



TEKİL YÜK ETKİSİ ALTINDAKİ VİSKOELASTİK PLAKLARIN ANALİZİ

Gülçin Tekin ve Fethi Kadioğlu
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In Engineering, behavior of viscoelastic plates is an important issue for special structures. Although there are numerous studies on the dynamic and static behavior of elastic plates with variable geometry, only a few works are present on the analysis of viscoelastic plates.

In this study, quasi-static behavior of viscoelastic plates under point loads is investigated in Laplace-Carson domain. Closed-form solutions of complex geometry and constitutive relations are often not possible. Hence, numerical solution methods should be used. In this study, one the most effective numerical solution techniques called mixed finite element method is used. In deriving a new functional for viscoelastic plates based on Kirchhoff theory with geometric and dynamic boundary conditions, Gâteaux differential approach is used. Bending and torsional moments and displacements are selected as the basic unknowns of the functional for this study and field equations for viscoelastic materials are used. For transforming obtained solutions to the real time domain, Durbin's numerical inverse transform method is used.

The results obtained for the quasi-static response of viscoelastic plates are tested through available representative problems in the literature and the performance of the results is presented by numerical example applications.

ÖZET

Mühendislikte viskoelastik plakların davranışı özel yapılar için önemli bir konudur. Literatürde farklı geometrilerdeki elastik plakların dinamik ve statik davranışlarının incelendiği birçok çalışma olmasına rağmen, viskoelastik plakların davranışlarının incelendiği çalışmalar çok nadir görülmektedir.

Bu çalışmada, viskoelastik plakların tekil yükler altında ki kuazi statik davranışları Laplace-Carson uzayında incelenmiştir. Kompleks geometri ve bünye bağıntılarının kapalı çözümlerinde yaşanan zorluklardan dolayı sayısal çözüm teknikleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada, en etkin sayısal çözüm tekniklerinden biri olan karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Geometrik ve dinamik sınır koşullarıyla birlikte Kirchhoff teorisini esas alan viskoelastik plaklar için yeni fonksiyonelin elde edilmesinde, Gâteaux diferansiyeli yaklaşımı kullanılmıştır. Bu çalışma için, fonksiyonelde yer alan temel bilinmeyenler olarak eğilme ve burulma momentleri ile yer değiştirmeler seçilmiş ve viskoelastik malzemeler için alan denklemleri kullanılmıştır. Elde edilen çözümler, Durbin sayısal ters dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmüştür.

Viskoelastik plakların kuazi statik davranışları için elde edilen sonuçlar literatürde bilinen problemler üzerinde test edilmiş, sonuçların performansı örnek uygulamalar ile gösterilmiştir.

GİRİŞ

Mühendislikte plakların yaygın kullanım alanına sahip olan yapı elemanlarından biri olması, plak teorilerini ve uygulamalarını ilgi çekici araştırma konusu haline getirmiştir. Mühendislik uygulamalarında kolaylık sağlaması açısından malzemelerin elastik davrandığı kabul edilir. Ancak mühendislik malzemelerinin birçoğu bünyelerindeki iç sürtünmeden ve zamana bağlı deformasyon gösterme özelliklerinden dolayı hem elastik hem de viskoz davranış gösterirler. Viskoelastisite ile ilgili detaylı bilgi [1] ve [2] çalışmalarından elde edilebilir.

Viskoelastik problemler zaman parametresine bağlı olduğundan, bu parametrenin incelenmesi konusunda farklı yaklaşımlar kullanılarak bir takım çalışmalar yapılmıştır. Viskoelastik problemlerin analizinde zaman parametresi üzerine üç yaklaşım; Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü ve Zaman üzerinde İntegrasyon kullanılmaktadır. Bu üç yöntemin karşılaştırılması ve yöntemlerle ilgili daha detaylı bilgi [3-7] çalışmalarından elde edilebilir.

Bu yöntemlere ek olarak, Laplace-Carson dönüşümü de kullanılmıştır. Laplace-Carson dönüşümü ile viskoelastik çubukların davranışlarının sayısal olarak incelenmesi ilk kez [8-10] tarafından yapılmıştır.

Viskoelastik problemlerin analizi için değişik yöntemler de kullanılmıştır. Viskoelastik probleme karşı gelen çözümler, karşılıklı prensibi gereğince lineer elastik çözümlerden elde edilebilir. Bu konuyla ilgili detaylı bilgi [11] ve [12] çalışmalarından elde edilebilir.

Karmaşık geometrilere, yükleme koşullarına ve bünye denklemlerine sahip viskoelastik problemlerin çözümünde kapalı tipte analitik çözümler çoğu zaman mümkün olamayacağından, sayısal çözüm yöntemleri (Sonlu Elemanlar Yöntemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Sınır Elemanlar Yöntemi v.b.) kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminin viskoelastik problemlere uygulanması ile ilgili çeşitli çalışmalar literatürde mevcuttur [13-16].

