarından oluşan mor renkli bölge tarafından kaplanmış olduğunu ve ayrıca orijini içeren belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümlerinin dış kısımlarından oluşan kırmızı renkli gerçek bölgenin tutucu sonuç veren dörtgen yöntemiyle bulunan orijini içeren belirsizlik disklerinin  $K_p - K_i$  düzlemindeki iz düşümlerinin dış kısımlarından oluşan mavi renkli bölge tarafından kaplanmış olduğunu görürüz.

Bu sistemi dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörler bölgesini belirlemek için ikinci yöntem olarak Bölüm 6.4.2'de önerilen yöntemle bulunan belirsizlik bölgesi, gri renkle taratılarak Şekil 6.48'deki belirsizlik bölgesiyle birlikte Şekil 6.56'da gösterilmiştir. Gri renkli belirsizlik bölgesinin birinci yöntemle bulunan yeşil-kırmızı renkli belirsizlik bölgesiyle aynı olan gerçek bölge olduğu, Şekil 6.56'dan görülmektedir.



**Şekil 6.56 :** Örnek 6.9 İçin 1. ve 2. Yöntemle Bulunan  $K_p - K_i$  Düzlemindeki Belirsizlik Bölgelerinin Karşılaştırılması (Kırmızılar Orijini İçeren; Yeşiller Orijini İçermeyen Disklere İlişkin 1. Yöntemle Bulunan Belirsizlik Bölgeleridir. Gri Renkli Bölge ise 2. Yöntemle Bulunan Belirsizlik Bölgesini Gösterir).

Pentium 4 CPU, 2.8 GHz işlemcili ve 512 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda Mathematica 5 yazılımı kullanılarak yapılan simülasyonda birinci yöntem yardımıyla bulunan Şekil 6.48'deki belirsizlik bölgelerinin hesaplanması 78.812 saniye kadar sürerken; ikinci yöntemle bulunan Şekil 6.56'daki belirsizlik bölgesinin

hesaplanması ise 62.735 saniye sürmüştür. Ayrıca Bölüm 6.4.3’de verilen dörtgen yöntemi kullanılarak yaklaşık hesapla bulunan Şekil 6.54’deki belirsizlik bölgelerinin elde edilmesi, 0.385 saniye sürmüştür. Dörtgen yöntemi kullanılarak yapılan yaklaşık hesapların sonucunda işlem hızının birinci ve ikinci yönteme kıyasla oldukça çok arttırılmış olduğu görülür.

## 6.5 Sonuç

Bu bölümde, parametre uzayı yaklaşımı kullanılarak zaman gecikmesiz ve gecikmeli sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler hesaplanmıştır. Özel bir durum olarak birinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için PI kontrolörler tasarlamak amacıyla kutup atama üzerine kurulu ve genelde aşısız birim basamak yanıtı veren yeni bir yöntem de tanıtılmıştır. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar, PI kontrolör katsayıları ayarlama üzerine literatürde iyi bilinen yöntemlerle karşılaştırılmış ve çeşitli sayısal örneklerle birlikte gerçek bir sistem üzerinde de test edilmiştir. Ayrıca yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılabilen tüm PI kontrolörler bölgesini hesaplamak için yeni yöntemler önerilmiştir. Birinci yöntem, orijini içeren ve içermeyen  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin belirsizlik disklerinin sırasıyla dış ve iç kısımlarının alınıp PI düzlemine iz düşürülmesiyle belirsizlik bölgesinin bulunmasına dayanan bir yöntemdir. Bu yolla bulunan belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır olduğu bölge dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörlerinin bölgesidir. İlk yöntemdeki hesap yoğunluğunu azaltıp belirsizlik bölgesini hızlıca bulabilmek için  $G_0(jw)$ ’ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin etrafı dışarıdan yamuklarla kaplanıp iç kısımları alınmışken; orijini içerenlerinkinin ise içeriden eş kenar dörtgenlerle çevrelenip dış kısımları alınmıştır. Dörtgen yöntemi adı verilen bu yöntemle bulunan dayanıklı kararlı kılın PI kontrolörleri bölgesi, yaklaşık bölgedir. Belirsizlik bölgesini ve sistemi dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesini bulmak için ikinci bir çözüm olarak da PI kontrolör parametrelerinin kutupsal koordinatlarda yazılmasına ve elde edilen yeni sisteme Bölüm 3.6’da verilen sonuçların uyarlanmasına dayanan bir yöntem önerilmiştir. Birinci ve ikinci yöntemin dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesinin tam bir kümesini veren yavaş bir yöntem olduğu; fakat buna karşılık dörtgen yöntemin tutucu sonuç veren hızlı bir yöntem olduğu, iki sayısal örnek kullanılarak da gösterilmiştir.

