

GEOMETRİK NON-LİNEER KATLANMIŞ PLAKLARIN
SONLU BAND ELEMAN YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Necmi AZDAVAYLI

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Haziran 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 23 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ertan ERGÜVEN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Hasan BODUROĞLU

Prof. Dr. Hasan ENGİN

Ertan Ergüven
Hasan Boduroğlu
Hasan Engin

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, geometrik non-lineer katlanmış plakların eğilme ve düzlemsel gerilme durumunda sonlu band eleman yöntemi ile çözümü ele alınmıştır.

Tezimin tüm aşamasında yardımlarıyla çalışmamı destekleyen Sayın Prof. Dr. M. Ertay Ergüven' e içtenlikle teşekkür ederim.

26. 06. 1997

Necmi AZDAVAYLI



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Sonlu Band Eleman Yöntemine Giriş	1
1.1.1 Metodun Genel Özellikleri	1
1.1.2 Metodun Prensipleri Ve Yapılan Kabuller	2
1.2 Deplasman Fonksiyonu	2
1.2.1 Deplasman Fonksiyonunun Seçimi	2
1.2.2 Deplasman Fonksiyonunun Seri Kısmı	3
1.2.3 Deplasman Fonksiyonunun Polinom Kısmı	5
1.3 Band Karakteristiklerinin Bulunması	6
1.3.1 Minimum Toplam Potansiyel Enerji Prensibi	6
1.3.2 Gerinmeler	6
1.3.3 Gerilmeler	7
1.3.4 Toplam Potansiyel Enerjinin Minimizasyonu	8
BÖLÜM 2 PLAK SİSTEMLERDE EİLME HALİ	12
2.1 Genel	12
2.2 Dikdörtgen Plak Band	12
2.2.1 Deplasman Fonksiyonu	13
2.2.2 Gerinmeler	14
2.2.3 Momentler	15
2.2.4 Rijitlik Matrisi	17
2.2.5 Yük Matrisi	18

BÖLÜM 3	PLAK SİSTEMLERDE DÜZLEMSEL GERİLME HALİ	19
3.1	Genel	19
3.2	Düzlemsel Gerilme Halinde Band Karakteristikleri	20
3.2.1	Deplasman Fonksiyonu	20
3.2.2	Gerinmeler	21
3.2.3	Gerilmeler	22
3.2.4	Rijitlik Matrisi	23
3.2.5	Yük Matrisi	23
BÖLÜM 4	KATLANMIŞ PLAK YAPILARIN SONLU BAND ELEMAN YÖNTEMİ İLE LİNEER ANALİZİ	25
4.1	Genel	25
4.2	Yapılan Kabuller	26
4.3	Toplam Potansiyel Enerji Prensibinin Katlanmış Plaklara Uygulanması	26
4.3.1	Eğilme Durumunda Potansiyel Enerji	27
4.3.2	Düzlemsel Gerilme Durumunda Potansiyel Enerji	28
4.4	Rijitlik Matrisinin Oluşturulması	30
4.5	Koordinatların Transformasyonu	31
BÖLÜM 5	KATLANMIŞ PLAKLARIN SONLU BAND ELEMAN YÖNTEMİ İLE GEOMETRİK NON-LİNEER ANALİZİ	33
5.1	Genel	33
5.2	Geometrik Non-Lineeriteye Bir Örnek	33
5.3	Düzlemsel Plakların Non-Lineer Şekil Değiştirme Bağıntısı	37
5.4	Minimum Toplam Potansiyel Enerji Prensibinin Non-Lineer Şekil Değiştirme-Deplasman Bağıntılarına Uygulanması	39
5.5	Non-Lineer Rijitlik Matrisinin Oluşturulması	42
5.6	Non-lineer Gerilme Matrisinin Oluşturulması	45
5.7	Sayısal Çözüm Yöntemleri	47
BÖLÜM 6	BİLGİSAYAR UYGULAMALARI VE SONUÇLAR	49
6.1	Program Kriterleri	49
6.2	Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Prizmatik Katlanmış Plak	50
6.3	Sonuçlar	52
	KAYNAKLAR	60
	ÖZGEÇMİŞ	61

SEMBOL LİSTESİ

a	: Band uzunluğu
b	: Band genişliği
B_b	: Eğilme durumunda gerilme matrisi
B_p	: Düzlemsel gerilme durumunda gerilme matrisi
C_k,N	: Şekil katsayısı
D_b	: Eğilme durumunda malzeme matrisi
D_p	: Düzlemsel gerilme durumunda malzeme matrisi
E_x,E_y	: Elastisite modülleri
F	: Band yük vektörü
G_{xy}	: Kayma modülü
K_n	: Tanjant rijitlik matrisi
P_c	: Tekil yük
q	: Band düzlemine dik yayılı yük
R	: Transformasyon matrisi
S_b	: Eğilme rijitlik matrisi
S_p	: Düzlemsel gerilme rijitlik matrisi
t	: Band kalınlığı
u,v	: Düzlemsel gerilme nodal deplasmanları
U	: Gerilme enerjisi
w,θ	: Eğilme nodal deplasmanları
W	: Dış yük potansiyel enerjisi

- X_i, Y_i : Band düzlemine paralel nodal yükler
- X, Y : Band düzlemine paralel yayılı yükler
- Y_m : Deplasman fonksiyonu seri bileşeni
- Z, M : Eğilme durumunda nodal yükler
- f : Deplasman fonksiyonu polinom bileşeni
- μ : Titreşim parametresi
- ϕ : Toplam potansiyel enerji
- δ_b : Eğilme durumunda nodal deplasmanlar
- δ_p : Düzlemsel gerilme durumunda nodal deplasmanlar
- δ_m : Nodal deplasman vektörü
- σ : Moment matrisi
- ν_x, ν_y : Poisson oranları
- ϵ : Şekil değiştirme (gerinme) vektörü

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Eğilme durumunda dikdörtgen bant karakteristikleri	13
Şekil 3.1 Düzlemsel gerilme halinde dikdörtgen band karakteristikleri	19
Şekil 4.1 Katlanmış plaklara ait dikdörtgen band karakteristikleri	25
Şekil 4.2 Global ve lokal koordinat sistemleri	31
Şekil 5.1 Tek serbestlik dereceli geometrik non-lineer çubuk sistem	33
Şekil 5.2 Newton-Raphson Yönteminde iteratif adımlar	36
Şekil 5.3 Non-lineer şekil değiştirmeye maruz düzlemsel plak	38
Şekil 6.1 Örnek katlanmış plak kesit ve yükleri	50
Şekil 6.2 Örnek sistemin sonlu bandlara bölünüşü ve sınır koşulları	50
Şekil 6.3 Örneğe ait plak ortasında 1 ve 6 nodlarındaki düşey deplasmanlar	53
Şekil 6.4 Plak ortalarında σ_x gerilmeleri	54
Şekil 6.5 Plak ortalarında σ_y gerilmeleri	55
Şekil 6.6 Plak ortalarında M_x momentleri	56
Şekil 6.7 Plak ortalarında M_y momentleri	57
Şekil 6.8 Poisson oranı etkisi	58
Şekil 6.9 İzotrop olmayan malzeme etkisi	59

ÖZET

Bu çalışmada geometrik non-lineer prizmatik katlanmış plakların sonlu band eleman yöntemi ile analizi ele alınmıştır. Bu analiz, yapı mekaniğinde yaygın olarak kullanılan klasik sonlu elemanlar yöntemi ile de yapılabilmesine rağmen, her zaman için pratik ve kolay bir sayısal çözüme imkan vermez.

Prizmatik katlanmış plakların lineer analizi, bugüne kadar bir çok akademisyen tarafından ele alınmıştır. Bu plakların sonlu band eleman yöntemi ile çözümü ise ilk olarak Cheung tarafından gündeme getirilmiştir. Bu analizde Cheung, eğilme ve düzlemsel gerilme durumlarını süperpoze ederek prizmatik katlanmış bir plak bandın sonlu band eleman karakteristiklerini ortaya koymuştur.

Sonlu band eleman yöntemi sonlu elemanlar yönteminin özel bir şekli olarak düşünülebilir. Sonlu elemanlar metodunda olduğu gibi, bu yöntemde de plağın her iki yönü için polinomik bir deplasman fonksiyonu kullanılmaktadır. Söz konusu ifade ise polinomik ve trigonometrik iki fonksiyon çarpımından oluşmaktadır. Rijitlik matrisleri ve eşdeğer nodal yük vektörlerinin oluşturulması sırasında söz konusu deplasman fonksiyonu ile banda ait tüm karakteristikler nodlara aktarılmaktadır.

Metodda katlanmış plak yalnız bir doğrultuda belli sayıda band parçalara bölünmektedir. Her bir band kendi düzlemine paralel ve dik yönde değişik yüklemelere maruzdur. Söz konusu iki değişik yük uncoupled olduğundan, düzlemsel gerilme ve eğilme durumları için rijitlik matrisleri önce ayrı ayrı yazılıp daha sonra süperpoze edilmektedir.

Non-lineer analizde yüklemeler tesirinde küçük şekil değiştirmelere karşılık büyük deplasmanların oluşacağı kabulü yapılmaktadır. Bu yüzden, kullanılan bandların genişliği ve kalınlığı, band uzunluğuna göre çok küçük bir değerde seçilmektedir. Lineer ve non-lineer rijitlik matrislerinin toplanması ile teşkil edilen non-lineer denklem takımlarının çözümünde ise Newton-Raphson Metodu kullanılmıştır. Bu metodla yapılan çözümde, ilk iterasyon değerleri olarak lineer aşamada bulunan deplasman miktarları kullanılmıştır. Değişik sınır koşullarına sahip basit mesnetli katlanmış bir plak sistemin çeşitli yüklemeler tesirinde istenen noktalardaki deplasman ve kesit tesirlerini hesaplayabilecek bir bilgisayar programı FORTRAN 77 dili kullanılarak yazılmıştır.

Sonuç olarak denilebilir ki, sonlu band eleman yöntemi ile istenen yükleme ve sınır koşulundaki basit mesnetli katlanmış bir plak sistem pratik bir biçimde analiz edilebilir. Metodun prensibi gereğince, sistemin yalnız tek yönde elemanlara bölünmesi ve enterpolasyon için her bir nodda yalnız dört deplasman bileşeni kullanılması bilgisayar uygulamalarındaki program yazılımını hem küçültmekte hem de bellek kullanımını azaltmaktadır. Bu husus dikkate alındığında metodun sonlu elemanlar yöntemine göre daha pratik olduğu ortaya çıkmaktadır.

SUMMARY

GEOMETRIC NONLINEAR ANALYSIS OF FOLDED PLATE STRUCTURES BY THE FINITE STRIP METHOD

This study treats the problem of geometrically nonlinear folded plate using the finite strip method. The finite element method which is one of the most powerful tools of stress analysis available, can analyze a prismatic folded plate structure with any loadings, any support conditions and any other special features, such as local variations in plate thickness. Nevertheless, since the computer program is not always available, is difficult to computerize and not applicable to cases of smaller span-width ratios.

Various methods for the analysis of prismatic folded plates have been developed by many writers. The finite strip analysis of prismatic folded structures and box girder bridges was first introduced by Cheung who combined a bending strip with both bendings and membrane actions an analysis of the slabs and prismatic folded plates, taking into account geometrically nonlinear analysis.

The finite strip method can be considered as a special form of the finite element procedure using the displacement approach. Unlike the standard finite element method, polynomial displacement functions in all directions, is used.

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(x) Y_m$$

In the above expression, $f_m(x)$ is polynomial expression with undetermined constants for the m th series; and Y_m is series which satisfy the and conditions in the y direction and also specify the deflected shape in this direction.

The finite strip method requires the discretization of the continuum so that only a finite number of unknowns will exist in the resulting formulation. The following procedure is adopted :

- i) The continuum is divided into strips by fictitious lines. The ends of such strips always constitute a part of boundaries of the continuum.
- ii) The strips are assumed to be connected to one another along a discrete number of nodal lines which coincide with the longitudinal boundaries of the strip.
- iii) A displacement function (or functions), in terms of the nodal displacement parameters, is chosen to represent the displacement field and consequently the strain and stress fields within each element.

iv) Based on the chosen displacement function, it is possible to obtain a stiffness matrix and load matrices which equilibrate the various concentrated or distributed loads acting on the strip through either virtual work or minimum total potential energy principles.

v) The stiffness and load matrices of all the strips are assembled to form a set of overall stiffness equations can be solved easily by any standard band matrix solution technique to yield the nodal displacement parameters.

The folded plate structure which is supported at the two ends by diaphragms infinitely stiff in their own plane, but perfectly flexible normal to the their plane, is subdivided into a number of strips. Each is subject to "in-plane" or membrane stresses and to transverse bending forces. Because these two types forces are not coupled it is convenient to establish the characteristic stiffnesses separately in two phases and then combine them into comprehensive matrix. The economy is even more striking for the case of the simply supported strip (which is of great practical importance because of its use in the analysis of isotropic and orthotropic slab bridges, where a decoupling of the terms of the series occurs, and thus the size and bandwidth of the matrix is even more drastically reduced.

Bending Stiffness of Strip :

A suitable displacement function can be written as

$$w = \sum_{m=1}^r Y_m [[C_1] [C_2]] \{\delta_b\}_m$$

in which C_1 , C_2 shape functions and δ_b nodal displacement parameters are given,

$$\{\delta_b\}_m^T = \{w_{1m} \ \theta_{1m} \ w_{2m} \ \theta_{2m}\}^T$$

$$Y_m = \sin k_m y \quad k_m = \frac{m \pi}{a}$$

$$[C_1] = [(1 - 3 \bar{x}^2 + 2 \bar{x}^3), x(1 - 2 \bar{x} + \bar{x}^2)]$$

$$[C_2] = [(3 \bar{x}^2 - 2 \bar{x}^3) \cdot x(\bar{x}^2 - \bar{x})] \quad \bar{x} = \frac{x}{b}$$

The strains for a bending strip are given by the second partial derivatives of the displacement function.

