İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KEYFİ DOĞRULTUDA ORTOTROP PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN MİNDLİN PLAKLARININ SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Akif KUTLU

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2007

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KEYFİ DOĞRULTUDA ORTOTROP PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN MİNDLİN PLAKLARININ SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Akif KUTLU
(501051010)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Mayıs 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 2007

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. Mehmet H. OMURTAG**

Diğer Jüri Üyeleri **Prof.Dr. Hasan ENGİN (İ.T.Ü.)**

Prof.Dr. Faruk Yükseler (Y.T.Ü.)

Haziran 2007

ÖNSÖZ

Her zamanki gibi bu tez çalışmam sırasında da gerek maddi gerek manevi desteğini benden esirgemeyen, bana kendisiyle çalışma fırsatını tanıyan, bana güvenen, bana çalışmayı ve birçok şeyi öğreten, değerli bilgi ve tecrübelerini bana aktaran Hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG' a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Tez çalışmam esnasında birçok yardımını gördüğüm Hocam Sayın Doç. Dr. Engin Orakdöğen' e saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Değerli katkılarını gördüğüm Hocam Doç. Dr. Nihal Eratlıya, yardımlarını benden esirgemeyen mesai arkadaşlarım Araş. Gör. Murat Yılmaz'a, Araş. Gör. Aydın Özmutlu' ya ve Araş Gör. Faik Kara ya destekleri için teşekkür ederim. Çalışmanın son zamanlarında beni anlayışla karşılayan Hocalarım Prof. Dr. Mehmet Bakioğlu ve Prof. Dr. Hasan Engin' e teşekkür ve saygılarımı sunarım. Yüksek lisans çalışmam sırasında beni bursuyla destekleyen TÜBİTAK BİDEB'e ve İTÜ BAP birimine de yüksek lisans tezimi projelendirme şansı verdikleri ve sağladıkları destekler sebebiyle teşekkür ederim.

Herşeyime olduğu gibi bu çalışmaya da gerçek anlamını veren Tubama varlığı için teşekkür ederim.

MAYIS 2007 Akif KUTLU

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

Sayfa

No

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

i, j, k	:Latin indisleri 1, 2, 3 değerlerini alır.
α, β	:Grek indisleri 1, 2 değerlerini alır.
x_i	:Koordinat eksenleri
dx_i	:Diferansiyel eleman boyu
ε_{ij}	:Birim şekil değiştirme bileşenleri
σ_{ij}	:Gerilme bileşenleri
u_i	:Plak orta düzlemindeki yer değiştirmeler
$\bar{u}_i$	:Yer değiştirme bileşenleri
P, N, Q	:Normal kuvvetler ve düzlem içi kayma kuvveti
F, H	:Kesme kuvvetleri
K, M, T	:Eğilme momentleri ve burulma momenti
f_i	:Dış kuvvetler
m_α	:Dış momentler
p	:Zemin tepki kuvveti
h	:Plak kalınlığı
υ	:Poisson oranı
E	:Elastisite modülü
δ_{ij}	:Kronecker deltası
γ_{ij}	:Kama açısı
Ω_α	:Dönme açıları
G	:Kayma modülü
V_α	:Zemin kesme kuvvetleri
k	:Zemin yataklanma katsayısı
$\mathbf{L}$	:Türev operatörü
$\mathbf{y}$	:Serbest değişken
$\mathbf{f}$	:Kuvvet vektörü
$\mathbf{P}$	:Potansiyel operatör
$I(\mathbf{y})$	:Fonksiyonel
$\mathbf{B}$	:Sınır koşullarını temsil eden operatör
Γ	:Sınır koşulları
$\hat{N}_i$	:Şekil fonksiyonları
$\mathbf{J}$	:Jakobiyen
$\bar{x}_{ij}$	:Dörtgen eleman koordinatları
$[\mathbf{k}]$	:Eleman matrisi
$[\mathbf{m}]$	:Eleman yayılı kütle matrisi

KEYFİ DOĞRULTUDA ORTOTROP PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN MİNDLİN PLAKLARININ SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, birçok mühendislik uygulamasında karşılaşılan zemin-plak etkileşimi problemini dinamik açıdan incelemektir. Bunun için nispeten kalın plaklar için önerilmiş Mindlin kuramı ile homojen olmayan zemini kayma etkilerini de gözeten Pasternak zemin modeli kullanılmıştır. Bildiğimiz kadarıyla, litertürde hiç incelenmemiş olan, zemin ortamının keyfi doğrultuda ortotropiye sahip olduğu ve ortotropinin değişimine göre plak serbest titreşimin nasıl etkileneceği karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak ele alınmıştır.

Winkler (1867) tarafından önerilen zemin modeli zemini birbirinden bağımsız yan yana duran yaylar şeklinde tanımlamaktadır. Yaylar çökme ile doğrusal olarak basınç tepkisi vermekte bu esnada her biri birbirinden bağımsız hareket etmektedir. Burada zemin yay sabiti gibi tek bir parametreye bağlı olarak tarif edilmektedir. Yaylar arasında etkileşimi göz önüne alan iki parametreli zemin modelleri zemin ortamını daha gerçekçi bir şekilde modellemektedir. Bu modeller arasından **Filonenko-Borodich (1940)**, **Pasternak (1954)** ve **Vlasov-Leont'ev (1966)** zemin modelleri sayılabilir. Özel olarak kayma etkisi ihmal edildiğinde model Winkler zemini gibi davranmaktadır.

