

KISMİ YAYILI ZORLANMA ETKİSİNDEKİ İKİZ BOŞLUK İÇEREN SONSUZ ORTAMIN HARMONİK TİTREŞİMLERİ

Hasan Faik Kara ve Hasan Engin*

*İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, Maslak, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada, ikiz silindirik boşluk içeren ve boşluklardan biri kısmi harmonik iç basınçla zorlanan homogen, izotrop ve lineer elastik ortamın dinamik davranışları incelenmiştir. Newton'un ikinci yasasından faydalananarak hareket denklemleri yazılmış, homogen, izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli bünye bağıntıları kullanılarak Navier denklemleri elde edilmiştir. Kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. Indirgenmiş dalga denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyen sabitler delik yüzeyleri üzerinde yazılan sınır koşulları ile hesaplanmıştır.

ABSTRACT

In this study, response of a homogeneous, isotropic and linear elastic infinite medium, which includes two cylindrical cavities, is investigated when partially subjected to harmonic inner pressure. Equations of motion that is written based on Newton's second law and then Navier's equations are derived using constitutive equations for homogeneous, isotropic and linear elastic medium. Coupled equation of motions is reduced into two wave equations by use of Helmholtz potentials in polar coordinates. These reduced wave equations are solved by using the multiplication series of the Bessel and the trigonometric functions. Unknown coefficients were calculated by applying boundary conditions on the cavities.

1. GİRİŞ

İçerisinde boşluk bulunan elastik bir ortamın dinamik etkiler karşısındaki davranışları, geçmişte birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. [1,2]

Dairesel silindirik bir boşluk içeren bir elastik yarımadadır. Harmonik titreşimleri Engin ve Çoşkun [3] tarafından araştırılmıştır. Kutupsal koordinatlarda yazılan hareket denklemleri, Helmholtz potansiyellerinin kullanılmasıyla iki adet ayrı dalga denklemine indirgenmiştir. Indirgenmiş dalga denklemleri Bessel fonksiyonları ve trigonometrik fonksiyonlar çarpım serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür.

Tek silindirik boşluğa sahip yarımadadır, içten zorlanma durumuna karşı gelen davranışları, Verruijt [4] tarafından kompleks değişkenler metodunu kullanılarak incelemiştir. Verruijt, bu

çalışmasında, Sokolnikoff ve Muskhelishvili'nin karşılaştığı zorluklardan bahsetmiş ve bu zorlukların birtakım analitik ve sayısal analizlerle aşılabileceğini göstermiştir.

Taşit veya sismik yükler altında viskoelastik ortamda gömülü çoklu silindirik boşluklu sistemlerin üç eksenli davranışını Guan ve Moore [5] tarafından araştırılmıştır. Çalışmada, ana tünel sabit hızlı hareketli araç yüküne ve radyal basınca maruzken ana tünel ve servis tüneli arasındaki zemin etkileşimi araştırılmıştır. Çözüm fonksiyonları olarak Bessel – Fourier fonksiyon serileri kullanılmıştır.

Moore ve Guan [6], başka bir çalışmalarda içerisinde iki adet silindirik boşluk bulunan sonsuz ortamın sismik yükler altındaki üç boyutlu davranışını ardışık yansımalar yöntemini kullanarak incelemiştir. Bu çalışmada, yöntemin yakınsaklılığı hem analitik olarak hem de sayısal olarak gösterilmiştir. Sismik yükler altında silindirlerin birbiri ile etkileşimi sayısal olarak incelenmiştir. İkiz silindirik boşluk içeren uzayın iki boyutlu davranışları ile üç boyutlu davranışının farklı olacağı bulunmuştur.