## 7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu tezde ilk olarak dayanıklılığın bir ölçütü olan kazanç ve faz paylarının verilen değerleri için zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapan oransal kontrolörlerin tam bir kümesini hızlıca hesaplamak amacıyla Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesine dayanan ve Munro ve diğ. (1999) ve Söylemez ve diğ. (2003) tarafından önerilmiş olan yönteme ilave koşullar konulmuştur. İstenen kazanç payı ve faz payı kriterlerini aynı anda sağlayan oransal kontrolörleri bulmak için her iki kriteri ayrı ayrı sağlayan oransal kontrolörlerin ortak kümesinin alınması yeterlidir. Bu ortak küme her durumda olmayabileceğinden veya kazanç ve faz payı kısıtlamalarının istenen her değeri için sistem kapalı çevrimde kararlı yapılamıyacağından bunların sınırlarını bulmak amacıyla erişilebilir maksimum kazanç payını ve maksimum faz payını hesaplayabilen yöntemler geliştirilmiştir. Özellikle erişilebilir maksimum faz payının hesabında açık çevrim sistemin kararlılık durumuna göre üç tür sisteme ilişkin olarak yöntem geliştirilmiş ve sayısal örneklerle de incelenmiştir.

Zaman gecikmeli sistemlerin kararlılık incelemesi polinomsu biçimindeki karakteristik denklemlerinin sonsuz sayıda köke sahip olmasından dolayı zaman gecikmesiz sistemlerinkinden daha zordur. Padé yaklaşımının kullanılmasıyla zaman gecikmesi terimi, rasyonel bir fonksiyon biçimine getirilmiş ve böylece elde edilmiş yeni eş değer sistem için Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesine dayanan yöntem kullanılarak kararlılık analizi yapılmıştır. Ancak bu yolla elde edilen kazanç aralıkları, Padé yaklaşımının kullanılmasından kaynaklanan ve yaklaşımın mertebesine bağlı olarak değişen hatalar içerir. Bu amaçla kararlılığın belirsiz olduğu bu hata paylarını da bularak, sistemi kapalı çevrimde kesin kararlı yapan kazanç aralıklarını cebrik olarak hesaplayan yeni bir yöntem önerilmiştir. Pade eş değerini kapalı çevrimde kararlı yapan kazançlar ile önerilen bu yöntemle hesaplanan hata payları arasındaki kümesel fark, kapalı çevrim sistemi kesin kararlı kılan kazanç aralıklarını verir. Ayrıca hem zaman gecikmesi hem de kazanç payı ve faz payı kısıtlamaları altında kapalı çevrim sistemi kararlı yapan kazançların hesabı yapılarak da bu yönteme ilave koşullar getirilmiştir. Zaman gecikmesiz sistemlerde hesap yöntemleri verildiği gibi zaman gecikmeli sistemler için de maksimum kazanç payı ve maksimum faz payının hesap yöntemi elde edilmiştir. Zaman gecikmeli sistemler için maksimum kazanç payı bulunurken; yukarıda anlatılan ve hata paylarıyla birlikte

sistemi kesin kararlı yapan kazanç aralıklarının mutlak değerce en büyük ve en küçük değerinin oranından yararlanılmıştır. Önemli bir sonuç olarak, zaman gecikmeli sistemler için maksimum faz payı hesabında üstel biçimde olan zaman gecikmesi terimini içermeyen tam çözüm bulunmuştur. Bu çözüm, polinomsu biçiminde olmayan reel katsayılı bir polinomun sonlu sayıda reel kökünün bulunmasını gerektirdiğinden; hesabı önemli ölçüde kolaylaştırır. Zaman gecikmeli sistemlere ilişkin elde edilen tüm hesap yöntemleri, sayısal örneklerle de anlatılmıştır.

