

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DAİREDEN FARKLI ENKESİTE SAHİP
SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSLERİN DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Süleyman Onur KARACA

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nihal UZCAN ERATLI

OCAK 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DAİREDEN FARKLI ENKESİTE SAHİP
SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSLERİN DİNAMİK ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Süleyman Onur KARACA
501091147**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nihal UZCAN ERATLI

OCAK 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501091147 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Süleyman Onur KARACA**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**DAİREDEN FARKLI ENKESİTE SAHİP SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSLERİN DİNAMİK ANALİZİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Nihal UZCAN ERATLI**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Zafer KÜTÜĞ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **17 Aralık 2012**
Savunma Tarihi : **28 Ocak 2013**

Anneme ve Babama,

ÖNSÖZ

Tez çalışmasında bana gösterdiği eşsiz anlayış ve desteği için sayın hocam Doç. Dr. Nihal UZCAN ERATLI 'ya ayrıca eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Aralık 2012

S.Onur KARACA
İnşaat Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
SEMBOL LİSTESİ	xvii
ÖZET.....	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1 Amaç ve Kapsam	4
1.2 Bu Konuda Daha Önce Yapılan Çalışmalar.....	5
2. HELİS GEOMETRİSİ, HELİS DENKLEMLERİ VE FONKSİYONEL ...	9
2.1 Helis Geometrisi	9
2.2 Helis Denklemleri	13
2.3 Fonksiyonel.....	14
3. HELİSİN FORMÜLASYONU VE DİNAMİK ANALİZ.....	17
3.1 Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu	17
3.2 Daireden Farklı Enkesitlerin Burulma Rijitliği.....	20
3.3 Kesme Kuvveti Düzeltme Katsayısı	22
3.4 Karışık Sonlu Eleman için Dinamik Analiz.....	23
4. SAYISAL ÖRNEKLER	25
4.1 Daireden Farklı Enkesitlerin Burulma Rijitliği için Yakınsama Kontrolü	25
4.2 Doğrulama Örnekleri	26
4.2.1 Dikdörtgen kesitli helisoidal merdivenin statik analizi.....	26
4.2.2 Kare kesitli konik helislerin dinamik analizi	29
4.3 Kıyaslama Örnekleri	32
4.3.1 Daireden farklı enkesite sahip ve farklı sınır koşulları altında silindirik olmayan helisler.....	32
4.3.2 Çeşitli R_2/R_1 oranları altında daireden farklı enkesite sahip hiperbolik ve konik helisler.....	39
5- SONUÇ.....	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ.....	49

KISALTMALAR

Bkz. : Bakınız
FEM : Sonlu elemanlar yöntemi

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 4.1 : Dairesel olmayan enkesitler için boyutsuz burulma eylemsizlik momenti.....	26
Çizelge 4.2 : $\theta = \pi/2$ için yer değiştirmeler ve dönmeler.....	28
Çizelge 4.3 : $\theta = 0$ için kuvvetler ve momentler.....	28
Çizelge 4.4 : $\theta = \pi/2$ için kuvvetler ve momentler.....	28
Çizelge 4.5 : Kare enkesite (S1) ve farklı sınır koşullar sahip fıçı tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	33
Çizelge 4.6 : Kare enkesite (S1) ve farklı sınır koşullar sahip hiperbolik tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	33
Çizelge 4.7 : Kare enkesite (S1) ve farklı sınır koşullar sahip konik tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	34
Çizelge 4.8 : Kutu enkesite (S2) ve farklı sınır koşullar sahip fıçı tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	34
Çizelge 4.9 : Kutu enkesite (S2) ve farklı sınır koşullar sahip hiperbolik tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	34
Çizelge 4.10 : Kutu enkesite (S2) ve farklı sınır koşullar sahip konik tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	35
Çizelge 4.11 : I formda enkesite (S3) ve farklı sınır koşullar sahip fıçı tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	36
Çizelge 4.12 : I formda enkesite (S3) ve farklı sınır koşullar sahip hiperbolik tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	36
Çizelge 4.13 : I formda enkesite (S3) ve farklı sınır koşullar sahip konik tipli helisin doğal frekansları (Hz).....	37
Çizelge 4.14 : Çeşitli R_2/R_1 oranları için hiperbolik ve konik helislerin altı doğal frekanslarının (Hz) değişimi.....	40
Çizelge 4.15 : Çeşitli R_2/R_1 oranları için hiperbolik ve konik helislerin altı doğal frekanslarının (Hz) değişimi.....	41

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Düzgün silindirik helis.	1
Şekil 1.2 : Güncel hayattaki helis uygulamaları.	2
Şekil 1.3 : Helis Sistemlerin Örnek Uygulamaları.	2
Şekil 1.4 : Helis Sistemlerin Örnek Uygulamaları.	3
Şekil 1.5 : Helis Sistemlerin Örnek Uygulamaları.	4
Şekil 2.1 : Helis çeşitleri.	9
Şekil 2.2 : Küresel yüzey üzerindeki bir helis örneği.	10
Şekil 2.3 : Helisin geometrik parametreleri.	11
Şekil 2.4 : Frenet Üçlüsü ve sapma açıları.	12
Şekil 2.5 : Kartezyen ve Frenet koordinat sistemlerinde helis gösterimi.	13
Şekil 3.1 : Eleman matrisi.	18
Şekil 3.2 : Kütle matrisi.	19
Şekil 3.3 : Helis taşıyıcı sistemlerin kullanıldığı Seattle kentindeki bir köprü.	21
Şekil 4.1 : Daireden farklı enkesit tipleri.	25
Şekil 4.2 : Problemin çözümü için gerekli parametreler.	27
Şekil 4.3 : Dikdörtgen kesit (150cm x 15cm) için yakınsama kontrolü sonuçları. ...	27
Şekil 4.4 : Doğal frekanstaki değişim değerleri.	30
Şekil 4.5 : Kare enkesit (S1) için sınır koşulu iki ucu ankastre olarak seçilmiş konik bir helisin mod şekilleri (İnce çizgi deforme olmamış geometriyi göstermektedir.).....	32

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{u}, \boldsymbol{\Omega}$	: Ötelenme ve dönme vektörleri
$\mathbf{T}, \mathbf{M}$	: Kuvvet ve moment vektörleri
$\mathbf{q}, \mathbf{m}$	: Yayılı dış kuvvet ve yayılı dış kuvvet çifti
$\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\omega}$	: Relatif birim kayma açısı vektörü, relatif birim dönme vektörü
s	: Yay boyunca ark uzunluğu
$\mathbf{C}, \mathbf{D}$	: Kayma rijitlik tansörü, dönme rijitlik tansörü
$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$	: Frenet birim vektörleri
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	: Kartezyen birim vektörleri
$\mathbf{r}$	: Yer vektörü
u_t, u_n, u_b	: Frenet koordinatlarında yer değiştirmeler
$\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$	: Frenet koordinatlarında dönmeler
T_t, T_n, T_b	: Frenet koordinatlarında kuvvetler
M_t, M_n, M_b	: Frenet koordinatlarında momentler
I_t, I_n, I_b	: Frenet koordinatlarında atalet momentleri
χ, τ, p, α	: Helisin eğriliği, burulması, birim açıda adımı ve yükselme açısı
E, ν, G, ρ	: Elastisite modülü, Poisson oranı, kayma modülü, özağırlık
A, k'	: Çubuk kesit alanı, kayma katsayısı
b, h, r	: Dikdörtgen kesitin genişliği, yüksekliği ve daire kesitin yarıçapı
H	: Helisin uç noktaları arasındaki düşey mesafe
R_1, R_2	: Helisin tavan yarıçapı, taban yarıçapı
φ	: Helisin yatayda taban açısı
n	: Helisin tur sayısı
ψ_i	: Yaklaşım fonksiyonları
$\ddot{u}, \ddot{\Omega}$	: İvme vektörleri
a	: Kesit boyutu
$[\mathbf{k}]^e$	: Eleman rijitlik matrisi
$[\mathbf{m}]^e$	: Kütle matrisi
$[\mathbf{K}]$	: Sistem matrisi
$[\mathbf{K}^*]$	: İndirgenmiş sistem matrisi
$[\mathbf{M}]$	: Kütle matrisi

DAİREDEN FARKLI ENKESİTE SAHİP SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSLERİN DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada daireden farklı geometrideki enkesitlerin ve farklı sınır durumlarına sahip silindirik olmayan helislerin karışık sonlu elemanlar metodu ile analizi yapılmıştır. Çalışmaya başlamadan önce literatür taraması yapılmış, konu ile ilgili önceden yapılmış çalışmalar incelenmiştir. Ayrıca, helis sistemlerin kullanım alanları, uluslararası kabul görmüş tanımlamaları ve özellikleri de incelenmiş, çalışmanın sonraki bölümleri bu doğrultuda ilerlemiştir.

Çalışmada öncelikle helis geometrisi ve koordinat sistemlerinde kullanılan tanımlamalardan açıklanmıştır:

$$x = R(\varphi)\cos\varphi, y = R(\varphi)\sin\varphi, z = p(\varphi)\varphi, p(\varphi) = R(\varphi)\cos\alpha \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{A.2})$$

Kartezyen koordinat sistemi kullanılarak betimlenen helislerin Frenet sisteminde tanımlanması da aşağıdaki denklemler kullanılarak yapılmıştır:

$$ds = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d(\varphi) = c(\varphi) d\varphi \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t} \setminus ds}{\|d\mathbf{t} \setminus ds\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

Bu adımdan sonra, matris elemanı türetilmesi için, Timoshenko Kiriş Teorisi kesin silindirik helis geometrisi, sonlu eleman interpolasyonu vasıtasıyla, geometrinin

uyarlanmış eğrilikler kullanılmıştır. Sonraki bölümde ise, hesapta kullanılan hareket, kinematik ve bünye denklemleri belirlenmiştir. Bu temel denklemleri baz alan fonksiyonel şu şekilde özetlenebilir:

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \boldsymbol{\Omega} \right] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\kappa \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\gamma \mathbf{T}, \mathbf{T}] \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \rho A [\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}] - \frac{1}{2} \rho [\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Omega}}, \ddot{\boldsymbol{\Omega}}] - [\mathbf{q}, \mathbf{u}] - [\mathbf{m}, \boldsymbol{\Omega}] \\ & + \left[(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u} \right]_\sigma + \left[(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \boldsymbol{\Omega} \right]_\sigma + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_\varepsilon + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

Hesaplarda karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılmıştır. İlk önce lineer şekil fonksiyonları belirlendikten sonra, silindirik olmayan helisler için tanımlanmış c_i, c_j c 'nin noktasal değerlerini [Denklem (2.4) ve (2.7)], $s^e = c \Delta\varphi$ helis yay uzunluğunu, i, j noktaları için χ_i, χ_j noktasal eğrilikleri ve τ_i, τ_j ise noktasal burulmayı ifade eden (Bkz. Şekil 2.4) bağıntılar sıralanmıştır.

İleriki kısımlarda ise, sonlu elemanlar formülasyonunda kullanılan eleman matrisi ve kütle matrisi belirlenmiştir. Kullanılan bu eleman 2x12 serbestlik dereceli 2 düğüm noktasına sahiptir.

Daireden farklı enkesitler için, gerekli kesme kuvveti katsayıları ayrıca hesaplanmıştır ve karışık sonlu elemanlar analizinde kullanılmıştır. Bahsi geçen kesme kuvveti katsayısı nümerik bir katsayıyı ifade etmektedir. Literatür taramasında görüldüğü üzere, hesaplarda çeşitli kabullerle yaklaşık bir sayı alındığı görülmüştür. Daireden farklı enkesitlerin burulma rijitliği hesap esasları da belirlenmesine müteakip, karışık sonlu eleman için dinamik analiz denklemleri belirlenmiştir.

Literatürdeki dikdörtgen ve kare enkesitli silindirik ve konik helisler için olan uygun teorik ve nümerik problemler çözülmüştür ve sonuçlar doğrulanmışlardır. Kare kesit, kutu kesit ve I formunda enkesite sahip silindirik olmayan helislerin dinamik analizi irdelenmiştir.

DYNAMIC ANALYSIS OF NON-CYLINDRICAL HELICES WITH NON-CIRCULAR CROSS SECTIONS

SUMMARY

In this study, non-cylindrical helices with arbitrary cross section and different boundary conditions are analyzed by using mixed finite element method. Being first move of starting this study, relevant works were tried to find in the literature and founded studies were analyzed in this matter. Furthermore, the common technical language and definitions was examined and following sections were organized under these findings.

Being a start, helix geometry and coordinate systems, which commonly used in this subject, were presented. Below equations and definitions are most commons:

$$x = R(\varphi)\cos\varphi, \quad y = R(\varphi)\sin\varphi, \quad z = p(\varphi)\varphi, \quad p(\varphi) = R(\varphi)\cos\alpha \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{A.2})$$

Helices, which are defined under Cartesian coordinate systems, were also indicated using below equations: :

$$ds = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d(\varphi) = c(\varphi) d\varphi \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t} \setminus ds}{\|d\mathbf{t} \setminus ds\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

For the derivation of the two-noded element matrix, Timoshenko beam theory is employed based on the exact cylindrical helix geometry. Non-cylindrical helix geometry is derived using modified curvatures of the geometry by means of the finite element interpolation. The nodal variables of the element are the displacement vector $\mathbf{u}(u_t, u_n, u_b)$, the rotation vector $\mathbf{\Omega}(\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b)$, the force vector $\mathbf{T}(T_t, T_n, T_b)$ and the moment vector $\mathbf{M}(M_t, M_n, M_b)$ where $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ are Frenet unit vectors. The problem of torsion can be reduced to a standard problem in the theory of potentials in 2D and the resulting Poisson's equation is solved by finite elements in order to obtain the torsional rigidity of the arbitrary cross sections. In further sections, equation of motion, Kinematic equations and constitutive equations, which are related with the

dynamic analyses, were indicated. Below functional, which is based on mentioned equations, is summarized as:

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \boldsymbol{\Omega} \right] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\kappa \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\gamma \mathbf{T}, \mathbf{T}] \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \rho A [\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}] - \frac{1}{2} \rho [\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Omega}}, \ddot{\boldsymbol{\Omega}}] - [\mathbf{q}, \mathbf{u}] - [\mathbf{m}, \boldsymbol{\Omega}] \\ & + [(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u}]_\sigma + [(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \boldsymbol{\Omega}]_\sigma + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_\varepsilon + [\hat{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

The finite element method was used in the calculations of this study. In the first step, linear shape functions was determined and then; the equations, defining of c_i, c_j nodal values of c , [Equations (2.4) ve (2.7)], $s^e = c \Delta \varphi$ helix arc length, χ_i, χ_j are nodal curvatures and τ_i, τ_j are nodal torsions at i, j nodes, are listed especially for non-cylindrical helixes.