Nispeten kalın plaklar için geliştirilen kuramlar içinde **(Reissner, 1945)** ve **(Mindlin, 1951)** plakta kayma etkisini basit bir kabulle göz önüne almaktadır. Bu çalışmada kullanılacak Mindlin plak kuramında kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmeleri kesit boyunca sabit bir kayma açısıyla göz önüne alınmaktadır.

Geliştirilen eleman plak ve keyfi doğrultuda ortotropiye sahip zemin davranışını birlikte barındırmaktadır. Sonlu eleman çözümü için Fortran programlama dilinde bir program kullanılmıştır. Çözümler ilk önce statik zeminsiz problemlerde yapılarak literatür karşılaştırılması yapılmış, daha sonra zeminli ve zeminsiz dinamik problemler çözülerek eleman ve kütle matrisleri doğrulanmıştır. Daha sonra ise burada yapılan çalışmanın sonucu olarak özgün çözümlemeler keyfi doğrultuda ortotropiye sayip zemin-Mindlin plak etkileşimi için yapılmıştır.

FREE VIBRATION ANALYSIS OF MINDLIN PLATES INTERACTING WITH ARBITRARY DIRECTIONAL ORTHOTROPIC PASTERNAK FOUNDATION VIA MIXED FINITE ELEMENT METHOD.

SUMMARY

The main purpose of this study is to deal with the plate-foundation interaction problem, which is often faced in the engineering applications in dynamic aspect. Mindlin plate theory which is suggested for moderately thick plates and Pasternak foundation model which considers the shear influence in foundation continuum. According to our knowledge there exists no study in literature about arbitrary directional ortotropy in foundation, here we will examine the free vibration of mindlin plates on such a type foundation by mixed finite element method to observe how the vibration of plate is effected by the direction of ortotropy.

The first mechanical model suggested by **Winkler (1867)** for foundation was based on the assumption of separate springs placed side by side and reacting proportional to the deflection at that point. Hence the foundation is modelled only using one parameter which can be called as a spring constant. There exist also two parameter models, such as **Filonenko-Borodich (1940)**, **Pasternak (1954)** and **Vlasov-Leont'ev (1966)**. If we ignore the shear effect in Pasternak foundation which is used in this study returns directly to the Winkler model.

Theories developed for thick plates such as **Reissner, (1945)** and **Mindlin, (1951)** considers the shear effect with a simple assumption. In Mindlin plate theory it is assumed that there is a constant shear angel along the transverse direction.

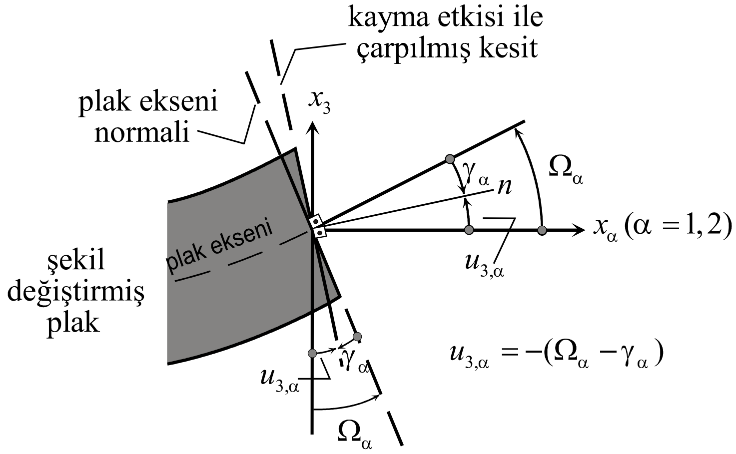
The element developed in this study simulates plate behavior with the including of the foundation. For the finite element calculations a computer program was developed in Fortran codes. In order to verify the element and mass matrices, first static and dynamic problems existing in the literature are solved. Convergence tests were carried on. Finally, as an original example, a free vibration of Mindlin plate resting on arbitrarily orthotropic Pasternak foundation was carried on.

1 GİRİŞ

1.1 Mindlin Plağı

Taşıyıcı sistemler içerisinde önemli bir yer tutan plaklar kalınlıkları diğer iki boyutu yanında küçük olan düzlemsel elemanlardır. Kalınlıklarının orta düzlemleriyle tarif edilen plaklar esas olarak bu düzleme dik olarak yüklenmektedirler. Birçok mühendislik yapısında karşılaşılan plak elemanlara örnek olarak yapı sistemlerinde kullanılan döşemeler ve temeller, sıvı basıncına maruz çelik plaklardan oluşan gemi elemanları, modern hava taşıtlarının parçaları, çeşitli türbin ve silo tarzı yapı elemanları sayılabilirler **(Timoshenko ve Krieger, 1959)**. Bu kadar geniş bir kullanım alanına sahip olan plaklar hakkında günümüze kadar yapılmış ve yapılmakta olan birçok çalışma mevcuttur.