Yapısal olmayan belirsizlikler sistemlerde kararsızlığa neden olabildikleri için, bunlara karşı sistemleri dayanıklı kararlı kılacak P ve PI kontrolörlerin tasarlanması önem kazanmaktadır; çünkü kontrolör tasarımında dayanıklılık, sistemlerin belirsizliklere karşı gösterdiği toleransın da bir ölçütüdür. Bu amaçla verilen bir ağırlık transfer fonksiyonu için yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz sistem yapısını kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapacak tüm kazançların hesabı için yeni bir yöntem önerilmiştir. Bu amaçla Nyquist teoreminin bir genelleştirilmesi kullanılmıştır. Yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemin Nyquist eğrisi, bir eğri ailesi biçiminde olduğundan reel eksenî bölgeler biçiminde keser ve böylece nominal sistemin Nyquist eğrisinde olduğu eğri ailesi, belirsizlik disklerinden oluşan bir belirsizlik bantının içinden geçer. Belirsizlik bantının reel eksenî kesim yerlerinden bulunan kazanç kümeleri, sistemin kararlılığı hakkında kesin bir şey söylenemeyen belirsizlik kazanç aralıklarını verir. Nominal sistemi kararlı yapan kazanç kümeleri ile belirsizlik kazanç kümelerinden yararlanarak yapısal olmayan belirsizlik içeren bir sistemi dayanıklı kararlı kılan kazanç kümelerinin hesabının hızlıca yapılabildiği, sayısal örnekler üzerinde de teyit edilmiştir.

Zaman gecikmesiz ve gecikmeli sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak PI kontrolörler kümesini hesaplamak için parametre uzayı yaklaşımı (Ackermann ve diğ. 2002a) kullanılmıştır. Parametre uzayı yaklaşımı, kararsız kapalı çevrim kutup sayısının aynı kaldığı PI düzlemindeki bölgelerin bulunması ve frekans tanım bölgesinde reel kök sınırı, sonsuz kök sınırı ve kompleks kök sınırlarından oluşan kararlılık sınırlarının belirlenmesi üzerine kuruludur. Yapısal olmayan belirsizlik içeren zaman gecikmesiz sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı kılabilen tüm PI kontrolörler bölgesini hesaplamak için parametre uzayı yaklaşımı tabanlı yeni yöntemler önerilmiştir. Birinci yöntem, ağırlık transfer fonksiyonunun mutlak değerinin birden küçük ve büyük olmasına göre orijini içmeyen ve içeren  $G_0(j\omega)$ 'ye ilişkin belirsizlik disklerinin sırasıyla iç ve dış kısımlarının alınıp PI düzlemine iz düşürülmesiyle belirsizlik bölgesinin bulunmasına dayanan hızlı olmayan bir yöntemdir. Belirsizlik bölgesinin dışında kalan ve kararsız kutup sayısının sıfır

olduğu bölge, dayanıklı kararlı yapan PI kontrolörlerinin yaklaşık olmayan gerçek bölgesidir. Bu yöntemle alternatif olan dörtgen yöntemi  $G_0(jw)$ 'ye ilişkin orijini içermeyen belirsizlik disklerinin PI düzlemindeki iz düşümleri olan eliptik belirsizlik disklerinin etrafı dışarıdan yamuklarla kaplanıp iç kısımları alınmasına ve ayrıca orijini içerenlerinkinin ise içeriden eş kenar dörtgenlerle çevrelenip dış kısımlarının alınmasına dayanan hızlı bir yöntemdir. Bu yöntemle bulunan dayanıklı kararlı kılan PI kontrolörleri bölgesi, yaklaşık bölgedir. Belirsizlik bölgesini ve sistemi dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörlerin bölgesinin tutucu olmayan tam bir kümesini bulmak için ikinci bir çözüm yolu olarak PI kontrolör parametrelerinin kutupsal koordinatlarda yazılmasına ve elde edilen yeni sistem için birim dairenin taranmasına dayanan bir yöntem önerilmiştir. Birinci ve ikinci yöntemin dayanıklı kararlı yapacak PI kontrolörler bölgesinin tam bir kümesini veren yavaş yöntemler olduğu; fakat buna karşılık dörtgen yöntemin tutucu sonuç veren hızlı bir yöntem olduğu, iki sayısal örnek kullanılarak da gösterilmiştir. Önerilen yöntemlere ilişkin işlem hızı, iki sayısal örnek için Pentium 4 CPU, 2.8 GHz işlemcili ve 512 MB RAM'e sahip bir bilgisayarda Mathematica 5 yazılım versiyonu kullanılarak yapılan simülasyonlarla saptanıp karşılaştırılmıştır.