In following sections, the element matrix $[\mathbf{k}]^e$ and mass matrix $[\mathbf{m}]^e$ are defined. These matrices with sub-matrices were used in the calculation of finite element method. In this part, matrices were defined which included an element has two nodes with 2x12 degrees of freedom. Abovementioned matrices are presented below:

$$[\mathbf{k}]^e = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} u_t & u_n & u_b & \Omega_t & \Omega_n & \Omega_b & T_t & T_n & T_b & M_t & M_n & M_b \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathbf{k}]_t & [\mathbf{k}]^{c,\chi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\mathbf{k}]^{c,\chi} & [\mathbf{k}]_t & [\mathbf{k}]^{c,\tau} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\mathbf{k}]^{c,\tau} & [\mathbf{k}]_t & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathbf{k}]_t & [\mathbf{k}]^{c,\chi} & 0 \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathbf{k}]^c & -[\mathbf{k}]^{c,\chi} & [\mathbf{k}]_t & [\mathbf{k}]^{c,\tau} \\ \hline & & & & & 0 & 0 & -[\mathbf{k}]^c & 0 & 0 & -[\mathbf{k}]^{c,\tau} & [\mathbf{k}]_t \\ \hline & & & & & & -[\mathbf{k}]^{c,A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & -[\mathbf{k}]^{c,K} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & -[\mathbf{k}]^{c,K} & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & -[\mathbf{k}]^{c,I_t} & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & -[\mathbf{k}]^{c,I_n} & 0 \\ \hline & & & & & & & & & & & -[\mathbf{k}]^{c,I_b} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (\text{A.6})$$

$$[m]^e = \begin{bmatrix} [m]^{c,A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [m]^{c,K} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & [m]^{c,K} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & [m]^{c,I_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & [m]^{c,I_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & [m]^{c,I_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

For the arbitrary cross sections, the necessary shear coefficients are calculated explicitly, and used in the mixed finite element analysis. These shear coefficients are a group numerical value depending the geometry of cross-sections and the calculation has maximum %10 error margin.

$$k' = \frac{A}{I^2} \int_y \frac{S_x^2}{b(y)} dy \quad (A.8)$$

Abovementioned equation is the general definition of shear coefficients. In this equation, A is the area of cross section, I is the inertia moment of cross section, $b(y)$ is the width of section and S_x is the static moment of a cross section.

After the chapter related principals of calculations for torsional rigidity of non-circular cross-sections, equations and general specification of mixed finite element method were defined. The basic of this section is to defining the problem of determining the natural vibration frequencies of a structural system. According to literature, it could be reduced to the solution of a standard eigenvalue problem and defined as below:

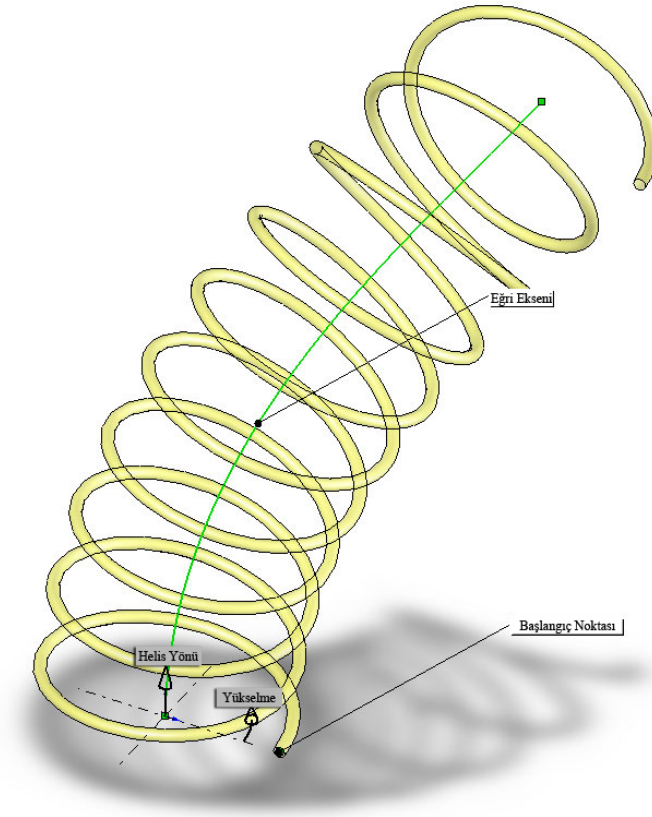
$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (A.9)$$

where [K] is the system matrix, [M] is the mass matrix for the entire domain and ω is the natural angular frequency of the system.

The available theoretical and numerical solutions for analysis of cylindrical and conical helices with rectangular and square cross sections in the literature are solved and the results are verified. The dynamic analysis of non-cylindrical helices with the square box section and I shaped cross section are studied as a pioneering research.

1. GİRİŞ

Helis sistemleri üç boyutlu uzayda tanjant fonksiyonun düz bir doğruya uygulanmış halleri olarak tanımlanabilmektedir. Şekil 1.1’de görüldüğü üzere temel anlamda bir helis belirli bir yükselme açısına, merkezden uzaklığa ve başlama noktasına mesafesiyle belirlenebilen bir geometriye sahiptir.



Şekil 1.1 : Düzgün silindirik helis.

Teorik olarak helisleri sınıflandırmanın ya da literatürde bulunan problemlere uygulanan çözümlerin detaylandırılmasından önce helislerin güncel hayatımızda kullanım alanlarından da bahsetmek gereklidir. Çeşitli sektörlerde kullanılan helisler kullanım yerlerine göre türleri değişiklik göstermektedir. Şekil 1.2’de endüstriyel imalatlardan günlük kullanıma kadar farklı alanlarda helis sistemlerinin kullanımının yaygınlığı gösterilmiştir. Helisler simetri yapısının etkisiyle yüksek dayanımlı

olmasının yanında esnekliği ve estetikliği sayesinde imalatlarda tercih edilen sistemler olmaktadır.



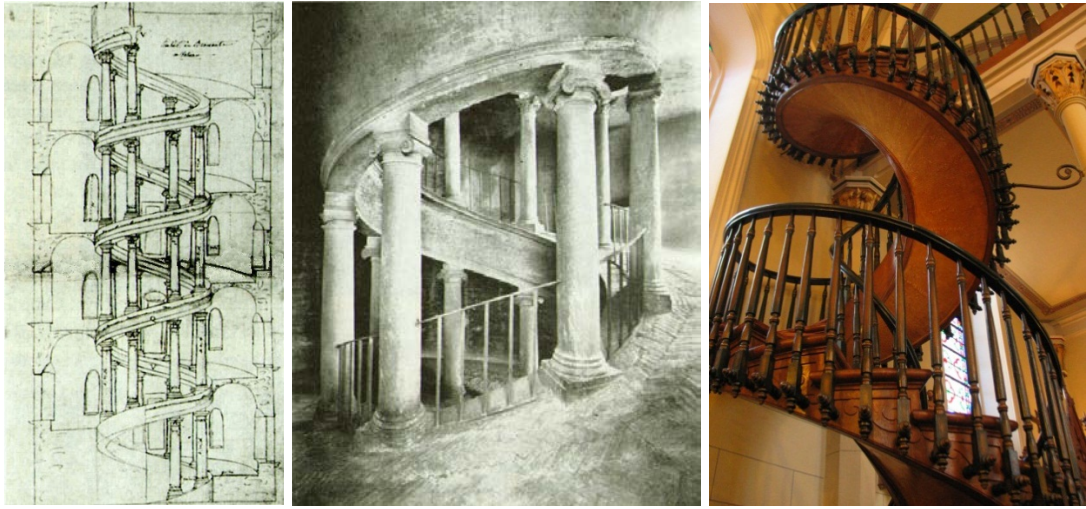
Şekil 1.2 : Güncel hayattaki helis uygulamaları.

Sektörde iyi bilinen silindirik ve silindirik olmayan helisler, çeşitli yapı elemanlarında çekici bir mimari görünüşe sahip olmasından, yapısal bir zorunluluk olmasına kadar farklı nedenlerle yaygın olarak kullanılırlar. Şekil 1.3'te resmedilen yapı Singapur, Marina körfezi bölgesinde yaya geçişi için tasarlanmış bir köprüdür. Bu yapıda görüldüğü üzere helis sistemler, bazı noktalarda hem kesiti hem de şekli değişerek mimari olarak bir farklılık oluşturmalarının yanında taşıyıcı tasarımı konusunda da kendine özgü bir çözüm ortaya koymuştur.



Şekil 1.3 : Helis Sistemlerin Örnek Uygulamaları.

Mimari açıdan kullanım alanı geniş olan helis sistemler, bahsi geçen yeni yapıların aksine eski yapılarda da kullanılmıştır. Özellikle orta çağ ve sonrasındaki zaman dilimlerinde tarihsel örnekleri çokça gösterilebilecek helis sistemler, genellikle şapel, kilise, cami, devlet binaları ve benzeri büyük yapılarda görülmektedir. Kullanılan malzemelerin günümüz yapısal malzemelerine göre daha az gelişmiş olmalarına karşın helis sistemlerin simetrik yapısı sayesinde yüksek mertebeden etkileri yapılardan uzak tutarak hem estetik görünüm hem de uzun bir işletme ömrü sağlamaktadır.

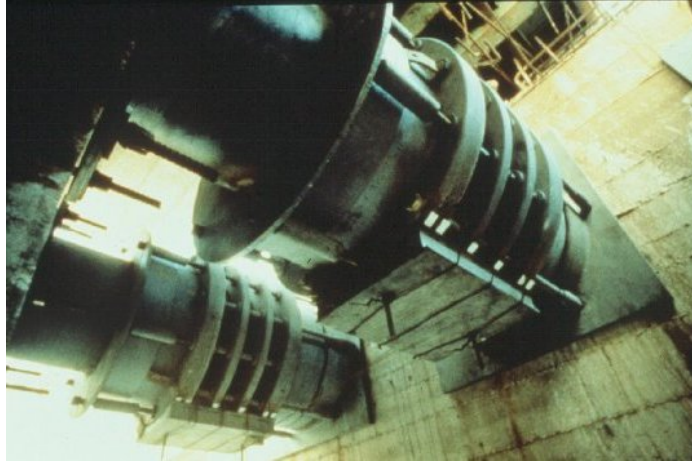


Şekil 1.4 : Helis Sistemlerin Örnek Uygulamaları.

Kullanım alanları olarak en etkili uygulamalar Şekil 1.4'te gösterildiği üzere, dikey doğrultuda dar bir oturma alanı ile en kısa yoldan yüksek noktalara erişme amacını içermektedir. Matematiksel açıklaması Steinhaus[1] tarafından ortaya konmuştur. Bir silindirin içerisinde iki nokta arasındaki en kısa yol, bu iki nokta arasındaki düz çizgiyi dikkate almaz isek, ancak bir helis ile ifade edilebilmektedir. Bu sebeple teknolojinin gelişmemiş olduğu zamanlarda, dönemine göre yüksek irtifalı yapılar için çokça tercih edilmiştir.

Yapısal elemanların modellenmesi konusunda da helis sistemler tercih edilmektedir. Deprem izolatörleri ve çeşitli diğer sönümleme sistemleri bahsi geçen gruba bir örnek olarak sunulabilir. Şekil 1.5'te görüldüğü üzere deprem izolatörlerinin ilk uygulaması 1976 Friuli depremine maruz kalan Somplago Viyadüğü[2] 'ndedir. Deprem izolatörlerinin helis sistemler kullanılarak modellenmesinin literatürde çokça örneği bulunmaktadır. Deprem izolatörü çeşitlerinden elastomer izolatörler de yukarı

bahsi geçen yapısal elemanlara örnek olarak sunulabilmektedir. Helis sistemler, yüksek sönümlenme kabiliyetine sahip bu sistemler için şekil değiştirme enerjisi prensibiyle yapısal modelleme çalışmalarında şekline göre, zorlanma türüne göre, kuvvetin uygulama koşullarına göre, malzeme esasına göre ve mesnetlenme koşulları gibi çeşitli kıstaslar ve farklı kabuller altında kullanılmaktadır.



Şekil 1.5 : Helis Sistemlerin Örnek Uygulamaları.

1.1 Amaç ve Kapsam

Bilimsel çalışmaların yanında güncel hayatımızda da sıkça kullandığımız helisel sistemlerin üzerinde çok sayıda araştırma yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmaların esası helisel sistemlerin çalışma prensiplerini daha iyi anlamak ve amaca uygun helisel sistemleri tasarlamaktır. Kaynak taraması sırasında helisel çubukların davranışlarını irdelemek için farklı yöntemler kullanıldığı görülmüştür. Bunlara örnek olarak Castigliano Teoremi, virtuel iş prensibi, sonlu elemanlar yöntemi ve benzeri yöntemler verilebilir[3].

Literatürde silindirik ve silindirik olmayan helisel statik ve dinamik analizleri çeşitli yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Mevcut çalışmalarda çubuğun kesiti daire ve/veya dikdörtgen olarak alınmıştır. Bu çalışmada, silindirik olmayan ve daireden farklı en kesite sahip helisel çubukların sonlu elemanlar formülasyonu kullanılarak serbest titreşim analizinin yapılması hedeflenmiştir. Kutu kesit ve I formunda enkesite sahip fiçı (barrel), hiperboloidal ve konik helisler çalışmanın ana konusudur. Sonlu eleman formülasyonu için, Timoshenko kuramına dayalı bir fonksiyonel kullanılmıştır. Bu

fonksiyonel ve sonlu elemanlar formülasyonu ilk defa silindirik helislerin statik analizi için Omurtag ve Aköz[4] tarafından geliştirilmiş, daha sonra silindirik ve silindirik olmayan helislerin serbest titreşim analizinde Girgin[31] tarafından uygulanmıştır. Bu çalışmada kullanılan eleman 2x12 serbestlik dereceli iki düğüm noktasına sahiptir ve daireden farklı enkesitli silindirik olmayan helis problemleri için kullanılmıştır. Daireden farklı enkesitlerin burulma rijitliğinin hesabı için de ayrı bir sonlu eleman algoritması[5] kullanılmıştır. Formülasyonun doğrulaması literatürde mevcut çalışmalarla yapılmış (daire, kare ve dikdörtgen enkesitli helis problemleri) ve daire dışındaki enkesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizi yapılmıştır.

1.2 Bu Konuda Daha Önce Yapılan Çalışmalar

Literatürde, dairesel ve dikdörtgen enkesite sahip silindirik ve silindirik olmayan helislerin statik ve dinamik analizleriyle ilgili çok sayıda teorik ve sayısal çalışmalar bulunmaktadır.

Statik analizle ilgili olarak, Holmes[6] iki ucu ankastre ve simetrik yük altındaki helisel kirişler için genel denklemleri ve çözümleri ortaya koymuştur. Scordelis[7] ise iki ucu ankastre ve düzgün yayılı yüklü helisel kirişin orta açıklığındaki bilinmeyenlerini, minimum şekil değiştirme enerji ilkesini kullanarak belirlemiş ve tablo haline getirmiştir. Wittrick[8] çalışmasında helisel yayların yükselme açısını yüksek değerlerde tutarak boyuna ve dönme şekil değiştirme etkisinin helis üzerinde yayılmasını ve bu etkinin yükselme açısıyla ilişkisini incelemiştir. Cinemre[9]'de helisel yapılar için transfer matrisi kullanılarak çözüme ulaşılmıştır. İki ucu ankastre düzgün yayılı yük altında helisel merdivenler Stefanou[10] tarafından incelenmiştir. Omurtag ve Aköz[4] karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak silindirik ve konik helisel çubukların statik analizi yapmışlardır. Yu ve Hao[11] yaptıkları çalışmalarda dönel ataletin ve burulmaya bağlı şekil değiştirmelerin etkilerini irdelemiş ve denklemlere eklemelerde bulunmuşlardır. Haktanır ve Kırıl[12] transfer matrisini kullanarak elastik ve sürekli helisel kirişleri çözmek için bir rijitlik matrisi geliştirmiştir. Tamamlayıcı fonksiyon yaklaşımını temel alan rijitlik matrisi metodu Haktanır[13] 'da dairesel çubuklar için kullanılmıştır. Busool ve Eisenberger[14] farklı geometrideki helisel kirişlerin rijitlik matrislerini türetmek için kesin şekil fonksiyonlarını kullanmışlardır.