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} -\chi_x \\ -\chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^r [B_b]_m \{\delta_b\}_m$$

In which $[B_b]$ is strain matrix for bending problem. The moments are related to the strain through the material properties of the strip.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D_b] \{\epsilon\} = [D_b] \sum_{m=1}^r [B_b]_m \{\delta_b\}_m$$

The stiffness matrix for plate-bending problems, in which the integration in the thickness direction has already been carried out, can be modified as

$$[S]_{mn} = \int [B_b]_m^T [D_b] [B_b]_n da$$

For a simply supported strip,

$$[S] = \begin{bmatrix} [S]_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [S]_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & [S]_{rr} \end{bmatrix}$$

In-plane Stiffness of Strip :

For the plane stress analysis, the general form for the displacements in the x and y directions is given as

$$u = \sum_{m=1}^r f_m^u(x) Y_m$$

$$v = \sum_{m=1}^r f_m^v(x) (a/\mu_m) Y'_m$$

$$u = \sum_{m=1}^r \left[[C_1] [C_2] \right] \{u_1 u_2\}_m^T Y_m$$

$$v = \sum_{m=1}^r \left[[C_1] [C_2] \right] \{v_1 v_2\}_m^T \left(\frac{a}{\mu_m} \right) Y'_m$$

In the above expression for the case of plane stress C_1, C_2 shape functions can be taken,

$$C_1 = (1 - \bar{x}) \quad C_2 = \bar{x} \quad \bar{x} = \frac{x}{b}$$

The strains and stresses are given as

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B_p]_m \{\delta_p\}_m$$

$$\{\sigma\} = [D_p] \{\epsilon\} = [D_p] \sum_{m=1}^r [B_p]_m \{\delta_p\}_m$$

$[B_p]$ is the strain matrix for the case plane stress. Since the thickness of a strip assumed to be constant, the stiffness matrix can be simplified into the following form:

$$[S]_{mn} = t \int [B_p]_m^T [D_p] [B_p]_n da$$

For a rectangular flat shell strip it is assumed that no interaction takes place between the bending and membrane actions that exist in a folded plate structure. As a result, a shell strip can be formed through a simple combination of a bending strip and a plane stress strip in the following manner.

$$[S]_{mn} \{\delta\}_m = \{F\}_m$$

$$\{\delta\}_m = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_2\}_m^T$$

$$\{F\}_m = \{U_1 \ V_1 \ Z_1 \ M_1 \ U_2 \ V_2 \ Z_2 \ M_2\}_m^T$$

In which $\{\delta\}$ is nodal displacement parameters and $\{F\}$ is nodal load vector for the all of cases, bending and plane stress manner. In this context, for a strip with only nodal lines 1 and 2, it is possible to write

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}_{mn} \cdot \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{bmatrix}_m$$

A typical submatrix $[S_{ij}]_{mn}$ of the matrix $[S]_{mn}$ is made up from appropriate submatrices of the bending stiffness matrix $[S^b_{ij}]_{mn}$ and plane stress stiffness matrix

$[S^p_{ij}]_{mn}$. Thus

$$[S_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} [S^p_{ij}]_{mn} & [0] \\ [0] & [S^b_{ij}]_{mn} \end{bmatrix} \quad (i, j) = 1, 2$$

In addition to the finite strip linear analysis, an analysis of the prismatic folded plane structures taking into account the geometrical nonlinearity effects, is presented in this study. An assumption is made that only small deformations and large displacements and rotations exist. The stiffness matrices (classical and geometrical) and vector of equivalent nodal loads for the finite strips are obtained using the variation approach. The bandwidth b and the height of the cross section are small compared with the length a . Likewise, the displacement

w and the rotation θ will be sufficiently large and must be included when writing basic and geometrial sizes.

The general strain expression including the nonlinear terms is given

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\{\tilde{\epsilon}\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\tilde{B}_p] \{\delta_b\} \quad w = [N_b] \{\delta_b\}$$

$$[N_b] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) & \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) & \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) & \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right) \end{bmatrix}^T$$

$$\{\delta_b\} = \{\delta_b\}_m Y_m \quad Y_m = \sin k_m y \quad \{\delta_b\}_m = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2\}_m^T$$

$$[\tilde{B}_p] = [B_{b1}] \{w_p\} [B_{b2}]$$

$$[B_{b1}] = \begin{bmatrix} [N_{b,x}] Y_b & 0 \\ 0 & [N_b] Y_{b,y} \\ [N_b] Y_{b,y} & [N_{b,x}] Y_b \end{bmatrix}$$

$$Y_b = Y_m = \sin k_m y$$

$$[B_{b2}] = \begin{bmatrix} [N_{b,x}] Y_b \\ [N_b] Y_{b,y} \end{bmatrix}$$

The formulation of strip characteristics is obtained using the principle of minimum total potential energy.

$$\{[\widehat{S}] + [\widetilde{S}]\} \{\delta\} = \{Q\}$$

The above expression is a system of nonlinear simultaneous equations, in which $[\widehat{S}]$, $[\widetilde{S}]$, $\{\delta\}$ and $\{Q\}$ is linear stiffness matrix, nonlinear stiffness matrix, nodal displacement parameters and nodal load vector respectively.

$$[\widehat{S}] = \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & S_b \end{bmatrix}$$

$$[\widetilde{S}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} S_{pb} \\ \frac{1}{2} S_{bp} & \frac{1}{2} S_{bb} \end{bmatrix}$$

$$\{\delta\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}^T$$

$$\{Q\} = \{U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad Z_1 \quad M_1 \quad Z_2 \quad M_2\}^T$$

$$[S_{bb}]_{mn} = t \int_0^a \int_0^b \sum_{v,z=1}^r \sum_{s,t=1}^r [B_{b2}]_m^T \{w_s\}^T [B_{b1}]_t^T [D_p] [B_{b1}]_v \{w_z\} [B_{b2}]_n \, dx dy$$

$$[S_{bp}]_{mn} = t \int_0^a \int_0^b \sum_{s,z=1}^r [B_{b2}]_m^T \{w_s\}^T [B_{b1}]_z^T [D_p] [\widehat{B}_p]_n \, dx dy$$

$$[S_{pb}]_{mn} = t \int_0^a \int_0^b \sum_{s,z=1}^r [\widehat{B_p}]_m^T [D_p] [B_{b1}]_s \{w_z\} [B_{b2}]_n dx dy$$

$$\{w_s\} = \begin{bmatrix} \delta_{bs} & 0 \\ 0 & \delta_{bs} \end{bmatrix}$$

$$\{\delta_b\}_s = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}_s^T$$

The moments can be expressed as a sum of the linear and nonlinear moments.

$$\{\sigma\} = \{\widehat{\sigma}\} + \{\widetilde{\sigma}\}$$

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = D_p \epsilon = D_p (\widehat{\epsilon} + \widetilde{\epsilon})$$

$$\{\sigma\} = D_p \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \right]$$

$$\{\widetilde{\sigma}\} = D_p \widetilde{B_p} \delta_p$$

$$\widetilde{B_p} = \sum_{m=1}^r \sum_{s,z=1}^r [B_{b1}]_s \{w_z\} [B_{b2}]_m$$

$$\{\widetilde{\sigma}\} = \sum_{m=1}^r \sum_{s,z=1}^r [D_p] [B_{b1}]_s \{w_z\} [B_{b2}]_m \{\delta_b\}_m$$

The Newton-Raphson procedure are incorporated in a finite strip computer program to solve nonlinear equations. The whole program is written in FORTRAN77. Consequently, the finite strip method can be used for the analysis of different types of rectangular and folded plates with different support conditions without difficulty . The numerical examples clearly indicate that this method is very competitive to the finite element method regarding these problems. In addition this method requires only four parameters per node line for interpolation and a small number of mesh lines owing to the reduction in dimensional analysis.



1. GİRİŞ

1.1 SONLU BAND ELEMAN YÖNTEMİNE GİRİŞ

1.1.1 Metodun genel özellikleri :

Değişik alanlardaki mühendislik problemlerinin çözümünde sıkça kullanılan sonlu elemanlar yöntemi fazla sayıdaki cebirsel denklem takımının çözümünü gerektirmektedir. Bu durum ise problemin çözümünde hem zaman israfına yol açmakta, hem de hesapların yapıldığı makinada aşırı miktarda bellek ihtiyacı doğurmaktadır. Bu sebeple sonlu elemanlar yöntemine göre daha pratik ve basit çözüm metodlarının kullanılması düşünülebilir. *Sonlu band eleman yöntemi* bu metodlardan biri olup, sonlu elemanlar yöntemine alternatif olarak kullanılabilir.

Sonlu band eleman yöntemi sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırıldığında iki metod arasında benzer ve farklı bir takım özellikler göze çarpar. Sonlu elemanlar yönteminde probleme esas olan eleman iki yönde alt elemanlara ayrılmakta iken, diğerinde eleman sadece tek yönde band parçalara bölünmektedir. Böylelikle sonlu band eleman yönteminde iki boyutlu bir problem tek boyuta indirgenmektedir. Bu husus çözümde kullanılacak denklemlerin sayısını azaltan önemli bir faktördür. Diğer yandan metodda band eleman kullanıldığından eleman serbestlik derecesi yarıya inmekte, çözümde kullanılan seri fonksiyonlarının terim sayısı da azalmaktadır. Bu sebeplerden dolayı, herhangi bir sonlu band eleman probleminin çözümünde kullanılan sistem rijitlik matrisi, diğer alternatif yöntemlerde kullanılan rijitlik matrislerine göre daha küçük boyuta ve dar bir band genişliğine sahip olacağından, metodun diğerlerinden daha pratik olduğu anlaşılabılır.

Sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi, sonlu band eleman yönteminde kullanılan deplasman fonksiyonu, band elemanın iki boyutu yönünde yazılan birseri açılımı ifadesi ile polinomik bir fonksiyonun çarpımından oluşur. En genel ifade ile deplasman fonksiyonu aşağıdaki formda verilir. [1]

$$w = \sum_{m=1}^r f_m(x) Y_m \quad (1.1)$$

Yukarıdaki denklemde,

w : Band elemana ait deplasman fonksiyonu

f_m : Polinomik ifade

Y_m : y koordinatı yönünde sınır koşullarını sağlayan seri açılımı

m : Seri açılımı terim numarası

1.1.2 Metodun prensipleri ve yapılan kabuller :

- i) Sisteme ait sürekli ortam hayali nodal çizgilerle band elemanlara bölünür. Band elemanların uçları sürekli ortamın sınırlarının birer parçasını teşkil eder.
- ii) Bandlar nodal kenarları boyunca komşu bandlara bağlanabilir kabul edilir. Bazı durumlarda band içersinde ilave nodlar kullanılabilir.
- iii) Her bir noda ait serbestlik derecesi o noda ait deplasman parametrelerini belirler.
- iv) Deplasman bölgesini temsil edebilecek, nodal deplasmanlara bağlı bir fonksiyon seçilir. Bu fonksiyona deplasman fonksiyonu adı verilir.
- v) Seçilen deplasman fonksiyonu ile virtuel iş yada minimum toplam potansiyel enerji prensibi kullanılarak her bir banda ait band rijitlik ve yük matrisleri elde edilir.
- vi) Band rijitlik ve yük matrisleri toplanarak sistem rijitlik ve yük matrisi bulunur. Söz konusu matrislerin içerdiği denklem takımları çözülerek nodal deplasmanlar ve iç kuvvetler hesaplanır.

1.2 DEPLASMAN FONKSİYONU

1.2.1 Deplasman fonksiyonunun seçimi :

Uygun bir deplasman fonksiyonunun seçilmesi metodun en önemli aşamasını teşkil eder. Tutarsız bir deplasman fonksiyonunun seçilmesi durumunda hatalı

sonuçların ortaya çıkması kaçınılmazdır. Deplasman fonksiyonu seçimi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir [2]

- i) Deplasman fonksiyonunun seri kısmı (Y_m) banda ait başlangıç sınır koşullarını sağlamalıdır.
- ii) Deplasman fonksiyonunun polinom kısmı (f_m) band uzun kenarı istikametinde sabit gerinme halini tanımlamalıdır. Bu özellik sağlanamadığı takdirde banda ait gerinme dağılımının sabit ve tutarlı değerlere yakınsaması garanti edilemez. Örneğin polinom kısmın $f_m = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$ alınması durumunda, fonksiyonun ikinci türevi olan eğrilik değeri $x=0$ noktasında sıfıra eşit olduğundan, elde edilecek sonuçlar hatalı olacaktır.
- iii) Deplasman fonksiyonu iki komşu bandın ortak nodal kenarlarındaki deplasman ve birinci türevinin (eğim) sürekliliğini sağlamalıdır.

1.2.2 Deplasman fonksiyonunun seri kısmı (Y_m) :

Deplasman fonksiyonunun seri kısmı kiriş titreşim diferansiyel denkleminde elde edilen genel bir ifadedir [3]

$$Y^{IV} = Y (\mu^4 / a^4) \quad (1.2.a)$$

μ : Titreşim problemine ait parametre

a : Band uzunluğu

Yukarıdaki diferansiyel denklemin genel çözümü ise ,

$$Y(y) = C_1 \sin\left(\frac{\mu y}{a}\right) + C_2 \cos\left(\frac{\mu y}{a}\right) + C_3 \sinh\left(\frac{\mu y}{a}\right) + C_4 \cosh\left(\frac{\mu y}{a}\right) \quad (1.2.b)$$

İfadede geçen C_1, C_2, C_3, C_4 katsayıları band sınır koşullarına göre bulunacaktır. Band uç noktaları için geçerli olabilecek farklı sınır koşulları göz önüne alınırsa ,

i) İki ucun basit mesnetli olması durumunda , $Y(0) = Y''(0) = 0$, $Y(a) = Y''(a) = 0$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \quad \mu_m = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, m\pi \quad (1.2.c)$$

ii) İki ucun ankastre olması durumunda , $Y(0) = Y'(a) = 0$, $Y(a) = Y'(a) = 0$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \alpha_m \left(\cos\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \cosh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \right) \quad (1.2.d)$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m}$$

$$\mu_m = 4.73, 7.85, 10.99, \dots, (2m+1) \pi / 2$$

iii) Bir ucun basit mesnet, diğerinin ankastre olması durumunda,

$$Y(0) = Y''(0) = 0, \quad Y(a) = Y'(a) = 0$$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - \alpha_m \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \quad (1.2.e)$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m}{\sinh \mu_m} \quad \mu_m = 3.92, 7.06, 10.21, \dots, (4m+1) \pi / 4$$

iv) İki ucun serbest olması durumunda , $Y''(0) = Y'''(0) = 0$, $Y''(a) = Y'''(a) = 0$

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \sinh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) - m \left(\cos\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) + \cosh\left(\frac{\mu_m y}{a}\right) \right) \quad (1.2.f)$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m - \sinh \mu_m}{\cos \mu_m - \cosh \mu_m} \quad \mu_m = 4.73, 7.85, \dots, (2m-3) \pi / 2$$

v) Bir ucun ankastre, diğerinin serbest olması durumunda,

$$Y(0) = Y'(0) = 0, \quad Y''(a) = Y'''(a) = 0$$

$$Y_m(y) = \sin \left(\frac{\mu_m y}{a} \right) + \sinh \left(\frac{\mu_m y}{a} \right) - \alpha_m \left(\cos \left(\frac{\mu_m y}{a} \right) - \cosh \left(\frac{\mu_m y}{a} \right) \right) \quad (1.2.g)$$

$$\alpha_m = \frac{\sin \mu_m + \sinh \mu_m}{\cos \mu_m + \cosh \mu_m} \quad \mu_m = 1.87, 4.69, \dots, (2m-1) \pi / 2$$

1.2.3 Deplasman fonksiyonunun polinom kısmı (f_m) :

Şekil fonksiyonu, band elemana ait deplasman dağılımının sürekliliğini sağlayan bir ifade olup, değeri ilgili deplasman bileşeninin yer aldığı band nodunda birim değere (1) , diğer nodda ise sıfıra eşittir. [3]

$$w = \sum_{m=1}^r f_m Y_m$$

$$w = \sum_{m=1}^r [[C_1] [C_2]] \{ \delta_1, \delta_2 \} Y_m \quad w = \sum_{m=1}^r Y_m \sum_{k=1}^2 [C_k] \{ \delta_k \}_m \quad (1.3)$$

Yukarıdaki ifadedeki δ_1, δ_2 , banda ait 1 ve 2 nodlarındaki deplasman bileşenleri olup, eğilme probleminde band düzlemine dik düşey deplasman ve düzlemsel

gerilme probleminde ise band düzlemine paralel yatay deplasman değerlerine karşılık gelirler. C_1 ve C_2 ise 1 ve 2 nodlarına ait şekil fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların eğilme ve düzlemsel gerilme hallerinde alacağı değerler ileriki bölümlerde ele alınacaktır.

