

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * NÜKLEER ENERJİ ENSTİTÜSÜ

83063

**SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE
EK AKI HESABI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Özer GÜLCE**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Ocak 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 01 Şubat 1999**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Atilla ÖZGENER

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Melih GEÇKİNLİ (İTÜ)

Doç.Dr. Akif ATALAY (İTÜ)

**TC. YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ŞUBAT 1999

ÖNSÖZ

Enstitümdeki öğrenim ve tez çalışmalarımız süresince öğrencileri olmaktan gurur duyduğum, her zaman ve her koşulda benden yardımlarını, engin ve sıcak ilgilerini, yol göstericiliklerini esirgemeyen, inanılmaz sabırları, üstün bilgi ve becerileri ile bana öğrenim sürecimde ve tez çalışmamda destek olan ve benimle bilgiyi paylaşan danışman öğretmenim **Prof.Dr. Atilla ÖZGENER** ve **Doç.Dr. Bilge ÖZGENER** ' e teşekkür ve minnettarlığımı, en içten sevgi ve saygılarımla arz ederim.

Değerli katkıları için **Prof.Dr. Melih GEÇKİNLİ** ve **Doç.Dr. Akif ATALAY** 'a teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca benden sevgilerini, desteklerini, bilgilerini, özverilerini esirgemeyen ve ilk öğretmenlerim olan aileme; babam **Arif GÜLCE** 'ye, annem **Emine Yurdanur GÜLCE** 'ye, abim **Tamer GÜLCE** 'ye, yengem **Nazan Güven GÜLCE** 'ye ve yine ailem kadar bana yakın olan **ERDEM, ŞUMNULU, TAŞDELEN** ve **TAŞKENT** ailelerine sonsuz teşekkürlerimi saygılarımla arz ederim.

Değerli enstitümüzün değerleri öğretmenlerine ve değerli çalışanlarına güzel Cumhuriyet'imizin 75 inci şeref yılında en içten sevgi ve saygılarımla ...

12 , 1998

Özer GÜLCE

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	IV
TABLO LİSTESİ	V
ŞEKİL LİSTESİ	VI
SEMBOL LİSTESİ	VII
ÖZET	VIII
SUMMARY	X
1. GİRİŞ	13
2. TEORİ	16
2.1. EK-AKI KAVRAMI	16
2.1.1. Çok Gruplu Difüzyon Teorisi Yetkinlik Hesapları	16
2.1.2. Çok Gruplu Difüzyon Teorisinde Ek Operatörler	17
2.1.3. Çok Gruplu Pertürbasyon Teorisi Yaklaşımı	19
2.1.4. Noktasal Pertürbasyon Kavramı ve Ek Akının Fiziksel Yorumu	21
2.1.5. Fisyon Kaynağı İterasyonunda Grup İçi Denklemler	23
2.2. SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİ	24
2.2.1. Ağırlaştırılmış Kalıntılar İlkesi	24
2.2.2. Sonsuz Silindirik Geometride Galerkin Türü Sonlu Elemanlar Yaklaşımı	27
2.2.3. Kaynak Vektörü Hesabı	34
3. UYGULAMALAR	37
3.1. ANALİTİK ÇÖZÜMÜ BULUNAN PROBLEMLER ARACILIĞI İLE SINAMA	37
3.1.1. Çıplak , Homojen Reaktörün Tek Gruplu Difüzyon Teorisi Analizi	37
3.1.2. Çıplak , Homojen Reaktörün İki Gruplu Akı ve Ek Akı Dağılımlarının İrdelenmesi	39
3.1.3. Yansıtıcı Reaktörün İki Gruplu Teori Analizi , Ek Akı ve Akı Dağılımları	42
3.2. İ T Ü TRIGA MARK - II REAKTÖRÜ EK-AKI HESABI	49
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	54
KAYNAKLAR	56
EKLER	58
ÖZGEÇMİŞ	59

KISALTMALAR

D_i : i 'inci enerji grubuna ait difüzyon katsayısı.

k : Nükleer sistemin çoğaltma katsayısı .

k_i : Çoğaltma katsayısının i inci iterasyondaki değeri.

L : Nötron transport operatörü.

$\underline{A}^+$: Bir A matrisinin “ek” matrisi .

$\underline{A}^T$: Bir A matrisinin transpozesi.

A' : A büyüklüğünün pertürbasyon tatbikinden sonra aldığı değer.

S : Nötron kaynağı şiddeti.

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 Deneme Fonksiyonları	30
Tablo 3.1 Triga Hızlı Grup Homojenleştirilmiş Halka Tesir Kesitleri	51
Tablo 3.2 Triga Termal Grup Homojenleştirilmiş Halka Tesir Kesitleri ...	51
Tablo 3.3 75_YIL ve CEBIS Halka Ortalama Hızlı Akı ve Ek-Akı Karşılaştırması	52
Tablo 3.4 75_YIL ve CEBIS Halka Ortalama Termal Akı ve Ek-Akı Karşılaştırması	53



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Genel Sistem	25
Şekil 2.2 Silindirik Sistem	27
Şekil 2.3 Sistemin Sonlu I Elemana Bölünmesi	28
Şekil 3.1 Çıplak Homojen Reaktörde Tek Gruplu Ek-Akı Dağılımı	40
Şekil 3.2 Çıplak Homojen Reaktörde Hızlı Grup Akı ve Ek-Akı Dağılımı	42
Şekil 3.3 Çıplak Homojen Reaktörde Termal Grup Akı ve Ek-Akı Dağılımı	43
Şekil 3.4 Yansıtıcılı Reaktörde Hızlı-Termal Grup Akı ve Ek-akı Dağılımları	49
Şekil 3.5 İ T Ü Triga Mark - II Reaktörü Kalp Düzeni	50
Şekil 3.6 İ T Ü Triga Mark - II Reaktörü Hızlı ve Termal Akı Dağılımı	53
Şekil 3.7 İ T Ü Triga Mark - II Reaktörü Hızlı ve Termal Ek-Akı Dağılımı	54

SEMBOLLER

ρ	: Reaktivite
$\Delta\rho$	: Reaktivitedeki değişim.
δ	: Pertürbasyon miktarını gösteren ön takı.
Σ_a	: Makroskobik yutma etkin kesiti.
$\Sigma_{a,2}$	: Termal makroskobik yutma etkin kesiti.
Σ_f	: Makroskopik fisyon etkin kesiti.
$\Sigma_{f,1}$	: Makroskopik hızlı fisyon etkin kesiti.
$\Sigma_{f,2}$	: Makroskopik termal fisyon etkin kesiti.
$\Sigma_{s,2\leftarrow 1}$	: Nötronların hızlı gruptan termal gruba saçılma makroskopik etkin kesiti.
$\Sigma_{r,g}$	: g inci grup çıkartma makroskopik tesir kesiti.
ϕ_i	: Nötron akısı (i = 1 hızlı , i = 2 termal)
$\bar{\phi}_i$	: Ortalama nötron akısı (i = 1 hızlı , i = 2 termal)
ϕ_i^+	: Nötron ek akısı (i = 1 hızlı , i = 2 termal)
ν_i	: Bir fisyonndan çıkan nötron sayısı (i = 1 hızlı , i = 2 termal)
χ_g	: Bir fisyon nötronunun g nci grup enerji aralığında doğma olasılığı.
$< >$	: İç çarpım
$\underline{\underline{F}}$	: f vektörlerinden oluşan bir uzay üzerinde iş gören matrisyel operatör.
$\underline{\underline{F}}^+$	: g ⁺ vektörlerinden oluşan bir uzay üzerinde iş gören matrisyel operatör.

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE EK AKI HESABI ÖZET

Sonlu elemanlar yöntemi matematiksel fizikteki kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir yöntemdir. Bu yöntem ısı transferi, akışkan mekaniği ve radyasyon iletimi hesaplamalarında kullanılmıştır. Diferansiyel denklem kendine ek olduğunda sonlu elemanlar yöntemi bu denklemin direkt çözümü yerine fonksiyonelinin minimumunu veren fonksiyonun aranmasını temel almaktadır. Bu yöntem, sonlu elemanlar yönteminin temel aldığı yegane yöntem değildir. Ağırlaştırılmış kalıntılar tekniği kullanılarak, **Galerkin** türü bir sonlu elemanlar formülasyonu oluşturulabilir. İkinci yaklaşım, fonksiyoneli ortadan kaldırmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi kendine ek özelliği olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi fizik ve mühendisliğin değişik alanlarında karşımıza çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Gerilme analizi, ısı transferi, akışkanlar mekaniği, nötron difüzyonu ve transportu yukarıda bahsedilen alanlardan bazıları için örnek teşkil edebilir. Diferansiyel denklem kendine ek olduğunda, sonlu elemanlar yönteminin uygulanması sonucu ortaya çıkan lineer sistemdeki katsayılar matrisi simetrik ve pozitif kesin bir yapı arzeder. Ortaya çıkan lineer sistem direkt veya iteratif yöntemlerle çözülebilir. Yüksek dereceli polinomsal temel fonksiyonların sonlu elemanlar yönteminde kullanılabilmesi, daha yüksek yakınsama derecelerinin elde edilebilir olmasını sağlamaktadır ve sayısal çözümler çoğu zaman bir çok durumda alternatif yöntemlere nazaran daha üstündür. (Ör. Sonlu farklar yöntemi). İzoparametrik sonlu eleman olgusu, eğrisel kenarların söz konusu olmasını ve sonlu elemanlar yöntemi kullanılması ile de geometrik karmaşıklığın engel teşkil etmesini sona erdirmiştir.

Sonlu eleman olgusunun nötron difüzyon ve transportu çözümlerinde kullanılması 1970'lere uzanmaktadır. Nötron transport ve difüzyon denklemlerinde hem varyasyonel çözümler hem de Galerkin türü sonlu elemanlar formülasyonu kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile etkin çoğaltma katsayısı ve akı dağılımlarını hesaplamak ve belirlemek etkin bir biçimde başarılabilmektedir. Sonlu eleman yöntemi detaylı akı dağılımlarının hem düzenli hem düzensiz geometrilerde hesaplayabilen etkin ve değerli bir yöntem olduğunu ispatlamıştır. Nötron difüzyon hesaplamaları sadece akı dağılımlarının hesaplanması için değil aynı zamanda ek akı dağılımlarının hesaplamaları için de yürütülmektedir. Fakat sonlu eleman nötron difüzyon formülasyonlarının büyük bir kısmı nötron akı dağılımlarına yönelmiştir ve ek akı hesaplama özellikleri genelde geliştirilmemiştir.

T.C. KURULU
DOKÜMAN YAKIN KİTAPHAZİ

Bu çalışmada çok gruplu nötron difüzyon teorisi çerçevesinde çalışılması tercih edilmiş ve hem akı hem de ek akı hesabı yapabilen, etkin çoğaltma katsayısını hesaplayan bir sonlu elemanlar programı geliştirilmiştir.

Sıfır akı boşluk sınır koşulu altında klasik varyasyonel yöntemlerden hareket edilemeyeceği üzere ağırlaştırılmış kalıntılar ilkesine dayanan sıfır akı ve ek akı sınır koşullarını sağlayan Galerkin türü sonlu eleman formülasyonu tercih edilmiştir. Bu sınır koşullarının kullanılması akı ve ek akının pertürbasyon teorisi hesaplamalarında belirlenebilmesi için gereklidir.

Reaktör teorisindeki ilk araştırmacıların çoğunun nükleer fizik alt yapısına sahip olmaları yaygın olarak kullandıkları bazı yöntemleri reaktör fiziğine taşımalarına sebep olmuştur. Bu yöntemlerden en yaygın olanı pertürbasyon teorisidir. Pertürbasyon teorisi nötron transport veya difüzyonuna uygulandığında ek akı ek difüzyon ve transport denklemlerinin öz-fonksiyonu olarak gözükmektedir. Bu söylemde ek akı matematiksel bir soyut kavram olarak gözükmektedir. Fakat ek akı üzerine yapılan daha sonraki çalışmalar göstermiştir ki ek akının nötron önemi olarak tanımlanabilecek bir fiziksel yorumu vardır. Bu ek akının nötronun kinetik enerjisinin nükleer sistemdeki reaktivite ile ilişkisini gösterdiğini belirtmektedir. Ek akının yüksek olduğu yerlerin reaktiviteye etkileri daha çoktur. Bu da reaktör analizlerinde ek akı hesabının önemini ortaya koymaktadır.

Bu çalışmada çok gruplu difüzyon teorisinde kritikalite ve öz-değer hesaplamaları yapabilen bir program geliştirilmiştir. Geometri tek boyutlu silindrisel geometri ile sınırlandırılmış ve Galerkin türü sonlu eleman yöntemi programın teorik temelini teşkil etmektedir. Lagrange türü dördüncü dereceye kadar polinomlar formülasyon ve programda kullanılmıştır. İsmi 75_YIL olan program (Bu isim programa Türkiye Cumhuriyeti 'nin 75 nci kuruluş yılı anısına verilmiştir.) FORTRAN dilinde yazılmış ve LINUX işletim sisteminde derlenmiş ve koşulmuştur. Bu tezin oluşturulmasında gösterilen çalışmaların başlangıcı bu program için olmuştur. Bu amaçla analitik çözümleri bilinen problemler koşulmuştur. Sayısal ve analitik çalışmaların sonuçlarının birbirinden ayırlamadığı görülmüştür. Analitik çözümlü bu problemler tezin değerlendirme kısmını oluşturmaktadır.

Bu tezin amacı çok gruplu nötron difüzyon denklemlerini çözebilen, ek akı dağılımı yanında etkin çoğaltma katsayısı ve nötron akı dağılımlarını da belirleyebilen bir sonlu eleman programı geliştirmek olmuştur. Bu amacın başarıldığı koşulan örnek problemlerden de görülmüştür. 75_YIL programı akı ve ek akı dağılımlarını belirleyebilmekte ve gelecekteki pertürbasyon teorisi uygulamaları için uygun bir temel teşkil etmektedir.

ADJOINT FLUX CALCULATION BY USING FINITE ELEMENT METHOD SUMMARY

The finite element method is an efficient numerical technique for the solution of partial differential equations of mathematical physics. The method has been used in various disciplines including heat transfer, fluid mechanics, stress analysis and radiation transport. When the governing differential equation is self-adjoint, the finite element method is based on the minimization of a certain functional, instead of the direct solution of the differential equation. But the functional method is not the only technique on which the finite element formulation could be based.

Weighted - residual techniques could also be utilised and a **Galerkin** type finite element development could be constructed. The latter approach enables the utilization of the element method in solution of partial differential equations which lack self-adjointness. The finite element method have been used in solution of partial differential equations which lack self-adjointness. The finite element method has been used in solution of partial differential equations in various areas of physics and engineering. Stress analysis, heat transfer, fluid mechanics, radiation transport are some of the branches that could be cited in that context. When the governing differential equation is self-adjoint, the coefficient matrix resulting from finite element discretization is positive-definite and possesses a symmetric - banded structure.

Consequently, the resulting linear systems could be solved most efficiently by direct or iterative methods. Since high-order polynomial basis functions could be used in finite element method, higher convergence rates could be obtained and numerical solutions are in most cases superior to competing alternative methods (i.e. finite differences). Isoparametric finite element concept makes domains with curved boundaries amenable to finite element solution ; geometric complexity ceases to be an obstacle with finite elements.

The use of finite-element concepts in the solution of neutron diffusion and transport theories dates back to 1970 's. Both variational and Galerkin-type finite element formulations have been used in the solution of neutron transport and diffusion problems. Determination of effective multiplication factor and flux distributions are accomplished by such finite element calculations in an efficient manner.

Finite element method has proved itself to be valuable in calculation of the detailed flux distributions in both regular and irregular geometries. Neutron diffusion calculations are not carried for only evaluation of the flux distributions; in many cases adjoint flux distributions are also needed. But an overwhelming majority of finite-element neutron diffusion formulations is directed towards the calculation of neutron flux distribution and adjoint flux calculation ability is usually not developed.

In this work, working under the formalism of multigroup-diffusion theory is preferred and it is tried to develop a finite element program which has the capability of obtaining both flux and adjoint - flux distributions.