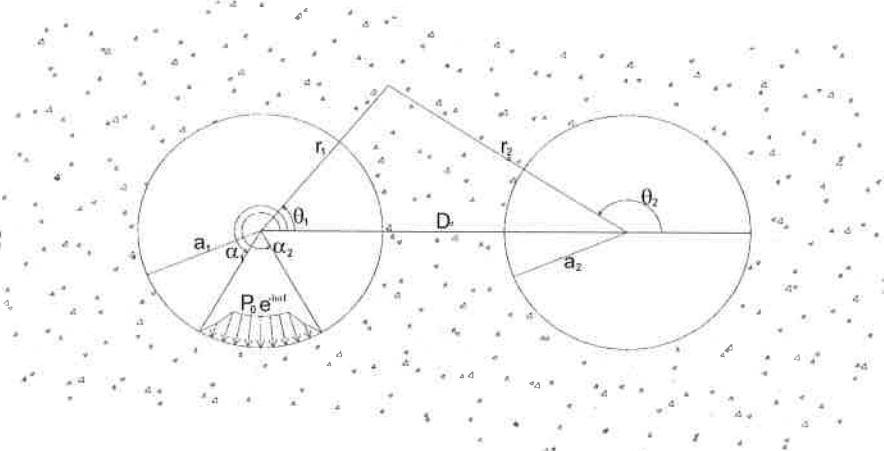
Bu çalışmada, ikiz silindirik boşluk içeren ve boşluklardan biri kısmi harmonik iç basınçla zorlanan homogen, izotrop ve lineer elastik ortamın dinamik davranışını incelenmiştir. Newton'un ikinci yasasından faydalananarak hareket denklemleri yazılmış, homogen, izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli bütne bağıntıları kullanılarak Navier denklemleri elde edilmiştir. Kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. Indirgenmiş dalga denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyen sabitler delik yüzeyleri üzerinde yazılan sınır koşulları ile hesaplanmıştır.

2. TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM

Tam sonsuz ortamda, α_1 ve α_2 yarıçaplı, Şekil 1' de görüldüğü gibi iki silindirik oyuk göz önüne alalım. z , oyuk ekseni boyunca ortamın geometrisi, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmediği kabul edilirse problem düzlem şekil değiştirme hali olarak göz önüne alınabilir. Oyuklardan birinin iç yüzeyi, oyuğun ortasını merkez eden kartezyen eksen takımındaki x ekseni ile pozitif yönde α_1 ve α_2 açıları yapan noktalar arasında harmonik iç basınçla yüklenmiştir. Bu açılar arasında harmonik yük genliği θ_1 açısı ile değişmektedir. α_1 ve α_2 açıları arasında kalan kısım dışında oyuk yüzeyi serbesttir. Problemin geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması tercih edilmiştir. Yönetici denklemimiz olan Navier denklemi aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} = \rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad (1)$$

Burada $\vec{U}(r, \theta, t)$ yerdeğiştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu, λ ve μ Lamé değişmezlerini, ∇ Nabla operatörünü, t' de zamanı göstermektedir. r ve θ kutupsal koordinatlardır.



Şekil 1. Problemin geometrisi

Zorlamanın harmonik olması nedeniyle ortamında davranışları da harmonik olacaktır. Bu sayede yer değiştirmeye vektörü $\vec{U}(r, \theta, t) = \vec{u}(r, \theta)e^{-i\omega t}$ olarak alınabilir. Burada $\vec{u}(r, \theta)$ yer değiştirmeye genliğiştir. Bu durumda kutupsal koordinatlarda yönetici denklem:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla^2 \vec{u} = -\rho \omega^2 \vec{u} \quad (2)$$

formuna gelir. Helmholtz ayırma teoremi kullanılarak \vec{u} yerdeğiştirmeye vektörünü $\varphi(r, \theta)$ skaler ve $\psi(r, \theta) = \psi(r, \theta)\vec{e}_z$ vektörel potansiyel fonksiyonları cinsinden

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi + \vec{\nabla} \times (\psi \vec{e}_z) \quad (3)$$

formunda yazılıp Navier denkleminde yerine yerleştirdiğimizde aşağıda görülen indirgenmiş dalga denklemlerini elde ederiz.

$$\nabla^2 \varphi + k_1^2 \varphi = 0, \quad \nabla^2 \psi + k_2^2 \psi = 0 \quad (4)$$

Çözümün tek değerli olabilmesi için ψ vektör potansiyelinin diverjansı sıfır olmalıdır. İndirgenmiş dalga denklemindeki $k_1 = \omega / \sqrt{\rho / (\lambda + 2\mu)}$ boyuna dalga sayısı, $k_2 = \omega / \sqrt{\rho / \mu}$ de enine dalga sayısı olarak tanımlanmaktadır.