Özel bir durum olarak zaman gecikmeli birinci mertebeden sistemler için kutup atama tabanlı ve genelde aşırı birim basamak yanıtı veren yeni bir PI kontrolör ayarlama yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemle elde edilen sonuçlar, PI kontrolör katsayıları ayarlama üzerine literatürde iyi bilinen yöntemlerle karşılaştırılmış ve çeşitli sayısal örneklerle birlikte gerçek bir sistem üzerinde deneysel sonuçlar kullanılarak da test edilmiştir.

Ayrık zamanlı sistemleri kapalı çevrimde kararlı yapacak kazançların hesabı için iki yöntem önerilmiştir. Birinci yöntem, ayrık zamanlı sistemlerde Chebyshev polinomları kullanılarak bulunan yeni sistemin Nyquist eğrisinin reel eksenini kestigi yerlerin hesaplanması ve bunlara ilişkin kazanç aralıkları için kararsız kutupların sayısını belirlemesi üzerine kuruludur. İkinci yöntem ise, Nyquist teoreminin Munro ve diğ. (1999) tarafından verilmiş bir genelleştirilmesinin ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşümleri olan sistemlere uyarlanması üzerine kuruludur. Zaman gecikmesiz sistemlere ilişkin verilen tüm sonuçlar, ayrık zamanlı sistemlerin bilineer dönüşümleri olan eş değer sistemleri için de geçerlidir. Örnek bir ayrık zamanlı sistem üzerinde iki yöntem de kullanılmış ve birbirine çok yakın sonuçlar bulunmuştur.

Yapılan tüm tasarımlar üzerinde gelecekte yapılabilecek bazı çalışmalar şu şekilde sıralanabilir:

- 1) Zaman gecikmeli ve zaman gecikmesiz sistemler için istenen kazanç payı ile faz payını sağlayan kazançların hesaplanmasında kullanılan yöntemler, başta PI ve PID kontrolörler olmak üzere daha karmaşık yapıları kontrolörlere uyarlanabilir. Benzer yaklaşımla zaman gecikmeli ve gecikmesiz sistemlere ilişkin erişilebilir maksimum kazanç payı ve maksimum faz payının hesaplanması amacıyla önerilmiş yöntemler de daha karmaşık yapıları kontrolörlerin bulunduğu sistemler için geliştirilebilir.
- 2) Yapısal olmayan belirsizlik içeren sistemleri kapalı çevrimde dayanıklı kararlı yapacak P ve PI kontrolörler için önerilmiş yöntemlerden yararlanarak özellikle dayanıklı kararlı kılan PID kontrolörlerin ve daha karmaşık kontrolörlerin hesabı yapılabilir.
- 3) Ayrık zamanlı sistemlerin oransal kontrolörlerle kapalı çevrimde kararlı yapılmasına ilişkin beşinci bölümde verilen yöntemler, PI ve PID kontrolörler gibi iki ve üç parametrelili kontrolörler için de avantaj sağlayacağı düşünülmektedir.
- 4) Dayanıklı kararlılık dışında ilave pek çok performans ölçütleri için de P, PI ve PID kontrolörler kümelerinin hesabı yapılabilir.

## KAYNAKLAR

- Ackermann, J.**, 1985. Sampled-Data Control Systems Analysis And Synthesis Robust System Design, Springer-Verlag, London Berlin Heidelberg.
- Ackermann, J. and Kaesbauer, D.**, 2001. Design of robust PID controllers, *Proceedings of the European Control Conference*, Porto, Portugal.
- Ackermann, J., Blue, P., Bunte, T., Güvenç, L., Kaesbauer, D., Kott, M., Muhler, M. and Odental, D.**, 2002a. Robust Control The Parameter Space Approach, Springer-Verlag, London Berlin Heidelberg.
- Ackermann, J., Kaesbauer, D. and Bajcinca, N.**, 2002b. Discrete-time robust PID and three-term control, *Proc.of the 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- Aizerman, M.A.**, 1963. Theory Of Automatic Control, Pergamon press,London.
- Astrom, K.J. and Hagglund, T.**, 1995. PID controllers: Theory, design and tuning, 2nd ed. Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America.
- Astrom, K.J. and Hagglund, T.**, 2001. The future of PID control, *Control Engineering Practica*, **9**, 1163-1175.
- Atherton, D.P. and Majhi, S.**, 1999. Limitations of PID controllers, *Proceedings of the American control conference*, 3843-3847.
- Bajcinca, N.**, 2001. The method of singular frequencies for robust design in an affine parameter space, *The 9th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Dubrovnik.
- Bajcinca, N. and Hulin, T.**, 2004. Robsin: A new tool for robust design of PID and three-term controllers based on singular frequencies, *CASD/ISIC/CCA*, Taipei.
- Bajcinca, N.**, 2006. Design of robust PID controllers using decoupling at singular frequencies, *Automatica*, **42(11)**, 1943-1949.



