

**HELİSEL ÇUBUKLARDA STATİK VE DİNAMİK
PROBLEMLERİN KARIŞIK SONLU ELEMANLAR
METODU İLE İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Y. Müh. Olca OLGUN
(501011086)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Nisan 2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Mayıs 2004**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet H. OMURTAG (İ.T.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri Y.Doç.Dr. Konuralp GİRGİN (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Turgut KOCATÜRK (Y.T.Ü.)

MAYIS 2004

ÖNSÖZ

Böyle bir çalışmayı gerçekleştirebilmem için bana fırsat tanıyan ve yardımcı olan sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG'a, tüm mekanik anabilim dalı çalışanlarına, aileme ve dostlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Nisan, 2004

Olca OLGUN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu	1
1.2. Helisel Sistemlerin Analizi Konusunda Yapılan Çalışmalar	2
2. ELASTİK ÇUBUK KURAMI	4
2.1.Yapılan Varsayımlar	4
2.2.Helisel Çubuk Geometrisi	4
2.3.Hareket Denklemleri	6
2.4.Kinematik Denklemler	9
2.5.Bünye Bağlılıkları	10
3. FONKSİYONEL ANALİZİ	11
3.1.Alan Denklemleri	11
3.2.Potansiyellik Koşulu	11
3.2.1. Yönsel Toplam (İç Çarpım)	12
3.2.2. Yönsel Türev (Gateaux Türevi)	12
3.3.Fonksiyonelin Oluşturulması	14
3.4.Fonksiyonelin Açık Formu	15
4. SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU	17
4.1.Yaklaşım Fonksiyonları	17
4.2.Eleman ve Kütle Matrisleri	20
4.3.Dinamik Analiz	23
5. SAYISAL ÖRNEKLER	24
5.1.Statik Problemler	24
5.1.1. Örnek-1: Sabit Dikdörtgen Kesit Problemi	24
5.1.2. Örnek 2: Değişken Dairesel Kesit Problemi	25
5.1.3. Örnek 3: Değişken Taban Yarıçaplı Helis Problemi	28

5.2.Dinamik Problemler	32
5.2.1. Örnek-4: Silindirik Yayda Serbest Titreşim Problemi	32
5.2.2. Örnek-5: Silindirik Yayda Serbest Titreşim Problemi	36
5.3.Örnek 4 ile Örnek 5'deki Mod Şekillerinin İncelenmesi	40
6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	41
KAYNAKLAR	42
EKLER	45
ÖZGEÇMİŞ	97

KISALTMALAR

HL	: FORTRAN-90 dilinde hazırlanan bilgisayar programı
HL.SON	: Program çıktı dosyası
HL.DAT	: Program bilgi giriş dosyası
FEM	: Sonlu elemanlar yöntemi
TMM	: Taşıma matrisi yöntemi
Bkz.	: Bakınız
Örn.	: Örnek

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1 : Çeşitli kesit geometrileri için kayma gerilmesi katsayıları	18
Tablo 4.2 : Çeşitli kesit geometrileri için alan ve atalet momenti değerleri ...	18
Tablo 5.1 : Deplasman ve dönme değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 1)	25
Tablo 5.2 : Kuvvet ve moment değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 1)	25
Tablo 5.3 : ($\theta=\pi/2$) için deplasman değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 2)	26
Tablo 5.4 : ($\theta=\pi/2$) için dönme değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 2)	26
Tablo 5.5 : A mesnedi için kuvvet değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)	29
Tablo 5.6 : A mesnedi için moment değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3) ...	29
Tablo 5.7 : B mesnedi için kuvvet değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)	29
Tablo 5.8 : B mesnedi için moment değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)....	30
Tablo 5.9 : İzotropik yayın serbest titreşim frekansları (Örn. 4)	32
Tablo 5.10 : İzotropik yayın serbest titreşim frekansları (Örn. 5)	36

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Helis Geometrisi	4
Şekil 2.2 : Dış Kuvvetler	6
Şekil 2.3 : İç Kuvvetler	6
Şekil 2.4 : Kuvvet ve Hız Vektörleri	7
Şekil 2.5 : Kesit Tesirleri	8
Şekil 2.6 : Şekil Değiştirmeler	9
Şekil 4.1 : Değişkenler	17
Şekil 4.2 : Değişken Kesitte Eleman Rijitlik Matrisi	21
Şekil 4.3 : Değişken Kesitte Kütle Eleman Matrisi	22
Şekil 5.1 : Statik Analiz (Örn. 1)	24
Şekil 5.2 : Statik Analiz (Örn. 2)	26
Şekil 5.3 : M_t burulma momentinin $\alpha=r_1/r_0$ ile değişimi (Örn. 2)	27
Şekil 5.4 : M_n eğilme momentinin $\alpha=r_1/r_0$ ile değişimi (Örn. 2)	27
Şekil 5.5 : M_b eğilme momentinin $\alpha=r_1/r_0$ ile değişimi (Örn. 2)	28
Şekil 5.6 : Statik Analiz (Örn. 3)	28
Şekil 5.7 : M_t burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3)	30
Şekil 5.8 : M_n burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3)	31
Şekil 5.9 : M_b burulma momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3)	31
Şekil 5.10 : Örnek 4’de 1. mod şekli.....	33
Şekil 5.11 : Örnek 4’de 2. mod şekli.....	33
Şekil 5.12 : Örnek 4’de 3. mod şekli.....	34
Şekil 5.13 : Örnek 4’de 4. mod şekli.....	34
Şekil 5.14 : Örnek 4’de 5. mod şekli.....	35
Şekil 5.15 : Örnek 4’de 6. mod şekli.....	35
Şekil 5.16 : Örnek 5’de 1. mod şekli.....	37
Şekil 5.17 : Örnek 5’de 2. mod şekli.....	37
Şekil 5.18 : Örnek 5’de 3. mod şekli.....	38
Şekil 5.19 : Örnek 5’de 4. mod şekli.....	38
Şekil 5.20 : Örnek 5’de 5. mod şekli.....	39
Şekil 5.21 : Örnek 5’de 6. mod şekli.....	39

SEMBOL LİSTESİ

T, M	: Kuvvet ve moment vektörleri
q, m	: Yayılı dış kuvvet ve yayılı dış kuvvet çifti
γ, ω	: Relatif birim kayma açısı vektörü, relatif birim dönme vektörü
u, Ω	: Ötelenme vektörü, dönme vektörü
s	: Yay boyunca ark uzunluğu
C, D	: Kayma rijitlik tansörü, dönme rijitlik tansörü
t, n, b	: Frenet birim vektörleri
i, j, k	: Kartezyen birim vektörleri
r	: Yer vektörü
u_t, u_n, u_b	: Frenet koordinatlarında yer değiştirmeler
$\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$	: Frenet koordinatlarında dönmeler
T_t, T_n, T_b	: Frenet koordinatlarında kuvvetler
M_t, M_n, M_b	: Frenet koordinatlarında momentler
I_t, I_n, I_b	: Frenet koordinatlarında atalet momentleri
χ, τ, p, α	: Helisin eğriliği, burulması, birim açıda adımı ve eğimi
E, ν, G, ρ	: Elastisite modülü, Poisson oranı, kayma modülü, özağırlık
A, k	: Çubuk kesit alanı, kayma katsayısı
b, h, r	: Dikdörtgen kesitin genişliği, yüksekliği ve daire kesitin yarıçapı
H	: Helisin uç noktaları arasındaki düşey mesafe
R_1, R_0	: Helisin tavan yarıçapı, taban yarıçapı
φ	: Helisin yatayda taban açısı
n	: Helisin tur sayısı
ψ_i	: Yaklaşım fonksiyonları
μ	: Dairesel frekans
f	: Serbest titreşim frekansı
a	: İvme vektörü
v	: Hız vektörü
V	: Hacim
$[k]^e$	: Değişken kesitte eleman rijitlik matrisi
$[m]^e$	: Değişken kesitte kütle matrisi
[K]	: Sistem matrisi
$[K^*]$	: İndirgenmiş sistem matrisi
[M]	: Kütle matrisi

ÖZET

Çubuk Geometrisi

Bu araştırmada ele alınacak problemler uzay çubuk ortamından oluşmaktadır. Silindirik helisel çubukta çubuk eksenine bağlı olarak hareketli $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ ile sabit takım $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ arasındaki dönüşüm bağıntıları:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{t} - \cos(\varphi)\mathbf{n} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= +[R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{t} - \sin(\varphi)\mathbf{n} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{k} &= -[p(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{t} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

ya da,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= -\cos(\varphi)\mathbf{i} - \sin(\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= +[p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

şeklindedir. Burada R silindir yarıçapı, p birim açıda helisin adım yüksekliği, φ x ekseninden ölçülen açı ve $c(\varphi) = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d\varphi$ dir. Eğer helisin eğimine α dersek, $p = R \tan(\alpha)$ biçiminde ifade edilir.

Alan Denklemleri ve Fonksiyonel

Bu araştırmada çubuk malzemesinin elastik, homojen ve izotrop olduğu; birinci mertebe kuramının geçerli olduğu; çubuk kesitinde kayma ve geometrik merkezlerin çakıştığı; kesitin asal eksenleri ile çubuk eksenine bağlı $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ eksenlerinin aynı olduğu varsayılmıştır. Böylece çubuk eksenini üzerindeki bir noktanın yer değiştirmesi ile buradaki kesit dönmesi,

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_b \quad \text{ve} \quad \mathbf{\Omega}(s) = \mathbf{\Omega}_t + \mathbf{\Omega}_n + \mathbf{\Omega}_b$$

dir. Burada s yay boyunca ark uzunluğudur. Gerilme bileşikleri,

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}_t + \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_b \quad \text{ve} \quad \mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_b \quad (\text{A.3})$$

olarak gösterilir. (A.3) de $\mathbf{T}$ kuvvetleri, $\mathbf{M}$ momentleri gösterir. Şu halde uzaysal çubuğa ait hareket denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} - \rho A \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \rho \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (\text{A.4})$$

dir. Burada ρ elemanın öz ağırlığı olup, A kesit alanı ve $\mathbf{I}$ atalet momentleri,

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A \rho dA, \quad \mathbf{I} = I_{ij}, \quad I_{ij} = \int_A \rho x_i x_j dA \quad (i \neq j), \\ I_{nn} &= \int_A \rho x_n^2 dA, \quad I_{bb} = \int_A \rho x_n^2 dA, \quad I_{tt} = I_{nn} + I_{bb}, \end{aligned} \right\} (i, j = t, n, b) \quad (\text{A.5})$$

şeklinde hesaplanır. Kinematik denklemler,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

olup bünye bağıntıları,

$$-\mathbf{M} + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad -\mathbf{T} + \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

dır. (A.7) de kaymaya ve dönmeye karşı gelen rijitliklerin tersi,

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} k'/GA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EA \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

dır. Daha sonra yukarıdaki alan denklemleri ve fonksiyonel analizi yöntemi kullanılarak karışık sonlu eleman formülasyonu için uygun yapıdaki fonksiyonel,

$$\left. \begin{aligned} I(\mathbf{y}) &= - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \boldsymbol{\Omega} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}, \mathbf{T}] \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho A \mu^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \mathbf{I} \mu^2 [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}] \\ &\quad + \left[(T - \hat{T}), u \right]_{\sigma} + \left[(M - \hat{M}), \Omega \right]_{\sigma} + [\hat{u}, T]_{\varepsilon} + [\hat{\Omega}, M]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

biçiminde elde edilmiştir. Denklem (A.9) da, ε ve σ alt indisli terimler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını tanımlamaktadır.

Sonlu Elemanlar Formülasyonu

u yer değiştirme, **Ω** dönme, **M** moment ve **T** kesme kuvveti değerleri bilinmeyenler olup üç boyutlu koordinat takımında her düğüm noktasında 12 adet bilinmeyen bulunmaktadır. Bunlar $u_t = \sum_{i=1}^2 \psi_i \psi_j, \dots$, olacak biçimde doğrusal verilmiş yaklaşım fonksiyonları kullanılarak,

$$\psi_1 = \frac{1}{L}(L - x) \quad \text{ve} \quad \psi_2 = \frac{x}{L} \quad (\text{A.10})$$

ile ifade edilecektir. (A.10) da L sonlu çubuk elemanının boyunu ifade eder. Böylece çubuk elemanı içinde herhangi bir noktadaki değişkenler,

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 \\ \Omega &= \Omega_1 \psi_1 + \Omega_2 \psi_2 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} T &= T_1 \psi_1 + T_2 \psi_2 \\ M &= M_1 \psi_1 + M_2 \psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

biçiminde tanımlanır. Daha sonra eleman matrisi $\mathbf{k}^e$ ile kütle matrisi $\mathbf{m}^e$ üretilir. Sistem matrisi **K** ve sistem kütle matrisi **M** de kodlama tekniği ile $\mathbf{k}^e$ ile $\mathbf{m}^e$ den elde edilir.

Dinamik Analiz

Tek serbestlik dereceli sistemlerde serbest titreşim eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{A.12})$$

Bunun harmonik titreşimlerine ait çözümü,

$$x = a \sin(\mu t) \quad (\text{A.13})$$

şeklindedir. Şimdi (A.12) de (A.13) yerleştirilirse,

$$(k - \mu^2 m)a = 0 \quad (\text{A.14})$$

elde edilir. Çok serbestlikli sistemlerde (A.14) bir denklem takımı olarak,

$$([\mathbf{K}] - \mu^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.15})$$

biçiminde karşımıza çıkar ve bir özdeğer problemine dönüşür. Denklem takımı (A.15) in bir çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Aksi durum trivial çözümdür. Burada μ çubuğun serbest titreşim frekansı, **w** (**u**, **Ω**) ise yer değiştirme/dönme tipinde bir kolon vektördür. Karışık sonlu elemanlar yönteminde (A.15) in açık yazımı:

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \mu^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{m}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

biçimindedir. (A.16) da $\{\mathbf{F}\}$ gerilmeler sonucu oluşan kuvvetler/momentlere ait kolon vektör olup indirgeme yöntemi kullanılarak, problemin sınır koşullarına göre indirgenmiş denklem takımı:

$$\left([\mathbf{K}^*] - \mu^2 [\mathbf{m}] \right) \{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.17})$$

şeklinde ifade edilir. (A.17) de $[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{12}]^T [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}]$ olup, $[\mathbf{K}^*]$ a indirgenmiş sistem matrisi denir. (A.17) denklemi bir özdeğer probleminin çözümüyle hesaplanır.

Bu çalışmada, helisel çubukların statik ve dinamik analiz problemleri karışık sonlu elemanlar formülasyonu ile çözülerek, analitik çözümlerle ve diğer yöntemlerden bulunmuş sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu amaçla FORTRAN-90 dilinde yazılmış bir bilgisayar programı geliştirilmiş; programın doğruluğu ve hassasiyeti bilinen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre karışık sonlu elemanlar yöntemi ile kurulan model, kullanılan diğer metotlara oranla deneysel ve teorik çalışmalarla elde edilen sonuçlara daha yakın değerler vermiştir.

SUMMARY

The Rod Geometry

The rod problems considered in this study are in the three dimensional space. The necessary transformations between unit vectors for Frenet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ and Cartesian $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ system are:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{t} - \cos(\varphi)\mathbf{n} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= +[R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{t} - \sin(\varphi)\mathbf{n} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{k} &= -[p(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{t} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

and the inverse transformations are:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= -\cos(\varphi)\mathbf{i} - \sin(\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= +[p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

where R is the radius of base circle, p represents step for unit angle, φ shows the dynamic rotation angle and $c(\varphi) = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d\varphi$. If α shows the slope of the helix, p is defined as $p = R \tan(\alpha)$.

Field Equations and Functional

In this study several assumptions are made such as the rod material is ideally elastic, homogeneous and isotropic; there is one-to-one relationship between the state of stress and state of strain; the primary axis of the cross section of the rod coincides with the $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ coordinate axis. With these approaches, displacement and rotation of any point on the rod axis can be defined as:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_b \quad \text{and} \quad \mathbf{\Omega}(s) = \mathbf{\Omega}_t + \mathbf{\Omega}_n + \mathbf{\Omega}_b$$

where s is the arc length along the curve. Similarly, force and moment resultants can be written as:

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}_t + \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_b \quad \text{and} \quad \mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_n + \mathbf{M}_b \quad (\text{A.3})$$

where $\mathbf{T}$ shows the force vector and $\mathbf{M}$ shows the moment vector. At this point equations of motion of the space rod is defined as:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} - \rho A \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \rho \mathbf{I} \ddot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (\text{A.4})$$

where ρ is the density of the material. If A is the cross-section area and $\mathbf{I}$ represents the rotary inertia, this parameters are expressed as:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A \rho dA, & \mathbf{I} &= I_{ij}, & I_{ij} &= \int_A \rho x_i x_j dA \quad (i \neq j), \\ I_{nn} &= \int_A \rho x_n^2 dA, & I_{bb} &= \int_A \rho x_b^2 dA, & I_{tt} &= I_{nn} + I_{bb}, \end{aligned} \right\} (i, j = t, n, b) \quad (\text{A.5})$$

Kinematical Equations are written as:

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{\gamma} = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

and Constitutive Equations are written as:

$$-\mathbf{M} + \mathbf{D}\mathbf{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad -\mathbf{T} + \mathbf{C}\mathbf{\gamma} = \mathbf{0} \quad (\text{A.7})$$

In (A.7) the inverses of shearing and rotating rigidities are defined as:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} k'/GA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EA \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Afterwards, by using the field equations (A.4), (A.6), (A.7) and functional analysis method the following functional has been obtained:

$$\left. \begin{aligned} I(\mathbf{y}) &= - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + \left[\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T} \right] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{M} \right] - \frac{1}{2} \left[\mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}, \mathbf{T} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \rho A \mu^2 \left[\mathbf{u}, \mathbf{u} \right] - \frac{1}{2} \rho \mathbf{I} \mu^2 \left[\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega} \right] \\ &\quad + \left[(T - \hat{T}), u \right]_{\sigma} + \left[(M - \hat{M}), \Omega \right]_{\sigma} + \left[\hat{u}, T \right]_{\varepsilon} + \left[\hat{\Omega}, M \right]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

In equation (A.9), the subscripts ε and σ represent the geometric and dynamic boundary conditions.

The Finite Element Formulation:

$\mathbf{u}$ displacement, $\mathbf{\Omega}$ rotation, $\mathbf{M}$ moment and $\mathbf{T}$ internal force vectors are described as unknowns in (A.9) and the number of unknowns is 12 at each node of the rod in three dimensional coordinate system. These 12 unknowns are represented with interpolation functions like $u_t = \sum_{i=1}^2 \psi_i \psi_j, \dots$. For the finite element formulation linear interpolation functions are used:

$$\psi_1 = \frac{1}{L}(L-x) \quad \text{and} \quad \psi_2 = \frac{x}{L} \quad (\text{A.10})$$

where L is the rod finite element length. Thus, the variables at any point of the rod axis are expressed as:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1\psi_1 + u_2\psi_2 \\ \Omega &= \Omega_1\psi_1 + \Omega_2\psi_2 \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} T &= T_1\psi_1 + T_2\psi_2 \\ M &= M_1\psi_1 + M_2\psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.11})$$

Afterwards, the element $\mathbf{k}^e$ and the mass matrix $\mathbf{m}^e$ are found using (A.10) and (A.11). Global system matrix $\mathbf{K}$ and global mass matrix $\mathbf{M}$ are derived from $\mathbf{k}^e$ and $\mathbf{m}^e$ using coding technique.

Dynamic Analysis

Free vibration equation of a single degree of freedom system can be expressed as follows:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{A.12})$$

Assuming the following harmonic solution,

$$x = a \sin(\mu t) \quad (\text{A.13})$$

Eq. (A.13) reduces to the eigenvalue problem:

$$(k - \mu^2 m)a = 0 \quad (\text{A.14})$$

For conservative multi degree of freedom systems, (A.14) can be expressed as:

$$([\mathbf{K}] - \mu^2[\mathbf{M}])\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.15})$$

and this reduces to the general eigenvalue problem. A nontrivial solution of the set Eq. (A.15) is possible only if the determinant of the coefficient matrix vanishes. In this equation μ represents the free vibration frequency of the space rod and $\mathbf{w}$ ($\mathbf{u}$, Ω) shows the column vector that holds displacements and rotation components. In mixed finite element model, (A.15) can be written in an open as follows:

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \mu^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{m}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

In Eq. (A.16), $\{\mathbf{F}\}$ is the column vector that holds the force and moment components. Taking out the components of the vector $\{\mathbf{F}\}$ from Eq. (A.16) and using the reduction technique we get:

$$\left(\left[\mathbf{K}^*\right]-\mu^2\left[\mathbf{m}\right]\right)\{\mathbf{w}\}=\{\mathbf{0}\} \quad (\text{A.17})$$

where $\left[\mathbf{K}^*\right]=\left[\mathbf{K}_{22}\right]-\left[\mathbf{K}_{12}\right]^T\left[\mathbf{K}_{11}\right]^{-1}\left[\mathbf{K}_{12}\right]$ and, $\left[\mathbf{K}^*\right]$ is represented as reduced global system matrix. Eigenvalue problem expressed in Eq. (A.17) is solved and circular frequency values of μ are found.

A computer program coded in FORTRAN-90 is developed to prove sensitivity and verification of the method. In conclusion, it is shown that the frequency values derived by mixed finite element method give more sensitive results than other methods.

1. GİRİŞ

1.1 Konu

Mimari gerekçelerle, yapılarda helisel taşıyıcı sistemler sıkça karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple, belirtilen taşıyıcıların davranışlarının kolay ve doğru bir biçimde belirlenmesine yönelik çalışmalar önem kazanmıştır. Çeşitli araştırmacılar tarafından betonarme merdivenlerin boyutlandırılması inceleme alanı olarak seçilmiştir. Helisel çubuklara ait eleman rijitlik matrislerinin elde edilebilmesi için yapılan az sayıda çalışmada; enerji (Castigliano teoremi, Virtüel iş ilkesi), sonlu elemanlar gibi yöntemlerden yararlanılır. Çalışmaların çoğunluğunda, düzlem içinde ve düzlemine dik olarak yüklenmiş düzlem daire çubuklara ait rijitlik matrisi elde edilmiş; ya da esneklik matrisinden rijitlik matrisine geçilmiştir.

Boyutlandırmada, mühendisler açısından temel büyüklükler olan kuvvetler ve momentlerin doğruya en yakın bir biçimde belirlenmiş olmasına çalışılır. Bu arada izlenecek olan yöntemin basitliği ise ayrıca bir üstünlük sebebidir. Karışık sonlu eleman yönteminin üstünlüğü işte bu noktada ortaya çıkmaktadır, çünkü deplasmanlarla dönmelerin yanı sıra, kuvvetlerle momentler de temel bilinmeyen büyüklükler olarak sonlu elemanlar matrisine yerleştirilir ve böylelikle yer değiştirmeler, dönmeler, kuvvetler ve momentler benzer yakınsaklıklarda elde edilir. Bu çalışmada, karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak yapılmış olan statik ve dinamik analizler sonucunda helisel çubuklarda oluşan yer değiştirme ve gerilme bileşkelerinin gerçek değerlerle ve diğer yöntemlerden alınan sonuçlarla mukayesesi yapılmıştır. Bunun için FORTRAN-90 dilinde yazılmış bir bilgisayar programı geliştirilmiş; programın doğruluğu ve hassasiyeti bilinen sonuçlarla karşılaştırılarak kanıtlanmıştır. Geliştirilen HL elemanı iki düğüm noktalı ve 2×12 serbestlik dereceli olup, Timoshenko kiriş kuramına uygun yapıda kayma etkisi de göz önüne alınmıştır.

1.2 Helisel Sistemlerin Analizi Konusunda Yapılan Çalışmalar

HOLMES, (1957) tarafından, iki ucu ankastre, simetrik yüklü helisel çubuklar için genel denklemleri kullanarak bir çözüm önerilmiştir. Minimum şekil değiştirme enerjisi prensibinden hareketle iki ucu ankastre helisel çubuklarda, SCORDELIS, (1960) helis açıklığındaki bilinmeyenlerin hesaplanabilmesi için tablolar sunmuştur. Taşıma matrisi yöntemiyle CİNEMRE, (1960) statik analiz, HAKTANIR ve KIRAL, (1990) hem statik hem de dinamik analiz için rijitlik matrisleri geliştirmişlerdir. ABDULBAKİ ve SHUKAİR, (1973) ise bir yaklaşık çözüm yöntemi önermişlerdir. Virtüel iş prensibini kullanarak PANAYOTUNAKOS ve THEOCARIS, (1979) bir fleksibilite matrisi geliştirmişlerdir. STEFANOU, (1984) ise iki ucu ankastre ve düzgün yayılı yükleme altındaki betonarme helisel merdivenler için abaklar vermiştir. HAKTANIR ve KIRAL, (1989) helisel merdivenlerin statik davranışını rijitlik matrisi metodu ile incelemiş, daha sonra helisel merdivenlerin zorlanmış titreşim problemini, yayılı kütle halinde taşıma matrisi yöntemi ve Laplace dönüşümü; ayrıca toplanmış kütle varsayımı ile, sonlu eleman formülasyonu ve direk integrasyon yöntemleri kullanarak ayrı ayrı ele almışlardır (HAKTANIR ve KIRAL, 1990). OMURTAG ve AKÖZ, (1992) ise helisel yayların statik hesabı için karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak başka bir modeli ortaya koymuşlardır. Helis eksenli merdivenlerin dinamik analizi ile ilgili çalışmalar az sayıda olmakla beraber, literatürde özellikle incelenen sistemle benzer geometriye sahip olan helisel yay elemanlarının dinamik davranışları ile ilgili çeşitli araştırmalar yapılmıştır. NAGAYA, TAKEDA ve NAKATA, (1986) tarafından yayların serbest titreşimleri ile ilgili bir araştırma yapılarak taşıma matrisi yöntemi ile bulunan sonuçlar yapılan deneylerle karşılaştırılmıştır. YILDIRIM, (1996) tarafından taşıma matrisi yöntemi kullanılarak yapılan çalışmada; helisin eğimi, sınır koşulları, tur sayısı, (silindir çapı / kesit çapı) gibi parametrelerdeki değişimlerin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkilerini incelenmiştir. Daha sonra YILDIRIM ve İnce, (1997) aynı problemi silindirik olmayan sistemlerde rijitlik matrisi yöntemini kullanarak tekrar incelemiştir. YILDIRIM ve SANCAKTAR, (2000) de yapmış oldukları çalışmada ise kompozit malzemeye sahip elemanların serbest titreşim frekansını analiz etmişlerdir. BECKER ve Ark., (2002) helisel yayların serbest titreşim frekansları ile ilgili bir başka çalışma sunarak serbest titreşim frekansına etki eden parametreleri analiz etmişlerdir. Son olarak YILDIRIM, (2004) kompozit yay elemanlarının davranışını değişik parametreler altında incelemiştir. Pratik mühendislik uygulamalarında hesabı istenen kuvvet ve moment türü fiziksel büyüklüklerin, deplasman türü elemanlarda bir geri yerleştirme işlemi sonucu yer değiştirmelerden türetiliyor olması, bu sonuçların hassasiyeti üzerinde belli ölçüde etkili olmaktadır. Bunu aşmak için eleman ağında sıklaştırmaya gidilmesi (*h-adaptivity*) ya da polinom mertebelerinin artırılması

(*p-adaptivity*) da bir yaklaşımdır, BABUSKA ve SURI, (1994); MELENK et. al., (1999); ACTIS et. al., (1997); GERDES et. al., (1998); GERDES ve SCHWAB, (1998). Halbuki, karışık sonlu eleman formülasyonunda yer değiştirmelerin yanı sıra kuvvetler ve momentler de elemanın bilinmeyenleri olmakta ve doğrudan hesaplanabilmektedir. Böylece karışık sonlu eleman modellemesi ile daha hassas kuvvet ve moment türü büyüklüklerin hesaplanması mümkün olabilmektedir. GATEAUX diferansiyelinin kullanılmasının sağladığı üstünlükler AKÖZ ve Ark., (1991), OMURTAG ve AKÖZ, (1997) de geniş olarak bulunabilir.

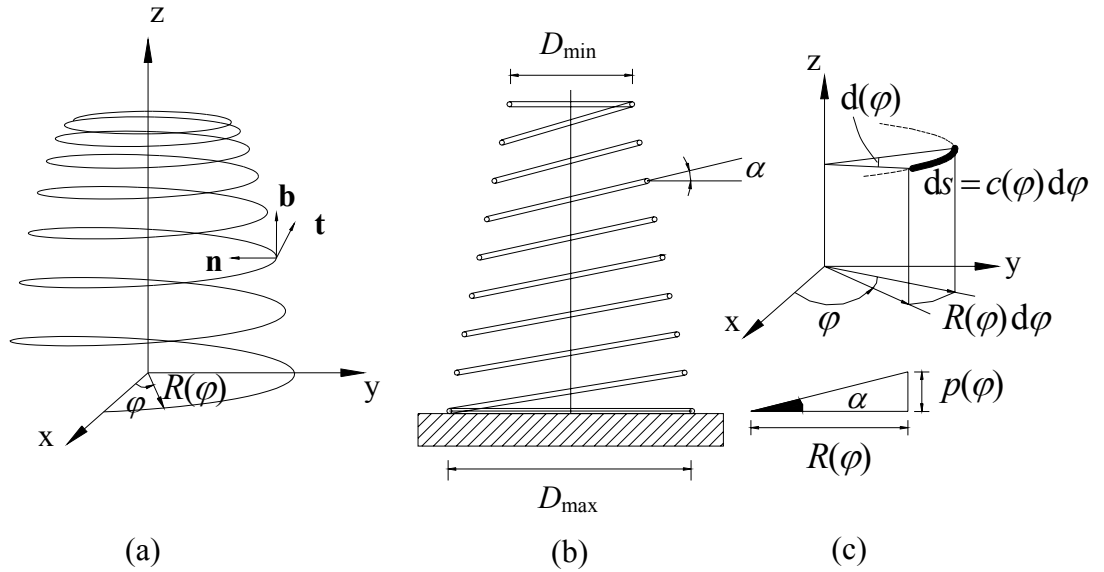
2. ELASTİK ÇUBUK KURAMI

2.1 Yapılan Varsayımlar

Bu çalışmanın kapsamında elastik, homojen ve izotrop çubuklar incelenmiştir. Ayrıca yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu birinci mertebe kuramı içinde kalınmıştır.

Gerilme hesaplarını kolaylaştırmak amacı ile çubuk adını verdiğimiz cismin enine olan iki boyutunun da çubuk boyu ile eğrilikler yanında çok küçük olduğu varsayılarak hesaplamalar yapılmıştır.

2.2 Helisel Çubuk Geometrisi



Şekil 2.1 – Helis Geometrisi

Bu çalışmada merdiven ve benzeri tarzda konstrüksiyon için önemli olan değişken taban yarıçapına sahip helisel sistemlerin hesabı ele alınmıştır. Çubuk eksenini Şekil 2.1.a da verilen φ açısı boyunca değişen dairesel yarıçapa sahip helis olsun. Taban daresi üzerinden ölçülen ve x ekseninden itibaren sayılan φ açısı parametre olarak seçilirse helisin parametrik denklemi,

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\varphi) \cos(\alpha) \\ y &= R(\varphi) \sin(\alpha) \\ z &= p(\varphi) \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

olarak bulunur. Burada $R(\varphi)$ helisin sarıldığı silindirin yarıçapı, $p(\varphi)$ ise uzunluk boyutunda olup helisin birim radyana karşı gelen yükselme değeridir ve $R(\varphi)$ ile arasında,

$$p(\varphi) = R(\varphi) \tan(\alpha) \quad (2.2)$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Şekil 2.1.b-c). Burada α helisin eğimidir.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektörleri sırasıyla x, y ve z eksenleri üzerindeki birim vektörler olmak üzere helisel sistemdeki herhangi bir noktanın konumunu ifade eden $\mathbf{r}$ vektörü şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.3)$$

$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ Frenet birim vektörleri üçlüsü, $\mathbf{r}$ yer vektörüne diferansiyel bağımlı, çubuk eksenini boyunca değişen hareketli bir dik takımdır ve aralarında şu ilişki mevcuttur:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ; \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}/ds}{\|d\mathbf{t}/ds\|} ; \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.4)$$

Burada ds heliste sonsuz küçük bir diferansiyel yay elemanı olup,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d\varphi = c(\varphi) d\varphi \quad (2.5)$$

şeklinde hesaplanır (Şekil 2.1.c). Geometrik dönüşüm formülleri ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (İNAN, 1966):

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \chi \mathbf{n} ; \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\chi \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} ; \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.6)$$

Burada χ helisin eğriliği, τ ise helisin tabii burulması olarak adlandırılır. Bu büyüklükler konik heliste s 'ye bağlı olarak değişir. Silindirik helislerde ise R sabit olduğu için bu parametreler de sabittir. φ ile aralarındaki ilişki ise:

$$\chi(\varphi) = \frac{R(\varphi)}{c^2(\varphi)} ; \quad \tau(\varphi) = \frac{p(\varphi)}{c^2(\varphi)} \quad (2.7)$$

şeklinde gösterilir.

Helisel çubuk kesit büyüklüklerinin fiziksel anlamının olduğu $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ hareketli takımı ile $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sabit takımı arasında dönüşüm bağıntıları ise,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{t} - \cos(\varphi)\mathbf{n} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{j} &= +[R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{t} - \sin(\varphi)\mathbf{n} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{b} \\ \mathbf{k} &= -[p(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{t} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

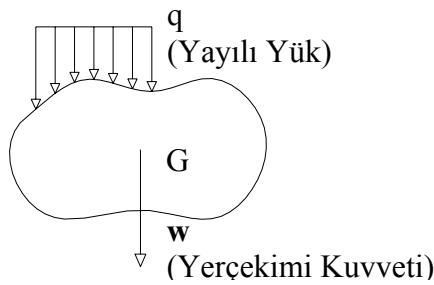
ya da,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &= -[R(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= -\cos(\varphi)\mathbf{i} - \sin(\varphi)\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= +[p(\varphi)/c(\varphi)]\sin(\varphi)\mathbf{i} - [p(\varphi)/c(\varphi)]\cos(\varphi)\mathbf{j} + [R(\varphi)/c(\varphi)]\mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

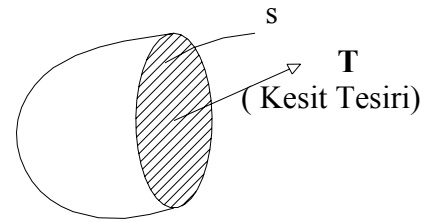
şeklindedir (İNAN, 1966).

2.3 Hareket Denklemleri

Bir cisim en genel anlamıyla iki tür kuvvetin etkisi altında bulunabilir; dış ve iç kuvvetler. Dış kuvvetler kütle kuvvetleri ve yüzey kuvvetlerinden oluşur. Kütle kuvvetleri, yerçekimi kuvveti veya manyetik kuvvetler gibi bir cisim içerisindeki bir alana veya bir hacme etki eden kuvvetlerdir. Yüzey kuvvetleri, cismi çevreleyen yüzey üzerine doğrudan veya dolaylı olarak başka bir cisim aracılığı ile etkiyen kuvvetlerdir. İç kuvvetler ise, bir cisim herhangi bir matematik düzlemi ile ikiye ayrıldığında, moleküller arasındaki etkileşimden (çekimden) kaynaklanan ve ayrım yüzeyi boyunca dağılan kuvvetlerdir. Gerilme iç kuvvetlerin birimi, yani birim yüzeye (alana) etki edenidir.

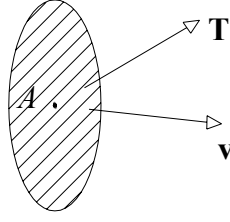


Şekil 2.2 - Dış Kuvvetler



Şekil 2.3 – İç Kuvvetler

İç ve dış kuvvetlerin etkisi altında, ivmeli hareket yapan herhangi bir cisim üzerinde bir A noktası ele alınsın.



Şekil 2.4 – Kuvvet ve Hız Vektörleri

Bu A noktasını çevreleyen cismin yüzey kısmını büyütürsek, bu yüzeye etki eden kuvvet ve hız vektörü Şekil 2.4 deki gibi gösterilebilir. $\mathbf{t}_{(n)}$ A noktasını kesen herhangi bir eğik düzlem üzerindeki bileşke gerilme, s bu düzlemin alanı, ρ birim hacim kütle, $\mathbf{f}$ kütle kuvveti yoğunluğu, $\mathbf{v}$ hız vektörü, ΔV toplam hacim olmak üzere cisme etki eden iç ve dış kuvvetlerin toplamı:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{iç} + \mathbf{T}_{dış} \\ \sum \mathbf{T} &= \int_s \mathbf{t}_{(n)} ds + \int_V \mathbf{f} \rho dV\end{aligned}\quad (2.10)$$

olarak bulunur. NEWTON'un hareket yasasına göre, lineer momentumun değişimi cisme etki eden iç ve dış kuvvetlerin toplamına eşittir. Lineer momentum kütle ile hızın çarpımıdır ve vektörel olarak

$$\Delta \mathbf{p} = (\rho \Delta V) \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{p} = \int_V \rho \mathbf{v} dV \quad (2.11)$$

biçiminde yazılır. Bu durumda NEWTON'un hareket yasası uygulanırsa:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum \mathbf{T} \quad (2.12)$$

ifadesi yazılabilir. İvme $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ olmak üzere hacim ve alan integralleri kullanılarak (2.12) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \rho \mathbf{a} dV \\ &\quad \int_V \rho \mathbf{a} dV + \int_s \mathbf{t}_{(n)} ds + \int_V \mathbf{f} \rho dV\end{aligned}\quad (2.13)$$

olarak ifade edilebilir.