Çarpanlara ayırma yönteminin kullanılmasıyla dalga denklemlerinin çözümü Bessel – trigonometrik fonksiyonlar serisi olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(A_n H_n^{(1)}(k_1 r) + B_n H_n^{(2)}(k_1 r)) \cos n\theta + (C_n H_n^{(1)}(k_1 r) + D_n H_n^{(2)}(k_1 r)) \sin n\theta \right] \quad (5a)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(E_n H_n^{(1)}(k_2 r) + F_n H_n^{(2)}(k_2 r)) \cos n\theta + (G_n H_n^{(1)}(k_2 r) + H_n H_n^{(2)}(k_2 r)) \sin n\theta \right] \quad (5b)$$

Burada $H_n(x)$ üçüncü nevi Bessel fonksiyonudur ve $J_n(x)$ ve $Y_n(x)$ (birinci ve ikinci nevi Bessel fonksiyonları) cinsinden şu şekilde tariflenmiştir.

$$H_n^{(0)}(x) = J_n(x) + iY_n(x), \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x) \quad (6)$$

$H_n^{(2)}(x)$ fonksiyonu sonsuzda radyasyon koşulu dolayısıyla atılabilir. Bessel fonksiyonlarının indislerinin tam sayı olması nedeniyle bu sonsuz serileri $-\infty$ yerine sıfırdan başlatmak kabildir. Böylece, her iki oyuk için $\varphi(r,\theta)$ ve $\psi(r,\theta)$ fonksiyon serileri,

$$\varphi^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1) \cos n\theta_1 + B_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_1 r_1) \sin n\theta_1 \right] \quad (7a)$$

$$\psi^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1) \cos n\theta_1 + D_n^{(1)} H_n^{(1)}(k_2 r_1) \sin n\theta_1 \right] \quad (7b)$$

$$\varphi^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_1 r_2) \cos n\theta_2 + B_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_1 r_2) \sin n\theta_2 \right] \quad (7c)$$

$$\psi^{(2)}(r_2, \theta_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_2 r_2) \cos n\theta_2 + D_n^{(2)} H_n^{(1)}(k_2 r_2) \sin n\theta_2 \right] \quad (7d)$$

halini alır. Bu seriler yakınsak olduğu için n sayısı, sonlu bir N sayısında kesilebilir. Ortamındaki toplam potansiyel ifadeleri aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\varphi(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \varphi^{(1)}(r_1, \theta_1) + \varphi^{(2)}(r_2, \theta_2) \quad (8a)$$

$$\psi(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = \psi^{(1)}(r_1, \theta_1) + \psi^{(2)}(r_2, \theta_2) \quad (8b)$$

Gerilme ve yer değiştirmeleri r_1 ve θ_1 koordinatlarına bağlı olarak bulmak istediğimizde, toplam potansiyeller içerisindeki ikinci oyuktan gelen r_2 ve θ_2 'ye bağlı

$\varphi^{(2)}$ ve $\psi^{(2)}$ potansiyellerinin r_1 ve θ_1 koordinatlarına bağlı ifadesini bulmak için aşağıda gösterilen Graff Toplama Formülü kullanılmıştır [7].

$$H_n(k_j r_2) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta_2) \\ \sin(n\theta_2) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0m}}{2} \left(H_{m-n}(k_j D) \pm (-1)^n H_{m+n}(k_j D) \right) J_m(k_j r_1) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta_1) \\ \sin(m\theta_1) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Burada D , iki oyuk arasındaki mesafeyi gösterir. Formüldeki δ_{0m} Kroncker Delta'sı olup, şöyle tariflenmiştir

$$\delta_{0m} = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Benzer şekilde diğer oyuk için dönüşüm yapmak gereğinde bu kez aşağıdaki Graff Toplama formülü kullanılmıştır.