- Bayhan, N.**, 2001. Zaman bölgesinde dizge parametrelerinin belirlenmesi için farklı bir yöntem, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Bayhan, N. ve Tonyalı, O.**, 2002. İkili doğrusal zamanla değişen dizgelerin Chebyshev dizisi yaklaşıklığı ile çözümü, *Union Radio Science International: URSI-Türkiye 1. Ulusal Kongresi*, İTÜ, İstanbul, 18-20 Eylül, s. 174-177.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T.**, 2005. Chebyshev dizisi ile ayrık zamanlı sistemlerin kararlı kılınması problemi, *Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, İstanbul, 2-3 Haziran, s. 35-39.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T.**, 2006a. İstenen kazanç payı ve faz payı kriterlerini sağlayan oransal kontrolörlerin hesaplanması, *Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, Ankara, 6-8 Kasım, s. 38-43.
- Bayhan, N. and Söylemez, M. T.**, 2006b. Fast calculation of all stabilizing gains for discrete-time systems, *Istanbul University-Journal of Electrical and Electronics Engineering (IU-JEEE)* , **6(1)**, 19-26.
- Bayhan, N. ve Söylemez, M. T.**, 2006c. Ayrık zamanlı sistemlerde istenen kazanç payı ve faz payı kriterlerini sağlayan oransal kontrolörlerin hesaplanması için bir yöntem, *Elektrik-Elektronik Bilgisayar Müh. Sempozyumu*, Bursa, 6-10 Aralık, 259-263.
- Bayhan, N. and Söylemez, M. T.**, 2007a. Calculation of maximum achievable phase margin for open-loop stable systems using proportional controllers, *The 5th IFAC Intl. WS DECOM-TT*, Izmir, Turkey, May 17-20, 99-104.
- Bayhan, N. and Söylemez, M. T.**, 2007b. A new technique for calculation of maximum achievable gain and phase margins with proportional control, *The 15th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Athens, GREECE, June 27-29, Paper No. T19-019.
- Bayhan, N., Söylemez, M. T. and Bostan, T.**, 2007. Overshoot free PI controller tuning based on pole assignment, *The 5th International Conference on Electrical and Electronics Engineering*, Bursa, December 5-9, 418-422.

- Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H. and Keel, L.H.,** 1995. Robust Control The Parametric Approach, Prentice Hall.
- Bialkowski, W.L.,** 1993. Dreams versus reality: A view from both sides of the gap, *Pulp Paper Can.*, **94(11)**, 17–27.
- Blanchini, F., Lepschy, A., Miani, S. and Viaro, U.,** 2004. Characterization of PID and lead/lag compensators satisfying given  $H_\infty$  specifications, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49(5)**, 736–740.
- Chien, I.L. and Fruehauf P.S.,** 1990. Consider IMC tuning to improve controller performance, *Chem.Eng.Progress*, **86(10)**, 33–41.
- Cohen, G.H. and Coon, G.A.,** 1953. Theoretical consideration of retarded control, *Trans ASME*, **25**, 827-834.
- Datta, A., Ho, M.T. and Bhattacharyya, S.P.,** 2000. Structure And Synthesis Of PID Controllers, Springer, London, UK.
- Fox, L. and Parker, I.B.,** 1968. Chebyshev Polynomials In Numerical Analysis, Oxford University Press, London.
- Hang, C.C., Astrom, K.C. and Ho, W.K.,** 1991. Refinements of the Ziegler Nichols tuning formula, *Inst. Elec. Eng. Proc. D, Control Theory Application*, **138(2)**, 111–118.
- Ho, M.T., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 1997a. A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers, *Proceedings of the American. Contol. Conference*, 3922-3928.
- Ho, M.T., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 1997b. Control system design using low order controllers: constant gain, PI and PID, *Proceedings of the American Contol. Conference*, 571-578.
- Ho, M.T., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 1997c. Feedback stabilization of discrete-time systems via the generalized Hermite-Biehler theorem, *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*, San diego, California, USA, 908-914.
- Ho, M.T., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 1998. An extension of the generalized Hermite-Biehler theorem: relaxation of earlier assumptions, *Proceedings of the American Contol Conf.*, 3206-3209