Since the classical variational formulation is restricted to the zero-incoming current vacuum boundary conditions it is opted to develop a Galerkin type finite element formulation based on the weighted residual principle which incorporates zero flux and adjoint flux boundary condition at vacuum boundaries.

The use of those boundary conditions is required in the determination of the flux and the adjoint flux in perturbation theory calculations.

Since most of the first researchers in reactor theory had a nuclear physics background, they carried out some of the prevalent methods there to the area of reactor - physics. The perturbation theory is a prominent example among these. When perturbation theory is applied to neutron transport or diffusion, adjoint flux first appears as the eigenfunction of the adjoint diffusion or transport equation.

In this context, adjoint flux appears to be a mathematical abstraction. But later studies about the adjoint flux showed that adjoint flux has a physical interpretation as neutron importance. That is adjoint flux shows the importance of a certain position and neutron kinetic energy in relation to reactivity worth of the nuclear system.

Points where adjoint flux are large have a more important effect on reactivity. Due to these and other reasons, adjoint flux calculation is a necessary part of reactor analysis.

In this work, a program which can carry out criticality - eigenvalue calculations in multigroup diffusion theory is developed. The geometry is restricted to one dimensional cylindrical geometry and Galerkin type finite element method constitutes the theoretical basis of the program. Lagrange-type interpolatory polynomials up to degree four have been used in the formulation and have been implemented in the program.

The program which has been named 75_YIL (which means seventy fifth year, commemorating 1998, the seventyfifth anniversary of the foundation of the Republic of Turkey) has been written in FORTRAN and is compiled and run in LINUX operating system. Initial efforts in construction of this thesis have been directed to the validation of the program.

For this purpose, problems with known analytical solutions had been run. The analytical and numerical flux distributions turn out also to be indistinguishable. These problems with analytical solutions constitute the validation part of this work.

The objective of this thesis have been to develop a finite element program, which has the ability to solve the multigroup neutron diffusion equations and obtain the adjoint flux distribution besides the effective multiplication factor and the neutron flux.

This objective has been accomplished, as the cited example problems show. The program, 75_YIL is capable of evaluating both flux and adjoint flux distributions and constitutes a suitable basis for future perturbation theory applications.



I. GİRİŞ

Nükleer fizikçilerin, reaktör fiziğine ilgi duymaya başlaması ile beraber, kuantum mekaniğinde öteden beri kullanılan pertürbasyon teorisi, reaktör fiziği problemlerinde de uygulanmaya başlandı. Bu gelişme de reaktör fiziğinde ek operatörlerin tanımlanması sürecini başlattı.

Nötron transportunun en basit modeli olan tek gruplu difüzyon teorisinde yer alan operatörler kendine-ek niteliği taşıdığından, bu modele dayanan pertürbasyon teorisi ifadelerinde akıdan başka yeni bir fonksiyon tanımlanmasına gerek yoktur. Ancak, nükleer reaktörlerin analizinde - genelde - tek gruplu teori yeterli olmamakta ve çok gruplu difüzyon teorisi modellerine ihtiyaç duyulmaktadır. Çok gruplu difüzyon teorisinde yer alan matrisyel operatörler kendine ek değillerdir. Bu nedenle ortaya ek operatörler çıkmaktadır. Ek operatörlerin öz fonksiyonları da farklı olduğundan, pertürbasyon teorisinin çok gruplu difüzyon modeline genişletilmesi, akıdan farklı olan ve '*ek akı*' [5] adı verilen bir kavramın ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Ek akıya salt matematiksel bir araç olarak bakılırsa, pek çok kullanım sahası ortaya çıkar. Pertürbasyon teorisi kullanılarak, reaktivite değişimlerinin hesabı bunlardan biri, hatta en yaygın olanıdır. Ancak ek akının başka kullanım sahaları da vardır. Reaktör hesaplarında kullanılan bazı varyasyonel ilkeler de ek akı kavramını gerektirirler. Çok gruplu sabitlerin tanımında da, ek akı kullanılabilir. Reaktör yetkinlik hesaplarında kullanılan difüzyon sentetik hızlandırması da [7] yine ek akıya gereksinim duyan uygulamalardandır. Nötron transportunun probabilistik çözüm yöntemlerinden biri olan 'Monte Carlo' 'da [13] da bazı uygulamalar ek akı kavramını gerektirir.

Belirtilmelidir ki bilimde ortaya çıkan matematiksel kavramların, fiziksel yorumunun yapılması, genellikle bu kavramların daha iyi anlaşılmasına yol açmakta ve bu kavramların yeni uygulama sahaları bulmasını sağlamaktadır. Salt matematiksel bir kavram olarak ortaya çıkan ek akı için de böyle bir süreç yaşanmıştır.

Ek akının fiziksel yorumu üzerine yapılan çalışmalar, ek akının kritik fakat nötron içermeyen bir reaktörde bir noktaya yerleştirilen belirli bir kinetik enerjiye sahip bir nötronun yol açtığı reaktördeki asimptotik toplam nötron sayısını simgeliendirdiğini göstermiştir [6]. Bu fiziksel yorum doğrultusunda, tıpkı akı dağılımlarında olduğu gibi, ek akı dağılımları da nükleer sistemin nötronuğunun daha iyi anlaşılmasına neden olmaktadır.

Bu çalışmada çok gruplu difüzyon teorisi çerçevesinde ek yetkinlik özdeğer probleminin sayısal olarak çözülmesi ve etkin çoğaltma katsayısı ile grup ek akı dağılımlarının hesaplanması amaçlanmıştır. Sistem geometrisi, sonsuz silindriyel geometri olarak kısıtlanmış, grup içi difüzyon denklemlerinin çözümü için sonlu elemanlar yönteminin kullanılması tercih edilmiştir. Difüzyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümünde, çoğu araştırmada fonksiyonel minimizasyonuna dayanan *Ritz* [8] yaklaşımı kullanılmaktadır. Galerkin türü sonlu elemanlar formülasyonunda ise fonksiyonel kavramı ortadan kalkmaktadır. Halbuki pertürbasyon teorisi uygulamalarında genellikle hem akının, hem de ek akının sistem sınırında sıfır alınmasına dayanan boşluk sınır koşulunun uygulanması uygun düşmektedir. [5].

Bu sebeple, bu çalışmada varyasyonel ilkeden hareket etmeyen, ağırlaştırılmış kalıntılar fikrine dayanan, *Galerkin* türü bir sonlu elemanlar formülasyonuna gidilmiştir. Daha önce geliştirilmiş varyasyonel ilkeden hareketle sonlu elemanlar yöntemini kullanarak akı hesabı yapan bir program [4] değiştirilerek Galerkin türü sonlu elemanlar formülasyonuna dayalı sıfır değerine sahip akı ve ek akı sınır koşulunu kullanan, hem akı hem de ek akı hesabı yapabilen bir programa dönüştürülmüştür. Bu program kullanılarak tek ve iki gruplu teori çerçevesinde, önce çıplak sonra da yansıtıcı reaktörlerin etkin çoğaltma katsayıları ile hızlı ve termal akı ve ek akıları hesaplanmıştır. Bu problemlerin aynı zamanda analitik çözümleri elde edilmiş, sayısal çözümlerle analitik çözümler karşılaştırılarak, geliştirilen programın doğrulanması gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen program kullanılarak İTÜ TRIGA Mark II reaktörünün ek akı hesabı da gerçekleştirilmiştir. WIMS [1] programı aracılığı ile elde edilen iki gruplu TRIGA tesir kesitleri [10] kullanılarak, yapılan hesaplamalarla akı ve ek akı dağılımları saptanmış, bu sonuçlar ayrıca sonlu fark yöntemi kullanan bir programın sonuçları ile de karşılaştırılmıştır.

Tezin ikinci bölümü **"Teori"** adını taşımakta, burada önce ek akı kavramı tanıtılmakta, daha sonra grup içi difüzyon denkleminin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü için Galerkin türü bir sonlu elemanlar formülasyonu sunulmaktadır.

Tezin üçüncü bölümü **"Uygulamalar"** adını taşımakta ve burada yapılan hesaplamalarla elde edilen sonuçlar irdelenmektedir.

Tezin dördüncü bölümü **"Sonuçlar ve Öneriler"** adını taşımakta, burada da yapılan çalışmanın genel değerlendirmesi yapıldıktan sonra, bu konuda gelecekte yapılabilecek uygulamalar için önerilerde bulunmaktadır.



II. TEORİ

II.1. EK AKI KAVRAMI

II.1.1. Çok Gruplu Difüzyon Teorisi Yetkinlik Hesapları

Çok gruplu difüzyon teorisi çerçevesinde yetkinlik - özdeğer problemi :

$$\underline{M} \cdot \underline{\emptyset} = 1 / k_{\text{etk}} \underline{F} \cdot \underline{\emptyset} \quad (2.1)$$

olarak ifade edilebilir. Burada ; gruptan gruba yukarı saçılmanın olmadığı varsayılarak;

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla} \cdot D_1 \vec{\nabla} + \Sigma_{r,1} & & & \\ -\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} & -\vec{\nabla} \cdot D_2 \vec{\nabla} + \Sigma_{r,2} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ -\Sigma_{s,g \leftarrow i} & -\Sigma_{s,g \leftarrow 2} & \dots & -\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} + \Sigma_{r,g} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\Sigma_{s,G \leftarrow 1} & -\Sigma_{s,G \leftarrow 2} & \dots & -\Sigma_{s,G \leftarrow g} & \dots & -\vec{\nabla} \cdot D_G \vec{\nabla} + \Sigma_{r,G} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde,

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \chi_1 v_1 \Sigma_{f,1} & \dots & \chi_1 v_g \Sigma_{f,g} & \dots & \chi_1 v_G \Sigma_{f,G} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_g v_1 \Sigma_{f,1} & \dots & \chi_g v_g \Sigma_{f,g} & \dots & \chi_g v_G \Sigma_{f,G} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_G v_1 \Sigma_{f,1} & \dots & \chi_G v_g \Sigma_{f,g} & \dots & \chi_G v_G \Sigma_{f,G} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

şeklinde $G \times G$ 'lik kare matrisyel operatörler olup,

$$\underline{\emptyset}^T = [\emptyset_1 \dots \emptyset_g \dots \emptyset_G] \quad (2.4)$$

akı vektörüdür.

Bir değiştirilmiş özdeğer - özfonksiyon problemini temsil eden (2.1) denkleminin en büyük özdeğeri olan k_{etk} ve buna tekabül eden akı vektörü, genelde fisyon kaynağı iterasyonu yöntemi ile belirlenir. Bu sürece **reaktör yetkinlik hesabı** adı verilir.

II.1.2. Çok Gruplu Difüzyon Teorisinde Ek Operatörler

Genel bir $\underline{f}$ matrisyel operatörünün $\underline{f}$ vektörlerinden oluşan bir uzay üzerinde iş gördüğünü varsayalım. Bu durumda $\underline{g}^+$ vektörlerinden oluşan bir uzay üzerinde iş gören bir $\underline{f}^+$ operatörü her $\underline{f}$ ve $\underline{g}^+$ çifti için ;

$$\langle \underline{g}^+, \underline{f} \rangle = \langle \underline{f}, \underline{f}^+ \cdot \underline{g}^+ \rangle \quad (2.5)$$

denklemini sağlıyorsa, $\underline{f}^+$ 'ya $\underline{f}$ 'nin **ek operatörü** adı verilir. (2.5) ' de yer alan "<>" işlemi **iç çarpım** işlemini temsil etmekte olup $\underline{f}$ ve $\underline{g}^+$ vektörlerinin bağımsız değişkenlerinin tümü üzerinden integrasyon anlamı taşırlar, yani ;

$$\langle \underline{g}^+, \underline{f} \rangle = \int_V \underline{g}^+ \cdot \underline{f} \, dV \quad (2.6)$$

tanımı geçerlidir. Burada V , $\underline{f}$ ve $\underline{g}^+$ vektörlerini oluşturan fonksiyonların tanım bölgesidir. Çok gruplu difüzyon teorisi yetkinlik hesaplarında yer alan $\underline{M}$ ve $\underline{F}$ matrisyel operatörlerin ek operatörleri bu matrisyel operatörlerin devrikleridir.

Yani ;

$$\underline{M}^+ = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla} \cdot D_1 \vec{\nabla} + \Sigma_{r,1} & -\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} & -\Sigma_{s,g \leftarrow 1} & -\Sigma_{s,G \leftarrow 1} \\ & -\vec{\nabla} \cdot D_2 \vec{\nabla} + \Sigma_{r,2} & -\Sigma_{s,g \leftarrow 2} & -\Sigma_{s,G \leftarrow 2} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & -\vec{\nabla} \cdot D_g \vec{\nabla} + \Sigma_{r,g} & -\Sigma_{s,G \leftarrow g} \\ & & & \vdots \\ & & & -\vec{\nabla} \cdot D_G \vec{\nabla} + \Sigma_{r,G} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ve ;

$$\mathbf{F}^+ = \begin{bmatrix} \chi_1 v_1 \Sigma_{f,1} & \dots & \chi_g v_1 \Sigma_{f,1} & \dots & \chi_G v_1 \Sigma_{f,1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_1 v_g \Sigma_{f,g} & \dots & \chi_g v_g \Sigma_{f,g} & \dots & \chi_G v_g \Sigma_{f,g} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_1 v_G \Sigma_{f,G} & \dots & \chi_g v_G \Sigma_{f,G} & \dots & \chi_G v_G \Sigma_{f,G} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

şeklindedirler [6].

$$\mathbf{M}^+ \cdot \underline{\varnothing}^+ = 1 / k_{\text{etk}} \mathbf{F}^+ \cdot \underline{\varnothing}^+ \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan probleme ek-yetkinlik özdeğer problemi adı verilmekte ve $\underline{\varnothing}^+$ vektörü ;

$$\underline{\varnothing}^+ = [\varnothing_1^+ \dots \varnothing_g^+ \dots \varnothing_G^+] \quad (2.10)$$

$\varnothing_g^+$ ile simgelenen grup ek akılarından oluşmaktadır. (2.1) ve (2.9) denklemlerindeki operatörler ek-operatör olduğundan, özdeğer her ikisinde de aynı olup k_{etk} 'dir [5].

Buna göre bir nükleer sistemin k_{etk} 'nini bulmak için (2.1) yetkinlik-özdeğer problemi yerine (2.9) ek - yetkinlik - özdeğer problemi çözülebilir. (2.9) ' a fisyon kaynağı iterasyonu uygulanarak, en büyük özdeğeri k_{etk} yanında sistemin grup ek akıları da hesaplanabilir.

II.1.3. Çok Gruplu Pertürbasyon Teorisi Yaklaşımı

Bir sonraki bölümde, daha önce matematiksel olarak tanımlanan ek akıya fiziksel bir yorum getirilmeye çalışılacaktır. Bu amaçla önce bu bölümde çok gruplu pertürbasyon teorisi genel ifadesi türetilerek ek akı yorumu için gerekli temel sağlanacaktır. Bir nükleer sistemin yetkinlik - özdeğer durumunun (2.1) ve (2.9) denklemleriyle belirlendiğini varsayalım. Yani k_{etk} , $\emptyset$ ve $\emptyset^+$ bizce bilinmektedir diyelim. Şimdi bu sistemde yapılan küçük bir değişim nedeni ile, çok gruplu difüzyon teorisi operatörlerinde bir değişim vazedelim. Bu durumda :

$$\begin{aligned} M' \cdot \emptyset' &= 1 / k'_{\text{etk}} & F' \cdot \emptyset' \\ = & - & = - \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak sistemin yeni etkin çoğaltma katsayısı k'_{etk} ve yeni akısı $\emptyset'$ olacaktır. Operatörler :

$$\begin{aligned} M' &= M + \delta M \\ = & = = \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} F' &= F + \delta F \\ = & = = \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklinde değiştikleri için, etkin çoğaltma katsayısı ve akı da ;

$$k'_{\text{etk}} = k_{\text{etk}} + \delta k_{\text{etk}} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \emptyset' &= \emptyset + \delta \emptyset \\ - & - - \end{aligned} \quad (2.15)$$

biçiminde değişim göstermişlerdir. (2.12) - (2.15) denklemleri (2.1) içine yerleştirilirlirse ;

$$\begin{aligned} (M + \delta M) \cdot (\emptyset + \delta \emptyset) &= \frac{1}{k_{\text{etk}} + \delta k_{\text{etk}}} \cdot (F + \delta F) \cdot (\emptyset + \delta \emptyset) \\ = & = - - & = & = - - \end{aligned} \quad (2.16)$$

yazılabilir.