1.3 BAND KAREKTERİSTİKLERİNİN BULUNMASI

1.3.1 Minimum toplam potansiyel enerji prensibi :

Yapı mekaniğinde önemli bir yer teşkil eden minimum toplam potansiyel enerji prensibine göre, iç ve dış kuvvetler tesirindeki statik bir sistemde meydana gelecek deplasmanlar, sistem potansiyel enerjisini sabit kılar. [6]

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} \right\} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial \delta_m} \right\}^T = \{0\}$$

$$\Phi = U + W \quad (1.4)$$

Φ : Sistem toplam potansiyel enerjisi

δ_m : Serinin m. terimi cinsinden sistem deplasman vektörü

U : Sistem gerinme enerjisi

W : Dış yüklerden dolayı potansiyel enerji

Eşitlik (1.4) Raleigh - Ritz prensibinin genel bir ifadesi olarak yorumlanabilir.

1.3.2 Gerinmeler (ϵ)

Başlangıçta probleme ait deplasman fonksiyonu seçilmiş olduğundan, söz konusu fonksiyonun ilgili x, y, z koordinat parametrelerine göre kısmi türevleri alındığında gerinme değerleri bulunabilir. [3]

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=1}^r [B]_m \{\delta\}_m \\ &= \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [B_k]_m \{\delta_k\}_m \end{aligned} \quad (1.5)$$

$[B]$: Gerinme matrisi

İleriki bölümlerde gerinme matrisi, eğilme ve düzlemsel gerilme halleri için ayrı ayrı oluşturularak band rijitlik matrislerinin hesabında kullanılışı gösterilecektir.

1.3.3 Gerilmeler (σ)

Problemin çözümü aşamasında başlangıçta teşkil edilen deplasman vektörü $\{\delta\}$ ve gerinme matrisi $[B]$ yardımı ile gerilme değerleri elde edilebilir. [3]

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

$$= [D] [B] \{\delta\}$$

$$= [D] \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^s [B_k]_m \{\delta_k\}_m \quad (1.6)$$

$[D]$: Elastisite matrisi (malzeme matrisi)

Burada ifade edilen gerilme değerleri genel olup, problemin türüne göre normal gerilme, kayma gerilmesi, eğilme yada burkulma gerilmeleri vb. içerebilir.

1.3.4 Toplam potansiyel enerjinin minimizasyonu :

Daha öncede belirtildiği üzere, toplam potansiyel enerji ifadesi, gerinme enerjisi ve dış yüklerin potansiyel enerjisi toplamından oluşur.

a) Gerinme enerjisi (U) :

Elastik deformasyon neticesinde oluşan sistem iç enerjisidir. [3]

$$U = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv \quad (1.7a)$$

(1.5) , (1.6) , (1.7a) yardımı ile

$$U = \frac{1}{2} \int \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dv \quad (1.7b)$$

b) Potansiyel enerji (W) :

Band üzerindeki dış yükler neticesinde meydana gelen sistem dış enerjisidir. [3]

$$W = - \int \{f\}^T \{q\} da \quad (1.7c)$$

$$W = - \int \{\delta\}^T [N]^T \{q\} da \quad (1.7d)$$

q : Band yayılı yükü

Yayılı yük yerine tekil yük kullanılması halinde yukarıdaki integral, tekil yükle yükün bulunduğu noktadaki ilgili deplasman bileşeninin çarpımından oluşan bir ifadeye dönüşür. [3]

c) Toplam potansiyel enerji (Φ) :

$$\Phi = U + W$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \int \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dv - \int \{\delta\}^T [N]^T \{q\} da \quad (1.7e)$$

d) Minimizasyon yöntemi :

Bölüm 1.3.1 de belirtildiği üzere,

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} \right\} = \{0\}$$

Eşitlik (1.7e) kullanılarak,

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \delta} \right\} = \int [B]^T [D] [B] \{\delta\} dv - \int [N]^T \{q\} da = \{0\} \quad (1.8a)$$

Diğer bir ifade ile ,

$$[S] \{\delta\} - \{F\} = \{0\} \quad (1.8b)$$

Lineer cebirsel denklem takımı teşkil eden bu ifade de,

$[S]$: Band rijitlik matrisi

$\{F\}$: Band yük vektörü

$$[S] = \int [B]^T [D] [B] dv$$

$$= \int \left[[B]_1 [B]_2 \dots [B]_r \right]^T [D] \left[[B]_1 [B]_2 \dots [B]_r \right] dv$$

$$= \int \begin{bmatrix} [B]_1^T [D] [B]_1 & [B]_1^T [D] [B]_2 & \dots & [B]_1^T [D] [B]_r \\ [B]_2^T [D] [B]_1 & [B]_2^T [D] [B]_2 & \dots & [B]_2^T [D] [B]_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [B]_r^T [D] [B]_1 & [B]_r^T [D] [B]_2 & \dots & [B]_r^T [D] [B]_r \end{bmatrix} dv \quad (1.8c)$$

Eşitlik (1.8c) ile gösterilen band rijitlik matrisi serinin r adet terimi için yazılmış genel bir ifadedir. Bu ifade aşağıdaki kısaltılmış biçimde de yazılabilir. [1]

$$[S] = \begin{bmatrix} [S]_{11} & [S]_{12} & \dots & [S]_{1r} \\ [S]_{21} & [S]_{22} & \dots & [S]_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [S]_{r1} & [S]_{r2} & \dots & [S]_{rr} \end{bmatrix} \quad (1.8d)$$

Band rijitlik matrisini oluşturan $[S]_{mn}$ alt matrisleri ise,

$$[S]_{mn} = \int [B]_m^T [D] [B]_n dv \quad (1.8e)$$

Nodal çizgi sayısı s olan bir band için $[S]_{mn}$ alt rijitlik matrisi :

$$[S]_{mn} = \begin{bmatrix} [S_{11}] & [S_{12}] & \dots & [S_{1s}] \\ [S_{21}] & [S_{22}] & \dots & [S_{2s}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [S]_{s1} & [S]_{s2} & \dots & [S]_{ss} \end{bmatrix}_{mn} \quad (1.8f)$$

$[S]_{mn}$ matrisini oluşturan alt matrisler $[S]_{ij}$ ile gösterilirse, (i ve j indisleri banda ait nodal çizgi numaralarını belirtmektedir.)

$$[S_{ij}]_{mn} = \int [B_i]_m^T [D] [B_j]_n dv \quad (1.8g)$$

Yukarıdaki ifade band rijitlik matrisinin en küçük ünitesini oluşturmaktadır. Band rijitlik matrislerinin kendi aralarında süperpoze edilmesi ile sistem rijitlik matrisinin bulunması ileriki bölümlerde ele alınacaktır.

Band yük vektörü ise eşitlik (1.8a) ve (1.8b) yardımı ile bulunabilir :

$$\{F\} = \int [N]^T \{q\} da \quad (1.8h)$$

Serinin m. terimi cinsinden yukarıdaki ifade yeniden düzenlenirse :

$$\{F\}_m = \int [N]_m^T \{q\} da \quad (1.8i)$$

Band rijitlik matrisinde olduğu gibi, yük vektörü de alt matrislere bölünebilir. [3]

$$\{F_i\}_m = \int [N_i]_m^T \{q\} da \quad (1.8j)$$

Her bir banda ait yük vektörleri süperpoze edilerek sistem yük vektörü elde edilir.

2. PLAK SİSTEMLERDE EĞİLME HALİ

2.1 GENEL

Bu bölümde kasık plak teorisi kullanılarak eğilmeye maruz bir plağın sonlu band eleman yöntemi ile analizi yapılarak eğilme problemine ait band karakteristikleri ortaya konacaktır. Band karakteristikleri band uç noktalarının basit mesnetli yada ankastre olması vb. değişik sınır koşullarına göre bulunabilir.

Sonlu band eleman yönteminin bilinen sonlu elemanlar yöntemine göre bazı avantajlarının olduğu 1. bölümde görülmüştü. Bu metodda problem tek yönde ele alındığından, eğilme problemi için bandın bir nodal kenarının sahip olacağı serbestlik derecesi, analizde kullanılan deplasman fonksiyonu seri açılımı terim sayısının sadece iki katı kadar (1 düşey deplasman, 1 dönme) olacaktır. Bu durum kullanılan sistem rijitlik matrisinin band genişliğini küçülteceğinden, çözümde büyük oranda pratiklik ve kolaylık sağlanacaktır. Diğer yandan band uç noktalarının basit mesnetli olması durumunda, ortogonalite prensibinin kullanılabilmesi imkanı doğmaktadır. Bu imkânında çözümü kolaylaştıran ekstra bir avantaj olarak göz önünde bulundurulması gerekir. [3]

Bu tezde tüm analiz ve formülasyonlar, band uç noktalarının basit mesnetli olması durumuna göre yapılmıştır.

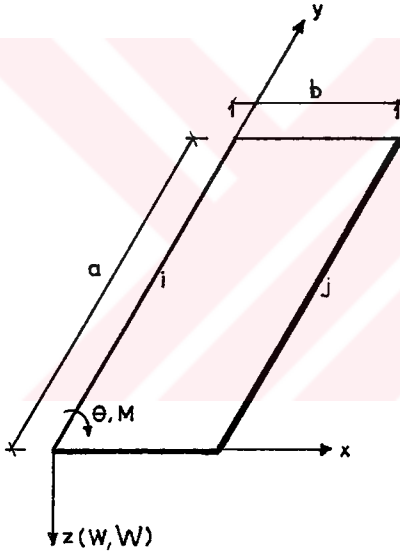
2.2 DİKTÖRTGEN PLAK BAND

Sonlu band eleman yönteminde dikdörtgen geometriye sahip plak bandlar, nodal çizgi sayısına göre iki katagoride değerlendirilir :

- Küçük mertebeden dikdörtgen band (LO2) : Yalnızca 2 nodal çizgiye, dolayısıyla eğilme problemi için 4 serbestlik derecesine sahip band elemanlardır.
- Yüksek mertebeden dikdörtgen band (HO3,HO4,...) : 3 yada daha fazla nodal çizgiye sahip bandlardır.

2.2.1 Deplasman fonksiyonu :

Bu bölümdeki analizde uç noktaları basit mesnetli, iki nodal çizgisi bulunan dikdörtgen bandlar (LO2) ele alınacaktır. Bu tanıma uyan bir dikdörtgen band plak Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Band nodal kenarlarının z aksı yönünde düşey deplasman yapabilecek ve y aksı etrafında dönebilecek şekilde serbest olduğu düşünülecektir. Bu durumda deplasman fonksiyonu seri açılımının her bir terimi (m) için serbestlik derecesi bir nodda 2, iki nodda ise 4 olur. Bu hususlar göz önüne alınarak eğilme problemine uygun bir deplasman fonksiyonu aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilebilir.



Şekil 2.1 Eğilme durumunda dikdörtgen band karakteristikleri

$$w = [N] \{\delta\} = \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta_b\}_m$$

$$= \sum_{m=1}^r Y_m [[C_1] [C_2]] \{\delta_b\}_m \quad (2.1a)$$

Eşitlik (2.1a) daki b indisi eğilme halini ifade etmektedir.

$$\{\delta_b\}_m = \{w_{1m} \ \theta_{1m} \ w_{2m} \ \theta_{2m}\}^T$$

Basit mesnetli band için, Bölüm 1 den de hatırlanacağı gibi,

$$Y_m = \sin k_m y \quad k_m = \frac{m \pi}{a}$$

Probleme uygun C_1, C_2 şekil fonksiyonları ise,

$$[C_1] = [(1 - 3 \bar{x}^2 + 2 \bar{x}^3), x (1 - 2 \bar{x} + \bar{x}^2)]$$

$$[C_2] = [(3 \bar{x}^2 - 2 \bar{x}^3), x (\bar{x}^2 - \bar{x})] \quad \bar{x} = \frac{x}{b} \quad (2.1b)$$

2.2.2 Gerinmeler (ϵ):

Gerinmeler eşitlik (2.1a) da verilen deplasman fonksiyonunun ikinci kısmi türevinin alınması ile bulunabilir. [3]

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} -\chi_x \\ -\chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.2a)$$

$$= \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 [N]_m}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [N]_m}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 [N]_m}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \{\delta_b\}_m \quad [N] = \{C_1, C_2\} \quad (2.2b)$$

$$\{\epsilon\} = \sum_{m=1}^r [B_b]_m \{\delta_b\}_m \quad (2.2c)$$

$[B_b]$: Eğilme hali için gerinme matrisi

$\{\delta_b\}$: Eğilme hali için nodal deplasman vektörü

$$[B_b]_m = \begin{bmatrix} \frac{6}{b^2} (1-2x) & \frac{2}{b} (2-3x)Y_m & \frac{6}{b^2} (-1+2x)Y_m & \frac{2}{b} (1-3x)Y_m \\ -(1-3x^2+2x^3)Y''_m & -x(1-2x+x^2)Y''_m & -(3x^2+2x^3)Y''_m & -x(x^2-x)Y''_m \\ \frac{2}{b} (-6x+6x^2)Y'_m & 2(1-4x+3x^2)Y'_m & \frac{2}{b} (6x-6x^2)Y'_m & 2(3x^2-2x)Y'_m \end{bmatrix} \quad (2.2d)$$

2.2.3 Momentler :

Momentler band gerinme dağılımı ve malzeme özelliklerine bağlı değerlerdir. Burada malzemenin ortotropik olduğu kabul edilecektir.

$$\{\sigma\} \Rightarrow \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D_b] \{\epsilon\}$$

$$= [D_b] \sum_{m=1}^r [B_b]_m \{\delta_b\}_m \quad (2.3a)$$

$[D_b]$: Eğilme hali için malzeme matrisi

$$[D_b] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.3b)$$

Ortotropik plak malzeme için D_x , D_y , D_1 ve D_{xy} sabitleri aşağıdaki değerleri alır. [4]

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_y = \frac{E_y t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_1 = \frac{\nu_x E_y t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_y E_x t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_{xy} = \frac{G t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)}$$