- Ho, M.T., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 1999. Generalizations of the Hermite-Biehler theorem, *Linear Algebra and Its Applications*, **302**, 135-153.
- Ho, M.T., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 2000. Generalizations of the Hermite-Biehler theorem: the complex case, *Linear Algebra and Its Applications*, **320**, 23-36.
- Ho, M.T., Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 2001. Robust and non-fragile PID controller design, *International Journal Robust Nonlinear Control*, Boston, Massachusetts, 4126-4138.
- Ho, M.T.,** 2001. Synthesis of  $H_\infty$  PID Controllers, *IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA, 255–260.
- Ho, M.T. and Lin, C.Y.,** 2003. PID Controller Design for Robust Performance, *IEEE Trans on Automatic Control*, **48(8)**, 1404–1409.
- Ho, M.T., Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya, S.P.,** 2004. Real and complex stabilization: stability and performance, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, Boston, Massachusetts, 4126-4138.
- Ho, W.K., Hang, C.C. and Cao, L.S.,** 1995a. Tuning of PID controllers based on gain and phase margins specifications, *Automatica*, **31(3)**, 497-502.
- Ho, W.K., Hang, C.C. and Zhou, J.H.,** 1995b. Performance and gain and phase margins of well-known PI tuning formulas, *IEEE Transactions on Control, Systems Technology*, **3(2)**, 245-248.
- Ho, W.K., Gan, O.P., Tay, E.B. and Ang, E.L.,** 1996. Performance and gain and phase margins of well-known PID tuning formulas, *IEEE Transactions on Control, Systems Technology*, **4**, 473-477.
- Iwasaki, T. and Skelton, R.E.,** 1995. All fixed order  $H_\infty$  controllers: Observer based structure and covariance bounds, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**, 512-516.
- Hohenbichler N. and Ackermann, J.,** 2003. Computing stable regions in parameter spaces for a class of quasipolynomials, *IFAC Workshop on Time Delay Systems, Rocquencourt*.

- Hurwitz, A.**, 1895. On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts, *Mathematics Annalen*, **46**, 273-284. Also in selected papers on Mathematical Trends in Control Theory, 1964, 70-82, Dover, New York.
- Jury, E.I.**, 1974. Inners And Stability Of Dynamic Systems, Wiley, New York.
- Keel, L.H. and Bhattacharyya, S.P.**, 1997. Robust, fragile or optimal?, *IEEE Transactions On Automatic Control*, **42(8)**, 1098-1105.
- Keel, L.H. and Bhattacharyya, S.P.**, 2001a. Robustness analysis via TChebyshev representations, *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, Orlando, USA.
- Keel, L.H. and Bhattacharyya, S.P.**, 2001b. Root counting and phase unwrapping with respect to the unit circle with applications, *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Dec. and Cont.*, Orlando, Florida, USA, 3459-3464.
- Keel, L.H. and Bhattacharyya, S.P.**, 2002. Root counting and phase unwrapping stability and stabilization of discrete time systems, *Linear Algebra and Its Applications*, **351**, 501-517.
- Kiani, F. and Bozorg, M.**, 2006. Design of digital PID controllers using the parameter approach, *International Journal of Control*, **79(6)**, 624-629.
- Kim, Y.C., Keel L.H. and Bhattacharyya, S.P.**, 2007. Computer aided control system design: multiple design objectives, *Proceedings of the European control conference*, Kos, Greece, 512-517.
- Krajewski, W., Lepschy, A. and Viaro, U.**, 2004. Designing PI controllers for robust stability and performance, *IEEE Transactions On Control Systems Technology*, **12(6)**, 973-983.
- Krajewski, W., Lepschy, A., Miani, S. and Viaro, U.**, 2005. Frequency-domain approach to robust PI control, *Journal of the Franklin Institute*, **342**, 674-687.
- Lam, J.**, 1990. Convergence of a class of Padé approximations for delay systems, *International Journal Control*, **52**, 989-1008.