Literatürde viskoelastik yapı elemanlarının statik ve dinamik davranışlarının incelendiği birçok çalışmada mevcuttur. [17-18] tarafından yapılan çalışmalarda viskoelastik tabakalı plakların ve/veya çubukların dinamik davranışları incelenmiştir. [19-21] tarafından yapılan çalışmalarda, lineer viskoelastik çubukların kuazi statik ve dinamik davranışları incelenmiştir. [22] yaptıkları çalışmada Laplace dönüşüm yöntemi kullanarak, lineer viskoelastik problemlerin çözümü için genel bir yöntem önermişlerdir.

Literatürde viskoelastik plakların davranışlarının incelendiği çalışmalardan bazılarını ele alırsak; [23] viskoelastik plakların statik ve dinamik davranışlarını inceledikleri çalışmalarında viskoelastik bünye denklemlerini Boltzmann-Volterra formunda ifade etmişlerdir. [24] lineer viskoelastik plakların kuazi statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir. Hereditary integral tipinde bünye bağıntıları kullanmışlardır. [25] dinamik yükler altındaki ortotropik, viskoelastik kalın plakların davranışlarını Laplace uzayında incelemişlerdir. [26] anizotrop viskoelastik kompozit plakların davranışlarının analizi için, zaman uzayında varyasyonel ilkeleri ve direkt zaman integrasyon yöntemini kullanarak sayısal yöntemler geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada, Gâteaux Diferensiyel yöntemi ile viskoelastik plaklara karşı gelen enerji fonksiyoneli elde edilmiştir. Bu yöntem [27] tarafından ilk kez elastik çubuklarda uygulanmıştır. Daha sonra bu yöntem Aköz ve çalışma arkadaşları tarafından elastik plaklar ve kabuklar gibi yapı sistemlerine başarı ile uygulanmıştır.

Gâteaux Diferensiyel yöntemiyle Laplace-Carson uzayında viskoelastik kirişler için sunulan çalışmalar şu şekilde özetlenebilir. [8-9] tarafından yapılan çalışmalarda Gâteaux Diferensiyel yöntemi ile viskoelastik Timoshenko ve Euler- Bernoulli kirişleri için Laplace-Carson uzayında yeni fonksiyoneller elde edilmiştir. [10] tarafından yapılan çalışmada elastik zemine

oturan viskoelastik dairesel kirişlerin statik ve dinamik davranışları incelenmiştir. Gâteaux Diferensiyel yöntemi kullanılarak Laplace-Carson uzayında fonksiyonel elde edilmiştir ve karışık sonlu elemanlar formülasyonu ile çeşitli problemler çözülmüştür.

Kullanılan Gâteaux Diferensiyel yönteminin viskoelastik kirişler için uygulamaları literatürde mevcuttur ancak viskoelastik plaklar için uygulaması henüz mevcut değildir. Viskoelastik Kirchhoff plaklarının kuazi statik davranışlarının Gâteaux Diferensiyel yöntemi ile Laplace-Carson uzayında incelendiği bu çalışma bilginiz dahilinde literatürde bir ilk olacaktır. Mevcut çalışmada ve [28] ile sunulmuş çalışmada, Gâteaux Diferensiyel yöntemi kullanılarak viskoelastik plaklara ait dinamik ve geometrik sınır koşullarını da içeren fonksiyonel elde edilmiş ve karışık sonlu eleman formülasyonu uygulanmıştır. Laplace-Carson dönüşümü yardımıyla olayı idare eden diferansiyel denklem ve sınır şartlarındaki zamana bağlı terimler yok edilmiş ve Laplace-Carson uzayında karışık sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FONKSİYONEL

Laplace-Carson uzayında viskoelastik Kirchhoff plaklarına ait alan denklemlerinin elde edilmesi ile ilgili detaylı bilgi [28] de mevcuttur.

Viskoelastik Kirchhoff plağına ait alan denklemleri sınır koşullarını da içerecek biçimde Laplace-Carson uzayında operatör formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\bar{Q} = \bar{P} \bar{u} - \bar{f}$$

$\bar{Q}$ operatörüne ait fonksiyonelin bulunabilmesi için gerekli ve yeterli koşul,

$$\langle d\bar{Q}(\bar{u}, \bar{u}'), \bar{u}^* \rangle = \langle d\bar{Q}(\bar{u}, \bar{u}^*), \bar{u}' \rangle$$

ile potansiyellik koşulunun sağlanmasıdır [29]. Bu bağıntıda verilen parantezler iç çarpımı göstermektedir. Potansiyellik koşulu sağlandığında $\bar{Q}$ potansiyel operatörüne ait fonksiyonel aşağıdaki gibi elde edilir.