Yukarıdaki ifadelerde E_x , E_y , ν_x , ν_y ve G plak banda ait elastik sabitlerdir. t ise band kalınlığını göstermektedir. İzotropik plak hali için :

$$E_x = E_y = E \quad \nu_x = \nu_y = \nu \quad G = E / 2 (1 + \nu)$$

2.2.4 Rijitlik Matrisi :

Bölüm 1 de ifade edilen (1.8c) ve (1.8e) eşitlikleri kullanılırsa,

$$[S]_{mn} = \int [B_b]_m^T [D_b] [B_b]_n da \quad (2.4a)$$

Basit mesnetli band plak için,

$$Y_m = \sin k_m y = \sin \frac{m\pi y}{a}$$

$$Y'_m = k_m \cos k_m y \quad Y''_m = -k_m^2 \sin k_m y$$

(2.4a) eşitliği kullanılarak band rijitlik matrisi elde edilirken, serinin $m \neq n$ olan terim numaraları için ortogonalite prensibi uygulanarak aşağıdaki ifadeler göz önüne alınmalıdır [6]

$$\int_0^a Y_m Y_n dy = \int_0^a Y''_m Y''_n dy = \int_0^a Y''_m Y_n dy = \int_0^a Y_m Y''_n dy = \int_0^a Y'_m Y'_n dy = 0 \quad (m \neq n)$$

Böylelikle, $m \neq n$ için $[S]_{mn}$ matrisi elemanlarının değeri sıfır olacaktır. Bu da her bir terim numarası için rijitlik matrislerinin ayrı ayrı hesaplanabilmesi imkanını verir. Bu durumda basit mesnetli band için rijitlik matrisi en genel anlamda r adet terim için aşağıdaki biçimde yazılabilir :

$$[S] = \begin{bmatrix} [S]_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [S]_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & [S]_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.4b)$$

2.2.5 Yük matrisi :

$$\{F\}_m = \int_0^a \int_0^b [\{N_1\}_m^T \{N_2\}_m^T] \{q\} dx dy \quad (2.5a)$$

Band düzlemine dik düzgün yayılı q yükü için,

$$\begin{aligned} \{F\}_m &= q \int_0^b [C_1^T \ C_2^T] dx \int_0^a Y_m dy \\ &= q \left[\frac{b}{2} \quad \frac{b^2}{12} \quad \frac{b}{2} \quad -\frac{b^2}{12} \right]^T \int_0^a Y_m dy \end{aligned} \quad (2.5b)$$

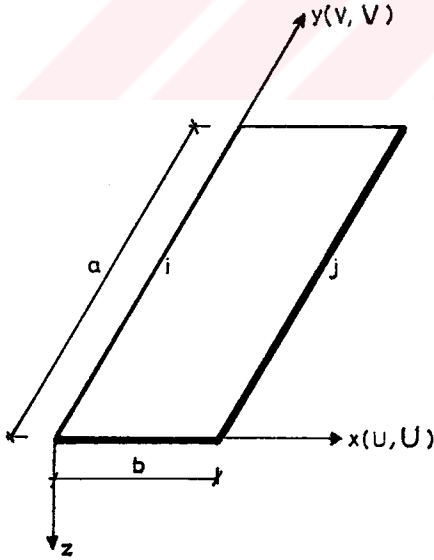
$x = x_c$ ve $y = y_c$ noktalarında P_c tekil yükü olması durumunda, x_c , y_c değerleri eşitlik (5.2b) de yerine konulursa, $\frac{x_c}{b} = \bar{x}_c$ olarak eşitlik (5.2.c) bulunabilir.

$$\{F\}_m = P_c Y_m(y_c) \left[(1-3x_c^2+2x_c^3) \quad x_c(1-2x_c+x_c^2) \quad (3x_c^2-2x_c^3) \quad x_c(x_c^2-x_c) \right]^T \quad (2.5c)$$

3. PLAK SİSTEMLERDE DÜZLEMSEL GERİLME HALİ

3.1 GENEL

Bu bölümde iki boyutlu elastisite düzlemi içersinde düzlemsel gerilmeye maruz plaklar sonlu band eleman yöntemi ile ele alınacaktır. Göz önüne alınacak plak band değişik sınır koşullarına göre (band uç noktalarının basit mesnetli, ankastre vb. olması) mesnetlenmiş olabilir. Ancak eğilme probleminde olduğu gibi burada da basit mesnetli dikdörtgen plak band ele alınacaktır. Bu özellikteki bir band Şekil 3.1 de gösterilmiştir. Band düzlemine paralel x ve y koordinatları doğrultusundaki düzlemsel deplasmanlar u ve v ile gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Düzlemsel gerilme halinde dikdörtgen band karakteristikleri

3.2 DÜZLEMSEL GERİLME HALİNDE BAND KAREKTERİSTİKLERİ

3.2.1 Deplasman fonksiyonu :

En genel biçimde u ve v deplasman fonksiyonları aşağıdaki biçimde verilir : [3]

$$u = \sum_{m=1}^r f_m^u(x) Y_m$$

$$v = \sum_{m=1}^r f_m^v(x) (a / \mu_m) Y'_m \quad (3.1a)$$

Basit mesnetli band için ,

$$Y_m = \sin k_m y$$

$$u = \sum_{m=1}^r f_m^u(x) \sin k_m y$$

$$v = \sum_{m=1}^r f_m^v(x) \cos k_m y$$

Eşitlik (1.3) ile verilen genel deplasman bağıntısı düzlemsel gerilme problemine uyarlanırsa :

$$u = \sum_{m=1}^r \left[\begin{matrix} [C_1] & [C_2] \end{matrix} \right] \{u_1 \ u_2\}_m^T Y_m$$

$$v = \sum_{m=1}^r \left[\begin{matrix} [C_1] & [C_2] \end{matrix} \right] \{v_1 \ v_2\}_m^T \left(\frac{a}{\mu_m} \right) Y'_m \quad (3.1b)$$

Eşitlik (3.1b) ile ifade edilen deplasman bağıntılarındaki C_1, C_2 şekil katsayıları düzlemsel gerilme durumunda aşağıdaki şekilde alınabilir :

$$C_1 = (1 - \bar{x}) \quad C_2 = \bar{x} \quad \bar{x} = \frac{x}{b}$$

Şekil katsayıları Eşitlik (3.1b) de yerine konursa,

$$\begin{aligned} \{f\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \sum_{m=1}^r \begin{bmatrix} (1 - \bar{x})Y_m & 0 & (\bar{x})Y_m & 0 \\ 0 & (1 - \bar{x})\left(\frac{a}{\mu_m}\right)Y'_m & 0 & x\left(\frac{a}{\mu_m}\right)Y'_m \end{bmatrix} \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2\}_m^T \\ &= \sum_{m=1}^r [N]_m \{\delta_p\}_m \end{aligned} \quad (3.1.c)$$

$\{\delta_p\}$: Düzlemsel gerilme deplasman vektörü (p indisi düzlemsel gerilme durumunu ifade etmektedir.)

3.2.2 Gerinmeler (ϵ)

Lineer analizde düzlemsel gerilme hali için gerilme aşağıdaki şekilde verilir. [3]

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^r [B_p]_m \{\delta_p\}_m \quad (3.2a)$$

$[B_p]$: Düzlemsel gerilme hali için gerilme matrisi

$$[B_p]_m = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{b})Y_m & 0 & (\frac{1}{b})Y_m & 0 \\ 0 & (1-\bar{x})(\frac{a}{\mu_m})Y''_m & 0 & \bar{x}(\frac{a}{\mu_m})Y''_m \\ (1-\bar{x})Y'_m & (-\frac{1}{b})(\frac{a}{\mu_m})Y'_m & \bar{x}Y'_m & (\frac{1}{b})(\frac{a}{\mu_m})Y'_m \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

3.2.3 Gerilmeler :

Gerilme değerleri eşitlik (3.2a) ile tanımlanan ϵ_x , ϵ_y ve ϵ_{xy} gerilme miktarları ile malzeme özelliklerine bağlı bir fonksiyon olarak ifade edilir. [3]

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D_p] \{\epsilon\} \\ &= [D_p] \sum_{m=1}^f [B_p]_m \{\delta_p\}_m \end{aligned} \quad (3.3a)$$

$[D_p]$: Düzlemsel gerilme malzeme matrisi

Banda ait malzemenin ortotropik olması halinde,

$$[D_p] = \begin{bmatrix} \frac{E_x}{(1-\nu_x\nu_y)} & \frac{\nu_x E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} & 0 \\ \frac{\nu_x E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} & \frac{E_y}{(1-\nu_x\nu_y)} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

3.2.4 Rijitlik matrisi :

Band kalınlığının, bandın tüm yüzeyi içersinde sabit olması durumunda eşitlik (1.8.e) düzlemsel gerilme hali için aşağıdaki formu alır :

$$[S]_{mn} = t \int [B_p]_m^T [D_p] [B_p]_n da \quad (3.4)$$

Basit mesnetli band için, $m \neq n$ durumunda ortogonalite prensibi gereğince $[S]_{mn}$ matrisinin elemanları sıfır değerini alır. Bu durumda serinin her bir terimi için band rijitlik matrisi ayrı ayrı hesaplanıp, süperpoze edilebilir. [6]

3.2.5 Yük matrisi :

Eşitlik (1.8i) düzlemsel gerilme problemine uyarlanırsa, band düzlemine paralel düzgün yayılı yük halinde ,

$$\{F\}_m = \frac{b}{2} \begin{bmatrix} X \int_0^a Y_m dy \\ Y \frac{a}{\mu_m} \int_0^a Y'_m dy \\ X \int_0^a Y_m dy \\ Y \frac{a}{\mu_m} \int_0^a Y'_m dy \end{bmatrix} \quad (3.5.a)$$

Yukarıda ifade edilen yük matrisi bağıntısında, bandın enine doğrultusunda lineer deplasman dağılımı olduğu kabulü yapılmıştır. X ve Y band düzlemine paralel düzgün yayılı band yükünün x ve y koordinatları doğrultusundaki bileşenleridir. [3] Şayet band nodal kenarları üzerinde çizgisel yük mevcutsa,

$$\{F\}_m = \begin{bmatrix} X_1 \int_0^a Y_m dy \\ Y_1 \frac{a}{\mu_m} \int_0^a Y'_m dy \\ X_2 \int_0^a Y_m dy \\ Y_2 \frac{a}{\mu_m} \int_0^a Y'_m dy \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

Yukarıdaki eşitlikte,

X_1, X_2 : 1 ve 2 nodlarında x koordinatı doğrultusunda çizgisel yük

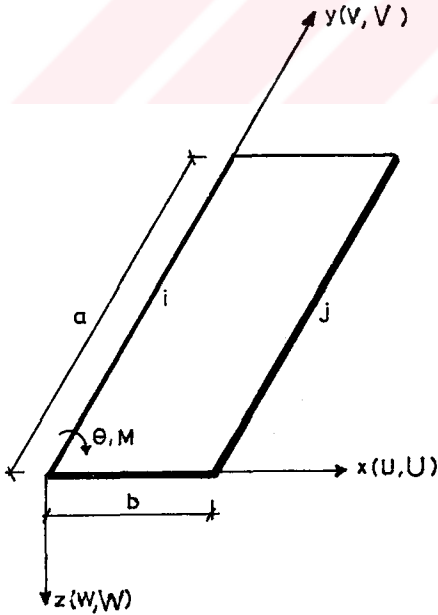
Y_1, Y_2 : 1 ve 2 nodlarında y koordinatı doğrultusunda çizgisel yük

4. KATLANMIŞ PLAK YAPILARIN SONLU BAND ELEMAN YÖNTEMİ İLE LİNEER ANALİZİ

4.1 GENEL

Prizmatik katlanmış plakların sonlu band eleman yöntemi ile analizi ilk olarak *Cheung* tarafından gündeme getirilmiştir. Bu analizde, daha önceden ayrı ayrı incelenen eğilme ve düzlemsel gerilme tesirleri bir bütün olarak değerlendirilip, sürerpoze bir formülasyon elde edilmiştir. [4]

Şekil 4.1 de katlanmış bir plağa ait dikdörtgen bandın geometrik karakteristikleri gösterilmiştir. Analizde 2 nodal kenara sahip dikdörtgen band (LO2) ele alınacaktır.



Şekil 4.1. Katlanmış plaklara ait dikdörtgen band karakteristikleri

4.2 YAPILAN KABULLER

Katlanmış plakların, sonlu band eleman yöntemi ile lineer analizinde, aşağıdaki temel kabuller dikkate alınacaktır.

- a) Plak eleman lineer, homojen ve ortotrop malzemeden oluşmuştur.
- b) Katlanmış plak mesnetleri, iki uçta da düzlemsel bir diafram ile sınırlanmıştır.
- c) Plak eleman, mesnetlerdeki diafram düzleminde sonsuz rijit, bu düzlem dışında ise sonsuz esnek özelliktedir.
- d) Eğilme ve düzlemsel gerilme tesirleri birbirinden bağımsızdır.

4.3 TOPLAM POTANSİYEL ENERJİ PRENSİBİNİN KATLANMIŞ PLAKLARA UYGULANMASI

Dikdörtgen band için, eğilme ve düzlemsel gerilme tesirlerinin birbirine etki etmediği kabul edildiğinden, katlanmış plakların lineer analizi eğilme ve düzlemsel gerilme durumları için ayrı ayrı ele alınabilir. [4]

Bölüm 1' de de belirtildiği üzere en genel manada toplam potansiyel enerji, iç kuvvetlerin gerilme enerjisi ve dış yüklerin potansiyel enerjisi toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade aşağıda gösterildiği gibi farklı biçimlerde yazılabilir :

$$a) \quad U = U^{st} + U^F \quad (4.1a)$$

U : Toplam potansiyel enerji

U^{st} : Gerilme enerjisi (eğilme ve düzlemsel gerilme)

U^F : Dış yüklerden dolayı potansiyel enerji

$$b) \quad U = U_p + U_b \quad (4.1b)$$

U_p : Düzlemsel (in plane) potansiyel enerji

U_b : Düzlemsel olmayan (out of plane) potansiyel enerji

c) (a) ve (b) şıklarındaki ifadeler birlikte göz önüne alındığında,

$$U^{st} = U_p^{st} + U_b^{st}$$

$$U^F = U_p^F + U_b^F$$

$$U = U_p^{st} + U_b^{st} + U_p^F + U_b^F \quad (4.1c)$$

4.3.1 Eğilme durumunda potansiyel enerji (U_b) :

$$U_b = \frac{1}{2} \int \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dv - \int q w da - \int_0^a \{ w_i \ \theta_i \ w_j \ \theta_j \} \{ W_i \ M_i \ W_j \ M_j \}^T dy \quad (4.1d)$$

q : Band düzlemine dik yayılı yük

w : Eğilme durumu için genel deplasman bağıntısı

$w_i, \theta_i, w_j, \theta_j$: i ve j nodlarındaki deplasman fonksiyonları

Z_i, M_i, Z_j, M_j : i ve j nodlarındaki nodal yükler

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ \epsilon \}^T [D] \{ \epsilon \} dx dy - q \int_0^a \int_0^b \{ \delta_b \}_m^T [N]_m^T dx dy - \int_0^a \{ \delta_b \}_m^T Y_m \{ W_i \ M_i \ W_j \ M_j \}^T dy \quad (4.1e)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{ \delta_b \}^T [B_b]^T [D_b] [B_b] \{ \delta_b \} dx dy - q \int_0^a \int_0^b \{ \delta_b \}_m^T [N]_m^T dx dy - \{ W_i \ M_i \ W_j \ M_j \}^T \int_0^a \{ \delta_b \}_m^T Y_m dy \quad (4.1f)$$