- Makila, P.M.**, 1998. Comments on robust, fragile or optimal, *IEEE Transactions On Automatic Control*, **43(9)**, 1265-1268.
- Marshall, J.E., Gorecki, H., Korytowski, A. and Walton, K.**, 1992. Time-Delay Systems: Stability And Performance Criteria With Applications, Ellis Horwood, New York.
- Morari, M. and Zafiriou, E.**, 1989. Robust Process Control, Englewood Cliffs, NJ: Prentice- Hall.
- Munro, N., Söylemez, M.T. and Baki, H.**, 1999. Computation of D-stabilizing low order compensators, *Control Systems Centre Report 882*, Umist, Manchester.
- Munro, N., Söylemez, M.T. and Baki, H.**, 2000. Fast Calculation Of Stabilizing PID Controllers For Uncertain Parameter Systems, *IFAC, Rocond*, Prague, CZECH REPUBLIC.
- Naimark, L. and Zeheb, E.**, 1996. Constant gain stabilizing controller design for systems with bounded interval delay, *Proceedings of the 19th Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel, IEEE*, Jerusalem, ISRAEL, November 5-6, 519-522.
- Naimark, L. and Zeheb, E.**, 1997. All constant gain stabilizing controllers for an interval delay system with uncertain parameters, *Automatica*, **33(9)**, 1669-1675.
- Niculescu, S.I., Gu, K. and Abdallah, C.T.**, 2003. Some remarks on the delay stabilizing effect in SISO systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, June 4-6, 2670-2675.
- Nyquist, H.**, 1932. Regeneration theory, *Bell System Technical Journal*, **11**, 126-147.
- O'Dwyer, A.**, 2003. PID compensation of time delayed processes 1998-2002: survey, *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, June 4-6, 1494-1499.
- Özbay, H.**, 2000. Introduction To Feedback Control Theory, CRC Press, Boca Raton London New York Washington, D.C.

- Pontryagin, L.S.**, 1955. On the zeros of some elementary transcendental functions, *Transaction American Mathematical Society*, **2**, 95-110.
- Routh, E.J.**, 1877. A Treatise On The Stability Of a Given State Of Motion, London: Macmillan & Co.
- Saeki, M.**, 2007. Properties of stabilizing PID gain in parameter space, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52(9)**, 1710-1715.
- Sanchez-Pena, R.S. and Sznaiier, M.**, 1998. Robust Systems Theory And Applications, John Wiley & Sons, New York.
- Shafiei, Z. and Shenton, A.T.**, 1997. Frequency-domain design of PID controllers for stable and unstable systems with time delay, *Automatica*, **33(12)**, 2223-2232.
- Shenton, A.T. and Shafiei, Z.**, 1994. Relative stability for control systems with adjustable parameters, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **17(2)**, 304 -310.
- Shinskey, F.G.**, 1985. Process Control System: Application, Design And Tuning, Third Edition, New York: McGraw-Hill Book Co.
- Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2000. Stabilization of time delay systems, *Proceedings of the American Control Conference*, 963-970.
- Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2001a. Determination of stabilizing feedback gains for second-order systems with time delay, *Proceedings of the American Control Conference*, p. 4658-4663.
- Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2001b. PI stabilization of first-order systems with time-delay, *Automatica*, **37**, 2025-2031.
- Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2001c. Stabilization of first-order systems with time delay using the PID controller, *Proceedings of the American Control Conference*, 4650-4655.
- Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2002. New results on the synthesis of PID controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**, 241-252.

- Silva, G.J., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.,** 2005. PID Controllers For Time Delay Systems, Birkhauser Boston,USA.
- Skogestad, S. and Postlethwaite, L.,** 2005. Multivariable Feedback Control, John Wiley & Sons, West Sussex, England.
- Smith, C.A. and Corripio, A.B.,** 1985. Principles And Practice Of Automatic Process Control, New York: Wiley.
- Söylemez, M.T., Munro, N. and Baki, H.,** 2003. Fast calculation of stabilizing PID controllers, *Automatica*, **39(1)**, 121-126.
- Söylemez, M.T. and Bayhan, N.,** 2008. Calculation of all  $H_\infty$  robust stabilizing gains for SISO LTI systems, *The 17th IFAC World Congress Of The International Federation Of Automatic Control*, Seoul, KOREA, July 6-11.
- Tan, N.,** 2003. Computation of stabilizing lag/lead controller parameters, *Computer and Electrical Engineering*, **29**, 835 -849.
- Tan, N.,** 2004. Robust phase margin, robust gain margin and Nyquist envelope of an interval plant family, *Computer and Electrical Engineering*, **30**, 153 -165.
- Tan, N.,** 2005. Computation of stabilizing PI and PID controllers for process with time delay, *ISA Transactions*, **44**, 213-223.
- Tan, N., Kaya, İ., Yeroğlu, C. and Atherton, D.P.,** 2006. Computation of stabilizing PI and PID controllers using the stability boundary locus, Accepted: *Energy Conversion & Management*.
- Tantaris, R.N., Keel, L.H. and Bhattacharyya S.P.,** 2002. Stabilizations of continuous time systems by using first order controllers, *Proceedings of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Lisbon, PORTUGAL.
- Tantaris, R.N., Keel, L.H. and Bhattacharyya S.P.,** 2003a. Stabilization of discrete-time systems, *IEEE Transactions On Automatic Control*, **48(5)**, 858-861.