(2.13) denkleminin tüm terimlerinin aynı boyutta gösterilebilmesi için yüzey integralinin hacim integraline çevrilmesi gerekir. Bu dönüşüm GREEN-GAUSS

integral teorem ile mümkündür. Bunun için nabla operatörü $\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial(\dots)}{\partial x_i} \vec{i}_i \right]$ ve diverjans işlemi $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{v} = v_{i,i}$ (bir vektörün nabla operatörü ile skaler çarpımı) kullanılacaktır. GREEN-GAUSS teoremi bir hacim integralini bir yüzey integriline çevirir. Bu durumda (2.13) denkleminin son hali,

$$\int_V \rho \mathbf{a}_j dV = \int_V \mathbf{t}_{i,j} dV + \int_V \mathbf{f}_j \rho dV \quad (2.14)$$

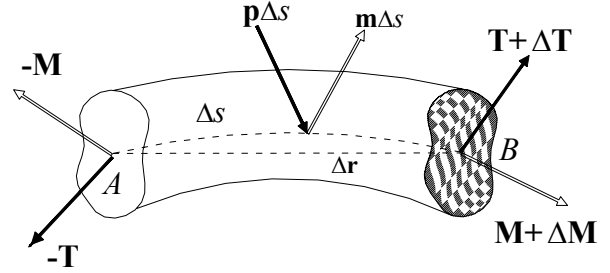
şeklinde yazılır. Şu halde bir diferansiyel hacim elemanı için hareket denklemi,

$$\mathbf{t}_{i,j} dV + \mathbf{f}_j \rho dV = \rho \mathbf{a}_j dV \quad (2.15)$$

olarak en genel haliyle elde edilir. Bu konuda geniş açıklama REDDY, (1984) de bulunabilir.

Kesite tesir eden iç kuvvetlerin toplamı $\mathbf{T}$ ile, bunların ağırlık merkezine taşınması durumunda katılması gereken kuvvet çifti $\mathbf{M}$ ile gösterilir.

Bu fonksiyonların çubuk eksenini boyunca değişimi keyfi olmayıp dış kuvvetlere bağlıdır. Bunu elde etmek için Δs uzunluğunda bir çubuk elemanının üzerine ve kesit yüzlerine tesir eden kuvvetlerle dengede olduğu düşünülür (Bkz. Şekil 2.5).



Şekil 2.5 – Kesit Tesirleri

$\mathbf{p}$ s boyunca yayılı dış kuvvetleri, $\mathbf{m}$ ise yayılı dış kuvvet çiftini göstermek üzere, dengenin birinci denklemi ile A noktasına göre yazılan moment eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} -\mathbf{T} + \mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} + \mathbf{p} \Delta s &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{M} + \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} + \mathbf{m} \Delta s + \Delta\mathbf{r} \times (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemlerde kısaltmalar yapıp limite geçilerek ve (2.15) ifadesi kullanılarak elastik çubuğun hareket denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} - \rho A \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad ; \quad \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \rho \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

olarak elde edilir. Burada A çubuk kesit alanı, I atalet momenti, $\mathbf{u}$ dik kesitin ağırlık merkezindeki ötelenme, $\mathbf{\Omega}$ ağırlık merkezi etrafındaki dönme vektörüdür ve açık halde gösterimi,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b} \\ \mathbf{\Omega} &= \Omega_t \mathbf{t} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b} \\ \mathbf{T} &= T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b} \\ \mathbf{M} &= M_t \mathbf{t} + M_n \mathbf{n} + M_b \mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

şeklinde tarif edilmiştir.

2.4 Kinematik Denklemler:

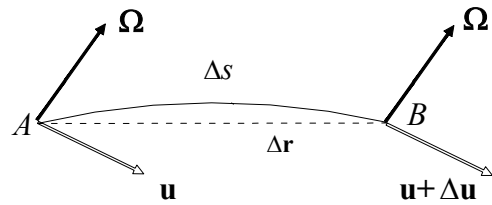
Kinematik denklemler yer ve şekil değiştirme için tarif edilen $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, γ ve ω gibi dört vektör fonksiyonu arasındaki bağıntıları ihtiva eder. γ rölatif birim kayma açısı vektörü ile $\mathbf{u}$ ötelenme vektörü arasındaki ilişki:

$$\gamma = \frac{d\mathbf{u}}{ds} \quad (2.18)$$

dir. ω rölatif birim dönme vektörü ile $\mathbf{\Omega}$ dönme vektörü arasındaki ilişki ise:

$$\omega = \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \quad (2.19)$$

biçimindedir. Çubuk eksenini üzerinde birbirine çok yakın iki nokta ele alınsın (Şekil 2.6). B noktasının A noktasına göre yer değiştirmesi ise $\Delta\mathbf{u}$ ile gösterilsin. Bu durumda rölatif yer değiştirme $\Delta\mathbf{u} = \gamma \Delta s + \mathbf{\Omega} \times \Delta\mathbf{r}$ bağıntısı ile tarif edilir.



Şekil 2.6 – Şekil Değiştirmeler

Taraflar Δs ile bölünüp limitler alınırsa $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ den bağıntı,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \gamma + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{t} \Rightarrow \gamma = \frac{d\mathbf{u}}{ds} - \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} \quad (2.20)$$

şeklini alır. (2.20) bağıntısı $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{\Omega}$ arasındaki ilişkiyi göstermektedir ve *uygunluk şartı* olarak adlandırılır.

(2.19) ve (2.20) denklemleri tekrar düzenlenirse kinematik bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{\omega} &= \mathbf{0} \\ \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{\gamma} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

2.5 Bünye Bağıntıları:

Bünye bağıntılarında; bir taraftan $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$ kesit tesirleriyle, diğer taraftan $\mathbf{\gamma}$ ve $\mathbf{\omega}$ şekil değiştirmeyi tarif eden vektörler arasındaki ilişki kurulacaktır. Bu bağıntılar kurulurken çubuk deformasyonu sonucu meydana gelen yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu, kesit ağırlık ve kayma merkezlerinin çakıştığı, ayrıca çubuk malzemesinin homojen ve izotrop olduğu kabul edilecektir.

Büyükliklerin tarifindeki özelliğe dayanılarak $\mathbf{\gamma}$ ile $\mathbf{T}$, $\mathbf{\omega}$ ile $\mathbf{M}$ arasındaki ilişkinin

$$\mathbf{T} = f_1(\mathbf{\gamma}) \quad \text{ve} \quad \mathbf{M} = f_2(\mathbf{\omega})$$

biçiminde olduğu kabul edilir. Burada f_1 ile f_2 vektörler arasında mevcut fonksiyonu temsil eder. Hooke kanunu esasları kabul edilirse bu fonksiyonlar lineer vektör fonksiyonu olarak düşünülebilir. Bu durumda bünye bağıntıları,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} - \mathbf{C}\mathbf{\gamma} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M} - \mathbf{D}\mathbf{\omega} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{veya,} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{\gamma} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T} \\ \mathbf{\omega} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

olarak tarif edilir. $\mathbf{C}^{-1}$ kayma rijitliğinin, $\mathbf{D}^{-1}$ ise dönme rijitlik tansörünün tersi ise incelenecek çubuk elemanlarının malzeme özellikleri göz önünde tutularak şu şekilde hesaplanır:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} k'/GA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EA \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_t \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Burada E elastisite modülü, G kayma modülü, A kesit alanı, I atalet momenti ve k' kayma katsayısıdır.

3. FONKSİYONEL ANALİZİ

3.1 Alan Denklemleri

Ele alınan sistemde serbest titreşim hali incelenmektedir. Çubuğun serbest titreşim frekansı μ olmak üzere yer değiştirme, dönme, kuvvet ve moment bileşenleri:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(s,t) &= \mathbf{u}(s) \cdot e^{i\mu t} & , & \quad \mathbf{T}(s,t) = \mathbf{T}(s) \cdot e^{i\mu t} \\ \mathbf{\Omega}(s,t) &= \mathbf{\Omega}(s) \cdot e^{i\mu t} & , & \quad \mathbf{M}(s,t) = \mathbf{M}(s) \cdot e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. (2.16) da (3.1) ifadeleri yerleştirilir ve dış kuvvetleri ifade eden $\mathbf{m}$ ile $\mathbf{p}$, (2.16) denkleminde çıkarılırsa, serbest titreşime ait hareket denklemleri,

$$-\frac{d\mathbf{T}}{ds} - \rho A \mu^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad -\frac{d\mathbf{M}}{ds} - \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \rho \mathbf{I} \mu^2 \mathbf{\Omega} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{I}$ atalet momenti vektörü olup A kesit alanını ifade eder. Hareket denklemlerine ek olarak,

kinematik bağıntılar,

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{\gamma} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

bünye bağıntıları,

$$-\mathbf{M} + \mathbf{D} \mathbf{\omega} = \mathbf{0} \quad \text{ve} \quad -\mathbf{T} + \mathbf{C} \mathbf{\gamma} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

olarak ele alınmıştır.

3.2 Potansiyellik Koşulu

$\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{f}$ alan denklemlerinin operatör yapıda gösterimi olmak üzere $\mathbf{L}$ türev operatörünü, $\mathbf{y}$ değişkenleri, $\mathbf{f}$ ise dış yükleri temsil eder. $\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{f}$ operatörünün potansiyel bir fonksiyon olabilmesi için; bu fonksiyondan, yönden ve yoldan bağımsız olarak türetilen tüm diğer fonksiyonların toplamının yine bu fonksiyonu vermesi gerekir. Dolayısıyla potansiyel fonksiyon bir baz noktası olarak düşünülebilir.

Potansiyellik koşulunun matematiksel olarak ifade edilebilmesi için P operatörünün bir yöne göre türevinin diğer yöndeki toplamı, bu işlemin tersine eşitlenmelidir:

$$[dP(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] = [dP(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] \quad (3.5)$$

(3.5) denklemi, P fonksiyonunun $\bar{\mathbf{y}}$ yönüne göre türevinin $\mathbf{y}^*$ yönündeki toplamı, aynı fonksiyonun $\mathbf{y}^*$ yönüne göre türevinin $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki toplamına eşittir şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemin yazılabilmesi için yönsel türev ve yönsel toplamın tanımlanması gerekir.

3.2.1 Yönsel Toplam (İç Çarpım)

Yönsel toplam, bir fonksiyonla bir değişkenin çarpımının belirli bir aralıktaki integralidir ve aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$[f(x), \mathbf{y}^*] = \int_b^a f(x) \mathbf{y}^* dx \quad (3.6)$$

3.2.2 Yönsel Türev (Gateaux Türevi)

Yönsel türevin matematiksel ifadesi τ bir skaler olmak üzere,

$$dP(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial P(\mathbf{y} + \tau \bar{\mathbf{y}})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \frac{L\bar{\mathbf{y}}}{1} = L\bar{\mathbf{y}} \quad (3.7)$$

şeklinde ifade edilir. İç çarpım aşağıdaki denklemler arasında gerçekleşmiştir:

$$-\frac{dT}{ds} - \rho A \mu^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}$$

$$-\frac{d\mathbf{M}}{ds} - \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \rho \mathbf{I} \mu^2 \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\Omega}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}$$

$$-\mathbf{M} + \mathbf{D} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}$$

$$-\mathbf{T} + \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}$$

Buna göre alan denklemlerinin değişkenlere ($\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{\omega}$, $\mathbf{\gamma}$) göre ”-“ yönündeki Gateaux türevi alınıp, ”*” yönünde toplanacak şekilde iç çarpımı yazılırsa;

$$[\mathbf{dP}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] = \left. \begin{aligned} & + \left[\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{ds}, \mathbf{T}^* \right] + \left[\frac{d\bar{\mathbf{\Omega}}}{ds}, \mathbf{M}^* \right] - \left[\frac{d\bar{\mathbf{T}}}{ds}, \mathbf{u}^* \right] - \left[\frac{d\bar{\mathbf{M}}}{ds}, \mathbf{\Omega}^* \right] \\ & + [\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{T}^*] - [\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{T}}, \mathbf{\Omega}^*] - [\bar{\mathbf{\gamma}}, \mathbf{T}^*] - [\bar{\mathbf{\omega}}, \mathbf{M}^*] \\ & + [(-\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{\omega}}), \mathbf{\omega}^*] + [(-\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{C}\bar{\mathbf{\gamma}}), \mathbf{\gamma}^*] \\ & - \rho A \mu^2 [\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^*] - \rho \mathbf{I} \mu^2 [\bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}^*] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde ”*” yönündeki Gateaux türevi alınıp, ”-“ yönünde toplanacak şekilde aşağıda gösterildiği gibi iç çarpımı yazılabilir:

$$[\mathbf{dP}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] = \left. \begin{aligned} & + \left[\frac{d\mathbf{u}^*}{ds}, \bar{\mathbf{T}} \right] + \left[\frac{d\mathbf{\Omega}^*}{ds}, \bar{\mathbf{M}} \right] - \left[\frac{d\mathbf{T}^*}{ds}, \bar{\mathbf{u}} \right] - \left[\frac{d\mathbf{M}^*}{ds}, \bar{\mathbf{\Omega}} \right] \\ & + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}^*, \bar{\mathbf{T}}] - [\mathbf{t} \times \mathbf{T}^*, \bar{\mathbf{\Omega}}] - [\mathbf{\gamma}^*, \bar{\mathbf{T}}] - [\mathbf{\omega}^*, \bar{\mathbf{M}}] \\ & + [(-\mathbf{M}^* + \mathbf{D}\mathbf{\omega}^*), \bar{\mathbf{\omega}}] + [(-\mathbf{T}^* + \mathbf{C}\mathbf{\gamma}^*), \bar{\mathbf{\gamma}}] \\ & - \rho A \mu^2 [\mathbf{u}^*, \bar{\mathbf{u}}] - \rho \mathbf{I} \mu^2 [\mathbf{\Omega}^*, \bar{\mathbf{\Omega}}] \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

(3.8) denkleminin kısmi integrasyon uygulanırsa ;

$$[\mathbf{dP}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] = \left. \begin{aligned} & + \left[\bar{\mathbf{T}}, \frac{d\mathbf{u}^*}{ds} \right] + \left[\bar{\mathbf{M}}, \frac{d\mathbf{\Omega}^*}{ds} \right] - \left[\bar{\mathbf{u}}, \frac{d\mathbf{T}^*}{ds} \right] - \left[\bar{\mathbf{\Omega}}, \frac{d\mathbf{M}^*}{ds} \right] \\ & + [\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{T}^*] - [\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{T}}, \mathbf{\Omega}^*] - [\bar{\mathbf{\gamma}}, \mathbf{T}^*] - [\bar{\mathbf{\omega}}, \mathbf{M}^*] \\ & + [(-\bar{\mathbf{M}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{\omega}}), \mathbf{\omega}^*] + [(-\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{C}\bar{\mathbf{\gamma}}), \mathbf{\gamma}^*] \\ & - \rho A \mu^2 [\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^*] - \rho \mathbf{I} \mu^2 [\bar{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}^*] \\ & - [\bar{T}_0, u_0^*]_{\sigma} - [\bar{M}_0, \Omega_0^*]_{\sigma} + [\bar{u}_0, T_0^*]_{\varepsilon} + [\bar{\Omega}_0, M_0^*]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu denklemdeki ilk dört satır $[\mathbf{dP}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}]$ ifadesine, yani (3.9) denkleminin eşittir. Bu durumda (3.8) ile (3.9) denklemleri arasında;

$$[\mathbf{dP}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^*] \equiv [\mathbf{dP}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}}] - [\bar{T}_0, u_0^*]_{\sigma} - [\bar{M}_0, \Omega_0^*]_{\sigma} + [\bar{u}_0, T_0^*]_{\varepsilon} + [\bar{\Omega}_0, M_0^*]_{\varepsilon} \quad (3.11)$$

gibi bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntıda ilk terimin dışındaki terimler sınır koşullarını oluştururlar. Denklem (3.11) de, ε ve σ alt indisli terimler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını tanımlamaktadır.

3.3 Fonksiyonelin Oluşturulması

Bölüm 3.2’de potansiyellik koşulu sağlatılan operatör elde edilmişti. Bu operatörün Gateaux türevi alınsa, fonksiyonel şu şekilde ifade edilir:

$$I(\mathbf{y}) = \int_0^1 [\mathbf{P}(k\mathbf{y}, f), \mathbf{y}] dk + \int_0^1 [\mathbf{B}(k\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}), \mathbf{y}] dk \quad (3.12)$$

Burada k skaler bir sayıdır. Elde edilen (3.8) denkleminde (3.12) bağıntısı terim terim uygulanırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$I(\mathbf{y}) = \left. \begin{aligned} & + \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{u}}{ds}, \mathbf{T} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds}, \mathbf{M} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{u} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] \\ & + \frac{1}{2} [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] - \frac{1}{2} [\mathbf{t} \times \mathbf{T}, \mathbf{\Omega}] - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{T}] - \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M}] \\ & + \frac{1}{2} [(-\mathbf{M} + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} [(-\mathbf{T} + \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma}] \\ & - \frac{1}{2} \rho A \mu^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \mathbf{I} \mu^2 [\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}] \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

(3.13) denkleminde kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$I(\mathbf{y}) = \left. \begin{aligned} & - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] \\ & + \frac{1}{2} [-\mathbf{M} + \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}] + \frac{1}{2} [-\mathbf{T} + \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}] \\ & - \frac{1}{2} [\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}] - \frac{1}{2} [\mathbf{T}, \boldsymbol{\gamma}] \\ & - \frac{1}{2} \rho A \mu^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \mathbf{I} \mu^2 [\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}] \\ & + \left[(T - \hat{T}), u \right]_{\sigma} + \left[(M - \hat{M}), \mathbf{\Omega} \right]_{\sigma} + [\hat{u}, T]_{\varepsilon} + [\hat{\mathbf{\Omega}}, M]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

bulunur. (3.14) denkleminde $\mathbf{u}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{M}, \mathbf{T}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}$ olmak üzere 6 bilinmeyen vardır.

Bu denklemi sadeleştirmek ve $\boldsymbol{\omega}$ ile $\boldsymbol{\gamma}$ vektörlerini elimine etmek için (3.4)’teki bünye bağıntıları kullanılırsa,

$$I(\mathbf{y}) = \left. \begin{aligned} & - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] \\ & - \frac{1}{2} [\mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}, \mathbf{T}] \\ & - \frac{1}{2} \rho A \mu^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}] - \frac{1}{2} \rho \mathbf{I} \mu^2 [\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}] \\ & + \left[(T - \hat{T}), u \right]_{\sigma} + \left[(M - \hat{M}), \mathbf{\Omega} \right]_{\sigma} + [\hat{u}, T]_{\varepsilon} + [\hat{\mathbf{\Omega}}, M]_{\varepsilon} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

olarak fonksiyonel son şeklini alır.

3.4 Fonksiyonelin Açık Formu

Yer değiştirme, dönme, kuvvet ve moment bileşenlerinin vektörel yapıda gösterimi (2.17) de mevcuttur. Kuvvet ve moment bileşenlerinin s yayı boyunca birinci dereceden türevleri,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \left(\frac{dT_t}{ds} \mathbf{t} + T_t \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right) + \left(\frac{dT_n}{ds} \mathbf{n} + T_n \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right) + \left(\frac{dT_b}{ds} \mathbf{b} + T_b \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right) \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} &= \left(\frac{dM_t}{ds} \mathbf{t} + M_t \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right) + \left(\frac{dM_n}{ds} \mathbf{n} + M_n \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right) + \left(\frac{dM_b}{ds} \mathbf{b} + M_b \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right)\end{aligned}$$

dir ve (2.6) daki geometrik dnşm bağıntıları kullanılarak,

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \left(\frac{dT_t}{ds} \mathbf{t} + T_t \chi \mathbf{n} \right) + \left(\frac{dT_n}{ds} \mathbf{n} - T_n (\chi \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}) \right) + \left(\frac{dT_b}{ds} \mathbf{b} - T_b \tau \mathbf{n} \right) \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} &= \left(\frac{dM_t}{ds} \mathbf{t} + M_t \chi \mathbf{n} \right) + \left(\frac{dM_n}{ds} \mathbf{n} - M_n (\chi \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}) \right) + \left(\frac{dM_b}{ds} \mathbf{b} - M_b \tau \mathbf{n} \right)\end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

elde edilir. (2.17) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak, (3.15) denklemindeki terimler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}-\left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] &= -(u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b}) \cdot \left(\frac{dT_t}{ds} \mathbf{t} + \frac{dT_n}{ds} \mathbf{n} + \frac{dT_b}{ds} \mathbf{b} \right) \\ &= -u_t \left(\frac{dT_t}{ds} - \chi T_n \right) - u_n \left(\frac{dT_n}{ds} + \chi T_t - \tau T_b \right) \\ &\quad - u_b \left(\frac{dT_b}{ds} + \tau T_n \right) \\ -\left[\mathbf{\Omega}, \frac{d\mathbf{M}}{ds} \right] &= -\Omega_t \left(\frac{dM_t}{ds} - \chi M_n \right) - \Omega_n \left(\frac{dM_n}{ds} + \chi M_t - \tau M_b \right) \\ &\quad - \Omega_b \left(\frac{dM_b}{ds} + \tau M_n \right) \\ [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] &= \mathbf{t} \times (\Omega_t \mathbf{t} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b}) \cdot (T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b}) \\ &= (\Omega_n \mathbf{b} - \Omega_b \mathbf{t}) \cdot (T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b}) \\ &= \Omega_n T_b - \Omega_b T_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}[\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{M}] &= -\frac{1}{2}\left(\frac{M_t}{D_t}\mathbf{t} + \frac{M_n}{D_n}\mathbf{n} + \frac{M_b}{D_b}\mathbf{b}\right) \cdot (M_t\mathbf{t} + M_n\mathbf{n} + M_b\mathbf{b}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{M_t}{D_t}\right)M_t - \frac{1}{2}\left(\frac{M_n}{D_n}\right)M_n - \frac{1}{2}\left(\frac{M_b}{D_b}\right)M_b \\
-\frac{1}{2}[\mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}, \mathbf{T}] &= -\frac{1}{2}\left(\frac{T_t}{C_t}\mathbf{t} + \frac{T_n}{C_n}\mathbf{n} + \frac{T_b}{C_b}\mathbf{b}\right) \cdot (T_t\mathbf{t} + T_n\mathbf{n} + T_b\mathbf{b}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{T_t}{C_t}\right)T_t - \frac{1}{2}\left(\frac{T_n}{C_n}\right)T_n - \frac{1}{2}\left(\frac{T_b}{C_b}\right)T_b \\
-\frac{1}{2}\rho A\mu^2[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &= -\frac{1}{2}\rho A\mu^2(u_t\mathbf{t} + u_n\mathbf{n} + u_b\mathbf{b}) \cdot (u_t\mathbf{t} + u_n\mathbf{n} + u_b\mathbf{b}) \\
&= -\frac{1}{2}\rho A\mu^2(u_t^2 + u_n^2 + u_b^2) \\
-\frac{1}{2}\rho\mathbf{I}\mu^2[\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}] &= -\frac{1}{2}\rho\mu^2(I_t\Omega_t^2 + I_n\Omega_n^2 + I_b\Omega_b^2)
\end{aligned}$$

Yukarıda hesaplanan eşitlikler (3.15) denkleminde yerlerine konursa elde ettiğimiz fonksiyonelin açık yapıda gösterimi,

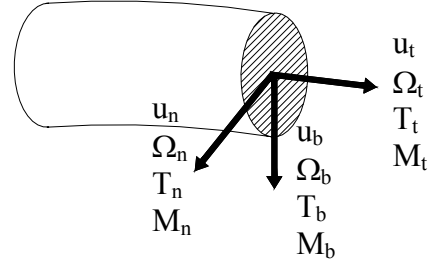
$$\left. \begin{aligned}
I(\mathbf{y}) &= -u_t\left(\frac{dT_t}{ds} - \chi T_n\right) - u_n\left(\frac{dT_n}{ds} + \chi T_t - \tau T_b\right) \\
&\quad - u_b\left(\frac{dT_b}{ds} + \tau T_n\right) - \Omega_t\left(\frac{dM_t}{ds} - \chi M_n\right) \\
&\quad - \Omega_n\left(\frac{dM_n}{ds} + \chi M_t - \tau M_b\right) - \Omega_b\left(\frac{dM_b}{ds} + \tau M_n\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{M_t}{D_t}M_t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M_n}{D_n}M_n\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{M_b}{D_b}M_b\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{T_t}{C_t}T_t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{T_n}{C_n}T_n\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{T_b}{C_b}T_b\right) + \Omega_n T_b - \Omega_b T_n \\
&\quad - \frac{1}{2}\rho A\mu^2(u_t^2 + u_n^2 + u_b^2) - \frac{1}{2}\rho\mu^2(I_t\Omega_t^2 + I_n\Omega_n^2 + I_b\Omega_b^2) \\
&\quad + \left[(T - \hat{T}), u\right]_{\sigma} + \left[(M - \hat{M}), \Omega\right]_{\sigma} + [\hat{u}, T]_{\varepsilon} + [\hat{\Omega}, M]_{\varepsilon}
\end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

olarak bulunur.

4. SONLU ELEMENLAR FORMÜLASYONU

4.1 Yaklaşım Fonksiyonları

Geliştirilen helisel eleman iki düğüm noktalı ve 2×12 serbestlik derecelidir. Yer değiştirme, dönme, kuvvet ve momentlerin **t**, **n**, **b** eksen takımına göre pozitif yönleri Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 - Değişkenler

Helisel eksene sahip çubuğun eleman matrisinin elde edilebilmesi için (2.17) de belirtilen değişkenlere ait yaklaşım fonksiyonlarının tanımlanarak denklem (3.17) de kullanılması gerekir. Sonlu elemanlar formülasyonu için aşağıdaki lineer yaklaşım fonksiyonları kullanılacaktır:

$$\psi_1 = \frac{1}{L}(L-x) \quad \text{ve} \quad \psi_2 = \frac{x}{L}, \quad (0 \leq x \leq L) \quad (4.1)$$

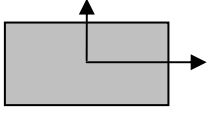
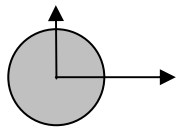
(4.1) de L çubuk sonlu elemanının yay boyunu ($L = c \Delta\varphi$) ifade etmektedir. Burada $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ elemanın düzlemde yaptığı merkez açısı olup c 'nin ve ds 'in hesabı için (2.5) denkleminde yararlanılır (Bkz. Şekil 2.1.c). Böylece çubuk elemanı içinde herhangi bir noktada değişkenler,

$$\left. \begin{aligned} u^e &= u_1\psi_1 + u_2\psi_2 & T^e &= T_1\psi_1 + T_2\psi_2 \\ \Omega^e &= \Omega_1\psi_1 + \Omega_2\psi_2 & M^e &= M_1\psi_1 + M_2\psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

şeklinde tarif edilir. Elemanlardaki değişken kesit özelliği de aynı şekilde yaklaşım fonksiyonları kullanılarak belirlenecektir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{AE} &= \bar{A}_1\Psi_1 + \bar{A}_2\Psi_2 & \frac{1}{GI_t} &= \bar{X}_1\Psi_1 + \bar{X}_2\Psi_2 \\ \frac{k'}{GA} &= \bar{K}_1\Psi_1 + \bar{K}_2\Psi_2 & \frac{1}{EI_n} &= \bar{Y}_1\Psi_1 + \bar{Y}_2\Psi_2 \\ & & \frac{1}{EI_b} &= \bar{Z}_1\Psi_1 + \bar{Z}_2\Psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

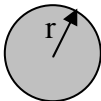
Burada k' kayma katsayısı, G Poisson oranı olmak üzere (Bkz. Tablo 4.1) $G = E/[2(1+\nu)]$, $\bar{A}_1 = (1/E A_1)$, $\bar{A}_2 = (1/E A_2)$, $\bar{K}_1 = (k'/G A_1)$, $\bar{K}_2 = (k'/G A_2)$, $\bar{X}_1 = (1/G I_{t1})$, $\bar{X}_2 = (1/G I_{t2})$...v.s şeklinde tanımlanmaktadır.

Tablo 4.1 – Çeşitli Kesit Geometrilere İçin Kayma Gerilmesi Katsayıları		
Kesit	k_x	k_y
	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$
	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{9}$

Kesit özelliklerini gösteren terimlerin hesabında kullanılan bağıntılar ise:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A \rho dA, & \mathbf{I} &= I_{ij}, & I_{ij} &= \int_A \rho x_i x_j dA \quad (i \neq j), \\ I_{nn} &= \int_A \rho x_n^2 dA, & I_{bb} &= \int_A \rho x_b^2 dA, & I_{tt} &= I_{nn} + I_{bb}, \end{aligned} \right\} (i, j = t, n, b) \quad (4.4)$$

şeklinde hesaplanmıştır. A ile $\mathbf{I}$ 'nın bileşenlerinin değişik kesit geometrileri için hesabı Tablo 4.2 de mevcuttur.

Tablo 4.2 – Çeşitli Kesit Geometriləri İçin Alan ve Atalet Momenti Değerleri											
Kesit	A	I_{tt}	I_{nn}	I_{bb}	Açıklama						
	ab	ηab^3	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$a > b$	$\frac{a}{b}$	1	2	4	8	∞
					η	0.208	0.246	0.282	0.307	$\frac{1}{3}$	
	πr^2	$I_{nn} + I_{bb}$	I_{nn}	$\frac{1}{64} \frac{r^4}{\pi}$							

(3.17) denklemi içerisindeki matematiksel işlemlerin yapılabilmesi için (4.1) de verilen yaklaşım fonksiyonlarının aşağıdaki özellikleri kullanılmıştır:

$$\left. \begin{aligned} [k_A] &= \int_0^L \Psi_i \Psi_j ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}L & \frac{1}{6}L \\ \frac{1}{6}L & \frac{1}{3}L \end{bmatrix} & (i, j = 1, 2) \\ [k_B] &= \int_0^L \Psi_i \Psi'_j ds = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ [k_C^d] &= \int_0^L (d_1 \Psi_i + d_2 \Psi_j) \Psi_i \Psi_j ds = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}Ld_1 + \frac{1}{12}Ld_2 & \frac{1}{2}L(d_1 + d_2) \\ \frac{1}{2}L(d_1 + d_2) & \frac{1}{12}Ld_1 + \frac{1}{4}Ld_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

(4.5) de L sonlu elemanın yay boyunu ifade etmekle birlikte, bu denklemdeki eşitliklerinin terimleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} k_{A11} &= \int_0^L \Psi_1 \Psi_1 ds = \int_0^L \left[-\frac{1}{L}(s-L) \right]^2 ds = \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{3}s^3 - s^2L + sL^2 \right) \Big|_0^L = \frac{L}{3} \\ k_{A12} &= \int_0^L \Psi_1 \Psi_2 ds = \int_0^L -\frac{s}{L^2}(s-L) ds = -\frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2L \right) \Big|_0^L = \frac{L}{6} \\ k_{A21} &= [k_A]_{1,2} = \frac{L}{6} \\ k_{A22} &= \int_0^L \Psi_2 \Psi_2 ds = \int_0^L \frac{s^2}{L^2} ds = \frac{s^3}{3L^2} \Big|_0^L = \frac{L}{3} \\ k_{B11} &= \int_0^L \Psi_1 \Psi'_1 ds = \int_0^L \frac{1}{L^2}(s-L) ds = \frac{s^2}{2L^2} - \frac{s}{L} \Big|_0^L = -\frac{1}{2} \\ k_{B12} &= \int_0^L \Psi_1 \Psi'_2 ds = \int_0^L -\frac{1}{L^2}(s-L) ds = -\frac{s^2}{2L^2} + \frac{s}{L} \Big|_0^L = +\frac{1}{2} \\ k_{B21} &= \int_0^L \Psi_2 \Psi'_1 ds = \int_0^L \frac{s}{L} \left(-\frac{1}{L} \right) ds = -\frac{s^2}{2L^2} \Big|_0^L = -\frac{1}{2} \\ k_{B22} &= \int_0^L \Psi_2 \Psi'_2 ds = \int_0^L \frac{s}{L} \left(\frac{1}{L} \right) ds = \frac{s^2}{2L^2} \Big|_0^L = +\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4.5) de $[k_C^d]$ değişken kesitli çubuklar için kullanılmakla birlikte, d_1 ve d_2 elemanın 1 ve 2 uçlarındaki değişken kesit özelliklerine sahip terimlere karşılık gelmektedir. Bu eşitliğe ait terimler ise şu şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
k_{C11}^d &= \int_0^L (d_1 \Psi_1 + d_2 \Psi_1) \Psi_1 \Psi_1 \, ds = \int_0^L \frac{I}{L^3} (s^2 - 2sL + L^2) [s(d_2 - d_1) + d_1 L] \, ds \\
&= \frac{I}{L^3} \left[\frac{1}{4} L^4 (d_2 - d_1) + \frac{1}{3} L^4 (3d_1 - 2d_2) + \frac{1}{2} L^4 (d_2 - 3d_1) + L^4 d_1 \right] \\
&= L \left[\frac{1}{4} d_1 + \frac{1}{12} d_2 \right] \\
k_{C12}^d &= \int_0^L (d_1 \Psi_1 + d_2 \Psi_2) \Psi_1 \Psi_2 \, ds = \int_0^L -\frac{I}{L^3} (s^2 - sL) [s(d_2 - d_1) + d_1 L] \, ds \\
&= -\frac{I}{L^3} \left[\frac{1}{4} s^4 (d_2 - d_1) + \frac{1}{3} s^3 (-d_2 L + 2d_1) - \frac{1}{2} s^2 d_1 L^2 \right] \Big|_0^L \\
&= -L \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) d_2 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) d_1 \right] = \frac{1}{12} L [d_1 + d_2] \\
k_{C21}^d &= [k_C^d]_{1,2} = \int_0^L (d_1 \Psi_2 + d_2 \Psi_1) \Psi_2 \Psi_1 \, ds = \frac{1}{12} L [d_1 + d_2] \\
k_{C22}^d &= \int_0^L (d_1 \Psi_2 + d_2 \Psi_2) \Psi_2 \Psi_2 \, ds = \int_0^L \frac{s^2}{L^3} [s(d_2 - d_1) + d_1 L] \, ds \\
&= \frac{I}{L^3} \left[\frac{1}{4} L^4 (d_2 - d_1) + \frac{1}{3} L^4 d_1 \right] \\
&= L \left[\frac{1}{12} d_1 + \frac{1}{4} d_2 \right]
\end{aligned}$$

4.2 Eleman ve Kütle Matrisleri

(3.17), (4.5) ve (4.3) denklemleri kullanılarak elde edilen helis eksenli çubuğun eleman rijitlik matrisi Şekil 4.2’de verilmiştir. Aynı şekilde kütle matrisini oluşturan terimlerin kurulmasında da değişken kesit özelliklerine bağlı olarak kurulan aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

$$\left. \begin{aligned} \rho A &= \bar{S}_1 \Psi_1 + \bar{S}_2 \Psi_2 & \rho I_n &= \bar{N}_1 \Psi_1 + \bar{N}_2 \Psi_2 \\ \rho I_t &= \bar{P}_1 \Psi_1 + \bar{P}_2 \Psi_2 & \rho I_b &= \bar{B}_1 \Psi_1 + \bar{B}_2 \Psi_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Burada $\bar{S}_1 = (\rho A)_1$, $\bar{S}_2 = (\rho A)_2$, $\bar{P}_1 = (\rho I_t)_1$, $\bar{P}_2 = (\rho I_t)_2$, $\bar{N}_1 = (\rho I_n)_1$, $\bar{N}_2 = (\rho I_n)_2$, $\bar{B}_1 = (\rho I_b)_1$, $\bar{B}_2 = (\rho I_b)_2$ şeklinde tanımlanmaktadır. (3.17), (4.5) ve (4.6) denklemleri kullanılarak elde edilen helis eksenli çubuğun eleman kütle matrisi ise Şekil 4.3’de verilmiştir.

u_t u_n u_b Ω_t Ω_n Ω_b T_t T_n T_b M_t M_n M_b
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

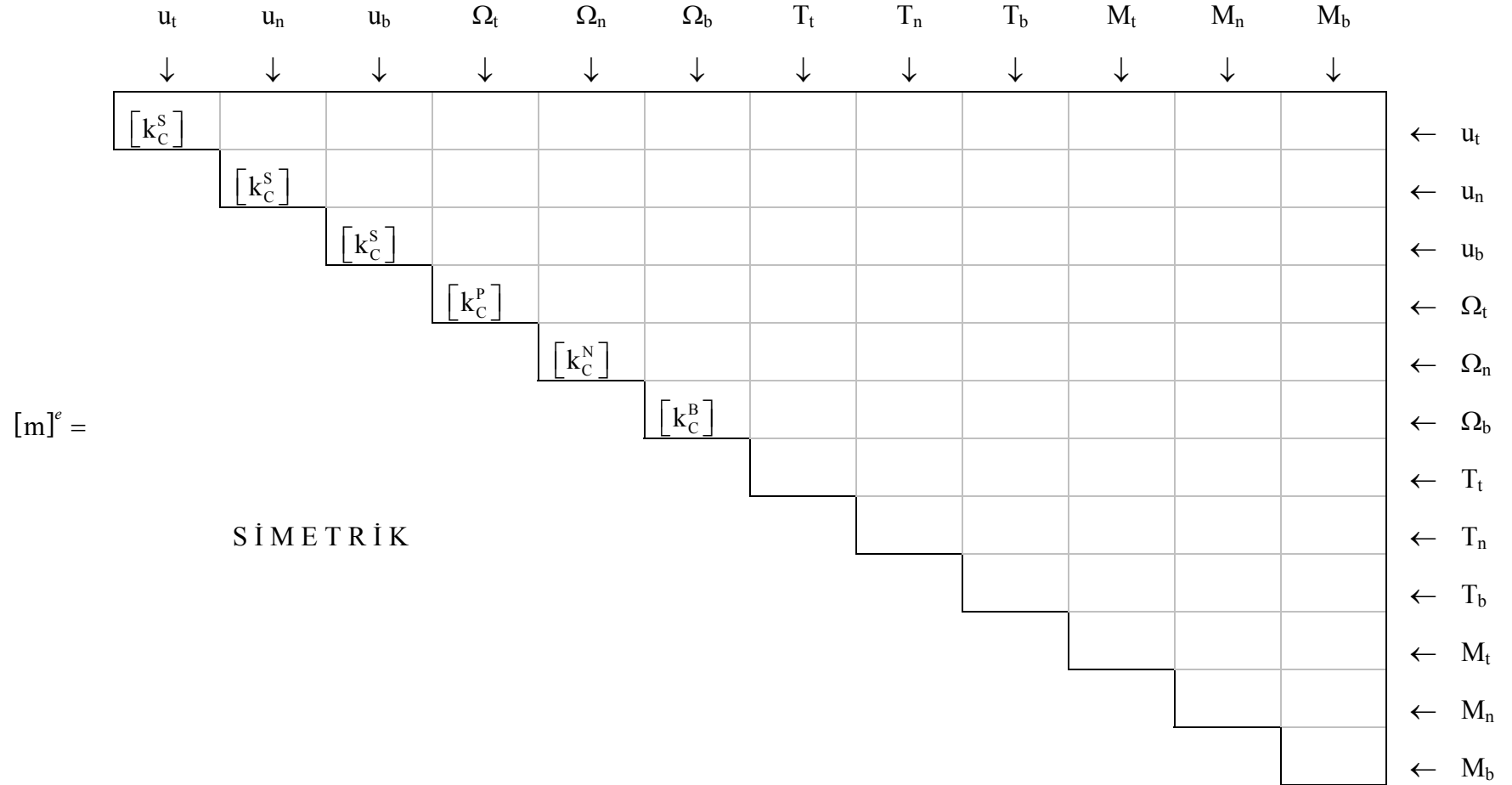
$[k]^e =$

						$-[k_A]$	$-[k_C^z]$				
						$-[k_C^z]$	$-[k_A]$	$[k_C^r]$			
							$-[k_C^r]$	$-[k_A]$			
									$-[k_A]$	$[k_C^z]$	
								$[k_B]$	$-[k_C^z]$	$-[k_A]$	$[k_C^r]$
							$-[k_B]$			$-[k_C^r]$	$-[k_A]$
						$-[k_C^A]$					
							$-[k_C^K]$				
								$-[k_C^K]$			
									$-[k_C^X]$		
										$-[k_C^Y]$	
											$-[k_C^Z]$

$\leftarrow u_t$
 $\leftarrow u_n$
 $\leftarrow u_b$
 $\leftarrow \Omega_t$
 $\leftarrow \Omega_n$
 $\leftarrow \Omega_b$
 $\leftarrow T_t$
 $\leftarrow T_n$
 $\leftarrow T_b$
 $\leftarrow M_t$
 $\leftarrow M_n$
 $\leftarrow M_b$

S İ M E T R İ K

Şekil 4.2 – Değişken kesitli konik helis eleman rijitlik matrisi - Bkz. Denklem (4.5)



Şekil 4.3 – Değişken kesitli konik helis eleman kütle matrisi - Bkz. Denklem (4.5)

4.3 Dinamik Analiz

Tek serbestlik dereceli sönümsüz sistemde serbest titreşim için hareket denklemi,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.7)$$

dir. (4.7) de $\mu = \sqrt{k/m}$ serbest titreşim frekansı olmak üzere, harmonik titreşimlere ait çözüm,

$$x = a \sin(\mu t) \quad (4.8)$$

dir. Şimdi (4.7) denklemi (4.8) de yerleştirilirse,

$$(k - \mu^2 m)a = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Çok serbestlik dereceli sistemlerde (4.9) bir denklem takımı olarak,

$$([\mathbf{K}] - \mu^2 [\mathbf{M}])\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.10)$$

biçiminde karşımıza çıkar ve bu bir özdeğer problemine dönüşür. Denklem takımının bir çözümünün olabilmesi için katsayılar determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Aksi durumda trivial çözüm ile karşılaşılır. Burada μ çubuğun dairesel titreşim frekansı, $\mathbf{w}(\mathbf{u}, \Omega)$ de yer değiştirme/dönme tipinde bir kolon vektördür. Karışık sonlu elemanlar yönteminde (4.10) un açık yazımı:

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{21}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \mu^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{m}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

biçimindedir. (4.11) de $\{\mathbf{F}\}$ gerilmeler sonucu oluşan kuvvetler/momentlere ait kolon vektör olup indirgeme yöntemi kullanılarak, problemin sınır koşullarına göre indirgenmiş denklem takımı:

$$([\mathbf{K}^*] - \mu^2 [\mathbf{m}])\{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (4.12)$$

şeklinde ifade edilir. (4.12) de $[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{12}]^T [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}]$ olup, $[\mathbf{K}^*]$ a indirgenmiş sistem matrisi denir. (4.12) denklemi bir özdeğer probleminin çözümünü hesaplanır. Problemin çözümünde özdeğerler serbest titreşim frekanslarını, özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin normleştirilmiş halleri ise bu frekansa karşı gelen yer değiştirme ve dönme değerlerini verirler. Frekansların mod şekilleri bu frekanslara ait özvektörler kullanılarak çizilir.