$$I(\bar{u}) = \int_0^1 \langle \bar{Q}(\eta \bar{u}, \bar{f}), \bar{u} \rangle d\eta$$

Burada η skaler bir büyüklüktür. Bu durumda ince viskoelastik plağına ait alan denklemlerine karşı gelen fonksiyonelin Laplace-Carson uzayındaki açık formu:

$$\begin{aligned} I(\bar{u}) = & \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} \right] \\ & - \frac{1}{2\bar{D}(1-\nu^2)} [\bar{M}_x, \bar{M}_x] - \frac{1}{2\bar{D}(1-\nu^2)} [\bar{M}_y, \bar{M}_y] + \frac{\nu}{\bar{D}(1-\nu^2)} [\bar{M}_x, \bar{M}_y] \\ & - \frac{1}{\bar{D}(1-\nu)} [\bar{M}_{xy}, \bar{M}_{xy}] - \left[\hat{T}, \bar{w} \right]_{\sigma} - \left[\left(\bar{M} - \hat{\bar{M}} \right), \bar{w}' \right]_{\sigma} - \left[\hat{w}', \bar{M} \right]_{\epsilon} - \left[\left(\bar{w} - \hat{w} \right), \bar{T} \right]_{\epsilon} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada köşeli parantezler $[,]$ bölgede iç çarpımı gösterirler. $f = f(z)$ ve $g = g(z)$ bölgede tanımlanan iki fonksiyon olmak üzere f ve g nin iç çarpımları şu şekilde verilmektedir.

$$[f, g] = \int_A f g dA$$

Fonksiyonelde yer alan son 4 terim sınır koşullarını ifade etmektedir ve açık formları şu şekildedir

$$\begin{aligned} [\bar{T}, \bar{w}] &= \left[\left(\frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} \right) n_y, \bar{w} \right] \\ [\bar{M}, \bar{w}'] &= [\bar{M}_x, \bar{w}_{,x} n_x] + [\bar{M}_y, \bar{w}_{,y} n_y] + [\bar{M}_{xy}, (\bar{w}_{,x} n_y + \bar{w}_{,y} n_x)] \end{aligned}$$

SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Viskoelastik Kirchhoff plağına ait fonksiyoneldeki değişkenler Laplace-Carson uzayındadır. Bu nedenle karışık sonlu eleman formülasyonu da aynı uzaya ait olacaktır. $I(\bar{u})$ fonksiyonelde $\bar{w}, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_{xy}$ gibi dört tane bilinmeyen görülmektedir. Aranılan 4 bilinmeyen fonksiyonel içinde en çok birinci türevleri bulunmaktadır. Seçilen doğrusal şekil fonksiyonları, N_i

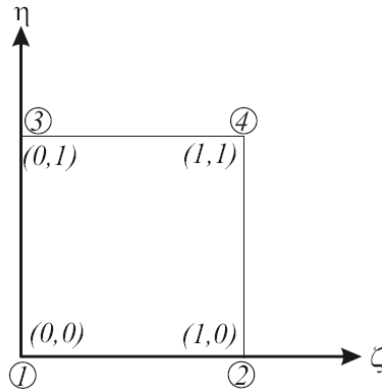
$$N_1 = (1-\zeta)(1-\eta)$$

$$N_2 = \zeta(1-\eta)$$

$$N_3 = (1-\zeta)\eta$$

$$N_4 = \zeta\eta$$

şeklinde. Çalışma kapsamında Şekil 1’ de verilen dikdörtgen plak elemanı kullanılmıştır.



Şekil 1. Dikdörtgen Eleman

Burada (x, y) ve (ζ, η) koordinat sistemleri arasındaki dönüşüm bağıntısı olup

$$x = \sum x_i N_i(\zeta, \eta)$$

$$y = \sum y_i N_i(\zeta, \eta)$$

şeklinde verilmektedir. Elemanın her nodundaki bilinmeyen değişkenler, şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^4 \bar{w}_i N_i(\zeta, \eta)$$

$$\bar{M}_x = \sum_{i=1}^4 \bar{K}_i N_i(\zeta, \eta)$$

$$\bar{M}_y = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_i N_i(\zeta, \eta)$$