$$H_n(k_j r_1) \begin{Bmatrix} \cos(n\theta_1) \\ \sin(n\theta_1) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0m}}{2} \left(H_{n-m}(k_j D) \pm (-1)^m H_{m+n}(k_j D) \right) J_m(k_j r_2) \begin{Bmatrix} \cos(m\theta_2) \\ \sin(m\theta_2) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Yer değiştirmeye vektörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleri toplam potansiyel fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabılır:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (12a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12b)$$

Yer değiştirmeler cinsinden gerilme ifadeleri de şu şekildedir:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (13a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 2\mu) \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (13b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (13c)$$

3. SINIR KOŞULLARI

Birinci oyuk yüzeyinin şekilde gösterilen kısmına etki eden harmonik iç basınç genliğinin θ_1 'e bağlı olarak ifadesi, Heaviside Basamak Fonksiyonu yardımıyla şöyle yazılabilir:

$$P(\theta_1) = P_0 \left\{ \frac{5}{\alpha_2 - \alpha_1} (\theta_1 - \alpha_1) \left[H(\theta_1 - \alpha_1) - H\left(\theta_1 - \alpha_1 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{5}\right) \right] + \right. \\ \left[H\left(\theta_1 - \alpha_1 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{5}\right) - H\left(\theta_1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{5}\right) \right] + \\ \left. \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + 5(\theta_1 - \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)/5)}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[H\left(\theta_1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{5}\right) - H(\theta_1 - \alpha_2) \right] \right\} \quad (14)$$

Yük fonksiyonunu $(0, 2\pi)$ periyotlu Fourier serisine açıp, seriyi sonlu N sayısında kestiğimizde aşağıdaki ifadeyi elde ediyoruz

$$P(\theta_1) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\xi) d\xi \right) + \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\xi) \cos(n\xi) d\xi \right) \cos(n\theta_1) + \right. \\ \left. \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right) \sin(n\theta_1) \right] \quad (15)$$

Birinci oyuk yüzeyindeki sınır koşulları şöyle olacaktır:

$$\sigma_{rr}(\theta_1, r_1)|_{r_1=a_1} = -P(\theta_1) \quad \tau_{r\theta}(\theta_1, r_1)|_{r_1=a_1} = 0 \quad (16)$$

Potansiyel fonksiyonların seri çözümlerinin, potansiyellere bağlı gerilme ifadesinde yerine yerleştirilip, birinci oyuk yüzeyindeki σ_{rr} ve $\tau_{r\theta}$ sınır koşullarının sağlatılması ile toplam $8N+4$ adet bilinmeyen katsayının bulunması için $4N+2$ adet bağıntı elde edilir.

İkinci oyuk yüzeyindeki sınır koşulları da şöyledir

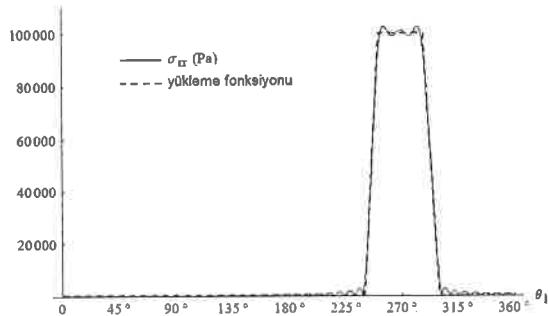
$$\sigma_{rr}(\theta_2, r_2)|_{r_2=a_2} = 0 \quad \tau_{r\theta}(\theta_2, r_2)|_{r_2=a_2} = 0 \quad (17)$$

İkinci oyuk yüzeyindeki sınır koşullarının sağlatılması ile de $4N+2$ bulunur. Elde edilen $8N+4$ bağıntı ile $8N+4$ bilinmeyen hesaplanır.