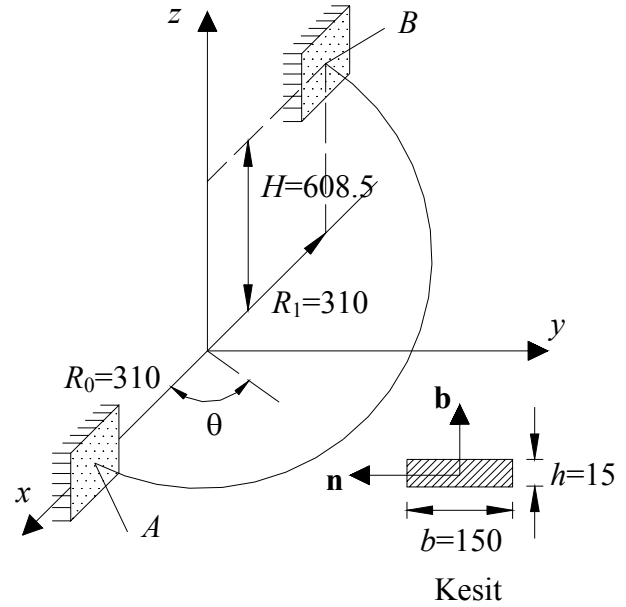
5. SAYISAL ÖRNEKLER

5.1 Statik Problemler

5.1.1 Örnek-1: Sabit Dikdörtgen Kesit Problemi

Bu örnekte dikdörtgen biçiminde sabit bir kesite sahip, tavan ve taban yarıçapı aynı olan bir helis, 20 eşit sonlu eleman parçasına bölünerek incelenmiştir. Sonuçların karşılaştırılmasında sayısal çözüm OMURTAG ve AKÖZ, (1992) ile kuramsal çalışma CİNEMRE, (1960) dan yararlanılmış ve Tablo 5.1 ile Tablo 5.2 hazırlanmıştır. Sonuçlar mühendislik açısından gerekli yeter yakınlığı sağlamıştır. (Bkz. EK-C)

Birim Sistemi	:	N-cm
Elastisite modülü (E)	:	3000000
Poisson oranı (ν)	:	0.3
Tur sayısı (n)	:	$\frac{1}{2}$
Kesit genişliği (b)	:	150
Kesit yüksekliği (h)	:	15
Taban yarıçapı (R_0)	:	310
Tavan yarıçapı (R_1)	:	310
Adım yüksekliği (H)	:	608.5
Yayıllı yük (q)	:	10



Şekil 5.1 – Statik Analiz (Örn.1)

FORTTRAN-90 programlama dilinde hazırlanan HL isimli yazılımın yapısı hakkında bilgi almak için Bkz. (EK-A)

Tablo 5.1 Deplasman ve Dönme Değerlerinin Karşılaştırılması (Örn. 1)

[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - [2]: CİNEMRE, (1960) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

	$\theta=0$			$\theta=\pi/2$			$\theta=\pi$		
	[1]	[2]	HL	[1]	[2]	HL	[1]	[2]	HL
$u_t \times 10^{-3}$	0.00	0.00	0.00	-4.99	-	-4.89	0.00	0.00	0.00
$u_n \times 10^{-5}$	0.00	0.00	0.00	-1.43	-	0.00	0.00	0.00	0.00
$u_b \times 10^{-1}$	0.00	0.00	0.00	-1.14	-	-1.15	0.00	0.00	0.00
$\Omega_t \times 10^{-4}$	0.00	0.00	0.00	3.20	-	3.15	0.00	0.00	0.00
Ω_n	0.00	0.00	0.00	0.00	-	0.00	0.00	0.00	0.00
$\Omega_b \times 10^{-4}$	0.00	0.00	0.00	1.95	-	1.95	0.00	0.00	0.00

Tablo 5.2 Kuvvet ve Moment Değerlerinin Karşılaştırılması (Örn. 1)

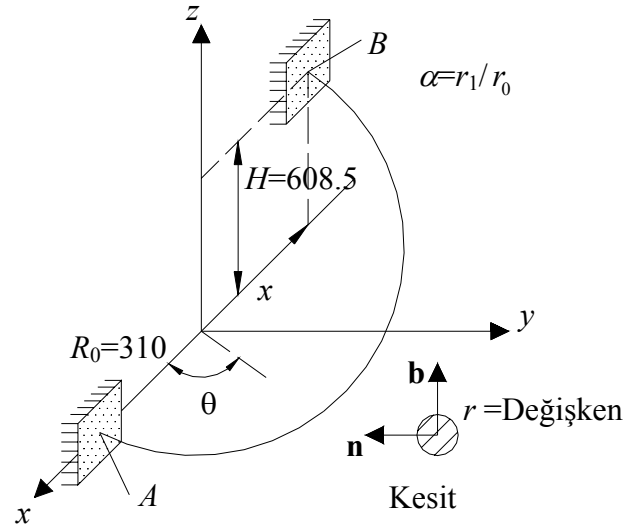
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - [2]: CİNEMRE, (1960) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

	$\theta=0$			$\theta=\pi/2$			$\theta=\pi$		
	[1]	[2]	HL	[1]	[2]	HL	[1]	[2]	HL
$N_t \times 10^1$	-572	-589	-574.3	0.00	-	0.00	573	589	574.3
$N_n \times 10^1$	30	0.00	30.6	370	-	371.5	30	0.00	30.6
$N_b \times 10^1$	-317	-309	-318.2	0.00	-	0.00	317	309	318.2
$M_t \times 10^4$	-0.652	-0.607	-0.654	0.00	-	0.00	0.652	0.607	0.654
$M_n \times 10^4$	9.64	11.1	9.642	1.61	-	1.60	9.65	11.11	9.64
$M_b \times 10^4$	116	123	116.8	-0.30	-	0.00	-116	-123	-116.8

5.1.2 Örnek-2: Değişken Dairesel Kesit Problemi

Bu örnekte kesit daire biçimindedir ve 50 eleman ile çözüm yapılmıştır. r_1 , A ve B noktalarındaki kesit yarıçapı, r_0 helisin ortasındaki kesit yarıçapı olmak üzere $\alpha=r_1/r_0=\{1, 0.83, 0.73, 0.6, 0.46\}$ değerleri için, tavan ve taban yarıçapı aynı olan sistemler karşılaştırılmıştır. Tablo 5.3 ve Tablo 5.4'den de görülebileceği üzere, sonuçlar yeter derecede yakın çıkmaktadır.

Birim Sistemi	: N-cm
Elastisite modülü (E)	: 3000000
Poisson oranı (ν)	: 0.3
Tur sayısı (n)	: $\frac{1}{2}$
Kesit yarıçapı (r)	: Değişken
Taban yarıçapı (R_0)	: 310
Tavan yarıçapı (R_1)	: 310
Adım yüksekliği (H)	: 608.5
Yayılı yük (q)	: 10



Şekil 5.2 – Statik Analiz (Örn. 2)

Tablo 5.3 ($\theta=\pi/2$) İçin Deplasman Değerlerinin Karşılaştırılması (Örn. 2)

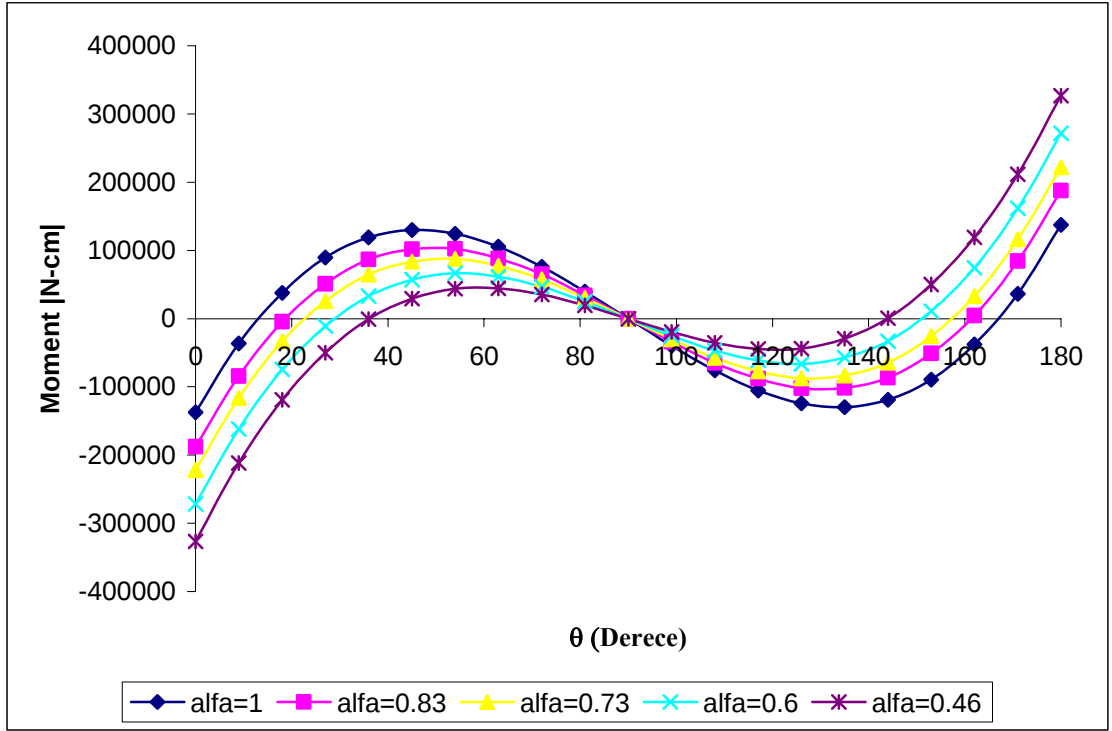
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

α	$u_t \times 10^{-1}$		u_n		u_b	
	[1]	HL	[1]	HL	[1]	HL
1.00	3.61	3.73	0.00	0.00	-3.88	-3.90
0.83	4.17	4.32	0.00	0.00	-5.19	-5.25
0.73	4.50	4.75	0.00	0.00	-6.33	-6.49
0.6	5.24	5.42	0.00	0.00	-8.96	-9.10
0.46	5.88	6.20	0.00	0.00	-13.7	-13.98

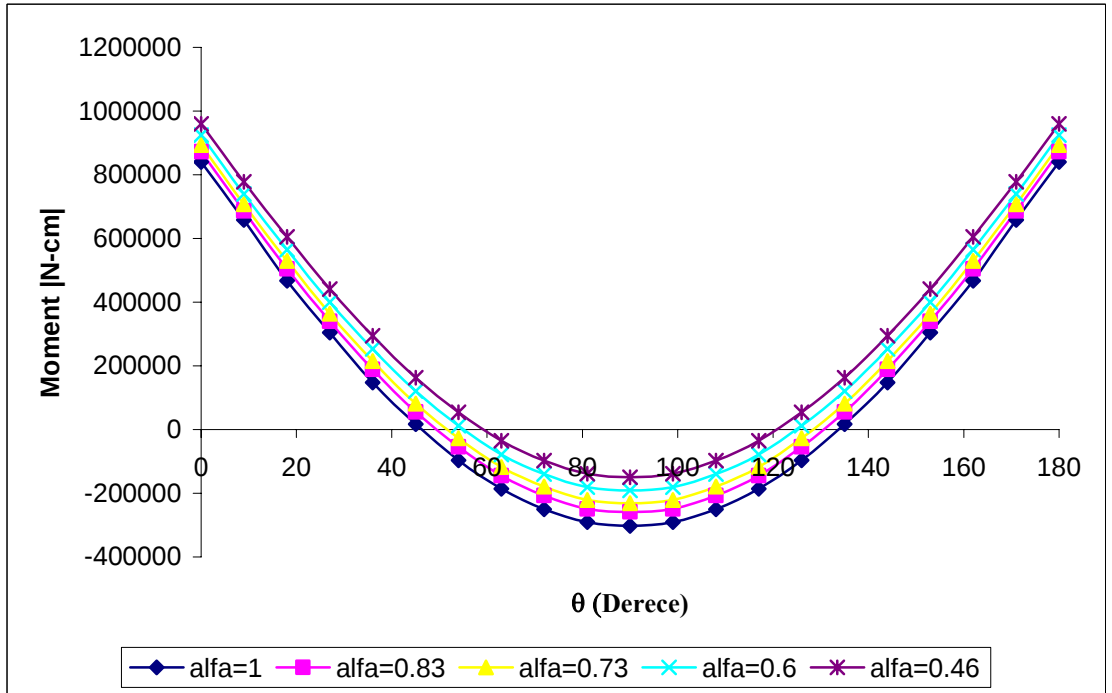
Tablo 5.4 ($\theta=\pi/2$) İçin Dönme Değerlerinin Karşılaştırılması (Örn. 2)

[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

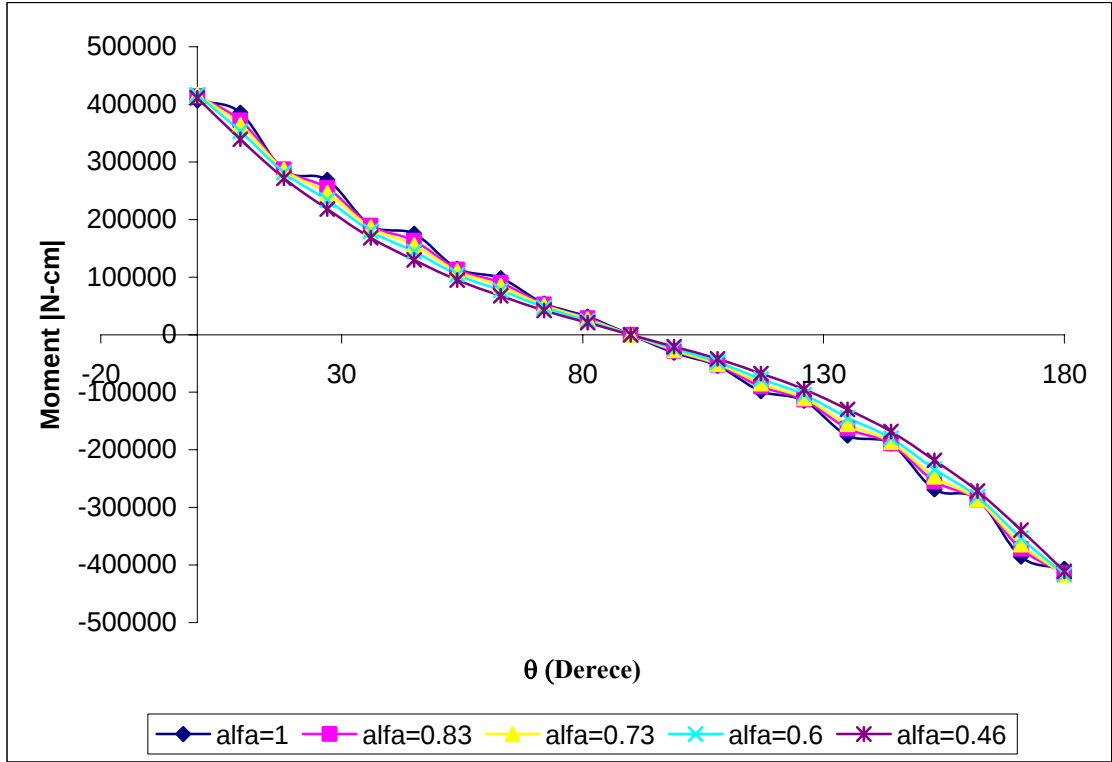
α	$\Omega_q \times 10^{-2}$		Ω_n		$\Omega_b \times 10^{-3}$	
	[1]	HL	[1]	HL	[1]	HL
1.00	1.23	1.25	0.00	0.00	3.52	3.38
0.83	1.61	1.63	0.00	0.00	4.90	4.79
0.73	1.95	1.97	0.00	0.00	6.20	6.16
0.6	2.66	2.70	0.00	0.00	9.20	9.18
0.46	3.98	4.05	0.00	0.00	1.52	1.52



Şekil 5.3 – M_t burulma momentinin $\alpha=r_1/r_0$ ile değişimi (Örn. 2)



Şekil 5.4 – M_n eğilme momentinin $\alpha=r_1/r_0$ ile değişimi (Örn. 2)

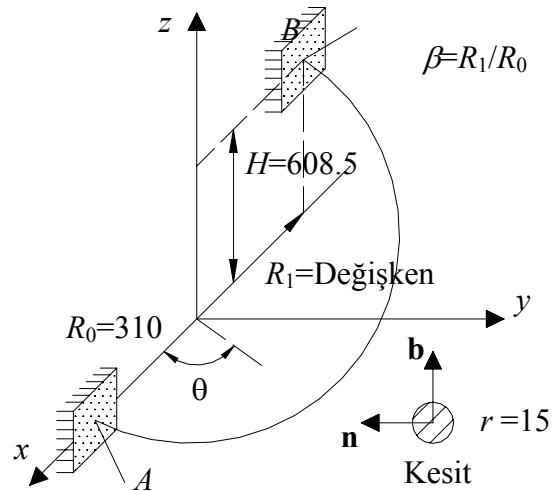


Şekil 5.5 – M_b eğilme momentinin $\alpha=r_1/r_0$ ile değişimi (Örn. 2)

5.1.3 Örnek-3: Değişken Tavan Yarıçaplı Helis Problemi

Bu örnekte kesit yarıçapı sabit olup daire biçimindedir ve 20 eleman için çözüm yapılmıştır. Taban yarıçapı $R_0=310$ alınmış ve tavan yarıçapı $\beta=R_1/R_0=\{1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6\}$ olacak şekilde değişen sistemler karşılaştırılmıştır. Tablo 5.5, Tablo 5.6, Tablo 5.7 ve Tablo 5.8 den de görülebileceği üzere, sonuçlar mühendislik açısından gerekli yeter yakınlığı sağlamıştır.

Birim Sistemi	: N-cm
Elastisite modülü (E)	: 3000000
Poisson oranı (ν)	: 0.3
Tur sayısı (n)	: $\frac{1}{2}$
Kesit yarıçapı (r)	: 15
Taban yarıçapı (R_0)	: 310
Tavan yarıçapı (R_1)	: Değişken
Adım yüksekliği (H)	: 608.5
Yayılı yük (q)	: 10



Şekil 5.6 – Statik Analiz (Örn. 3)

Helis elemanına ait yukarıdaki veriler programa girildikten sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Tablo 5.5 *A* mesnedi için kuvvet değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

β	$T_t \times 10^3$		$T_n \times 10^3$		$T_b \times 10^3$	
	[1]	HL	[1]	HL	[1]	HL
1.00	-3.78	-3.79	0.07	0.11	-4.36	-4.41
0.90	-3.74	-3.75	0.07	0.11	-4.18	4.22
0.80	-3.71	-3.71	0.07	0.11	-4.02	-4.03
0.70	-3.70	-3.67	0.12	0.11	-3.87	-3.85
0.60	-3.69	-3.62	0.17	0.12	-3.74	-3.68

Tablo 5.6 *A* mesnedi için moment değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

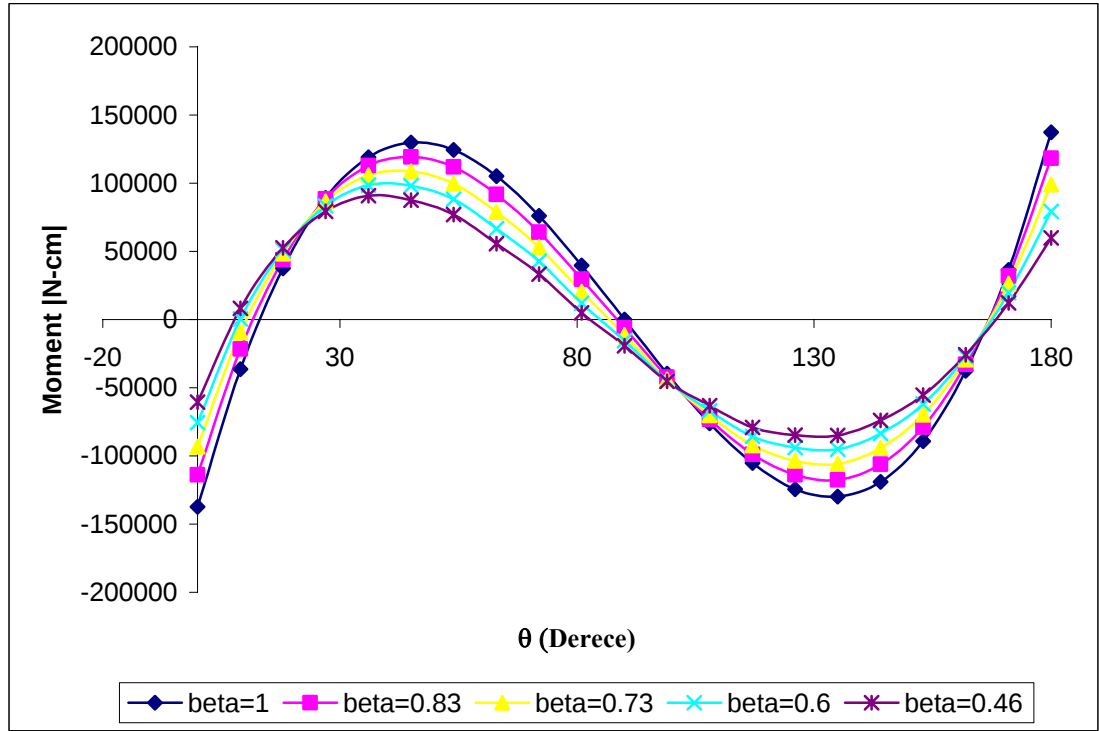
β	$M_t \times 10^5$		$M_n \times 10^5$		$M_b \times 10^5$	
	[1]	HL	[1]	HL	[1]	HL
1.00	-1.36	-1.37	8.33	8.40	3.97	4.06
0.90	-1.13	-1.14	7.59	7.65	3.55	3.63
0.80	-0.94	-0.93	6.98	6.95	3.25	3.22
0.70	-0.78	-0.75	6.45	6.30	2.99	2.85
0.60	-0.64	-0.61	5.92	5.70	2.73	2.52

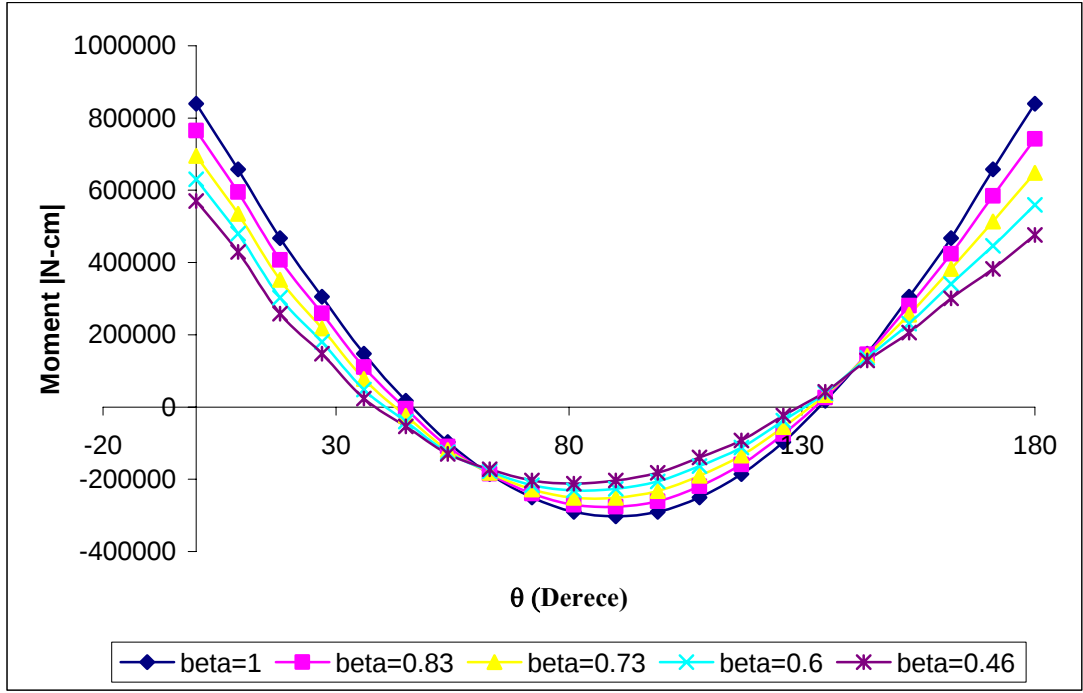
Tablo 5.7 *B* mesnedi için kuvvet değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

β	$T_t \times 10^3$		$T_n \times 10^3$		$T_b \times 10^3$	
	[1]	HL	[1]	HL	[1]	HL
1.00	3.78	3.79	0.08	0.11	4.39	4.41
0.90	3.76	3.77	0.09	0.11	4.08	4.09
0.80	3.79	3.75	0.18	0.11	3.84	3.77
0.70	3.79	3.73	0.23	0.12	3.54	3.45
0.60	3.77	3.71	0.26	0.15	3.21	3.12

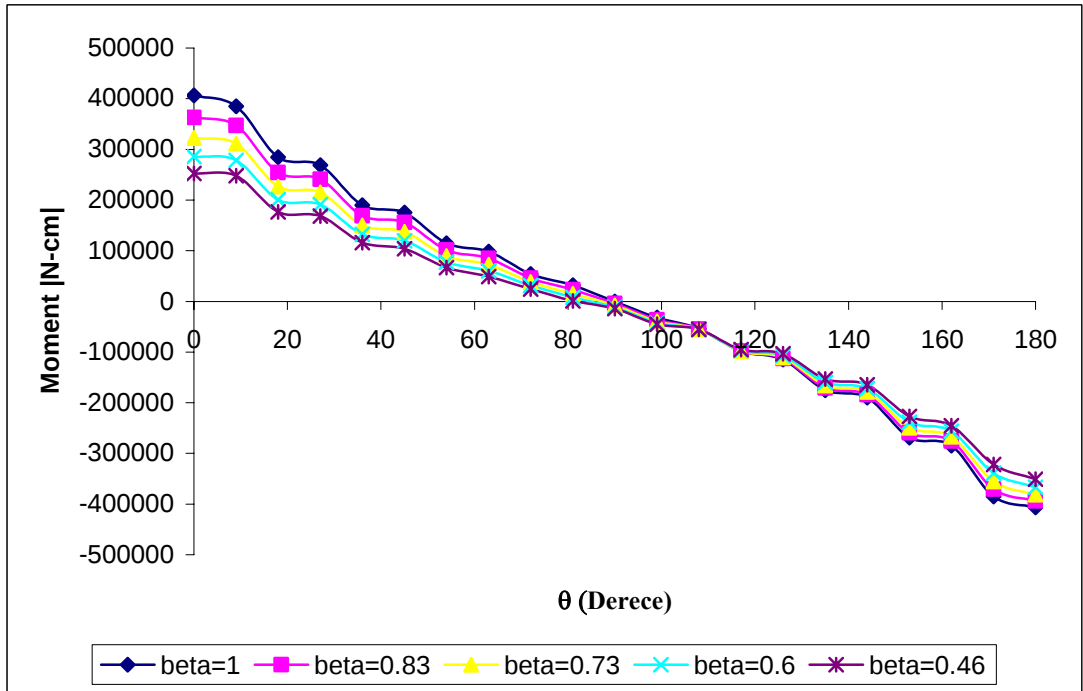
Tablo 5.8 B mesnedi için moment değerlerinin karşılaştırılması (Örn. 3)
[1]: OMURTAG-AKÖZ, (1992) - HL: Bu çalışma - Birimler: N-cm

β	$M_t \times 10^5$		$M_n \times 10^5$		$M_b \times 10^5$	
	[1]	HL	[1]	HL	[1]	HL
1.00	1.36	1.37	8.33	8.40	-3.98	-4.06
0.90	1.17	1.18	7.36	7.42	-3.86	-3.94
0.80	1.01	0.98	6.63	6.48	-3.92	-3.81
0.70	0.83	0.79	5.82	5.59	-3.92	-3.66
0.60	0.63	0.60	4.99	4.76	-3.83	-3.51





Şekil 5.8 – M_n eğilme momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3)



Şekil 5.9 – M_b eğilme momentinin $\beta=R_1/R_0$ ile değişimi (Örn. 3)

5.2 Dinamik Problemler

5.2.1 Örnek-4: Silindirik Yayda Serbest Titreşim Problemi

Bu örnekte dairesel kesite sahip silindirik bir yayın ilk 6 modunun serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Tablo 5.9’da daha önceden yapılmış çalışmaların sonuçları ile karışık sonlu eleman sonuçlarının oldukça uyumlu olduğu gözükmemektedir. Dairesel frekans μ olmak üzere Tablo 5.9’da verilmiş olan doğal frekanslar $f = \mu / 2\pi$ bağıntısı ile hesaplanır. R taban yarıçapı, α eğimi, n tur sayısı için helis yüksekliği, $H = 2\pi R n \tan(\alpha)$ dır. Problemin çözümünde 100 eleman kullanılmış olup helis geometrisi ile malzeme özellikleri aşağıdaki gibidir:

Geometrik Özellikler:		Malzeme Özelliği:	
Tur sayısı (n)	: 7.6 tur	Elastisite modülü (E)	: 2.06×10^{11} N/m ²
Kesit yarıçapı (r)	: 0.5 mm.	Poisson oranı (ν)	: 0.3
Taban yarıçapı (R_0)	: 5 mm.	Özkütle (ρ)	: 7900 kg/m ³
Tavan yarıçapı (R_1)	: 5 mm.		
Eğimi (α)	: 8.5744°		
Helis Yüksekliği (H)	: 0.036 m.		

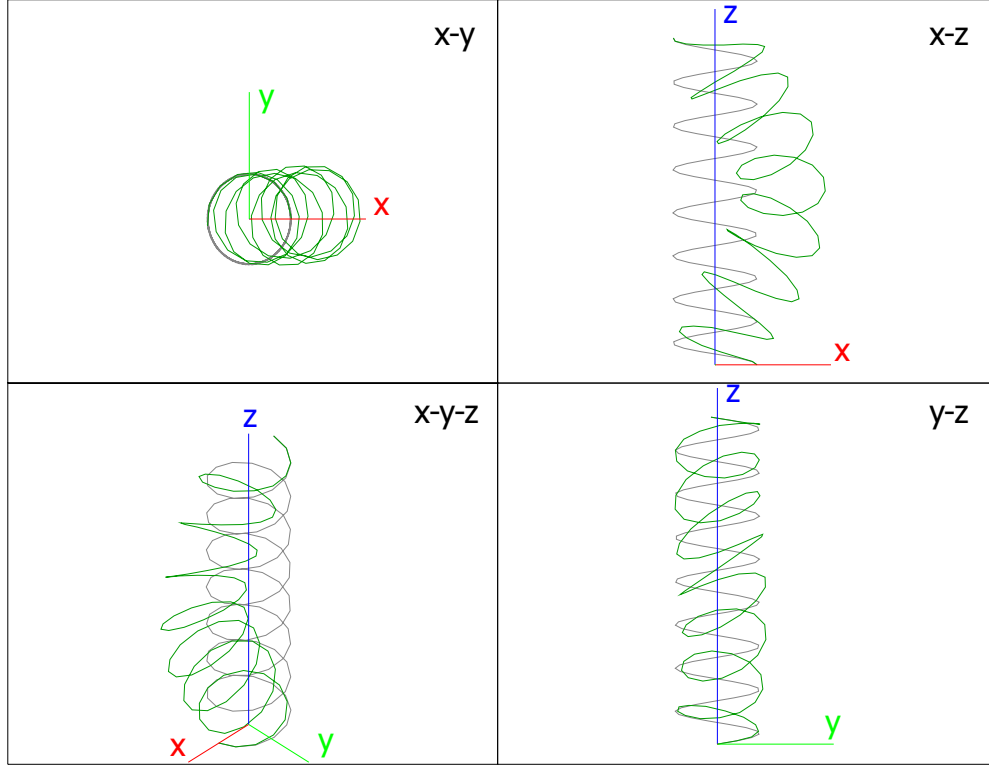
Sonuçlar:

Tablo 5.9 İzotropik Yayın Serbest Titreşim Frekansları (Örn. 4)
HL: Bu çalışma

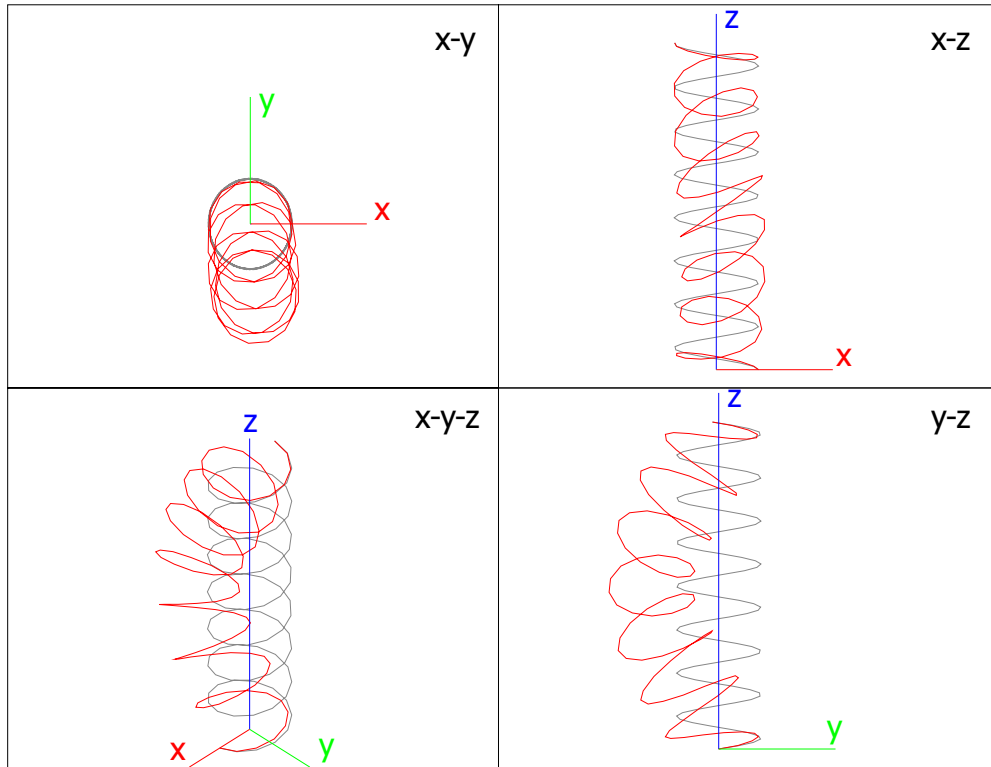
Modlar		1	2	3	4	5	6
Frekanslar (f) - Hz.	HL	392.5	395.0	462.8	525.9	862.2	875.0
	MOTTERSHEAD, (1980) ^(Deneysel)	391.0	391.0	459.0	528.0	878.0	878.0
	MOTTERSHEAD, (1980) ^(FEM)	396.0	397.0	469.0	532.0	887.0	900.0
	PERARSON, (1982) ^(TMM)	394.9	397.6	456.4	518.3	859.7	874.7
	XİYONG -TABARROK, (1992) ^(FEM)	395.0	398.0	464.0	528.0	868.0	881.0
	YILDIRIM, (1996) ^(TMM)	393.5	395.9	462.8	525.5	864.0	876.8
	BECKER, (2002) ^(TMM)	393.5	396.1	462.8	525.7	863.8	876.9

Not: FEM-sonlu elemanlar yöntemi - TMM-taşıma matrisi yöntemi.

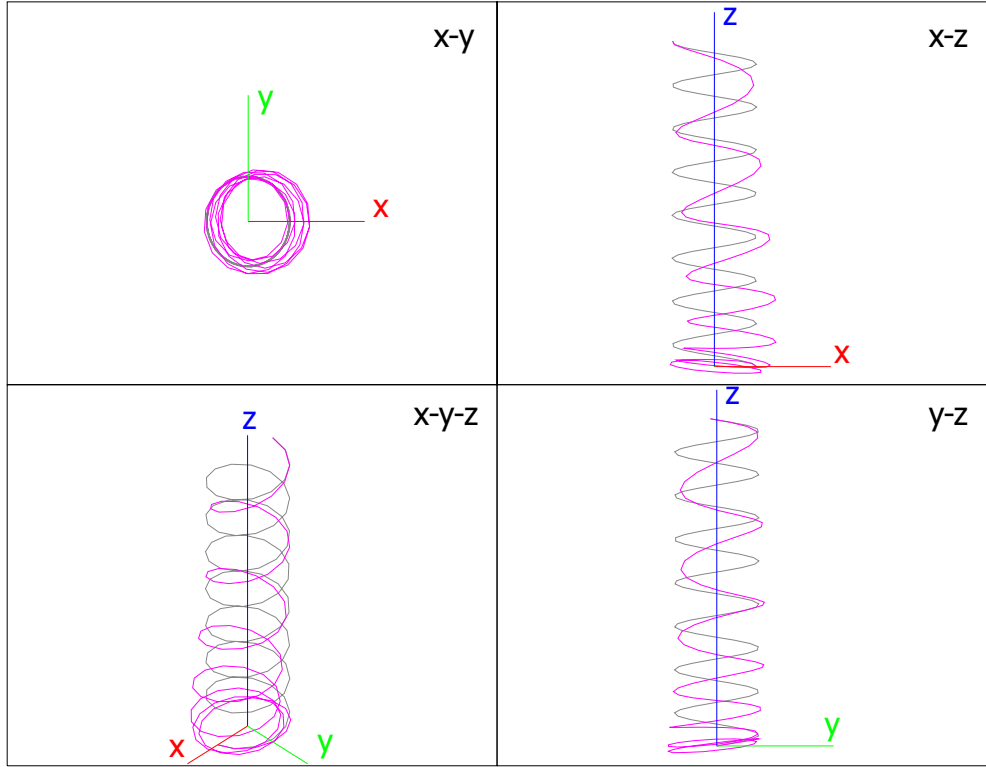
Elde edilen sonuçlar ile deney sonuçları arasında ortalama % 0.8 oranında bir hata payı vardır. Bu değer diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlara kıyasla çok düşüktür. Ayrıca helisin ilk altı serbest titreşim frekansına ait mod şekilleri Şekil 5.10’dan Şekil 5.15’e kadar olan grafiklerde teker teker gösterilmiştir.



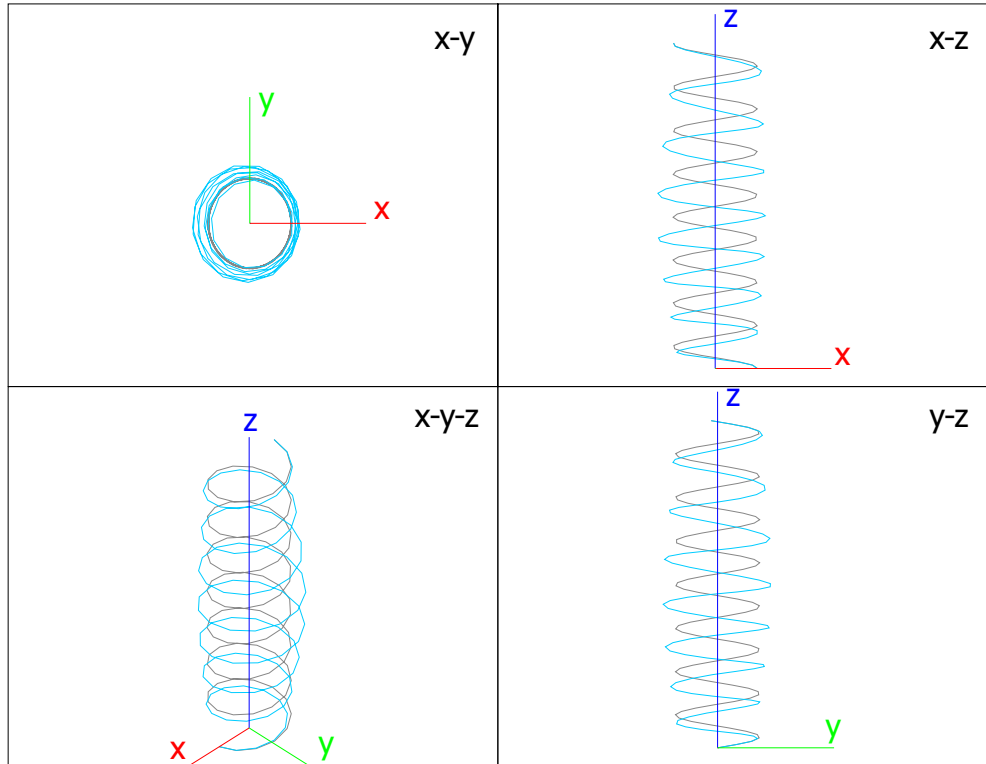
Şekil 5.10 – Örnek 4’de 1. mod şekli



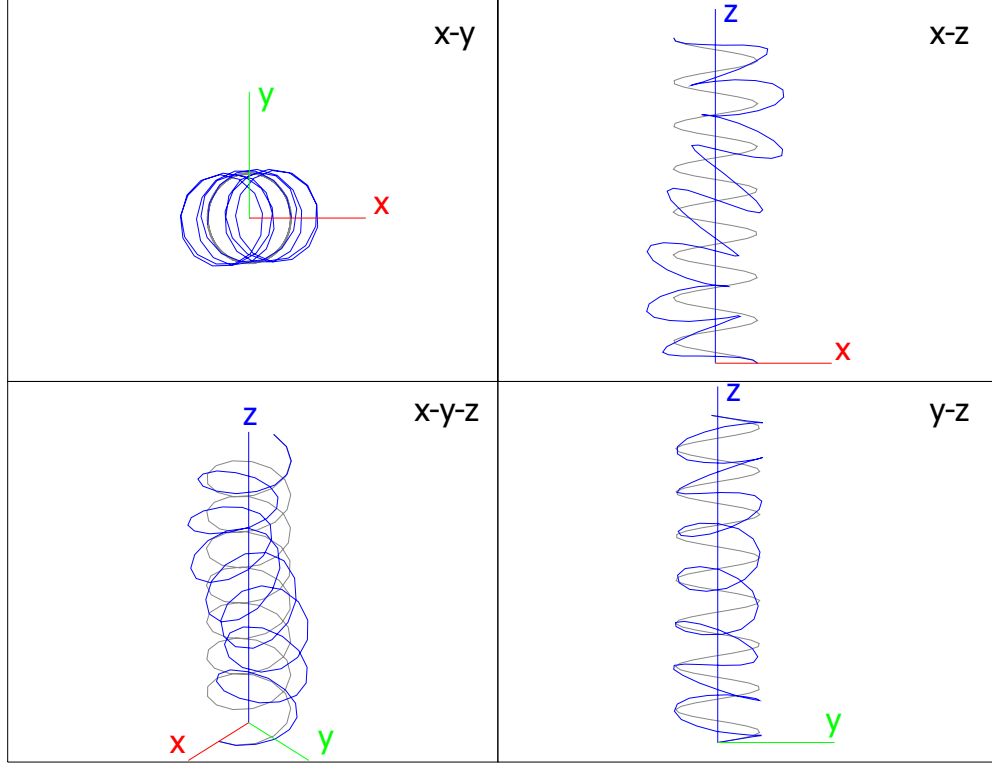
Şekil 5.11 – Örnek 4’de 2. mod şekli



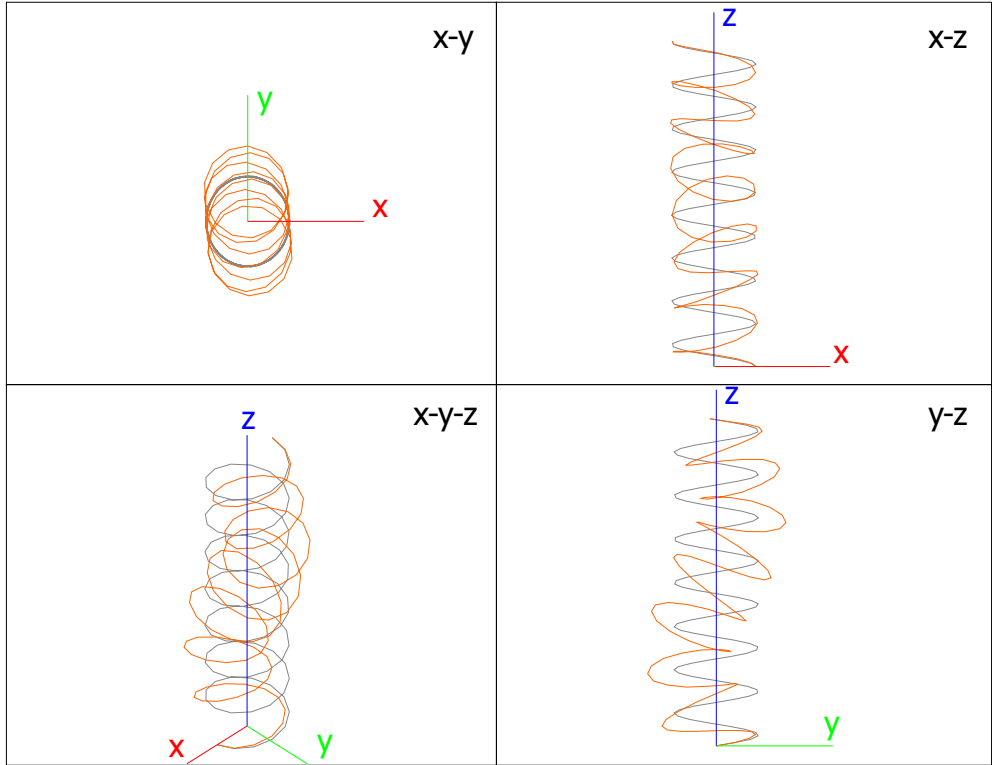
Şekil 5.12 – Örnek 4’de 3. mod şekli



Şekil 5.13 – Örnek 4’de 4. mod şekli



Şekil 5.14 – Örnek 4’de 5. mod şekli



Şekil 5.15 – Örnek 4’de 6. mod şekli

5.2.2 Örnek-5: Silindirik Yayda Serbest Titreşim Problemi

Bu örnekte dairesel kesite sahip silindirik bir yay elemanın ilk 4 moduna ait serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Tablo 5.10’da önceden yapılan çalışmaların sonuçları ile karışık sonlu eleman sonuçlarının oldukça uyumlu olduğu gözükmemektedir. Dairesel frekans μ olmak üzere, Tablo 5.10’da verilen boyutsuz frekanslar, dairesel frekansın $k = R\sqrt{\rho/G}$ katsayısı ile çarpılması sonucu elde edilmiştir. Burada R taban yarıçapı, α eğimi, n tur sayısı için helis yüksekliği $H = 2\pi Rn \tan(\alpha)$ dır. Problemin çözümünde 100 eleman kullanılmış olup helis geometrisi ile malzeme özellikleri aşağıdaki gibidir:

Geometrik Özellikler:		Malzeme Özelliği:	
Tur sayısı (n)	: 6.5 tur	Elastisite modülü (E)	: 2.1×10^{11} N/m ²
Kesit yarıçapı (r)	: 4 mm.	Poisson oranı (ν)	: 0.3
Taban yarıçapı (R_0)	: 26 mm.	Özkütle (ρ)	: 7850 kg/m ³
Tavan yarıçapı (R_1)	: 26 mm.		
Eğimi (α)	: 4.8°		
Helis Yüksekliği (H)	: 0.089 m.		

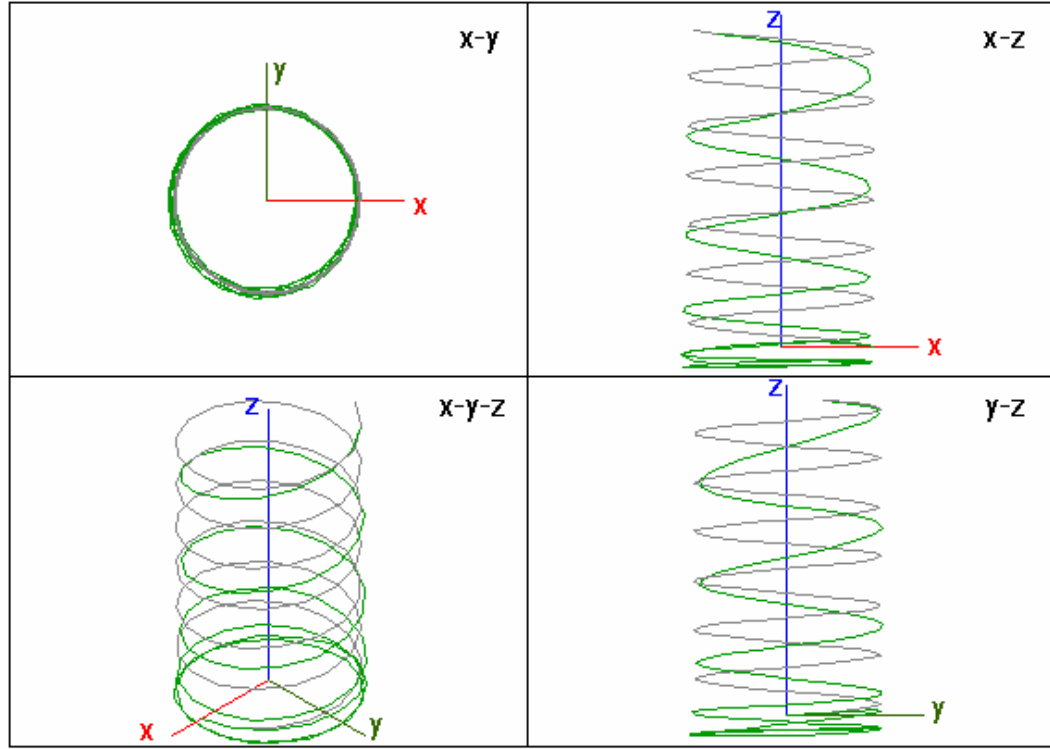
Dinamik analiz yapan programın yapısının incelenebilmesi ve bu örnekteki helisel sisteme ait eleman rijitlik ve eleman kütle matrislerine ait terimlerin açık halde görülebilmesi için fortranda geliştirilen HL programına ek olarak MATHCAD® programlama dilinde de başka bir yazılım geliştirilmiştir. (Bkz. EK-B):

Tablo 5.10 İzotropik Yayın Serbest Titreşim Frekansları (Örn. 5)
HL: Bu çalışma

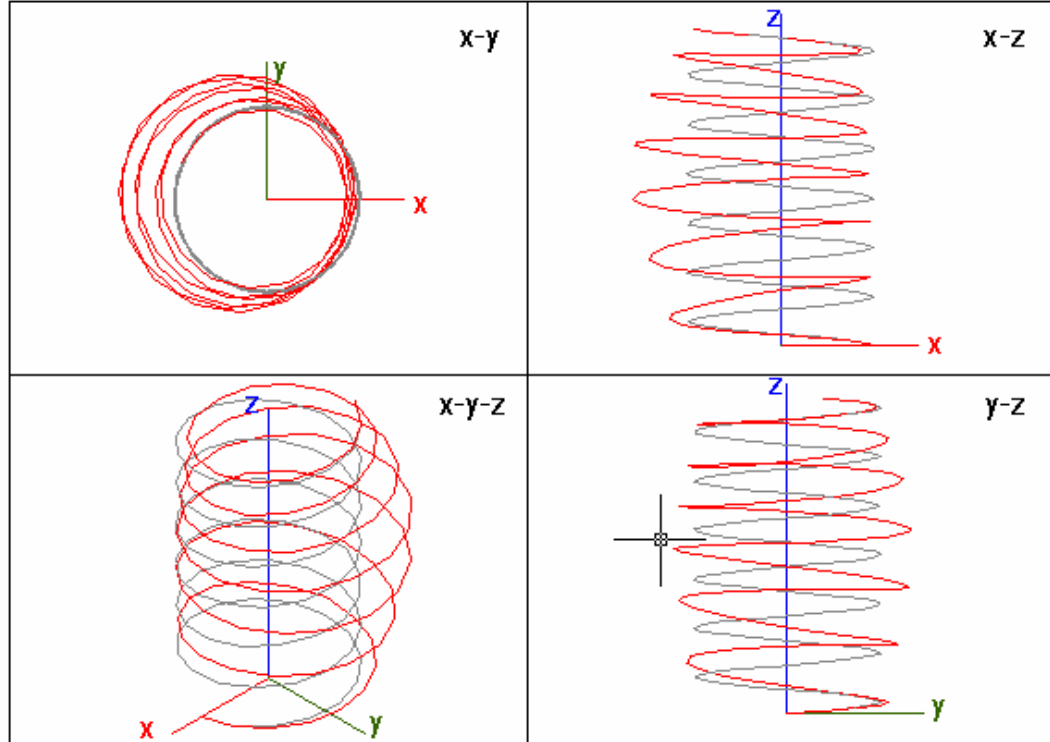
Modlar		1	2	3	4
Frekanslar ($f = \mu \times k$) Boyutsuz	HL	0.00825	0.00921	0.01033	0.01052
	NAGAYA, (1986) *	0.00835	0.00914	0.01039	0.01063
	NAGAYA, (1986)	0.00835	0.00925	0.01039	0.01065
	SAWANABORI-FUKUSHIMA, (1983)	0.00826	0.00923	0.01038	0.01056
	YILDIRIM, (1997)	0.008254	0.009208	0.010342	0.010536

Not: (* Dönel atalet momentleri kullanılmamıştır.)

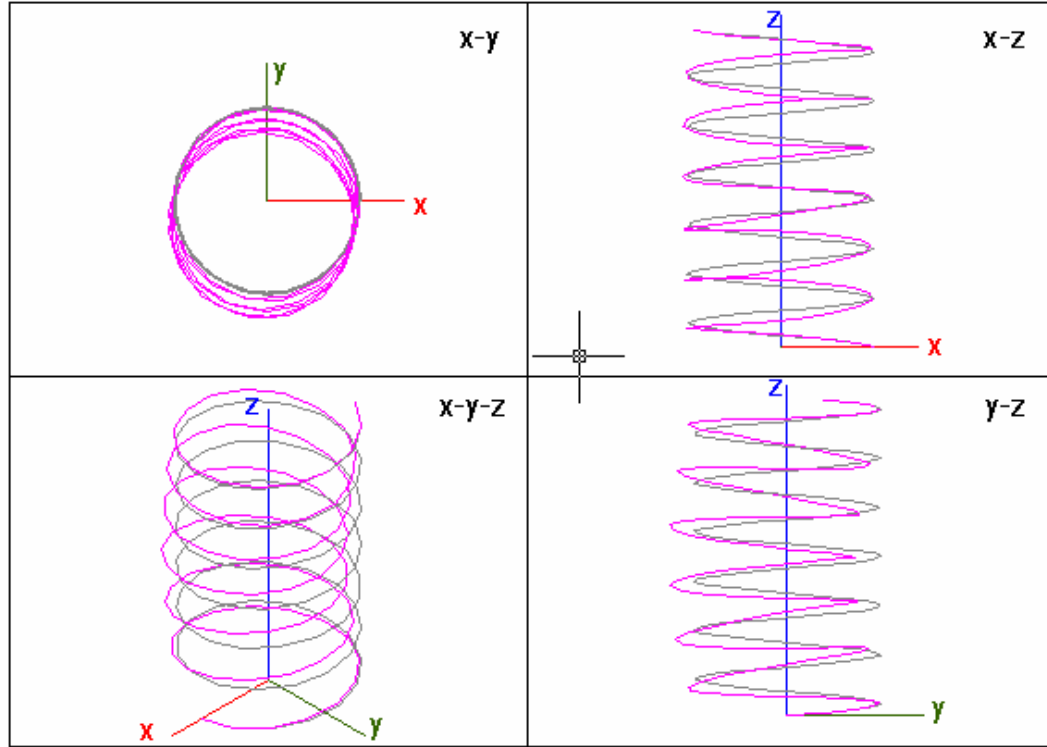
Tablo 5.10’dan da görülebileceği üzere program sonuçları ile diğer çalışmalar arasında en yüksek % 1.2 olmak üzere, ortalama % 0.4 oranında bir hata payı vardır. Ayrıca helisin ilk altı serbest titreşim frekansına ait mod şekilleri Şekil 5.16’dan Şekil 5.21’e kadar olan grafiklerde teker teker gösterilmiştir.



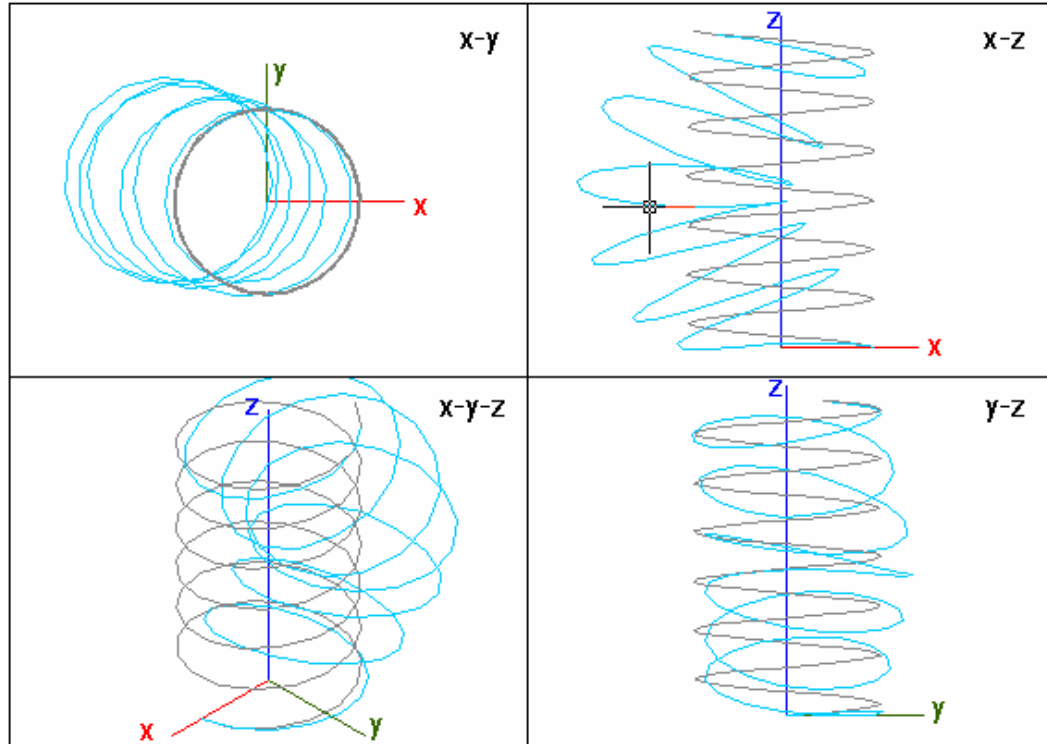
Şekil 5.16 – Örnek 5’de 1. mod şekli



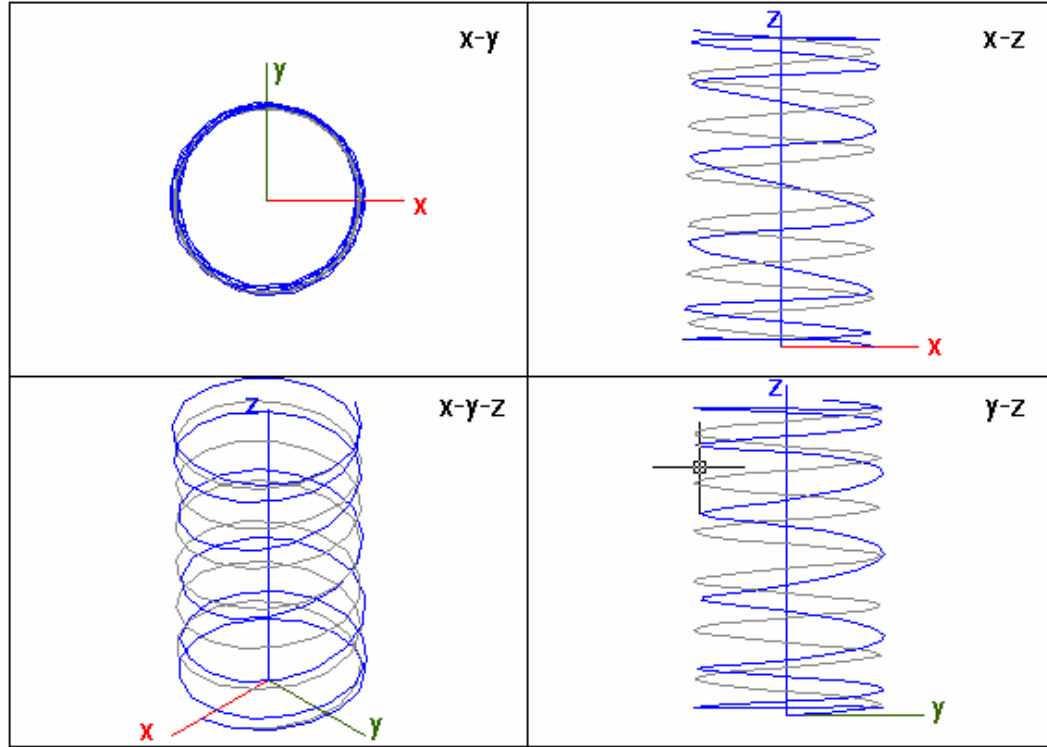
Şekil 5.17 – Örnek 5’de 2. mod şekli



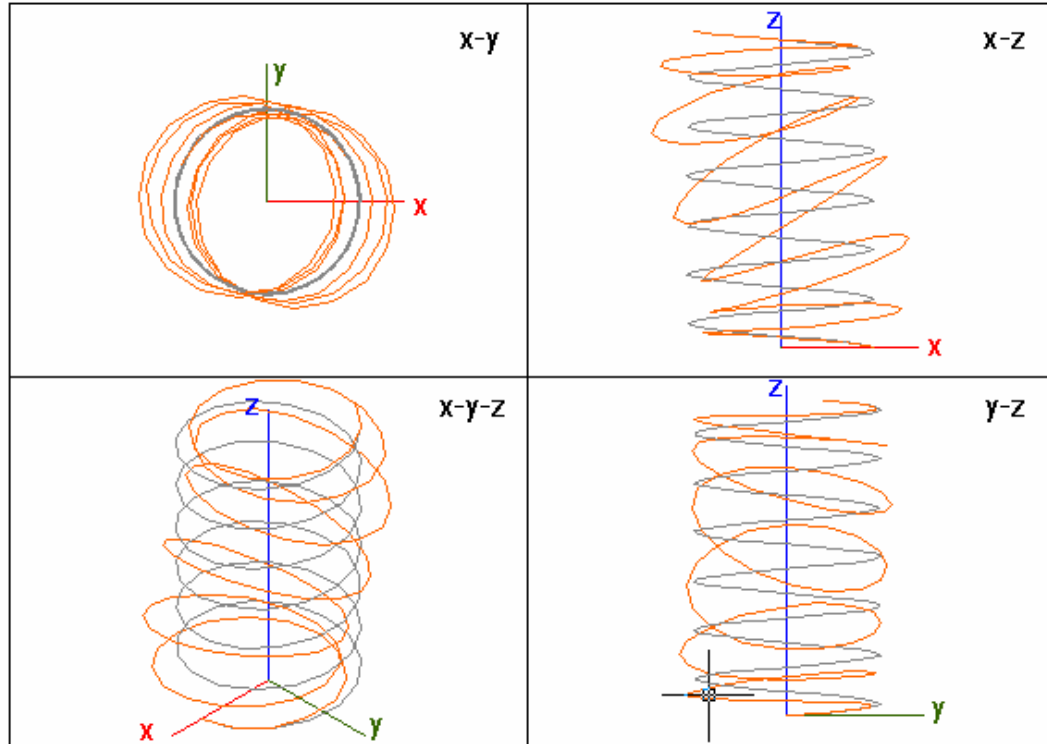
Şekil 5.18 – Örnek 5’de 3. mod şekli



Şekil 5.19 – Örnek 5’de 4. mod şekli



Şekil 5.20 – Örnek 5’de 5. mod şekli



Şekil 5.21 – Örnek 5’de 6. mod şekli

5.3 Örnek-4 ile Örnek-5'deki Mod Şekillerinin İncelenmesi

Şekil 5.10 ve Şekil 5.16'dan da görülebileceği üzere Örnek-4 ve Örnek-5'e ait ilk mod şekilleri birbirinden farklıdır. Silindirik helis için,

$$N = \frac{H}{2R} \quad (5.1)$$

narınlık olarak adlandırılırsa, aşağıda N 'ye bağlı olarak mod şeklinin değişimi araştırılacaktır. (5.1) denkleminde narınlık H helisin toplam boyuna ve R helisin taban yarıçapına bağlı olarak ifade edilmiştir.

Yapılan hesaplamalarda α eğimi sabit tutularak tur sayısı (n) değiştirilmiş ve N 'nin farklı değerleri için mod şekilleri MATHCAD® de hazırlanan program yardımıyla çizilmiştir. İlk olarak tur sayısı tamsayı şeklinde seçilmiş, yani helisin başlangıç ve bitiş noktalarının z eksenı boyunca aynı doğrultuda kalması sağlanmıştır (Bkz. EK-D). Daha sonra 1. mod şeklindeki değişimin gerçekleştiği tur aralığı tespit edilerek, bu aralıktaki şekil değişimi 45° lik açı azaltımları ile detaylı bir şekilde incelenmiştir. Böylece narınlığın yanında, başlangıç ve bitiş noktalarının z eksenı doğrultusundaki konum değişimlerinin mod şekilleri üzerindeki etkisi de EK-E de görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Yapılan analizin sonucunda, Örnek-4'e ait ilk mod şeklindeki değişim $2.842 > N > 2.368$ aralığında gerçekleşmiştir. Örnek-5'de ise bu değişim $2.902 > N > 2.638$ aralığında meydana gelmiştir. Bu aralıklarda yapılan analizlerden de görüldüğü gibi, narınlığın yanısıra helisin başlangıç ve bitiş noktalarının z eksenı doğrultusundaki konumlarının da mod şeklinin oluşmasında etkisi olmaktadır.

6. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada değişken kesitli konik helis için fonksiyoneller dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir ve operatörün potansiyel olduğu ispatlanmıştır.

Helisel çubuklar için $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ koordinat takımında bir düğüm noktasında üç yer değiştirme, üç dönme, üç kuvvet ve üç moment olmak üzere iki düğümlü çubuk eleman rijitlik ve kütle matrisleri, değişken kesit özelliğini de yansıtacak biçimde elde edilmiştir (Bkz. Şekil 4.2, Şekil 4.3). Statik analizde çubuk eleman toplam yirmi dört bilinmeyi içermektedir.

Geliştirilmiş olan fonksiyonelden türetilen HL sonlu elemanında mühendislik açısından temel büyüklükler olan kuvvetler ve momentler, geometrik büyüklükler olan yer değiştirmeler ve dönmeler ile birlikte, bağımsız bilinmeyenler olarak doğrudan hesaplanmaktadır. Geliştirilmiş olan fonksiyonelde birinci mertebeden daha yüksek türev bulunmaması nedeni ile doğrusal yaklaşım fonksiyonları kullanılmış ve son derece sade bir eleman ve kütle matrisi elde edilmiştir. Düzgün değişen kesit özelliği ile konik helis yaklaşımı, eleman matrisi içerisine aynı sadeliği katacak şekilde yerleştirilmiştir. Yöntemin üstünlüğü temelde iki grupta toplanabilir. Birincisi kuvvetlerle momentlerin, yer değiştirmeler ve dönmeler ile birlikte hesaplanması böylece aranan bilinmeyenler açısından türeve bağlı olarak bir ek türetme işlemine gidilmemesi, ikincisi ise bilgisayar işlem süresinin ekonomik olarak kullanılmasıdır. Bilgisayar işlem süresi açısından sağlanan tasarruf özde yöntemin sadeliği ile birlikte; kuvvet ve momentler için geri yerleştirme işlemine gerek olmamasından kaynaklanmaktadır.

Geliştirilen HL elmanı önce statik analiz konusunda hazırlanmış mevcut araştırmalar ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, mühendislik açısından gerekli yeter yakınlığı sağlamıştır. Daha sonra dinamik analiz problemleri ele alınmış ve karışık sonlu elemanlar yöntemi ile kurulan modelin deneysel ve teorik çalışmalarla elde edilen sonuçlara, diğer yöntemlere oranla daha yakın değerler verdiği gösterilmiştir. Ayrıca helisin başlangıç ve bitiş noktalarının z eksenine doğrultusundaki konumları ile narinliğin helisin mod şeklinin oluşmasında etkili olduğu yapılan analizlerle kanıtlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Abdülbaki, A. ve Shukair, A.**, (1973). "Continous helical girders", *Journal of Construction Engineering and Management*, **99/ST 10**.
- Actis, R.L., Szabo B.A. ve Schwab, C.** (1997). "Hierarchic models for laminated plates and shells", *Comput. Meth. in Apl. Mech. and Engng*, **172**, 79-107.
- Akz, A.Y., Omurtag, M.H., ve Dođruođlu, A.N.**, (1991). "The Mixed Finite Element Formulation for Three Dimensional Bars", *Int. J. Solids Structures*, **28**, 225-234.
- Babuska, I., ve Suri, M.** (1994). "The p and hp versions of the finite element methods, Basic Principles and Properties", *SIAM, review*, **36**: 578-632
- Becker, L.E. ve Chassie, G.G. ve Cleghorn, W.L.**, (2002). "On the natural frequencies of helical compression springs", *Int. J. of Mechanical Sciences*, **44**, 825-841.
- Cinemre, V.**, (1960). "Başlangıç değerler metodu ile helisel çubukların statik hesabı". *DoktoraTezi İ.T..*
- Gerdes, K., Matache, A.M., Schwab C.**, (1998). Analysis of membrane locking in hp FEM for a cylindrical shell. *ZAMM*, **78**(10): 663-686
- Gerdes, K., ve Schwab, C.**, (1998). Hierarchic models of Helmholtz problems on thin domains – mathemaical models & methods, In *Applied Scieces*, **8**: 1-35
- Haktanır, V. ve Kırıl, E.**, (1989). "Helisel ubukların statik davranışının rijitlik matrisi metodu ile incelenmesi.", *Çukurova Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Dergisi, Adana*.
- Haktanır, V. ve Kırıl, E.**, (1990). "Helis eksenli merdivenlerin bilgisayarda dinamik hesabı", *İnş. Mühendisliđinde Bilgisayar Kullanımı İkinci Sempozyomu, İ.T.. İnşaat Fakültesi*.
- Holmes, M.C, ve Asce, J.M.**, (1957). "Analysis of helical beams under symmetric loading", *J.of Structural Division*, **83**, 1437.

- İnan, M.**, (1966). “*Elastik çubukların genel teorisi*”, İ.T.Ü. yayını.
- Melenk, J.M., Gerdes, K. ve Schwab, C.**, (1999). “Fully discrete hp-finite elements: Fast quadrature”. In *SAM Research Reports*, 15, Seminar für Angewandte Mathematik, ETH Zürich.
- Mottershead J.E.**, (1980). “Finite elements for dynamical analysis of helical rods”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **22**, 267–283.
- Nagaya K., Takeda S. ve Nakata Y.**, (1986). “Free vibration of coil springs of arbitrary shape”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **23**, 1081-1099.
- Omurtag, M.H. ve Aköz, A.Y.**, (1992). “The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading”, *Computers & Structures*, **43**, 325-331.
- Omurtag, M.H. ve Özütok, A. ve Aköz, A.Y.**, (1997). “Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential”, *Int. J. of Numerical Methods in Engineering*, **40**, 295-317.
- Panayotunakos, D.E. ve Theocaris, P.S.**, (1979). “Flexibility matrix for skew-curved beams”, *Int. J. Solids Structures*, **15**, 783-794.
- Pearson, D.**, (1982). “The transfer matrix method for the vibration of compressed helical springs.”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **24**, 163-171.
- Reddy, J.N.**, (1984). “*Energy and variational methods in applied mechanics.*”, Wiley interscience publication.
- Scordelis, A.C.**, (1960). “Internal forces in uniformly loaded helicoidal girders.”, *J. of American Concrete Institute*.
- Stefanou, G.D.**, (1984). “Simplified discrete method for the design of helical rectangular beams of very large width”, *Computers & Structures*, **18**, 861-874.
- Swanobori, T. ve Fukushima Y.**, (1983). “Analysis of dynamic behaviours of coil spring”, *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. (in Japanese)*, **49**, 422-428.

- Xiong Y. ve Tabarrok B.**, (1992). "A finite element method for the vibration of spatial rods under various applied loads.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 41-51.
- Yıldırım, V.**, (1996). "Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs", *Journal of Numerical Methods in Engineering*, **39**, 99-114.
- Yıldırım, V. ve İnce, N.**, (1997). "Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape", *Journal of Sound and Vibration*, **204**(2), 311-329.
- Yıldırım, V. ve Sancaktar, E.**, (2000). "Lineer free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs", *Int. J. of Mechanical Sciences*, **42**, 1153-1169.
- Yıldırım, V.**, (2004). "A parametric study on the natural frequencies of unidirectional composite conical springs.", *Commun. Numner. Meth. Engng.*, **20**, 207-227.

EKLER

	<u>Sayfa No</u>
EK-A : FORTRAN® bilgisayar programının yapısı (HL.EXE).....	46
EK-B : MATHCAD® dinamik analiz programı. (Örnek 5)	49
EK-C : HL.SON çıktı dosyası (Örnek 1 - Statik Analiz)	60
EK-D : Narinliğin mod şekline etkisi	68
EK-E : Helis başlangıç-bitiş noktası konumunun mod şekline etkisi	79

EK-A

BİLGİSAYAR PROGRAMI

Karışık sonlu elemanlar çözümü için FORTRAN programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı geliştirilmiştir (HL.EXE). Bu program değişken kesit özelliğine sahip dairesel yada dikdörtgen kesitli elemanların statik ve dinamik hesabını yapabilecek şekilde tasarlanmış olup, silindirik ve konik helis problemlerinin çözümünde kullanılabilmektedir. Programın işleyişi burada kısaca açıklanacaktır. Ayrıca program kodlarının görsel olarak izlenebilmesi için bu programa alternatif olarak MATHCAD® üzerinden sabit kesitli helis problemleri için dinamik analiz yapabilen başka bir program daha yazılmıştır (Bkz. EK-B).

HL Programının Yapısı ve Çalışma Biçimi

HL.EXE programı çeşitli alt programlardan oluşmaktadır. Böylece programın daha esnek ve anlaşılır bir yapıya sahip olması sağlanmıştır. Alt programların isimleri ve ana program içerisindeki görevleri şu şekildedir:

HLMENU:

“....dat” uzantılı data girişi dosyası ile “....son” uzantılı sonuçların yazdırıldığı çıktı dosyasının oluşturulduğu bir altprogramdır.

HELDUG:

Veri girişi dosyasından analiz türü, geometrik büyüklükler ve malzeme sabitlerini okur. Bu verileri kullanarak helisel sistemin geometrik özelliklerini ve problemin temel sabitlerini tanımlayan değerleri hesaplar. Daha sonra helisin düğüm numaralarını otomatik olarak oluşturur. Değişik mesnetlenme tiplerini okuyarak, bunların ilgili düğüm numaralarına aktarılmasını sağlar. Çubuk yükleri ile düğüm noktalarındaki değişken numaralarının tanımlanmasını yapar. Eleman kod numaralarının tutulduğu matrisi oluşturarak toplam bilinmeyen sayısını hesaplar. Bu altprogram HELYUK ve HELDEG isminde iki alt programı daha çağırır. HELYUK programa girilen yük bilgilerini tanımlarken, HELDEG eleman kod numaralarının tutulduğu nodal matrisin oluşturulması ile ilgili işlemleri yapar. Değişken kesite sahip elemanlarda veri girişi dosyasından helisin başlangıç, bitiş ve orta noktasındaki

EK-A

kesit yarıçap değerlerini veri olarak alır. Bunların dışında kalan düğüm noktalarındaki değerleri ise ikinci dereceden bir yaklaşım fonksiyonu kullanarak kesit yarıçaplarını $r(\theta)=A\theta^2+B\theta+C$ şeklinde hesaplar. Burada θ helisin başlangıç noktasından itibaren taradığı açıyı göstermekle birlikte A, B ve C yaklaşım fonksiyonunun katsayılarıdır ve veri giriş dosyasından okunan helisin başlangıç, bitiş ve orta noktasındaki yarıçap değerlerine bağlı olarak hesaplanırlar.

HELELM:

Her bir elemana ait rijitlik matrisini kurarak “RIJIT” isimli bir dosyada eleman numarası ile birlikte tutulmasını sağlar. İlk olarak her eleman için HELCOD isimli altprogramı çağırarak düğümlerdeki değişkenlerin sayılarının tutulduğu eleman matrisini oluşturur ve kesit mukavemet özelliklerini hesaplayarak eleman rijitlik matrisinin terimlerinin kurulmasını sağlar. Ardından “RIJIT” isimli dosyaya eleman rijitlik matrislerini eleman numaraları ile birlikte kaydeder.

HELSTM:

Sistem matrisi bu alt program tarafından oluşturulur. HELELM altprogramının oluşturduğu “RIJIT” isimli dosyadan eleman rijitlik matrislerini her eleman için ayrı ayrı okuyarak global sistem matrisini oluşturur. Yükleme bilgilerinin tutulduğu kolonu kurarak [S] olarak tanımlanmış tek bir matris içerisinde tutulmasını sağlar.

HELDENK:

GAUSS indirgeme yöntemini kullanarak birinci dereceden çok bilinmeyenli denklemleri hesaplar. Statik problemlerin çözümünde [S] matrisindeki tüm bilinmeyenlerin hesaplanması işlemini yapar. Dinamik analizde ise sadece kuvvet ve moment türünden bilinmeyenlerin bulunduğu satırlarda indirgeme işlemi yaparak (4.12) denklemindeki indirgenmiş sistem matrisinin oluşturulmasında rol oynar.

KUTELM:

Her bir elemana ait kütle matrisini kurarak “KUTLE” isimli bir dosyada eleman numarası ile birlikte tutulmasını sağlar. İlk olarak her eleman için düğümlerdeki değişkenlerin sayılarının tutulduğu kütle eleman matrisini oluşturur ve kesit mukavemet özelliklerini hesaplayarak kütle eleman matrisinin terimlerinin kurulmasını sağlar. Ardından “KUTLE” isimli dosyaya kütle eleman matrislerini eleman numaraları ile birlikte kaydeder.

EK-A

TUMKUTLE:

Global sistemde tanımlanmış kütle matrisini kurar. KUTELM altprogramının oluşturduğu “KUTLE” isimli dosyadan kütle eleman matrislerini her eleman için ayrı ayrı okuyarak [B] global sistemde tanımlanmış kütle matrisini oluşturur.

EIGEN:

Özdeğer problemlerinin hesabını yapan bir altprogramdır. İndirhenmiş sistem matrisi [S] ile global sistemde tanımlanmış kütle matrisi [B] ‘yi kullanarak (4.12) denklemindeki dairesel frekans değerlerinin hesaplanmasını sağlar.

HELCAIK:

Statik analizde sonuçların çıktı dosyasına yazdırıldığı altprogramdır.

CUBBAS:

Statik analizde eleman rijitlik matrisi yada global sistem matrisi değerlerinin çıktı dosyasına yazdırılmak istenmesi durumunda çalıştırılan bir altprogramdır.

EK-B

INPUT DATA

$E := 2.1 \cdot 10^{11}$	Modulus of elasticity.
$\nu := 0.3$	Poisson's ratio.
$k := 1.11$	Shear coefficient.
$R := 0.026$	Centreline radius of the helicoid.
$\alpha := 4.8 \text{deg}$	Pitch angle.
$r := 0.008$	Radius/Width of the cross section
or if rectangular, $d := 0$	Height of the cross section (for circular sec. $d=0$).
$\rho := 7850$	Density.
$\text{tur} := 6.5$	Number of turns.
$\text{dugum} := 101$	Number of joints.
$H := 2 \cdot \pi R \cdot \text{tur} \cdot \tan(\alpha)$	Free length of helix.
$H = 0.089$	

BoundaryConditions :=

Nod ID	u_t	u_n	u_b	Ω_t	Ω_n	Ω_b	I_t	I_n	I_b	M_t	M_n	M_b
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
101	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

dugum

EK-B

Step1. Calculation of the geometrical variables:

$\text{parca} := \text{duguna} - 1$	$\text{parca} = 100$	Number of elements.
$A := \begin{cases} \pi \cdot \frac{r^2}{4} & \text{if } d = 0 \\ r \cdot d & \text{otherwise} \end{cases}$	$A = 0$	Cross section area.
$P := \frac{H}{2 \cdot \pi \cdot \text{tur}}$	$P = 2.183 \times 10^{-3}$	Step for the unit angle of the helix.
$c := \sqrt{R^2 + P^2}$	$c = 0.026$	Coefficient C.
$he := c \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot \text{tur}}{\text{parca}}$	$he = 0.011$	Element length.
$\kappa := \frac{R}{c^2}$	$\kappa = 38.192$	Curvature.
$\tau := \frac{P}{c^2}$	$\tau = 3.207$	Torsion.

Step3. Interpolation functions:

$$\psi(x, i) := \begin{cases} \frac{he - x}{he} & \text{if } i = 0 \\ \frac{x}{he} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Step2. Calculation of the element matrix componenets:

$In := \begin{cases} \pi \cdot \frac{r^4}{64} & \text{if } d = 0 \\ \frac{r \cdot d^3}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$	$Ib := \begin{cases} In & \text{if } d = 0 \\ \frac{r^3 \cdot d}{12} & \text{otherwise} \end{cases}$	
$It := \begin{cases} In + Ib & \text{if } d = 0 \\ \text{otherwise} \\ \begin{cases} \text{if } r > d \\ \begin{cases} cc \leftarrow d \\ h \leftarrow r \end{cases} \\ \text{otherwise} \\ \begin{cases} cc \leftarrow r \\ h \leftarrow d \end{cases} \end{cases} \\ \text{or } \leftarrow \frac{cc}{h} \\ cc^3 \cdot h \cdot \frac{(1 - 0.63 \cdot \text{or} + 0.052 \cdot \text{or}^5)}{3} \end{cases}$		$It = 4.021 \times 10^{-10}$ $In = 2.011 \times 10^{-10}$ $Ib = 2.011 \times 10^{-10}$

• Element matrix componenets:

$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$	Modulus of shear.	$It1 := \frac{1}{G \cdot It}$	$In1 := \frac{1}{E \cdot In}$	$Ib1 := \frac{1}{E \cdot Ib}$
$G = 8.077 \times 10^{10}$		$A1 := \frac{1}{E \cdot A}$	$k1 := \frac{k}{G \cdot A}$	

EK-B

Step4. Building the element and force matrices:

	u_{t1}	u_{t2}	u_{n1}	u_{n2}	u_{b1}	u_{b2}	Ω_{t1}	Ω_{t2}	Ω_{n1}	Ω_{n2}	Ω_{b1}	Ω_{b2}	T_{t1}	T_{t2}	T_{n1}	T_{n2}	T_{b1}	T_{b2}	M_{t1}	M_{t2}	M_{n1}	M_{n2}	M_{b1}	M_{b2}
u_{t1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0,136	0,068	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{t2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0,068	0,136	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{n1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,136	-0,068	0,5	-0,5	0,011	0,006	0	0	0	0	0	0
u_{n2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,068	-0,136	0,5	-0,5	0,006	0,011	0	0	0	0	0	0
u_{b1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,011	-0,006	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0
u_{b2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,006	-0,011	0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0
Ω_{t1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0,136	0,068	0	0
Ω_{t2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-0,5	0,068	0,136	0	0
Ω_{n1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,004	0,002	-0,136	-0,068	0,5	-0,5	0,011	0,006
Ω_{n2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,002	0,004	-0,068	-0,136	0,5	-0,5	0,006	0,011
Ω_{b1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,004	-0,002	0	0	0	0	-0,011	-0,006	0,5	-0,5
Ω_{b2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,002	-0,004	0	0	0	0	-0,006	-0,011	0,5	-0,5
T_{t1}	0,5	0,5	-0,136	-0,068	0	0	0	0	0	0	0	0	-3E-10	-2E-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T_{t2}	-0,5	-0,5	-0,068	-0,136	0	0	0	0	0	0	0	0	-2E-10	-3E-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T_{n1}	0,136	0,068	0,5	0,5	-0,011	-0,006	0	0	0	0	-0,004	-0,002	0	0	-1E-09	-5E-10	0	0	0	0	0	0	0	0
T_{n2}	0,068	0,136	-0,5	-0,5	-0,006	-0,011	0	0	0	0	-0,002	-0,004	0	0	-5E-10	-1E-09	0	0	0	0	0	0	0	0
T_{b1}	0	0	0,011	0,006	0,5	0,5	0	0	0,004	0,002	0	0	0	0	0	0	-1E-09	-5E-10	0	0	0	0	0	0
T_{b2}	0	0	0,006	0,011	-0,5	-0,5	0	0	0,002	0,004	0	0	0	0	0	0	-5E-10	-1E-09	0	0	0	0	0	0
M_{t1}	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	-0,136	-0,068	0	0	0	0	0	0	0	0	-1E-04	-5E-05	0	0	0	0
M_{t2}	0	0	0	0	0	0	-0,5	-0,5	-0,068	-0,136	0	0	0	0	0	0	0	0	-5E-05	-1E-04	0	0	0	0
M_{n1}	0	0	0	0	0	0	0,136	0,068	0,5	0,5	-0,011	-0,006	0	0	0	0	0	0	0	0	-8E-05	-4E-05	0	0
M_{n2}	0	0	0	0	0	0	0,068	0,136	-0,5	-0,5	-0,006	-0,011	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-05	-8E-05	0	0
M_{b1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,011	0,006	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8E-05	-4E-05
M_{b2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0,006	0,011	-0,5	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-4E-05	-8E-05

EK-B

Step5. Building the nodal matrix:

```

NodeMatrice(BC,parca) :=
  for i ∈ 0..parca
    for j ∈ 0..cols(BC) - 1
      Nodei,j ← i + 1 if j = 0
      Nodei,j ← 0 if j ≠ 0
    for sel ∈ 0..rows(BC) - 1
      if BCsel,0 ≠ 0 ∧ BCsel,0 = Nodei,0
        for j ∈ 0..cols(BC) - 1
          Nodei,j ← BCsel,j
        sel
  k ← 0
  for i ∈ 1..cols(BC) - 1
    for j ∈ 0..parca
      if Nodej,i = 0
        k ← k + 1
        Nodej,i ← k
      otherwise
        k ← k
        Nodej,i ← 0
  Node

```

• Number of unknowns:

```

Snodal := NodeMatrice(BoundaryConditions ,parca)
unknowns := max(submatrix(Snodal,0,parca,1,cols(BoundaryConditions) - 1))
unknowns = 1200

```

Step6. Building the element matrix:

```

ElementMatrice(NM,parca) :=
  for i ∈ 0..parca - 1
    for j ∈ 0..(cols(NM) - 1).2
      Ei,j ← i + 1 if j = 0
      Ei,j ← 0 if j ≠ 0
    for sel ∈ 0..rows(NM) - 1
      if Ei,0 = NMsel,0
        for j ∈ 1..(cols(NM) - 1).2
          if j ≤ (cols(NM) - 1)
            k ← j
            n ← 0
          otherwise
            k ← j - (cols(NM) - 1)
            n ← 1
          Ei,j ← NMsel+n,k
        j
    E

```

EK-B

- Nodal matrice:

Node ID	u_t	u_n	u_b	Ω_t	Ω_n	Ω_b	T_t	T_n	T_b	M_t	M_n	M_b
1	0	0	0	0	0	0	595	696	797	898	999	1100
2	1	100	199	298	397	496	596	697	798	899	1000	1101
3	2	101	200	299	398	497	597	698	799	900	1001	1102
4	3	102	201	300	399	498	598	699	800	901	1002	1103
5	4	103	202	301	400	499	599	700	801	902	1003	1104
6	5	104	203	302	401	500	600	701	802	903	1004	1105
7	6	105	204	303	402	501	601	702	803	904	1005	1106
8	7	106	205	304	403	502	602	703	804	905	1006	1107
9	8	107	206	305	404	503	603	704	805	906	1007	1108
10	9	108	207	306	405	504	604	705	806	907	1008	1109
11	10	109	208	307	406	505	605	706	807	908	1009	1110
12	11	110	209	308	407	506	606	707	808	909	1010	1111
13	12	111	210	309	408	507	607	708	809	910	1011	1112
14	13	112	211	310	409	508	608	709	810	911	1012	1113
15	14	113	212	311	410	509	609	710	811	912	1013	1114
16	15	114	213	312	411	510	610	711	812	913	1014	1115
17	16	115	214	313	412	511	611	712	813	914	1015	1116
18	17	116	215	314	413	512	612	713	814	915	1016	1117
19	18	117	216	315	414	513	613	714	815	916	1017	1118
20	19	118	217	316	415	514	614	715	816	917	1018	1119
21	20	119	218	317	416	515	615	716	817	918	1019	1120
22	21	120	219	318	417	516	616	717	818	919	1020	1121
23	22	121	220	319	418	517	617	718	819	920	1021	1122
24	23	122	221	320	419	518	618	719	820	921	1022	1123
25	24	123	222	321	420	519	619	720	821	922	1023	1124

EK-B

.....CONTINUE

$S_{\text{element}} := \text{ElementMatrice}(S_{\text{nodal}}, \text{parca})$

- Element matrice:

Element ID	1st Joint												2nd Joint											
	u_t	u_n	u_b	Ω_t	Ω_n	Ω_b	T_t	T_n	T_b	M_t	M_n	M_b	u_t	u_n	u_b	Ω_t	Ω_n	Ω_b	T_t	T_n	T_b	M_t	M_n	M_b
1	0	0	0	0	0	0	595	696	797	898	999	1100	1	100	199	298	397	496	596	697	798	899	1000	1101
2	1	100	199	298	397	496	596	697	798	899	1000	1101	2	101	200	299	398	497	597	698	799	900	1001	1102
3	2	101	200	299	398	497	597	698	799	900	1001	1102	3	102	201	300	399	498	598	699	800	901	1002	1103
4	3	102	201	300	399	498	598	699	800	901	1002	1103	4	103	202	301	400	499	599	700	801	902	1003	1104
5	4	103	202	301	400	499	599	700	801	902	1003	1104	5	104	203	302	401	500	600	701	802	903	1004	1105
6	5	104	203	302	401	500	600	701	802	903	1004	1105	6	105	204	303	402	501	601	702	803	904	1005	1106
7	6	105	204	303	402	501	601	702	803	904	1005	1106	7	106	205	304	403	502	602	703	804	905	1006	1107
8	7	106	205	304	403	502	602	703	804	905	1006	1107	8	107	206	305	404	503	603	704	805	906	1007	1108
9	8	107	206	305	404	503	603	704	805	906	1007	1108	9	108	207	306	405	504	604	705	806	907	1008	1109
10	9	108	207	306	405	504	604	705	806	907	1008	1109	10	109	208	307	406	505	605	706	807	908	1009	1110
11	10	109	208	307	406	505	605	706	807	908	1009	1110	11	110	209	308	407	506	606	707	808	909	1010	1111
12	11	110	209	308	407	506	606	707	808	909	1010	1111	12	111	210	309	408	507	607	708	809	910	1011	1112
13	12	111	210	309	408	507	607	708	809	910	1011	1112	13	112	211	310	409	508	608	709	810	911	1012	1113
14	13	112	211	310	409	508	608	709	810	911	1012	1113	14	113	212	311	410	509	609	710	811	912	1013	1114
15	14	113	212	311	410	509	609	710	811	912	1013	1114	15	114	213	312	411	510	610	711	812	913	1014	1115
16	15	114	213	312	411	510	610	711	812	913	1014	1115	16	115	214	313	412	511	611	712	813	914	1015	1116
17	16	115	214	313	412	511	611	712	813	914	1015	1116	17	116	215	314	413	512	612	713	814	915	1016	1117
18	17	116	215	314	413	512	612	713	814	915	1016	1117	18	117	216	315	414	513	613	714	815	916	1017	1118
19	18	117	216	315	414	513	613	714	815	916	1017	1118	19	118	217	316	415	514	614	715	816	917	1018	1119
20	19	118	217	316	415	514	614	715	816	917	1018	1119	20	119	218	317	416	515	615	716	817	918	1019	1120
21	20	119	218	317	416	515	615	716	817	918	1019	1120	21	120	219	318	417	516	616	717	818	919	1020	1121
22	21	120	219	318	417	516	616	717	818	919	1020	1121	22	121	220	319	418	517	617	718	819	920	1021	1122
23	22	121	220	319	418	517	617	718	819	920	1021	1122	23	122	221	320	419	518	618	719	820	921	1022	1123

EK-B

.....CONTINUE

Step7. Building the global system matrize:

$$\text{Converter}(\text{EM}, s) := \left| \begin{array}{l} i \leftarrow \frac{\text{cols}(\text{EM}) + s}{2} - 1 \text{ if } \text{mod}(s, 2) = 1 \\ i \leftarrow \frac{s}{2} \text{ otherwise} \\ i \end{array} \right.$$

$$\text{Global}(\text{K}, \text{EM}, \text{un}, \text{parca}) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0.. \text{un} - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. \text{un} - 1 \\ \quad \quad G_{i,j} \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } k \in 0.. \text{parca} - 1 \\ \quad \quad \text{for } i \in 0.. \text{rows}(\text{K}) - 1 \\ \quad \quad \quad \text{for } j \in 0.. \text{rows}(\text{K}) - 1 \\ \quad \quad \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \text{EM}_{k, \text{Converter}(\text{EM}, i) + 1} \\ b \leftarrow \text{EM}_{k, \text{Converter}(\text{EM}, j) + 1} \\ G_{a-1, b-1} \leftarrow G_{a-1, b-1} + K_{i,j} \text{ if } a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{array} \right. \\ \quad \quad \quad G \end{array} \right.$$

$$S := \text{Global}(\text{K}, \text{S}_{\text{element}}, \text{unknowns}, \text{parca})$$

EK-B

Step8. Building mass matrice:

$$s1 := \rho \cdot A \quad n1 := \rho \cdot I_n \quad t1 := \rho \cdot I_t \quad b1 := \rho \cdot I_b$$

	u_{t1}	u_{t2}	u_{n1}	u_{n2}	u_{b1}	u_{b2}	Ω_{t1}	Ω_{t2}	Ω_{n1}	Ω_{n2}	Ω_{b1}	Ω_{b2}
u_{t1}	0,00140156	0,00070078	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{t2}	0,00070078	0,00140156	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{n1}	0	0	0,00140156	0,00070078	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{n2}	0	0	0,00070078	0,00140156	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{b1}	0	0	0	0	0,00140156	0,00070078	0	0	0	0	0	0
u_{b2}	0	0	0	0	0,00070078	0,00140156	0	0	0	0	0	0
Ω_{t1}	0	0	0	0	0	0	1,1212E-08	5,6062E-09	0	0	0	0
Ω_{t2}	0	0	0	0	0	0	5,6062E-09	1,1212E-08	0	0	0	0
Ω_{n1}	0	0	0	0	0	0	0	0	5,6062E-09	2,8031E-09	0	0
Ω_{n2}	0	0	0	0	0	0	0	0	2,8031E-09	5,6062E-09	0	0
Ω_{b1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5,6062E-09	2,803E-09
Ω_{b2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2,8031E-09	5,606E-09

EK-B

```
BoundaryConditions := submatrix( BoundaryConditions ,0,rows(BoundaryConditions ) - 1 ,0,  $\frac{\text{cols}(\text{BoundaryConditions}) - 1}{2}$  )
Mnodal := NodeMatrice( BoundaryConditions ,parca)
Melement := ElementMatrice( Mnodal ,parca)
```

- Number of unknowns:

```
unknowns := max( submatrix( Mnodal ,0,parca ,1,cols( BoundaryConditions ) - 1 ) )
unknowns = 594      Number of unknowns.
```

```
M := GlobalM( M, Melement ,unknowns ,parca)
```

- Step8.** Solution of the eigenvalue problem:

$$\text{frekans}_{\text{Hz}} := \frac{\sqrt{\text{genvals}(S_{\text{condenced}}, M)}}{2\pi}$$

$$\text{frekans}_{\text{nondim}} := \text{frekans}_{\text{Hz}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

```
dugum = 101
```

```
GlobalM(K,EM,un,parca) :=
for i ∈ 0..un - 1
  for j ∈ 0..un - 1
    Gi,j ← 0
  for k ∈ 0..parca - 1
    for i ∈ 0..rows(K) - 1
      for j ∈ 0..rows(K) - 1
        a ← EMk, Convertex(EM,i)+1
        b ← EMk, Convertex(EM,j)+1
        Ga-1,b-1 ← Ga-1,b-1 + Ki,j if a ≠ 0 ∧ b ≠ 0
      G
```

EK-B

$\text{sort}(\text{frekans}_{\text{Hz}}) =$

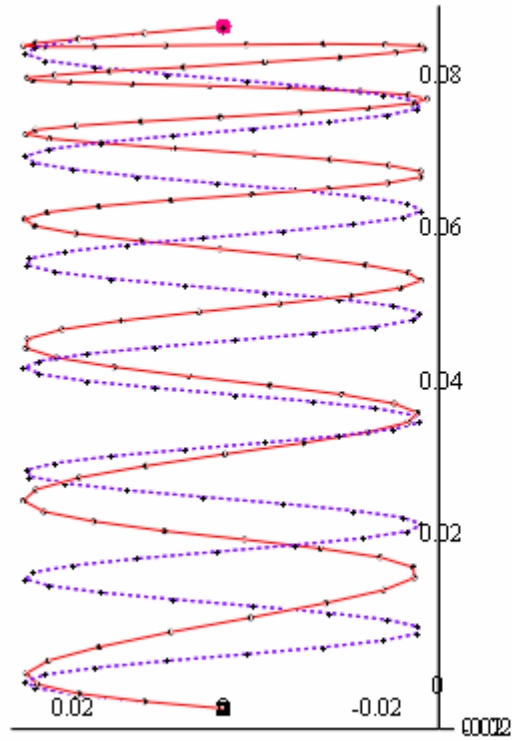
	0
0	162.0645941
1	180.7686429
2	202.841754
3	206.6974346
4	316.7116415
5	335.9099673
6	357.9456049
7	375.7218165
8	448.1490864
9	457.6455036
10	491.6948318
11	505.7699064
12	508.4439284
13	512.1079507
14	534.600288
15	536.9535399
16	567.8245863
17	601.6954695
18	635.7232681
19	642.7767068
20	644.1527558
21	653.4206214
22	677.469765

$\text{sort}(\text{frekans}_{\text{nondim}}) =$

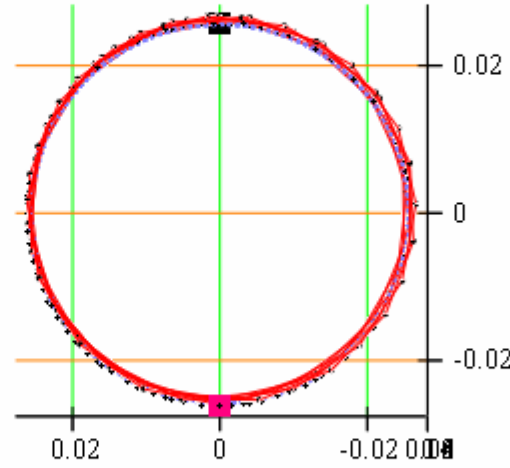
	0
0	0.0082538
1	0.0092064
2	0.0103305
3	0.0105269
4	0.0161298
5	0.0171076
6	0.0182298
7	0.0191351
8	0.0228238
9	0.0233074
10	0.0250415
11	0.0257584
12	0.0258945
13	0.0260811
14	0.0272267
15	0.0273465
16	0.0289187
17	0.0306437
18	0.0323767
19	0.032736
20	0.032806
21	0.0332781
22	0.0345029

EK-B

1. MOD ŞEKLİ – ÖRNEK 5



(Y,Z) DÜZLEMİNDE GÖRÜNÜM



(X,Y) DÜZLEMİNDE GÖRÜNÜM

mod = 1 H = 0.089
scale = 0.1 R = 0.026
tur = 6.5 $\alpha = 4.8 \text{ deg}$

Narinlik

$$\frac{H}{2 \cdot R} = 1.715$$

[illegible]

```
      *  
    * *  
  *   *  
*     *  
: : : : : INGILIZCE MAKALE, ORNEK1:SABIT DIKDORTGEN KESIT : : : : :  
: : : : :                                     : : : : ~~~~~~  
  *       *  
    *     *  
      *   *
```

60

EK-C

HELIS DUGUM NOKTALARI						
DUGUM NOKTASININ			KOORDINATLARI			ELEMANIN
NO.	ACISI	X	Y	Z	NO.	BOYU
1	.0	310.00	.00	.00	1	57.42
2	9.0	306.18	48.49	30.43	2	57.42
3	18.0	294.83	95.80	60.85	3	57.42
4	27.0	276.21	140.74	91.28	4	57.42
5	36.0	250.80	182.21	121.70	5	57.42
6	45.0	219.20	219.20	152.13	6	57.42
7	54.0	182.21	250.80	182.55	7	57.42
8	63.0	140.74	276.21	212.98	8	57.42
9	72.0	95.80	294.83	243.40	9	57.42
10	81.0	48.49	306.18	273.83	10	57.42
11	90.0	.00	310.00	304.25	11	57.42
12	99.0	-48.49	306.18	334.68	12	57.42
13	108.0	-95.80	294.83	365.10	13	57.42
14	117.0	-140.74	276.21	395.53	14	57.42
15	126.0	-182.21	250.80	425.95	15	57.42
16	135.0	-219.20	219.20	456.38	16	57.42
17	144.0	-250.80	182.21	486.80	17	57.42
18	153.0	-276.21	140.74	517.23	18	57.42
19	162.0	-294.83	95.80	547.65	19	57.42
20	171.0	-306.18	48.49	578.08	20	57.42
21	180.0	-310.00	.00	608.50	TOP=	1205.78

HELIS ELEMAN BILGILERI					
ELEMAN NO.	DUGUM NUMARALARI		KESIT OZELLIKLERI		
	B	H	ALAN		
1	1	2	150.00	15.00	2250.00
2	2	3	150.00	15.00	2250.00
3	3	4	150.00	15.00	2250.00
4	4	5	150.00	15.00	2250.00
5	5	6	150.00	15.00	2250.00
6	6	7	150.00	15.00	2250.00
7	7	8	150.00	15.00	2250.00
8	8	9	150.00	15.00	2250.00
9	9	10	150.00	15.00	2250.00
10	10	11	150.00	15.00	2250.00
11	11	12	150.00	15.00	2250.00
12	12	13	150.00	15.00	2250.00
13	13	14	150.00	15.00	2250.00
14	14	15	150.00	15.00	2250.00
15	15	16	150.00	15.00	2250.00
16	16	17	150.00	15.00	2250.00
17	17	18	150.00	15.00	2250.00
18	18	19	150.00	15.00	2250.00
19	19	20	150.00	15.00	2250.00
20	20	21	150.00	15.00	2250.00

MESNET GLOBAL EKSENE GORE MESNET TIPLERI												
MESNET TIPI	U-T	V-N	W-B	OM-T	OM-N	OM-B	N-T	N-N	N-B	M-T	M-N	M-B
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0

MESNET TIPI	DUGUM NUMARALARI (HELISEL CUBUK)	
1	1	21

PROGRAMA GIRILEN ISLENMEMIS YUK BILGILERI						
CUBUK	NO.	YON	Q1	Q2	TEK.	AT. BIT

EK-C

1 -3 10.0000 .0000 0 0 1

GLOBAL EKSENLERE GORE												
DUGUM NO.	U-T	V-N	W-B	OM-T	OM-N	OM-B	N-T	N-N	N-B	M-T	M-N	M-B
1	0	0	0	0	0	0	1	22	43	64	85	106
2	127	146	165	184	203	222	2	23	44	65	86	107
3	128	147	166	185	204	223	3	24	45	66	87	108
4	129	148	167	186	205	224	4	25	46	67	88	109
5	130	149	168	187	206	225	5	26	47	68	89	110
6	131	150	169	188	207	226	6	27	48	69	90	111
7	132	151	170	189	208	227	7	28	49	70	91	112
8	133	152	171	190	209	228	8	29	50	71	92	113
9	134	153	172	191	210	229	9	30	51	72	93	114
10	135	154	173	192	211	230	10	31	52	73	94	115
11	136	155	174	193	212	231	11	32	53	74	95	116
12	137	156	175	194	213	232	12	33	54	75	96	117
13	138	157	176	195	214	233	13	34	55	76	97	118
14	139	158	177	196	215	234	14	35	56	77	98	119
15	140	159	178	197	216	235	15	36	57	78	99	120
16	141	160	179	198	217	236	16	37	58	79	100	121
17	142	161	180	199	218	237	17	38	59	80	101	122
18	143	162	181	200	219	238	18	39	60	81	102	123
19	144	163	182	201	220	239	19	40	61	82	103	124
20	145	164	183	202	221	240	20	41	62	83	104	125
21	0	0	0	0	0	0	21	42	63	84	105	126

TOPLAM BILINMEYEN SAYISI = 240
 TEMEL BILINMEYEN SAYISI = 240
 LAGRANGE CARPANI SAYISI (YUK) = 0
 LAGRANGE CARPANI SAYISI (MESNET) = 0
 MESNETTE SIFIRLANAN BILINMEYEN SAY. = 12
 KONDENSE MATRISTE BILINMEYEN SAYISI = 114

 * HELISEL ELEMAN BILGILERINE ILAVELER *

HELIS DUGUM NO	J1	J2	KESIT		ATALET MOMENTLERI				D-T
			B	H	IT	IN	IB		
1	1	2	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
2	2	3	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
3	3	4	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
4	4	5	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
5	5	6	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
6	6	7	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
7	7	8	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
8	8	9	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
9	9	10	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
10	10	11	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
11	11	12	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
12	12	13	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
13	13	14	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
14	14	15	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
15	15	16	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
16	16	17	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
17	17	18	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
18	18	19	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
19	19	20	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	
20	20	21	150.00	15.00	.1581E+06	.4219E+05	.4219E+07	9	

TOPLAM TERIM SAYISI = 57840

EK-C

ELEMN	HELIS J1	J2	DUGUM YONU	YUKUN Q1	SIDDETI Q2	TK.	AT.	SON
*	1	1	2	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	2	2	3	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	3	3	4	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	4	4	5	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	5	5	6	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	6	6	7	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	7	7	8	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	8	8	9	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	9	9	10	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	10	10	11	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	11	11	12	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	12	12	13	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	13	13	14	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	14	14	15	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	15	15	16	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	16	16	17	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	17	17	18	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	18	18	19	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	19	19	20	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			
	20	20	21	1	-5.30	-5.30	20	1
			3	-8.48	-8.48			

SADECE KOSEGEN UZERINDEKILERI PIVOT SECEN GAUSS PROGRAMI
KOSEGENE SIFIR GELEN BILINMEYEN NUMARASI 240

* T - N - B KOORDINAT TAKIMINDA *

DUGUM NO.	U-T	DEPLASMANLAR V-N	W-B
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	-.4556E-03	.7087E-03	-.8116E-02
3	-.7038E-03	.2725E-02	-.4043E-01
4	-.7463E-03	.1357E-02	-.6410E-01
5	-.1108E-02	.7429E-03	-.9241E-01
6	-.1375E-02	-.2809E-02	-.1057E+00
7	-.2344E-02	-.3732E-02	-.1166E+00
8	-.2898E-02	-.5586E-02	-.1183E+00
9	-.4069E-02	-.4275E-02	-.1179E+00
10	-.4282E-02	-.2839E-02	-.1166E+00

EK-C

11	-.4891E-02	-.1767E-14	-.1152E+00
12	-.4282E-02	.2839E-02	-.1166E+00
13	-.4069E-02	.4275E-02	-.1179E+00
14	-.2898E-02	.5586E-02	-.1183E+00
15	-.2344E-02	.3732E-02	-.1166E+00

16	-.1375E-02	.2809E-02	-.1057E+00
17	-.1108E-02	-.7429E-03	-.9241E-01
18	-.7463E-03	-.1357E-02	-.6410E-01
19	-.7038E-03	-.2725E-02	-.4043E-01
20	-.4556E-03	-.7087E-03	-.8116E-02
21	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

DUGUM NO.	OM-T	DONMELER OM-N	OM-B
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	.7958E-05	.3819E-03	.4393E-04
3	.1110E-03	.5048E-03	.5487E-04
4	.1809E-03	.4435E-03	.6859E-04
5	.2720E-03	.3739E-03	.8123E-04
6	.3070E-03	.1893E-03	.9787E-04
7	.3379E-03	.1203E-03	.1259E-03
8	.3349E-03	-.5047E-05	.1439E-03
9	.3290E-03	-.6910E-05	.1745E-03
10	.3200E-03	-.2885E-04	.1796E-03
11	.3148E-03	-.6936E-16	.1955E-03
12	.3200E-03	.2885E-04	.1796E-03
13	.3290E-03	.6910E-05	.1745E-03
14	.3349E-03	.5047E-05	.1439E-03
15	.3379E-03	-.1203E-03	.1259E-03
16	.3070E-03	-.1893E-03	.9787E-04
17	.2720E-03	-.3739E-03	.8123E-04
18	.1809E-03	-.4435E-03	.6859E-04
19	.1110E-03	-.5048E-03	.5487E-04
20	.7958E-05	-.3819E-03	.4393E-04
21	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

DUGUM NO.	N-T	KUVVETLER N-N	N-B
1	-5743.	306.	-3182.
2	-5690.	211.	-2538.
3	-5023.	1362.	-2278.
4	-4778.	1196.	-1754.
5	-4039.	2312.	-1539.
6	-3615.	2035.	-1127.
7	-2830.	3066.	-940.
8	-2254.	2645.	-623.
9	-1458.	3549.	-443.
10	-766.	2967.	-198.
11	0.	3715.	0.
12	766.	2967.	198.
13	1458.	3549.	443.
14	2254.	2645.	623.
15	2830.	3066.	940.
16	3615.	2035.	1127.
17	4039.	2312.	1539.
18	4778.	1196.	1754.
19	5023.	1362.	2278.
20	5690.	211.	2538.
21	5743.	306.	3182.

DUGUM NO.	M-T	MOMENTLER M-N	M-B
1	-6540.	96422.	1168000.
2	4502.	59116.	1269640.
3	8280.	863.	1110690.
4	6864.	-9375.	1136976.

EK-C

5	5545.	-24953.	950538.
6	1056.	-21599.	901738.
7	8.	-13341.	695270.
8	-2659.	-8705.	579775.
9	-1825.	6884.	367287.

10	-1620.	4562.	200014.
11	0.	15964.	0.
12	1620.	4562.	-200014.
13	1825.	6884.	-367287.
14	2659.	-8705.	-579775.
15	-8.	-13341.	-695270.
16	-1056.	-21599.	-901738.
17	-5545.	-24953.	-950538.
18	-6864.	-9375.	-1136976.
19	-8280.	863.	-1110690.
20	-4502.	59116.	-1269640.
21	6540.	96422.	-1168000.

 * X - Y - Z KOORDINAT TAKIMINDA *

DUGUM NO.	U-X	DEPLASMANLAR V-Y	W-Z
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	-.1312E-02	.3755E-02	-.7125E-02
3	-.9028E-02	.1897E-01	-.3466E-01
4	-.1634E-01	.2908E-01	-.5476E-01
5	-.2883E-01	.3842E-01	-.7895E-01
6	-.3679E-01	.4076E-01	-.9035E-01
7	-.4617E-01	.3816E-01	-.1001E+00
8	-.5111E-01	.3231E-01	-.1018E+00
9	-.5480E-01	.2230E-01	-.1021E+00
10	-.5699E-01	.1190E-01	-.1012E+00
11	-.5689E-01	.1771E-14	-.1003E+00
12	-.5699E-01	-.1190E-01	-.1012E+00
13	-.5480E-01	-.2230E-01	-.1021E+00
14	-.5111E-01	-.3231E-01	-.1018E+00
15	-.4617E-01	-.3816E-01	-.1001E+00
16	-.3679E-01	-.4076E-01	-.9035E-01
17	-.2883E-01	-.3842E-01	-.7895E-01
18	-.1634E-01	-.2908E-01	-.5476E-01
19	-.9028E-02	-.1897E-01	-.3466E-01
20	-.1312E-02	-.3755E-02	-.7125E-02
21	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

DUGUM NO.	OM-X	DONMELER OM-Y	OM-Z
1	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00
2	-.3746E-03	-.7607E-04	.4147E-04
3	-.5002E-03	-.9414E-04	.1053E-03
4	-.4483E-03	-.9699E-04	.1540E-03
5	-.4128E-03	-.6793E-04	.2130E-03
6	-.2813E-03	.1357E-04	.2457E-03
7	-.2485E-03	.3187E-04	.2858E-03
8	-.1829E-03	.9884E-04	.2995E-03
9	-.1752E-03	.6421E-04	.3223E-03
10	-.1696E-03	.5606E-04	.3219E-03
11	-.1634E-03	.6937E-16	.3326E-03
12	-.1696E-03	-.5606E-04	.3219E-03
13	-.1752E-03	-.6421E-04	.3223E-03
14	-.1829E-03	-.9884E-04	.2995E-03
15	-.2485E-03	-.3187E-04	.2858E-03

EK-C

16	- .2813E-03	- .1357E-04	.2457E-03
17	- .4128E-03	.6793E-04	.2130E-03
18	- .4483E-03	.9699E-04	.1540E-03
19	- .5002E-03	.9414E-04	.1053E-03
20	- .3746E-03	.7607E-04	.4147E-04
21	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00

DUGUM NO.	N-X	KUVVETLER N-Y	N-Z
1	-306.	-3184.	-5742.
2	337.	-3471.	-5168.
3	-352.	-3324.	-4593.
4	352.	-3325.	-4019.
5	-337.	-3471.	-3445.
6	307.	-3185.	-2871.
7	-263.	-3598.	-2297.
8	208.	-3075.	-1723.
9	-144.	-3685.	-1148.
10	74.	-3015.	-574.
11	0.	-3715.	0.
12	-74.	-3015.	574.
13	144.	-3685.	1148.
14	-208.	-3075.	1723.
15	263.	-3598.	2297.
16	-307.	-3185.	2871.
17	337.	-3471.	3445.
18	-352.	-3325.	4019.
19	352.	-3324.	4593.
20	-337.	-3471.	5168.
21	306.	-3184.	5742.

DUGUM NO.	M-X	MOMENTLER M-Y	M-Z
1	-96422.	-624451.	987081.
2	46257.	-669956.	1079129.
3	178877.	-553320.	946331.
4	279224.	-527358.	967873.
5	313476.	-389010.	809061.
6	352507.	-321961.	765297.
7	305888.	-205750.	589642.
8	279691.	-132739.	490281.
9	184439.	-67166.	310518.
10	105323.	-21300.	168767.
11	0.	-15964.	0.
12	-105323.	-21300.	-168767.
13	-184439.	-67166.	-310518.
14	-279691.	-132739.	-490281.
15	-305888.	-205750.	-589642.
16	-352507.	-321961.	-765297.
17	-313476.	-389010.	-809061.
18	-279224.	-527358.	-967873.
19	-178877.	-553320.	-946331.
20	-46257.	-669956.	-1079129.
21	96422.	-624451.	-987081.

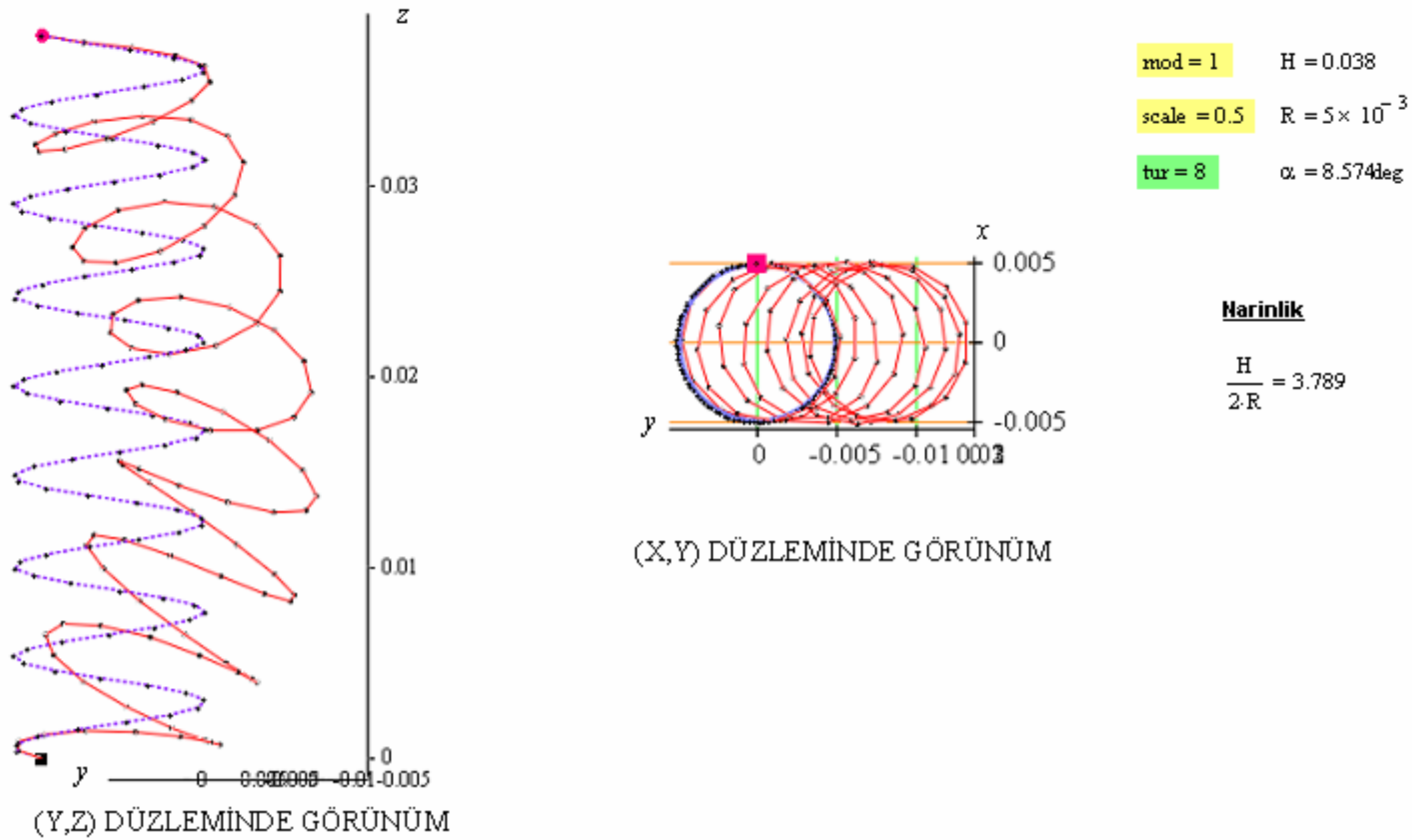
DUGUM =====	SIGMA =====	TOU =====
1	-2.5524	1.6766
2	-2.5291	1.3356
3	-2.2324	1.3920
4	-2.1234	1.1134
5	-1.7950	1.4567
6	-1.6066	1.2199
7	-1.2578	1.6817

EK-C

8	-1.0018	1.4253
9	-.6480	1.8757
10	-.3404	1.5592
11	.0000	1.9486
12	.3404	1.5592
13	.6480	1.8757
14	1.0018	1.4253
15	1.2578	1.6817
16	1.6066	1.2199
17	1.7950	1.4567
18	2.1234	1.1134
19	2.2324	1.3920
20	2.5291	1.3356
21	2.5524	1.6766

EK-D

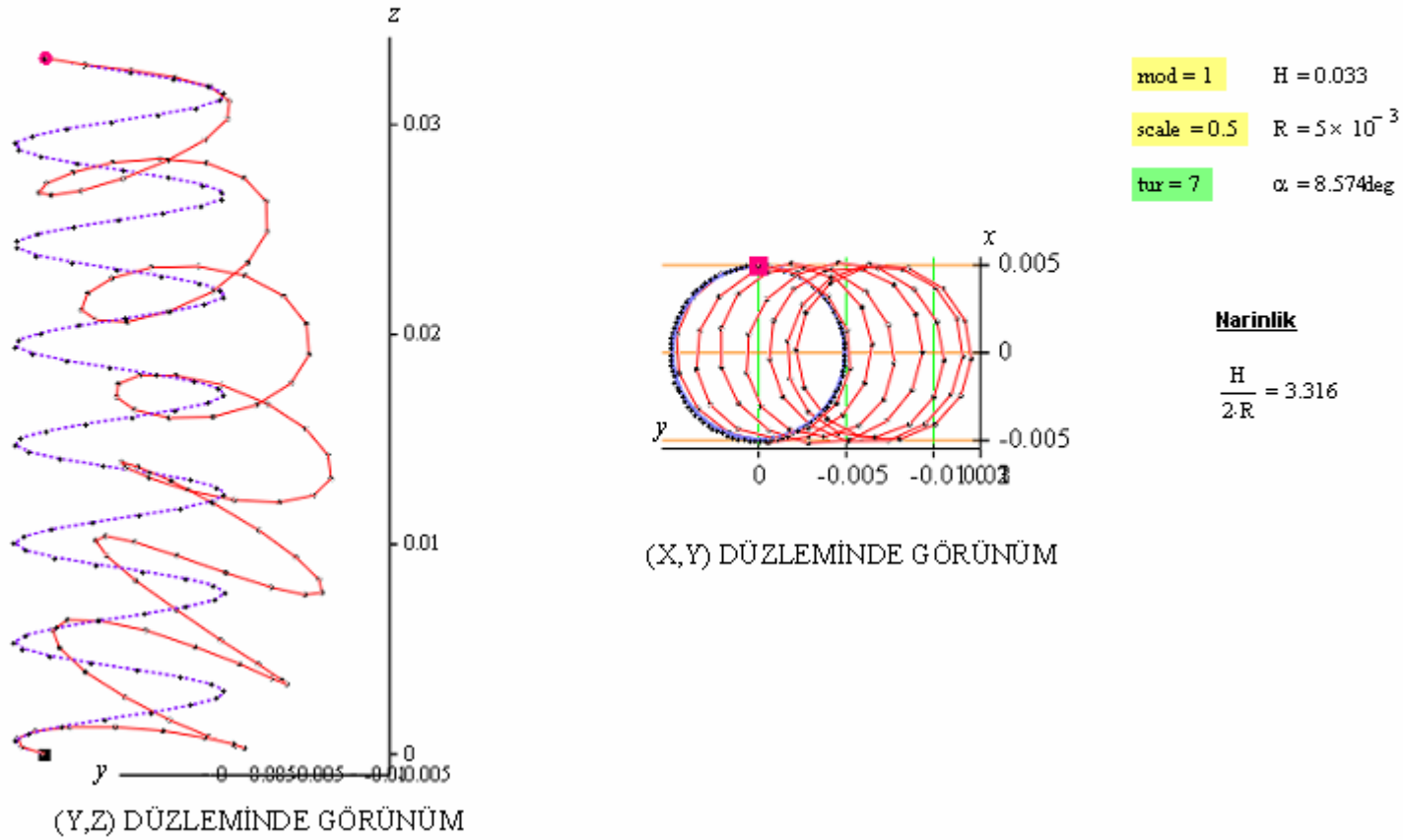
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil D.1 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=3.789$)

EK-D

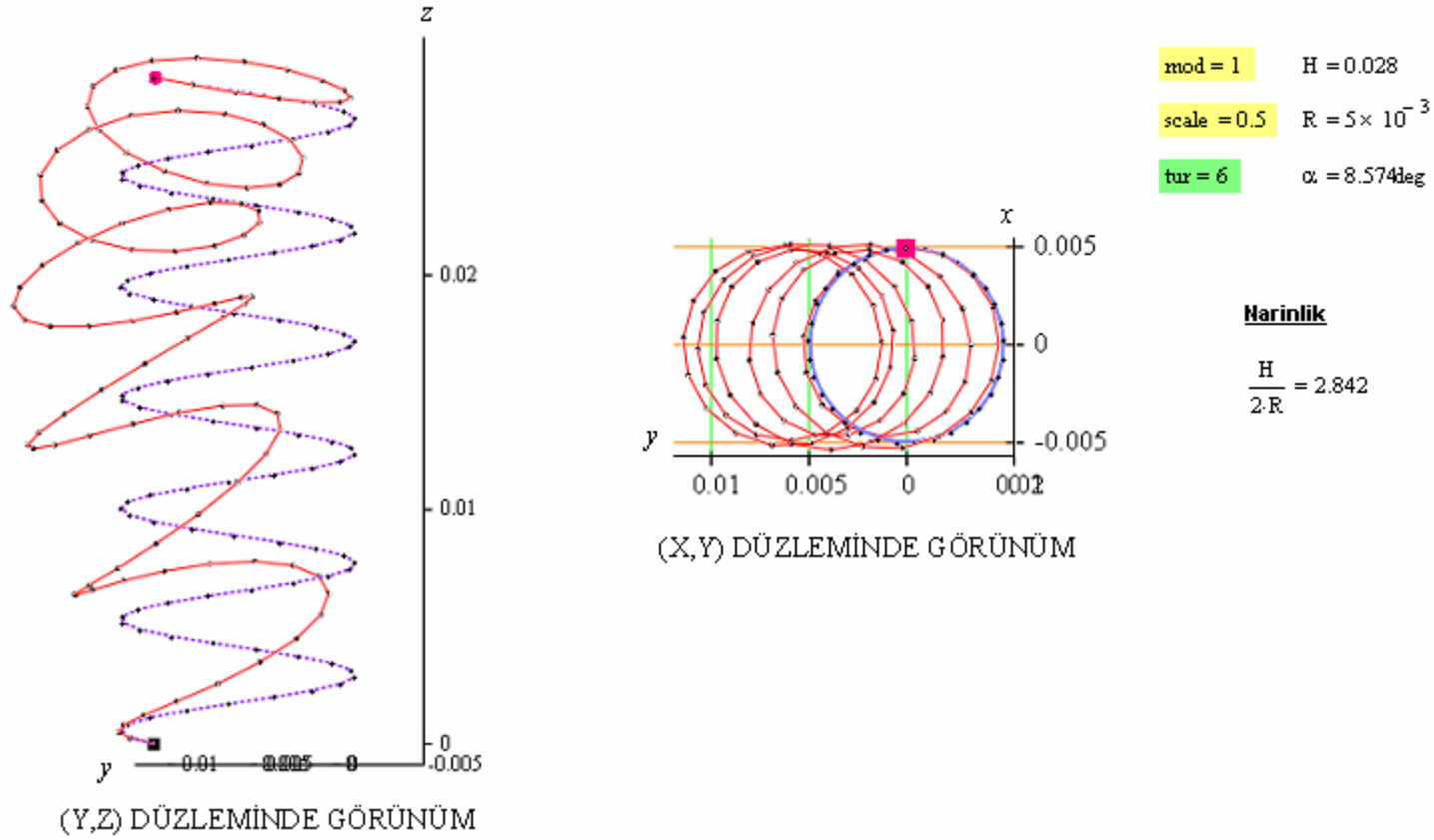
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil D.2 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=3.316$)

EK-D

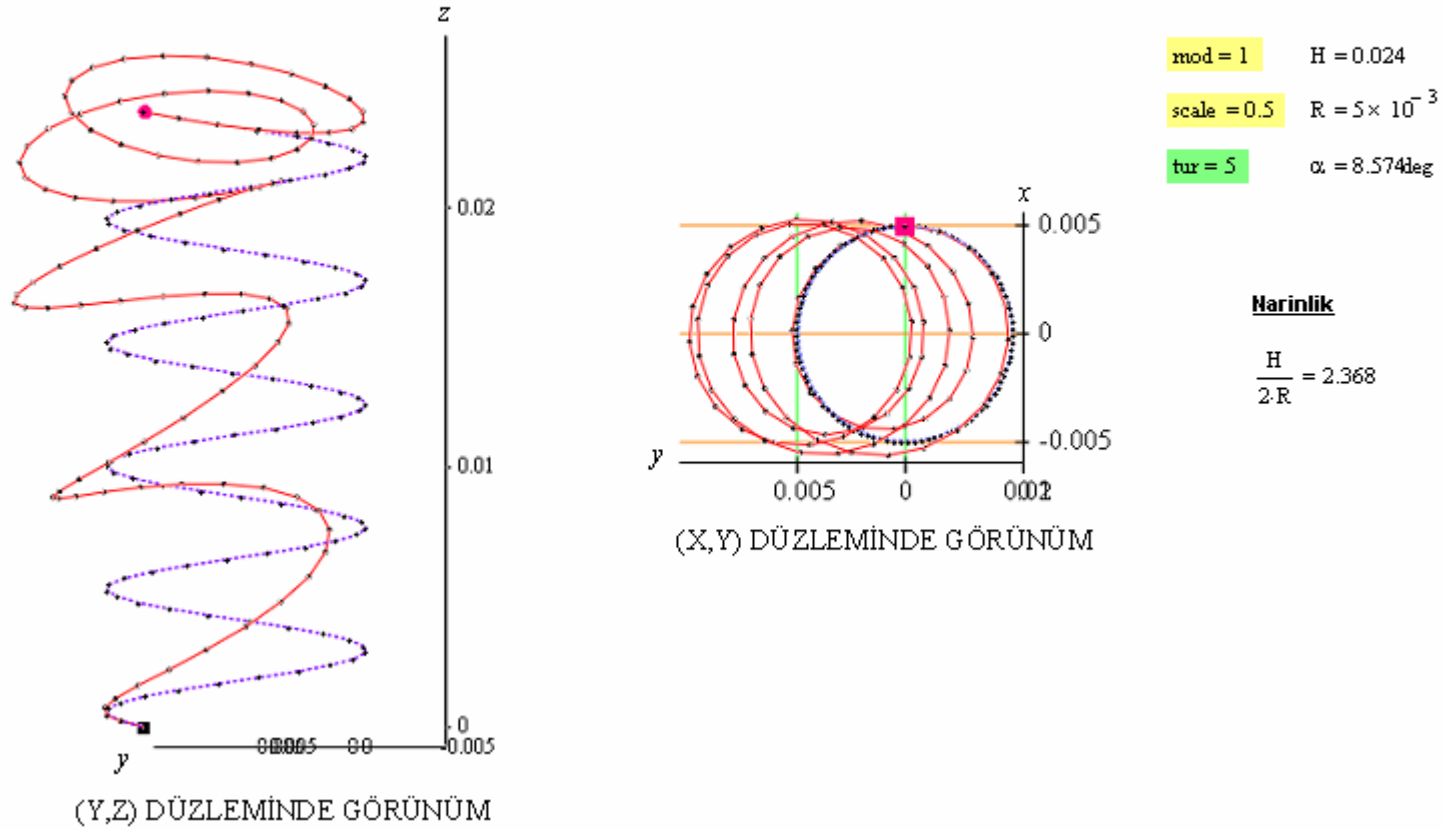
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil D.3 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=2.842$)

EK-D

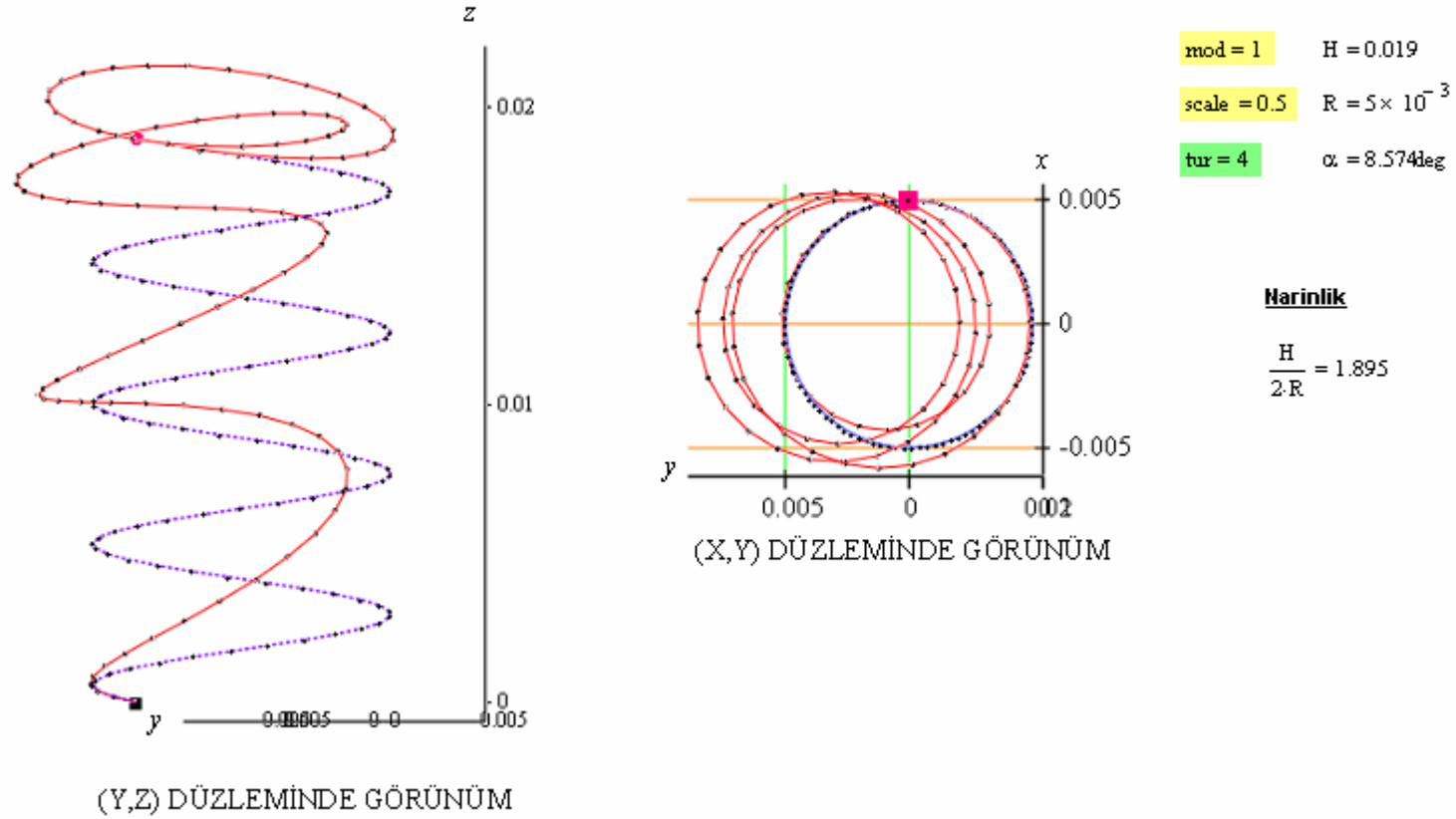
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil D.4 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=2.368$)

EK-D

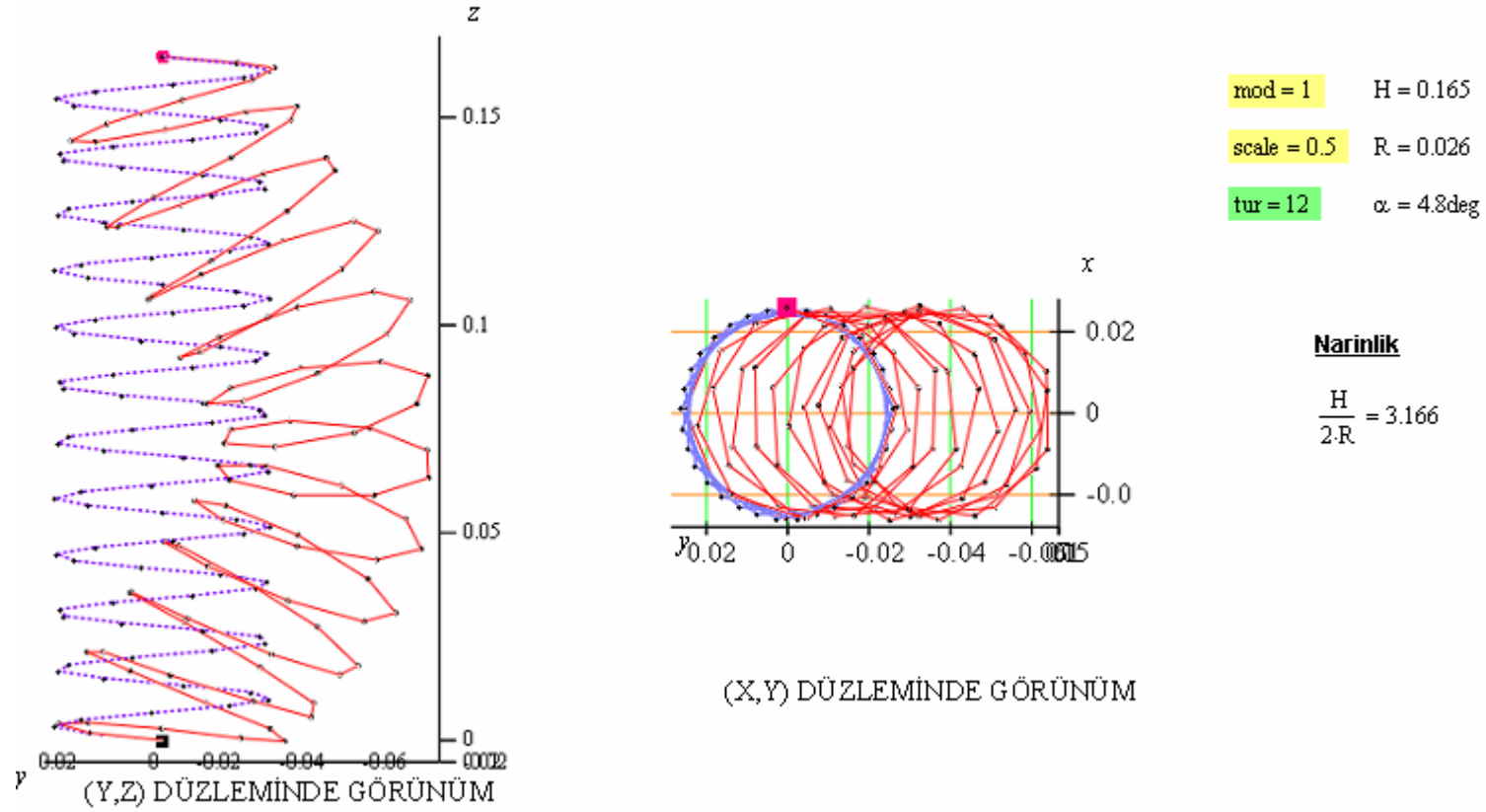
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil D.5 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=1.895$)

EK-D

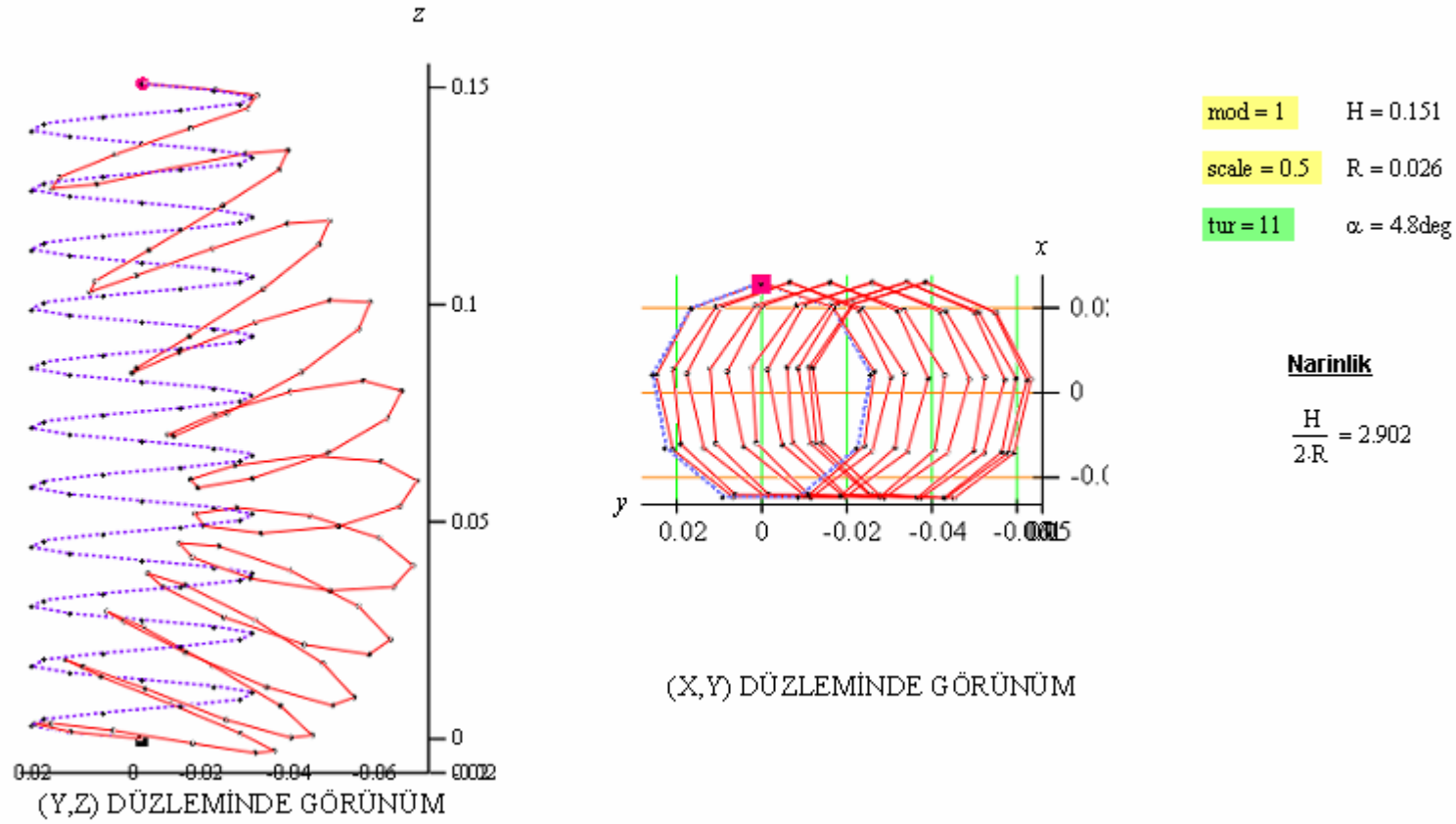
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil D.6 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=3.166$)

EK-D

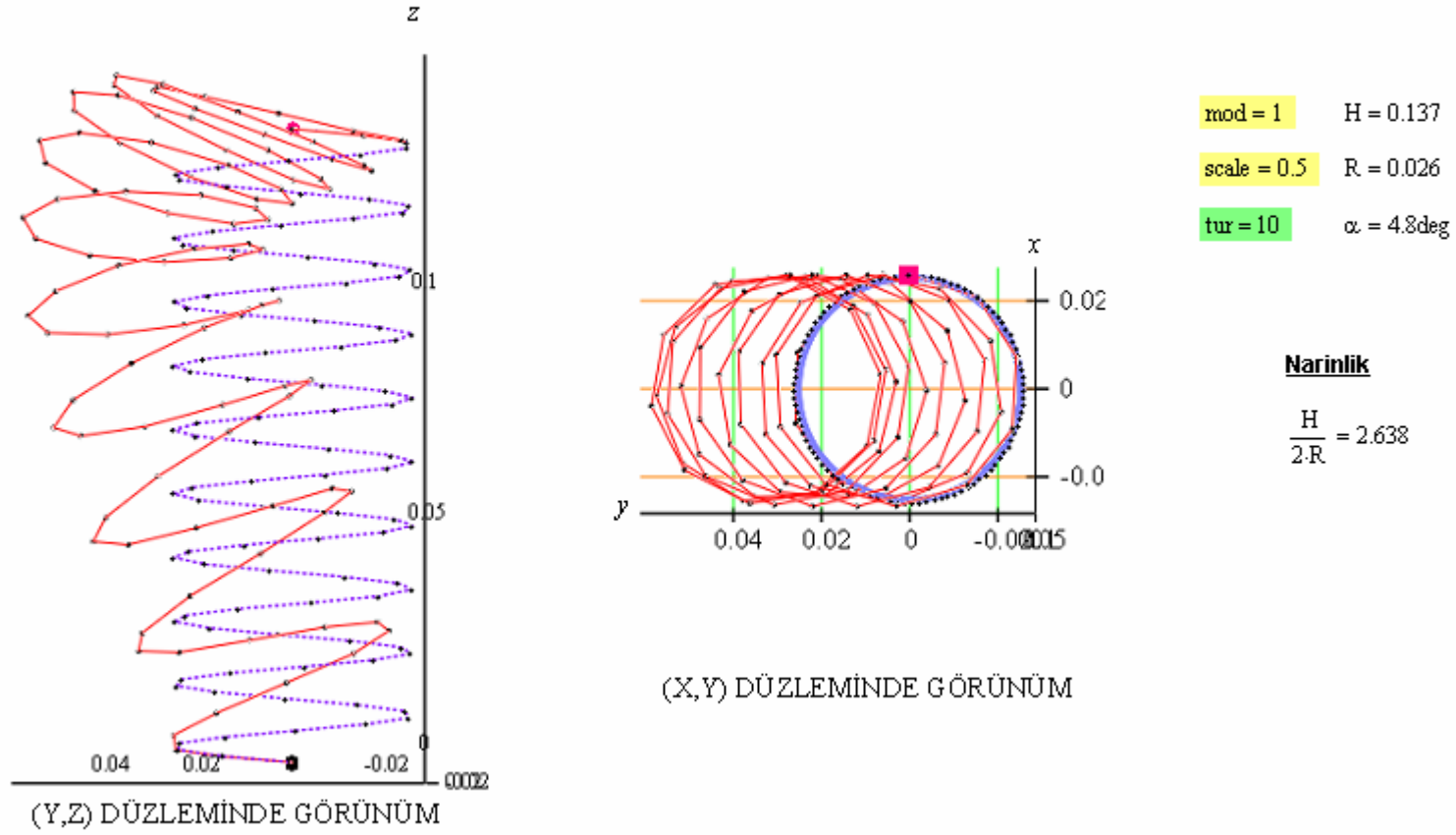
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK 5



Şekil D.7 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=2.902$)

EK-D

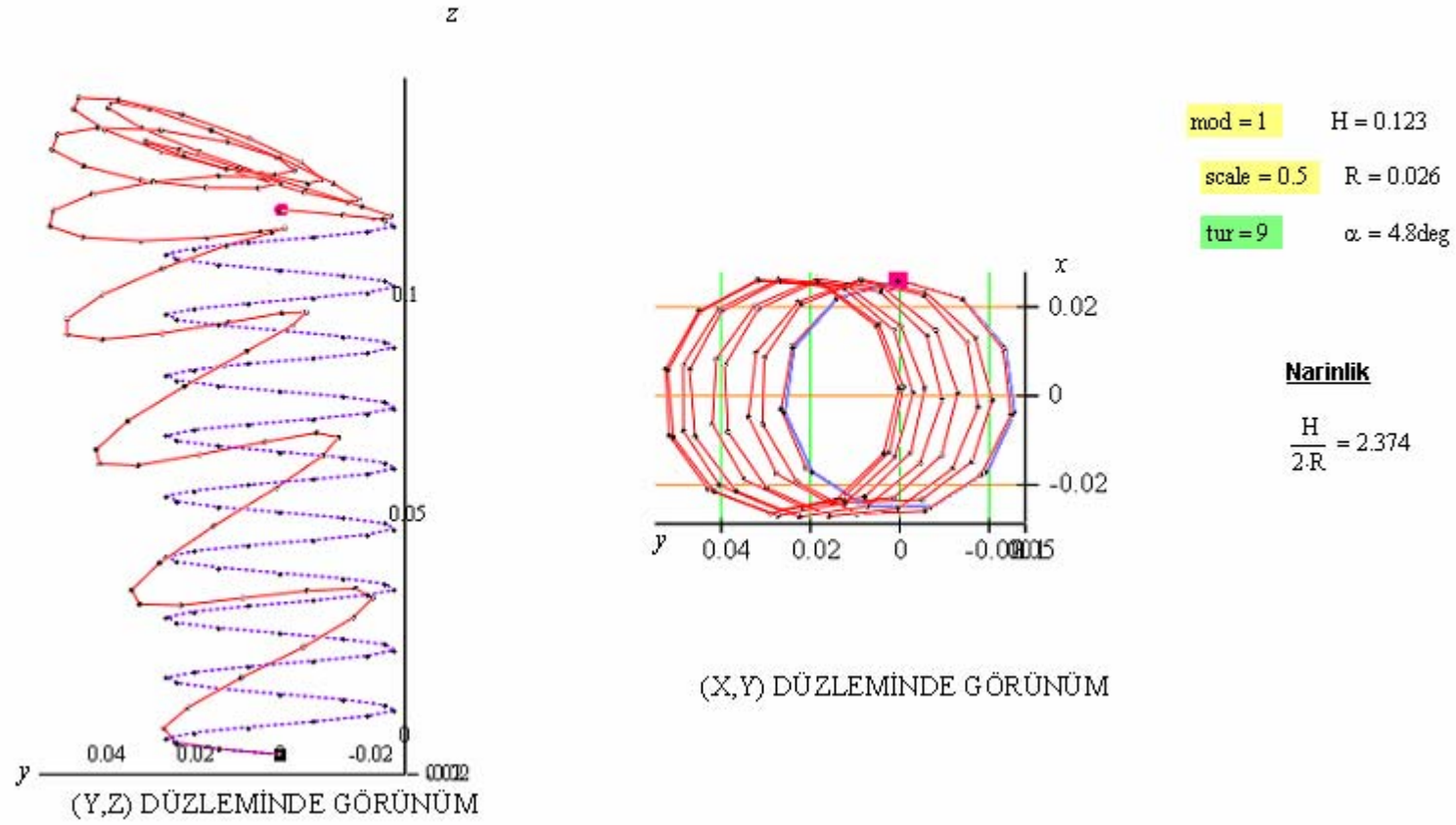
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil D.8 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=2.638$)

EK-D

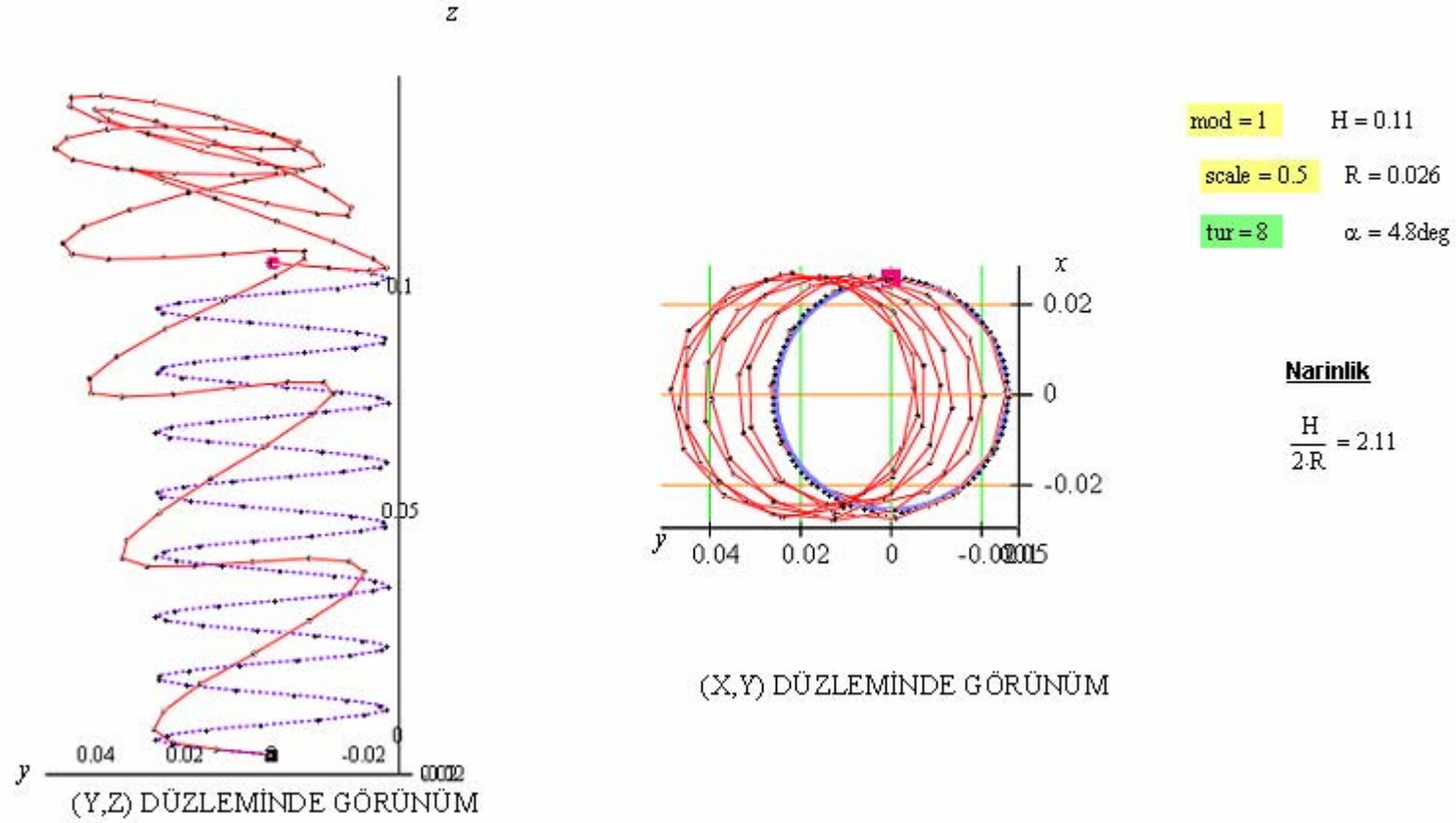
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil D.9 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=2.374$)

EK-D

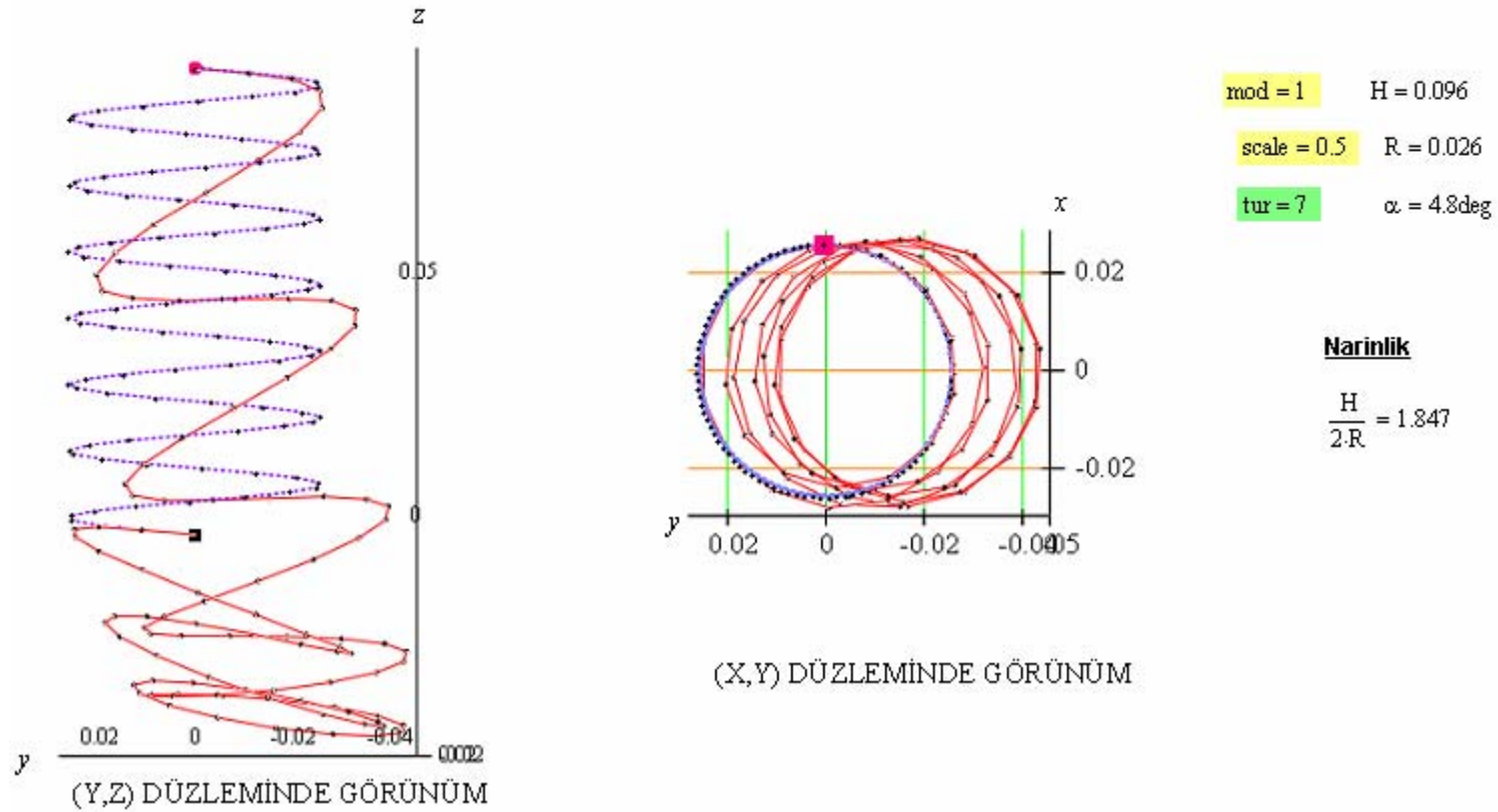
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil D.10 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=2.11$)

EK-D

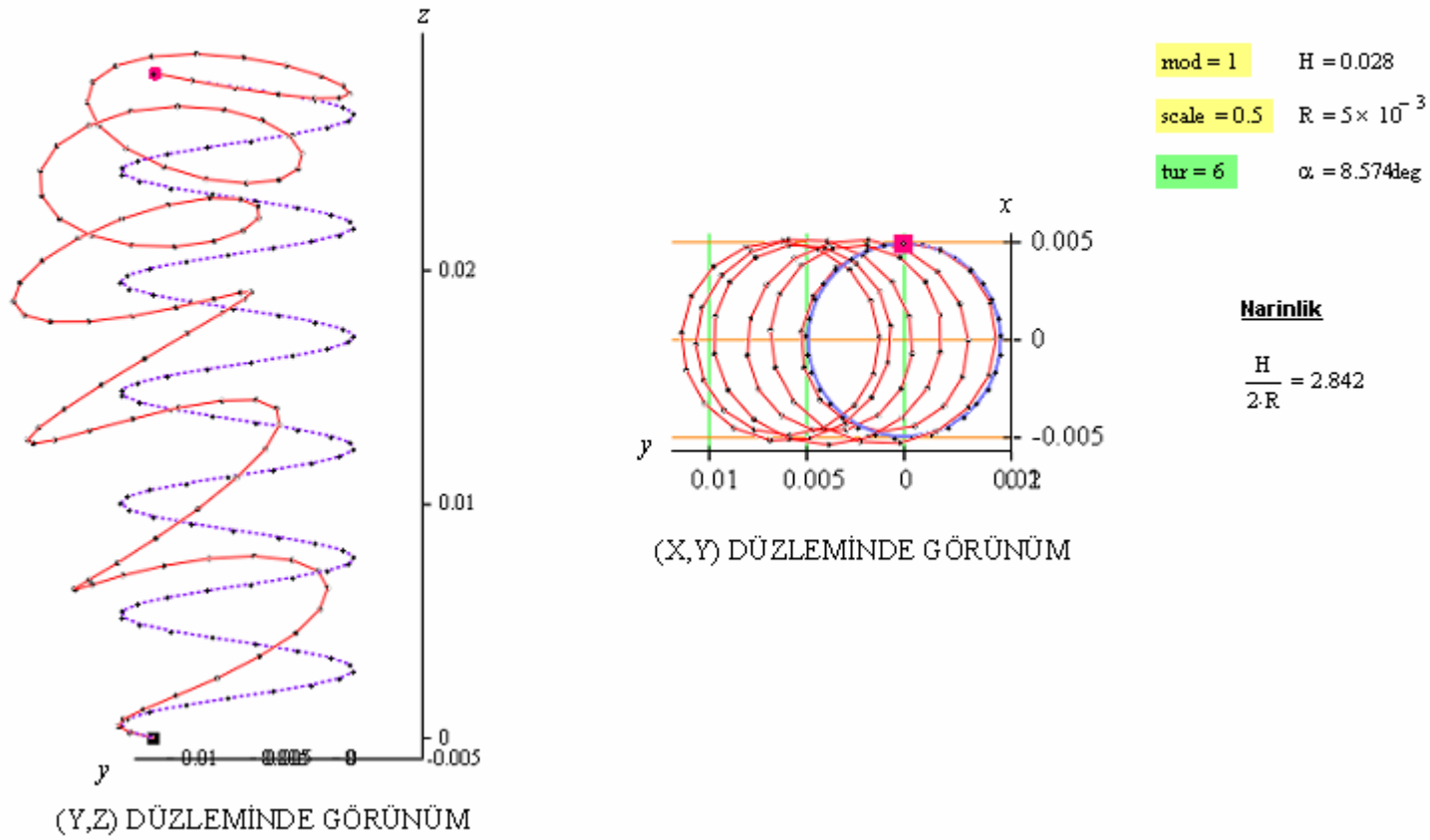
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil D.11 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin narinlik ile değişimi ($H/2R=1.847$)

EK-E

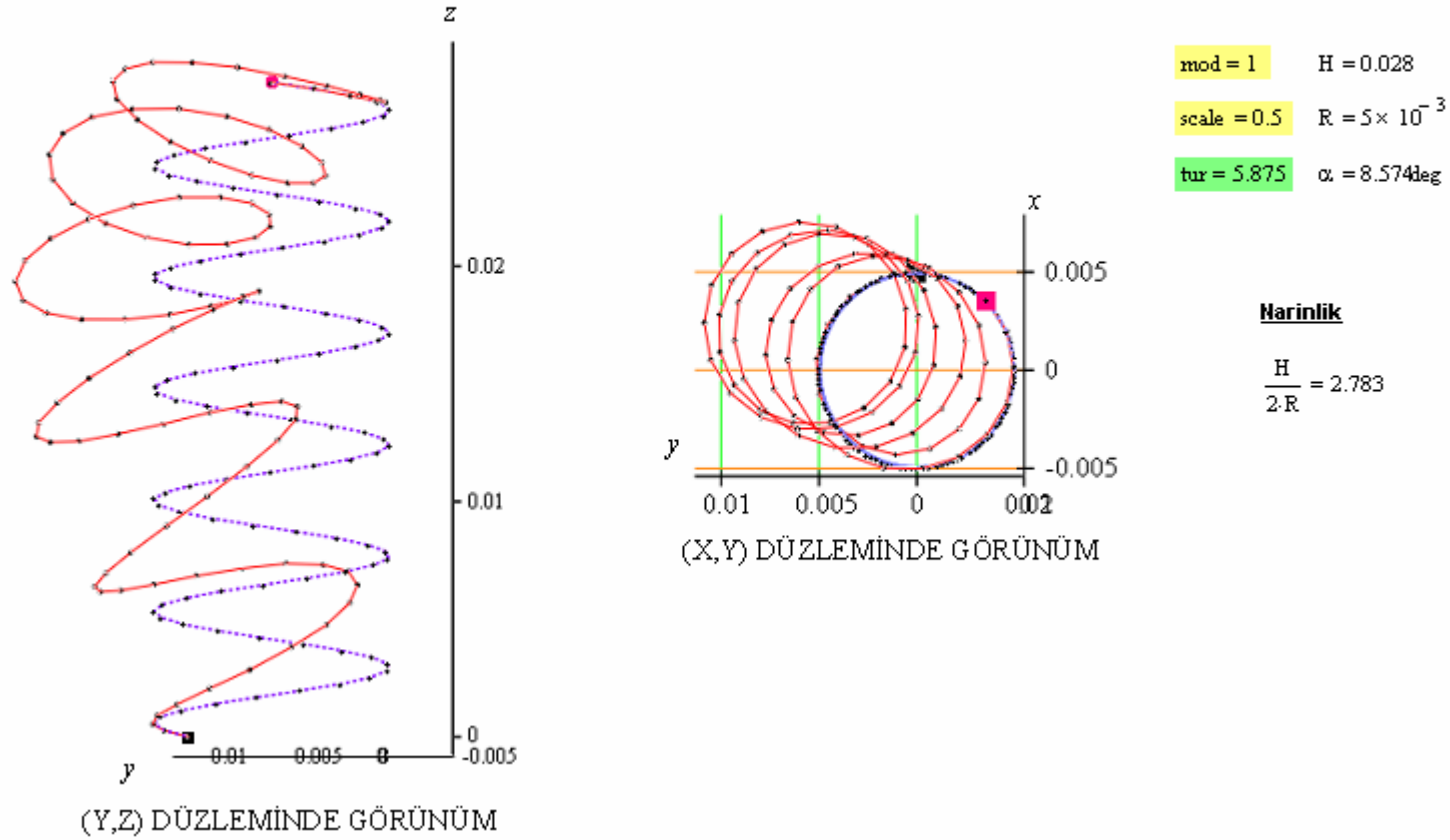
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.1 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.842$)

EK-E

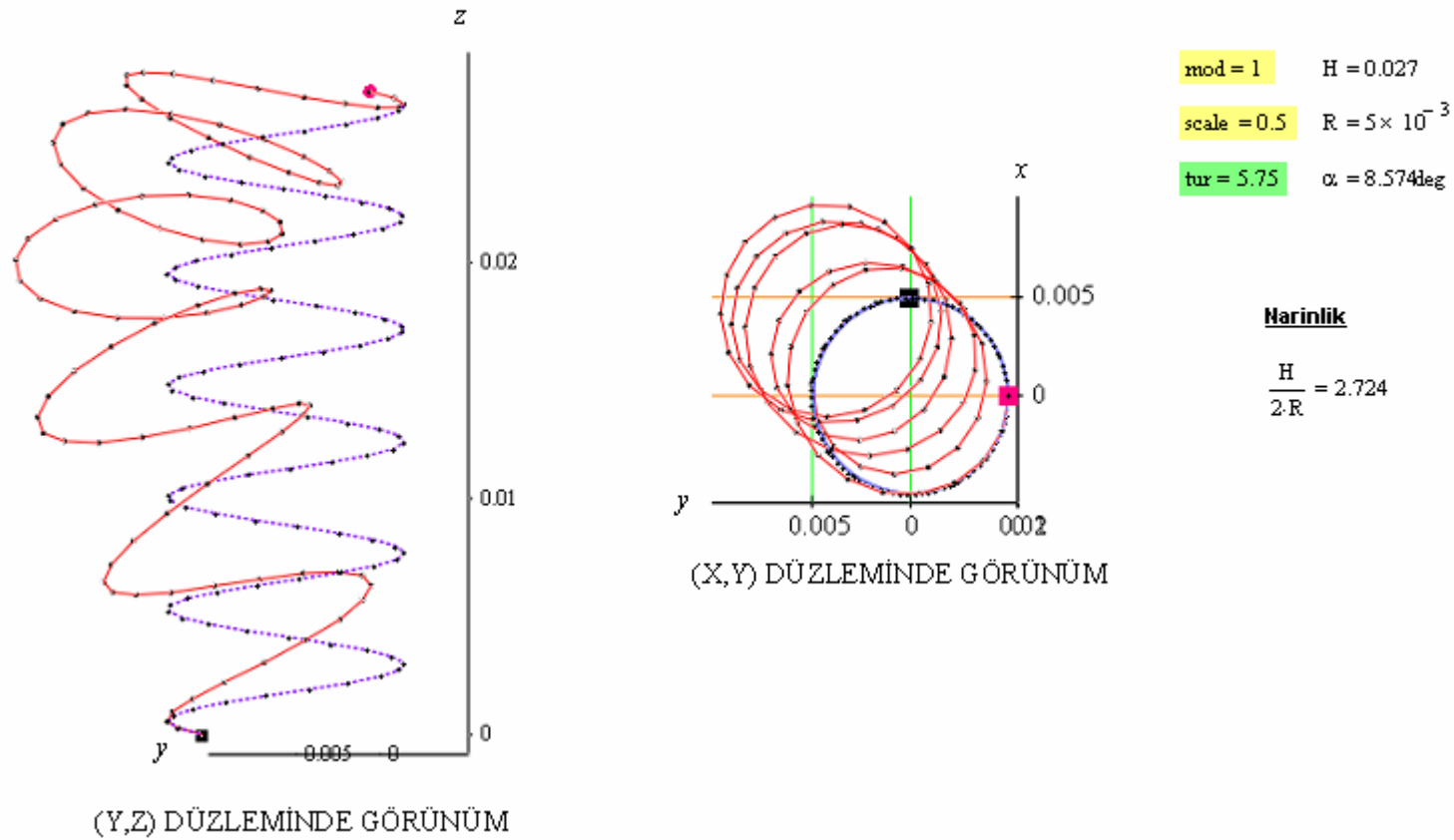
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.2 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.783$)

EK-E

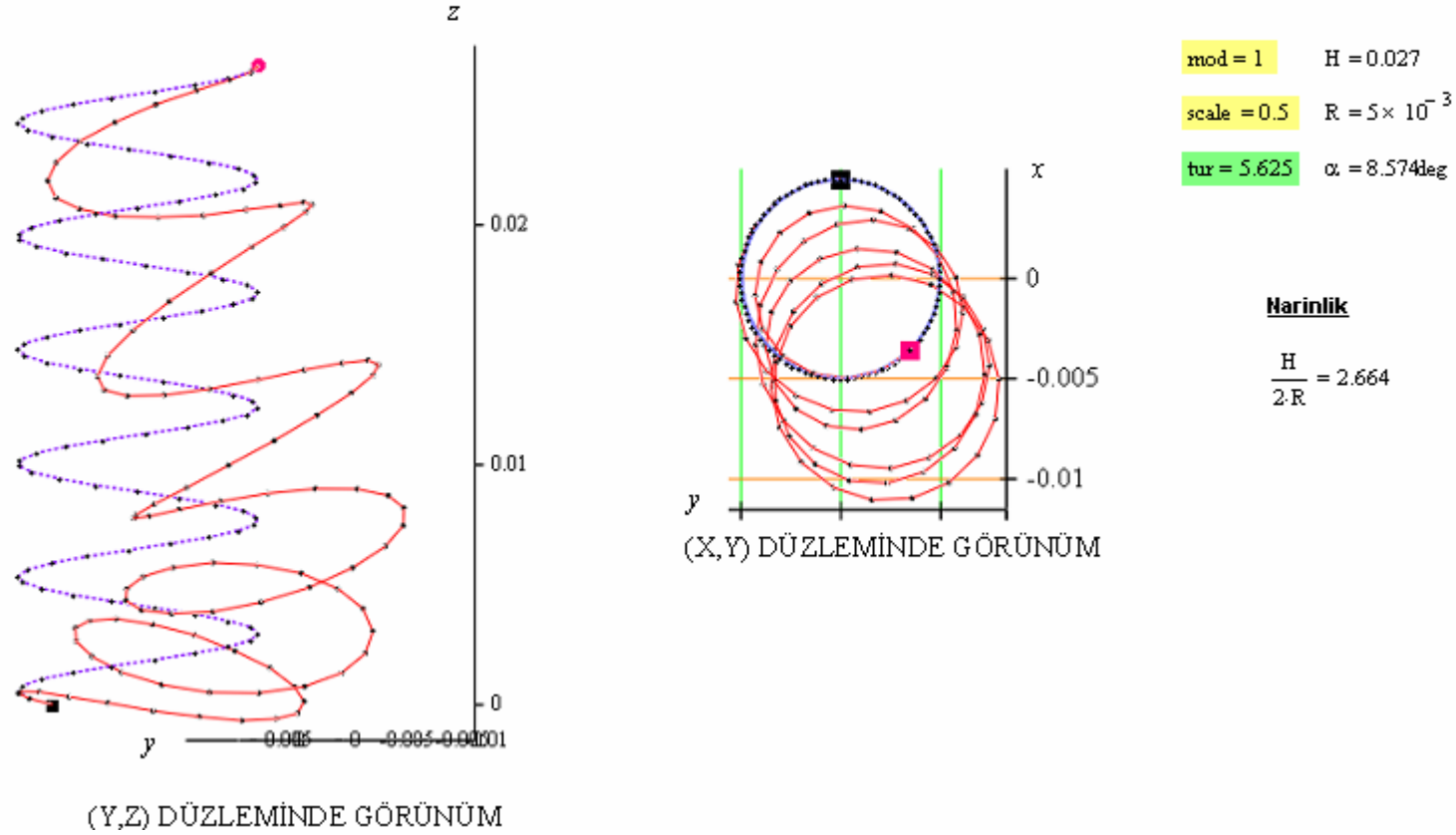
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.3 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.724$)

EK-E

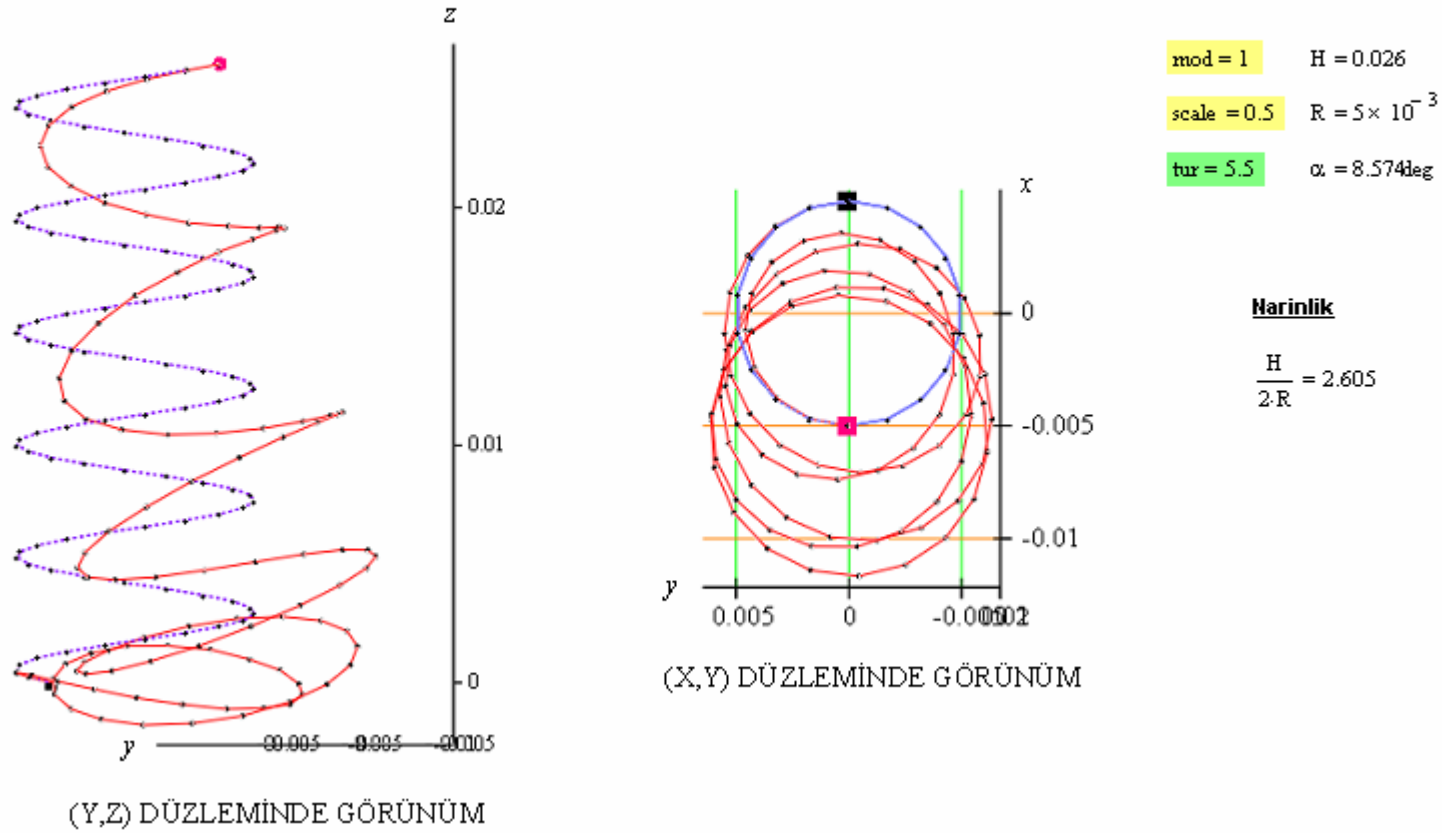
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.4 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.664$)

EK-E

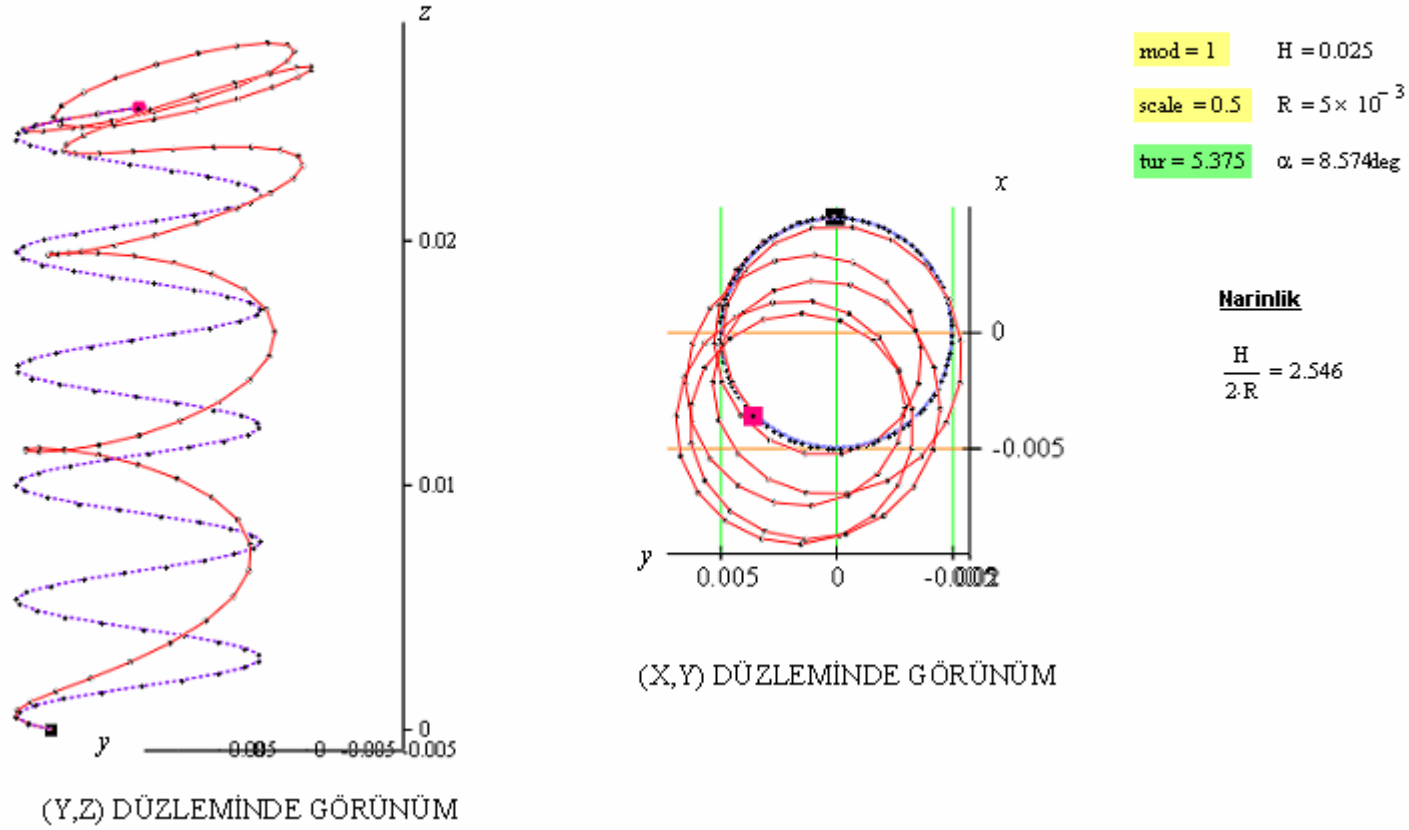
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.5 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.605$)

EK-E

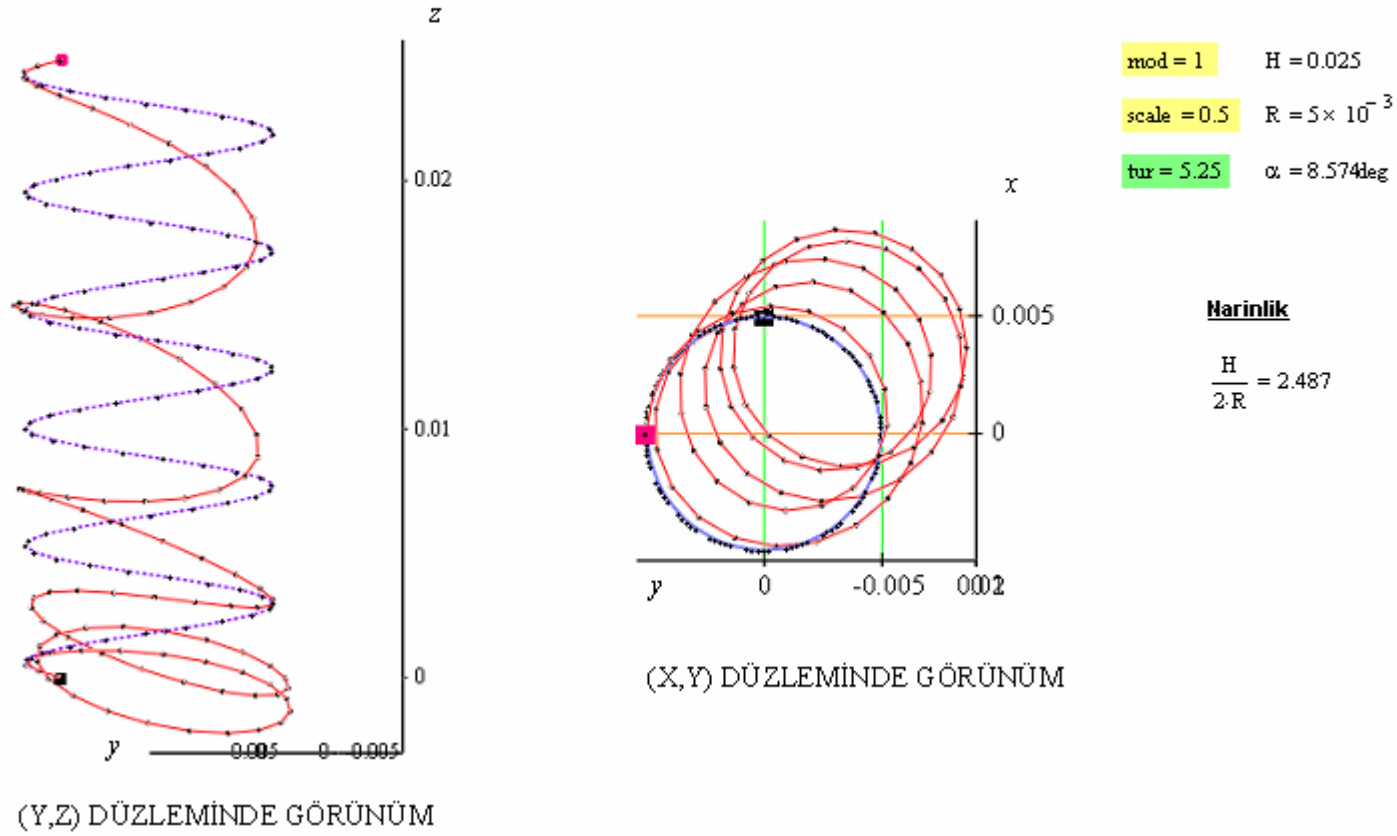
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.6 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.546$)

EK-E

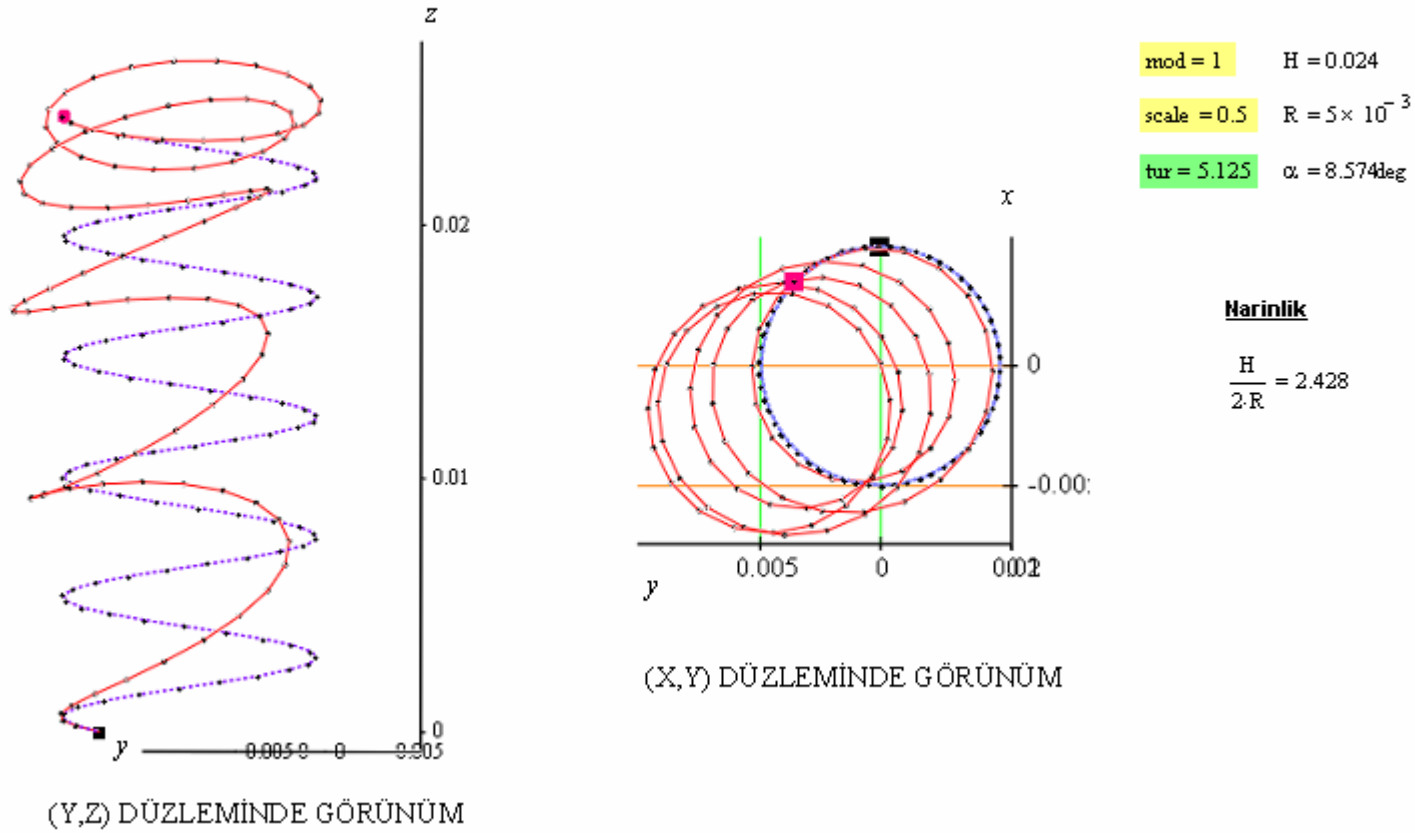
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.7 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.487$)

EK-E

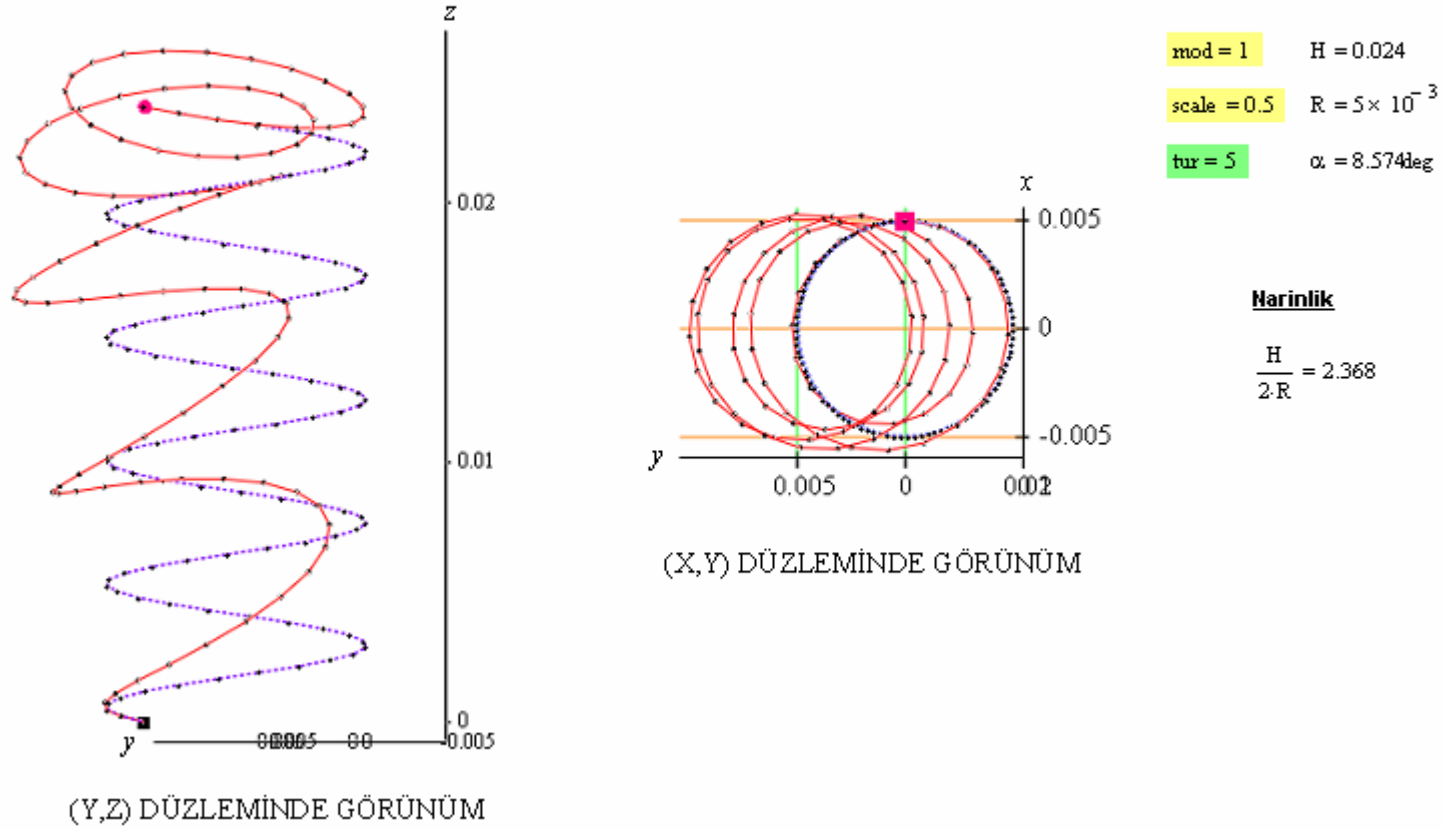
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.8 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.428$)

EK-E

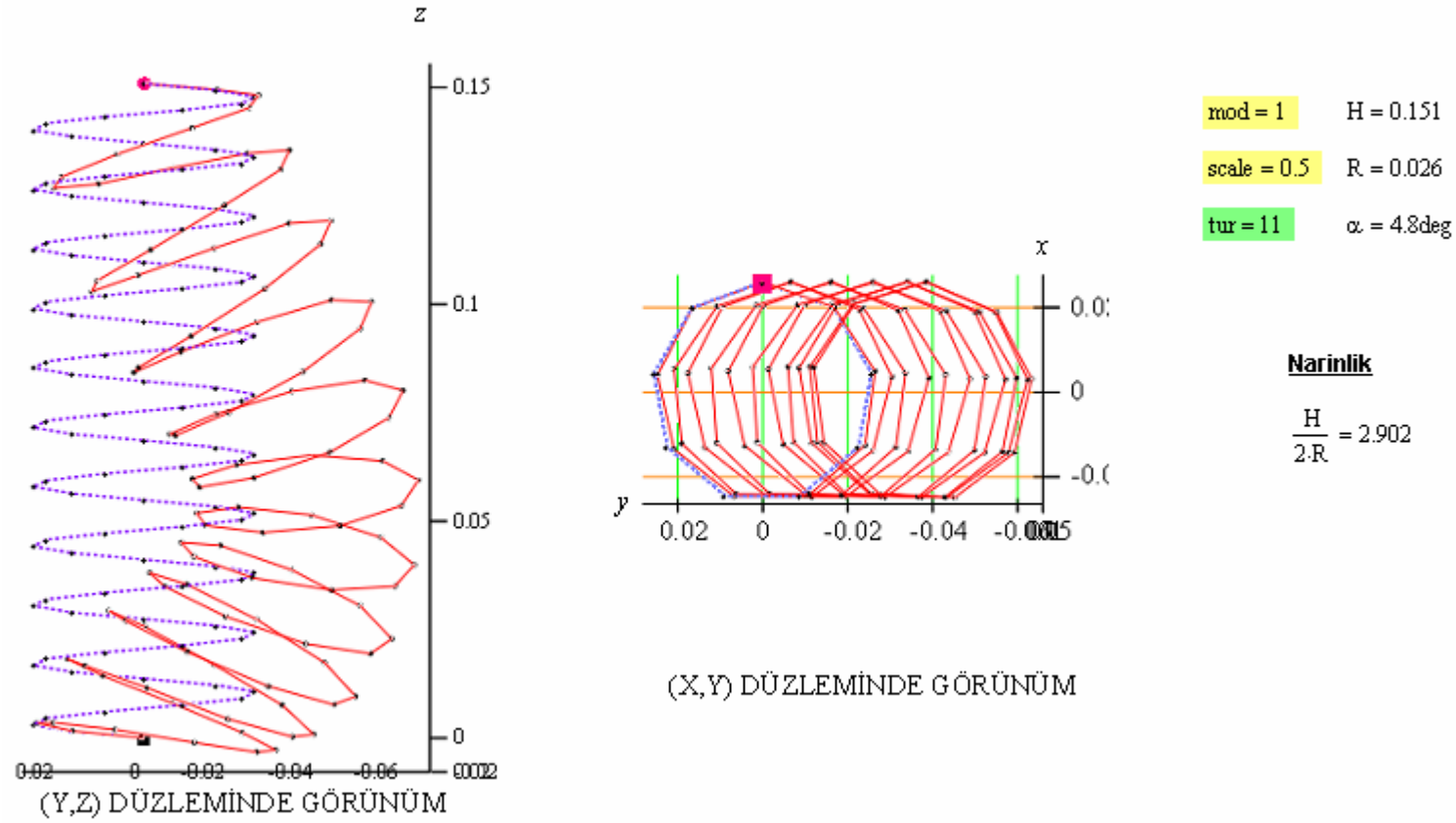
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK4



Şekil E.9 – Örnek 4’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R = 2.368$)

EK-E

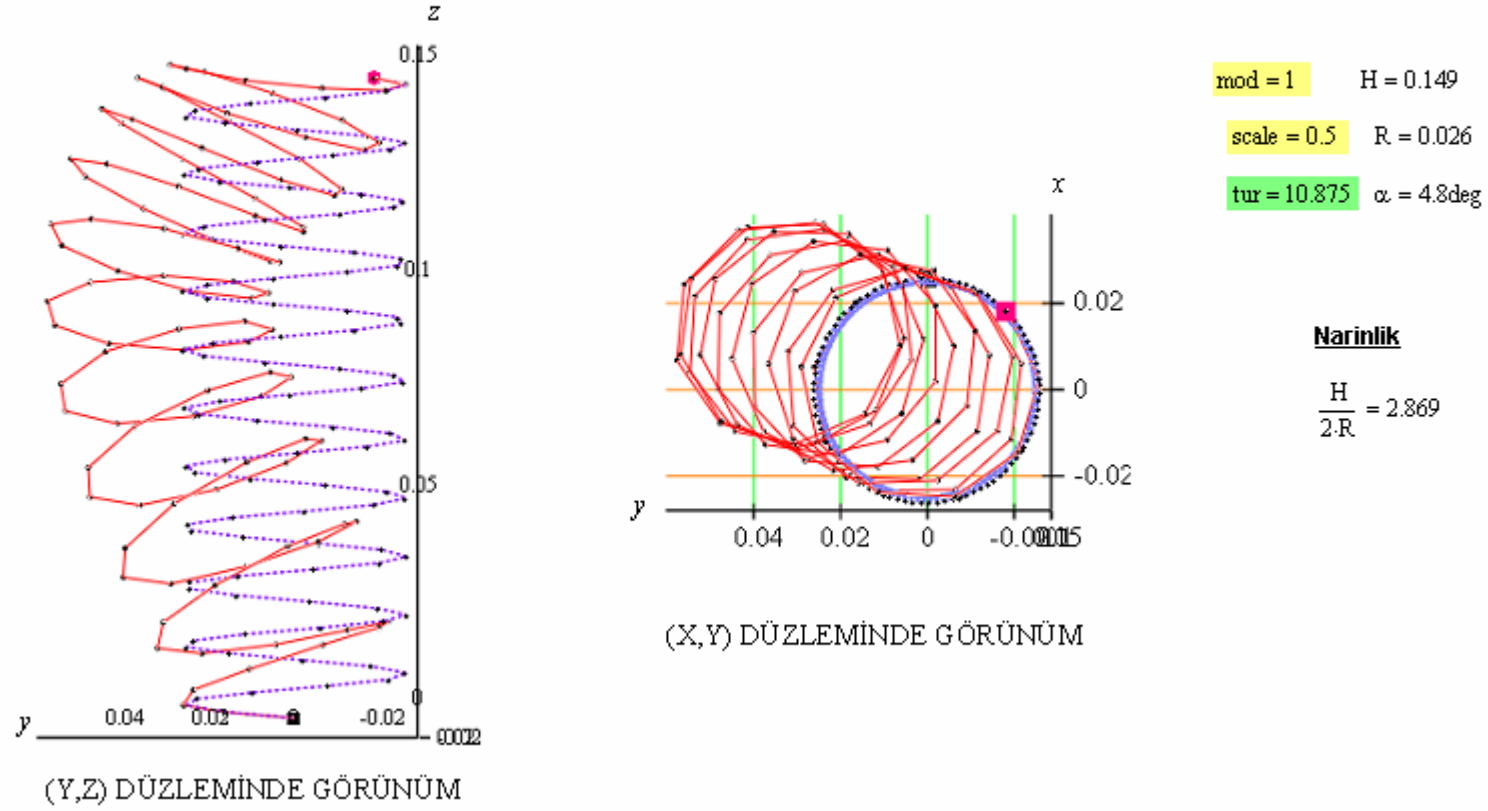
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil E.10 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.902$)

EK-E

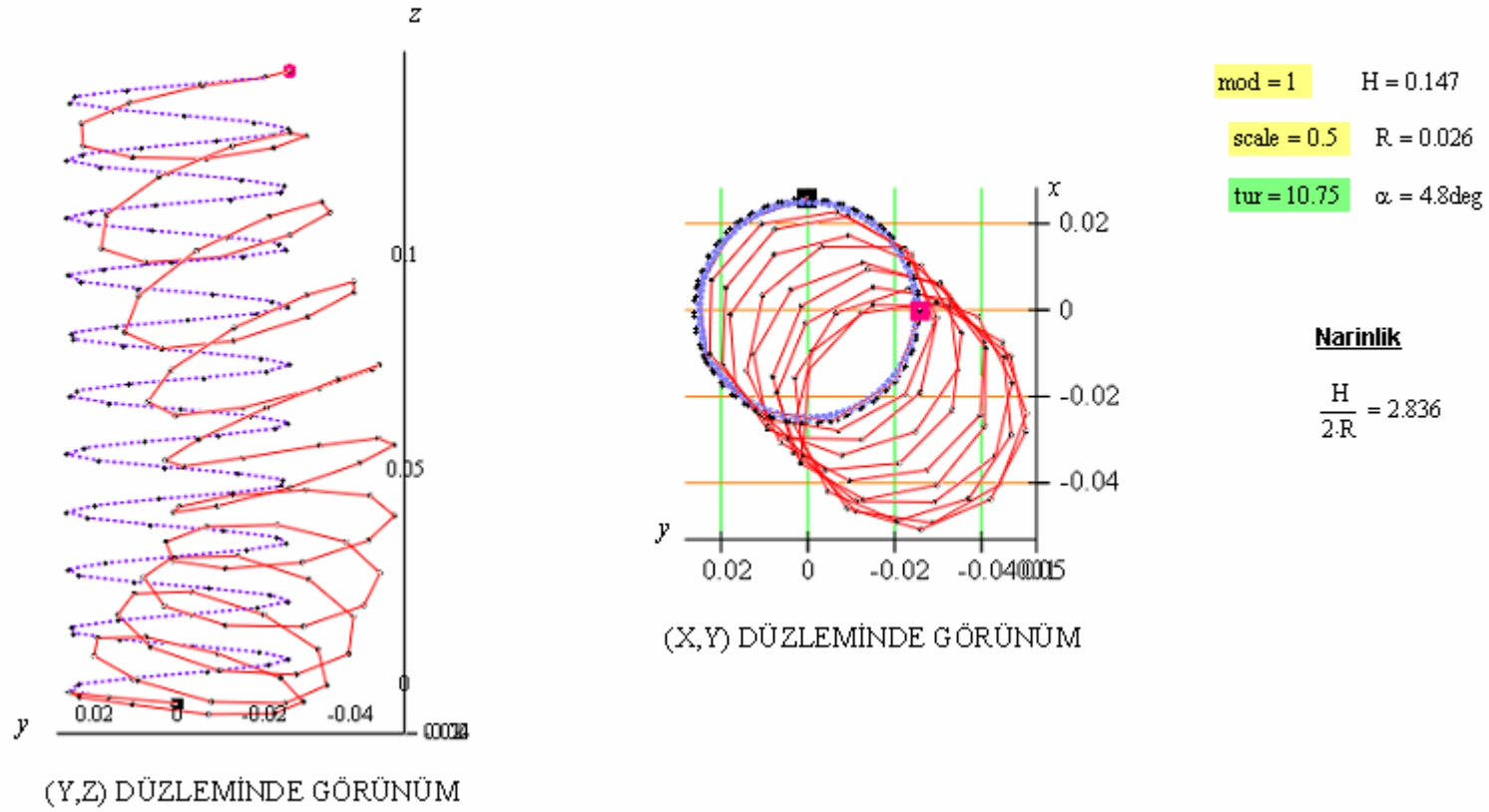
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK 5



Şekil E.11 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.869$)

EK-E

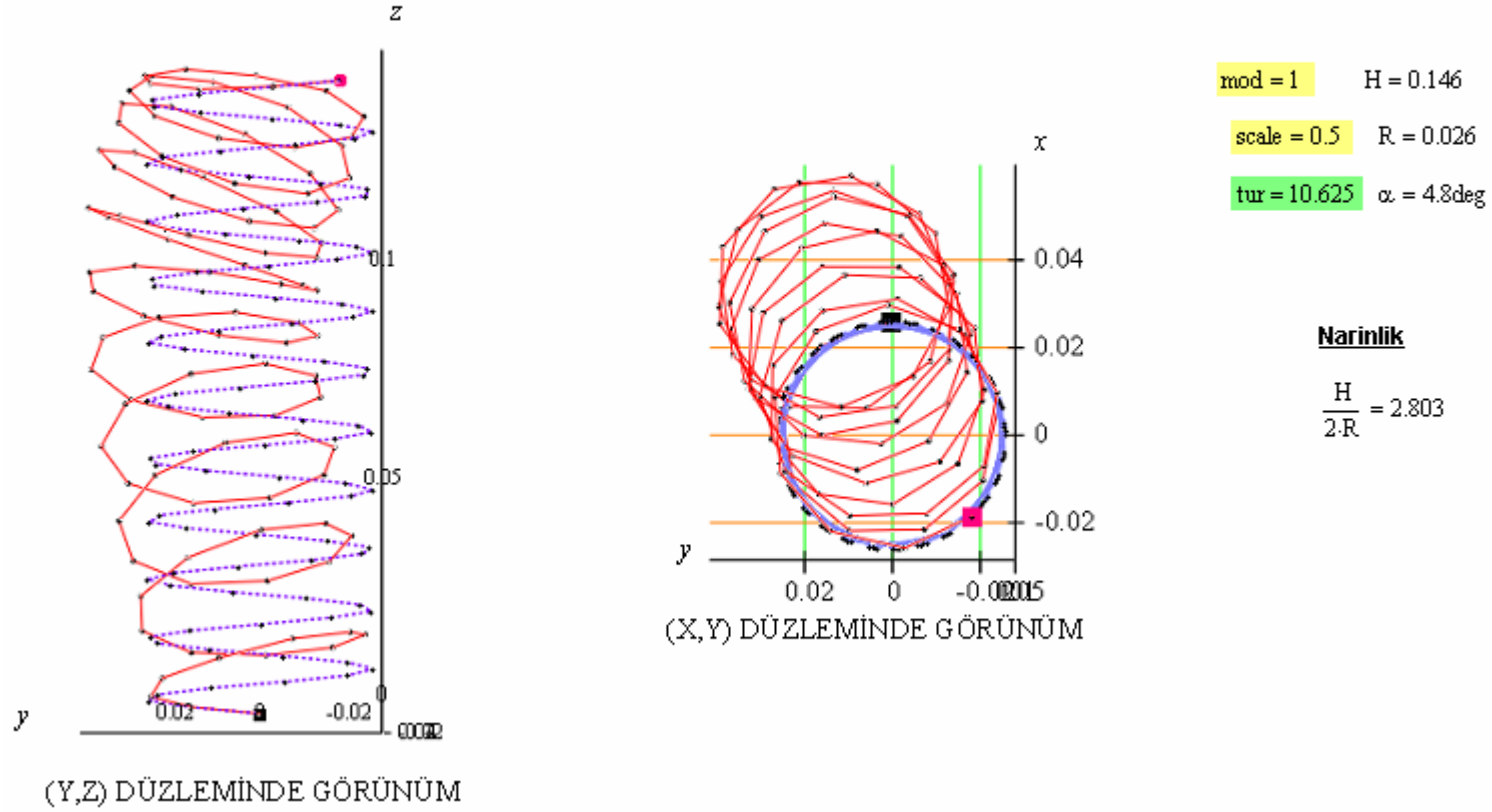
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil E.12 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.836$)

EK-E

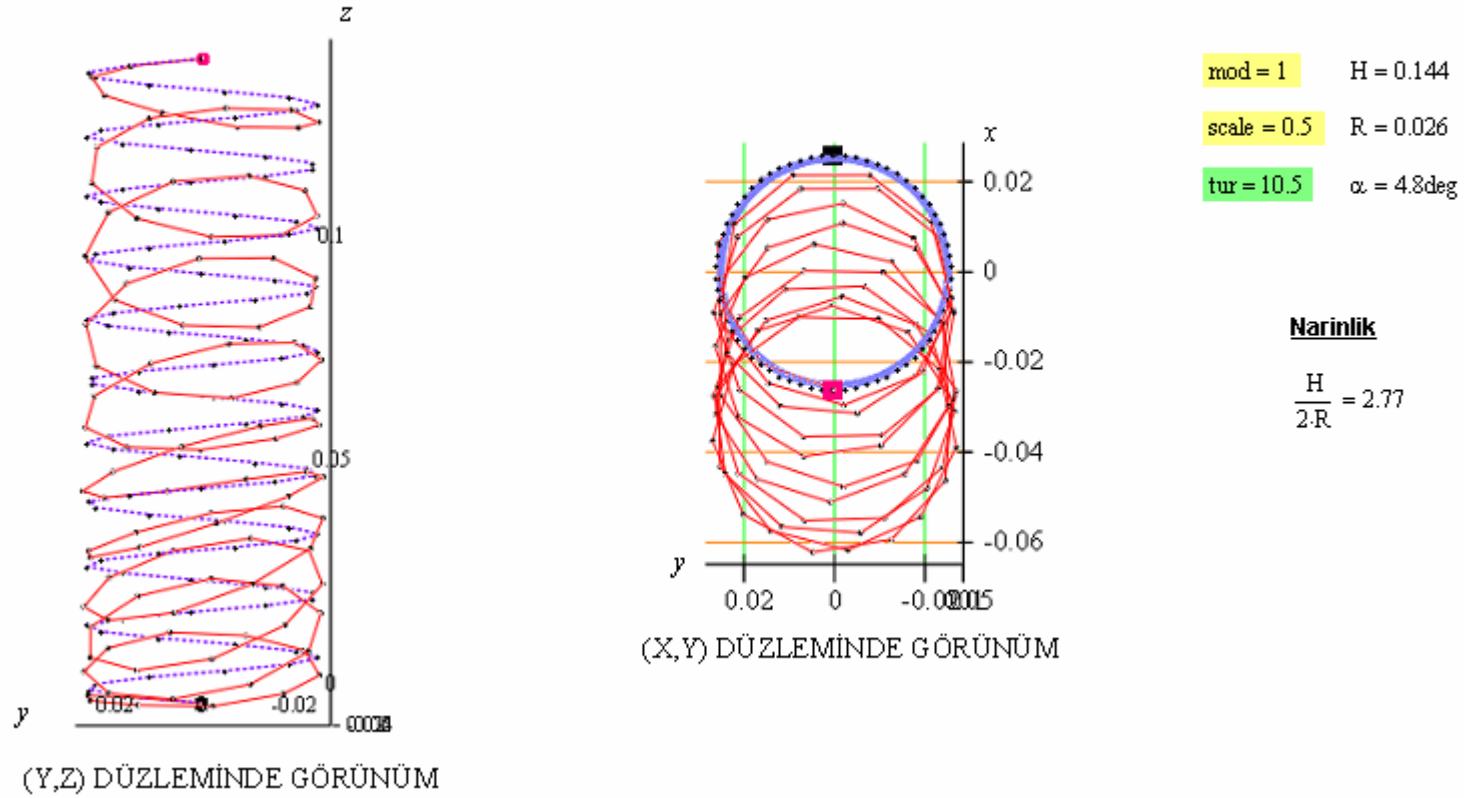
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil E.13 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.803$)

EK-E

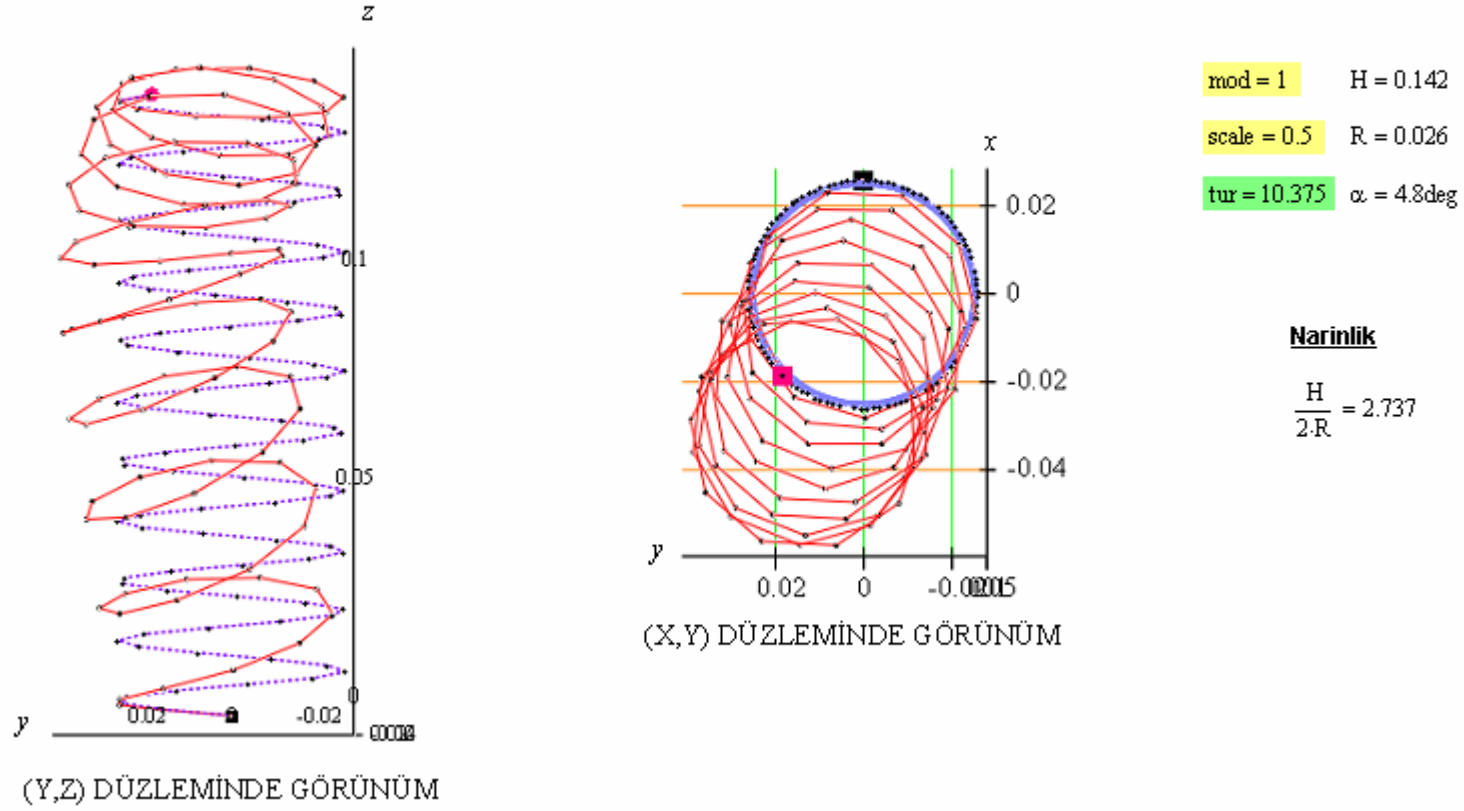
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil E.14 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.77$)

EK-E

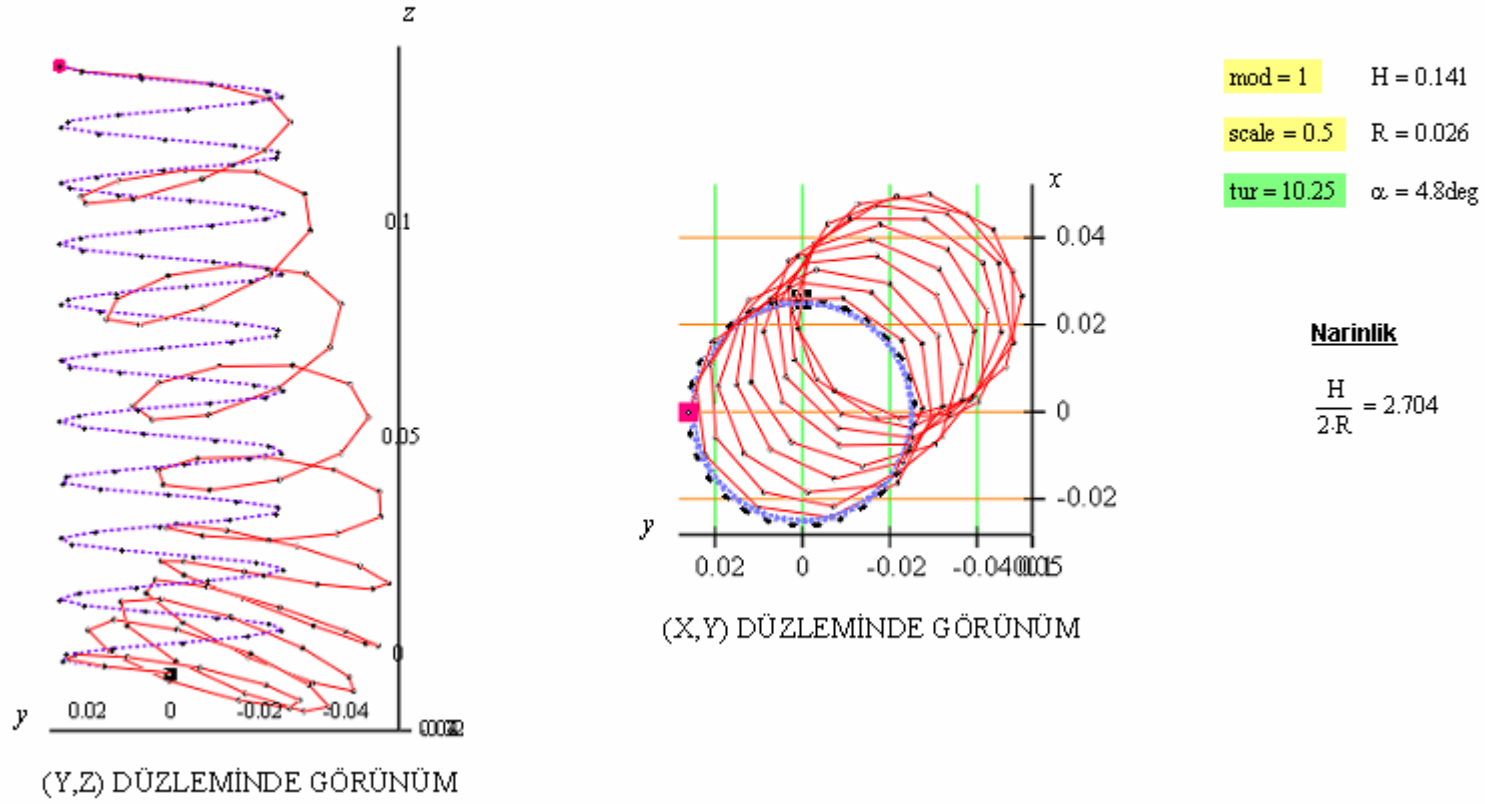
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK 5



Şekil E.15 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.737$)

EK-E

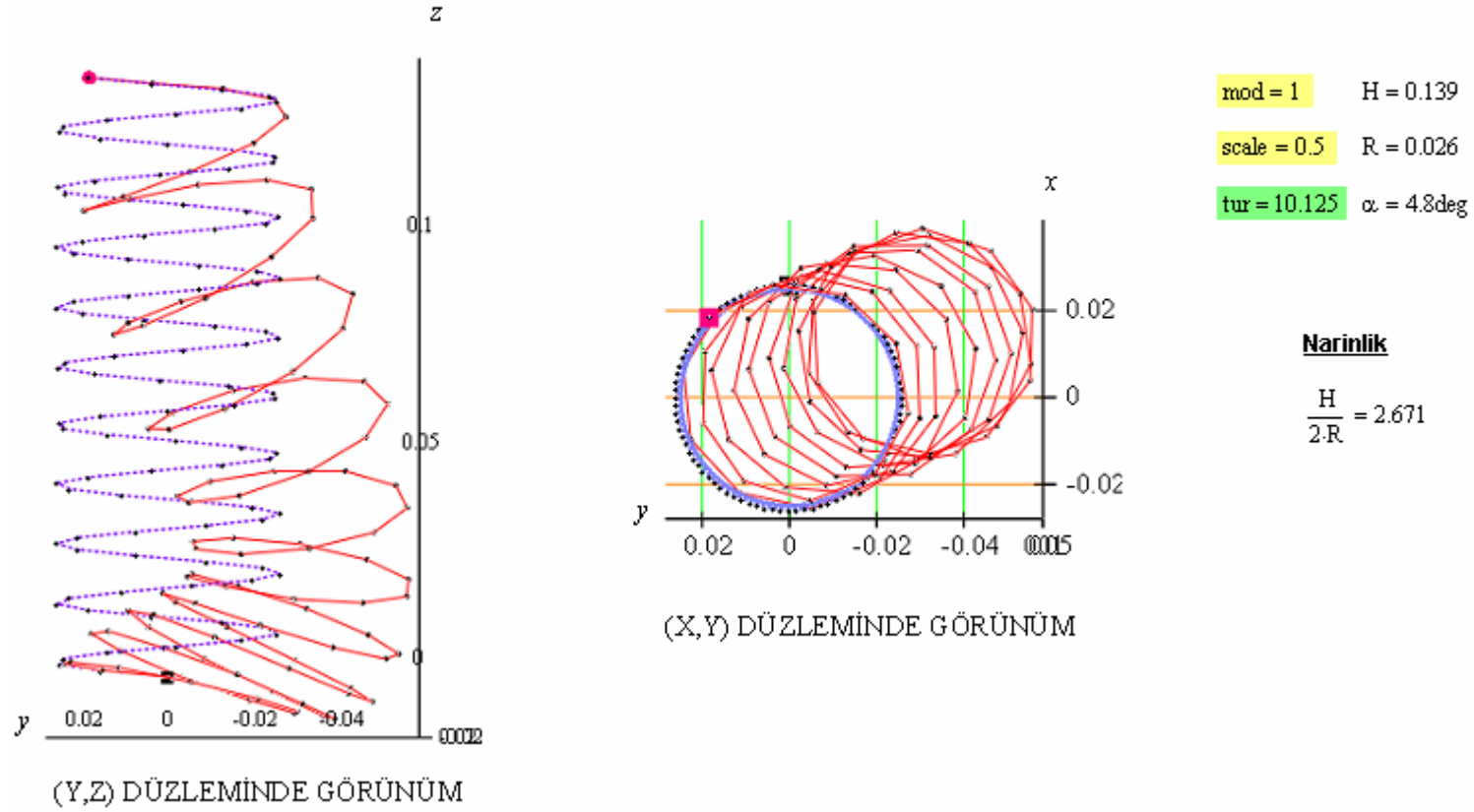
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK 5



Şekil E.16 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.704$)

EK-E

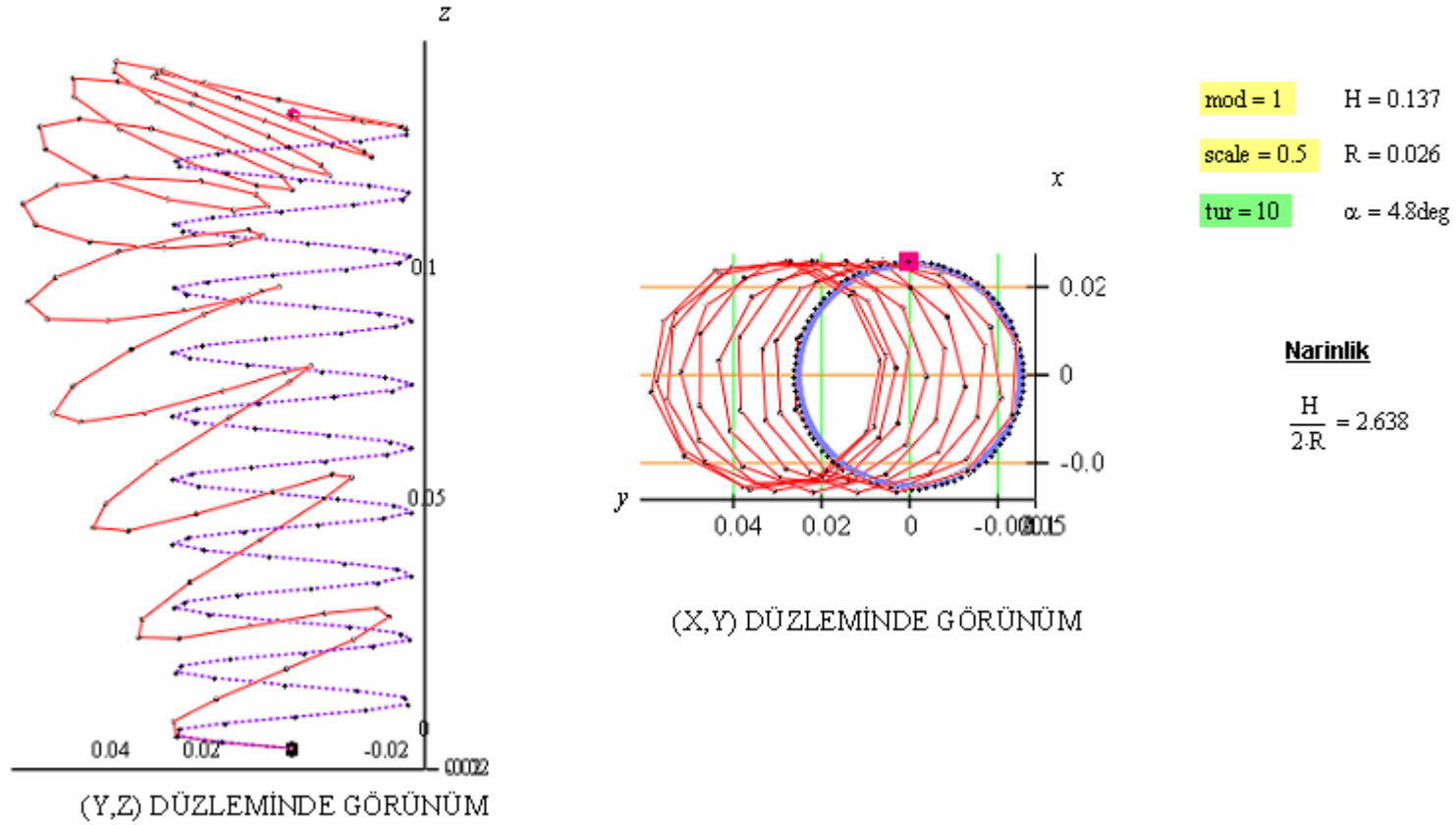
1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil E.17 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.671$)

EK-E

1. MOD ŞEKLİNİN NARİNLİK ($H/2R$) İLE DEĞİŞİMİ – ÖRNEK5



Şekil E.18 – Örnek 5’de 1. mod şeklinin başlangıç-bitiş noktası ile değişimi ($H/2R=2.638$)

ÖZGEÇMİŞ

Olca Olgun 1978 yılında Sinop'ta doğmuş olup ilk ve orta öğrenimini burada tamamlamıştır. 2001 yılında İstanbul Teknik Üniversitesinden İnşaat Mühendisi olarak mezun olmuştur. 2001 yılından itibaren URBAN İnşaat Sanayi ve Ticaret A.Ş.'de teklif mühendisi olarak çalışmaktadır.