Helislerin dinamik analizinde, ilk diferansiyel denklem Love[15] tarafından ortaya konmuştur. Epstein[16] teorik olarak konik yayların halka yayların temel frekanslarını bulmuş ve deneysel olarak doğrulamıştır. Burulmadan dolayı oluşan eylemsizlik etkisini Yoshimura ve Murata[17] Love'un denklemlerine eklemiştir. Mottershead[18] sonlu elemanlar metodunu kullanarak Wittrick[19]'deki helislerin diferansiyel denklemleri temel alan dinamik analizi ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Nagaya ve arkadaşları[20] Myklestad metodunu kullanarak silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim frekanslarını belirlemiştir. Lin ve Pisano[21] helisel yayların genel dinamik denklemlerini türetmiştir. Helisel yayların eksenel-burulma titreşimlerinin birleştirilmesi ile ilgili teorik bir çalışma Jiang ve arkadaşları[22] tarafından sunulmuştur. Xiong ve Tabarrok[23] sonlu elemanlar metodunu kullanarak, çeşitli yükler altında dönmüş ve burulmuş üç boyutlu çubukların titreşim analizi için genel denklemler geliştirmiştir. Transfer matrisi metodunu kullanarak, Yıldırım[24] helisel yayların serbest titreşim frekanslarını etkileyen parametreleri araştırmıştır. Yıldırım ve İnce[25] Timoshenko kiriş kuramını temel alan dağıtılmış kütle modelini kullanarak transfer matris metodu vasıtasıyla farklı tipteki helisel yayların doğal frekanslarını bulmuştur. Yıldırım[26] transfer matrisini ve tamamlayıcı fonksiyonları uygulayarak dönel ataletin silindirik olmayan helisler üzerindeki etkilerini irdelemiş, yatay ve eksenel deformasyonların etkilerini de hesaba katıp serbest titreşim frekanslarını belirlemiştir. Yıldırım[27] rijitlik matrisi metodunu temel alan iki ucu ankastre ve silindirik olmayan helisel yayların ilk altı doğal frekansını hesaplamıştır. Silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim analizi ile ilgili numerik ve analitik çalışmalar, rijitlik matrisi ve eylemsizlik matrisi kullanılarak Yıldırım[28]'da ortaya konmuştur. Busool ve Eisenberger[29] daireden farklı enkesite sahip silindirik olmayan helisel kirişlerin serbest titreşim analizi için kesin eleman metodunu Eisenberger[30]'de uygulamıştır. Girgin[31], Omurtag ve Aköz[4] 'de sunulan fonksiyoneli kullanarak dikdörtgen enkesite sahip silindirik olmayan helislerin serbest titreşimini incelemiştir. Lee[32] silindirik ve silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim analizini incelemek için pseudospectral[33] metodunu uygulamıştır. Silindirik helisel yayların serbest titreşim analizi analitik olarak Yu ve Yang[34] tarafından ortaya konmuştur.

Bahsi geçen çalışmalar içinde, transfer matrisi ve sonlu elemanlar en çok tercih edilen metotlardır. Sonlu elemanlar formülasyonunda, yer değiştirmeleri ve/veya gerilmeleri esas alan değişik eleman modelleri mevcuttur. Yer değiştirme modelinde (minimum potansiyel enerji ilkesi), fonksiyon yer değiştirmeler ile ifade edilmesine karşın, kuvvet modelinde (minimum tamamlayıcı enerji ilkesi) de ise gerilme tanım alanı terimleri kullanılmaktadır. Buna karşın, yer değiştirme ve gerilme bileşenlerinin birlikte yer aldığı karışık sonlu elemanlar modeli de mevcuttur[35]. Aköz ve arkadaşları[36] değişken geometrili ve değişken yük altındaki kirişler için karışık sonlu elemanlar formülasyonu geliştirmiştir.

Daireden farklı enkesitin burulma rijitliği, burulma etkisinden dolayı detaylı bir çalışma gerektirmektedir. Daire, elips ve eşkenar üçgen gibi bazı sınırlı enkesitler için burulma rijitliğinin kesin değeri bulunabilmektedir[37]. Burulma etkisi altındaki daireden farklı enkesite sahip katı cisimlerde kesme kuvvetini hesaplamak için, literatürde Saint-Venant ve Prandtl[38] tarafından ortaya konmuş iki teori bulunmaktadır. Dikdörtgen kesitler için iyi yaklaşıma sahip bir çözüm Timoshenko ve Goodier[39]'da ortaya konmuştur. Daireden farklı enkesitlerde burulma rijitliğini elde etmek için, Özmen[40] sonlu farklar ve yaklaşım teknikleri uygulayarak kısmi diferansiyel denklemler üzerinde çalışmış ve çeşitli yazılımlar kullanarak Poisson'un denklemleri için numerik örnekler oluşturmuştur. Kendisinin ortaya koyduğu sonuçların karşılaştırılması için dördüncü dereceden Richardson ekstrapolasyonu kullanılmıştır[41]. Enkesitlerin burulma rijitliğinin hesaplanması ile ilgili sonlu elemanlar algoritmasını temel alan ilk çalışma Hermann[42] tarafından yapılmıştır. Kikuchi[43] ve Zienkiewicz[44] sonlu elemanlar yaklaşımı ile numerik algoritmalar üzerinde çalışmışlardır. Daireden farklı enkesitler için, güçlendirilmiş beton kirişlerin burulma rijitliği Li ve arkadaşları[45] tarafından irdelenmiştir. Mutlak elastik kiriş teorisi için numerik bir metot El Fatmi ve Zenzri[46] tarafından ortaya konmuştur. Buna ek olarak Saygun ve arkadaşları[5] Timoshenko kiriş kuramına dayanan, değişken eğrilikli ve daireden farklı enkesite sahip uzay çubukların eleman matrisi ve yayılı kütle matrisleri geliştirilmiştir.

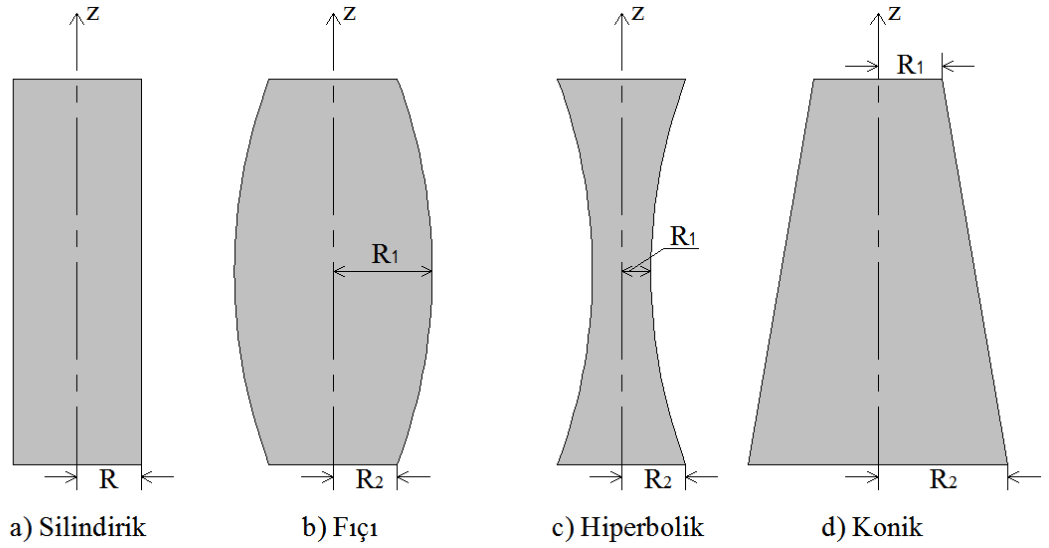
Literatür araştırmaların neticesinde helislerin dinamik analizi ile ilgili önceki yıllarda yapılan çalışmalar detaylı incelenmiş ve problemin çözümü için karışık sonlu elemanlar metodunun tercih edilmesinin çözümlerin yakınsaklığı ve çözüm rahatlığı açısından daha uygun olduğu belirlenmiştir. Karışık sonlu elemanlar metodu

kullanılması için ortaya konan fonksiyonel kuvvetler, momentler, yerdeşiftirmeler ve dönmeler denkleme bir değişken gibi katılarak hesaplamalarda kolaylık sağlanmış, literatürdeki mevcut sayısal örnekler ile kontrol edilmiş ve silindirik olmayan, daireden farklı enkesite sahip helis problemleri çözülmüştür.

2. HELİS GEOMETRİSİ, HELİS DENKLEMLERİ VE FONKSİYONEL

2.1 Helis Geometrisi

Helis olarak adlandırılan geometrik şekiller esasen iki temel gruba ayrılır. Birinci grup helisler, mahruti bir yüzey etrafında spiral olarak dönen helis tiplerinden oluşmaktadır. Şekil 2.1(a,d)'de bu gruptaki helislerin örnek gösterimi yer almaktadır.



Şekil 2.1 : Helis çeşitleri.

İkinci grup olarak göz önüne almamız gereken helisler ise küresel bir yüzey etrafında spiral olarak dönenlerdir. Bu gruba örnek olarak Şekil 2.1(b,c) ve Şekil 2.2'deki tasarım örnek gösterilebilir.

Literatürde bulunan çalışmalarda belirtildiği üzere, helis geometrisi iki temel koordinat sisteminde incelenmektedir. Kartezyen koordinat sistemi ve Frenet koordinat sistemi olarak belirtilen bu iki sistemin temel farkı merkez noktasının Frenet koordinat sisteminde eğrinin merkez doğrultusu üzerinde yer almasıdır (Bkz. Şekil 2.5).



Şekil 2.2 : Küresel yüzey üzerindeki bir helis örneği.

Bu çalışmada incelenen helislerin Kartezyen koordinat sisteminde tanımlı geometri özellikleri; α yükselme açısını, φ xy düzleminde dönüm miktarını belirtilen açıyı, $R(\varphi)$ ve $p(\varphi)$ fonksiyonları ise φ açısının birer fonksiyonları olarak özetlenebilir.

Silindirik olmayan bir helisin kartezyen koordinat sisteminde tanımlı geometri özelliklerini belirten denklemler şunlardır:

$$x = R(\varphi)\cos\varphi, y = R(\varphi)\sin\varphi, z = p(\varphi)\varphi, p(\varphi) = R(\varphi)\cos\alpha \quad (2.1)$$

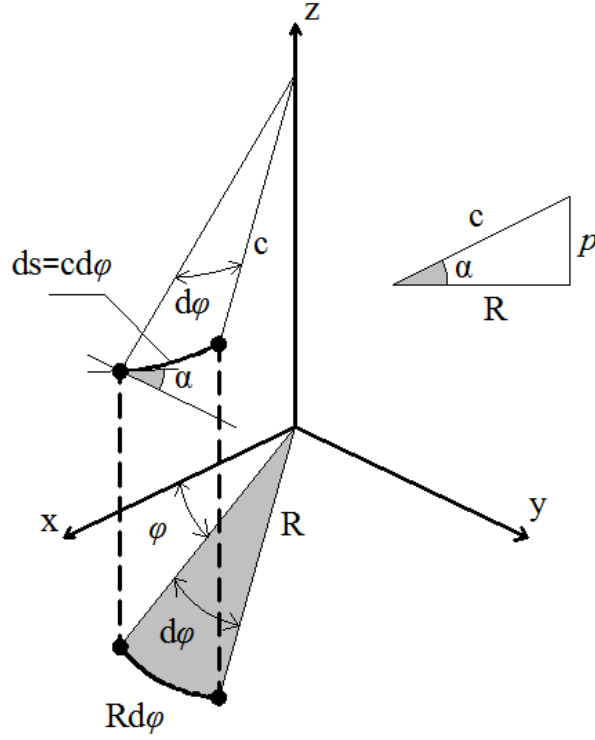
Frenet koordinat sisteminde Frenet üçlüsü olarak adlandırılan **t**, **n** ve **b** birim vektörleri vardır. Bu vektörler çubuk eksenini boyunca tanımlanan ve çubuk eksenine dik olarak kabul edilmiş bir matematiksel olgudur. Şekil 2.5'te örnek gösterimi verilmiş bu vektörler, Kartezyen koordinat sistemindeki **r** yer vektörü ve bu vektörü tanımlamakta kullanılan x, y ve z eksenlerindeki **i**, **j** ve **k** birim vektörleri cinsinden Denklem (2.2) ve Denklem (2.3)'te yazılmıştır (Bkz. Şekil 2.4).

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t} \wedge ds}{\|d\mathbf{t} \wedge ds\|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.3)$$

Şekil 2.3'te belirtilen ds, birim yay uzunluğunu ifade etmektedir. Frenet–Serret formülasyonunda[48] matematiksel olarak tanımlanırsa:

$$ds = \sqrt{R^2(\varphi) + p^2(\varphi)} d(\varphi) = c(\varphi) d\varphi \quad (2.4)$$



Şekil 2.3 : Helisin geometrik parametreleri.

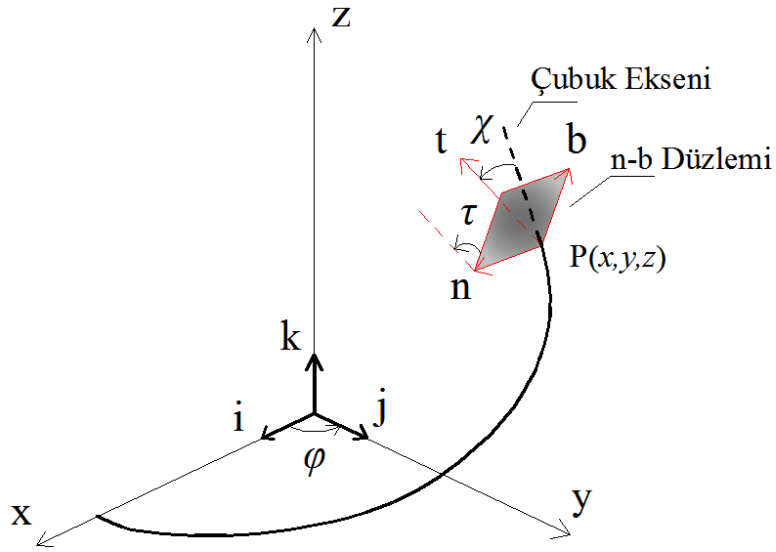
Frenet koordinat sisteminde $\mathbf{t}$ hareket yönünde eğriliğin tanjant vektörü olarak tanımlanmaktadır. Diğer birim vektörlerden $\mathbf{n}$ normal vektör olarak adlandırılarak esasen boyuna bölümü ile elde edilen yay uzunluğuna bağlı $\mathbf{t}$ vektörünün bir türevidir. Son vektör binormal vektör olarak adlandırılan $\mathbf{b}$ vektörüdür. Binormal vektör ise diğer iki vektörün vektörel çarpımı sonucunda elde edilen eksenel olarak diğer iki eksene dik olan eksenle tanımlanmaktadır (Bkz. Şekil 2.5). Bahsi geçen vektörlerin yay uzunluğu açısından türevleri dikkate alındığında, χ eğriliği ve τ ise burulmayı ifade etmek için kullanılır. Bu çerçevede, silindirik olmayan helislerin eğriliği ve burulmasını matematiksel birer denklem içerisinde belirtmek gerekir ise:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \chi \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\chi \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.5)$$

Yukarıda bahsi geçen χ ve τ büyüklükleri için genel tanımlama yapılması gerekirse s 'ye bağlı olarak formüle etmek gerekir. Özellikle silindirik olmayan helislerde seçilen noktadaki χ ve τ büyüklüklerinin daha iyi anlaşılması için Şekil 2.4'te örnek bir gösterimi yapılmıştır.