Öte yandan [7];

$$\frac{1}{k_{etk} + \delta k_{etk}} = \frac{1}{k_{etk}} * \frac{1}{1 - (-\delta k_{etk} / k_{etk})} \quad (2.17)$$

şeklinde yazılabilir. Sistemde yapılan değişimin küçük olduğu varsayıldığına göre $|\delta k_{etk}|$, k_{etk} 'e göre küçük olacaktır. Buna göre Taylor serisindeki üçüncü ve daha sonraki terimler ihmal edilerek :

$$\frac{1}{1 - (-\delta k_{etk} / k_{etk})} \cong 1 - \delta k_{etk} / k_{etk} \quad (2.18)$$

yazılabilir. Buna göre ;

$$\frac{1}{k_{etk} + \delta k_{etk}} \cong \frac{1}{k_{etk}} - \frac{\delta k_{etk}}{k_{etk}^2} \quad (2.19)$$

ifadesini yazabiliriz. Öte yandan reaktivite tanımına göre ;

$$\rho = \frac{k_{etk} - 1}{k_{etk}} \quad (2.20)$$

olur. Bu denklemde her iki tarafın diferansiyeli alınırsa ;

$$d\rho = \frac{dk_{etk}}{k_{etk}^2} \quad (2.21)$$

sonucu bulunur. Sistemdeki değişimin küçük olduğu göz önüne alınarak, diferansiyel değişim durumundaki sonuç burada da kullanılırsa ;

$$\frac{1}{k_{etk} + \delta k_{etk}} \cong \frac{1}{k_{etk}} - \delta \rho \quad (2.22)$$

yazılabilir. Burada ;

$$\delta \rho = \frac{\delta k_{etk}}{k_{etk}^2} \quad (2.23)$$

olarak tanımlanmıştır. (2.22) ifadesi, (2.16) 'da yerleştirilerek ;

$$\begin{aligned} (M + \delta M) \cdot (\varnothing + \delta \varnothing) &= \left(\frac{1}{k_{etk}} - \delta \rho \right) * (F + \delta F) \cdot (\varnothing + \delta \varnothing) \\ = &= - - - - - = = - - - - - \end{aligned} \quad (2.24)$$

elde edilir. (2.24) yeniden düzenlenir ve δ^2 terimleri ihmal edilirse ;

$$-\delta \rho F \varnothing \cong \left(M - 1/k_{etk} F \right) \varnothing + \left(\delta M - 1/k_{etk} \delta F \right) \varnothing + \left(M - 1/k_{etk} F \right) \delta \varnothing \quad (2.25)$$

yazılabilir.

(2.25) ile gösterilmiş olunan ifadenin sağ tarafındaki ilk terim (2.1) numaralı eşitliğin tanımından sıfıra eşittir. Buna göre ;

$$-\delta \rho F \emptyset \cong (\delta M - 1/k_{\text{etk}} \delta F) \emptyset + (M - 1/k_{\text{etk}} F) \delta \emptyset \quad (2.26)$$

olur. (2.26) denklemini $\emptyset^+$ ile çarpılıp, sistem hacmi üzerinden integre edilirse ;

$$-\delta \rho < \emptyset^+, F \emptyset > \cong < \emptyset^+, (\delta M - 1/k_{\text{etk}} \delta F) \emptyset > + < \emptyset^+, (M - 1/k_{\text{etk}} F) \delta \emptyset > \quad (2.27)$$

elde edilir. Öte yandan ek-operatör tanımına göre ;

$$< \emptyset^+, (M - 1/k_{\text{etk}} F) \delta \emptyset > = < \delta \emptyset, (M^+ - 1/k_{\text{etk}} F^+) \emptyset^+ > \quad (2.28)$$

olur. Öte yandan (2.9) denklemini nedeni ile (2.28) ifadesi sıfıra eşittir. Buna göre (2.27) den ;

$$-\delta \rho \cong \frac{< \emptyset^+, (\delta M - 1/k_{\text{etk}} \delta F) \emptyset >}{< \emptyset^+, F \emptyset >} \quad (2.29)$$

çok gruplu pertürbasyon teorisi ifadesi bulunur. (2.26) ifadesi sadece ; özgün akı, ek akı, k_{etk} ve tesir kesitlerindeki değişimleri kullanarak, yeni bir k_{etk} hesabına girmeden reaktivitedeki değişimi yaklaşık veren bir denklemdir.

II.1.4. Noktasal Pertürbasyon Kavramı ve Ek Akının Fiziksel Yorumu

Nükleer sistemin belirli bir noktası civarına küçük miktarda bir malzeme eklenerek sadece g inci gruba ait çıkartma tesir kesitinin ($\Sigma_{r,g}$) değiştirildiğini varsayalım. Bu değişim Dirac Delta fonksiyonu kullanılarak :

$$\delta M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Sigma_{r,g}^p V^p \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

şeklinde matematiksel olarak ifade edilebilir.

Burada $\vec{r}_0$ pertürbasyonun uygulandığı noktayı V^p pertürbasyon hacmini, $\Sigma_{r,g}^p$ ise pertürbasyon grup-çıkartma tesir kesitini ifade etmektedir. Bu durumda pertürbasyon (2.29) ifadesine göre ;

$$-\delta \rho \cong \frac{\int_V \phi_g^+(\vec{r}) V^p \Sigma_{r,g}^p \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \phi_g(\vec{r}) dV}{\langle \phi, F \phi \rangle} \quad (2.31)$$

olarak yazılabilir. Dirac Delta fonksiyonunun integrasyon özelliğinden ;

$$-\delta \rho \cong \frac{\phi_g^+(\vec{r}_0) V^p \Sigma_{r,g}^p \phi_g(\vec{r}_0)}{\langle \phi, F \phi \rangle} \quad (2.32)$$

elde edilir. Pertürbasyondan bağımsız bir sabit olan (2.32) 'nin paydası C^{-1} ile gösterilirse ;

$$\phi_g^+(\vec{r}_0) = \frac{-\delta \rho}{C V^p \Sigma_{r,g}^p \phi_g(\vec{r}_0)} \quad (2.33)$$

yazılabilir. Burada ;

$$R_{g(r_0)}^p = V^p \Sigma_{r,g}^p \phi_g(\vec{r}_0) \quad (2.34)$$

eklenen malzemede birim zamanda g inci gruptan çıkartılan nötron sayısıdır. C ise bir sabit olup, akının normalizasyonuna bağlıdır. Burada yapay olarak $C = 1$ seçilse ;

$$\phi_g^+(\vec{r}_0) = \frac{-\delta \rho}{R_{g(r_0)}^p} \quad (2.35)$$

olur. Diğer bir deyişle g inci grup ek akısı eklenen malzemede birim zamanda gruptan çıkartılan g nci grubu nötronu başına reaktivitedeki değişimi vermektedir [6]. Kısacası ek akı büyükse, gruptan nötron çıkartılmasının reaktiviteye tesiri büyük, küçükse reaktiviteye tesiri küçüktür. Vurgulanmak istenen g inci grup ek akısının $\vec{r}_0$ daki değeri $\phi_g(\vec{r}_0)$ o noktanın $\vec{r}$ ve o grubun (g) reaktiviteye tesirinin önemini ölçmekte olduğudur. Bu nedenle ek-akıya, **nötron önem fonksiyonu** da denir.

II.1.5. Fisyon Kaynağı İterasyonunda Grup İçi Denklemler

Gerek (2.1) numaralı, gerekse (2.9) numaralı denklemlerle ifade edilmiş olan problemlerde k_{etk} hesabı için fisyon kaynağı iterasyonu kullanılır. Fisyon kaynağı iterasyonu sırasında $(n+1)$ inci iterasyonda, (2.1) ifadesinin çözümü için ;
 $g = 1, \dots, G$ için sırasıyla :

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{(n+1)}(\vec{r}) + f_g^{(n+1)}(\vec{r}) \quad (2.36)$$

denklemleri çözülmektedir. Burada grup fisyon kaynağı ;

$$f_g^{(n+1)}(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{k^{(n)}} \sum_{g'=1}^{g-1} \nu \Sigma_{f,g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{(n)}(\vec{r}) \quad (2.37)$$

şeklindedir. (2.9) numaralı denklemin çözümü için yapılan fisyon kaynağı iterasyonunda $(n+1)$ inci iterasyonda $g = G, G-1, \dots, 2, 1$ için sırasıyla ;

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_g^{+ (n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \phi_g^{+ (n+1)}(\vec{r}) = \sum_{g'=g+1}^G \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{+ (n+1)}(\vec{r}) + f_g^{+ (n+1)}(\vec{r}) \quad (2.38)$$

denklemleri çözülmektedir. Burada grup ek-fisyon kaynağı ;

$$f_g^{+ (n+1)}(\vec{r}) = \frac{\nu \Sigma_{f,g}(\vec{r})}{k^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \chi_{g'} \phi_{g'}^{(n)}(\vec{r}) \quad (2.39)$$

şeklindedir. Ancak gerek (2.36) numaralı, gerekse (2.38) numaralı denklemlerin (grup içi denklemler), sağ tarafı çözüm aşamasında bilinir haldedir. Diğer bir deyişle her iki denklem de formal olarak ;

$$-\vec{\nabla} \cdot D \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) + \Sigma \phi(\vec{r}) = q(\vec{r}) \quad (2.40)$$

biçimde yazılabilir ki bu da tek-gruplu serbest-kaynaklı difüzyon denklemi formudur. (2.36) numaralı ifadenin çözümü için ;

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) \\ q(\vec{r}) &= f_g^{(n+1)}(\vec{r}) + \sum_{g'=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow g'}(\vec{r}) \phi_{g'}^{(n+1)}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.40) numaralı ifadenin çözümü için ise ;

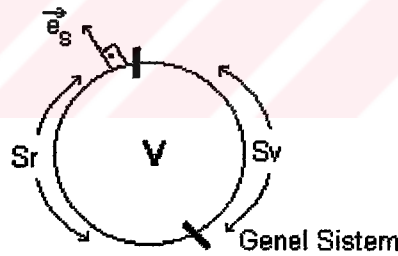
$$\begin{aligned}\varnothing(\vec{r}) &= \varnothing_g^{(n+1)}(\vec{r}) \\ q(\vec{r}) &= f_g^{(n+1)}(\vec{r}) + \sum_{g'=g+1}^G \sum_{s,g' \leftarrow g} \varnothing_g^{(n+1)}(\vec{r})\end{aligned}\quad (2.42)$$

alınır ve her iki durumda da indislerden kurtulmak için $D = D_g$, $\Sigma = \Sigma_{r,g}$ kullanılırsa, (2.40) numaralı denklem ile ifade edilmiş olunan basit forma indirgeme yapılır. Gerek akı, gerekse ek akı hesabında grup içi denklem (2.40) formunda olduğuna göre, bundan sonraki bölümlerde (2.40) numaralı ifadenin çözümü tartışılacaktır. Bu çalışmada (2.40) numaralı ifadenin çözümü için geometri sonsuz silindirik olarak sınırlandırılacak ve denklem sonlu elemanlar yöntemi ile çözülecektir. Sonlu elemanlar yönteminin uygulanması bir sonraki bölümün konusudur.

II.2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

II.2.1. Ağırlaştırılmış Kalıntılar İlkesi

Çözümünü amaçladığımız sınır değer problemi; sistem hacmi V olarak simgelenir:



Şekil 2.1

$$-\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) + \Sigma \varnothing(\vec{r}) = q(\vec{r}) \quad , \quad \vec{r} \in V \quad (2.43)$$

$$\varnothing(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \vec{r} \in S_v \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \varnothing(\vec{r})}{\partial n} = 0 \quad , \quad \vec{r} \in S_r \quad (2.45)$$

olarak ifade edilebilir. Sistem dış yüzeyi S 'nin S_v ile gösterilen bölümünde sıfır akı sınır koşulu, S_r ile gösterilen bölümünde ise sıfır normal akım yansıtma sınır koşulu vazedilmiştir.

(2.43) denklemi $R(\vec{r})$ kalıntı tanımıyla :

$$R(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) + \Sigma \varnothing(\vec{r}) - q(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \vec{r} \in V \quad (2.46)$$

olarak da ifade edilebilir. Kalıntı fonksiyonu $R(\vec{r})$, herhangi bir test fonksiyonu $\Psi(\vec{r})$ ile çarpılıp, sistem hacmi üzerinden integre edilirse, bu integralin de sıfır olması gerekir :

$$\int_V [-\vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) + \Sigma(\vec{r}) \varnothing(\vec{r}) - q(\vec{r})] \Psi(\vec{r}) dV = 0 \quad (2.47)$$

Öte yandan ; genelleştirilmiş kısmi integrasyon kuralı ;

$$\vec{\nabla} \cdot [\Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r})] = D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) + \Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) \quad (2.48)$$

'na göre ;

$$\Psi(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot [\Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r})] - D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) \quad (2.49)$$

yazılabilir. Bu sonuç (2.47) numaralı ifadede yerleştirilirse :

$$\int_V [D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) + \Sigma(\vec{r}) \varnothing(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) - q(\vec{r}) \Psi(\vec{r})] dV - \int_V \vec{\nabla} \cdot [\Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r})] dV = 0 \quad (2.50)$$

elde edilir. Öte yandan, Gauss teoremine göre :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot [\Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r})] dV = \int_S \Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \frac{\partial \varnothing(\vec{r})}{\partial n} dS \quad (2.51)$$

olur. Öte yandan ; $S = S_r \cup S_v$ olduğuna göre ;

$$\int_S \Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \frac{\partial \varnothing(\vec{r})}{\partial n} dS = \int_{S_r} \Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \frac{\partial \varnothing(\vec{r})}{\partial n} dS + \int_{S_v} \Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \frac{\partial \varnothing(\vec{r})}{\partial n} dS \quad (2.52)$$

yazılabilir. Fakat (2.45) numaralı ifade ile belirlenmiş olunan yansıtma sınır koşulu nedeni ile sağ taraftaki ilk terim sıfıra eşittir. Eğer kabul edilebilir test fonksiyonları $\Psi(\vec{r})$;

$$\Psi(\vec{r}) = 0 \quad , \quad \vec{r} \in S_v \quad (2.53)$$

şeklinde seçilirse, (2.52) ile ifade edilmiş olunan denklemin sağ tarafındaki ikinci terim de sıfır olur. Buna göre (2.51) ifadesi ;

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot [\Psi(\vec{r}) D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r})] dV = 0 \quad (2.54)$$

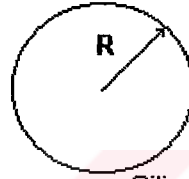
haline dönüşür. Bu durumda şu ilkeyi ki - **ağırlaştırılmış kalıntılar ilkesi** adını veriyoruz - ortaya koyabiliriz.

(2.43) diferansiyel denklemini (2.44) ve (2.45) sınır koşullarıyla sağlayan $\varnothing(\vec{r})$ fonksiyonu, her $\Psi(\vec{r}) = 0$, $\vec{r} \in S_v$ olacak şekilde seçilmiş $\Psi(\vec{r})$ fonksiyonu için :

$$\int_V [D(\vec{r}) \vec{\nabla} \varnothing(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}) + \Sigma(\vec{r}) \varnothing(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) - q(\vec{r}) \Psi(\vec{r})] dV = 0 \quad (2.55)$$

denklemini de sağlar [2]. (2.55) denklemi genel geometri için türetilmiştir.