Eşitlik (4.1f) deki ifadeye minimum potansiyel enerji prensibi uygulanırsa ,

$$\left\{ \frac{\partial U_b}{\partial \Phi} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [B_b]^T [D_b] [B_b] \{\delta_b\} dx dy - q \int_0^a \int_0^b [N]_m^T dx dy - \{W_i \ M_i \ W_j \ M_j\}^T \int_0^a Y_m dy = [0] \quad (4.1g)$$

(4.1g) Eşitliği kısaltılmış fornda yazılırsa ,

$$\left\{ \frac{\partial U_b}{\partial \Phi} \right\} = [S_{bm}] \{\delta_{bm}\} - \{F_{bm}\} - \{F_{bm}^a\} = [0] \quad (4.1h)$$

$[S_{bm}]$: Serinin m. terimi cinsinden eğilme rijitlik matrisi

$\{F_{bm}\}$: Yayılı yük vektörü

$\{F_{bm}^a\}$: Nodal yük vektörü

4.3.2 Düzlemsel gerilme durumunda potansiyel enerji (U_p) :

$$U_p = \frac{1}{2} \int \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dv - \int_0^a \int_0^b \{u \ v\} \{X \ Y\}^T dx dy - \int_0^a \{u_i \ v_i \ u_j \ v_j\} \{X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j\}^T dy \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned}
U_p = & \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \{\delta_p\}^T [B_p]^T [D_p] [B_p] \{\delta_p\} dx dy \\
& - \{\delta_p\}^T \int_0^a \int_0^b [N]^T \{X_n \sin k_n y \quad Y_n \cos k_n y\}^T dx dy \\
& - \delta_{pm} \int_0^a [R_m] [R_n] \{X_{in} \quad Y_{in} \quad X_{jn} \quad Y_{jn}\}^T dy
\end{aligned} \tag{4.2b}$$

$$[R_m] = \begin{bmatrix} \sin k_n y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos k_n y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin k_n y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos k_n y \end{bmatrix} \tag{4.2c}$$

Eşitlik (4.2b) kısaltılmış forma çevrilirse ,

$$\left\{ \frac{\partial U_p}{\partial \delta_p} \right\} = [S_{pm}] \{\delta_{pm}\} - \{F_{pm}\} - \{F_{pm}^a\} = [0] \tag{4.2d}$$

$[S_{pm}]$: Düzlemsel gerilme rijitlik matrisi

$\{F_{pm}\}$: Yayılı yük vektörü

$\{F_{pm}^a\}$: Nodal (çizgisel) yük vektörü

4.4 RİJİTLİK MATRİSİNİN OLUŞTURULMASI

Katlanmış plakların band rijitlik matrisleri eğilme ve düzlemsel gerilme rijitlik matrislerinin süperpoze edilmesi ile oluşturulur. Benzer şekilde, eğilme ve düzlemsel gerilmelerden dolayı elde edilen band deplasman ve yük vektörleri de süperpoze edilmelidir. Böylelikle 1 bandın her bir nodu için 4' er deplasman ve yük bileşeni yazılmış olacaktır. Pratik bir süperpozisyon aşağıdaki formda yapılabilir.[3]

$$[S]_{mm} \{\delta\}_m = \{F\}_m \quad (4.3a)$$

$$\{\delta\}_m = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_2\}_m^T \quad (4.3b)$$

$$\{F\}_m = \{U_1 \ V_1 \ W_1 \ M_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ M_2\}_m^T \quad (4.3d)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}_{mm} \cdot \begin{bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{bmatrix}_m \quad (4.3e)$$

Eşitlik (4.3e) de belirtilen $[S]_{mn}$ matrisinin alt matrisi $[S]_{ij}$ ise ,

$$[S]_{ij} = \begin{bmatrix} [S^p_{ij}]_{mn} & [0] \\ [0] & [S^b_{ij}]_{mn} \end{bmatrix} \quad (i, j) = 1, 2 \quad (4.3f)$$

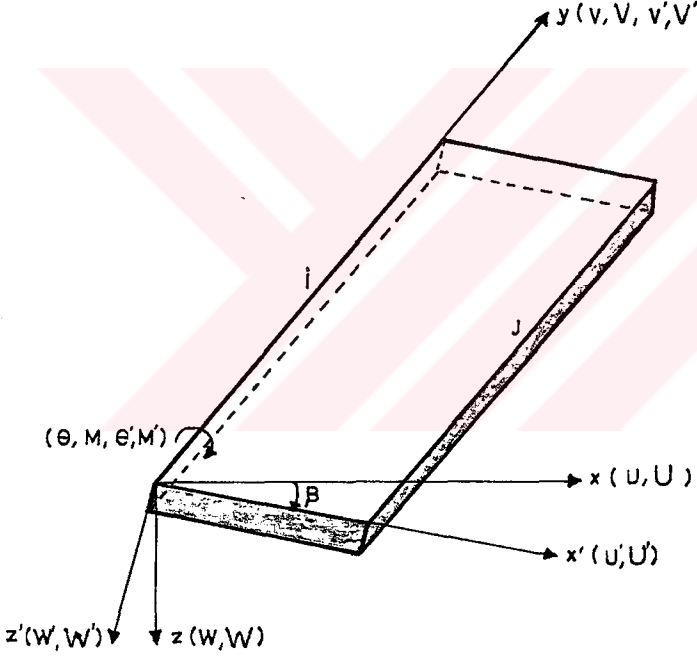
$[S^p_{ij}]$: Düzlemsel gerilme rijitlik matrisine ait alt matris (2x2 boyutlu)

$[S^b_{ij}]$: Eğilme rijitlik matrisine ait alt matris (2x2 boyutlu)

4.5 KOORDİNATLARIN TRANSFORMASYONU

Katlanmış plaklarda seçilen bandlar genel olarak farklı açıdaki düzlemlerde yer almaktadır. Böyle durumlarda farklı düzlemdeki her bir banda ait lokal koordinatların sistemin tümünü kapsayabilecek bir koordinat sistemine (global koordinat sistemi) çevrilmesi gerekir. Bu dönüşüm eşitlik (4.4d) ile verilen transformasyon matrisi kullanılarak yapılabilir. [3]

Şekil (4.2) de global ve lokal koordinat sistemleri katlanmış bir plak bandının üzerinde gösterilmiştir. x, y, z aksları global, x', y', z' aksları ise lokal koordinat sistemini ifade etmektedir.



Şekil 4.2. Global ve lokal koordinat sistemleri

$$\{F\}_m = [R] \{F'\}_m \quad (4.4a)$$

$$\{\delta'\}_m = [R]^T \{\delta\}_m \quad (4.4b)$$

$\{F\}, \{\delta\}$: Global koordinatlarda band yük ve deplasman vektörü

$\{F'\}, \{\delta'\}$: Lokal koordinatlarda band yük ve deplasman vektörü

$[R]$: Transformasyon matrisi

$$[R] = \begin{bmatrix} [r] & [0] \\ [r] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.4c)$$

$$[r] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4d)$$

$$\{F\}_m = [R] \{F'\}_m$$

$$\{F\}_m = [R] [S']_{mm} \{\delta'\}_m$$

$$= [R] [S']_{mm} [R]^T \{\delta\}_m$$

$$= [S]_{mm} \{\delta\}_m \quad (4.4e)$$

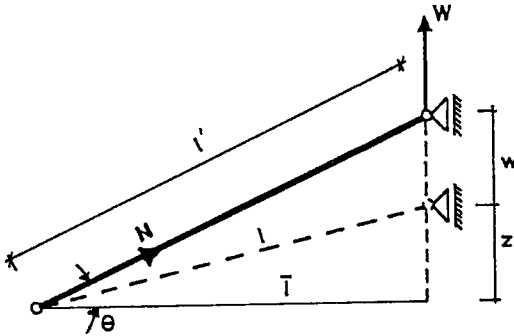
5. KATLANMIŞ PLAKLARIN SONLU BAND ELEMAN YÖNTEMİ İLE GEOMETRİK NON - LİNEER ANALİZİ

5.1 GENEL

Bu bölümde daha önceki konularda lineer aşamada incelenen katlanmış plakların geometrik non-lineer analizi yapılarak sonlu band eleman yöntemi ile çözümü ele alınacaktır. Analizde küçük şekil değiştirmelere karşılık büyük deplasmanların oluşacağı kabul edilecektir. Gerçekte de sonlu band eleman yönteminde kullanılan eleman band genişliği (b) ve kalınlığı (t), band uzunluğuna (a) göre çok küçük kaldığından, küçük şekil değiştirmelerde (gerinme) bile büyük deplasmanlar doğmaktadır. Bu durum ise, katlanmış plakların geometrik non-lineer analizinde metoda büyük çapta işlerlik kazandırmaktadır. [7]

5.2 GEOMETRİK NON - LİNEERİTEYE BİR ÖRNEK

Geometrik non-lineeriteye bir örnek olarak Şekil 5.1 de gösterilen iki ucu mafsallı ve tek serbestlik dereceli çubuk sistem ele alınacaktır. θ nın küçük olduğu kabul edilecektir. [5]



Şekil 5.1 Tek serbestlik dereceli geometrik non-lineer çubuk sistem

l : Başlangıç konumunda çubuk boyu

l' : Deforme olmuş durumda çubuk boyu

$\bar{l}$: Yatay konumda çubuk boyu

$$\epsilon = \frac{\left((z+w)^2 + \bar{l}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \left(z^2 + \bar{l}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(z^2 + \bar{l}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Yukarıdaki eşitlikte pay ve payda $\bar{l}$ ye bölünürse,

$$\epsilon = \left(1 + \left(\frac{z+w}{\bar{l}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \left(\frac{z}{\bar{l}}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$\cong \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z+w}{\bar{l}}\right)^2\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\bar{l}}\right)^2\right) - 1$$

$$\cong \left(\frac{z}{\bar{l}}\right) \cdot \left(\frac{w}{\bar{l}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{\bar{l}}\right)^2$$

$l \cong \bar{l}$ alınırsa,

$$\epsilon \cong \left(\frac{z}{l}\right) \cdot \left(\frac{w}{l}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{l}\right)^2 \quad (5.1a)$$

Eşitlik (5.1a) ile verilen şekil değiştirme bağıntısı non-lineer bir ifadedir. Çubuğu deforme olmuş konuma getiren düşey yük W , çubuk iç kuvveti de N ile gösterilirse,

$$W = N \sin \theta = \frac{N(z+w)}{l} \cong \frac{N(z+w)}{l}$$

$$N = EA\varepsilon = EA \left[\left(\frac{z}{l} \right) \left(\frac{w}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{l} \right)^2 \right]$$

$$W = EA \left[\left(\frac{z}{l} \right) \left(\frac{w}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{l} \right)^2 \right] \frac{(z+w)}{l}$$

$$= \left(\frac{EA}{l^3} \right) \left(z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3 \right)$$

$$g = \left(\frac{EA}{l^3} \right) \left(z^2 w + \frac{3}{2} z w^2 + \frac{1}{2} w^3 \right) - W = 0$$

Yukarıdaki non-lineer eşitliğin nümerik çözümü Newton - Raphson metodu ile aşağıda gösterilen aşamalarda çözülebilir. [5]

$$w_1 = w_0 + \Delta w_0 \quad (5.2a)$$

$$\Delta w_0 = - \left(\frac{\partial g_0}{\partial w} \right)^{-1} g_0(w_0) \quad (5.2b)$$

Başlangıç iterasyonu için çözümde yakınsamayı sağlayacak bir w_0 değeri seçerek,

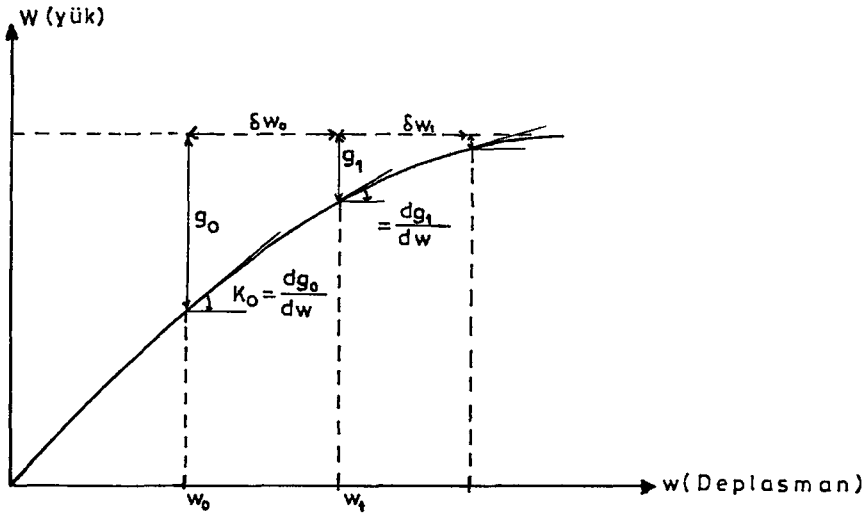
$$w_1 = w_0 - \left(\frac{\partial g_0}{\partial w} \right)^{-1} g_0(w_0)$$

$$w_2 = w_1 - \left(\frac{\partial g_1}{\partial w} \right)^{-1} g_1(w_1)$$

$$\vdots$$

$$w_n = w_{n-1} - \left(\frac{\partial g_{n-1}}{\partial w} \right)^{-1} g_{n-1}(w_{n-1}) \quad (5.2c)$$

İterasyon yeterli hassaslığa ulaşana kadar (g değerinin 0 ' a yakınsaması) sürdürülmelidir. Verilen çubuk sistem örneğinin Newton-Raphson yöntemi ile çözümüne ait iteratif adımlar Şekil 5.2 de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 Newton-Raphson yönteminde iteratif adımlar

$$K_0 = \frac{\partial g_0}{\partial w}, \quad K_1 = \frac{\partial g_1}{\partial w}, \quad \dots \quad K_n = \frac{\partial g_n}{\partial w}$$

$$\Delta w_n = K_n g(w_n)$$

K_n : Tanjant rijitlik matrisi

5.3 DÜZLEMSEL PLAKLARIN NON- LİNEER ŞEKİL DEĞİŞTİRME BAĞINTISI

Eşitlik (5.1a) da çubuk sistem için yazılan şekil değiştirme (gerinme) ifadesi, düzlemsel plak elemanlar için de geçerlidir. Şekil 5.3 de x-z koordinat sisteminde enine kesiti gösterilen plak için, z plağın başlangıç koordinatını, w de deforme olmuş koordinatını göstermek üzere , [5]