χ ve τ büyüklüklerinin φ açısal büyüklüğü ile korelasyonu aşağıdaki gibi formüle edilebilir[3]:

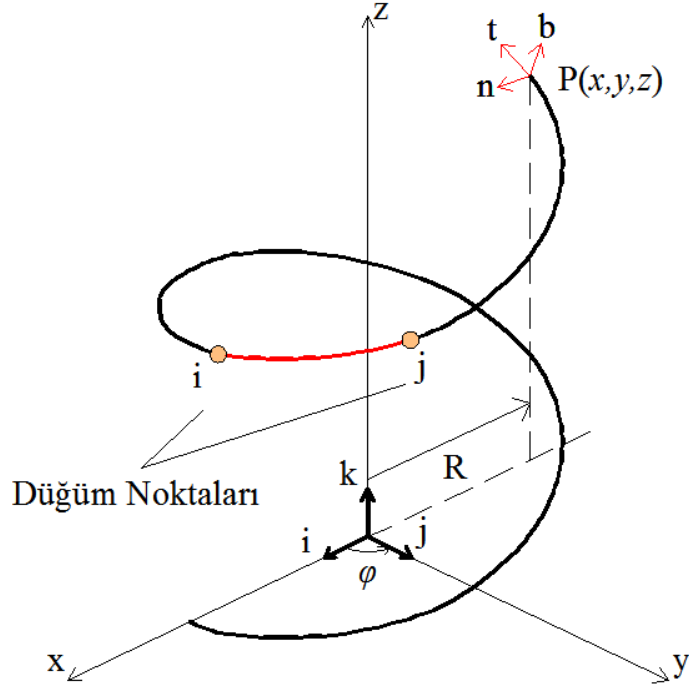
$$\left. \begin{aligned} \chi(\varphi) &= \frac{R(\varphi)}{c^2(\varphi)} \\ \tau(\varphi) &= \frac{p(\varphi)}{c^2(\varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$



Şekil 2.4 : Frenet Üçlüsü ve sapma açıları.

Frenet sisteminde tanımlanan değişkenlerin silindirik helisler dikkate alındığında sabit değerlerde oldukları görülmektedir. Bunun sebebi, helisin çapı sabit olmasıdır ve matematiksel ifadesi:

$$c = \sqrt{R^2 + p^2}, \quad \chi = \frac{R}{c}, \quad \tau = \frac{p}{c^2}, \quad p = R \tan \alpha \quad (2.7)$$



Şekil 2.5 : Kartezyen ve Frenet koordinat sistemlerinde helis gösterimi.

2.2 Helis Denklemleri

Elastik helisler için Timoshenko kiriş teorisinden türetilen alan denklemleri aşağıda belirtilmiştir:

$$\left. \begin{aligned} \text{Hareket denklemleri} \quad & -d\mathbf{T}_{,s} - \mathbf{q} + \rho A \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \\ & -\bar{\mathbf{M}}_{,s} - \mathbf{t} \times \mathbf{T} - \mathbf{m} + \rho \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Kinematik denklemler} \quad & \mathbf{u}_{,s} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\Omega}_{,s} - \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Bünye denklemleri} \quad & \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{C}_{\gamma} \mathbf{T} = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\kappa} - \mathbf{C}_{\kappa} \mathbf{M} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Yukarıda belirtilen formülasyonda;

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n} + u_b \mathbf{b}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega_t \mathbf{t} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b}, \\ \mathbf{T} &= T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b}, \quad \mathbf{M} = M_t \mathbf{t} + M_n \mathbf{n} + M_b \mathbf{b} \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanmakla birlikte; $\mathbf{u}$ yerdeğiştirme vektörü, $\boldsymbol{\Omega}$ enkesitin merkez eksenindeki dönme vektörü, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$ kuvvet ve moment vektörleridir. Ek olarak, ρ

malzeme yoğunluğu, A enkesitin alanı, I eylemsizlik momenti, γ birim kayma vektörü, κ birim dönme vektörüdür. $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{m}$ yayılı kuvvet ve moment vektörlerini ifade etmektedir. $\mathbf{C}_\gamma$ ve $\mathbf{C}_\kappa$ ise elastik malzemenin kompiyans matrisleridir. Elastik bir malzemenin kompiyans matrisleri:

$$\mathbf{C}_\gamma = \begin{bmatrix} 1/EA & 0 & 0 \\ 0 & k'/GA & 0 \\ 0 & 0 & k'/GA \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\kappa = \begin{bmatrix} 1/GI_t & 0 & 0 \\ 0 & 1/EI_n & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_b \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Yukarıda belirtilen formülasyonda; k' kesme kuvveti düzeltme katsayısını, E ve G elastisite ve kayma modüllerini, I_t , I_n ve I_b ise sırasıyla $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini tanımlamaktadır.

2.3 Fonksiyonel

Fonksiyonelin elde edilebilmesi için Denklem (2.8) - (2.10), $\mathbf{Q} = \mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{f}$ operatör formunda yazılır. Öncelikle bu operatörün potansiyel olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bunun için,

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (2.13)$$

koşulunun sağlanması gerekmektedir[47]. Denklem (2.13)'teki $d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})$ ve $d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*)$ ifadeleri operatörün $\bar{\mathbf{y}}$ ve $\mathbf{y}^*$ doğrultularındaki Gâteaux türevlerini ifade etmektedir. Gâteaux türevinin tanımı aşağıdaki gibidir:

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \varepsilon \bar{\mathbf{y}})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (2.14)$$

Bu denklemde, ε skaler olarak tanımlanmıştır. Operatörün Denklem (2.13)'a göre potansiyelliğnin sağlatılmasından sonra, fonksiyonel aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = \int_0^1 [\mathbf{Q}(s\mathbf{y}, \mathbf{f}), \mathbf{y}] ds \quad (2.15)$$

Belirtilen denklemde, s skaler bir büyüklüğü ifade etmektedir. Denklem (2.13) - (2.15) kullanılarak helisel çubuklara ait $\mathbf{I}(\mathbf{y})$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{I}(\mathbf{y}) = - \left[\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right] + [\mathbf{t} \times \mathbf{\Omega}, \mathbf{T}] - \left[\frac{d\mathbf{M}}{ds}, \mathbf{\Omega} \right] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\kappa \mathbf{M}, \mathbf{M}] - \frac{1}{2} [\mathbf{C}_\gamma \mathbf{T}, \mathbf{T}] \left. \begin{aligned} & - \frac{1}{2} \rho A [\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}] - \frac{1}{2} \rho [\mathbf{I} \ddot{\mathbf{\Omega}}, \ddot{\mathbf{\Omega}}] - [\mathbf{q}, \mathbf{u}] - [\mathbf{m}, \mathbf{\Omega}] \\ & + [(\mathbf{T} - \hat{\mathbf{T}}), \mathbf{u}]_\sigma + [(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}), \mathbf{\Omega}]_\sigma + [\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}]_\varepsilon + [\hat{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{M}]_\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Fonksiyonelde yer alan parantezler iç çarpımları, şapkalı terimler sınır değerlerini ve ε, σ indisleri geometrik ve dinamik sınır koşullarını ifade etmektedir. Denklem (2.16)'de $\mathbf{u}$ yer değiştirme vektörü, $\mathbf{\Omega}$ dönme vektörünü, $\mathbf{T}$ kuvvet vektörünü, $\mathbf{M}$ moment vektörünü, ρ malzemenin yoğunluğunu, A enkesit alanını, $\mathbf{I}$ eylemsizlik momenti vektörünü, $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{m}$ yayılı kuvvet ve moment vektörlerini, $\mathbf{C}_\kappa$ ve $\mathbf{C}_\gamma$ elastik malzemeler için kompliyans matrislerini ifade etmektedir.

Serbest titreşim analizi göz önüne alındığında, $\mathbf{q} = \mathbf{m} = \mathbf{0}$ olmak üzere yer değiştirmeler ve gerilmeler helis boyunca sinüzoidal davranış göstereceğinden $[\ddot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}]$, $[\ddot{\mathbf{\Omega}}, \ddot{\mathbf{\Omega}}]$ terimleri $\omega^2 [\mathbf{u}, \mathbf{u}]$, $\omega^2 [\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}]$ şeklinde yazılır. Bu tanımlamada, ω doğal frekansı tanımlamaktadır.

Denklem (2.16)'de verilen fonksiyonel helis problemlerinin statik analizi için Omurtag ve Aköz[4]'de, helis problemlerinin dinamik analizi için de Girgin[31]'de kullanılmıştır.

3. HELİSİN FORMÜLASYONU VE DİNAMİK ANALİZ

3.1 Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu

Sonlu elemanlar formülasyonunda lineer şekil fonksiyonları

$$\varphi_i = (\varphi_j - \varphi) / \Delta\varphi \text{ ve } \varphi_j = (\varphi - \varphi_i) / \Delta\varphi \quad (3.1)$$

kullanılmıştır[4]. Denklem (3.1)'dek alt indisler çubuk elemanına ait düğüm noktasını göstermektedir ve $\varphi_j > \varphi_i$ olmak üzere $\Delta\varphi = (\varphi_j - \varphi_i)$ olarak tanımlanmıştır (Bkz. Şekil 2.5). Silindirik olmayan bir helis için aşağıdaki bağıntılar kullanılır:

$$c^e = c_i\varphi_i + c_j\varphi_j, \quad s^e = (c_i\varphi_i + c_j\varphi_j)\Delta\varphi, \quad \chi^e = \chi_i\varphi_i + \chi_j\varphi_j, \quad \tau^e = \tau_i\varphi_i + \tau_j\varphi_j \quad (3.2)$$

Burada, c_i, c_j c 'nin noktasal değerlerini [Denklem (2.4) ve (2.7)], $s^e = c\Delta\varphi$ helis yay uzunluğunu, i, j noktaları için χ_i, χ_j noktasal eğrilikleri ve τ_i, τ_j ise noktasal burulmayı ifade etmektedir (Bkz. Şekil 2.4). Denklem (3.2)'te belirtilen bu noktasal değişkenler Denklem (2.7)'te i, j noktaları için helisin yarıçapını ifade eden R_i ve R_j kullanılarak hesaplanmıştır. Helis geometrisinin değişkenliğini ifade eden (c, χ, τ) parametrelerine[4] ve Girgin[31]'e göre alt matrisleri ile birlikte sonlu eleman matrisi aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
u_t & u_n & u_b & \Omega_t & \Omega_n & \Omega_b & T_t & T_n & T_b & M_t & M_n & M_b \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
\end{array} \\
[k]^e = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [k]_1 & [k]^{c,\chi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,\chi} & [k]_1 & [k]^{c,\tau} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,\tau} & [k]_1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [k]_1 & [k]^{c,\chi} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [k]^c & -[k]^{c,\chi} & [k]_1 & [k]^{c,\tau} \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^c & 0 & 0 & -[k]^{c,\tau} & [k]_1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,K} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,K} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,I_t} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,I_n} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k]^{c,I_b} \\
\hline
\end{array}
\end{array}$$

Şekil 3.1 : Eleman matrisi.

Eleman matrisi için tanımlı serbestlikler aşağıdaki vektör ile belirtilmiştir:

$$\mathbf{X}^T = \{u_t, u_n, u_b, \Omega_t, \Omega_n, \Omega_b, T_t, T_n, T_b, M_t, M_n, M_b\} \quad (3.3)$$

Yukarıda bahsi geçen $[k]_1$ ve $k_{ii}^{c,\delta}, k_{ij}^{c,\delta}, k_{jj}^{c,\delta}$ alt-matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$[k]_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} k_{ii}^{c,\delta} = \frac{1}{60} \Delta \varphi [3c_i (4\delta_i + \delta_j) + c_j (3\delta_i + 2\delta_j)] \\ k_{ij}^{c,\delta} = k_{ji}^{c,\delta} = \frac{1}{60} \Delta \varphi [c_i (3\delta_i + 2\delta_j) + c_j (2\delta_i + 3\delta_j)] \\ k_{jj}^{c,\delta} = \frac{1}{60} \Delta \varphi [c_i (2\delta_i + 3\delta_j) + 3c_j (\delta_i + 4\delta_j)] \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

$[k]^{c,\delta}$ alt-matrisinin kapalı olarak yazılmıştır. Burada kullanılan $\chi, \tau, A=1/AE, K=k'/GA, I_t=1/GI_t, I_n=1/EI_n, I_b=1/EI_b$ parametreleri Denklem (3.5)'de δ_i ve δ_j düğüm değerleri ile yer değiştirecektir. $[k]^{c,\chi}, [k]^{c,\tau}, [k]^{c,A}, [k]^{c,K}, [k]^{c,I_t}, [k]^{c,I_n}, [k]^{c,I_b}$ notasyonu ile kullanılan bu parametreler Şekil 3.1'de verilen eleman matrisinde kullanılmıştır. Buna ek olarak, $\delta_i = \delta_j$ olarak alındığı zaman Denklem (3.5) aşağıdaki özel koşula dönüşmektedir:

$$\left. \begin{aligned} k_{ii}^{c,\delta} &= \frac{1}{12} \Delta \varphi \delta (3c_i + c_j) \\ k_{ij}^{c,\delta} &= k_{ji}^{c,\delta} = \frac{1}{12} \Delta \varphi \delta (c_i + c_j) \\ k_{jj}^{c,\delta} &= \frac{1}{12} \Delta \varphi \delta (c_i + 3c_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Eleman matrisine ek olarak kütle matrisi de Şekil 3.2’deki gibi hesaplanmıştır:

$$[m]^e = \begin{bmatrix} [m]^{c,A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & [m]^{c,K} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & [m]^{c,K} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & [m]^{c,I_t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & [m]^{c,I_n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & [m]^{c,I_b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Şekil 3.2 : Kütle matrisi.