İlk kez 1811 yılında Lagrange tarafından denklemi elde edilen klasik plak kuramının çözümü ilk olarak Kirchhoff tarafından yapılmıştır **(Timoshenko ve Krieger, 1959)**. Plak kesitinde kayma açısını ihmal eden klasik plak kuramı kayma etkisinin az olduğu ince plaklarda yeterli yaklaşıklığı sağlarken, plak kalınlığının nispeten artınca çözümler gerçekten uzaklaşmaya başlar. Plak kalınlığının plak kısa kenarına oranının 1/20 mertebesinden büyük olması halinde nispeten kalın olarak değerlendirilebilecek plaklar için kesitte kayma etkisini göz önüne alan çeşitli kuramlar geliştirilmiştir. Bu tip plaklar için **Reissner (1945)** ve **Mindlin (1951)** tarafından geliştirilmiş kuramlarda plak kalınlığı doğrultusunda sabit bir kayma açısı olduğu varsayılır. Geniş açıklama için **Panc (1975)** den yararlanılabilir (Bakınız Şekil 1.1). Kesitte kayma etkisini gözeten diğer çalışmalar arasında **Nelson ve Lorch, (1974)**, **Reissner (1975)**, **Levinson (1980)**, **Reddy (1984)**, **Yuan ve Miller (1992)**, **Reddy (1999)** sayılabilir.



Şekil 1.1: Mindlin-Reissner Plağında eğilme

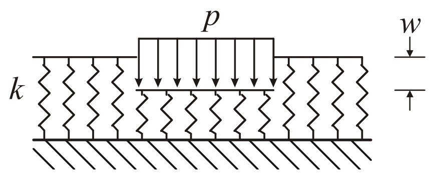
Literatürde Mindlin plaklarıyla ilgili ilk analitik çalışma Lévy plaklarında **Cooke ve Levinson (1983)** tarafından yapılmıştır. **Wang ve *ark.* (1999)**, **Cooke ve Levinson (1983)** tarafından sunulan çözümün hatalı olduğunu söylemişler, **Lee ve *ark.* (2002)** çalışmalarında bunun sebeplerini ortaya koymuşlardır. **Salerno ve Goldberg (1960)** yine Lévy plaklarında bu kez Reissner plak teorisine göre analitik çözüm sunmuşlardır. **Kant ve Hinton (1980)** tarafından sunulan çözümler en sık kullanılan doğrulama ve karşılaştırma çalışması olarak gösterilebilir.

Mindlin plak kuramı için önerilen çözüm yöntemlerinin büyük bir kısmı sayısal esaslara dayanmakta olup, önemli bir kısmı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılmış çalışmalardır. Sonlu elemanlarla ilgili ilk çalışmalar arasında **Huang ve Hinton (1984)**, **Bergan ve Wang (1984)**, **Hinton ve Huang (1986)** sayılabilirler. **Yuan ve Miller (1992)** geliştirdikleri yer değiştirme tabanlı dikdörtgen elemanla yayılı yük altında basit ve ankastre mesnetli plaklarda kilitlenme problemi olmadan çözümler yapmışlardır. **Dong ve *ark.* (1993)** modifiye Hellinger-Reissner fonksioneliyle geliştirdikleri melez (hybrid) elemanla yine kilitlenme problemi olmadan hem yer değiştirmelerde hem de kuvvet tipi büyüklüklerde gerçekçi sonuçlar elde etmişlerdir.

Mindlin plağının serbest titreşimiyle ilgili yine önemli analitik ve sayısal pek çok çalışma mevcuttur. **Srinivas ve *ark.* (1970)** üç boyutlu lineer elastisite teorisini kullanarak küçük şekil değiştirme kabulünde dört tarafı basit mesnetli dikdörtgen plaklar için kesin çözüm sunmuşlardır. **Cheung ve Chakrabarti (1972)** sonlu katman yöntemini kullanarak çeşitli sınır koşuları için kalın plaklarda serbest titreşim problemini incelemişlerdir. Sonlu şerit yöntemiyle **Dawe (1978)** ince ve kalın dikdörtgen plakların serbest titreşimini Mindlin teorisine göre incelemiştir. **Dawe ve *ark.* (1980)** Rayleigh-Ritz yöntemini kare plaklara uygulayarak çeşitli sınır koşulları altında plak doğal titreşim frekanslarını hesaplamışlardır. Dairesel Mindlin plaklarıyla ilgili olarak **Irie ve *ark.* (1979)** transfer matrisi yöntemini kullanmışlar ve plak boyunca kalınlığında değişmesini göz önüne alarak çeşitli problemler için sonuçlar üretmişlerdir.