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.3a)$$

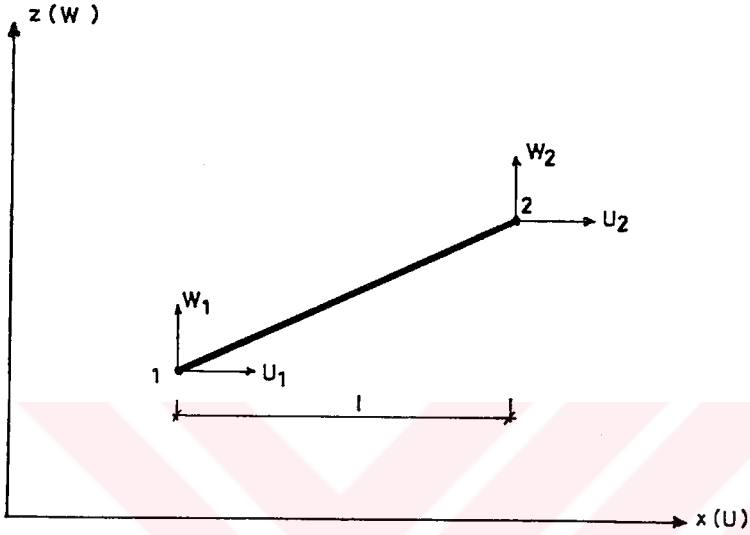
Eşitlik (5.3a) daki $\frac{\partial u}{\partial x}$ lineer, diğerleri ise eşitlik (5.1a) ile elde edilen nonlineer terimlerdir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{21}}{l}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_{21}}{l}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{21}}{l}$$

$$U_{21} = U_2 - U_1 \quad Z_{21} = Z_2 - Z_1 \quad W_{21} = W_2 - W_1$$



Şekil 5.3 Non-lineer şekil değiştirmeye maruz düzlemsel plak

Şayet plağın deforme olmamış durumdaki düşey konumu (z) sıfır alınırsa, (5.3a) ifadesindeki en son terim ortadan kalkar. Benzer şekilde ϵ_y ve ϵ_{xy} şekil değişime bağıntıları da yazılabilir :

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.3b)$$

5.4 MİNİMUM POTANSİYEL ENERJİ PRENSİBİNİN NON-LİNEER ŞEKİL DEĞİŞTİRME - DEPLASMAN BAĞINTILARINA UYGULANMASI

Bölüm 4.2 de lineer şekil değiştirme-deplasman bağıntıları göz önüne alınarak eğilme ve düzlemsel gerilme halinde plaklara ait toplam potansiyel enerji ifadesi elde edilmişti. Bu bölümde ise, lineer şekil değiştirme tansörüne non-lineer terimler ilave edilerek toplam potansiyel enerji bağıntısı yeniden düzenlenecektir.

Eşitlik (4.1a) , (4.1b) ve (4.1c) den,

$$U = U^{st} + U^F$$

$$U = U_p + U_b$$

$$U = U_p^{st} + U_b^{st} + U_p^F + U_b^F$$

Eşitlik (5.3b) de verilen şekil değiştirme tansöründeki non-lineer terimler dikkate alınarak yukarıda verilen toplam potansiyel enerji eşitliğindeki U_p^{st} terimi yeniden yazılacak olursa,

$$U_p^{st} = \frac{1}{2} \int \{ \epsilon \}^T \{ \sigma \} dv \quad (5.4a)$$

U_p^{st} : Düzlemsel gerilme halinde gerinme enerjisi

$$\epsilon = \hat{\epsilon} + \tilde{\epsilon} \quad (5.4b)$$

$\hat{\epsilon}$: Şekil değiştirme tansörü lineer bileşeni

$\tilde{\epsilon}$: Şekil değiştirme tansörü non-lineer bileşeni

$$U_p^{st} = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \{ \epsilon \}^T [D_p] \{ \epsilon \} dx dy \quad (5.4c)$$

$$U_p^{st} = \frac{t}{2} \int_0^a \int_0^b \{ \widehat{\epsilon} + \widetilde{\epsilon} \}^T [D_p] \{ \widehat{\epsilon} + \widetilde{\epsilon} \} dx dy \quad (5.4d)$$

$$U_p^{st} = \frac{t}{2} \left[\int_0^a \int_0^b \{ \widehat{\epsilon} \}^T [D_p] \{ \widehat{\epsilon} \} dx dy + \int_0^a \int_0^b \{ \widehat{\epsilon} \}^T [D_p] \{ \widetilde{\epsilon} \} dx dy \right. \\ \left. + \int_0^a \int_0^b \{ \widetilde{\epsilon} \}^T [D_p] \{ \widehat{\epsilon} \} dx dy + \int_0^a \int_0^b \{ \widetilde{\epsilon} \}^T [D_p] \{ \widetilde{\epsilon} \} dx dy \right] \quad (5.4e)$$

Bu ifadede,

$$\{ \widehat{\epsilon} \} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \{ \widetilde{\epsilon} \} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.4f)$$

Düzlemsel gerilme etkisindeki düzlemsel bir plak toplam potansiyel enerjinin belirli bir sınırı aşması durumunda burkulmaya maruz kalır. Burkulma anındaki potansiyel enerji ise, [2]

$$V_P = \frac{1}{2} \int \{ \epsilon_N \}^T \{ \sigma_m \} dv$$

Yukarıdaki ifadede $\{\epsilon_N\}$ burkulma problemi için yazılmış en genel anlamdaki non-lineer gerinme matrisidir. Bu matris de aşağıdaki formda verilir :

$$\{\epsilon_N\} = \left\{ \frac{1}{2} u_{,x}^2 + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad , \quad \frac{1}{2} w_{,y}^2 \quad , \quad w_{,x}w_{,y} \right\}^T$$

Katlanmış plaklarda burkulma genelde kritik bir durum olmadığından, yukarıda verilen ifadenin baştaki terimindeki ilk iki bileşen ihmal edilerek daha önceden yazmış olduğumuz non-lineer gerinme ifadesine ulaşılabilir.

$$\{\widehat{\epsilon}\} = [\widehat{B}_p]\{\delta_p\} \quad , \quad \{\widetilde{\epsilon}\} = [\widetilde{B}_p]\{\delta_b\} \quad (5.4g)$$

$[\widehat{B}_p]$: Düzlemsel gerilme durumunda lineer gerinme matrisi

$[\widetilde{B}_p]$: Düzlemsel gerilme durumunda non-lineer gerinme matrisi

$$\begin{aligned} U_p^{st} = & \frac{1}{2} \left[\int_0^a \int_0^b \{\delta_p\}^T [\widehat{B}_p]^T [D_p] [\widehat{B}_p] \{\delta_p\} dx dy + \int_0^a \int_0^b \{\delta_p\}^T [\widehat{B}_p]^T [D_p] [\widetilde{B}_p] \{\delta_b\} dx dy \right. \\ & \left. + \int_0^a \int_0^b \{\delta_b\}^T [\widetilde{B}_p]^T [D_p] [\widetilde{B}_p] \{\delta_b\} dx dy + \int_0^a \int_0^b \{\delta_b\}^T [\widetilde{B}_p]^T [D_p] [\widehat{B}_p] \{\delta_p\} dx dy \right] \end{aligned} \quad (5.4h)$$

Eşitlik (4.1f) den anlaşılacağı şekilde, eğilme durumunda ise,

$$U_b^{st} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \{\delta_b\}^T [B_b]^T [D_b] [B_b] \{\delta_b\} dx dy \quad (5.4i)$$

5.5 NON-LİNEER RİJİTLİK MATRİSİNİN OLUŞTURULMASI

$$U^{st} = U_p^{st} + U_b^{st} \quad (5.5a)$$

Non-lineer rijitlik matrisi, toplam gerinme enerjisi U_{st} üzerinde, minimum toplam potansiyel enerji prensibi uygulanması ile oluşturulur. [7]

$$\frac{\partial U^{st}}{\partial \{\delta_p\}^T} = \frac{t}{2} \left[\int_0^a \int_0^b [\widetilde{B}_p]^T [D_p] [\widehat{B}_p] \{\delta_p\} dx dy + \int_0^a \int_0^b \{\widehat{B}_p\}^T [D_p] [\widetilde{B}_p] \{\delta_b\} dx dy \right] \quad (5.5b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{st}}{\partial \{\delta_b\}^T} = & \frac{t}{2} \left[\int_0^a \int_0^b [\widetilde{B}_p]^T [D_p] [\widehat{B}_p] \{\delta_p\} dx dy + \int_0^a \int_0^b [\widetilde{B}_p]^T [D_p] [\widetilde{B}_p] \{\delta_p\} dx dy \right. \\ & \left. + \int_0^a \int_0^b [B_b]^T [D_b] [B_b] \{\delta_b\} dx dy \right] \quad (5.5c) \end{aligned}$$

Lineer gerinme matrisleri $[B_b]$ ve $[\widehat{B}_p]$ eşitlik (2.2d) ve (3.2b) de verilen ifadelerdir. Non-lineer düzlemsel gerinme matrisi $[B_p]$ düzlemsel gerinme matrisi ise aşağıda izlenen yolla oluşturulabilir. [7]

$$\{\widetilde{\epsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = [\widetilde{B}_p] \{\delta_b\}$$

$$w = [N_b] \{\delta_b\}$$

$$[N_b] = \left[\left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3} \right) \quad \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2} \right) \quad \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3} \right) \quad \left(\frac{x^3}{b^2} - \frac{x^2}{b} \right) \right]^T$$

$$\{\delta_b\} = \{\delta_b\}_m Y_m \quad Y_m = \sin k_m y \quad \{\delta_b\}_m = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2\}_m^T$$

$$\tilde{[B_p]} = [B_{b1}] \{w_p\} [B_{b2}] \quad (5.5d)$$

$$[B_{b1}] = \begin{bmatrix} [N_{b,x}] Y_b & 0 \\ 0 & [N_b] Y_{b,y} \\ [N_b] Y_{b,y} & [N_{b,x}] Y_b \end{bmatrix} \quad (3 \times 8) \quad (5.5e)$$

$$Y_b = Y_m = \sin k_m y$$

$$[B_{b2}] = \begin{bmatrix} [N_{b,x}] Y_b \\ [N_b] Y_{b,y} \end{bmatrix} \quad (2 \times 4) \quad (5.5f)$$

$$\{\widehat{[S]} + \tilde{[S]}\} \{\delta\} = \{Q\} \quad (5.5g)$$

$[\hat{S}]$: Lineer rijitlik matrisi

$[\tilde{S}]$: Non-lineer rijitlik matrisi

$\{\delta\}$: Nodal deplasnan vektörü

$\{Q\}$: Nodal yük vektörü

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & S_b \end{bmatrix} \quad (8 \times 8) \quad (5.5h)$$

Eşitlik (5.5h) de verilen lineer rijitlik matrisinin alt matrisleri $[S_b]$ ve $[S_p]$ sırasıyla (2.4a) ve (3.4) eşitliklerinde verilen, eğilme ve düzlemsel gerilme durumlarına ait 4x4 boyutlu rijitlik matrisleridir.

$$[\tilde{S}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} S_{pb} \\ \frac{1}{2} S_{bp} & \frac{1}{2} S_{bb} \end{bmatrix} \quad (5.5i)$$

$$\{\delta\} = \{ u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \}^T$$

$$\{Q\} = \{ U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad W_1 \quad M_1 \quad W_2 \quad M_2 \}^T$$

Eşitlik (5.5i) de ifade edilen non-lineer rijitlik matrisinin alt matrisleri 4x4 boyutlu olup, (5.5b) ve (5.5c) ifadelerinden türetilebilir.

$$[S_{bb}]_{mn} = t \int_0^a \int_0^b \sum_{v,z=1}^r \sum_{s,t=1}^r [B_{b2}]_m^T \{w_s\}^T [B_{b1}]_t^T [D_p] [B_{b1}]_v \{w_z\} [B_{b2}]_n dx dy \quad (5.5j)$$

$$[S_{bp}]_{mn} = \int_0^a \int_0^b \sum_{s,z=1}^r [B_{b2}]_m^T \{w_s\}^T [B_{b1}]_z^T [D_p] [\widehat{B}_p]_n dx dy \quad (5.5k)$$

$$[S_{pb}]_{mn} = \int_0^a \int_0^b \sum_{s,z=1}^r [\widehat{B}_p]_m^T [D_p] [B_{b1}]_s \{w_z\} [B_{b2}]_n dx dy \quad (5.5l)$$

$$\{w_s\} = \begin{bmatrix} \delta_{bs} & 0 \\ 0 & \delta_{bs} \end{bmatrix} \quad (8 \times 2) \quad (5.5m)$$

$$\{\delta_b\}_s = \{w_1 \ \theta_1 \ w_2 \ \theta_2\}_s^T \quad (\text{serinin } s \text{ nci terimi cinsinden}) \quad (5.5n)$$

5.6 NON-LİNEER GERİLME MATRİSİNİN OLUŞTURULMASI

Bölüm (3.2.3) de, lineer şekil değiştirme bağıntısı dikkate alınarak düzlemsel gerilme durumundaki lineer gerilme ifadesi yazılmıştı. Eşitlik (5.3.b) de verilen non-lineer şekil değiştirme bağıntısındaki lineer olmayan terimler de göz önüne alınarak non-lineer gerilmeler aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = D_p \epsilon = D_p (\widetilde{\epsilon} + \widehat{\epsilon}) \quad (5.6a)$$

$$\{\sigma\} = D_p \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \right] \quad (5.6b)$$

$$\{\sigma\} = \{\hat{\sigma}\} + \{\tilde{\sigma}\} \quad (5.6c)$$

$$\{\tilde{\sigma}\} = D_p \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.6d)$$

$$= D_p \tilde{B}_p \delta_p$$

$$\tilde{B}_p = \sum_{m=1}^r \sum_{s,z=1}^r [B_{b1}]_s \{w_z\} [B_{b2}]_m \quad (5.6e)$$

$$\{\tilde{\sigma}\} = \sum_{m=1}^r \sum_{s,z=1}^r [D_p] [B_{b1}]_s \{w_z\} [B_{b2}]_m \{\delta_b\}_m \quad (5.6f)$$

$\{wz\}$ ve $\{\delta b\}_m$ vektörleri eşitlik (5.5m) ve (5.5n) ile verilen ifadelerdir.

5.7 SAYISAL ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Non-linear denklem takımının çözümü ile ilgili olarak, geometrik non-linear bir çubuk sistemin deplasman bilinmeyenlerinin hesabında Newton-Raphson metodunun kullanılması bölüm (5.2) de gösterilmişti.

Geometrik non-linear katlanmış plaklar için yük-deplasman bağıntısı ele alınırsa,

$$R = (\hat{S} + \tilde{S}) \delta - \bar{Q} = 0 \quad (5.7a)$$

$$\delta_1 = \delta_0 + \Delta\delta_0 \quad (5.7b)$$

İterasyona başlangıç için, uygun bir δ_0 değeri alınmalıdır. (Bu değer problemin lineer çözümünden elde edilen δ olarak alınabilir.)