Şekil 3.2’de belirtilen alt-matris terimleri Denklem (3.6)’da özel formda yazılanlar ile aynıdır ve Denklem (3.7) ‘deki gibi tanımlanmıştır. Burada δ parametresi $[m]^{c,A}$, $[m]^{c,K}$, $[m]^{c,I_t}$, $[m]^{c,I_n}$, $[m]^{c,I_b}$ notasyonu ile kullanılmıştır.

$$\left. \begin{aligned} m_{ii}^{c,\delta} &= \frac{1}{12} \Delta \varphi \delta (3c_i + c_j) \\ m_{ij}^{c,\delta} &= m_{ji}^{c,\delta} = \frac{1}{12} \Delta \varphi \delta (c_i + c_j) \\ m_{jj}^{c,\delta} &= \frac{1}{12} \Delta \varphi \delta (c_i + 3c_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

3.2 Daireden Farklı Enkesitlerin Burulma Rijitliği

Burulma rijitliğini tanımlamaya başlamadan önce burulma hareketinin temeli, sonuçları ve hesaplar üzerindeki varsayımları tanımlamak gereklidir. Burulma etkisi altında çalışan bir kesitin mukavemet ve şekil değiştirme hesapları yapıldığında sonuçların kesit şekline bağlı olduğu görölmektedir. Bu çerçevede iki ana formölde özetlenebilir:

$$\tau_{\max} = M_z / W_b \quad , \quad \omega = M_z / GJ_b \quad (3.8)$$

Formölasyonda kullanılan τ kesit üzerindeki gerilmeyi, M_z burulma momentini, W_b burulma mukavemet momentini, ω şekil değiştirmeyi, G malzemenin kayma modölünü ve GJ_b çarpımına ise kesitin burulma rijitliği denir. Bahsi geçen başlık altında daireden farklı enkesitlerin burulma rijitliği ile ilgilendiğimizi göz önüne alırsak J_b büyüklüğünü hesaplamak için genel olarak $\psi(x, y)$ ifadesi ile tanımlanan gerilme fonksiyonu[50] kullanılır. Sade ve genel bir tanımlama ile:

$$J_b = k \frac{A^4}{J_G} \quad (3.9)$$

Denklem (3.9)'da belirtilen k ampirik bir katsayıyı, A kesitin alanını ve J_G de kesitin ağırlık merkezine göre polar atalet momentini göstermektedir.

Tanımlamalar sonrasında dikkat edilmesi gereken bir nokta ise, yukarıda değinilen hesaplamalar üniform burulma meydana geldiği durumlar için geçerli olmasıdır. Üzerinde çalışılan cismin farklı noktalarında sınır koşullarından yada kesit simetrisinden kaynaklanan nedenlerle birbirinden değişik burulma sonuçları ile karşılaşılabilir. Bunun sebebi, daire veya halka (içi boş daire) kesitlerin hesabı sırasında yapılan varsayımlar ve hipotezlerden olan “dik kesitlerin burulmada düzlem kalarak rijit bir levha gibi kendi düzlemleri içinde dönecekleri” argümanının daireden farklı kesitlerde doğru sonuçlar vermemesinden kaynaklanmaktadır.

Yukarıda bahse konu olan tanımlamalar sonrasında daireden farklı enkesite sahip ve farklı burulma etkileri altında hizmet veren helis taşıyıcı sistemlerin kullanım alanlarından birini Şekil 3.3'te görebiliriz.



Şekil 3.3 : Helis taşıyıcı sistemlerin kullanıldığı Seattle kentindeki bir köprü.

Bir dönme momenti altındaki daireden farklı enkesitin eksenel dönmesi kolay bir problem olmamasına karşın, Saint-Venant dairesel bir bacanın çözümünden yola çıkarak bükülmüş bir bacanın deformasyonunun bacanın enkesitinin dönmesine ve bütün kesitler için aynı olan sapma miktarına bağlı olduğunu ortaya koymuştur. Enkesitlerin dönmesine bağlı olan deformasyonlar şunlardır:

$$u = -\theta zy, \quad v = \theta zx, \quad w = \theta \psi(x, y) \quad (3.10)$$

Bu formülasyonda, θ birim uzunluk için burulma açısını, $\psi(x, y)$ ise enkesitin sapma fonksiyonunu tanımlamaktadır. Gerilme-deformasyon bağıntılarını kullanarak, gerilmeler (τ_{xz}, τ_{yz}) her bir bölgede aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (3.11)$$

Denklem (3.11)'te G kayma modülünü göstermektedir ve Denklem (3.11) aynı zamanda aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.12)$$

Denklem (3.12)'te $f(x, y)$ parametresi gerilme fonksiyonunu göstermektedir. y ve x parametrelerini göz önüne alarak türetilmiş Denklem (3.11)'un çıkartılması ve Denklem (3.12)'da yerine konması son kısmi diferansiyel denklemi verecektir.

Böylece Denklem (3.13)'de belirtilen bu denklem ile burulma problemi Poisson denklem çözümüne indirgenecektir:

$$\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = -2\theta \quad (3.13)$$

Detaylı bilgi Fung & Pin Tong[38] ve Timoshenko & Goodier[39]'da bulunmaktadır. l ve m doğrultman kosinüsleri olarak tanımlandırıldığında, sınır koşulu Denklem (3.12) ile birlikte ele alındığında, $\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$ olarak bulunmaktadır. Çünkü $f(x, y)$ gerilme fonksiyonu sınır değerleri boyunca sabit olmak zorundadır. Ayrıca dönme momenti ve burulma rijitliği $\theta = l$ olarak kabul edilerek hesaplanmıştır.

$$M_t = \theta G I_t = 2 \int_A f dA \rightarrow G I_t = 2 \int_A f dA \quad (3.14)$$

Burulma rijitliğinin sonlu elemanlar algoritmasında, gerilme fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$f = \sum_{i=1}^n f_i N_i \quad (3.15)$$

Denklem (3.15)'de belirtilen N_i şekil fonksiyonu olarak belirlenmiştir. Eleman matrisleri[5]'de detaylandırılmıştır.

3.3 Kesme Kuvveti Düzeltme Katsayısı

Literatürdeki çeşitli çalışmalarda, kesme kuvveti düzeltme katsayısı kesiti önceden bilinen dikdörtgen, daire ve benzeri kesitlere uygulanmaktadır. Bu çalışmada, kutu kesit ve I formundaki kesitler için kesme kuvveti düzeltme katsayısı aşağıdaki denklem kullanılarak hesaplanmıştır:

$$k' = \frac{A}{I^2} \int_y \frac{S_x^2}{b(y)} dy \quad (3.16)$$

Denklem (3.16)'da A parametresi enkesitin alanı, I enkesitin eylemsizlik momenti, $b(y)$ kesitin genişliği ve S_x ise enkesitin statik momentini ifade etmektedir.

3.4 Karışık Sonlu Eleman için Dinamik Analiz

Yapısal sistemlerin doğal titreşim frekanslarının belirlenmesi problemi, standart bir özdeğer probleminin çözümüne indirgenebilir:

$$[\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] = 0 \quad (3.17)$$

Burada, $[\mathbf{K}]$ sistem matrisini, $[\mathbf{M}]$ kütle matrisini ve ω ise sistemin açısal doğal frekansını göstermektedir. Denklem (3.17)'un açık şekli aşağıdaki gibidir:

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{11}] & [\mathbf{K}_{12}] \\ [\mathbf{K}_{22}] & [\mathbf{K}_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{M}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

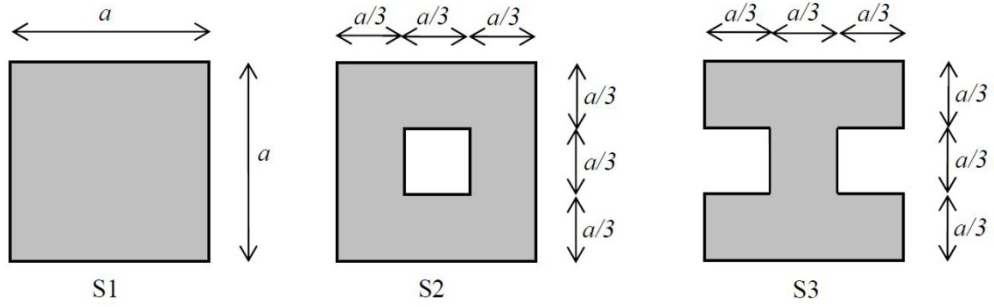
Denklem (3.18)'de $\{\mathbf{F}\}$ ve $\{\mathbf{w}\}$ kuvvet, moment, dönme ve yer değiştirme vektörlerini göstermektedir. Denklem (3.18) yeniden düzenlenirse:

$$([\mathbf{K}^*] - \omega^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{w}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.19)$$

elde edilir. Denklem (3.19)'deki $[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{12}]^T [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}]$ sıkıştırılmış matris olarak tanımlanır.

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Hesaplamalar sırasında yakınsama ve sonuçların doğrulanması için gerekli analizler silindirik olmayan kesitlerin burulma rijitliğinin belirlenmesi amacıyla kullanılan sonlu elemanlar yazılımı ile yapılmıştır. Daha sonra, literatürde bulunan dikdörtgen ve kare kesitli silindirik ve konik helislerin teorik ve sayısal problemleri çözülmüştür. En son olarak, muhtelif R_2/R_1 oranları dikkate alınarak daireden farklı enkesite ve farklı sınır değerlere sahip çeşitli silindirik olmayan helisodial helislerin doğal frekansları hesaplanmıştır.



Şekil 4.1 : Daireden farklı enkesit tipleri.

4.1 Daireden Farklı Enkesitlerin Burulma Rijitliği için Yakınsama Kontrolü

Daireden farklı enkesitlerin atalet momenti sonlu elemanlar algoritması[5] kullanılarak hesaplanmıştır. Bu algoritmayı temel alan yazılımı kontrol etmek amacı ile Şekil 4.1’de geometrisi belirtilen bir kare enkesitli (S1) problem çözülmüştür. İlerleyen aşamalarda, kutu kesitli (S2) ve I formlu enkesit (S3) için hesaplamalar tamamlanmıştır. Tüm bahsi geçen hesaplamaların sonuçları Çizelge 4.1’de bulunmaktadır. Bu hesaplamalar sırasında, boyutsuz burulma rijitliği parametresi $\bar{I}_t = I_t/a^4$ olarak kullanılmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar literatürdeki çalışmalar[39] ve sonuçları[40] ile uyumluluk göstermektedir.

Çizelge 4.1 : Dairesel olmayan enkesitler için boyutsuz burulma eylemsizlik momenti.

$$(\bar{I}_t = I_t/a^4, n_e = \text{eleman sayısı})$$

n_e	$\bar{I}_t$ (S1)	% Hata	n_e	$\bar{I}_t$ (S2)	% Hata	n_e	$\bar{I}_t$ (S3)	% Hata
100	0.138	1.85	128	0.0339	6.35	448	0.0299	1.97
400	0.1401	0.35	512	0.0358	1.10	700	0.0301	1.31
1600	0.1404	0.14	800	0.0360	0.55	1792	0.0304	0.33
2500	0.1405	0.07	2048	0.0362	0.00	2800	0.0305	0.00
[40]	0.1405	0.07	[40]	0.0355	1.93	[40]	0.0295	3.28
[39]	0.1406		[41]	0.0362		[41]	0.0305	

4.2 Doğrulama Örnekleri

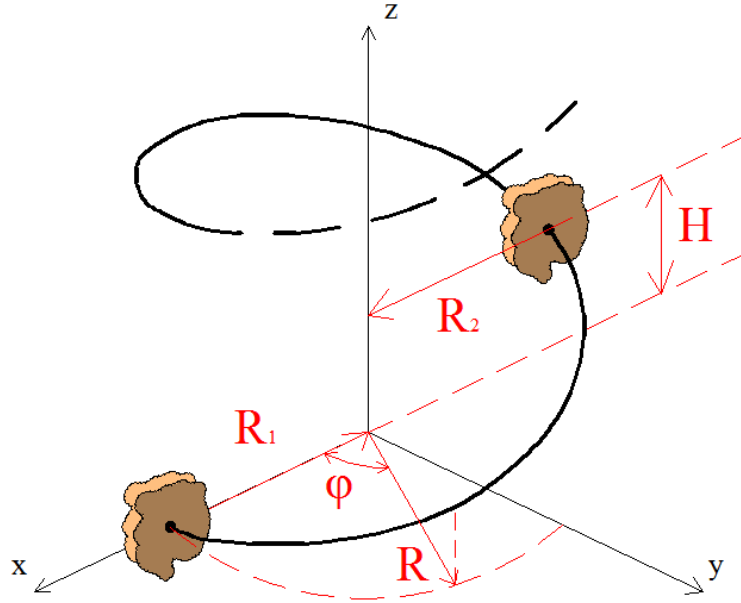
Bu bölümde dikdörtgen kesite sahip silindirik bir helisin statik analizi ve kare kesite sahip konik bir helisin dinamik analizi yapılmıştır. Konik helis için, $R(\varphi)$ helisin merkez eksenindeki herhangi bir noktada yarıçapı veren bir fonksiyon olarak tanımlanarak, aşağıdaki denklem elde edilmiştir:

$$R(\varphi) = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)\varphi}{2n\pi} \quad (4.1)$$

Denklem (4.1)'de φ yatay açıyı ve n ise merkez eksen etrafındaki dönüş adedini göstermektedir.

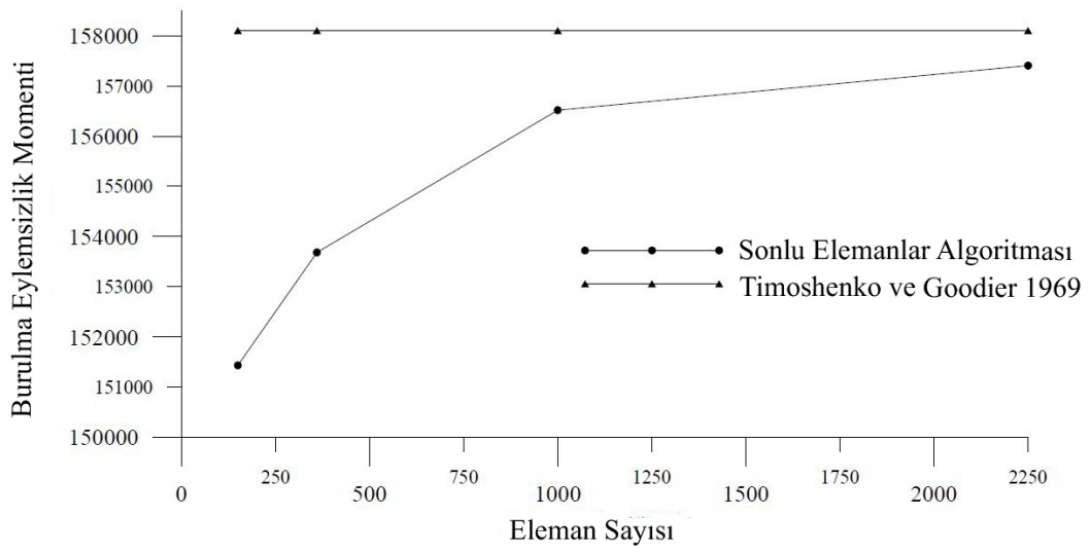
4.2.1 Dikdörtgen kesitli helisodial merdivenin statik analizi

Bu problemde, dikey olarak üniform yük altında iki ucu ankastre silindirik bir merdivenin statik analizi ele alınmıştır. Dikdörtgen kesitin boyutları $b = 150\text{cm}$ ve $h = 15\text{cm}$, merkez eksen etrafındaki dönüş adedi $n = 0.5$, tutulu uçların arasındaki dikey uzaklık $H = 608.5\text{cm}$, merkezi yarıçap $R = 310\text{cm}$ olarak belirlenmiş ve Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 : Problemin çözümü için gerekli parametreler.