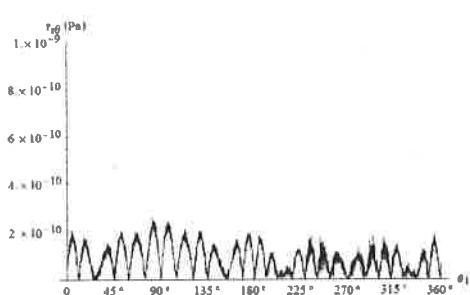
4. SONUÇLAR

Zorlama genliği (P_0), zorlamanın etki edeceği açı aralıkları (α_1 ve α_2), zorlama frekansı (ω), oyuk çapları (a_1 ve a_2), iki oyuk arasındaki mesafe (D), λ ve μ malzeme sabitlerinin çeşitli değerleri için istenilen her noktada yer değiştirme ve gerilme bileşenleri hesaplanabilir. Sayısal uygulamalarda kütle yoğunluğu $\rho = 2665 \text{ kg/m}^3$, Elastisite modülü $E = 7.567 \times 10^9 \text{ Pa}$, Poisson oranı $v = 0.25$, $N=20$, iç basınç genliği $P_0 = 100'000 \text{ Pa}$, $\alpha_1 = 240^\circ$ ve $\alpha_2 = 300^\circ$ seçilmiştir. İç basınç genliği 240° ve 300° lik açı aralığında ilk 12° lik kısımda lineer artarak $100'000 \text{ Pa}$ değerine ulaşan, sonra 36° lik kısımda sabit ve son 12° lik kısımda lineer olarak azalarak sıfır giden bir fonksiyondur.

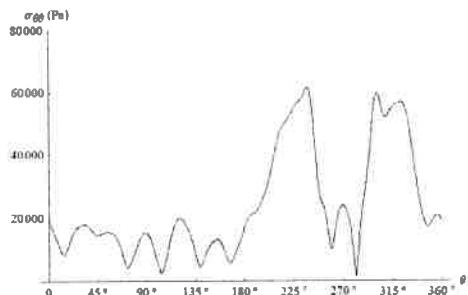
Şekil 2'de 1. Oyuk yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin çevre boyunca



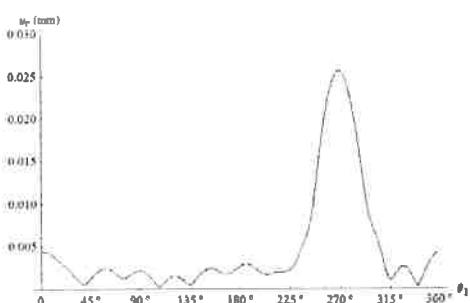
(a)



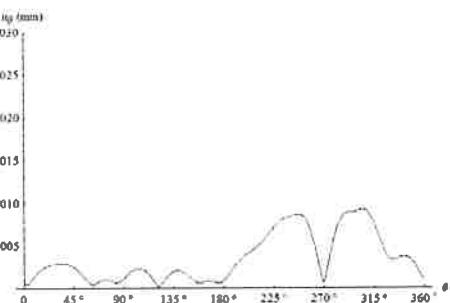
(b)



(c)

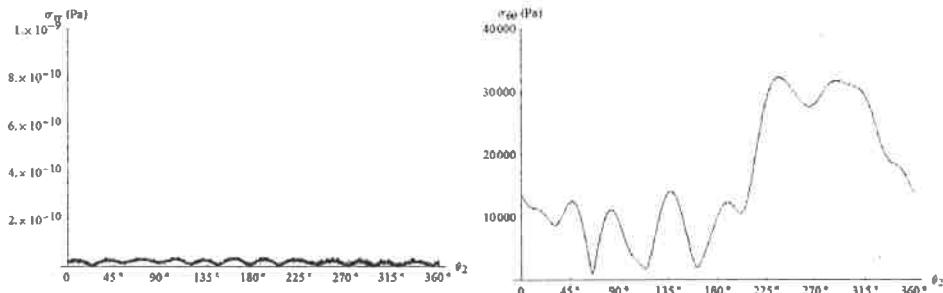


(d)



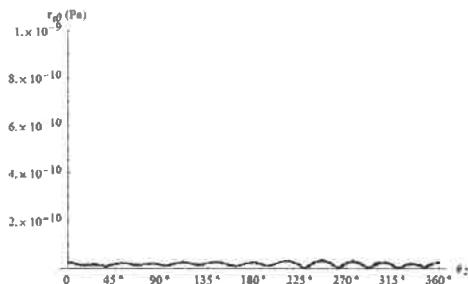
(e)