- Tantaris, R.N., Keel, L.H. and Bhattacharyya S.P.**, 2003b. Gain/phase margin design with first order controllers, *Proceedings of the American Control Conference*, Denver, Colorado, USA, 3937-3942.
- Xu, H., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2001a. Computation of all stabilizing PID gains for digital control systems, *IEEE Transactions On Automatic Control*, **46(4)**, 647-652.
- Xu, H., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2001b. Computation of all stabilizing PID gains for digital control systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Arlington, VA, 2033-2037.
- Xu, H., Datta, A. and Bhattacharyya S.P.**, 2003. PID stabilization of LTI plants with time-delay, *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December, 4038-4043.
- Youla, D.C., Bongiorno J.J. and Lu, C.N.**, 1974. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants, *Automatica*, **21**, 159-173.
- Youla, D.C., Jabr, H.A. and Bongiorno J.J.**, 1976. Modern wiener-hopf design of optimal controllers- part II: The multivariable case, *IEEE Transactions On Automatic Control*, **21(3)**, 319-338.
- Zhuang, M. and Atherton, D.P.**, 1993. Automatic tuning of optimum PID controllers, *IEE Proc-D*, **140(3)**, 216-224.
- Ziegler, J.G. and Nichols, N.B.**, 1942. Optimum settings for automatic controllers, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **64**, 759-768.



## EKLER

Şekil 3.21 ve Şekil 3.22'ye İlişkin Matlab Simülasyonu:

```
B=ultidyn('B',[1 1], 'Type', 'GainBounded', 'Bound',1);
B.SampleStateDim = 2;

numSamples=50;
tmax=8;
r=siggen('1',[0:.02:tmax]);

barr=usample(B,numSamples);

Gs = nd2sys([5 14.75 49.5 72],[1 -11 48 -104 96]);
Ws = nd2sys([1.2 2 1],[1 40 100]);
K = nd2sys([5.],[1]);

figure;

for i=1:numSamples
    Bex=barr(1,1,i);
    [A,B,C,D]=ssdata(Bex);
    BB=pck(A,B,C,D);
    systemnames='Gs Ws BB';
    inputvar = '[u]';
    outputvar = '[Gs]';
    input_to_BB = '[Ws]';
    input_to_Ws = '[u]';
    input_to_Gs = '[u+BB]';
    sysoutname='GG';
    cleanupsysic='yes';
    GG=sysic;
    w=logspace(-1,4,150);
    frGG=frsp(GG,w);
    vplot('nyq',frGG);
    hold on;
end

figure;

for i=1:numSamples
    Bex=barr(1,1,i);
    [A,B,C,D]=ssdata(Bex);
    BB=pck(A,B,C,D);
    systemnames='Gs Ws BB K';
    inputvar = '[r]';
    outputvar = '[Gs]';
    input_to_BB = '[Ws]';
    input_to_Ws = '[K]';
    input_to_Gs = '[K+BB]';
    input_to_K = '[r-Gs]';
    sysoutname='T';
    cleanupsysic='yes';
```

```
T=sysic;  
[A,B,C,D]=unpck(T);  
eig(A)  
w=logspace(-1,4,150);  
y=trsp(sel(T,1,1),r,tmax,1e-3);  
vplot(r,'g',y,'r');  
hold on;
```

```
end
```

## ÖZGEÇMİŞ

1977 tarihinde İstanbul'da doğan Nevra Bayhan, ilk, orta ve lise öğrenimini tamamladıktan sonra; 1993 yılında üniversite öğrenimine başladı. İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden 1997 yılında bölüm üçüncülüğü ile mezun oldu. Şubat 1998'de İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı. Kasım 2001'de İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'ndan yüksek lisans derecesini aldı. 2002 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Mühendisliği Anabilim Dalı, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı'nda doktora öğrenimine başladı. Halen İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir.