

PARÇACIKLI YERÇEKİMİ AKIMININ MODELLENMESİ

Hale Aytaç ve Nalan Antar

İ.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, İstanbul

ÖZET

Yoğunlukları birbirinden farklı iki akışkandan birinin diğerinin içine yerçekimi akımının etkisiyle akması sonucu oluşan yerçekimi akımlarının meydana gelmektedir. Bunda doğal olaylar etkili olacağı gibi insan faktörü de rol oynamaktadır. Örneğin, yoğunluk farkı ya da ısı etkileri sonucu yerçekimi akımı meydana gelebilir. İçerisinde parçacık bulunan yerçekimi akımlarına örnek olarak ise volkanik patlamalar ve nehirlerle karışan fabrika atık suları verilebilir. Bu çalışmanın asıl amacı içerisinde parçacık bulunan yerçekimi akımının modellenmesidir. Bunun için öncelikle parçacıksız durum ele alınacak ve benzerlik çözümleri boyut analizi tekniği ile elde edilecektir. Daha sonra parçacıklı durum için model geliştirilecektir. Bu durumda benzerlik çözümleri boyut analizi ile bulunamadığından asimptotik yöntem yardımıyla yaklaşık çözümleri verecek denklemler elde edilecektir.

ABSTRACT

Gravity currents consists of the flow of one fluid within another by the effect of gravity while these fluids have different densities. They occur in many natural and man-made situations. For example, they may occur because of the density differences or thermal effects. Volcanic eruptions and industrial waste waters that get into the rivers may cause particle-driven gravity currents. The main aim in this work is to model the particle-driven gravity currents. First of all, it will be dealt with the non-particle case and similarity solutions will be found by using dimensional analysis. Then, the model will be developed for the particle-driven case. Since the similarity solutions of this problem cannot be determined with dimensional analysis, the equations which assumed to give the approximate solutions will be derived.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada ele almak istediğimiz problem içerisinde parçacık bulunan yerçekimi akımının modellenmesidir. Bunun için öncelikle parçacıksız durumdaki sabit hacimli yerçekimi akımı için bir model oluşturulacak ve problemin benzerlik çözümleri literatürde de yer aldığı gibi boyut analizi tekniği kullanılarak elde edilecektir. Burada benzerlik değişkeni

$\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ olarak alınmaktadır. Sonrasında ise parçacıklı durumda sabit hacimli yerçekimi akımı problemi için model geliştirilecektir. Parçacıklı durumda benzerlik çözümleri boyut analizi kullanılarak bulunamadığından benzerlik asimptotik yöntemle benzerlik çözümlerini yaklaşık olarak verecek denklemler elde edilecektir.

2. PARÇACIKSIZ YERÇEKİMİ AKIMLARI

2.1 Tek Tabakalı Sıg Su Denklemleri

Akışkanlar mekaniğinin en temel belirleyici denklemleri, kütlenin korunumu, momentumun korunumu ve enerjinin denkliği yasalarından gelmektedir. x konum vektörü ve t zaman değişkeni olmak üzere, $u(x, t)$ fonksiyonu akışkanın herhangi bir noktadaki hızını, $\rho(x, t)$ yoğunluğunu, $p(x, t)$ ise basıncını göstermektedir. $u(x, t)$, $\rho(x, t)$ ve $p(x, t)$ fonksiyonları diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. $G(x, t)$ fonksiyonu akışkanın birim kütlesine etki eden kuvveti göstermek üzere, G korunumlu bir kuvvet ise $G \equiv \nabla\varphi$ olacak şekilde bir φ potansiyel fonksiyonu vardır.

Akışkanlar mekaniğinin en temel denklemlerinden olan kütle korunum yasalarını temsil eden süreklilik denklemleri

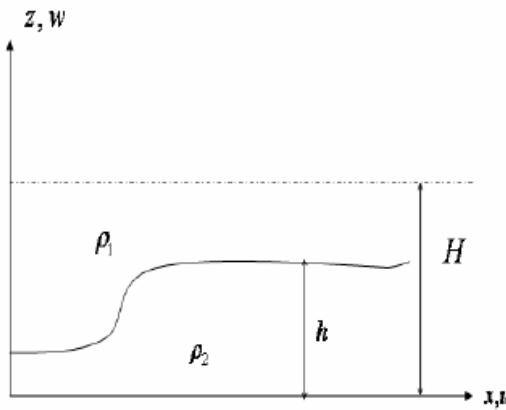
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

momentum korunum yasalarını temsil eden denklemler

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho\nabla\varphi + F(\mathbf{u}) \quad (2.2)$$

şeklinde. (2.2) denkleminde yer alan $F(\mathbf{u})$, akışkana etkiyen korunumsuz bir kuvveti temsil etmektedir. Bu çalışmada, $F(\mathbf{u}) \equiv 0$ olarak alınacaktır. Denklemlerde görülen $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla$ ifadesi maddesel türevidir.

Bu çalışmada, sabit hacimli ρ_1 yoğunluklu bir akışkanın içerisine $\rho_1 < \rho_2$ olacak şekilde ρ_2 yoğunluklu bir akışkan girişi yapıldığı ve akışkanların birbirine karışmadığı varsayılmıştır.



Şekil 1: Parçacıksız Tek Tabakalı Yerçekimi Akımı

Şekil 1’de, H toplam derinliği, h tabandaki akışkanın derinliğini, $u = (u, w)$ olmak üzere u akışkan hızının yatay bileşenini, w ise eksenel yöndeki bileşenini göstermektedir. Ayrıca, p_1 yüzeydeki basınç ve p_2 akışkanlar arasındaki basınç olmak üzere p toplam basıncı göstermek için kullanılacaktır.

Yüzeyde her yerde basınç aynı ve sabit olduğundan, akışkanın yüzeyi denge konumundadır. Yerçekimi akımlarında akışkanın birim kütesine etki eden kuvvet yerçekimidir; bu nedenle, $G \equiv (0, 0, -g)$ olarak alınmalıdır. $\Delta\rho$, iki akışkan arasındaki yoğunluk farkını göstermek üzere, $\frac{\Delta\rho}{\rho}g$ ifadesine indirgenmiş yerçekimi denir ve g' ile gösterilir. Ayrıca ele aldığımız model için her iki akışkan da sıkıştırılamaz kabul edildiğinden akışkan yoğunluğu her yerde sabittir.

Yerçekimi akımlarının incelenmesi sırasında, yapılan gözlemlere dayanarak hiperbolik sıg su denklemlerinden yararlanılmaktadır. Sıg su teorisinde; akışkanın derinliğinin uzunluğuna oran oldukça küçük kabul edilir. Bu yaklaşım, h_0 akışkanın derinliği, L akışkanın yatay uzunluğu olmak üzere $\delta = \frac{h_0}{L}$, $\delta \ll 1$ şeklinde ifade edilebilir. Elde edilen δ parametresi sıg su parametresi olarak isimlendirilir. Bu çalışmada da yerçekimi akımları tek tabakalı sıg su denklemleri yardımıyla incelenmektedir. Ayrıca, viskosite ve yüzeydeki gerilmeler ihmal edilmektedir. Bu durumda söz konusu yerçekimi akımının kütle korunumu denkleminde akışkanın sıkıştırılamaz olduğu kabulü kullanılırsa, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ olacağından, $\nabla \cdot u = 0$ elde edilir. Buradan,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

bulunur. (2.3) denklemi z 'ye göre integre edildiğinde hidrostatik yaklaşıma göre $u = u(x, t)$ olduğundan

$$w(x, z, t) = -z \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{w}(x, t) \quad (2.4)$$

elde edilir.

Akışkanın $z = h$ ’deki kinematik koşulu

$$w(x, h, t) = \frac{Dh}{Dt} \quad (2.5)$$

ve $z = 0$ ’daki kinematik koşulu

$$w(x, 0, t) = 0 \quad (2.6)$$

şeklindedir. (2.6) denklemi (2.4)’te yerine konursa,

$$\tilde{w}(x, t) = 0 \quad (2.7)$$

bulunur. (2.4) denkleminde $z = h$ alınır ve (2.5) denklemi kullanılırsa,

$$-h \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \cdot \nabla h \quad (2.8)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

denklemini elde edilir.

Momentum korunum denklemleri ise, $u = (u, w)$ olmak üzere

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p - \rho g \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \quad (2.11)$$

şeklindedir.

Yerçekimi akımlarında akışkanların yoğunluk farklarının küçük varsayıldığı Boussinesq yaklaşımına göre, yoğunluk farkını gösteren $\Delta \rho$ terimi yerçekimi ivmesi g ile çarpılana değin ihmal edilebilir. Şekil 1 ile gösterilen yerçekimi akımı için yüzeydeki basıncın her yerde aynı olduğunu belirtmiştik. Ayrıca ele alınan modelde akışkanlar arasında oluşan tabakadaki basıncı $p_2(x, z, t)$ ile gösterdiğimizde, hidrostatik yaklaşımı kullanarak

$$p_2(x, z, t) = -\rho_2 g z + \tilde{p}_2(x, t) \quad (2.12)$$

elde ederiz. Burada $\tilde{p}_2(x, t)$ dinamik basıncı göstermektedir. $z = h$ için, basıncın hidrostatik olması nedeniyle dinamik koşul $p_2 = p_1$ şeklinde olacağından

$$p_2(x, h, t) = -\rho_1 g h \quad (2.13)$$

olmak üzere $\tilde{p}_2(x, t)$ dinamik basıncı

$$-\rho_2 g h + \tilde{p}_2(x, t) = -\rho_1 g h \quad (2.14)$$

$$\tilde{p}_2(x, t) = (\rho_2 - \rho_1) g h \quad (2.15)$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $(\rho_2 - \rho_1)g$ ifadesi yerine $\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2} g \rho_2$ yazıldığı takdirde

$$\tilde{p}_2(x, t) = \rho_2 g' h \quad (2.16)$$

olur. Ayrıca basıncın hidrostatik olmasından ötürü, akışkan hızının yatay bileşeni u , z 'den bağımsız olup $u = u(x, t)$ şeklindedir. Bu durumda, momentum denklemi (2.12) ifadesi kullanılarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial x} \quad (2.17)$$

şeklinde yazılabilir ve (2.16) ifadesi kullanılarak (2.17) denkleminde

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g' \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.9) ve (2.18) denklemlerinden oluşan lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu denklem sistemi tek tabakalı sıg su denklemleri olarak isimlendirilir ve

$$\begin{aligned} u &= U \tilde{u}, & x &= L \tilde{x}, & z &= h_0 \tilde{z}, & h &= h_0 \tilde{h} \\ t &= \frac{L}{U} \tilde{t}, & p_i^* &= U^2 \rho_i \tilde{p}_i^*, & w &= \frac{U h_0}{L} \tilde{w}, & U^2 &= g' h_0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

boyutsuz değişkenleri kullanılarak boyutsuzlaştırılabilir. (2.9) ve (2.18) denklemlerinin boyutsuzlaştırılması sonucunda

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

denklemleri elde edilir.

Ele aldığımız problemde değişken bir akımın olmadığı varsayıldığından

$$u(0, t) = 0, \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2.22)$$

şeklinde gösterilen (2.22) sınır koşulu ele alınmıştır.

2.2 Boyut Analizi Yardımıyla Benzerlik Çözümleri

Bu bölümde amacımız, sabit hacimli yerçekimi akımlarının benzerlik çözümlerini boyut analizini kullanarak belirlemektir. Boyut analizi altında yapılan tüm çalışmalarda benzerlik değişkeni, δ sabit bir sayı olmak üzere, $\zeta = \frac{x}{bt^\delta}$ biçiminde ele alınmıştır. Bu şekilde, elimizdeki kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi adi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş olur. Boyut analizi tekniği boyutsal homojenlik kanununa dayanır. Boyutsal homojenlik kanununa göre fiziksel bir olayı ifade eden bir denklemde yer alan bütün terimlerin boyutu aynı olmalıdır. Boyut analizi tekniği ile, ele alınan sistemin benzerlik dönüşümleri elde edilir ve bu benzerlik dönüşümleri kullanılarak problemin benzerlik çözümleri araştırılır.

Bu bölümde benzerlik değişkeni, c bir sabit sayı olmak üzere $\zeta = \frac{x}{Kt^{1/c}}$ biçiminde alınarak tek tabakalı sığ su denklemlerinin benzerlik çözümleri ve değişken dönüşümü yapılarak tek tabakalı sığ su denklemlerinin değişmez denklemleri elde edilmiştir.

(2.20) ve (2.21) denklemleri için $0 < \lambda < \infty$ ve a, b, c boyutsuz sayılar olmak üzere $\tilde{u}(\zeta) = \lambda^a u(x, t)$, $\tilde{h}(\zeta) = \lambda^b h(x, t)$, $t' = \lambda^c t$, $x' = \lambda x$ şeklinde değişken dönüşümü yapıldığında (2.20) 'den,

$$\lambda^{-b+c} \frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial t'} + \lambda^{-a-b+1} \tilde{u}(\zeta) \frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial x'} + \lambda^{-a-b+1} \tilde{h}(\zeta) \frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial x'} = 0 \quad (2.23)$$

eşitliği elde edilir. (2.23) eşitliğinin sağlanabilmesi için boyutsal homojenlik kanununa göre, λ 'ların kuvvetleri birbirine eşit olmalıdır. Dolayısıyla b, c, a sabitleri için

$$-b + c = -a - b + 1 \quad (2.24)$$

$$a + c = 1 \quad (2.25)$$

bağıntıları elde edilir. Aynı şekilde (2.21)'den,

$$\lambda^{-a+c} \frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial t'} + \lambda^{-a-a+1} \tilde{u}(\zeta) \frac{\partial \tilde{u}(\zeta)}{\partial x'} + \lambda^{-b+1} \frac{\partial \tilde{h}(\zeta)}{\partial x'} = 0 \quad (2.26)$$

bulunur ve buradan

$$-a + c = -2a + 1 = -b + 1 \quad (2.27)$$

$$b + c - a = 1 \quad (2.28)$$

elde edilir. (2.25) ifadesi (2.28)'de yerine konduğunda ise

$$b = 2a \quad (2.29)$$

bulunur.

Uygulanan benzerlik dönüşümleri yardımıyla boyut analizinde alınan benzerlik değişkenlerinin genel formuna ulaşılabilmektedir. Benzerlik değişkenini $\zeta = \frac{x}{Kt^{1/c}}$ olarak alalım. Bu durumda $\tilde{u}(\zeta) = \lambda^a u(x, t)$, $\tilde{h}(\zeta) = \lambda^b h(x, t)$ ifadelerinden $u(x, t)$, $h(x, t)$ fonksiyonlarını yeni değişkenler cinsinden yazarsak

$$u(x, t) = t^{a/c} \tilde{u}\left(\frac{x}{Kt^{1/c}}\right), \quad h(x, t) = t^{b/c} \tilde{h}\left(\frac{x}{Kt^{1/c}}\right) \quad (2.30)$$

denklemlerini elde etmiş oluruz.

Sabit hacimli yerçekimi akımı problemini ele aldığımızdan, $x = 0$ 'da değişken bir akım kaynağının olmadığını varsayarak $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x}\big|_{x=0} = 0$ alabiliriz. Buna göre, $\lambda^a \tilde{u}(0) = 0$ alınabilir. $b = -1$ için (2.25) ve (2.29) eşitliklerinden faydalanarak $c = \frac{3}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$ bulunur ve (2.30)'dan

$$u(x, t) = t^{-1/3} \tilde{u}\left(\frac{x}{Kt^{2/3}}\right), \quad h(x, t) = t^{-2/3} \tilde{h}\left(\frac{x}{Kt^{2/3}}\right), \quad \zeta = \frac{x}{Kt^{2/3}} \quad (2.31)$$

elde edilir. $u(x, t)$ ve $h(x, t)$ 'nin x ve t 'ye göre kısmi türevleri kullanılarak (2.20) denkleminde

$$t^{-5/3} \left[-\frac{2}{3} \tilde{h}(\zeta) - \frac{2}{3} \frac{x}{K} t^{-2/3} \tilde{h}'(\zeta) + \frac{1}{K} \tilde{h}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + \frac{1}{K} \tilde{u}(\zeta) \tilde{h}'(\zeta) \right] = 0 \quad (2.32)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{d}{d\zeta} (\zeta \tilde{h}(\zeta)) + \frac{1}{K} \frac{d}{d\zeta} (\tilde{u}(\zeta) \tilde{h}(\zeta)) = 0 \quad (2.33)$$

elde edilir ve (2.33) denklemi, (2.22) sınır koşulu altında incelendiği takdirde

$$\tilde{u}(\zeta) = \frac{2}{3} K \zeta \quad (2.34)$$

bulunur. Benzer şekilde (2.21) denklemi

$$t^{-4/3} \left[-\frac{1}{3} \tilde{u}(\zeta) - \frac{2}{3} \frac{x}{K} t^{-2/3} \tilde{u}'(\zeta) + \frac{1}{K} \tilde{u}(\zeta) \tilde{u}'(\zeta) + \frac{1}{K} \tilde{h}'(\zeta) \right] = 0 \quad (2.35)$$

şeklinde bulunur ve (2.22) sınır koşulu altında

$$\tilde{h}(\zeta) = \frac{1}{9}K^2\zeta^2 + C \quad (2.36)$$

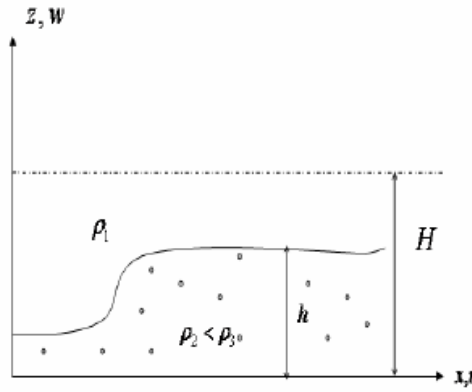
elde edilir. Böylece (2.20), (2.21) denklemlerinden oluşan denklem sisteminin (2.22) sınır koşulunu sağlayan (2.34) ve (2.36) şeklinde benzerlik çözümleri elde edilmiş olur.

3. PARÇACIKLI YERÇEKİMİ AKIMLARI

3.1 Tek Tabakalı Sıg Su Denklemleri

Bu bölümde, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ olmak üzere, ρ_3 yoğunluklu parçacıklar ve ρ_2 yoğunluklu akışkandan oluşan iyi karışmış süspansiyonun, ρ_1 yoğunluklu akışan içerisine nüfuz etmesiyle oluşan akımın modellenmesi üzerinde duracağız. Burada süspansiyonun yoğunluğu ρ ile gösterilecektir. $\mathbf{u} = (u, w)$, akışkanın kartezyen koordinatlardaki hızını; $\mathbf{x} = (x, z)$, konum vektörünü göstermektedir.

Akışkan hareketi, süspansiyonun yoğunluğu ρ ile çevreleyen akışkanın yoğunluğu ρ_1 arasındaki farktan kaynaklanmaktadır.



Şekil 2: Parçacıklı Tek Tabakalı Yerçekimi Akımı

φ , karışımındaki parçacık hacminin süspansiyon hacmine oranını göstermek üzere $\varphi = \varphi(x, z, t)$ şeklindedir ve buna bağlı olarak süspansiyonun yoğunluğu

$$\rho(\varphi) = \rho_3\varphi + (1 - \varphi)\rho_2, \quad (3.1)$$

şeklinde bulunur. Süspansiyonun çok seyrek olduğunu kabul edersek, $0 < \varphi \ll 1$ olarak almamız gerekir.

Bu çalışma çerçevesinde eylemsizlik kuvvetlerinin vizkosite kuvvetlerine oranını gösteren Reynolds sayısı, vizkoziteyi ihmal edebilecek ölçüde büyük alınmaktadır. Buna bağlı olarak, akışkanın hareketi yerçekimi kuvveti ve kaldırma kuvvetleri arasındaki etkileşimden kaynaklanmaktadır.

Çevreleyen akışkan için toplam basınç, p_1^* dinamik basınç alanını göstermek üzere,

$$p_1 = -\rho_1 g z + p_1^* \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Modelimizde ele aldığımız, içerisinde parçacık bulunan akışkan için momentum denklemleri,

$$\rho_2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p_2^*}{\partial x}, \quad (3.3)$$

$$\rho_2 \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p_2^*}{\partial z} - \varphi g (\rho_3 - \rho_2), \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki toplam basınç ise

$$p_2 = \rho_1 g H - \rho_2 g z + p_2^* \quad (3.5)$$

şeklindedir ve p_2^* yine dinamik basınç alanını göstermektedir.

Tabakada yer alan parçacıkların korunumunu ifade etmek üzere bir denkleme ihtiyaç duymaktayız. Genel olarak parçacık korunum denklemi şu şekildedir [5, 6]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{h(x,t)} \varphi(x, z, t) dz \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h(x,t)} \varphi(x, z, t) u(x, z, t) dz \right) + \varphi(x, 0, t) \beta = 0 \quad (3.6)$$

Ele aldığımız problemde, hidrostatik denge kabulüne bağlı olarak alan değişkenleri u, h, φ z 'den bağımsızdır. Bu durumda parçacık korunum denklemi şu şekilde olacaktır:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi h) + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi u h) + \beta \varphi = 0 \quad (3.7)$$

Denklemi açacak olursak,

$$\varphi \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u h) \right) + h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \beta \varphi = 0 \quad (3.8)$$

elde ederiz. Süreklilik denkleminde faydalananarak, $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u h) = 0$ olduğundan

$$h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \beta \varphi = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\beta \varphi}{h} = 0 \quad (3.10)$$

bulunur. Bu denklemlerde, β belirli bir parçacık için etkili olan çökme hızını göstermektedir ve $\beta \ll 1$ alınmaktadır. Buna göre, parçacıkların akımı $-\beta \varphi$ akısıyla terk ettiğini kabul etmekteyiz. Bu kabulün geçerli olabilmesi için, parçacık konsantrasyonunun küçük sayıldığını göz önünde bulundurmamız gerekir.

3.2 Asimptotik Yaklaşım

$\zeta = \frac{x}{Kt^{2/3}}$ benzerlik değişkenini kullanacak olursak, yönetici denklemlerimiz

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial h}{\partial \zeta} + K^{-1}t^{-2/3}h\frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + K^{-1}t^{-2/3}\frac{\partial h}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\beta \varphi}{h} = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde bulunur.

Hogg ve diğerlerinde olduğu gibi [6] $\tau = \beta K^{-2}t^{\frac{5}{3}}$ parametresine göre asimptotik açılım uygulayalım. Parametrenin bu şekilde alınmasının sebebi β 'ya göre yapılan açılımda β 'nın $K^{-2}t^{5/3}$ teriminden ayrı bulunmamasıdır.

$$u = \frac{2}{3}Kt^{-1/3}[u_0 + \tau u_1 + \dots] \quad (3.14)$$

$$h = \frac{4}{9}K^2t^{-2/3}[h_0 + \tau h_1 + \dots] \quad (3.15)$$

$$\varphi = 1 + \tau \varphi_1 + \dots \quad (3.16)$$

Burada u_0 ve h_0 , (2.34) ve (2.36) ile verilen çözümlerdir. (3.17), (3.18) ve (3.19) ifadelerini (3.14), (3.15) ve (3.16) yönetici denklemlerinde yerine yazarsak ve τ 'un kuvvetlerine göre denklemleri ayıracak olursak,

$O(\tau^0)$ mertebesinde denklemler:

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u_0 - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial h_0}{\partial \zeta} + K^{-1}t^{-2/3}h_0\frac{\partial u_0}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u_0 - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + K^{-1}t^{-2/3}\frac{\partial h_0}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.18)$$

$$\beta = 0 \quad (3.19)$$

$O(\tau)$ mertebesinde denklemler ise:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u_0 - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial h_1}{\partial \zeta} + K^{-1}t^{-2/3}[h_1\frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_0u_1)] = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u_0 - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + K^{-1}t^{-2/3}(u_1\frac{\partial u_0}{\partial \zeta} + \frac{\partial h_1}{\partial \zeta}) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + (K^{-1}t^{-2/3}u_0 - \frac{2}{3}t^{-1}\zeta)\frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} + \frac{\beta \varphi_1}{h_0} = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde elde edilir.

$O(\tau^0)$ mertebesinde denklemlerin çözümü:

h_0 ve u_0 ifadelerinin yerine (2.31), (2.34) ve (2.36) ile verilen benzerlik çözümleri yazıldığı takdirde denklemlerin sağlandığı görülmüştür.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada parçacıksız yerçekimi akımı için model oluşturulduktan sonra boyut analizi tekniğiyle benzerlik çözümleri elde edilmiştir. Daha sonra içerisinde parçacık bulunan yerçekimi akımı için model geliştirilmiştir. Parçacıklı durumda benzerlik çözümleri boyut analizi yardımıyla bulunamayacağından asimptotik yöntem kullanılarak yaklaşık çözüm verecek denklemler elde edilmiştir. Bundan sonra yapılacak olan bu denklemlerden u_1, h_1 ve φ_1 bilinmeyenlerini bulmak ve bu çözümleri sayısal olarak bulunacak sonuçlarla karşılaştırmaktır. Bu çalışmada basınç, hidrostatik basınç olarak ele alınmış ve yönetici denklemler z 'den bağımsız olarak elde edilmiştir. Basıncın hidrostatik olmaması durumunda yönetici denklemler z 'ye bağımlı olacaktır. Bundan sonra hidrostatik olmayan basınç fonksiyonu için yönetici denklemler elde edilecek ve bu denklemlerin benzerlik çözümleri bulunmaya çalışılacaktır.

5. KAYNAKLAR

- [1] Simpson, J.E., "Gravity currents: in the environment and laboratory" Cambridge University, 1975.
- [2] Şuhubi E.S., Akışkanlar mekaniği, İTÜ Yayınları, 1993.
- [3] Langhaar, H.L., Dimensional Analysis and Theory of Models, John Wiley and Sons, 1951.
- [4] Moodie, T.B., "Gravity currents" Journal of Computational and Applied Mathematics 144 (1-2), 2002.
- [5] Moodie, T.B., Pascal, J.P, Bowman, J.C., "Modelling Sediment Deposition Patterns Arising From Suddenly Released Fixed-Volume Turbulent Suspensions" Studies in Applied Mathematics 105(4) 333-359, 2000.
- [6] Hogg, A.J., Ungarish, M., Huppert, H.E., "Particle-driven gravity currents: asymptotic and box model solutions" European Journal of Mechanics B-Fluids 19 139-165, 2000.
- [7] Gratton, J. and Vigo, C., "Self-similar gravity currents with variable inflow revisited: plane currents" Journal of Fluid Mechanics 258 77-104, 1994.
- [8] Bonnecaze, R.T., Huppert, H.E., Lister, J.R., "Particle-driven gravity currents" J. Fluid Mech. 250 339-369, 1993.
- [9] Glaister, P., "Similarity solutions of the shallow-water equations" Journal of Hydraulic Research 29 107-116, 1991