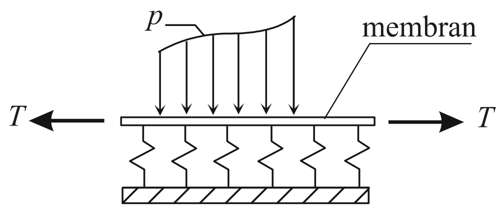
1.2 Elastik Zemin Modelleri

Mühendislik uygulamalarında sıkça karşılaşılan yapı-zemin etkileşimi günümüzde hala güncelliğini koruyan mühendislik araştırma alanlarından birisidir. Radye temeller, demir yolu traversleri, zeminle etkileşim halindeki depo ve silolar bu tip uygulamalara örnek olarak gösterilebilirler. Yapı ile etkileşim halindeki zemin için çeşitli mekanik modeller sunulmuştur. Bunlardan en basiti **Winkler (1867)** tarafından önerilen zemin modelidir. Bu modelde zemin birbirinden ayrık yan yana duran yaylar şeklinde tarif edilmiş, yani sürekli şekilde yan yana duran yayların birbirinden bağımsız çalıştığı düşünülmüştür. Zeminde meydana gelen w çökmesi ile birlikte meydan gelen p basıncı arasındaki doğrusal ilişki $p(x,y) = kw(x,y)$ olmakta, burada zemin tipine bağlı olarak verilen yataklanma katsayısı k ile zemin, yapının altında olan bir yay bölgesi gibi tarif edilmektedir (Bakınız Şekil 1.2).



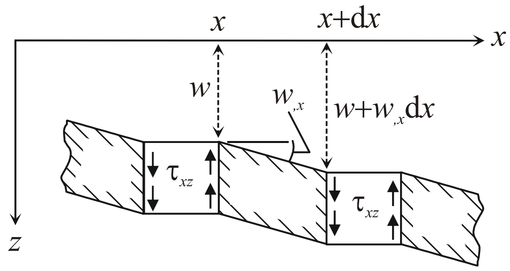
Şekil 1.2: Winkler zemini mekanik modeli

Şekil 1.2 de görüldüğü yayların birbirinden bağımsız düşünülmesi zeminin gerçekçi bir modelini oluşturmaktan uzaklaşılmasına sebep olmaktadır. Bu problemi aşmak için zeminin yarısonsuz bir ortam olduğunu düşünmek bir çözüm olsa da getirdiği matematiksel zorluklar açısından mühendislik uygulamaları için pek uygun olduğu söylenemez. Yaylar arasında belli bir etkileşim tarif etmek amacıyla **Filonenko-Borodich (1940)** yay elemanlarının tepe noktalarında sabit T çekme kuvvetini taşıyan bir elastik membran önermiştir (Bakınız Şekil 1.3). Söz konusu modelde çökme foksiyonu ile basınç arasındaki ilişki ise $p = kw - T\nabla^2 w$ şeklinde verilmiştir.



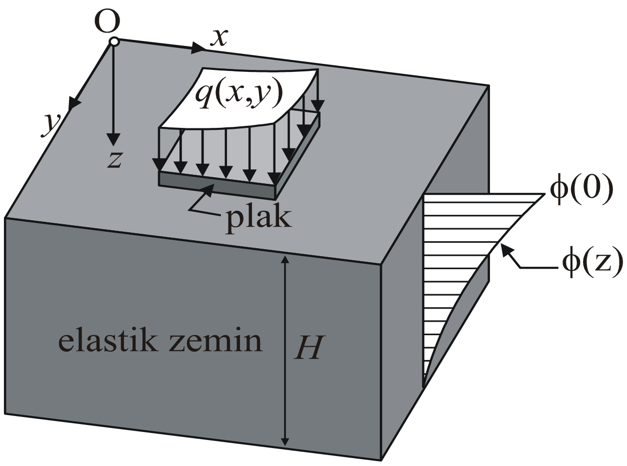
Şekil 1.3: Filonenko-Borodich zemin modeli

Yaylar arasında kayma etkisini gözeten iki parametreli bir zemin modeli de **Pasternak (1954)** tarafından önerilmiştir. Bu da yay elemanları arasında kayma etkileşiminin olduğu varsayımına dayanır (Bakınız Şekil 1.4). Yaylar arasındaki bu kayma tabakası sayesinde aralarındaki etkileşim sağlanmış olmaktadır. Yaylar arası etkileşimin ihmal edilirse Pasternak zemin modeli özel bir hali olan Winkler zeminine dönüşür.



Şekil 1.4: Pasternak zemin modelinde kayma etkileşimi

Vlasov (1949) ve **Vlasov-Leont'ev (1966)** tarafından önerilen başka bir zemin modelinde zemin derinliğince çökmenin dağılımı üçüncü bir γ parametresine bağlı olarak incelenmektedir (Bakınız Şekil 1.5).



Şekil 1.5: Vlasov-Leont'ev zemin modeli

1.3 Plak-Zemin Etkileşimi Konusunda Yapılmış Çalışmalar

Plak-iki parametreli zemin etkileşimi problemlerin ele alındığı yaklaşık çözüm yöntemleri içinde sonlu farklar **(Straughan, 1990)**, sınır elaman (**Rashed-Aliabadi ve Brebbia, 1999**; **Chucheepsakul ve Chinnaboon, 2003**; **Al-Hosani, 2001**), Galerkin metodu (**Hui-Shen Shen, 2000**; **Akbarov ve Kocatürk, 1997**) ve çok daha yaygın olarak sonlu elemanlar (**Setoodeh-Karami, 2003**; **Sadecka, 2000**) kullanılmaktadır. Karışık sonlu elemanlar yöntemiyle plak-Pasternak zemini etkileşimi üzerine yapılan çalışmaların başlıcaları; **Omurtag ve *ark.* (1997)**, **Omurtag ve Kadıoğlu (1998)**, **Özçeliközs ve *ark.* (1997)**, **Doğruoğlu ve *ark.* (1999)**, **Eratlı ve Aköz (2002)** sayılabilir.