$$\bar{M}_{xy} = \sum_{i=1}^4 \bar{L}_i N_i(\zeta, \eta)$$

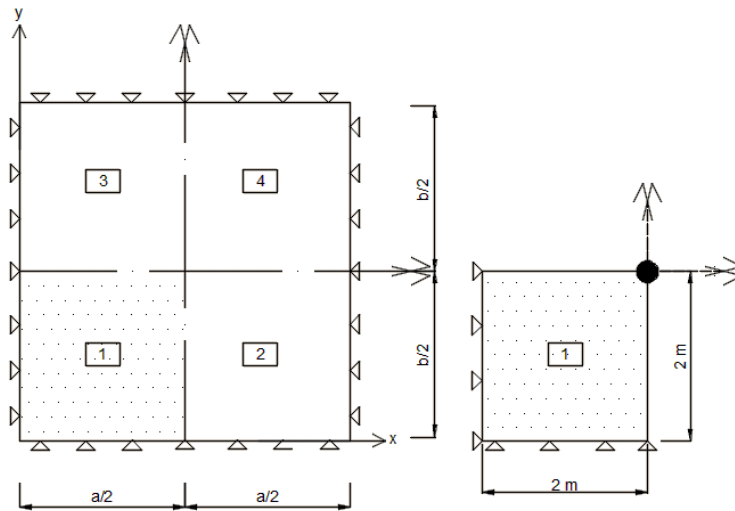
Bu ifadeler verilen fonksiyonelde yerlerine yerleştirilir ve nodal değişkenlere göre ekstremum olması şartı ile Laplace-Carson uzayında yeni eleman denklemleri elde edilir.

SAYISAL SONUÇLAR

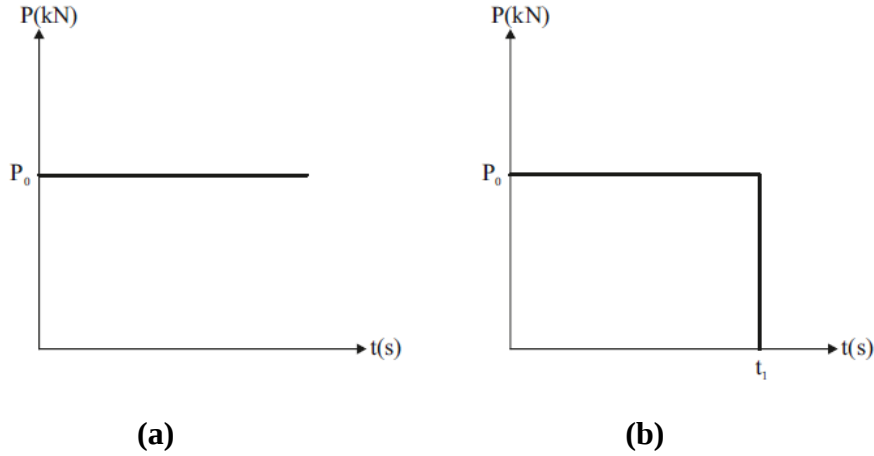
Bu çalışmada zamana bağlı tekil yüklerin etkisi altında viskoelastik Kirchhoff plaklarının kuazi statik davranışları Standart Katı Cisim reolojik malzeme modeli için incelenmiştir. Bu kapsamda geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonunun geçerliliğinin gösterilebilmesi ve tarafımızdan hazırlanan programın test edilebilmesi için çeşitli plak problemleri çözülmüştür.

Çözümlerde, simetri özelliği kullanılarak plak elemanının dörtte biri için hesaplar yapılmış ve 4x4'lük sonlu eleman ağı kullanılmıştır (Şekil 2). Sayısal örneklerde, kalınlığı $h = 0.1$ m ve boyutları $a = b = 4$ m olan dört kenarı sabit mesnetlenmiş viskoelastik plak ele alınmıştır. Sayısal çözümlerde yerdeğiştirme için metre (m), zaman için saniye (s) birimi kullanılmıştır. Analizlerde çeşitli yükleme durumları için viskoelastik Kirchhoff plağının orta noktasındaki yerdeğiştirme değerlerinin zamana bağlı olarak değişimi hesaplanmıştır. Şekil 3'de görüldüğü gibi sayısal çözümler için zamana bağlı 2 farklı tekil yükleme tipi kullanılmıştır. Tip I: Ani yükleme ve Tip II: Ani boşaltma.

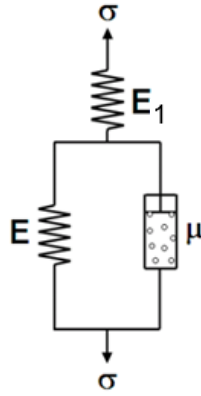
Bu çalışmada, viskoelastik plak malzemesini modellemek için uygun reolojik modellerden biri kullanılmıştır. Basit reolojik modeller, elastik davranışı simgeleyen Hooke cismi ile viskoz davranışı simgeleyen yağ kutusunun paralel ve seri biçimde bağlanmaları ile elde edilmektedir. Bu kapsamda; Standart Katı Cisim viskoelastik malzeme modeli kullanılmıştır. Kullanılan viskoelastik malzeme modeli Şekil 4'de verilmiştir.