Ancak bu çalışmada sonsuz silindrsel geometride çalışacağımız için (2.55) basitleştirilebilir. Silindirik sistemin $0 < r < R$ aralığında yer aldığı varsayılırsa ; (2.55) ilkesi, sonsuz silindirik geometri özelinde:



Şekil 2.2

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r D(r) \frac{d\varnothing}{dr} \right] + \Sigma(r) \varnothing(r) = q(r) \quad (2.56)$$

diferansiyel denklemini :

$$\varnothing(R) = 0 \quad (2.57)$$

veya

$$\left. \frac{\partial \varnothing(r)}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (2.58)$$

sınır koşuluyla sağlayan $\varnothing(r)$ fonksiyonu aynı zamanda $0 < r < R$ arasında tanımlı ve $\Psi(R) = 0$ özelliği taşıyan her $\Psi(r)$ test fonksiyonu için de :

$$\int_0^R \left[D(r) \frac{d\varnothing}{dr} \frac{d\Psi}{dr} + \Sigma(r) \varnothing(r) \Psi(r) - q(r) \Psi(r) \right] r dr = 0 \quad (2.59)$$

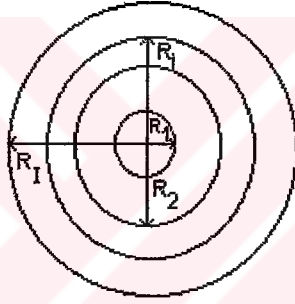
ağırlaştırılmış kalıntılar denklemini de sağlar.

II.2.2. Sonsuz Silindirik Geometride Galerkin Türü **Sonlu Elemanlar Yaklaşımı**

(2.59) ifadesi için kabul edilebilir fonksiyonlar ;

$$\int_0^R \left(\frac{d\varnothing}{dr} \right)^2 r dr < \infty \quad , \quad \int_0^R \left(\frac{d\Psi}{dr} \right)^2 r dr < \infty \quad (2.60)$$

özelliklerini taşıyan ve (2.53) numaralı ifadedeki koşula uyan fonksiyonlardır. Burada geometri karmaşık olduğu zaman, (2.59) numaralı ifadeden hareketle (2.56) numaralı ifadenin çözümünün analitik olarak elde edilebilmesi zorlaşır. Bu nedenle probleme yaklaşık bir çözüm aranacaktır. Bu amaçla silindirik sistemimizi I sayıda eşmerkezli dairesel kabuğa bölüyoruz.



Şekil 2.3 Sistemin Sonlu I Elemanlara Bölünmesi

Buradaki dairesel kabukların herbirinin homojen olması koşulunu getiriyoruz. Yani

$R_0 = 0$ ve;

$$D(r) = D_i \\ \Sigma(r) = \Sigma_i \quad , \quad R_{i-1} < r < R_i \quad (2.61)$$

olarak kısıtlıyoruz. Bu durumda (2.55) ifadesi :

$$\sum_{i=1}^I \int_{R_{i-1}}^{R_i} \left[D_i \left(\frac{d\varnothing}{dr} \right) \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) + \Sigma_i \varnothing(r) \Psi(r) - q(r) \Psi(r) \right] r dr = 0 \quad (2.62)$$

haline dönüşür. (2.62) numaralı denklem ile ifade edilmiş integral, eleman integrali ;

$$I_i = \int_{R_{i-1}}^{R_i} \left[D_i \left(\frac{d\varnothing}{dr} \right) \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) + \Sigma_i \varnothing(r) \Psi(r) - q(r) \Psi(r) \right] r dr \quad (2.63)$$

tanımlaması ile ;

$$\sum_{i=1}^I I_i = 0 \quad (2.64)$$

şeklinde yazılabilir.

$$r = R_{i-1} + \Delta_i \xi \quad (2.65)$$

$$\Delta_i = R_i - R_{i-1} \quad (2.66)$$

olarak bir değişken dönüşümü yapılırsa :

$$I_i = \int_0^1 \left[\frac{D_i}{\Delta_i} (R_{i-1} + \Delta_i \xi) \left(\frac{\partial \varnothing}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) + \sum_i \Delta_i (R_{i-1} + \Delta_i \xi) \varnothing(\xi) \Psi(\xi) - \Delta_i \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) q(\xi) \Psi(\xi) d\xi \right] d\xi \quad (2.67)$$

[0,1] aralığında bir integrale dönüştürülebilir. Bu aşamada $\varnothing(\xi)$ ve $\Psi(\xi)$ eleman içinde N 'inci derece **Lagrange** tipi polinomlar olarak kısıtlanır ve eleman nod koordinatları eşit aralıklı olarak :

$$\xi_n = (n-1) / N, \quad n = 1, 2, \dots, N+1 \quad (2.68)$$

şeklinde seçilirse :

$$\varnothing(\xi) = \sum_{n=1}^{N+1} h_n(\xi) \varnothing_n \quad (2.69)$$

ve ;

$$\Psi(\xi) = \sum_{n=1}^{N+1} h_n(\xi) \Psi_n \quad (2.70)$$

yazılabilir. Burada, deneme fonksiyonu olarak bilinen $h_n(\xi)$ fonksiyonları ;

$$h_n(\xi_m) = \delta_{nm} \quad \begin{matrix} n = 1, \dots, N+1 \\ m = 1, \dots, N+1 \end{matrix} \quad (2.71)$$

özellği göstermekte yani kendi nodlarında 1, diğer nodlarda sıfır değerini almaktadırlar. Öte yandan :

$$\begin{aligned} \varnothing_n &= \varnothing(\xi_n) \\ \Psi_n &= \Psi(\xi_n) \quad n = 1, \dots, N+1 \end{aligned} \quad (2.72)$$

olarak tanımlanmışlardır.

Sonlu elemanlar literatüründe N=1 seçimi lineer, N=2 seçimi kuadratik, N=3 seçimi kübik, N=4 seçimi kuartik elemanlara karşılık gelmektedir. Bu dört tür sonlu eleman seçimi için nod koordinatları ve o nodlara karşılık gelen deneme fonksiyonları Tablo 3.1 'de sunulmuştur.

Tablo 3.1 Deneme Fonksiyonları

ELEMAN TÜRÜ (N)	NOD NUMARASI (n)	NOD KOORDİNATLARI	DENEME FONKSİYONU $h_n(\xi)$
Lineer (1)	1	0	1- ξ
	2	1	ξ
Kuadratik (2)	1	0	$(1-2\xi)(1-\xi)$
	2	1/2	$4\xi(1-\xi)$
	3	1	$\xi(2\xi-1)$
Kübik (3)	1	0	$1/2(1-3\xi)(2-3\xi)(1-\xi)$
	2	1/3	$9/2\xi(2-3\xi)(1-\xi)$
	3	2/3	$9/2\xi(3\xi-1)(1-\xi)$
	4	1	$1/2\xi(3\xi-1)(3\xi-2)$
Kuartik (4)	1	0	$1/3(1-4\xi)(1-2\xi)(3-4\xi)(1-\xi)$
	2	1/4	$16/3\xi(1-2\xi)(3-4\xi)(1-\xi)$
	3	1/2	$-4\xi(1-4\xi)(3-4\xi)(1-\xi)$
	4	3/4	$16/3\xi(1-4\xi)(1-2\xi)(1-\xi)$
	5	1	$-1/3\xi(1-4\xi)(1-2\xi)(3-4\xi)$

(2.69) ve (2.70) ifadeleri, (2.67) eleman integralinin içine yerleştirilirse ;

$$I_1 = \sum_{m=1}^{N+1} \psi_m^i \left(\sum_{n=1}^{N+1} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{D_1}{\Delta_1} (R_{11} + \Delta_1 \xi) \frac{dh_m}{d\xi} \frac{dh_n}{d\xi} + \sum_i \Delta_i (R_{11} + \Delta_1 \xi) h_m(\xi) h_n(\xi) \right] d\xi \right\} \varnothing_n^i - \Delta_1 \int_0^1 (R_{11} + \Delta_1 \xi) q(\xi) h_m(\xi) d\xi \right) \quad (2.73)$$

eleman integrali elde edilir. Bu aşamada ;

$$a_{mn}^i = \int_0^1 \left[\frac{D_1}{\Delta_1} (R_{11} + \Delta_1 \xi) \frac{dh_m}{d\xi} \frac{dh_n}{d\xi} + \sum_i \Delta_i (R_{11} + \Delta_1 \xi) h_m(\xi) h_n(\xi) \right] d\xi \quad (2.74)$$

$$m = 1, \dots, N+1$$

$$n = 1, \dots, N+1$$

eleman matrisi,

$$S_m = \int_0^1 \Delta_i (R_{i-1} + \Delta_i \xi) q(\xi) h_m(\xi) d\xi \quad m = 1, \dots, N+1 \quad (2.75)$$

tanımlamaları yapılırsa (2.73) numara ile ifade edilmiş olunan ifade ;

$$I_i = \sum_{m=1}^{N+1} \Psi_m^i \left\{ \sum_{n=1}^{N+1} a_{mn}^i \varnothing_n^i - S_m^i \right\} \quad (2.76)$$

şeklinde yazılabilir. Bu son denklem matris notasyonu ile ;

$$I_i = \underline{\Psi}^i (\underline{A}^i \underline{\varnothing}^i - \underline{s}^i) \quad (2.77)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Lineer, kuadratik, kübik ve kuartik elemanlar için eleman matrisi $\underline{A}^i$;

$$\underline{A}^i = \frac{D_i R_{i-1}}{\Delta_i} A_1 + D_i A_2 + R_{i-1} \Delta_i \sum A_3 + \Delta_i^2 \sum A_4 \quad (2.78)$$

şekilde yazılabilmektedir. $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3, \underline{A}_4$ matrisleri aşağıda verilmişlerdir [4,9].

Lineer elemanlar için ;

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_3 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kuadratik elemanlar için ;

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -12 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Kübik elemanlar için ;

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 34 & -51 & 30 & -13 \\ -51 & 270 & -297 & 78 \\ 30 & -297 & 594 & -327 \\ -13 & 78 & -327 & 262 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{1680} \begin{bmatrix} 128 & 99 & -36 & 19 \\ 99 & 648 & -81 & -36 \\ -36 & -81 & 648 & 99 \\ 19 & -36 & 99 & 128 \end{bmatrix} \quad \underline{A}_4 = \frac{1}{3360} \begin{bmatrix} 19 & 9 & 9 & 19 \\ 9 & 405 & -81 & -81 \\ 9 & -81 & 891 & 189 \\ 19 & -81 & 189 & 237 \end{bmatrix}$$

Kuartik elemanlar için ;

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{945} \begin{bmatrix} 4925 & -6848 & 3048 & -1472 & 347 \\ -6848 & 16640 & -14208 & 5888 & -1472 \\ 3048 & -14208 & 22320 & -14208 & 3048 \\ -1472 & 5888 & -14208 & 16640 & -6848 \\ 347 & -1472 & 3048 & -6848 & 4925 \end{bmatrix}$$

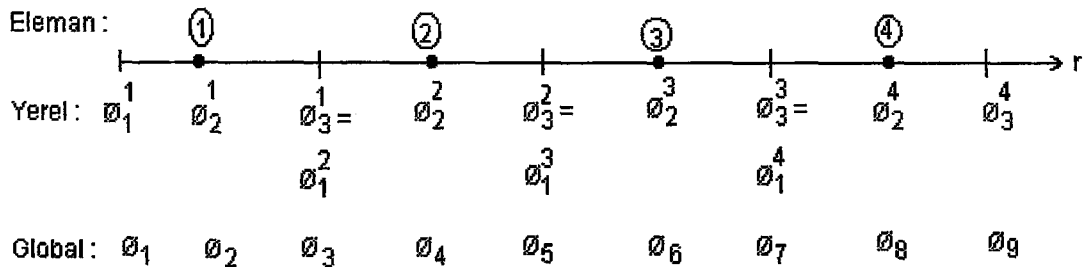
$$\underline{A}_2 = \frac{1}{1890} \begin{bmatrix} 705 & -992 & 804 & -864 & 347 \\ -992 & 6400 & -9216 & 5888 & -2080 \\ 804 & -9216 & 22320 & -19200 & 5292 \\ -864 & 5888 & -19200 & 26880 & -12704 \\ 347 & -2080 & 5292 & -12704 & 9145 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{11340} \begin{bmatrix} 584 & 592 & -348 & 112 & -58 \\ 592 & 3584 & -768 & 512 & 112 \\ -348 & -768 & 3744 & -768 & -348 \\ 112 & 512 & -768 & 3584 & 592 \\ -58 & 112 & -348 & 592 & 584 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_4 = \frac{1}{11340} \begin{bmatrix} 29 & 32 & 0 & -32 & -29 \\ 32 & 768 & -192 & 256 & 144 \\ 0 & -192 & 1872 & -576 & -348 \\ -32 & 256 & -576 & 2816 & 560 \\ -29 & 144 & -348 & 560 & 555 \end{bmatrix}$$

şeklinde.

Sonlu elemanlar terminolojisinde nodlar bir eleman içi, bir de global numaralandırmaya sahiptirler. (2.64) numaralı ifadeye göre tüm eleman integrallerinin toplamının sıfır olması gerektiğinden, eleman integrallerinin toplanması gerekir. Ancak bu toplamayı yapabilmek için eleman matris ve vektörlerinin boyutunun sistemdeki toplam nod sayısına genişletilmesi gerekir. Bu formal olarak **Boole** matrisleri aracılığıyla yapılır. Konuya açıklık kazandırmak için 4 kuadratik elemandan meydana gelen bir sistemde yerel ve global nod numaralandırılması verilecektir.



Buna göre ;

$$\underline{T} = [\emptyset_1 \emptyset_2 \emptyset_3 \emptyset_4 \emptyset_5 \emptyset_6 \emptyset_7 \emptyset_8 \emptyset_9]$$

global vektörü temsil ederken :

$$\underset{-}{\overset{2}{\varnothing}} = \underset{-}{\overset{2}{\varnothing}_1 \varnothing_2 \varnothing_3}$$

yerel 2 inci eleman vektörünü temsil etmektedir. Bu iki vektör ;

$$\underset{-}{\overset{2}{\varnothing}} = \underset{-}{\overset{2}{J} \varnothing}$$

şeklinde birbirlerinin cinsinden yazılabilirler [9].

Buradaki J^2 matrisine **Boole** matrisi denilmektedir. Verilen örnekte ;

$$\underset{-}{\overset{2}{\varnothing}} = \underset{-}{\overset{2}{J} \varnothing}$$

olur. Genelde ise ;

$$\underset{-}{\overset{i}{\varnothing}} = \underset{-}{\overset{i}{J} \varnothing} \quad (2.79)$$

$$\underset{-}{\overset{i}{\Psi}} = \underset{-}{\overset{i}{J} \Psi} \quad (2.80)$$

yazılabilir. (2.79) ve (2.80) ifadeleri, (2.77) ile ifade edilmiş eleman integraline yerleştirilirlerse ;

$$I_i = \underset{-}{\Psi}^T \left(\underset{-}{J}^T \underset{-}{A}^i \underset{-}{J} \underset{-}{\varnothing} - \underset{-}{J}^T \underset{-}{S}^i \right) \quad (2.81)$$

denklemini elde edilir. (2.81) ifadesi (2.64) ile ifade edilmiş ilkesel denkleminde yerine konulursa ;

$$I = \underset{-}{\Psi}^T \left[\left(\sum_{i=1}^I \underset{-}{J}^T \underset{-}{A}^i \underset{-}{J} \right) \underset{-}{\varnothing} - \sum_{i=1}^I \underset{-}{J}^T \underset{-}{S}^i \right] = 0 \quad (2.82)$$

yazılabilir.

Her Lagrange tipi polinom olan test fonksiyonu için (2.82) ifadesinin sağlanması ancak;

$$\left(\sum_{i=1}^I \underline{J}^i \underline{A}^i \underline{J}^i \right) \underline{\emptyset} = \sum_{i=1}^I \underline{J}^i \underline{s}^i \quad (2.83)$$

olması halinde mümkündür. Global sistem matrisi ve vektörü ;

$$\underline{A} = \sum_{i=1}^I \underline{J}^i \underline{A}^i \underline{J}^i \quad (2.84)$$

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^I \underline{J}^i \underline{s}^i \quad (2.85)$$

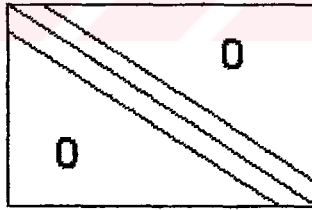
tanımlanırsa ;

$$\underline{A} \underline{\emptyset} = \underline{s} \quad (2.86)$$

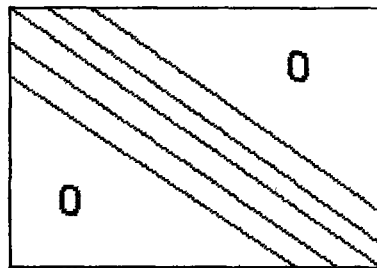
lineer sistemi elde edilir. Bu lineer sistem çözümünde $\underline{\emptyset}$ aranılan akı vektörüdür.

Sonsuz silindir geometride sistem matrisi $\underline{A}$, nod sayısı boyutunda bir kare matris olup, simetrik, pozitif kesin ve bantlıdır. N ile eleman derecesini ifade edersek $\underline{A}$ 'nın yarı-bant genişliği N+1 olmaktadır.

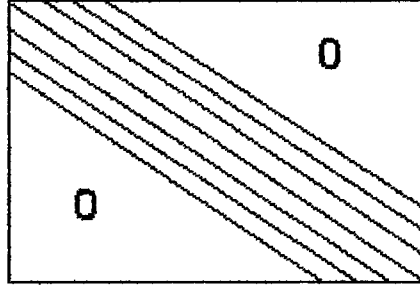
Sistem matrisi ; $\underline{A}$, lineer elemanlar için ;



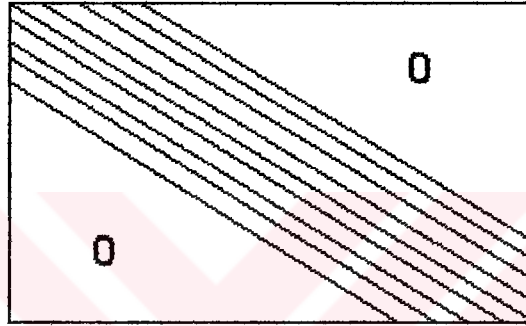
kuadratik elemanlar için ;



kübik elemanlar için ;



kuartik elemanlar için ;



şeklindedir.

II.2.3. Kaynak Vektörü Hesabı

(2.37), (2.39), (2.41) ve (2.42) denklemleri incelenirse, kaynak terimin saçılma veya fisyonunda ;

$$q(\vec{r}) = \sum \phi(\vec{r}) \quad (2.87)$$

şeklinde terimlerin toplamı olduğu görülür. Bu çalışmada (2.75) ile ifade edilmiş denklemlerle eleman kaynak vektörünün bileşenleri hesaplanırken ;

$$q(\xi) \cong \sum_l \phi_m^l \quad (2.88)$$

yaklaşımı yapılarak ;

$$S_m^l \cong (\Delta_l \sum_i \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_l \xi) h_m(\xi) d\xi) \phi_m^l \quad (2.89)$$

yazılabilmektedir.

Burada kaynak matrisi, köşegen bir matris olarak ;

$$S_{nm}^i \cong \Delta_i \Sigma_i \int_0^1 (R_{i-1} + \Delta_i \xi) h_m(\xi) d\xi \delta_{nm} \quad (2.90)$$

olarak tanımlanırsa [9] ;

$$S_{nm}^i \cong R_{i-1} \Delta_i \Sigma_i S_1 + \Delta_i \Sigma_i S_2 \quad (2.91)$$

ifadesi yazılabilir. S_1 ve S_2 matrisleri aşağıda değişik eleman dereceleri için verilmiştir.

Lineer elemanlar için ;

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

kuadratik elemanlar için ;

$$S_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kübik elemanlar için ;

$$S_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{120} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

kuartik elemanlar için ;

$$S_1 = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad S_2 = \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklindedirler. Kaynak teriminin (2.88) ifadesi yaklaşımla hesaplanmasına, sonlu elemanlar literatüründe yığılmış kaynak yaklaşımı adı verilmekte ve bu yaklaşımla kaynak matrislerinin köşegen bir yapıya sahip olması sağlanmaktadır. Bu yaklaşım yapılmayıp (2.87) ifadesindeki akı da (2.69) ifadesindeki sonlu eleman açılımına tabi tutulsa idi, kaynak matrisleri de tıpkı sistem matrislerinin ki gibi simetrik, bant - genişlikli yapıda olacaktı. Bilgisayar belleğinden tasarruf için çoğu sonlu eleman uygulamasında yığılmış kaynak yaklaşımı kullanılmaktadır.

Fisyon kaynağı iterasyonu sırasında grup içi denklemin ((2.36) ifadesi) çözümü, sonlu eleman yaklaşımıyla ; akı hesabı için :

$$\underline{A}_g^{(n+1)} \underline{\emptyset}_g^{(n+1)} = \underline{S}_g^{(n+1)} \quad (2.92)$$

şekline dönüşmüştür. Burada ; $\underline{A}_g$, (2.40) daki $\underline{D}$ 'nin $\underline{D}^g$ ' ye Σ_r ' nin ise $\Sigma_{r,g}$ 'e eşit alınması ile hesaplanır.

Öte yandan ;

$$\underline{S}_g^{(n+1)} = \sum_{g'=1}^{g-1} \underline{S}_{g \leftarrow g'}^{g'(n+1)} \underline{\emptyset}_g^{g'(n+1)} + \frac{1}{k^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \underline{F}_{g \leftarrow g'}^{g'(n)} \underline{\emptyset}_g^{g'(n)} \quad (2.93)$$

şeklinde tanımlanır. $\underline{S}_{g \leftarrow g'}^{g'(n+1)}$ (2.88) denklemindeki Σ_i ' nin $\Sigma_{s,i}^{g \leftarrow g'}$ ' e eşit alınması, $\underline{F}_{g \leftarrow g'}^{g'(n)}$ ise yine (2.88) denklemindeki Σ_i ' nin $\chi_{g \vee \Sigma_{t,g',i}}$ ne eşit alınmasıyla elde edilir.

Ek akı hesabında ise denklem ;

$$\underline{A}_g^{+(n+1)} \underline{\emptyset}_g^{+(n+1)} = \underline{S}_g^{+(n+1)} \quad (2.94)$$

şeklindedir. $\underline{A}_g$, doğal olarak (2.92) ' deki ile aynı olup ;

$$\underline{S}_g^{+(n+1)} = \sum_{g'=g+1}^G \underline{S}_{g' \leftarrow g}^{g'(n+1)} \underline{\emptyset}_g^{g'(n+1)} + \frac{1}{k^{(n)}} \sum_{g'=1}^G \underline{F}_{g' \leftarrow g}^{g'(n)} \underline{\emptyset}_g^{g'(n)} \quad (2.95)$$

şeklinde tanımlıdır.

III. UYGULAMALAR

Daha önceki bölümde açıklanan teori geliştirilen 75_YIL programına uyarlanarak FORTRAN dilinde programlandı. 75_YIL programı çok gruplu yetkinlik problemini çözerek akı ve ek-akı dağılımlarını hesaplayabilecek nitelikte geliştirildi. 75_YIL programı ayrıca serbest kaynaklı problemlerde akı ve ek-akı dağılımlarını hesaplama yeteneğine de sahiptir. Program, tek boyutlu silindirik geometride Galerkin sonlu elemanlar yöntemiyle lineer, kuadratik, kübik ve kuartik Lagrange tipi sonlu elemanlar kullanarak, grup içi difüzyon denklemini çözmekte, lineer sistem çözümlerini ise yarı-bant genişlikli depolama tekniği kullanılarak Cholesky ayrışımı ile gerçekleştirilmektedir.

Programın çalışılırlığının kanıtlanması için, önce analitik çözümü bilinen problemlerin bu programla çözümü gerçekleştirildi. Elde edilen etkin çoğaltma katsayıları, ek-akı (ve akı) dağılımları, analitik sonuçlarla karşılaştırılarak, programın çalışırılığı kanıtlandı. Program daha sonra İTÜ Triga Mark II reaktörü hesabında ek akı (ve akı) tayini için koşuldu. Burada elde edilen sonuçlar, Slovenya ‘ da geliştirilmiş olan CEBIS [11] adlı sonlu farklar programının çıktıları ile karşılaştırıldı ve doğrulukları sınanarak görüldü.

III.1 ANALİTİK ÇÖZÜMÜ BULUNAN PROBLEMLER ARACILIĞI İLE SINAMA

III.1.1. Cıplak, Homojen Reaktörün Tek Gruplu Difüzyon Teorisi Analizi

Program, ilk önce en basit yetkinlik özdeğer problemini oluşturan bu problemde sınıandı. Tek gruplu teori de akı ile ek-akı özdeş olduğundan, ayrı ayrı hesap yapılmayıp, tek bir koşu yeterli oldu. Bu problemde $D = 9,21 \text{ cm.}$, $\Sigma_a = 0,152149 \text{ cm}^{-1}$, $v\Sigma_f = 0,155952 \text{ cm}^{-1}$ alındı. Silindirik sistemin yarıçapı ise $R = 98,74 \text{ cm}$ kabul edildi.

Bu reaktörün etkin çoğaltma katsayısı analitik olarak ;

$$k_{\text{etk}} = \frac{v \Sigma f / \Sigma a}{1 + L^2 B g^2}, \quad L = \sqrt{D / \Sigma a} \quad (3.1)$$

formülüyle $k_{\text{etk}} = 0,989462$ olarak hesaplanır. Özdeş olan akı ve ek-akı ise ; ek - akı merkezde 1 olarak normalize edilirse ;

$$\bar{\phi}(r) = J_0(2,405 r / R), \quad 0 < r < R \quad (3.2)$$

şeklindedir. Sistemin difüzyon uzunluğu $L = 7,78$ cm. olup, sistem yaklaşık 12,7 difüzyon uzunluğundadır. 75_YIL programı 240 lineer sonlu eleman kullanılarak son derece ince bir sonlu eleman ızgarası ile koşulmuştur. Elde edilen $k_{\text{etk}} = 0,989419$ şeklindedir. Buna göre k_{etk} 'deki hata % 0,0043 olup yüzbinde 4 gibi çok küçük bir hata ile 75_YIL programı etkin çoğaltma katsayısını hesaplamıştır. Sistemin ortalama akısı (veya ek-akısı) ;

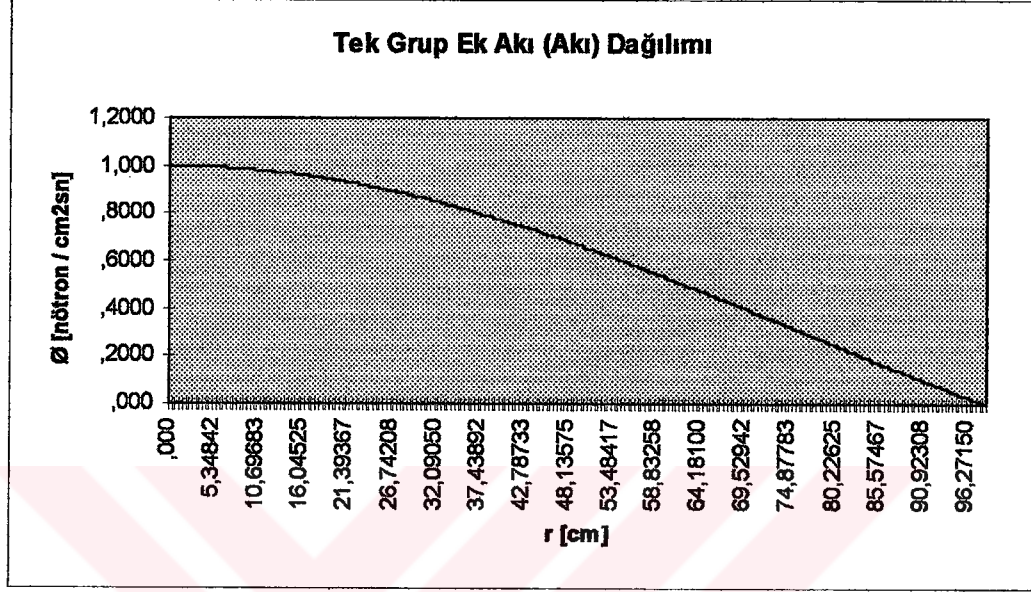
$$\bar{\phi} = \frac{\int_0^R \phi(r) 2 \pi r dr}{\pi R^2} \quad (3.3)$$

tanımından ;

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{2}{R^2} \int_0^R r J_0(2,405 r / R) dr \\ &\Rightarrow \frac{2}{(2,405)^2} \int_0^{2,405} r' J_0(r') dr' \\ &\Rightarrow \frac{2}{(2,405)^2} \cdot r' \cdot J_1(r') \Big|_0^{2,405} \\ &\Rightarrow \frac{2}{(2,405)^2} \cdot 2,405 \cdot J_1(2,405) \\ &\equiv 2 * 0,520 / 2,405 = 0,432 \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. 75_YIL programının hesapladığı ortalama ek-akı da üç hane hassasiyetle yine 0,432 'dir.

Bu sistem için elde edilen analitik ve sayısal akı dağılımları grafiksel olarak Şekil 3.1 ' de sunulmuştur. Sayısal çözümdeki çok yüksek hassasiyet nedeni ile iki grafik birbirinden ayırt edilemeyecek şekilde üst üste binmişlerdir.



Şekil 3.1 Çıplak Homojen Reaktörde Tek Gruplu Ek Akı Dağılımı

III.1.2. Çıplak, Homojen Reaktörün İki Gruplu Akı ve Ek Akı Dağılımlarının İrdelenmesi

İki gruplu teoride akı ve ek akı özdeş olmaktan çıkarılır. Bu bağlamda 75_YIL programı koşularak, iki gruplu teori çerçevesinde yine çıplak, homojen bir reaktörün ilk önce yetkin yarıçapı analitik olarak hesaplanmış, sonra bu yetkin yarıçap 75_YIL programına girdilenecek k_{etik} 'i 1 ' e ne kadar yakın hesapladığı araştırılmıştır. Ayrıca analitik ve sayısal, hızlı ve termal ek-akı ve akıların karşılaştırılması yapılmıştır.

İki gruplu tesir kesitleri $D_1 = 1,2627 \text{ cm.}$, $\Sigma_{r,1} = 0,02619 \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} = 0,01412 \text{ cm}^{-1}$, $v\Sigma_{f,1} = 0,008476 \text{ cm}^{-1}$, $D_2 = 0,3543 \text{ cm}^{-1}$, $\Sigma_{a,2} = 0,1210 \text{ cm}^{-1}$, $v\Sigma_{f,2} = 0,18514 \text{ cm}^{-1}$, $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = 0$ olarak alınmıştır.

Yetkinlik koşulu ;

$$1 = \frac{(\nu \Sigma_{f,2} / \Sigma_{a,2}) (\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} / \Sigma_{r,1})}{(1 + L_1^2 Bg^2)(1 + L_2^2 Bg^2)} + \frac{(\nu \Sigma_{f,1} / \Sigma_{r,1})}{(1 + L_1^2 Bg^2)} \quad (3.4)$$

şeklindedir [5]. Burada $L_1^2 = D_1 / \Sigma_{r,1}$, $L_2^2 = D_2 / \Sigma_{a,2}$ olarak tanımlanmışlardır.

Sayısal değerler yerine konulursa bilinmeyen olarak geometrik akı - büküm, Bg^2 'yi bilinmeyen olarak içeren ;

$141,1726165 (Bg^2)^2 + 50,19352285703 Bg^2 - 0,148559256 = 0$ ikinci derece cebirsel denklem ortaya çıkar. Bu denklem çözülerek ; $Bg^2 = 0,00293549338709 \text{ cm}^{-2}$ sonucu elde edilir. Silindir şeklinde reaktör geometrik akı büküm tanımına göre $Bg^2 = (2,405 / R)^2$ ' den $R = 44,38891478038 \text{ cm}$. olarak yetkin yarıçap bulunur. İki gruplu teoriye göre, termal grup akı denklemi ;

$$-\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \phi_1 + (D_2 Bg^2 + \Sigma_{a,2}) \phi_2 = 0$$

çözülürse ;

$S = \phi_2 / \phi_1 = \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} / (D_2 Bg^2 + \Sigma_{a,2})$ elde edilir. Sayısal değerler yerine konulursa $S = 0,115699$ olarak saptanır. Termal grup ek-akı denklemi ise $\chi_1 = 1$ olduğu göz önüne alınarak [5] ;

$$-\nu \Sigma_{f,2} \phi_1^+ + (D_2 Bg^2 + \Sigma_{a,2}) \phi_2^+ = 0$$

şeklinde yazılabilir. Sayısal değerler yerleştirilirse ;

$$S^+ = \phi_2^+ / \phi_1^+ = 1,517043029007 \text{ bulunur.}$$

Görüldüğü gibi termal akı hızlı akıdan küçük olduğu halde ($S = 0,115699$), termal ek akı, hızlı ek-akıdan büyüktür. Bunun nedeni termal nötronların reaktiviteye tesir açısından hızlı nötronlara nazaran daha büyük öneme sahip olmalarından kaynaklanmaktadır. Geçen alt bölümde anlatıldığı şekilde ortalama akı hesabı da yapılabilir. Bu takdirde ortalama değerler ; $\phi_1(0) = 1$, $\phi_1^+(0) = 1$ normalizasyonu ile ;

$$\bar{\phi}_1 = 0,4324$$

$$\bar{\phi}_1^+ = 0,4324$$

$$\bar{\phi}_2 = 0,0500$$

$$\bar{\phi}_2^+ = 0,6550$$

olarak hesaplanmıştır.