Malzemenin Elastisite Modülü $E = 3 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$, Poisson Oranı $\nu = 0.3$ ve yayılı yükün büyüklüğü $q = 1 \text{ N/cm}$ olarak seçilmiştir. Enkesit bütün eleman boyunca sabit seçilmiştir. Dikdörtgen kesit için atalet momenti, farklı ağ oluşturulması amacıyla hesaplanmıştır ve yakınsama kontrollerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmiştir. $n_e = 2250$ sayıda eleman için $I_t = 157405 \text{ cm}^4$ olan sayısal sonuç $I_t = 158100 \text{ cm}^4$ [39] ile karşılaştırıldığında, hata payı %0.4'ten az bir oranda kalmıştır.



Şekil 4.3 : Dikdörtgen kesit (150cm x 15cm) için yakınsama kontrolü sonuçları.

Problemin sonlu elemanlar hesabından çıkan sonuçları kesin sonuçlar[9], Omurtag ve Aköz[4]'ün sayısal çalışmaları ve Haktanır[49] ile karşılaştırmıştır. Çizelge 4.2, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4,'den görüleceği üzere sonuçlar uyumluluk içerisinde.

Çizelge 4.2 : $\theta = \pi/2$ için yer değiştirmeler ve dönmeler.

		Yatay Açı					
		(cm)			(Radiant)		
		$u_t \times 10^{-4}$	u_n	$u_b \times 10^{-2}$	$\Omega_t \times 10^{-5}$	Ω_n	$\Omega_b \times 10^{-5}$
Bu çalışmada	20 (240)	-4.892	0	-1.152	3.149	0	1.955
	50 (600)	-4.859	0	-1.153	3.154	0	1.891
	100 (1200)	-4.901	0	-1.153	3.154	0	1.901
	150 (1800)	-4.889	0	-1.153	3.155	0	1.898
	200 (2400)	-4.895	0	-1.153	3.155	0	1.898
	250 (3000)	-4.891	0	-1.153	3.155	0	1.898
	[4]	20	-4.990	0	-1.140	3.20	0
[49]	1	-4.900	0	-1.140	3.11	0	1.90

Parantez içerisinde belirtilen rakamlar toplam serbestlik derecesini ifade etmektedir.

Çizelge 4.3 : $\theta = 0$ için kuvvetler ve momentler.

		Yatay Açı					
		(N)			(kNcm)		
		T_t	T_n	T_b	M_t	M_n	M_b
Bu çalışmada	20 (240)	-574	31	-318	-0.655	9.64	116.80
	50 (600)	-586	5	-311	-0.663	10.94	122.01
	100 (1200)	-588	1	-310	-0.664	11.14	122.82
	150 (1800)	-589	1	-309	-0.665	11.18	122.97
	200 (2400)	-589	0	-309	-0.665	11.19	123.02
	250 (3000)	-589	0	-309	-0.665	11.19	123.05
Hata %		0	0	0	9.56	0.81	0.04
Kesin çözüm[9]	1	-589	0	-309	-0.607	11.10	123.00
[4]	20	-572	30	-317	-0.652	9.64	116.00
[49]	1	-589	0	-309	-0.646	11.20	123.00

Parantez içerisinde belirtilen rakamlar toplam serbestlik derecesini ifade etmektedir.

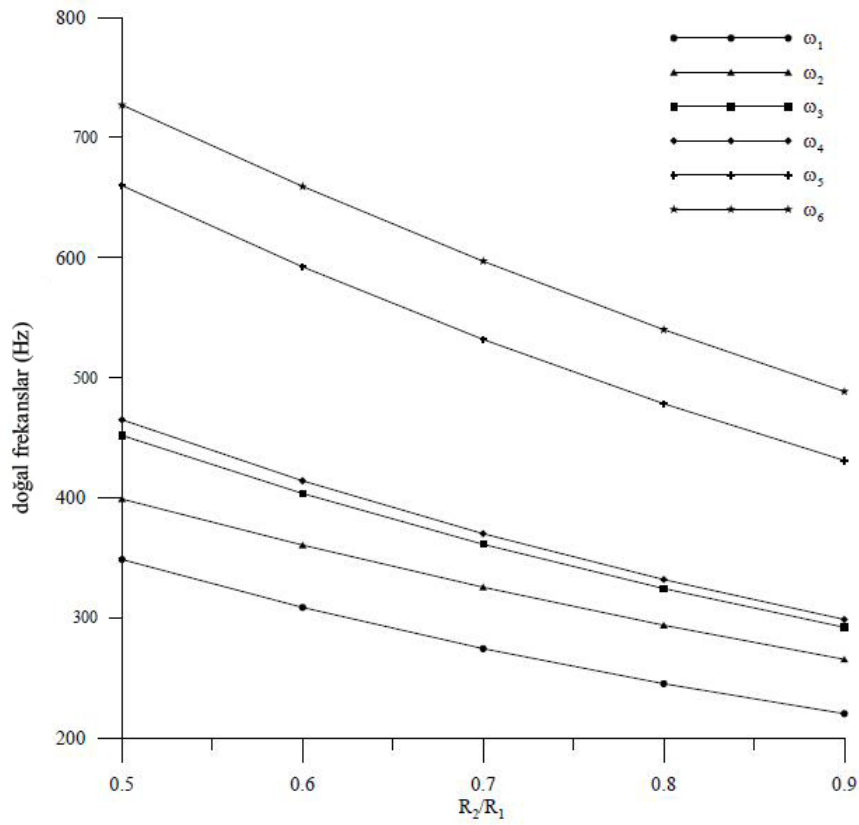
Çizelge 4.4 : $\theta = \pi/2$ için kuvvetler ve momentler.

		Yatay Açı					
		(N)			(kNcm)		
		T_t	T_n	T_b	M_t	M_n	M_b
Bu çalışmada	20 (240)	0	372	0	0	1.59	0
	50 (600)	0	330	0	0	1.03	0
	100 (1200)	0	337	0	0	1.13	0
	150 (1800)	0	335	0	0	1.10	0
	200 (2400)	0	336	0	0	1.13	0
	250 (3000)	0	335	0	0	1.10	0
[4]	20	0	370	0	0	1.61	0
[49]	1	0	336	0	0	1.09	0

Parantez içerisinde belirtilen rakamlar toplam serbestlik derecesini ifade etmektedir.

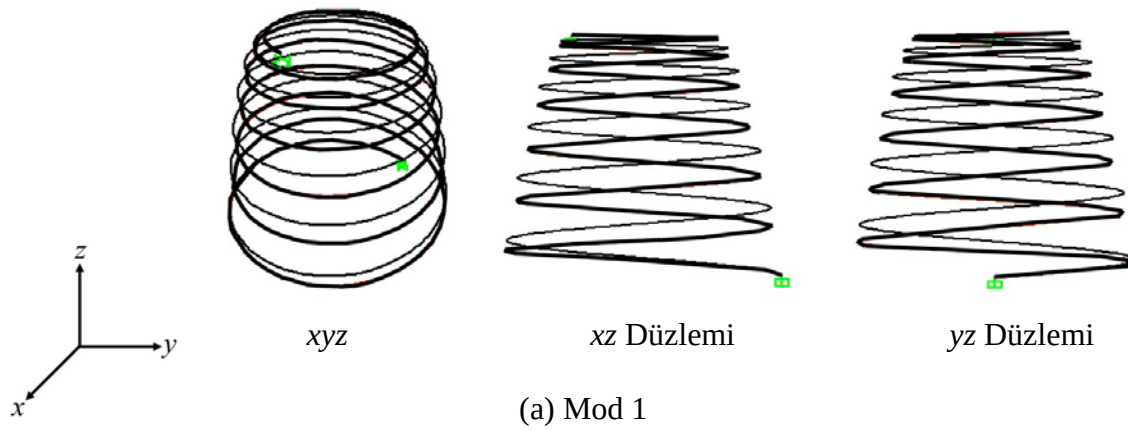
4.2.2 Kare kesitli konik helislerin dinamik analizi

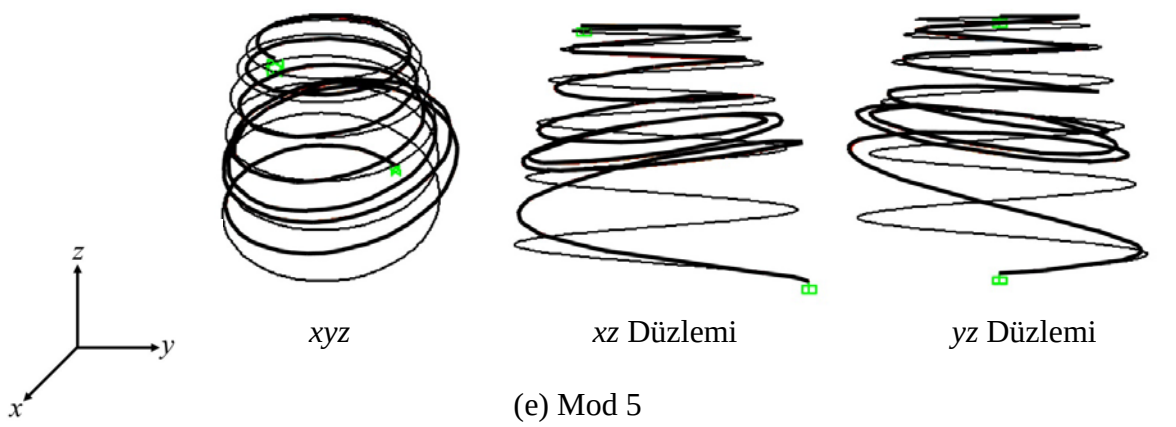
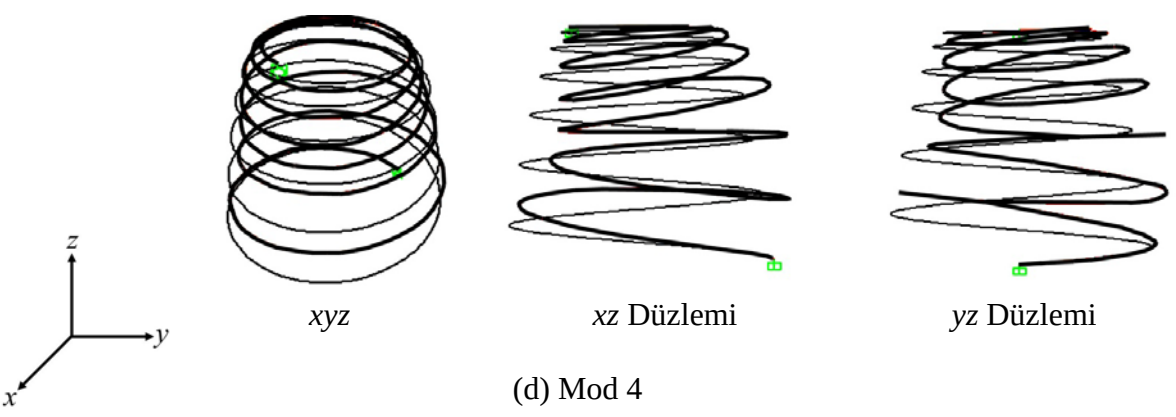
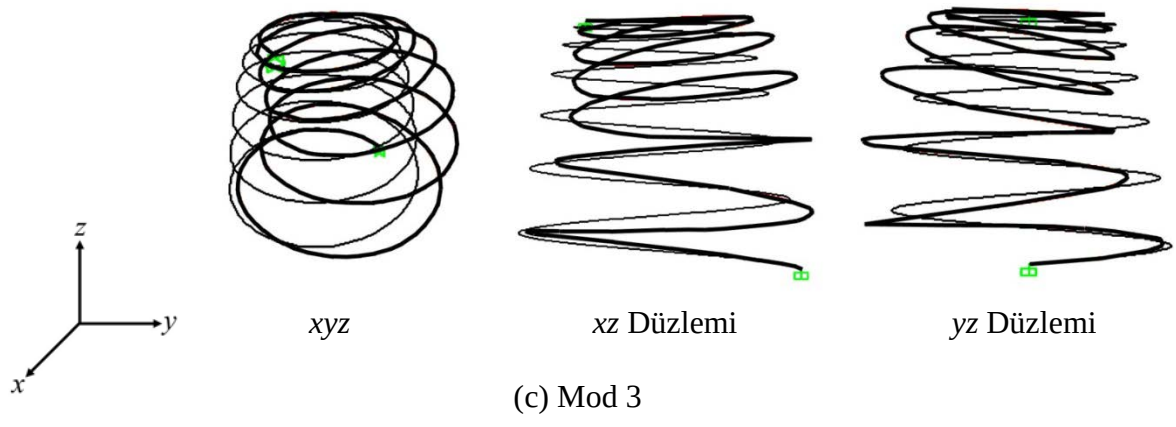
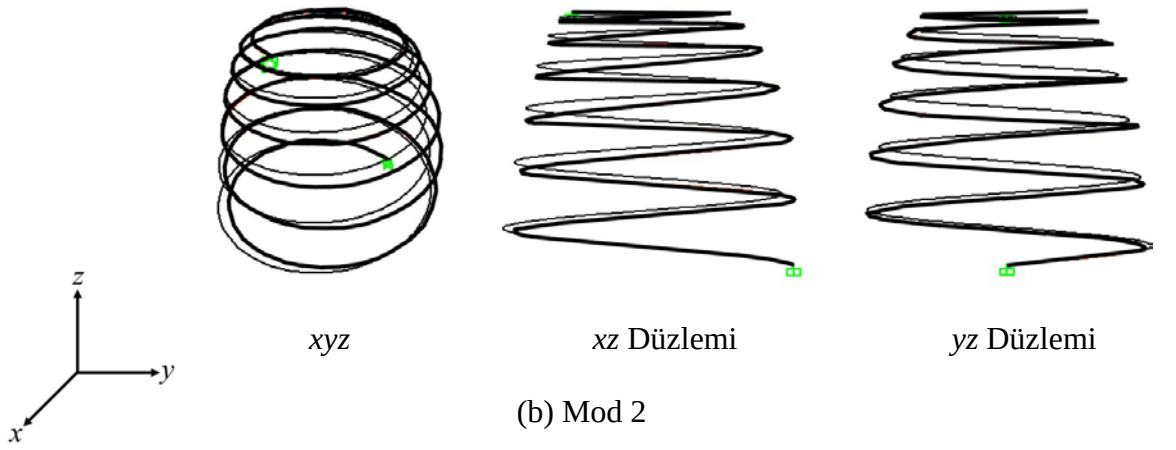
Çalışmada incelenen eleman iki ucu ankastre kare kesitli bir konik helistir(S2). Elastisite Modülü $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, Poisson Oranı $\nu = 0.3$, malzeme yoğunluğu $\rho = 7850 \text{kg/m}^3$, merkez eksen etrafındaki dönüş adedi $n = 6.5$, yükselme açısı $\alpha = 4.8^\circ$, yarıçap $R_1 = 13 \text{mm}$, helisin kare kesitinin kenarı $a = 0.23 \text{mm}$ seçilerek malzeme ve geometrik parametreler belirlendi. Bahsi geçen kesitin atalet momentleri $n_e = 2250$ için $I_t = 0.1405a^4 = 3.932 \text{ mm}^4$ olarak hesaplandı ve sonuçlar Çizelge 4.1’de belirtildi. Farklı R_2/R_1 oranları için konik helislerin doğal frekanslarındaki değişim Şekil 4.4’te gösterildi.