Şekil 2. Basit mesnetli dikdörtgen plağın geometrik özellikleri



Şekil 3. Tekil yüklerin zamana bağlı değişimi



Şekil 4. Standart Katı Cisim malzeme modeli

Standart Katı Cisim modeli betonun sünme davranışını iyi şekilde temsil etmektedir. Şekil 4’ de σ gerilme, E_i malzemenin elastisite modülü ve μ viskozite katsayısıdır. Sayısal örneklerin çözümü için kullanılan viskoelastik malzeme modeline ait katsayılar şu şekildedir:

$$E_1 = 6 \times 10^7 \text{ kPa}, E = 6 \times 10^7 \text{ kPa}, \mu = 6 \times 10^7 \text{ kPa.s}, \nu = 0.3$$

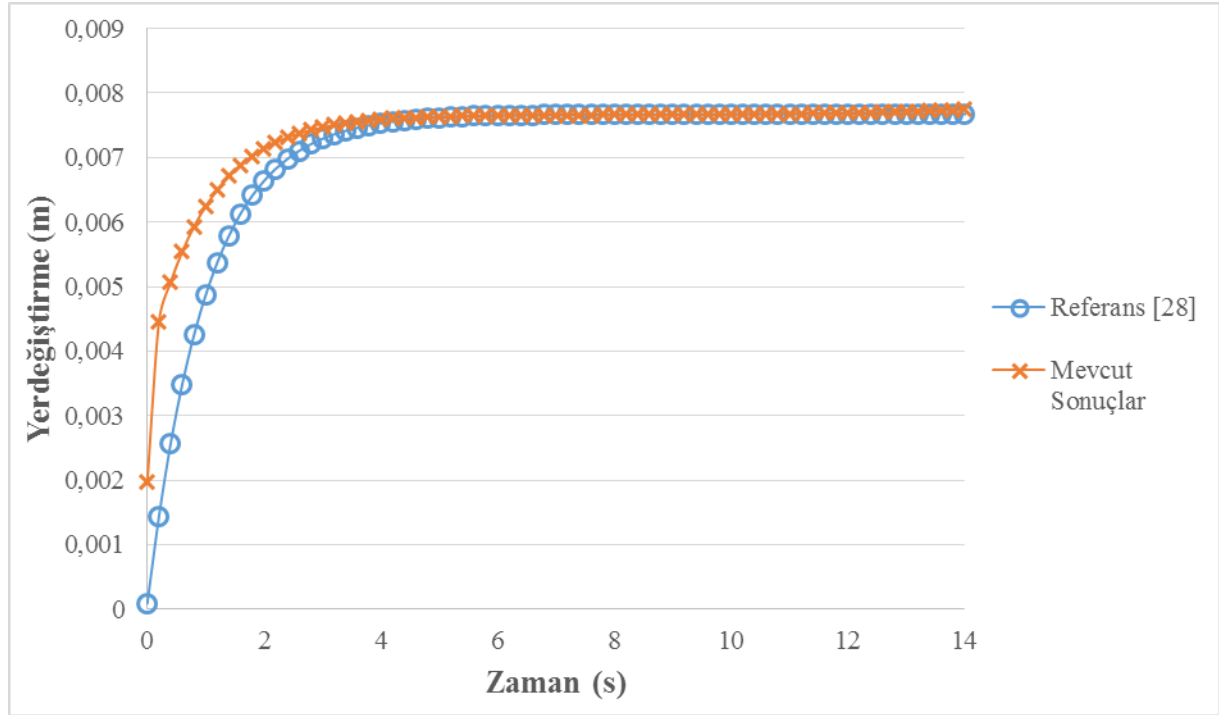
Viskoelastik Kirchhoff plakların kuazi statik davranışlarının Standart Katı Cisim malzeme modeli ve çeşitli zamana bağlı tekil yüklemeler dikkate alınarak belirlendiği bu çalışma ile Laplace-Carson uzayında elde edilen çözümlerin zaman uzayına dönüştürülmesinde, Durbin sayısal ters Laplace dönüşüm tekniği kullanılmıştır. Bütün sayısal örneklerin çözümünde ters dönüşüm yöntemine ait ilgili parametreler aT , N ve T için sırasıyla 5, 100 ve 20 değerleri kullanılmıştır.

Örnek 1

Tekil yük etkisi altındaki viskoelastik ince plaklar için geliştirilen karışık sonlu eleman programının test edilebilmesi için, bu örnekte viskoelastik plağın orta noktasındaki yerdeğiştirme davranış değerinin zamana bağlı değişimi, ani yükleme tipi [Şekil 3(a)] tekil yük etkisi altında ($P_0=100 \text{ kN}$) incelenmiştir.