Bu problem $R = 44,38891478$ (yetkin yarıçap) girilerek 75_YIL programında 320 lineer sonlu eleman kullanılarak koşulmuş ve $k_{eff} = 1,00002164$ olarak hesaplanmıştır. Buna göre hata % 0,0022 olup yüzbinde 2 gibi çok çok küçük bir değerdir. 75_YIL programı akı ve ek-akı problemleri için ayrı ayrı koşulmuş, ve ortalama akılar ;

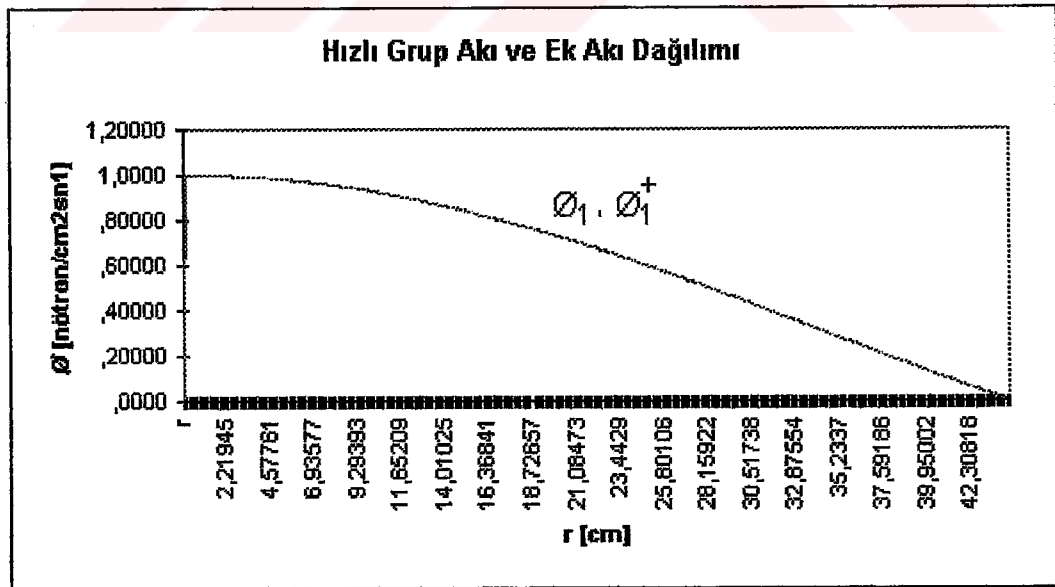
$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1 &= 0,4318 & \bar{\phi}_1^+ &= 0,4318 \\ \bar{\phi}_2 &= 0,0500 & \bar{\phi}_2^+ &= 0,6550\end{aligned}$$

olarak hesaplanmıştır.

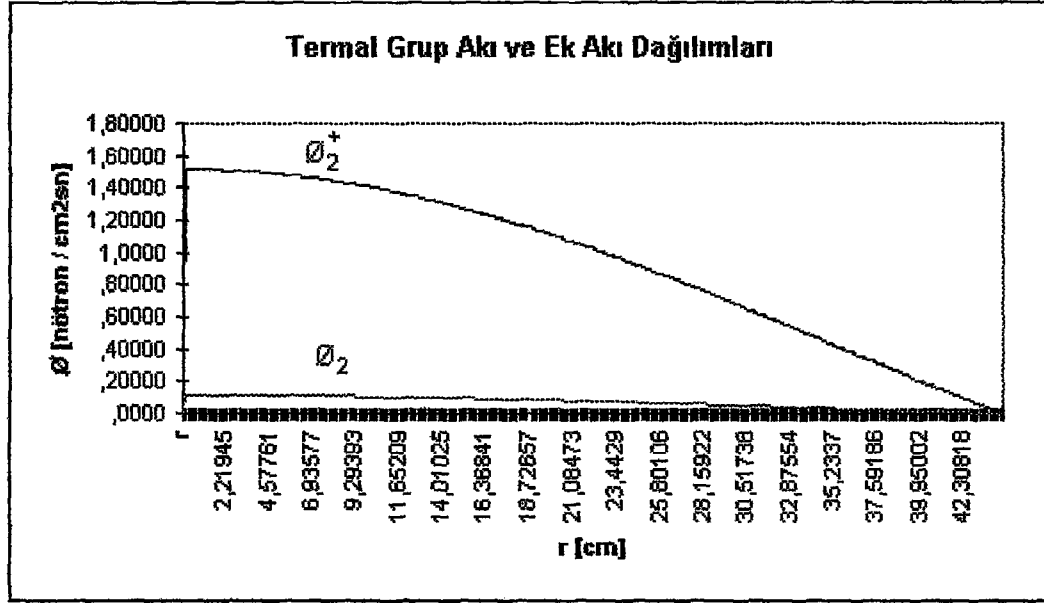
Yani analitik değerler ile sayısal değerler arasında çok az farklılık göze çarpmaktadır. Analitik akı dağılımı, belirtilen normalizasyonla, $R = 44,38891478038$ cm. olarak

$$\begin{aligned}\phi_1(r) &= J_0(2,405 r / R) \\ \phi_2(r) &= 0,115699 \cdot J_0(2,405 r / R) \\ \phi_1^+(r) &= J_0(2,405 r / R) \\ \phi_2^+(r) &= 1,517043029007 \cdot J_0(2,405 r / R)\end{aligned}$$

şeklindedir. Hızlı ve termal akı ve ek-akı dağılımları Şekil 3.2 ve Şekil 3.3 ' da sunulmuştur. Şekillerden de görüldüğü gibi termal ek-akı, akının çok üzerinde olup, termal nötronların reaktiviteye tesiri açısından önemini gözler önüne sermektedir.



Şekil 3.2 Çıplak Homojen Reaktörde Hızlı Grup Akı ve Ek Akı Dağılımı



Şekil 3.3 Çıplak Homojen Reaktörde Termal Grup Akı ve Ek Akı Dağılımı

III.1.3. Yansıtıcı Reaktörün İki Gruplu Teori Analizi,

Ek-Akı ve Akı Dağılımları

75_YIL programının doğrulanması için ele aldığımız üçüncü problem yansıtıcı termal ve yetkin bir reaktörün iki-gruplu difüzyon teorisi ile hesabı oldu. Kalp ve yansıtıcıdan oluşan böyle bir sistem için iki gruplu ek difüzyon denklemleri ; kalp için :

$$-D_1^k \nabla^2 \phi_1^+(\vec{r}) + \sum_{r,1}^k(\vec{r}) \phi_1^+(\vec{r}) = \nu_1 \sum_{f,1} \phi_1^+(\vec{r}) + \sum_{s,2 \leftarrow 1}^k \phi_2^+(\vec{r}) \quad (3.5)$$

$$-D_2^k \nabla^2 \phi_2^+(\vec{r}) + \sum_{a,2}^k(\vec{r}) \phi_2^+(\vec{r}) = \nu_2 \sum_{f,2} \phi_1^+(\vec{r}), \quad r \in V^k \quad (3.6)$$

şeklindedir. Bu denklemler ;

$$(M_1^k)^2 = D_1^k / (\sum_{r,1}^k - \nu_1 \sum_{f,1}) \quad (M_2^k)^2 = D_2^k / \sum_{a,2}^k \quad (3.7)$$

tanımlarıyla ;

$$\nabla^2 \phi_1^+(\vec{r}) - [1/(M_1^k)^2] \phi_1^+(\vec{r}) = [-\sum_{s,2 \leftarrow 1}^k / D_1^k] \phi_2^+(\vec{r}) \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 \phi_2^+(\vec{r}) - [1/(M_2^k)^2] \phi_2^+(\vec{r}) = [-\nu_2 \sum_{f,2}^k / D_2^k] \phi_1^+(\vec{r}) \quad (3.9)$$

şeklinde de yazılabilir. Son denklemi $\phi_1^+(\vec{r})$ için çözülürse ;

$$\phi_1^+(\vec{r}) = [D_2^k / \nu_2 \sum_{f,2}^k] [-\nabla^2 \phi_2^+(\vec{r}) + (1/(M_2^k)^2) \phi_2^+(\vec{r})] \quad (3.10)$$

bulunur.

Son ifade, hızlı - grup denkleminde kullanılırsa ;

$$(M_1^k)^2 (M_2^k)^2 \nabla^4 \emptyset_2^+(\vec{r}) - [(M_1^k)^2 + (M_2^k)^2] \nabla^2 \emptyset_2^+(\vec{r}) - [((\sum_{s,2 \leftarrow 1}^k (M_1^k)^2 (M_2^k)^2 v_2^k \sum_{f,2}^k) / D_1^k D_2^k) - 1] \emptyset_2^+(\vec{r}) = 0 \quad (3.11)$$

öte yandan, (3.11) no ' lu denklemde $\emptyset_2^+$ ' ı çarpan katsayı $(k_\infty - 1)$ ' dir. (3.11) ifadesi düzenlenerek ;

$$\nabla^4 \emptyset_2^+(\vec{r}) - [1/(M_1^k)^2 + 1/(M_2^k)^2] \nabla^2 \emptyset_2^+(\vec{r}) - [(k_\infty - 1)/(M_1^k)^2 (M_2^k)^2] \emptyset_2^+(\vec{r}) = 0 \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklem [6] ;

$$(\nabla^2 + \mu^2) (\nabla^2 - \lambda^2) \emptyset_2^+(\vec{r}) = 0 \quad (3.13)$$

şeklinde faktörize edilirse ;

$$\mu^2 \lambda^2 = (k_\infty - 1) / [(M_1^k)^2 (M_2^k)^2] \quad (3.14)$$

$$\lambda^2 - \mu^2 = 1/(M_1^k)^2 + 1/(M_2^k)^2 \quad (3.15)$$

denklemleri bulunur. Bu iki denklem birarada çözülürse ;

$$\mu^2 = (1/2(M_1^k)^2 (M_2^k)^2) [-((M_1^k)^2 + (M_2^k)^2) + \sqrt{[(M_1^k)^2 + (M_2^k)^2]^2 + 4(k_\infty - 1)(M_1^k)^2 (M_2^k)^2}]^{1/2} \quad (3.16)$$

$$\lambda^2 = (1/2(M_1^k)^2 (M_2^k)^2) [((M_1^k)^2 + (M_2^k)^2) + \sqrt{[(M_1^k)^2 + (M_2^k)^2]^2 + 4(k_\infty - 1)(M_1^k)^2 (M_2^k)^2}]^{1/2} \quad (3.17)$$

elde edilir. Fakat (3.13) denkleminin çözümü ;

$$(\nabla^2 + \mu^2) X(\vec{r}) = 0 \quad (3.18)$$

$$(\nabla^2 - \lambda^2) Y(\vec{r}) = 0 \quad (3.19)$$

denklemini sağlayan fonksiyonlardır. Buna göre, genel çözüm ;

$$\emptyset_2^+(r) = A^+ X(\vec{r}) + C^+ Y(\vec{r}) \quad (3.20)$$

şeklinde oluşur. Çalışma özelinde, sonsuz silindir geometri çerçevesinde hareket edilmektedir. Bu geometride (3.18) denklemi ;

$$(1/r) \cdot d/dr[r dX/dr] + \mu^2 X(\vec{r}) = 0 \quad (3.21)$$

sıfırıncı mertebe Bessel diferansiyel denklemdir. Akının sonlu olması koşulu göz önüne alınırsa;

$$X(r) = J_0(\mu r) \quad (3.22)$$

bulunur.

Silindir geometride (3.19) ise ;

$$(1/r) \cdot d/dr[r dY/dr] - \lambda^2 Y(\vec{r}) = 0 \quad (3.23)$$

sıfıncı mertebe değiştirilmiş Bessel differansiyel denklemdir. Yine akının sonlu olması koşulundan ;

$$Y(r) = I_0(\lambda r) \quad (3.24)$$

bulunur. Buna göre silindirik geometride ;

$$\varnothing_2^+(r) = A^+ I_0(\mu r) + C^+ I_0(\lambda r) \quad (3.25)$$

olarak, kalp içi dağılım bulunur. Hızlı ek-akı için

$$\varnothing_1^+(\vec{r}) = A^+ X(\vec{r}) + C^+ Y(\vec{r}) \quad (3.26)$$

çözümü önerilir ve (3.25), (3.26) ifadeleri (3.5) numaralı ifadesine yerleştirilirse ;

$$[(\mu^2 D_1^k + \sum_{r,1}^k - v_1 \sum_{f,1}^k) A^+ - \sum_{s,2 \leftarrow 1}^k A^+] X(\vec{r}) - [(\lambda^2 D_1^k - (\sum_{r,1}^k - v_1 \sum_{f,1}^k)) C^+ + \sum_{s,2 \leftarrow 1}^k C^+] Y(\vec{r}) = 0 \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) ' nin sağlanması için X(r) ve Y(r) 'nin katsayılarının özdeş olarak sıfıra eşit olması gerekir. Buradan ;

$$S_1^+ = A^+ / A^+ = [\sum_{s,2 \leftarrow 1}^k / (\sum_{r,1}^k - v_1 \sum_{f,1}^k)] / (1 + \mu^2 (M_1^k)^2) \quad (3.28)$$

$$S_2^+ = C^+ / C^+ = [\sum_{s,2 \leftarrow 1}^k / (\sum_{r,1}^k - v_1 \sum_{f,1}^k)] / (1 - \lambda^2 (M_1^k)^2) \quad (3.29)$$

buradan da ;

$$\varnothing_1^+(\vec{r}) = A^+ S_1^+ X(\vec{r}) + C^+ S_2^+ Y(\vec{r}) \quad (3.30)$$

çözümü bulunur. Öte yandan, yansıtıcı içinde iki grup denklemleri ;

$$-D_1^y \nabla^2 \varnothing_1^+(\vec{r}) + \sum_{r,1}^y \varnothing_1^+(\vec{r}) = \sum_{s,2 \leftarrow 1}^y \varnothing_2^+(\vec{r}) \quad (3.31)$$

$$-D_2^y \nabla^2 \varnothing_2^+(\vec{r}) + \sum_{a,2}^y \varnothing_2^+(\vec{r}) = 0 \quad , \quad r \in V^y \quad (3.32)$$

şeklinde dir. (3.32) numaralı ifade $-D_2^y$ ' e bölünerek ;

$$\nabla^2 \varnothing_2^+(\vec{r}) - [1 / (L_2^y)^2] \varnothing_2^+(\vec{r}) = 0 \quad (3.33)$$

denkle mi bulunur. Çözüm ise ;

$$\varnothing_2^+(\vec{r}) = G^+ Z_2(\vec{r}) \quad (3.34)$$

şeklinde ifade edilir.

(3.33) denklemini, silindirik geometride ;

$$(1/r) \cdot d/dr[r d\varnothing_2^+/dr] - [1 / (L_2^y)^2] \varnothing_2^+(\vec{r}) = 0 \quad (3.35)$$

sıfırıncı mertebe değiştirilmiş Bessel denklemdir. Kalp yarıçapı R ile yansıtıcı kalınlığı b ile gösterilip, $\varnothing_2^+(R + b) = 0$ boşluk sınır koşulu uygulanırsa ;

$$Z_2(r) = I_0(r / L_2^y) R_0 [(R + b) / L_2^y] - I_0((R + b) / L_2^y) K_0(r / L_2^y) \quad (3.36)$$

olarak ortaya çıkar. Şimdi ;

$$\varnothing_1^+(\vec{r}) = S_3^+ \varnothing_2^+(\vec{r}) + F^+ Z_1(\vec{r}) \quad (3.37)$$

varsayalım. Burada $Z_1(r)$;

$$\nabla^2 Z_1(\vec{r}) - [1 / (L_2^y)^2] Z_1(\vec{r}) = 0 \quad (3.38)$$

denklemini $Z_1(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in S$ (Sistem dış yüzeyi sağlayan fonksiyon) olarak tanımlanmıştır. $Z_1(\vec{r})$, (3.36) ' de L_2^y ' nin L_1^y ' e ile değiştirilmesi ile açık biçimde yazılabilir. (3.34) ve (3.37), (3.31) ' da kullanılırsa ;

$$S_3^+ F^+ [\nabla^2 Z_2(\vec{r}) - [1 / (L_2^y)^2 - (\sum_{s,2 \leftarrow 1}^y / (S_3^+ D_1^y))] Z_2(\vec{r})] + F^+ [\nabla^2 Z_1(\vec{r}) - (1 / (L_1^y)^2) Z_1(\vec{r})] = 0 \quad (3.39)$$

bulunur. Ancak (3.38) tanımı nedeni ile F^+ ' nın katsayısı sıfırdır. Bu nedenle ;

$$\nabla^2 Z_2(\vec{r}) = [1 / (L_2^y)^2 - (\sum_{s,2 \leftarrow 1}^y / (S_3^+ D_1^y))] Z_2(\vec{r}) \quad (3.40)$$

olması gerekir. (3.34) ve (3.35) ifadeleri (3.40) ile karşılaştırılırsa ;

$$1 / (L_2^y)^2 = 1 / (L_1^y)^2 - (\sum_{s,2 \leftarrow 1}^y / (S_3^+ D_1^y)) \quad (3.41)$$

denklemini elde edilir. (3.41) ifadesi, S_3^+ için çözülerek ;

$$S_3^+ = (\sum_{s,2 \leftarrow 1}^y / D_1^y) [(L_1^y)^2 (L_2^y)^2 / ((L_2^y)^2 - (L_1^y)^2)] \quad (3.42)$$

sabiti bulunur. Kalp yansıtıcı arayüzünde ; S_I ' de :

$$\begin{aligned} \varnothing_2^+(\vec{r}^-) &= \varnothing_2^+(\vec{r}^+) \\ D_2^k d\varnothing_2^+(\vec{r}^-) / dn &= D_2^y d\varnothing_2^+(\vec{r}^+) / dn \\ \varnothing_1^+(\vec{r}^-) &= \varnothing_1^+(\vec{r}^+) \\ D_1^k d\varnothing_1^+(\vec{r}^-) / dn &= D_2^y d\varnothing_1^+(\vec{r}^+) / dn, r \in S_I \end{aligned} \quad (3.43)$$

süreklilik koşulları geçerlidir.

X, Y, Z₁, Z₂ ile bu fonksiyonların arayüzde aldıkları değerleri simgelenendirilirse ;

$$\begin{aligned}
 A^+ X + C^+ Y &= G^+ Z_2 \\
 A^+ D_2^k X' + C^+ D_2^k Y' &= G^+ D_2^y Z_2' \\
 A^+ S_1^+ X + C^+ S_2^+ Y &= G^+ S_3^+ Z_2 + F^+ Z_1 \\
 A^+ D_1^k S_1^+ X' + C^+ D_1^k S_2^+ Y' &= G^+ D_1^y S_3^+ Z_2' + F^+ D_1^y Z_1' \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

elde edilir. “ ’ ” işareti normal türev belirtmektedir. (3.39) homojen lineer sistemin sıfırdan başka çözümü olması için katsayılar determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Buradan ;

$$\begin{vmatrix}
 X & Y & -Z_2 & 0 \\
 D_2^k X' & D_2^k Y' & -D_2^y Z_2' & 0 \\
 S_1^+ X & S_2^+ Y & -S_3^+ Z_2 & -Z_2 \\
 D_1^k S_1^+ X' & D_1^k S_2^+ Y' & -D_1^y S_3^+ Z_2' & -D_1^y Z_1'
 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.45)$$

Determinant açılınca, sistem yetkinlik koşulu [6] ;

$$\begin{aligned}
 X' / X &= [D_2^k D_1^y (S_3^+ - S_1^+) (Y'/Y)(Z_1'/Z_1) + (D_2^k D_1^k S_2^+ - D_2^k D_1^y S_3^+) * \\
 &\quad (Y'/Y)(Z_2'/Z_2) + D_1^y D_2^y (S_1^+ - S_2^+)(Z_1'/Z_1)(Z_2'/Z_2)] / \\
 &\quad [D_1^k D_2^k (S_2^+ - S_1^+) (Y'/Y) + (D_2^y D_1^k S_1^+ - D_2^k D_1^y S_3^+) (Z_2'/Z_2) + \\
 &\quad D_2^k D_1^y (S_3^+ - S_2^+)(Z_1'/Z_1)] \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Silindirik geometride (3.22), (3.23) ve (3.36) ‘ den ;

$$X' / X = -\mu J_1(\mu R) / J_0(\mu R) \quad Y' / Y = \lambda I_1(\lambda R) / I_0(\lambda R)$$

$$\begin{aligned}
 Z_g' / Z_g &= k_g [I_1(k_g R) K_0(k_g(R+b)) + I_0(k_g(R+b)) K_1(k_g R)] / \\
 &\quad I_0(k_g R) K_0(k_g(R+b)) - I_0(k_g(R+b)) K_0(k_g R)] \\
 g=1,2 \quad k_g &= 1/(L_g^y)^2 \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

açık formları yazılabilir. (3.47) ifadeleri (3.46) ‘in içine yerleştirilirse, (3.46) bilinmeyen olarak yetkin yarıçap (R) ‘yi içeren bir transandan denkleme dönüşür. Bu denklem sayısal olarak çözülerek yetkin yarıçap hesaplanır.

(3.45) determinanı sıfır olduğuna göre, (3.44) denklemleri lineer bağımlıdır, yani matris rankı üçtür. Bu denklemlerden ilk üçü ;

$$\begin{aligned} C^+ Y - G^+ Z_2 &= -A^+ X \\ C^+ D_2^k Y' - G^+ D_2^k Z_2' &= -A^+ D_2^k X' \\ C^+ S_2^+ Y - G^+ S_3^+ Z_2 - F^+ Z_1 &= -A^+ S_1^+ X \end{aligned} \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistem, Cramer kuralına göre çözülürse ;

$$\begin{aligned} C^+ &= A^+ X / \beta^+ Y (D_2^k X'/X - D_2^y Z_2'/Z_2) \\ F^+ &= A^+ X / \beta^+ Z_2 (D_2^k X'/X - D_2^k Y'/Y) \\ F^+ &= A^+ X / \beta^+ Z_1 [D_2^k (S_2^+ - S_3^+) X'/X + D_2^k (S_3^+ - S_1^+) Y'/Y + D_2^y (S_1^+ - S_2^+) Z_2'/Z_2] \end{aligned} \quad (3.49)$$

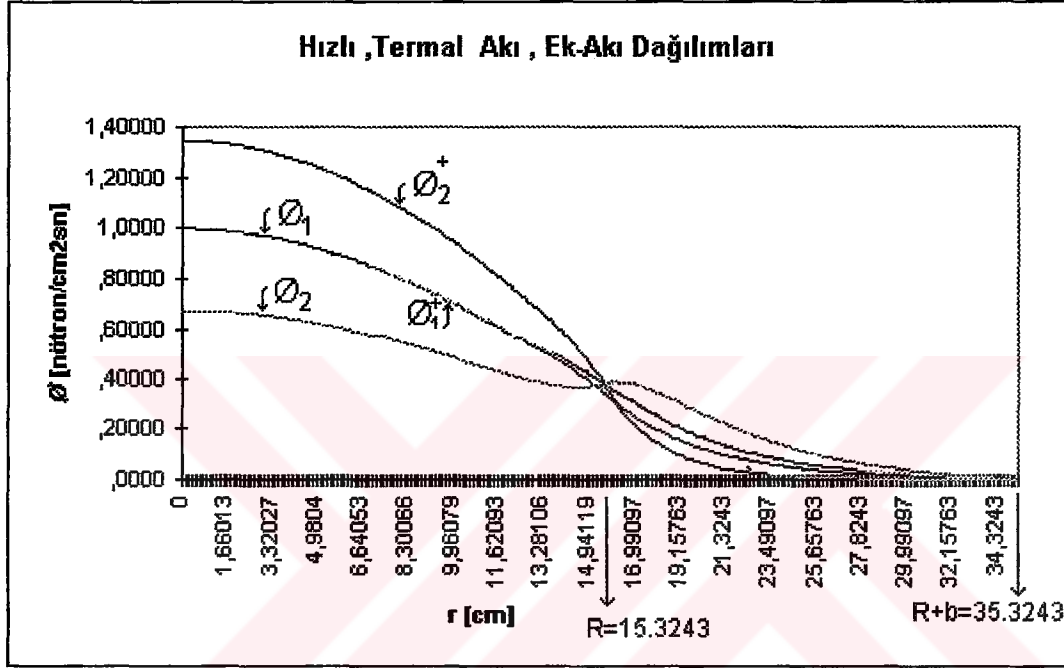
bulunur. Burada ;

$$\beta^+ = D_2^y (Z_2'/Z_2) - D_2^k (Y'/Y) \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu aşamada A^+ sabiti cinsinden çözüm tamamlanmıştır. Bu çalışmada A^+ sabiti $\emptyset_1^+ (0) = 1$ olacak şekilde normalize edilmiştir. 75_YIL programının doğrulanması için kalp sabitleri $D_1^k = 1,13 \text{ cm}$, $D_2^k = 0,16 \text{ cm}$, $\sum_{r,1}^k = 0,0419 \text{ cm}^{-1}$, $\sum_{a,2}^k = 0,06 \text{ cm}^{-1}$, $\sum_{s,2 \leftarrow 1}^k = 0,0419 \text{ cm}^{-1}$, $\sum_{f,1}^k = 0 \text{ cm}^{-1}$, $\sum_{f,2}^k = 0,0834 \text{ cm}^{-1}$ alınmış ; yansıtıcı için ise $D_1^y = 1,13 \text{ cm}$, $D_2^y = 0,16 \text{ cm}$, $\sum_{r,1}^y = 0,0419 \text{ cm}^{-1}$, $\sum_{a,2}^y = 0,0197 \text{ cm}^{-1}$, $\sum_{s,2 \leftarrow 1}^y = 0,0419 \text{ cm}^{-1}$ varsayılmıştır. Yansıtıcı kalınlığı ise $b=20 \text{ cm}$ kabul edilmiştir. Bu değerlerle $S_1^+ = 0,743625$, $S_2^+ = -0,0957613$, $S_3^+ = -0,426978$ olarak hesaplanmıştır. Bu değerler girilerek (3.46) denklemleri, bilinmeyen olan yetkin yarıçap R için MATHEMATICA [14] kullanılarak çözülmüş ve $R = 15,3243 \text{ cm}$ bulunmuştur. $A^+ = 1$ alınınca ; $C^+ = -0,0000289564$, $F^+ = -0,0816872$, $G^+ = -0,00442707$ değerlerini alırlar. Sistem yetkin olduğuna göre $k_{etk} = 1$ 'dir. 75_YIL programını test etmek amacı ile kalp 120, yansıtıcı ise yine 120 lineer sonlu elemana bölünerek, $R = 15,3243 \text{ cm}$ alınıp, yetkinlik özdeğer hesabı yapılmıştır. 75_YIL 'ın hesapladığı $k_{etk} = 0,99945$ 'tir.

Bu da k_{eff} ' de % 0,055 (onbinde 6 kadar) hataya karşılık gelir ve 75_YIL 'ın k_{eff} ' i yüksek duyarlılıkla hesapladığını gösterir.

75_YIL programı kullanılarak, akı ve ek-akı dağılımları hesaplanmıştır. Elde edilen akı ve ek-akı dağılımları Şekil 3.4 ' de verilmiştir.



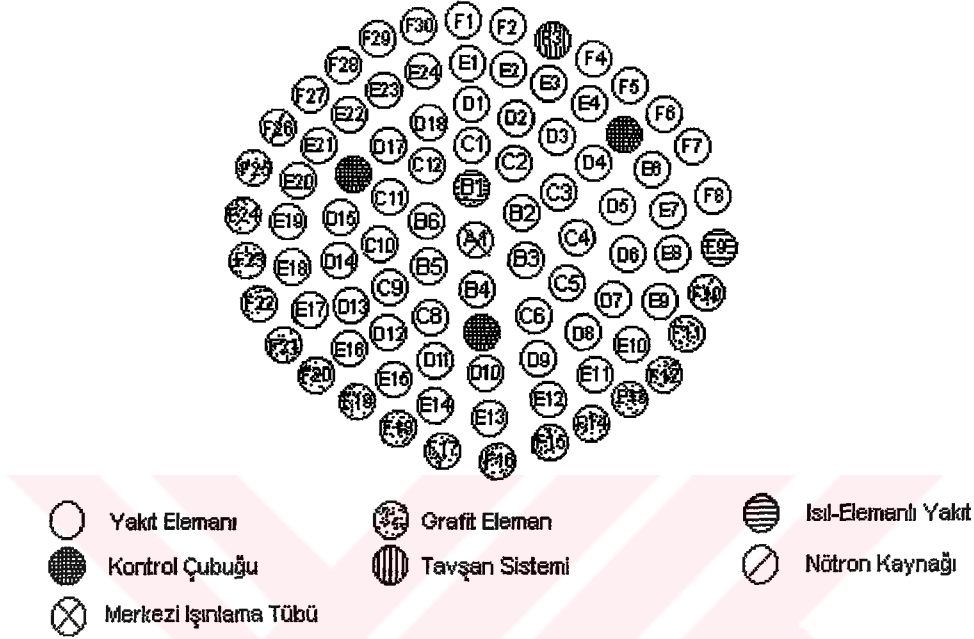
Şekil 3.4 Yansıtıcılı Reaktörde Hızlı - Termal Grup Akı ve Ek Akı Dağılımları

Şekil 3.4 'de kalp içinde, hızlı akının termal akıdan büyük olduğu görülürken, ek-akıda aksine bir davranış gözlemlenmektedir. Termal ek-akı, kalp içinde hızlı ek-akıdan çok daha büyüktür. Bu ek-akı fiziksel yorumuyla uyumlu olup, termal nötronların kalp içinde hızlı nötronlara nazaran reaktiviteye tesirleri açısından daha büyük bir öneme sahip olduklarını göstermektedir.

III.2.

İTÜ TRIGA MARK-II REAKTÖRÜ EK-AKİ HESABI

Şekil 3.5 ' de İTÜ Triga reaktörünün kalp düzeni sunulmuştur. Bu düzen içinde kalp, A, B, C, D, E ve F halkalarından oluşmaktadır [12];



Şekil 3.5 İTÜ Triga Mark II Reaktörü Kalp Düzeni

A halkası gerçekte bir halka olmayıp sadece merkezi ışınlama kanalından oluşmaktadır. B halkası 6 yakıt elemanı, C halkası ise 11 yakıt halkası ile bir su boşluğundan oluşmaktadır. D halkasının 17 yakıt elemanı ve bir su boşluğundan, E halkasının ise yine 23 yakıt elemanı ve bir su boşluğundan oluştuğu varsayılmıştır. F halkası ise 12 yakıt elemanı, 2 su boşluğu ve 16 grafit eleman içermektedir. F halkasının dışında ise grafit yansıtıcı bulunmaktadır [3]. Daha önce yapılan bir çalışmada yakıt elemanı, merkezi ışınlama kanalı, su kanalı, grafit eleman ve grafit yansıtıcı için WIMS-D / 4 programı aracılığı ile birim hücre bazında spektrum hesabı yapılarak, bunlar için iki gruplu tesir kesitleri hesaplanmıştı. Yine bu çalışmada, homojenizasyon yapılarak, tek boyutlu silindirik bir model çerçevesinde homojenleştirilmiş, halka tesir kesitleri belirlenmiştir. Bu homojenizasyona göre, reaktör dış yarıçapları sırası ile ; 2.1371, 5.9709, 9.8979, 13.8629, 17.7329 ve 21.8049 cm olan A, B, C, D, E ve F halkalarından oluşuyordu. Grafit yansıtıcı ise 51.64 cm 'ye kadar uzanıyordu. Bu homojenizasyon sonunda çalışmada elde edilmiş iki gruplu tesir kesitleri Tablo 3.1 ve Tablo 3.2 'de sunulmuştur.

Tablo 3.1 Triga Hızlı Grup Homojenleştirilmiş Halka Tesir Kesitleri

<u>HALKA</u>	D₁ (cm)	$\Sigma_{r,1} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$v\Sigma_{f,1} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$
A	1,21848	0,054012	0,053725	0.
B	1,01686	0,048046	0,04267	0,003199
C	1,02953	0,048611	0,043659	0,0029324
D	1,02527	0,048423	0,043329	0,0030213
E	1,02316	0,048328	0,043165	0,0030657
F	1,19994	0,033455	0,0312341	0,0012796
Yansıtıcı	1,30156	0,002848	0,002845	0.

Tablo 3.2 Triga Termal Grup Homojenleştirilmiş Halka Tesir Kesitleri

<u>HALKA</u>	D₂ (cm)	$\Sigma_{a,2} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	$v\Sigma_{f,2} \text{ (cm}^{-1}\text{)}$
A	0,246318	0,01588	0.
B	0,2444494	0,07921	0,119481
C	0,239855	0,07394	0,109524
D	0,241382	0,07570	0,112843
E	0,242152	0,07658	0,114503
F	0,358530	0,0356200	0,047792
Yansıtıcı	0,886434	0,000194	0.

$\chi_1 = 1$, $\chi_2 = 0$ alınmıştır. Verilen bu konfigürasyon ile 75_YIL programı A halkası 28, B halkası 56, C, D ve E halkaları 84, F halkası 56, grafit yansıtıcı ise 168 lineer sonlu elemana bölünerek toplam 560 elemanlık bir sonlu eleman ızgarası ile koşulmuştur. Yapılan bu koştur sonunda $k_{etk} = 1,20667$ olarak hesaplanmıştır. Bu konfigürasyon bir de Slovenya 'da geliştirilmiş CEBIS [11] adlı sonlu fark programı ile de eşit aralıklı 200 noktalık sonlu fark ızgarası ile de koşulmuş, bu koştur da $k_{etk} = 1,20571$ olarak hesaplanmıştır. 75_YIL ile CEBIS k_{etk} 'leri arasındaki fark % 0,08 (onbinde sekiz) olup, yeterli uyum görülmektedir. İki programda elde edilen halka ortalaması hızlı ve termal ek-akı ve akılar Tablo 3.3 ve Tablo 3.4 ' de verilmiştir. Sonuçlar verilirken her iki programda da $\bar{\phi}_1(0) = \bar{\phi}_1^+(0) = 1$ olacak şekilde normalizasyon yapılmıştır.

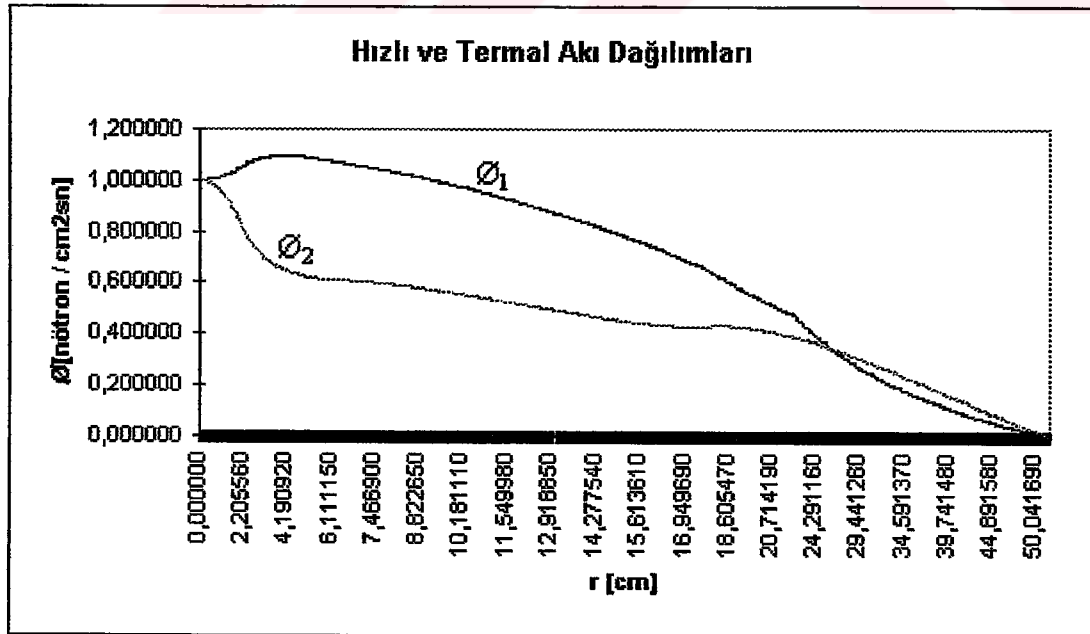
Tablo 3.3 75_YIL ve CEBIS Halka Ortalama Hızlı Akı ve Ek-Akı Karşılaştırması

Ortalama Akılar	$\bar{\phi}_1$		$\bar{\phi}_1^+$	
<u>HALKA</u>	75_YIL	CEBIS	75_YIL	CEBIS
A	1,02559	1,02623	0,998737	0,998694
B	1,08708	1,08750	0,980442	0,980292
C	1,02924	1,02937	0,919929	0,919439
D	0,91054	0,90996	0,812503	0,811461
E	0,74366	0,74218	0,670831	0,669156
F	0,55104	0,54900	0,528326	0,526348
Yansıtıcı	0,14594	0,14537	0,167952	0,167220

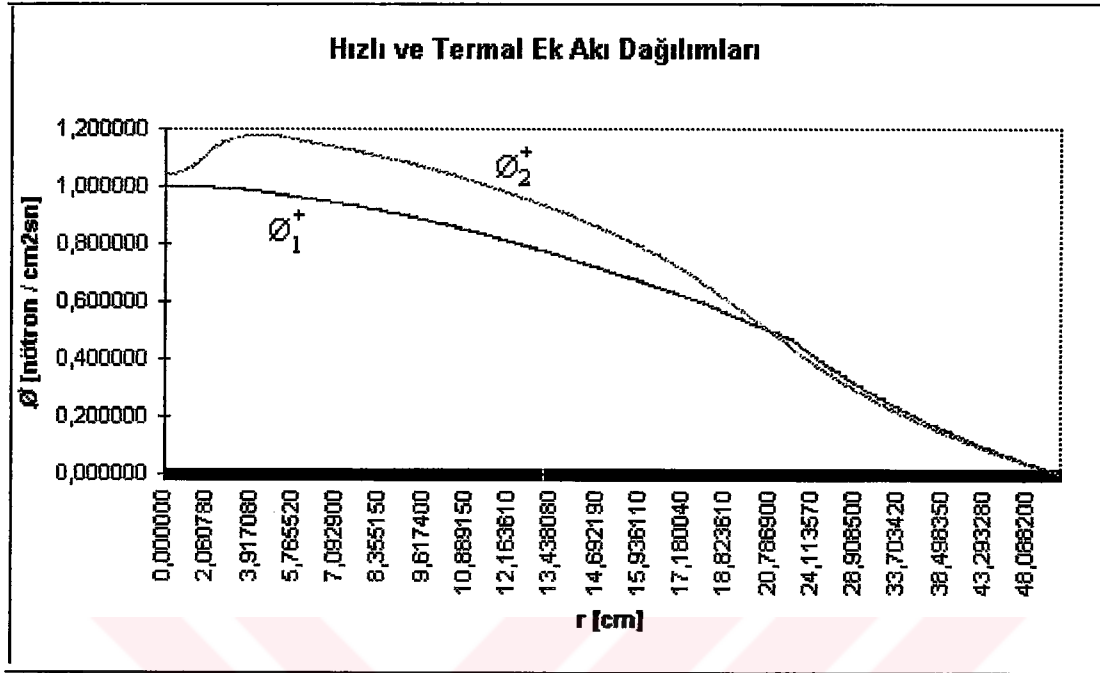
Tablo 3.4 75_YIL ve CEBIS Halka Ortalama Termal Akı ve Ek-Akı Karşılaştırması

Ortalama Akılar	— Ø ₂		— Ø ₂ ⁺	
<u>HALKA</u>	75_YIL	CEBIS	75_YIL	CEBIS
A	0,908650	0,908782	1,081077	1,081860
B	0,654977	0,6555589	1,169767	1,170215
C	0,588944	0,588967	1,109323	1,109454
D	0,515202	0,514819	0,980374	0,979645
E	0,442956	0,442079	0,788667	0,786479
F	0,416443	0,415082	0,548638	0,544937
Yansıtıcı	0,174268	0,173814	0,156403	0,155285

Yukarıdaki tablolarda görüldüğü gibi akı dağılımları da her iki programda çok benzerdir. Aşağıdaki Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 ' da hızlı ve termal akı ile ek-akı dağılımları görülmektedir. Burada da tablolar için yapılan normalizasyonun aynısı yapılmıştır.



Şekil 3.6 İTÜ Triga Mark II Reaktörü Hızlı ve Termal Akı Dağılımı



Şekil 3.7 İTÜ Triga Mark II Reaktörü Hızlı ve Termal Ek Akı Dağılımı

Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 ' de görüldüğü gibi, kalp içinde hızlı akı, termal akıdan büyük değerler alırken ; termal ek-akı, hızlı ek-akı 'ya göre kalp içinde daha büyük olmaktadır. Bu da kalp içinde eklenecek termal nötronların büyük öneme sahip olduklarını göstermektedir.

IV. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada çok gruplu nötron difüzyon teorisi çerçevesinde akı yanında ek-akı hesaplayabilen bir sonlu elemanlar programı geliştirilmiştir. Sınır koşullarında uyum sağlanabilmesi için boşluk sınırında sıfır akı ve sıfır ek-akı sınır koşulu kullanılması gerekmiştir. Bu nedenle Ritz yöntemine bağlı fonksiyonel minimizasyonu ilkesinden hareket eden varyasyonel sonlu elemanlar yöntemi yerine , ağırlaştırılmış kalıntılar ilkesine bağlı Galerkin türü bir sonlu elemanlar formülasyonu kullanılmıştır. Geometri eksenel yönde sonsuz , azimutal simetriye sahip tek boyutlu silindir olarak seçilmiştir. Formülasyonda, dördüncü dereceye kadar Lagrange tipi sonlu eleman baz fonksiyonlarına yer verilmiştir.

Bu durumda kuramsal alt yapı altında geliştirilen 75_YIL programı , önce analitik çözümü bulunan ek-özdeğer yetkinlik hesapları için kullanılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçların , analitik sonuçlarla , gerek etkin çoğaltma katsayısı , gerekse grup akı dağılımları yönünden uyum gösterdiği saptanmış ve bu şekilde programın çalışırılığı kanıtlanmıştır. Program daha sonra İTÜ Triga Mark - II reaktörü hesabı için kullanılmış , elde edilen etkin çoğaltma katsayısı ve grup akı dağılımları , CEBIS adlı sonlu-fark programının sonuçları ile karşılaştırılmıştır. 75_YIL ve CEBIS sonuçları arasında da yüksek duyarlılıkla uyum sağlandığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışma çerçevesinde geliştirilen 75_YIL programı kullanılarak daha fazla inceleme yapılabilecek bazı alanlar bulunmaktadır. Bunlar şöyle sıralanabilir. 75_YIL , dördüncü dereceye kadar Lagrange tipi sonlu elemanlara müsaade ettiği halde , bu tezde yapılan koşullar tezin bitirilmesi için olan zaman sınırlaması nedeniyle hep lineer elemanlarla yapılabilmektedir. Bu tür yüksek dereceli sonlu elemanlar da ek-akı hesaplarında denenebilir.

Bu yapılırsa muhtemelen bilgisayar merkez işlemci zamanında önemli ölçüde azalmalar sağlanacaktır. 75_YIL , çok-gruplu hesaba göre yazıldığı halde , yapılan koşullarda iki gruplu teori kullanılmıştır. 75_YIL 'ın daha fazla enerji grubu ile ek-akı hesabı yapma yeteneğinden yararlanılabilir. 75_YIL tarafından üretilen akı ve ek-akı dağılımlarının doğal kullanım yeri pertürbasyon teorisi hesaplarıdır. 75_YIL 'a ek bir modül eklenerek , çok gruplu pertürbasyon teorisi çerçevesinde sonuç üretecek bir yapı da geliştirilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] **Basmante R.R.** , 1991. Implementation of WIMS-D/4 in a Personal Computer in CNEA , *NEA* , **329 / 20** .
- [2] **Becker E.B. , Carey G.F., Oden J.T.**, 1983. Finite Elements An Introduction , *Prentice-Hall*.
- [3] **Büke T.** , 1997. İTÜ Triga Mark - II Reaktöründe Yakıt Elemanlarının Reaktivite Eşdeğerlerinin İki Gruplu Pertürbasyon Teorisi İle Hesabı. *Doktora Tezi* , İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü , İstanbul
- [4] **Çağlar H.** , 1985. Yüksek Dereceli Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İTÜ Triga Mark II Reaktörü Yetkinlik Hesapları. *Yüksek Lisans Tezi* , İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü , İstanbul .
- [5] **Duderstadt J.J. , Hamilton L.J.** 1976. Nuclear Reactor Analysis , *John-Wiley and Sons* .
- [6] **Lamarsh , J.R.** , 1972. Introduction to Nuclear Reactor Theory , *Addison-Wesley*.
- [7] **Lewis E.E.** , 1984. Computational Methods of Neutron Transport , *John-Wiley*.
- [8] **Özgener B. , Özgener H.A.** , 1991. A Study of the Consistent and Lumped Source Approximations in Finite Element Diffusion Calculations , *Prog.Nucl.Energy* , **25** , (2-3) , 209 .
- [9] **Özgener H.A.** , 1988. An Order of Convergence Study for Lagrangian Type Finite Elements of Arbitrary Degree Using The Consistent and the Lumped Source Approximations , *Araştırma Raporu No.37*, İTÜ Nükleer Enerji Enstitüsü , İstanbul.
- [10] **Özgener H.A. , Özgener B. , Büke T.** 1998. A Comparison Of Integral Transport and Diffusion Theory Methods in Whole-Core Triga Calculations , *15th European Triga Conference* (Basımda) .
- [11] **Ravnik M. , Mele L.** , 1985. CEBIS- One Dimensional Two-Group Diffusion Code for Reactor Calculations, *J. Stefan Institute , Ljubljana , Slovenia*.

[12] **Safety Analysis Report for the İTÜ Triga Mark-II Reactor** , August 1978

[13] **Spanier J. , Gelbard E.M. ,** 1969. Monte-Carlo Principles and Neutron Transport Problems, *Addison-Wesley* .

[14] **Stephan Wolfram** , 1988. MATHEMATICA , A System For Doing Mathematics By Computer , The Advanced Book Program , *Addison-Wesley*.



EKLER

EK 1 : Geliştirilen 75_YIL Programının ;

- Kodlarının (Herhangi bir yazı editöründe açılabilen ; ‘Ascii Chr.’),
- DOS ve LINUX ortamlarında koşulabilen dosyalarının ,
- Örnek problemlerinin test verileri ve bu verilerin çıkışlarının ,

içerildiği bir adet **disket** tezin arka iç kapğına konuşlandırılmış cep içerisinde EK 1 olarak sunulmuştur.



ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Bursa ' da doğdu. 1989 yılında Bursa Anadolu Lisesi 'nden mezun oldu. Aynı yıl İ T Ü Elektrik-Elektronik Fakültesi , Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümüne girdi. 1993 yılında bu bölümden mezun oldu ve İ T Ü Nükleer Enerji Enstitüsü 'nde yüksek lisans programına başladı.

Halen sistem analisti ve bilgisayar programcısı olarak özel sektörde çalışmaktadır.



T.C. YÜKSEK ÖĞRETİM
DOKÜMANI
MÜHÜRÜ
KİMLİĞİ