Lam ve *ark.* (2000) Green fonksiyonlarını kullanarak Lévy plaklarının eğilme, titreşim ve burkulma sonuçlarını kesin çözümle elde etmişlerdir. **Xiang ve *ark.* (1993)** yaptıkları çalışmada ile Pasternak zeminine oturan dört tarafı basit mesnetli dikdörtgen Mindlin plaklarının serbest titreşiminin analitik yolla kesin çözümünü sunmuşlardır. Pasternak zemini-plak etkileşiminin dinamik analizinin sonlu elemanlarla çözümüne öncülük eden çalışma olarak Kirchoff plağı anlamında **Omurtag ve *ark.* (1997)** sayılabilir. **Omurtag ve *ark.* (1997)** deki serbest titreşim sonuçları üç boyutlu plak analizi yapan **Zhou ve *ark.* (2004)** tarafından doğrulanmıştır. **Matsunaga (2000)** kuvvet serileri açılımını yerdeğiştirme bileşenleri üzerinde kullanarak kalın plakların titreşim ve stabilite problemleri için yüksek mertebeden bir çözüm sunmuştur. **Shen ve *ark.* (2001)** Pasternak zeminine serbestçe oturan Mindlin plaklarının serbest ve zorlanmış titreşim problemini Rayleigh-Ritz yöntemiyle incelemişler, problemde ayrıca ısısal etkileri de göz önüne almışlardır. **Yu ve *ark.* (2007)** çekme gerilmesi almayan Pasternak zeminine sınırları serbestçe oturan Reissner-Mindlin plaklarının dinamik etkilerini ısısal etkileri de göz önüne alarak incelemişlerdir.

Bu çalışmada kullanılacak Sonlu eleman yöntemi temelini enerji yöntemlerinden alır **(Washizu, 1968)**. Enerji yönteminden hareketle çözüme ulaşabilmek için ilk olarak alan denklemleri potansiyel fonksiyonele dönüştürülmelidir. Söz konusu dönüşüm için,

1) Hellinger-Reissner,
2) Hu-Washizu,
3) Gateaux Diferansiyeli

yöntemleri kullanılabilir. Bu çalışmadaki yöntem olan Gateaux diferansiyeli **(Oden ve Reddy, 1976)** ile oluşturulan sonlu eleman formülasyonu diğer yöntemlere göre çok daha üstündür (**Aköz *ve ark.*, 1991**; **Omurtag ve Aköz, 1994**). Fonksiyonel elde edildikten sonra, plak, birbiriyle süreklilik koşullarını sağlayacak şekilde sonlu eleman alt bölgelerine ayrılır. Bilinmeyen serbestlik dereceleri ile bölgelerin davranışı ifade edildikten sonra, fonksiyoneli durağan yapacak şekilde bir denklem takımı elde edilir, denklem takımının çözümü ile de her bir bölgenin serbestliklerine ulaşılmış olur. Sonlu eleman da bölge serbestlikleri iki farklı büyüklük cinsinden tarif edilebilir.

1) Yalnız yer değiştirme ve dönme türü büyüklükler (Deplasman tipi sonlu elemanlar).
2) Yer değiştirme, dönme ve kuvvet tipi büyüklükler (Karışık sonlu elemanlar).

Sonlu elemanda birinci tipteki büyüklüklerin kullanılması durumunda kuvvet tip büyüklüklere geçilirken bir geri yerleştirme yapılması gerekmektedir. İkinci tipteki sonlu elemanda bu kuvvet tipi büyüklüklerin doğrudan elde edilmesi sonucun hassasiyeti açısından daha olumlu olmaktadır. Bunun yanında plakta kayma etkisini göz önüne alan teorilerin kullanıldığı hesaplarda deplasman tipi elemanlarda karşılaşılan kayma kilitlenmesi problemleri karışık sonlu eleman yönteminde kendiliğinden aşılmaktadır.

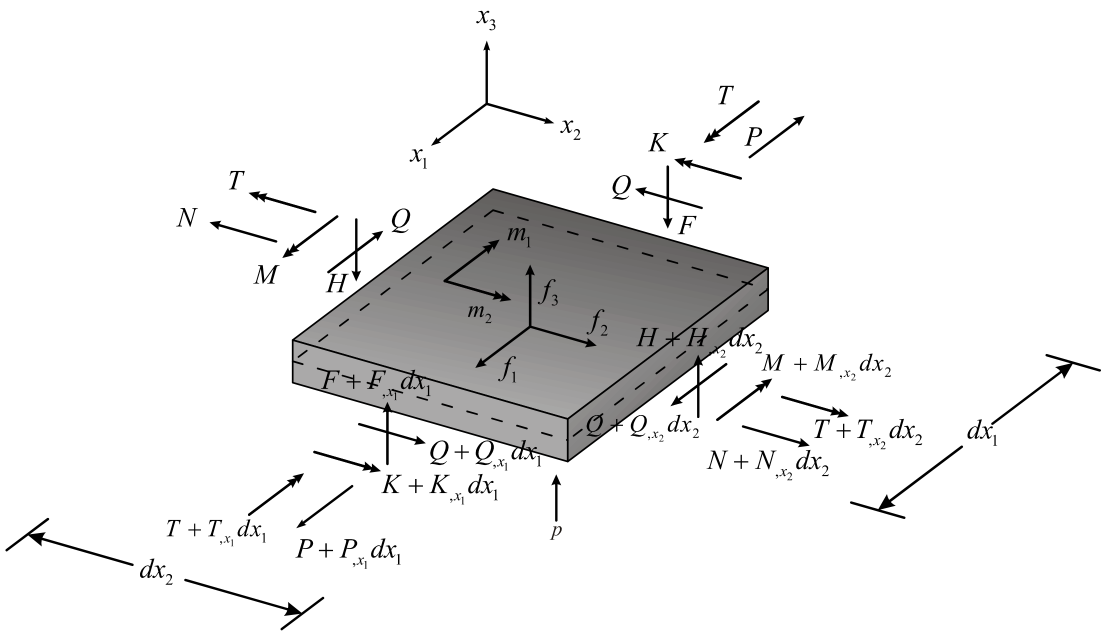
Bu çalışmada keyfi doğrultuda ortotropiye sahip Pasternak zemini ile etkileşim halindeki Mindlin plakları için karışık sonlu eleman yöntemiyle çözüme uygun bir fonksiyonel elde edilmiştir. Plak serbest titreşiminin inceleneceği problemlerin çözümü için Fortran programlama dilinde yazılmış bir program kullanılmıştır. Yapılacak çözümlerle zeimin ortotopi doğrultusunun değişiminin plak doğal titreşim frekansları ve ilgili mod şekillerinde yapacağı değişim incelenmiştir.

2 ALAN DENKLEMLERİ VE FONKSİYONEL

2.1 Mindlin Plağı

2.1.1 Denge Denklemleri

Mindlin plağının diferansiyel elemanı serbest cisim diyagramı Şekil 2.1 de görülmektedir.



Şekil 2.1: Plak diferansiyel elemanı

Kesme kuvvetleri *F*, *H*, *Q,* normal kuvvetler *P, N*, eğilme momentleri *K, M*, burulma momenti *T*, yayılı dış yükler ile momentler $f_i, (i = 1, 2, 3),$ ve $m_\beta, (\beta = 1, 2)$, zeminden gelen tepki kuvveti *p* olmak üzere, kuvvet ve moment denge denklemleri,

$$\left.\begin{aligned} Q_{,2} + P_{,1} + f_1 &= 0 \\ N_{,2} + Q_{,1} + f_2 &= 0 \\ F_{,1} + H_{,2} + f_3 - p &= 0 \\ K_{,1} + T_{,2} - F + m_1 &= 0 \\ M_{,2} + T_{,1} - H + m_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.1)}$$

biçiminde yazılır.

2.1.2 Bünye Bağıntıları

Gerilme şekil değiştirme bağıntıları üç boyutlu elastisite kuramında indis gösterimiyle,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\upsilon}{E}\sigma_{ij} - \frac{\upsilon}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}\ , \qquad (i,j,k=1,2,3) \tag{2.2}$$

biçiminde yazılır. δ_{ij} kronecker deltası $\delta_{ii}=1$ ve $\delta_{ij}=0$ değerleri ile tanımlanmıştır. Sonsuz küçük yer değiştirme kabulünde yer değiştirmeyle ilişkilendirilecek şekil değişimi ve kayma açısı,

$$\varepsilon_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}\right) \qquad , \qquad (i,j=1,2,3) \tag{2.3}$$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \qquad , \qquad (i \neq j) \tag{2.4}$$

şeklindedir. Mindlin plak kuramında kullanılacak olan gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{23}$ ve $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{23}$ dır. Bu durumda bünye bağıntıları,

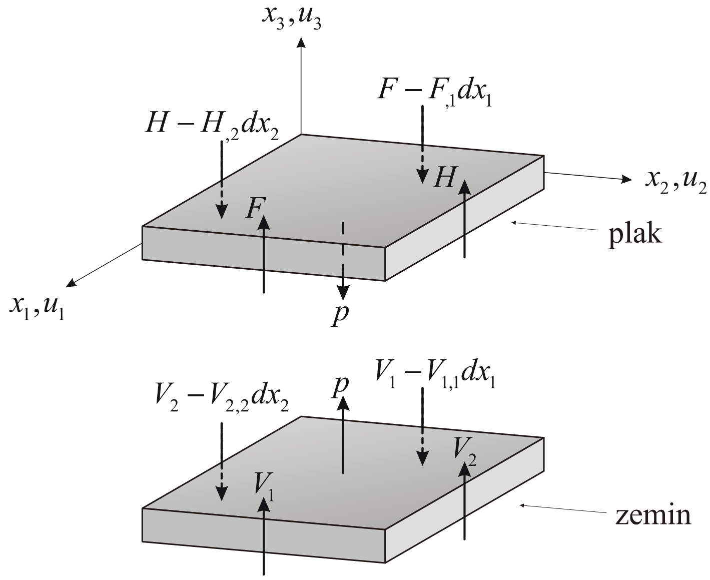
$$\left.\begin{aligned}
u_{3,1} + \Omega_1 - \frac{6F}{5Gh} &= 0 \\
u_{3,2} + \Omega_2 - \frac{6H}{5Gh} &= 0 \\
u_{1,1} - \frac{1}{Eh}\left(P - \upsilon N\right) &= 0 \\
u_{2,2} - \frac{1}{Eh}\left(N - \upsilon P\right) &= 0 \\
u_{1,2} + u_{2,1} - \frac{Q}{Gh} &= 0 \\
\Omega_{1,1} - \frac{12}{Eh^3}\left[K - M\upsilon\right] &= 0 \\
\Omega_{2,2} - \frac{12}{Eh^3}\left[M - K\upsilon\right] &= 0 \\
\Omega_{1,2} + \Omega_{2,1} - \frac{12T}{Gh^3} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