Şekil 2. $\omega=1000$ rad/s, $D=15$ m, $a_1=4$ m, $a_2=4$ m için birinci oyuk yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirmeler

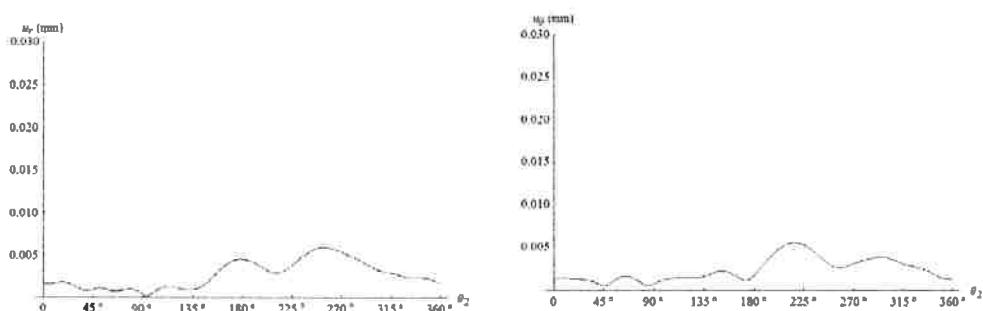


(a)

(b)



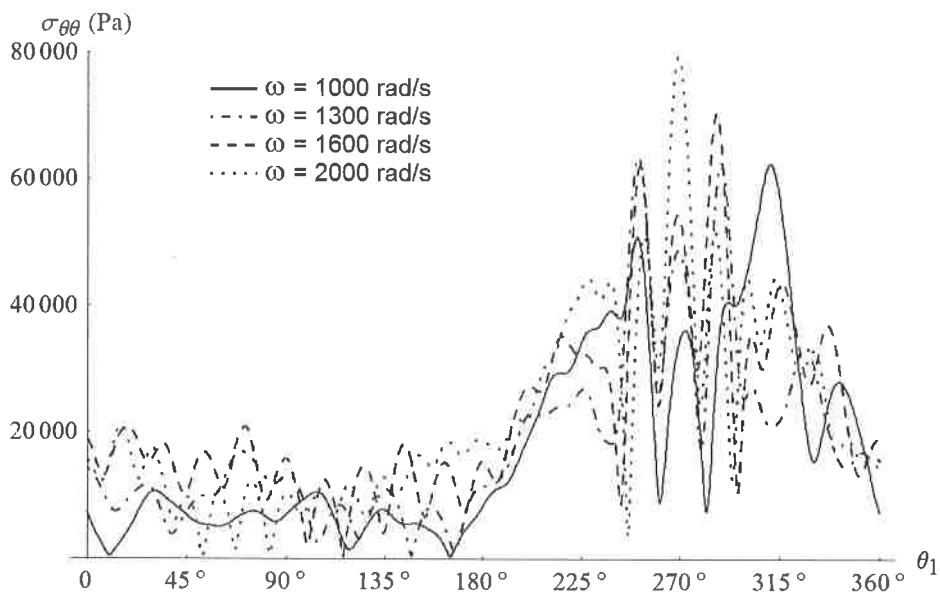
(c)