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{\partial R}{\partial \delta_0} \\ S_1 &= \frac{\partial R}{\partial \delta_1} \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{\partial R}{\partial \delta_n} \end{aligned} \quad (5.7c)$$

$$\Delta\delta_0 = -S_0^{-1} R_0 \quad (\delta = \delta_0 \text{ değerinde})$$

$$\Delta\delta_1 = -S_1^{-1} R_1$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Delta\delta_n = -S_{n-1}^{-1} R_{n-1} \quad (\delta = \delta_{n-1} \text{ değerinde}) \quad (5.7d)$$

$$\delta_1 = \delta_0 - (S_0^{-1} R_0)$$

$$\delta_2 = \delta_1 - (S_1^{-1} R_1)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\delta_n = \delta_{n-1} - (S_{n-1}^{-1} R_{n-1}) \quad (5.7e)$$

İterasyon, R_n değerinin sıfıra yaklaşması durumunda biter. Yakınsama kriteri ise aşağıdaki formda verilir : [7]

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (R_i^{rt})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (Q_i)^2}} 100 \leq \varepsilon \quad (5.7f)$$

Bu ifadede,

rt : İterasyon numarası

N : Toplam nod sayısı

ε : Yakınsama derecesini belirleyen sabit

6. BİLGİSAYAR UYGULAMALARI VE SONUÇLAR

6.1 PROGRAM KRİTERLERİ

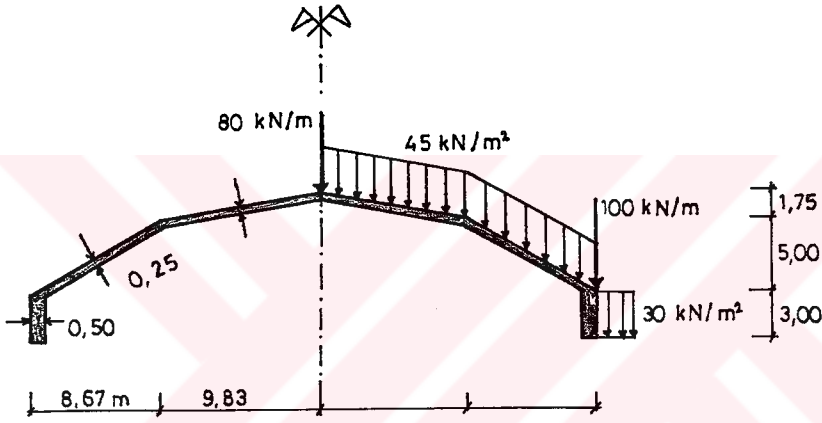
Bu bölümde katlanmış plakların, sonlu band eleman yöntemi ile geometrik non-lineer çözümüne ilişkin örnek bir bilgisayar uygulaması verilecektir. Uygulamaya ilişkin bilgisayar programı FORTRAN 77 dilinde yazılmış olup, basit mesnetli ve istenen geometrideki bir katlanmış plağın, alternatif yüklemelere göre çıktısı alınacak noktalardaki deplasman ve kesit tesirlerini non-lineer çözümle hesaplayabilecek özelliktedir. Program akışındaki aşamalar aşağıdaki biçimde özetlenebilir.

- a) Giriş bilgilerinin (sistem ve band geometrik karakteristikleri, yüklemeler, sınır koşulları ve malzeme özellikleri vs.) okunması
- b) Her bir banda ait rijitlik, yük ve transformasyon matrisinin hesaplanması
- c) Her bir band için elde edilen lokal rijitlik ve yük matrisinin global koordinatlara çevrilip süperpoze edilmesi suretiyle sistem rijitlik ve yük matrisinin bulunması
- d) Sınır koşullarının sistem rijitlik matrisi içersinde değerlendirilmesi
- e) Sistem rijitlik ve yük matrisinin teşkil ettiği lineer cebirsel denklem takımının çözülerek istenen noktalardaki deplasman ve kesit tesirlerinin hesaplanması (lineer çözüm aşaması)
- f) Lineer çözüm sonrasında bulunan band deplasman değerleri kullanılarak non-lineer band rijitlik matrislerinin bulunması
- g) Non-lineer sistem rijitlik matrisinin oluşturulması
- h) Lineer ve non-lineer sistem rijitlik matrisleri toplamı ile yük matrisinin teşkil ettiği non-lineer cebirsel denklem takımının Newton-Raphson yöntemi ile çözülerek nihai deplasman ve kesit tesirlerinin hesaplanması

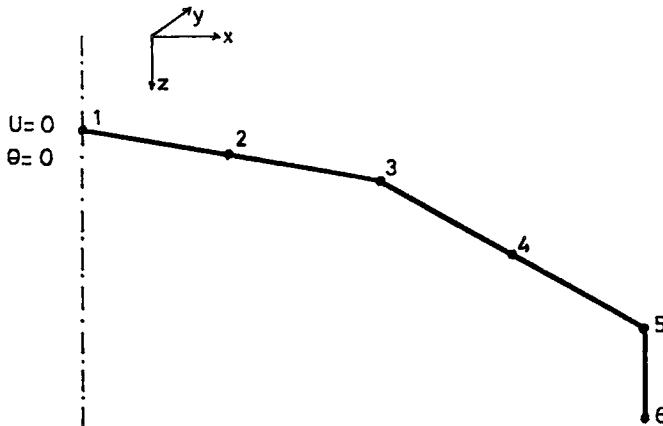
Örnek sistem olarak, düzgün yayılı yük tesirindeki prizmatik bir katlanmış plak ele alınacaktır.

6.2 DÜZGÜN YAYILI YÜK ETKİSİNDEKİ PRİZMATİK KATLANMIŞ PLAK

Örneğe ait basit mesnetli beton bir katlanmış plağın kesit ve yükleri Şekil (6.1) de verilmiştir. Şekil (6.2) de de görüldüğü üzere, plak eleman 10 banda bölünerek kesit üzerinde 11 nod oluşturulmuştur. Plağa ait diğer geometrik karakteristikler ve malzeme özellikleri de aşağıda sıralanmıştır. Çözümde deplasman fonksiyonu seri açılımının yalnız ilk üç terimi kullanılacak, yüklemeler de 10 artımda tatbik edilecektir. 100 m , 75 m ve 50 m gibi 3 ayrı band uzunluğuna göre elde edilen sonuçlar grafik olarak gösterilecektir.



Şekil 6.1 Örnek katlanmış plak kesit ve yükleri



Şekil 6.2 Örnek Sistemin sonlu bandlara bölünüşü ve sınır koşulları

Nod Koordinatları

Nod	X (m)	Z (m)
1	0.000	0.000
2	4.915	0.875
3	9.830	1.750
4	14.165	4.250
5	18.500	6.750
6	18.500	9.750

Band Kalınlıkları ve yükleri

Band	Sol nod	Sağ nod	Kalınlık (m)	Yayıllı yük (kN / m ²)
1	1	2	0.40	45
2	2	3	0.40	45
3	3	4	0.40	45
4	4	5	0.40	45
5	5	6	0.75	30

Nodal Yükler

Nod	Nodal yük (kN / m)
1	80
6	100

Malzeme özellikleri

E_x (kN /cm ²)	E_y (kN /cm ²)	ν_x	ν_y	G (kN /cm ²)
3582	3582	0,20	0,20	1492

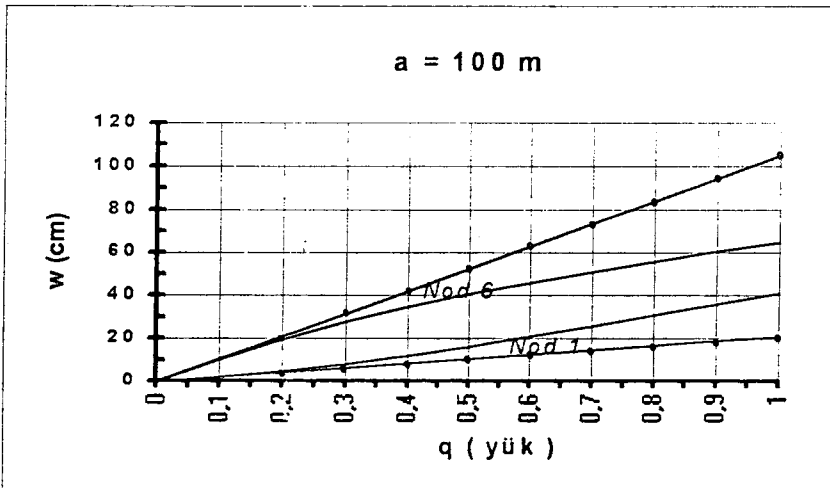
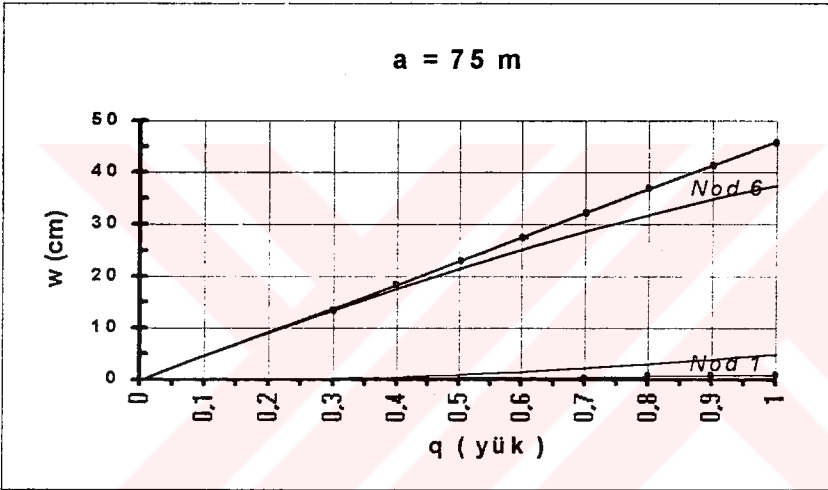
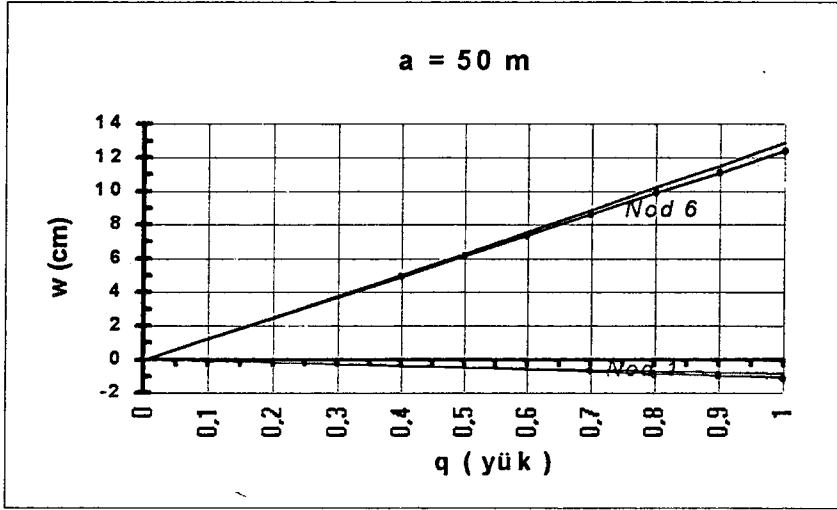
Sınır Koşulları (1= serbest , 0= ankastre)

Nod	u	v	w	θ
1	0	1	1	0

6.3 SONUÇLAR

Örnek sistem olarak ele alınan prizmatik katlanmış plağın 50 , 75 ve 100 m band uzunlukları için elde edilen sonuçlar bölüm sonundaki grafiklerde verilmiştir. Şekil 6.3 de plak ortasında, kesitin 1 ve 6 nodlarındaki maximum düşey deplasmanlar 10 eşit adımda artırılan yükler için gösterilmiştir. x ve y koordinatları doğrultusundaki her bir noda ait kesit tesirleri de Şekil 6.4 - 6.5 - 6.6 ve 6.7 de verilmiştir. Şekil 6.8 de poisson oranının, Şekil 6.9 da da izotrop olmayan malzeme davranışının 100 m band uzunluğu için bulunan kesit tesirleri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

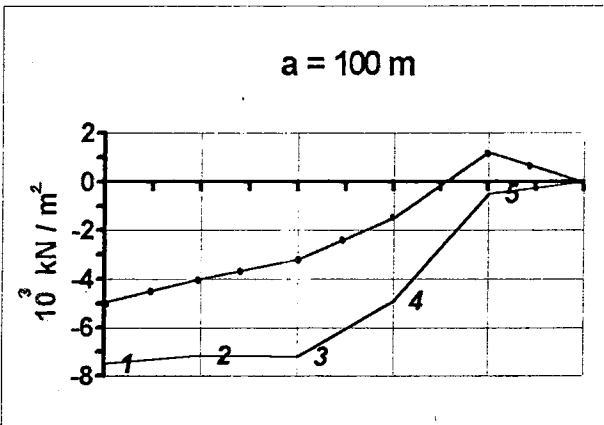
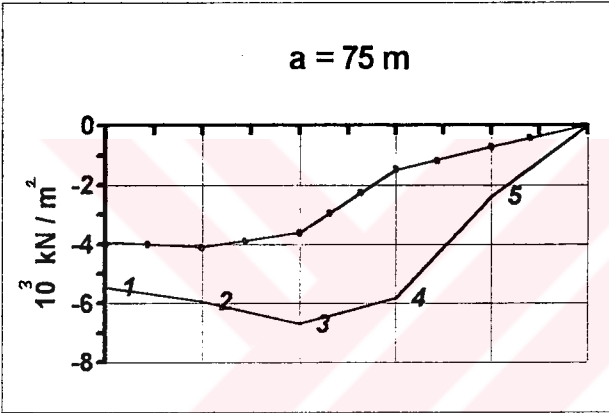
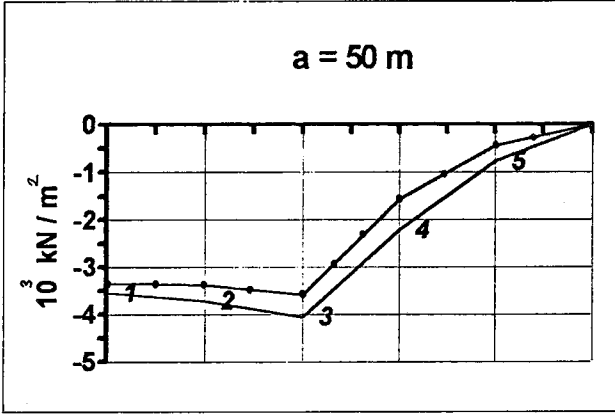
Sonuç olarak söylenilebilir ki, sonlu band eleman yöntemi değişik geometri ve sınır koşullarına sahip katlanmış plaklar üzerinde pratik bir biçimde başarıyla uygulanabilir. Çalışma ile ilgili hazırlanan bilgisayar programının sadeliği ve çözülen sayısal örneklerin sonuçlarına ulaşmadaki çabukluk metodun alternatif yöntemlere göre daha kullanışlı olduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Basit mesnet dışındaki sınır koşulları için, uygun deplasman fonsiyonları yazılarak daha genel kapsamlı bilgisayar programları yazılabilir. Ancak bu durumda deplasman fonsiyonuna ortogonalite prensibi uygulanamayacağından, oluşturulacak rijitlik matrisleri sadeliğini kaybederek karmaşık bir hal alacaktır. Sonlu band eleman yöntemi kutu gövdeli kiriş ve silindirik kabuklar için de kullanılabilir.