Programın test edilebilmesi amacıyla, literatürde mevcut olan [28] viskoelastik plakların zamanla değişen yükler altında ki kuazi statik ve dinamik davranışlarının Laplace-Carson uzayında incelendiği çalışma referans alınmıştır. Standart Katı Cisim malzeme modeli kullanılarak modellenen plağa ait yerdeğiştirme davranış değerlerinin zamana bağlı değişimi,

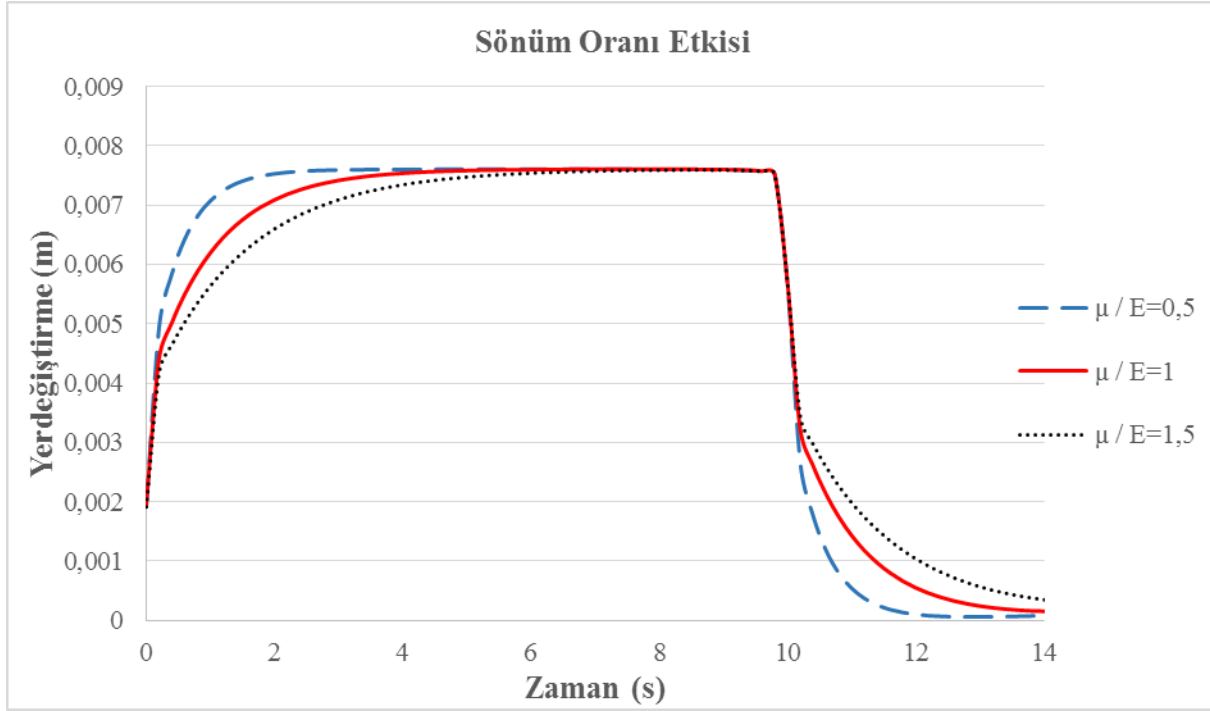
Kelvin malzeme modeli kullanılarak modellenen yerdeğiştirme davranış değerlerinin zamana bağlı değişimi [28] ile kıyaslanmış ve analiz sonuçları Şekil 5’ de sunulmuştur. Literatürdeki mevcut sonuçların, elde edilen sonuçlarla yeterli yakınsaklıkta olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 5. Ani yükleme tipi tekil yüke maruz basit mesnetli viskoelastik ince plakta yerdeğiştirme değerlerinin zaman bağlı değişimi

Örnek 2

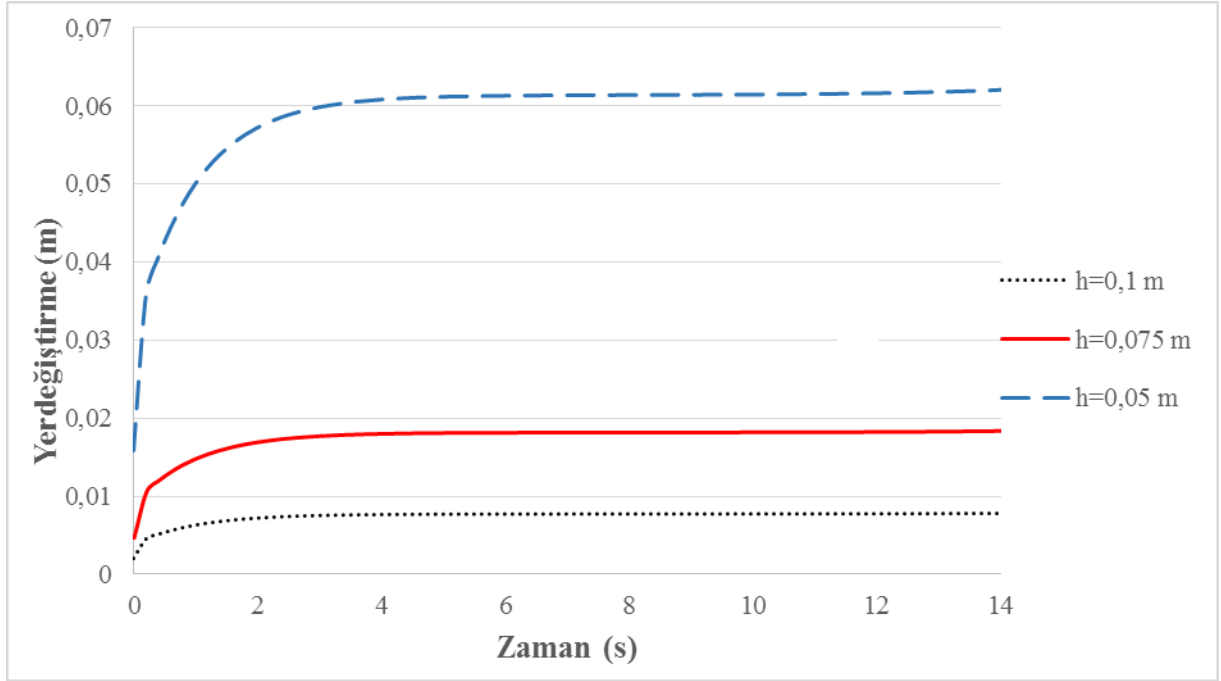
Bu örnekte temel amaç μ viskozite katsayısı değişiminin viskoelastik Kirchhoff plağının orta noktasına ait yerdeğiştirme davranış değerleri üzerindeki etkisini incelemektir. Bu amaçla, Standart Katı Cisim reolojik modeli kullanılarak modellenen viskoelastik plağın, ani boşaltma tipi [Şekil 3(b)] tekil yük etkisi altında ($P_0=100$ kN, $t_1= 10$ s) elde edilen yerdeğiştirme davranış değerlerinin viskozite katsayısı değerleriyle değişimi Şekil 6’ da sunulmuştur. Beklenildiği gibi sönüm oranı (μ / E) azaldığı zaman viskoelastik plağın davranışı elastik plak davranışına yaklaşmaktadır.



Şekil 6. Viskoelastik ince plağın yerdeğiştirme davranış değerlerinin sönüm oranı (μ / E) ile değişimi

Örnek 3

Bu örnek, sunulmuş olan karışık sonlu eleman formülasyonunda kayma kilitlenmesinin olmadığını ve plak kalınlığı değişiminin davranış üzerindeki etkisini göstermek üzere sunulmuştur. Plak orta noktasındaki yerdeğiştirme davranış değerlerinin zamana bağlı değişimini incelemek için viskoelastik ince plak farklı h kalınlıkları için ele alınmıştır. Ani yükleme tipi [Şekil 3(a)] tekil yük etkisi altındaki ($P_0=100$ kN) plak kalınlığı küçültülerek: $h = 0,1$; $0,05$ ve $0,075$ m kayma kilitlenmesi problemi ile karşılaşıp karşılaşılmadığı incelenmiştir ve sonuçlar Şekil 7' de sunulmuştur. Kalınlık azaldıkça, kayma kilitlenmesi problemine rastlanmamıştır. Ayrıca kalınlık arttığı zaman plağın orta noktasındaki yerdeğiştirme değerleri azalacaktır.



Şekil 7. Viskoelastik ince plakta yerdeğiştirme davranış değerlerinin plak kalınlığı ile değişimi

SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamında, Gâteaux diferensiyeli yaklaşımını esas alan karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak probleme ait geometrik ve dinamik sınır koşullarını da içeren yeni bir fonksiyonel üretilmiştir. Tekil yükler etkisi altında Standart Katı Cisim malzeme modeli ile modellenen viskoelastik Kirchhoff plaklarının kuazi statik davranışlarının analizi için Laplace-Carson uzayında elde edilen bu fonksiyonel içerisinde yerdeğiştirme w , eğilme momentleri M_x ve M_y ve burulma momenti M_{xy} olmak üzere toplam 4 adet bağımsız temel değişken mevcuttur. Fonksiyonel içerisinde bu değişkenlerin yalnızca birinci mertebe türevleri mevcut olduğundan, bu değişkenler için seçilen doğrusal şekil fonksiyonları tamlık ve süreklilik koşullarını sağlamaktadır. Laplace-Carson uzayında elde edilen çözümlerden gerçek zaman uzayına geçmek için Durbin sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu amaç doğrultusunda FORTRAN programlama dili kullanılarak yeni bir bilgisayar programı hazırlanmış ve analizler yapılmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma TÜBİTAK 213M332 nolu proje kapsamında desteklenmiştir. Destekleyen kuruluşa teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