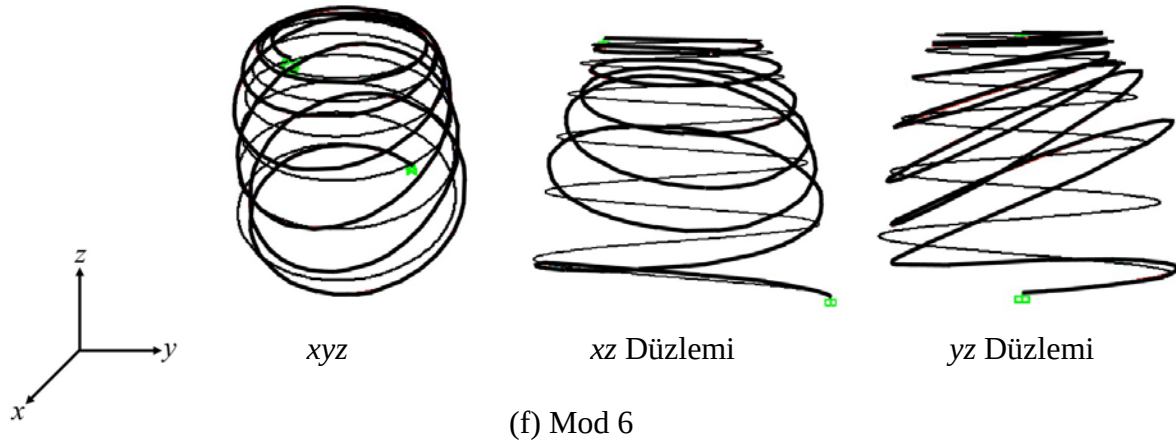


Şekil 4.4 : Doğal frekanstaki değişim değerleri.

Çözümü gerçekleştirilen problemin bir benzeri Yıldırım[26] tarafından çözülmüştür ve elde edilen sonuçlar yakın değerlerde seyretmektedir. $R_2 / R_1 = 0.5$ oranı için mod şekillerinden ilk altı tanesi Şekil 4.5’de gösterilmiştir.







Şekil 4.5 : Kare enkesit (S1) için sınır koşulu iki ucu ankastre olarak seçilmiş konik bir helisin mod şekilleri (İnce çizgi deforme olmamış geometriyi göstermektedir.)

4.3 Kıyaslama Örnekleri

Çalışmanın bu kısmında, Şekil 2.1’de görülen daireden farklı enkesite sahip silindirik olmayan helislerin serbest titreşim analizi irdelenmiştir. Elastisite Modülü $E = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, Poisson Oranı $\nu = 0.3$, malzeme yoğunluğu $\rho = 7850 \text{kg/m}^3$, merkez eksen etrafındaki dönüş adedi $n = 6.5$, yükselme açısı $\alpha = 4.8^\circ$ olarak malzeme ve geometrik parametreler belirlenmiştir. Şekil 4.1’de gösterilen daireden farklı enkesitlerin alanları sabit tutulmuştur. Fıçı (barrel) ve hiperbolik helisler için, $R_1 = 13 \text{mm}$ sabit olarak alındığında $R(\varphi)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$R(\varphi) = R_1 + (R_2 - R_1) \left(1 - \frac{\varphi}{n\pi} \right)^2 \quad (4.2)$$

4.3.1 Daireden farklı enkesite sahip ve farklı sınır koşulları altında silindirik olmayan helisler

Bahse konu olan bu problemde, daireden farklı enkesitlere (S1, S2, S3) ve farklı sınır koşullarına (iki ucu ankastre, tek ucu tutulu, iki ucu mafsallı) sahip olan silindirik olmayan helislerin doğal frekanslarının bulunmasına yoğunlaşılmıştır. Daireden farklı enkesitlerin atalet momenti Çizelge 4.1 vasıtası ile hesaplanmıştır. Farklı sonlu elemanlar ağırları (n_e) için silindirik olmayan helislerin doğal frekansları aşağıdaki tablolarda sunulmuştur.

Çizelge 4.5 : Kare enkesite (S1) ve farklı sınır koşullar sahip fıçı tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.3\text{mm}, k' = 1.2, I_t = 0.1405a^4, R_2 / R_1 = 0.5)$$

Mod	İki ucu Tutulu				Sabit mesnet				Mafsallı			
	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	295.48	296.45	296.35	296.34	66.48	85.73	87.72	87.82	157.54	180.87	183.91	184.04
2	306.16	310.53	310.45	310.45	66.77	86.08	88.08	88.18	162.11	192.58	196.27	196.43
3	307.35	378.32	385.02	385.34	136.11	136.05	136.01	136.01	287.32	321.50	322.80	322.87
4	312.80	378.35	385.03	385.35	169.17	169.11	169.05	169.06	325.89	364.22	364.77	364.79
5	547.63	550.56	550.37	550.36	191.46	337.78	343.32	343.60	389.13	449.04	452.18	452.30
6	551.18	612.37	616.62	616.85	192.33	339.05	344.57	344.84	412.58	500.97	466.94	460.39

Çizelge 4.6 : Kare enkesite (S1) ve farklı sınır koşullar sahip hiperbolik tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.3\text{mm}, k' = 1.2, I_t = 0.1405a^4, R_2 / R_1 = 2)$$

Mod	İki ucu Tutulu				Sabit mesnet				Mafsallı			
	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	89.71	91.99	92.10	92.11	25.86	33.57	34.40	34.44	46.12	42.58	42.51	42.52
2	105.16	122.76	123.73	123.76	26.24	33.67	34.43	34.47	49.71	47.31	47.45	47.47
3	110.52	128.78	131.38	131.51	52.08	52.05	52.06	52.07	90.46	118.77	120.38	120.45
4	148.81	161.09	161.87	161.92	64.19	64.37	64.37	64.37	90.62	118.88	120.63	120.72
5	195.63	203.11	203.72	203.77	74.22	109.61	111.14	111.24	135.08	153.31	153.05	153.04
6	195.77	220.96	221.18	221.18	76.82	120.20	122.12	122.23	147.14	157.23	177.33	177.32

Çizelge 4.7 : Kare enkesite (S1) ve farklı sınır koşullar sahip konik tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.3\text{mm}, k' = 1.2, I_t = 0.1405a^4, R_2 / R_1 = 0.5)$$

Mod	İki ucu Tutulu				Sabit mesnet				Mafsallı			
	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=30$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	341.99	348.42	348.49	348.52	82.05	105.87	108.34	108.46	178.82	185.80	187.76	187.88
2	357.56	397.63	398.81	398.89	82.69	106.68	109.21	109.33	188.31	204.02	206.89	207.06
3	371.94	444.23	451.73	452.14	150.97	151.45	151.52	151.53	321.23	391.38	394.99	395.16
4	414.75	458.19	464.86	465.22	234.59	236.00	236.03	236.04	342.96	415.12	419.11	419.33
5	632.87	659.20	659.86	659.92	238.61	396.24	402.43	402.73	457.34	489.82	490.30	490.41
6	653.32	722.21	727.08	727.41	241.47	404.54	415.16	415.53	486.23	563.68	560.04	552.03

Çizelge 4.8 : Kutu enkesite (S2) ve farklı sınır koşullar sahip fiçı tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.44\text{mm}, k' = 1.809, I_t = 0.0362a^4, R_2 / R_1 = 0.5)$$

Mod	İki ucu ankastre			Sabit mesnet			Mafsallı		
	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	171.18	171.11	171.11	59.86	61.27	61.34	120.19	122.00	122.08
2	295.13	299.53	299.74	60.89	62.33	62.41	150.46	153.84	153.99
3	298.61	304.49	304.79	77.88	77.86	77.86	202.58	203.79	203.86
4	320.48	320.93	320.96	188.72	188.67	188.67	282.17	283.34	283.39
5	345.33	345.22	345.24	220.59	221.86	222.00	367.42	366.97	366.93
6	437.51	439.03	439.37	233.46	233.36	233.36	386.95	377.49	374.41

Çizelge 4.9 : Kutu enkesite (S2) ve farklı sınır koşullar sahip hiperbolik tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.44 \text{ mm}, k' = 1.809, I_t = 0.0362 a^4, R_2 / R_1 = 2)$$

Mod	İki ucu ankastre			Sabit mesnet			Mafsallı		
	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	53.64	53.70	53.70	23.08	23.63	23.66	27.96	27.95	27.91
2	104.29	105.12	105.17	24.00	24.55	24.58	44.19	45.04	45.09
3	108.04	110.17	110.26	30.18	30.22	30.23	84.09	84.64	84.66
4	136.60	137.80	137.86	71.23	71.29	71.30	96.47	96.10	96.10
5	168.33	168.74	168.76	84.57	85.81	85.90	97.85	99.32	99.39
6	169.45	169.44	169.45	87.23	86.29	86.03	106.24	143.93	149.32

Çizelge 4.10 : Kutu enkesite (S2) ve farklı sınır koşullar sahip konik tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.44 \text{ mm}, k' = 1.809, I_t = 0.0362 a^4, R_2 / R_1 = 2)$$

Mod	İki ucu ankastre			Sabit mesnet			Mafsallı		
	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	201.05	201.06	201.07	73.23	74.94	74.88	121.50	122.67	122.75
2	345.53	349.03	349.22	76.40	78.17	78.25	172.23	176.27	176.48
3	360.68	367.75	368.14	88.35	88.71	88.74	262.58	264.41	264.49
4	404.22	406.62	406.76	241.80	244.43	244.74	311.69	312.21	312.26
5	457.32	457.59	457.61	262.59	262.75	262.77	386.60	389.59	389.85
6	535.32	536.49	536.57	280.28	280.66	280.69	415.27	454.03	455.85

Çizelge 4.11 : I formda enkesite (S3) ve farklı sınır koşullar sahip fıçı tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.61\text{mm}, k' = 3.719, I_t = 0.0305a^4, R_2 / R_1 = 0.5)$$

Mod	İki ucu ankastre			Sabit mesnet			Mafsallı		
	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	179.25	179.18	179.17	63.11	64.60	64.67	126.82	128.70	128.78
2	305.13	309.81	310.04	64.25	65.76	65.84	156.20	159.64	159.80
3	307.73	313.55	313.83	81.58	81.56	81.56	211.75	213.04	213.12
4	327.94	328.04	328.06	179.08	179.03	179.03	294.70	295.62	295.66
5	335.30	335.58	335.60	231.24	232.53	232.68	357.05	357.33	357.33
6	458.60	459.83	460.11	244.45	244.35	244.34	400.83	387.17	383.50

Çizelge 4.12 : I formda enkesite (S3) ve farklı sınır koşullar sahip hiperbolik tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.61\text{mm}, k' = 3.719, I_t = 0.0305a^4, R_2 / R_1 = 2)$$

Mod	İki ucu ankastre			Sabit mesnet			Mafsallı		
	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	56.24	56.30	56.30	24.33	24.90	24.93	29.57	29.52	29.52
2	107.64	108.65	108.70	25.34	25.92	25.95	44.13	44.86	44.90
3	109.66	111.61	111.69	31.69	31.74	31.74	87.41	88.03	88.05
4	140.68	141.86	141.93	67.83	67.86	67.86	98.21	99.40	99.45
5	161.33	161.77	161.80	87.83	89.15	89.24	101.14	101.17	101.20
6	177.82	177.88	177.89	91.43	90.50	90.23	112.21	149.65	154.30

Çizelge 4.13 : I formda enkesite (S3) ve farklı sınır koşullar sahip konik tipli helisin doğan frekansları (Hz)

$$(a = 2.61\text{mm}, k' = 3.719, I_t = 0.0305a^4, R_2 / R_1 = 0.5)$$

Mod	İki ucu ankastre			Sabit mesnet			Mafsallı		
	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$	$n_e=50$	$n_e=100$	$n_e=150$
1	210.37	210.38	210.39	77.03	78.68	78.75	128.25	129.49	129.56
2	357.88	361.84	362.06	80.47	82.31	82.41	176.40	180.28	180.49
3	367.96	374.73	375.10	92.64	93.04	93.07	273.44	275.43	275.52
4	419.62	421.72	421.84	249.44	249.53	249.54	325.52	325.71	325.74
5	436.39	437.03	437.07	253.33	256.13	256.46	378.32	381.66	381.93
6	559.65	560.75	560.82	293.50	293.96	293.97	432.49	461.55	461.50

Silindirik olmayan helislerin türleri göz önüne alındığında, bu helislerin enkesit ve sınır koşulları hakkında aşağıdaki kanılara varılabilir:

- 1- Farklı sınır koşulları altında hiperbolik, fıçı (barrel) ve konik helislerin birinci doğal frekanslarının karşılaştırılması ile ilgili:
 - a. İki ucu tutulu sınır koşulu için: Hiperbolik helisin birinci doğal frekansı fıçı (barrel) helisten %69 ve konik helisten ise %74 daha düşük çıkmaktadır.
 - b. Tek ucu tutulu sınır koşulu için: Hiperbolik helisin birinci doğal frekansı fıçı (barrel) helisten %61 ve konik helisten ise %68 daha düşük çıkmaktadır.
 - c. İki ucu mafsallı sınır koşulu için: Hiperbolik helisin değeri sıfırdan farklı olan birinci doğal frekansı ayrı ayrı fıçı (barrel) helisten ve konik helisten %77 daha düşük çıkmaktadır.

Ortaya çıkan sonuçlar S1, S2 ve S3 enkesitleri için geçerlidir.

- 2- S1, S2, S3 enkesit ve farklı sınır koşulları ile helislerin birinci doğal frekanslarının karşılaştırılması ile ilgili:
 - a. İki ucu tutulu sınır koşulu için: S1 kesitli helislerin birinci doğal frekansları S2 kesitli helislerden %73 ve S3 kesitli helislerden ise %65 daha yüksek çıkmaktadır.
 - b. Tek ucu tutulu sınır koşulu için: S1 kesitli helislerin birinci doğal frekansları S2 kesitli helislerden %45 ve S3 kesitli helislerden ise %37 daha yüksek çıkmaktadır.
 - c. İki ucu mafsallı sınır koşulu için: S1 kesitli helislerin sıfırdan farklı birinci doğal frekansları S2 kesitli helislerden %52 ve S3 kesitli helislerden ise %44 daha yüksek çıkmaktadır.

Ortaya çıkan sonuçlar fıçı (barrel), hiperbolik ve konik helisler için geçerlidir.

4.3.2 Çeşitli R_2/R_1 oranları altında daireden farklı enkesite sahip hiperbolik ve konik helisler

Bu örnekte, farklı R_2/R_1 oranlar, S2, S3 tipteki enkesitler ve iki ucu ankastre ile tek ucu tutulu hiperbolik ve konik helislerin doğal frekanslarının hesabı irdelenmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15’de gösterilmektedir. Yarıçap oranları

$R_2/R_1 = 1.2$ ve 2.4 olduğu durumlar için hiperbolik helislerle ilgili aşağıdaki değerlendirmeler elde edilmiştir:

- 1- İki ucu tutulu sınır koşulu için: Birinci doğal frekans %57 düşmüştür.
- 2- Tek ucu tutulu sınır koşulu için: Birinci doğal frekans %49 düşmüştür.

Yarıçap oranları $R_2/R_1 = 0.5$ ve 0.9 olduğu konik helisler göz önüne alındığında, her iki sınır koşulu için (iki ucu ankastre ve tek ucu tutulu) birinci doğal frekans %37 düşmüştür. Ortaya çıkan sonuçlar S2 ve S3 enkesitleri için geçerlidir.