—•— Linear

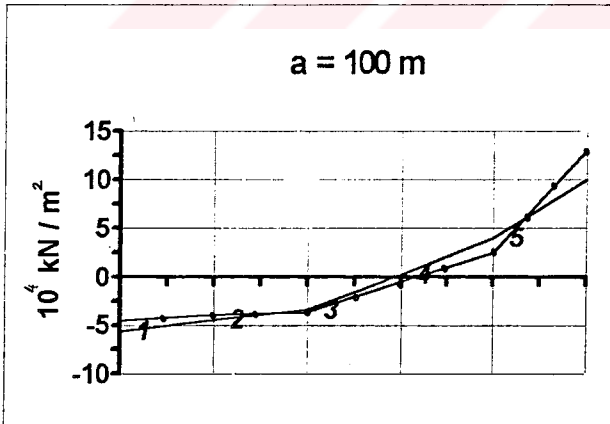
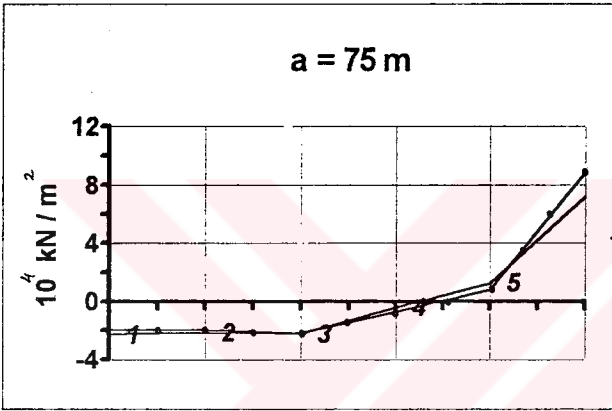
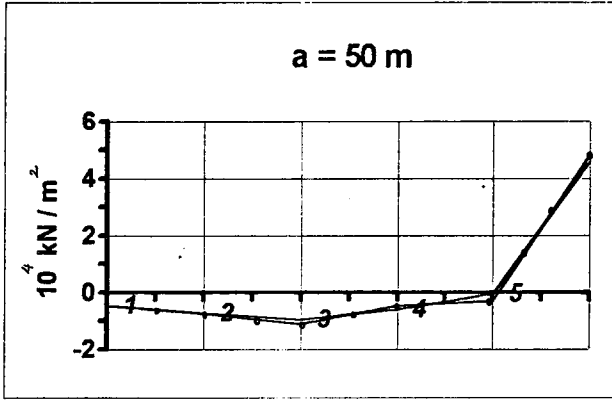
— Nonlinear

Şekil 6.3 Plak ortalarında 1 ve 6 nodlarındaki düşey deplasmanlar (w)



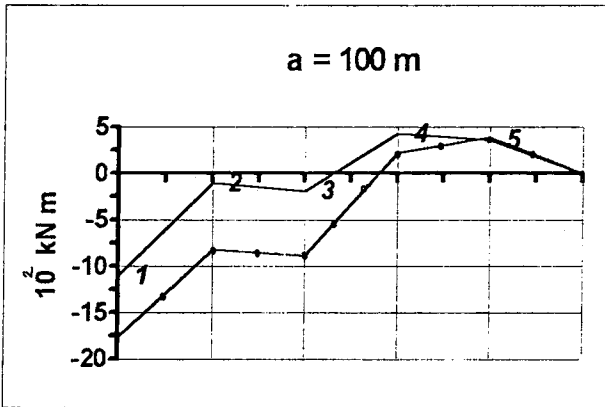
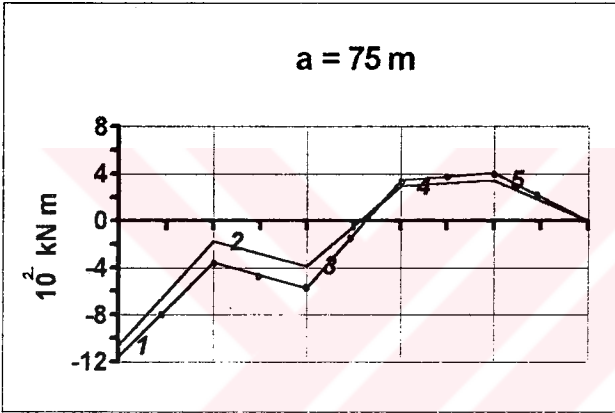
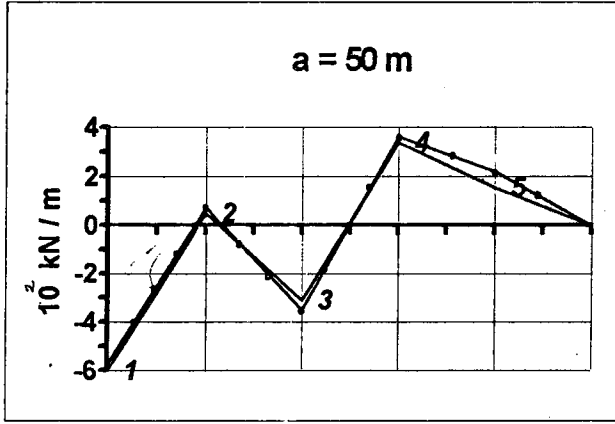
—•— Linear
 — Nonlinear

Şekil 6.4 Plak ortalarında σ_x gerilmeleri



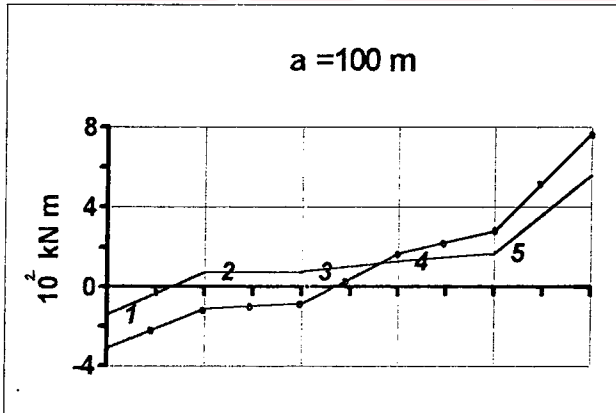
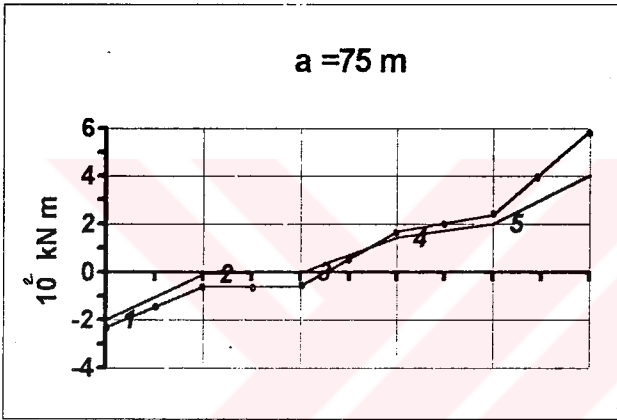
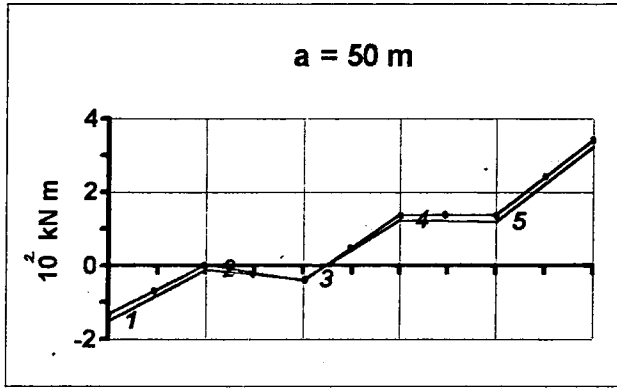
●—● Lineer
 — Nonlineer

Şekil 6.5 Plak ortalarında σ_y gerilmeleri



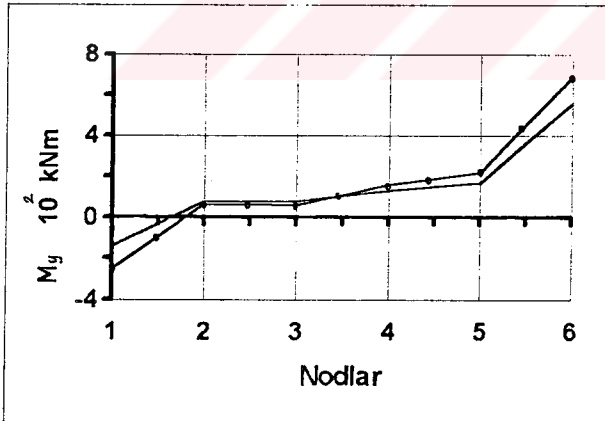
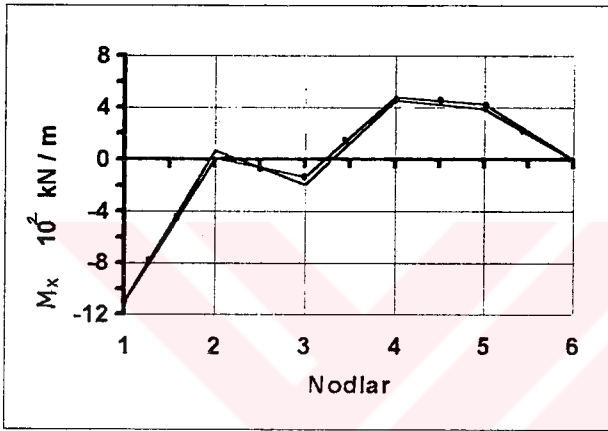
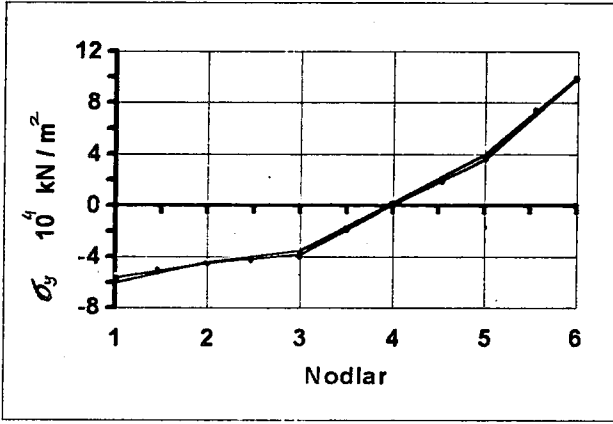
●—● Lineer
 — Nonlineer

Şekil 6.6 Plak ortalarında M_x momentleri



●—● Lineer
 — Nonlineer

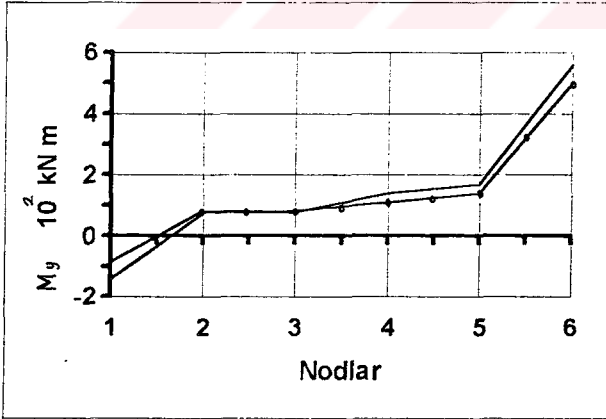
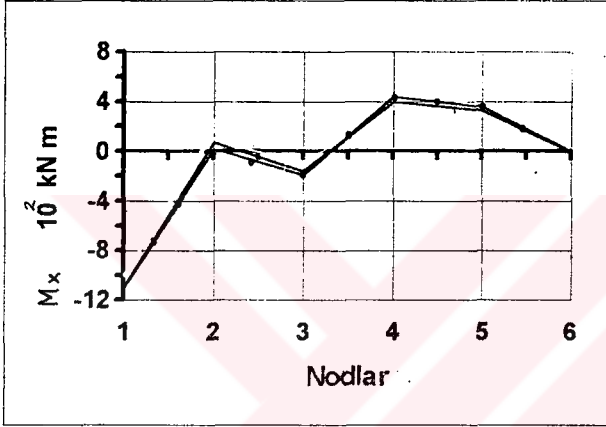
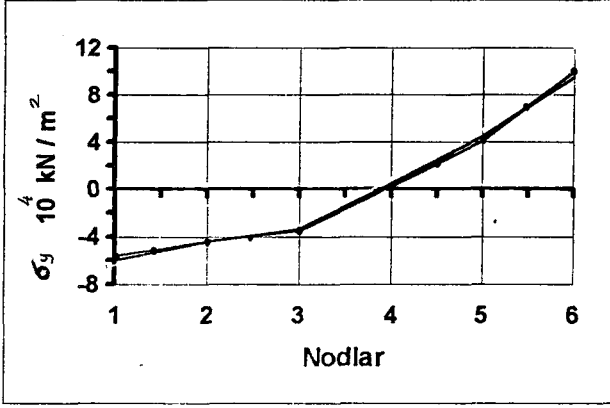
Şekil 6.7 Plak ortalarında M_y momentleri



$a = 100 \text{ m}$

— $\nu=0,2$
 —•— $\nu=0,3$

Şekil 6.8 Poisson oranı etkisi



$a = 100 \text{ m}$, $E_x = 3582 \text{ kN/cm}^2$

$\bullet \text{---} \bullet$ $E_y = 2750 \text{ kN/cm}^2$
 --- $E_y = 3582 \text{ kN/cm}^2$

Şekil 6.9 İzotrop olmayan malzeme etkisi

KAYNAKLAR

- [1] BORESİ A. P. , CHONG K. P. (1991), Approximate Solution Methods in Eng. Mechanics , Elsevier Applied Science Publishers Ltd
- [2] BRADFORD M. A. , AZHARI M. (1995), Buckling of Plates with Different End Conditions Using The Finite Strip Method, Computers & Structures Vol.56, No.1, pp. 75 - 83
- [3] CHEUNG Y. K. (1976), Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Pr.
- [4] CHEUNG Y. K. (1969), Folded Plate Structures By Finite Strip Method, Journal of the Structural Division , Vol. 95, No. ST 12, pp. 2963 - 2979
- [5] CRISFIELD M. A. (1991), Non-linear Finite Element Analysis of Solids Structures, John Wiley & Sons Ltd
- [6] GHALI A. , NEVILLE A. M. (1978), Structural Analysis , Chapman And Hall Ltd
- [7] SEKULOVIC M. , MILASINOVIC D. (1986), Geometric Non-linear Analysis of Folded Plate Structures by the Finite Strip Method, Numerical Methods For Non-linear Problems , Vol. 3

ÖZGEÇMİŞ

1969' da Kastamonu'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladı. 1991' de Gazi Üniversitesi Müh.-Mim. Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Yüksek lisans öğrenimine 1993' te başladı. Serbest projeci inşaat mühendisi olarak çalışmaktadır.