olur. Burada E elastisite modülü, υ poisson oranı, G kayma modülüdür.

2.2 Mindlin Plağı Pasternak Zemini Etkileşimi

2.2.1 Ortotrop Pasternak Zemini

Plak-Pasternak zemini etkileşimi Şekil 2.2 de gösterildiği gibidir. Zemin elemanında x_3 ekseni doğrultusunda denge denklemi yazılırsa;



Şekil 2.2: Plak Pasternak zemini etkileşimi

$$p + V_{2,2} + V_{1,1} - ku_3 = 0 \qquad \textbf{(2.6)}$$

elde edilir. Burada, p zemin plak arasındaki kuvvet yoğunluğu (gerilme), V_α ,$(\alpha = 1,2)$, zemin elemanları arasında aktarılan kesme kuvvetleri, k zemin yataklanma katsayısıdır. Sadece düşey doğrultuda kuvvet etkidiği düşünüldüğünde plakta yatay doğrultulardaki yer değiştirmeler $(u_1 \approx 0, u_2 \approx 0)$ ihmal edilebilir. Bu kabulle zemin elemanında bünye bağıtıları;

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{13} &= G_1\gamma_{13} = G_1 u_{3,1} \\ \sigma_{23} &= G_2\gamma_{23} = G_2 u_{3,2} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2.7)}$$

şeklinde yazılır. Burada G_1 ve G_2 ortotrop Pasternak zemininde ilgili eksenler doğrultusundaki zemin kayma modüllerini göstermektedir. Gerilme ifadelerinden ($\sigma_{\alpha 3}$ $(\alpha = 1,2)$) kesme kuvvetlerine (V_α) geçilirse,

$$V_\alpha = \int_0^1 \sigma_{\alpha 3} dx_\beta dx_3 = G_\alpha u_{3,\alpha} \qquad (\alpha \neq \beta = 1,2) \tag{2.8}$$

şeklinde bulunur. (2.8) denklemi, (2.6) denkleminde yerine yazılırsa;

$$p = ku_3 - G_1 u_{3,11} - G_2 u_{3,22} \tag{2.9}$$

elde edilir (Pasternak, 1954).

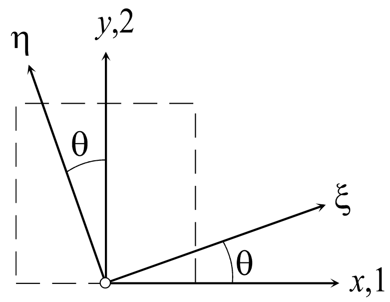
Hesaplanan zemin tepkisinin Mindlin plak denge denklemine (2.1) de (2.21) in yerleştirilmesi sonucunda;

$$\left.\begin{aligned} Q_{,2} + P_{,1} + f_1 &= 0 \\ N_{,2} + Q_{,1} + f_2 &= 0 \\ F_{,1} + H_{,2} + f_3 - ku_3 + G_1 u_{3,11} + G_2 u_{3,22} &= 0 \\ K_{,1} + T_{,2} - F + m_1 &= 0 \\ M_{,2} + T_{,1} - H + m_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

elde edilir

2.2.2 Pasternak Zemininde Keyfi Dorultuda Ortotropi

Problemde kullanılan global koordinat takımı (x, y) ya da $(1,2)$, zemin ortamındaki ortotropiyi ifade eden (ξ, η) koordinat takımı, ve bu koordinatlar arasındaki θ açısı Şekil (2.3) de görüldüğü gibidir. Bu durumda ortotrop zeminde kesme kuvvetleri,



Şekil 2.3: Global koordinat takımı ve Pasternak zemininde ortotropi doğrultusu

$$\begin{aligned} V_\xi &= G_\xi u_{3,\xi} \\ V_\eta &= G_\eta u_{3,\eta} \end{aligned} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanırlar. Burada G_ξ ve G_η ortotrop zemin ortamının sırasıyla ξ ve η doğrultularındaki kayma modülleridir. Zemin elemanında denge denklemi bu durumda,

$$p = ku_3 - V_{\xi,\xi} - V_{\eta,\eta} \tag{2.12}$$

haline dönüşür. Koordinat takımları arasındaki zincir kuralı,

$$\left.\begin{aligned}(\cdots)_{,\xi} &= (\cdots)_{,x}\, x_{,\xi} + (\cdots)_{,y}\, y_{,\xi}\\ (\cdots)_{,\eta} &= (\cdots)_{,x}\, x_{,\eta} + (\cdots)_{,y}\, y_{,\eta}\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