Çizelge 4.14 : Çeşitli R_2/R_1 oranları için hiperbolik ve konik helislerin altı doğal frekanslarının (Hz) değişimi

$$(a = 2.44 \text{ mm}, k' = 1.809, I_t = 0.0362 a^4, n_e = 100)$$

R_2/R_1		Kutu kesit (S2)											
		İki uculu tutulu						Sabit mesnetli					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Hiperbolik Helis	1.2	96.91	175.36	185.79	209.89	250.34	279.44	37.65	38.76	50.06	120.53	140.76	148.30
	1.6	71.03	133.77	141.75	168.62	206.17	215.01	29.53	30.54	38.63	92.09	109.14	113.13
	2.0	53.70	105.13	110.17	137.80	168.74	169.44	23.63	24.55	30.22	71.29	85.81	86.29
	2.4	41.84	84.65	87.40	113.95	136.60	138.40	19.26	20.11	24.12	56.30	66.73	69.57
	0.5	201.06	349.03	367.75	406.62	457.59	536.49	74.94	78.17	88.71	244.43	262.75	280.66
Konik Helis	0.6	177.77	311.36	327.79	362.05	413.37	483.37	66.42	68.97	80.57	224.64	229.76	253.04
	0.7	157.86	278.53	293.03	323.54	373.14	435.54	59.14	61.19	73.59	201.13	206.53	228.19
	0.8	140.94	249.95	262.81	290.15	336.76	392.60	52.89	54.55	67.45	176.57	189.92	205.97
	0.9	126.55	225.03	236.58	261.19	304.10	354.33	47.52	48.89	61.98	155.67	174.71	186.21

Çizelge 4.15 : Çeşitli R_2/R_1 oranları için hiperbolik ve konik helislerin altı doğal frekanslarının (Hz) değişimi

$$(a = 2.61 \text{ mm}, k' = 3.719, I_t = 0.0305 a^4, n_e = 100)$$

R_2/R_1		I formda enkesit (S3)											
		İki uculu tutulu						Sabit mesnetli					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Hiperbolik Helis	1.2	101.58	181.77	189.80	217.97	238.47	293.02	39.70	40.93	52.50	114.45	147.64	155.45
	1.6	74.47	138.49	144.13	174.45	196.96	225.63	31.13	32.24	40.53	87.57	114.48	117.80
	2.0	56.30	108.65	111.61	141.86	161.77	177.88	24.90	25.92	31.74	67.86	89.15	90.50
	2.4	43.86	87.32	88.29	116.58	132.88	143.69	20.28	21.23	25.34	53.61	69.22	72.98
Konik Helis	0.5	210.38	361.84	374.73	421.72	437.03	560.75	78.68	82.31	93.04	249.53	256.13	293.96
	0.6	186.08	322.71	334.66	375.93	394.12	506.01	69.91	72.68	84.47	218.14	235.41	265.05
	0.7	165.31	288.65	299.56	336.21	355.41	456.25	62.29	64.52	77.14	190.93	216.47	239.06
	0.8	147.63	259.03	268.90	301.67	320.58	411.42	55.73	57.56	70.70	167.60	199.09	215.83
	0.9	132.58	233.23	242.21	271.65	289.40	371.40	50.10	51.61	64.96	147.74	183.18	195.16

5- SONUÇ

Fıçı (barrel), hiperbolik ve konik tipteki silindirik olmayan helisler bu çalışma içerisinde karışık sonlu elemanlar metodu ile analiz edilmiştir. Bu çalışmada kullanılan sonlu elemanlar formülasyonu Omurtag ve Aköz[4] tarafından elde edilen fonksiyonu temel almaktadır. Eleman matrisinin türetilmesi için, Timoshenko kiriş teorisi kesin bir silindirik helis geometrisine dayanarak uygulanmıştır. Silindirik olmayan helis geometrisi, sonlu elemanlar interpolasyonu aracılığıyla elde edilen değiştirilmiş eğrilikler kullanılarak oluşturulmuştur. Bu eleman 2x12 serbestlik dereceli 2 düğüm noktasından oluşmaktadır. Hesaplamalar sırasında daireden farklı enkesitler (Kare -S1, Kutu kesit -S2, I formülü kesit-S3) ve farklı sınır koşulları (İki ucu tutulu, Tek ucu tutulu, İki ucu mafsallı) kullanılmıştır. Daireden farklı enkesitlerin burulma rijitliğini hesaplamak için sonlu elemanlar algoritması kullanılmıştır. Daireden farklı enkesitlerin kesme kuvveti düzeltme katsayısı ayrıca hesaplanmış ve sonlu elemanlar analizinde kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlarda, kare enkesitli (S1) helislerin doğal frekanslarının kutu kesitli (S2) ve I formülü enkesitli (S3) helislere göre daha büyük çıkmıştır. Hiperbolik helisin doğal frekansı ise daireden farklı enkesitler ve farklı sınır koşulları altında fıçı (barrel) ve konik tipteki helislerden daha düşük çıkmıştır. İki ucu tutulu silindirik olmayan helislerin doğal frekansları, tek ucu tutulu ve iki ucu mafsallı silindirik olmayan helislerden yüksek çıkmıştır. Son değerlendirme olarak, R_2/R_1 oranının artması ile orantılı hiperbol ve konik helislerin doğal frekansları azalmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Steinhaus, H.** (1999). *Mathematical Snapshots (3.Basım)*. Courier Dover Publications.
- [2] **Castellano1, M. G., Infanti, S., Baldo, P. ve Kaya, M.** (2008). *Köprülerin Sismik İzolasyonunda İtalyan Tecrübesi*. İnşaat Mühendisleri Odası e-kütüphane Yayınları: İstanbul.
- [3] **Bayar, S.** (2007). *Timoshenko çubuk kuramına göre, değişken kesitli, silindirik olmayan, helisel çubukların karışık sonlu elemanlar metodu ile statik analizi*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı.
- [4] **Omurtag, M.H. ve Aköz, A.Y.** (1992). *The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading*, Comput. Struct., 43(2): 325-331.
- [5] **Saygun, A., Omurtag, M.H., Orakdöğen, E., Girgin, K., Küçükarslan, S. ve Darılmaz, K. A.** (2007). *Simplified solution of the torsional rigidity of the composite beams by using FEM*, Advances in Structural Engineering, 10(5): 467-473.
- [6] **Holmes, A.M.C.** (1957). *Analysis of helical beams under symmetrical loading*, J. Struct. Engng., ASCE, 83(6):1-37.
- [7] **Scordelis, A.C.** (1960). *International forces in uniformly loaded helicoidal girders*, ACI Jnl., 31:1013-1026.
- [8] **Wittrick, W.H.** (1966). *On elastic wave propagation in helical springs*, International Journal of Mechanical Sciences, 8 (1):25-47.
- [9] **Cinemre, V.** (1960). *Transfer matrix method for the static analysis of helical bars (in Turkish)*, Ph.D. Thesis, Technical University of Istanbul, Faculty of Civil Engineering.
- [10] **Stefanou, G.D.** (1984). *Simplified discrete method for the design of helical rectangular beams of very large width*, Comput. Struct., 28: 225-234.
- [11] **Yu, A.M. ve Hao, Y.** (2011). *Free vibration analysis of cylindrical helical springs with noncircular cross-sections*, Journal of Sound and Vibration, 330: 2628-2639.
- [12] **Haktanır, V. ve Kırıl, E.** (1993). *Statical analysis of elastically and continuously supported helicoidal structures by the transfer and stiffness matrix methods*, Comput. Struct., 49(4): 663-677.
- [13] **Haktanır, V.** (1995). *The complementary functions method for the element stiffness matrix of arbitrary spatial bars of helicoidal axes*, Int. J. Num. Meth. Engng., 38: 1031-1056.

- [14] **Busool, W. ve Eisenberger, M.** (2001). *Exact static analysis of helicoidal structures of arbitrary shape and variable cross section*, J. Struct. Engng., ASCE, 127(11): 1266-1275.
- [15] **Love, A.E.M.** (1899). *The propagation of waves of elastic displacement along a helical wire*, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 18: 364-374.
- [16] **Epstein, I.** (1947). *The motion of conical coil springs*, Journal of Applied Physics, 18: 368-374.
- [17] **Yoshimura, Y. ve Murata Y.** (1952). *On the elastic waves propagated along coil springs*, 6(1), Institute of Science and Technology, Tokyo University.
- [18] **Mottershead, J.E.** (1980). *Finite elements for dynamical analysis of helical rods*, Int. J. Mech. Sci., 2(1): 267-283.
- [19] **Wittrick, W.H.** (1966). *On elastic wave propagation in helical spring*, Int. J. Mech. Sci., 8: 25-47.
- [20] **Nagaya, K., Takeda, S. ve Nakata, Y.** (1986). *Free vibration of coil springs of arbitrary shape*, Int. J. Num. Meth. Engng., 23: 1081-1099.
- [21] **Lin, Y. ve Pisano, A.P.** (1987). *General dynamic equations of helical springs with static solution and experimental verification*, J. Appl. Mech., 54: 910-917.
- [22] **Jiang, W., Jones, W.K., Wang, T.L. ve Wu, K.H.** (1991). *Free vibrations of helical springs*, J. Appl. Mech., 58: 222-228.
- [23] **Xiong, Y. ve Tabarrok, B.** (1992). *A finite element model for the vibration of spatial rods under various applied loads*, Int. J. Mech. Sci., 34(1): 41-51.
- [24] **Yıldırım, V.** (1996). *Investigation of parameters affecting free vibration frequency of helical springs*, Int. J. Num. Meth. Engng., 39(1): 99-114.
- [25] **Yıldırım, V. ve İnce N.** (1997). *Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape*, Journal of Sound and Vibration, 204(2): 311-329.
- [26] **Yıldırım, V.** (1997). *Free vibration analysis of non-cylindrical coil springs by combined use of the transfer matrix and complementary functions methods*, Communications in Num. Meth. Engng., 13: 487-494.
- [27] **Yıldırım, V.** (1998). *A parametric study on the free vibration of non-cylindrical helical springs*, Journal of Applied Mechanics, ASME, 65: 157-163.
- [28] **Yıldırım, V.** (2002). *Expressions for predicting fundamental natural frequencies of non-cylindrical helical springs*, Journal of Sound and Vibration, 252(3): 479-491.
- [29] **Busool, W. ve Eisenberger, M.** (2002). *Free vibration of helicoidal beams of arbitrary shape and variable cross section*, Journal of Vibration and Acoustics, 124: 397-409.

- [30] **Eisenberger, M.** (1990). *Exact static and dynamic stiffness matrices for general variable cross section members*, AIAA J., 28: 1105-1109.
- [31] **Girgin, K.** (2006). *Free vibration analysis of non-cylindrical helices with, variable cross-section by using mixed FEM*, Journal of Sound and Vibration, 297: 931-945.
- [32] **Lee, J.** (2007). *Free vibration analysis of cylindrical helical springs by the pseudospectral method*, Journal of Sound and Vibration, 302: 185-196.
- [33] **Lee, J.** (2007). *Free vibration analysis of non-cylindrical helical springs by the pseudospectral method*, Journal of Sound and Vibration, 305: 543-551.
- [34] **Yu, A. ve Yang, C.** (2010). *Formulation and evaluation of an analytical study for cylindrical helical springs*, Acta Mechanica Sinica, 23(1): 85-94.
- [35] **Reddy, J.N. ve Oden, J.T.** (1975). *Mixed finite element approximation of linear boundary value problems*, Quar. Appl. Math.: 255-280.
- [36] **Aköz, A.Y., Omurtag, M.H. ve Doğruoğlu, A.N.** (1991). *The mixed finite element formulation for three dimensional bars*, Int. J. Solids Struct., 28: 225-234.
- [37] **Sokolnikoff, I.S.** (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [38] **Fung, Y.C. ve Pin Tong** (2001). *Classical and Computational Solid Mechanics*, World Scientific.
- [39] **Timoshenko, S. ve Goodier, J.N.** (1969). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [40] **Özmen, G.** (2004). *Solution of partial differential equations with spreadsheet, (inTurkish)*, İMO Technical Journal, 217: 3235-3248.
- [41] **Salvadori, M.G. ve Baron, M.L.** (1961). *Numerical Methods in Engineering*, Prentice-Hall Inc., New Delhi.
- [42] **Hermann, L.R.** (1965). *Elastic torsional analysis of irregular shapes*, J. Engng. Mech., ASCE, 91(6): 11-19.
- [43] **Kikuchi, N.** (1986). *Finite Element Methods in Mechanics*, Cambridge Press, Cambridge, New York.
- [44] **Zienkiewicz, O.C.** (1986). *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London.
- [45] **Li, Z, Ko, J.M. ve Ni, Y.Q.** (2000). *Torsional rigidity of reinforced concrete bars with arbitrary sectional shape*, Finite Elements in Analysis and Design, 35(4): 349-361.
- [46] **El-Fatmi, R. ve Zenzri, H.** (2004). *A numerical method for the exact elastic beam theory. Applications to homogeneous and composite*

beams, International Journal Solids and Structures, 41(9-10): 2521-2537.

- [47] **Oden, J.T. ve Reddy, J.N.** (1976). *Variational Method in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin
- [48] **Kühnel, W.** (2002). *Differential geometry, Student Mathematical Library*, 16, Providence, R.I.: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-2656-0, MR1882174
- [49] **Haktanır, V., ve Kırıl, E.** (1989). *Helisel Çubukların Statik Davranışının Rijitlik Matrisi Metodu İle İncelenmesi*, Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi, 4/1, 57-71.
- [50] **İnan, M.** (2001). *Cisimlerin Mukavemeti*, 8.Baskı, İTÜ Vakfı Yayınları, ISBN 975-7463-05-01

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Süleyman Onur KARACA

Doğum Yeri ve Tarihi: Ankara / 1986

Adres: Atakent Mah. 2.Etap A206 D:51 Küçükçekmece / İstanbul

E-Posta: suleymanonurkaraca@gmail.com

Lisans: YTÜ – İnşaat Mühendisliği Bölümü

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

Haz 09 – Devam Ediyor

Şirket Adı: TRICORP Mühendislik ve Danışmanlık A.Ş. – İstanbul

Pozisyon: Uluslararası Projeler Koordinatörü (2010 – Devam Ediyor)
İş Geliştirme Uzmanı (2009 – 2010)

Mart 11 – Mart 12

Şirket Adı: İsk. Bak. Onr. ve İsk.K.Lığı

Pozisyon: Keşif Subayı, Pl.Prog.K.Ks.A.lığı

Ekim 05 – Haz 09

Pozisyon: Stajyer Mühendis ve Diğer Tecrübeler

Şirketler:

ENKA İnşaat ve Sanayi A.Ş. – Moskova, Rusya

Bayındırlık ve İskan Bakanlığı – İstanbul

Project Mühendislik – İstanbul

Doğuş – Gülermak Ortaklığı – İstanbul

İBB Raylı Sistemler Müdürlüğü – İstanbul

TOKİ – İstanbul

AVE Amusement – New Jersey, ABD

Morey's Piers – New Jersey, ABD

City's Nişantaşı, Gülaylar Grup – İstanbul

SUN Gay.Değ. ve Dan. Ltd. – İstanbul