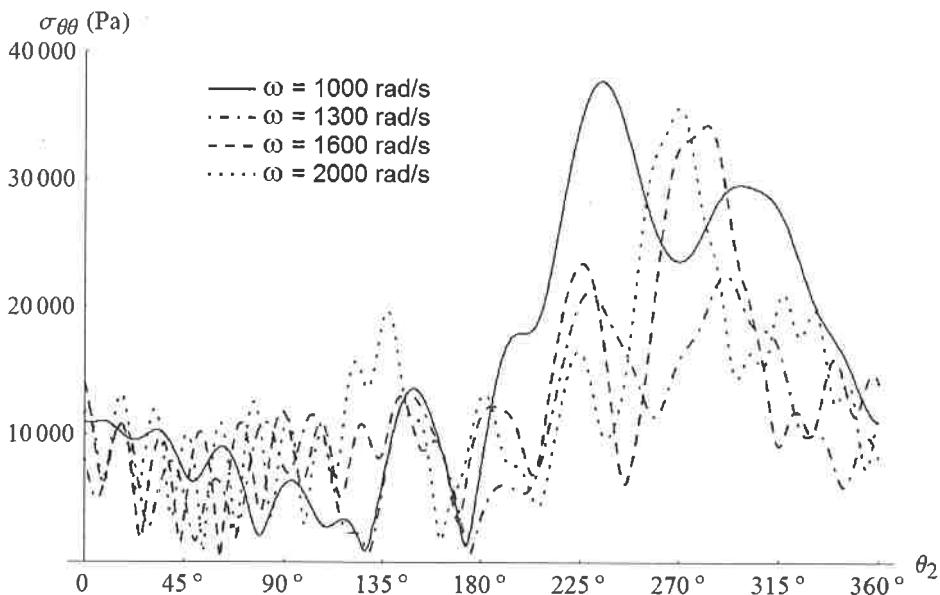
(d)

(e)

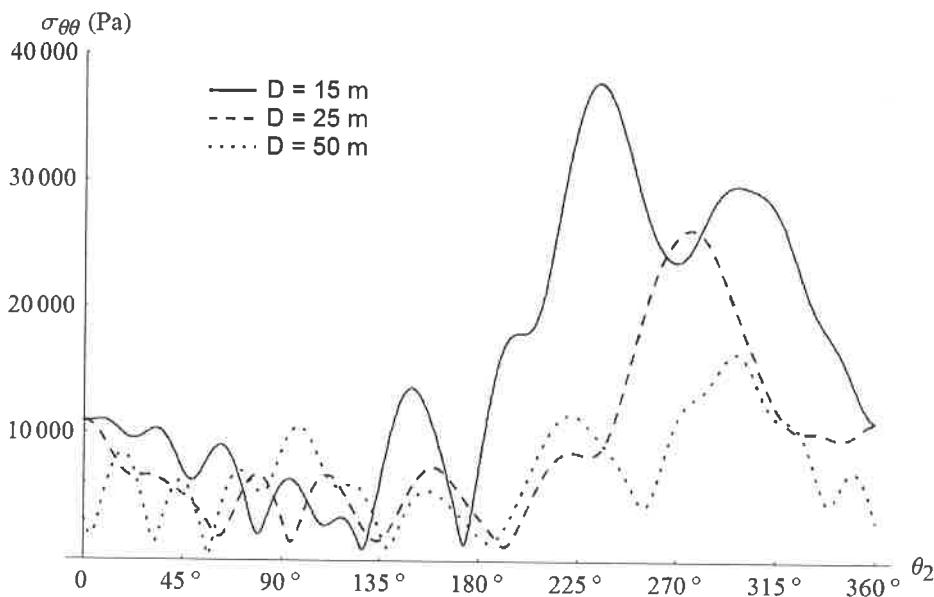
Şekil 3. $\omega=1000$ rad/s, $D=15$ m, $a_1=4$ m, $a_2=4$ m için ikinci oyuk yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirmeler



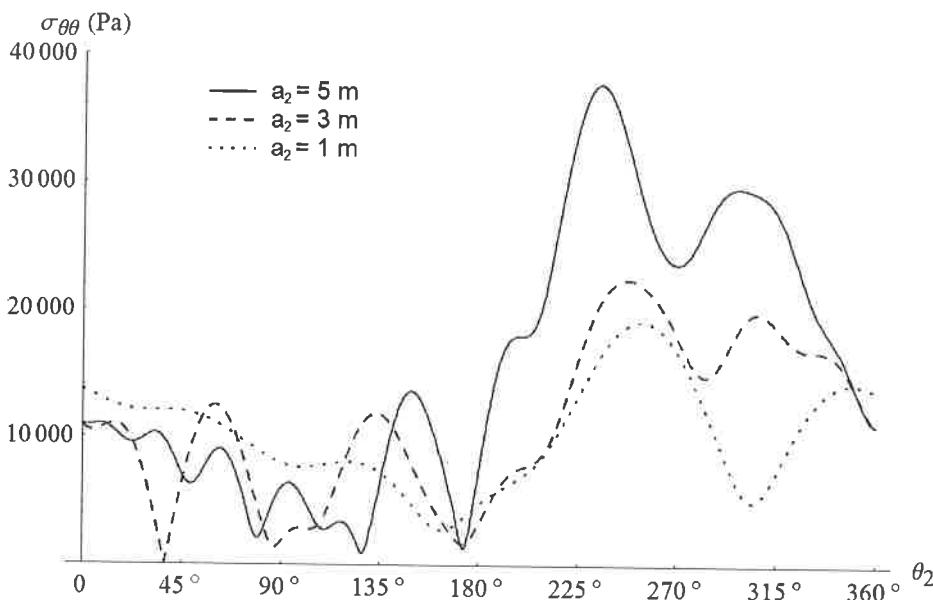
Şekil 4. $D=15\text{m}$, $a_1=5\text{m}$, $a_2=5\text{m}$ için açısal frekanstaki değişimin birinci oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesine etkisi



Şekil 5. $D=15\text{m}$, $a_1=5\text{m}$, $a_2=5\text{m}$ için açısal frekanstaki değişimin ikinci oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesine etkisi



Şekil 6. $\omega=1000 \text{ rad/s}$, $a_1=5 \text{ m}$, $a_2=5 \text{ m}$ için iki oyuk arasındaki mesafedeki değişimin ikinci oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesine etkisi



Şekil 7. $\omega=1000 \text{ rad/s}$, $D=15 \text{ m}$, $a_1=5 \text{ m}$ için ikinci oyuk yarıçapındaki değişimin ikinci oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesine etkisi

değişimi görülmektedir. Çözüm sonunda elde edilen radyal gerilme ile yükleme fonksiyonunun üst üste düşmesi, gerek Fourier serisinde gerekse Graff ekleme teoreminde alınan terim sayısının yeterli olduğunu göstermektedir.

Şekil 3'de 2. Oyuk yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin çevre boyunca değişimi görülmektedir. Bu oyuk yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirme bileşenleri zorlamanın olduğu 1. oyuktakilere göre daha küçük olup, bu da beklenen bir durumdur.

Şekil 4 ve şekil 5'de oyuk çevreleri üzerindeki radyal gerilme bileşenlerinin zorlama frekansı ile değişimi görülmektedir.

Şekil 6'da oyuklar arası mesafenin değişimi ile 2. oyuktaki radyal gerilmenin değişimi görülmektedir. Beklendiği gibi ara mesafe büyükçe 2. oyuktaki gerilmede azalma olmaktadır.

Şekil 7'de 2. oyuk yarıçapının küçülmesi ile 2. oyuktaki radyal gerilmenin azaldığı görülmektedir. Oyuk yarıçapı azaldıkça gerilmenin daha homogen bir yapıya yaklaşmaktadır. Bu da beklenen bir sonuçtur.

KAYNAKLAR

- [1] Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S., Elastodynamics, Vol II, Academic Press, New York, 1975
- [2] Graff, K.F., Wave motion in elastic solids, Clarendon press, Oxford, 1975.
- [3] Engin, H. Coşkun, İ., 2001. Boşluk içeren yarı uzayda zorlanmış titreşimler, XII. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya, 10-14 Eylül, s. 365-374
- [4] Verruijt, A., 1998. Deformations of an elastic half-plane with circular cavity, *Solid Structures*, 35, 2795-280
- [5] Guan, F. and Moore, I.D., 1994. Three – dimensional dynamic response of twin cavities due to traveling loads, *Journal of Engineering Mechanics*, 120, 637-651.
- [6] Moore, I.D. and Guan, F., 1996. Three – dimensional dynamic response of lined tunnels due to incident seismic waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25, 357-369
- [7] Watson, G. N., A treatise of the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, London, 1958