- [1] W. Flügge, *Viscoelasticity (2nd revised edition)*, Berlin, Heidelberg: Springer, 1975.
- [2] R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity (2nd edition)*, New York: Academic Press, 1982.
- [3] Q. Xu, M. S. Rahman, A. A. Tayebali, Finite element analysis of layered viscoelastic system under vertical circular loading, *Numerical Methods in Geomechanics*. 9 (2004) 479-486.
- [4] Y-J. Wang,, S. L. Crouch, Boundary element methods for viscoelastic media: *Proceedings of the 23rd Symposium on Rock Mechanics*, Berkeley, CA, 1982: 704-711.

- [5] P. G. Wapner, W. C. Forsman, Fourier transform method in linear viscoelastic analysis: the vibrating viscoelastic reed, *Journal of Rheology*. 15 (1971) 603-626.
- [6] F. J. Rizzo, D. J. Shippy, An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory, *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 21 (1971) 321-330.
- [7] A. Carini, O. De Denato, Fundamental solutions for linear viscoelastic continua, *Journal of Solids and Structures*. 29 (1992) 2989-3009.
- [8] F. Kadioğlu, *Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic beams*, Ph.D. Thesis, (in Turkish), Department of Civil Engineering, Istanbul Technical University, 1999.
- [9] A. Y. Aköz, F. Kadioğlu, The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 44 (1999) 1909-1932.
- [10] F. Kadioğlu, A. Y. Aköz, The mixed finite element for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic circular beams, *An International Journal of Structural Engineering and Mechanics*. 15 (2003) 735-752.
- [11] W.N. Findley, J.S. Lai, K. Onaran, *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, North-Holland, New York: Oxford, 1976.
- [12] E. H. Lee, Stress analysis in viscoelastic bodies, *Quarterly of Applied Mathematics*. 13 (1955) 183-190.
- [13] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method Vol:1*, Maidenhead, England: McGraw-Hill, 1989.
- [14] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method Vol:2*, Maidenhead, England: McGraw-Hill, 1991.
- [15] D. F. Golla, P. C. Hughes, Dynamics of viscoelastic structures- a time domain, finite element formulation, *Journal of Applied Mechanics*. 52 (1985) 897-906.
- [16] J. L. White, Finite Elements in Linear Viscoelastic Analysis: *Proc. 2nd Conference On Matrix Method in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-68-150, 1986: 489-516.
- [17] Q. Chen, Y. W. Chan, Integral finite element method for dynamical analysis of elastic-viscoelastic composite structures, *Computers and Structures*. 74 (2000) 51-64.
- [18] M. T. Piovan, V. H. Cortínez, Linear viscoelastic analysis of straight and curved thin-walled laminated composite beams, *International Journal of Solids and Structures*. 45 (2008) 3466-3493.
- [19] T-M. Chen, The Hybrid laplace transform / finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic timoshenko beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38 (1995) 509-522.
- [20] W. H. Chen, T. C. Lin, Dynamic analysis of viscoelastic structures using incremental finite element method, *Engineering Structures*. 4 (1982) 271-276.
- [21] C. M. Wang, T. Q. Yang, K. Y. Lam, Viscoelastic timoshenko beam solutions from euler- bernoulli solutions, *Journal of Engineering Mechanics*. 123 (1997) 746-748.
- [22] R. A. Adey, C. A. Brebbia, Efficient method of solution of viscoelastic problems, *Journal of Engineering Mechanics Division*. 99 (1973) 1119-1127.
- [23] M. H. Ilyasov, A. Y. Aköz, The vibration and dynamic stability of viscoelastic plates, *International Journal of Engineering Sciences*. 38 (2000) 695-714.
- [24] Y. Z. Wang, T. J. Tsai, Static and dynamic analysis of a viscoelastic plate by the finite element method, *Applied Acoustics*. 25 (1988) 77-94.
- [25] B. Temel, M. F. Şahan, Transient analysis of orthotropic viscoelastic thick plates in the laplace domain, *European Journal of Mechanics-A / Solids*. 37 (2013) 96-105.

- [26] S. Yi, H. H. Hilton, Dynamic finite element analysis of viscoelastic composite plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 37 (1994) 4081-4096.
- [27] A. Y. Aköz, Çubuklar İçin Yeni Enerji Fonksiyonelleri ve Uygulamaları: IV. *Ulusal Mekanik Kongresi*, Bayramoğlu-Kocaeli, 1985: 100-112.
- [28] A.Y. Aköz, F. Kadioğlu, G. Tekin, Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic plates, *Mechanics of Time Dependent Materials*. 19 (2015) 483-503.
- [29] J. T. Oden, J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Berlin, Springer, 1976.