şeklinde ifade edilir. Global koordinat takımı ile zemin parametrelerinin tanımlandığı koordinat takımı arasındaki diferansiyel ilişki,

$$\left.\begin{aligned}x_{,\xi} &= \cos\theta \quad , \quad x_{,\eta} = -\sin\theta\\ y_{,\xi} &= \sin\theta \quad , \quad y_{,\eta} = \cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

şeklindedir. Böylece (2.13),

$$\left.\begin{aligned}(\cdots)_{,\xi} &= \cos\theta(\cdots)_{,x} + \sin\theta(\cdots)_{,y}\\ (\cdots)_{,\eta} &= -\sin\theta(\cdots)_{,x} + \cos\theta(\cdots)_{,y}\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

olur ve (2.11) de (2.15) yerleştirildiğinde, zeminden gelen tepki kesme kuvvetleri,

$$\left.\begin{aligned}V_\xi &= G_\xi\left(\cos\theta\, u_{3,x} + \sin\theta\, u_{3,y}\right)\\ V_\eta &= G_\eta\left(-\sin\theta\, u_{3,x} + \cos\theta\, u_{3,y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Elde edilir. (2.12) de kullanabilmek için (2.16) ifadelerinin kısmi türevleri,

$$\left.\begin{aligned}V_{\xi,\xi} &= G_\xi\left(\cos\theta(\cdots)_{,x} + \sin\theta(\cdots)_{,y}\right)\left(\cos\theta\, u_{3,x} + \sin\theta\, u_{3,y}\right)\\ &= G_\xi\left(\cos^2\theta\, u_{3,xx} + 2\cos\theta\sin\theta\, u_{3,yx} + \sin^2\theta\, u_{3,yy}\right)\\ V_{\eta,\eta} &= G_\eta\left(-\sin\theta(\cdots)_{,x} + \cos\theta(\cdots)_{,y}\right)\left(-\sin\theta\, u_{3,x} + \cos\theta\, u_{3,y}\right)\\ &= G_\eta\left(\sin^2\theta\, u_{3,xx} - 2\sin\theta\cos\theta\, u_{3,yx} + \cos^2\theta\, u_{3,yy}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

biçiminde hesaplanır. (2.12) de (2.17) yerleştirilirse, denge denkleminden basınç ifadesi,

$$\begin{aligned} p &= kw \\ &\quad - G_\xi\left(\cos^2\theta u_{3,xx} + 2\cos\theta\sin\theta u_{3,yx} + \sin^2\theta u_{3,yy}\right) \\ &\quad - G_\eta\left(\sin^2\theta u_{3,xx} - 2\sin\theta\cos\theta u_{3,yx} + \cos^2\theta u_{3,yy}\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

olur. Şimdi (x,y) koordinat takımı için Şekil (2.3) de belirtildiği gibi $(1,2)$ biçiminde indis gösterimine geçilirse, plak alan denklemleri,

$$\left.\begin{aligned} Q_{,2} + P_{,1} + f_1 &= 0 \\ N_{,2} + Q_{,1} + f_2 &= 0 \\ F_{,1} + H_{,2} + f_3 - kw & \\ + G_\xi\left(\cos^2\theta u_{3,xx} + 2\cos\theta\sin\theta u_{3,yx} + \sin^2\theta u_{3,yy}\right) & \\ + G_\eta\left(\sin^2\theta u_{3,xx} - 2\sin\theta\cos\theta u_{3,yx} + \cos^2\theta u_{3,yy}\right) &= 0 \\ K_{,1} + T_{,2} - F + m_1 &= 0 \\ M_{,2} + T_{,1} - H + m_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

olur. Dinamik analiz için (2.19) ifadesinde dış yükler yerine ataletle ilgili terimler yerleştirildiğinde,

$$\left.\begin{aligned} Q_{,2} + P_{,1} + \rho h\omega^2 u_1 &= 0 \\ N_{,2} + Q_{,1} + \rho h\omega^2 u_2 &= 0 \\ F_{,1} + H_{,2} + \rho h\omega^2 u_3 - kw & \\ + G_\xi\left(\cos^2\theta u_{3,xx} + 2\cos\theta\sin\theta u_{3,yx} + \sin^2\theta u_{3,yy}\right) & \\ + G_\eta\left(\sin^2\theta u_{3,xx} - 2\sin\theta\cos\theta u_{3,yx} + \cos^2\theta u_{3,yy}\right) &= 0 \\ K_{,1} + T_{,2} - F + \frac{1}{12}\rho h^3\omega^2\Omega_1 &= 0 \\ M_{,2} + T_{,1} - H + \frac{1}{12}\rho h^3\omega^2\Omega_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

elde edilir.

2.3 Fonksiyonel

Enerji yöntemine dayalı olan sonlu eleman formülasyonunda, alan denklemlerinden uygun bir enerji ifadesine geçilmesi gerekmektedir. Alan denklemlerinin $\mathbf{Ly}-\mathbf{f}=\mathbf{0}$ yapısında potansiyel bir operatöre dönüştürülmesi için ilk olarak bu potansiyellik koşulunu sağlaması gerekmektedir. Burada, $\mathbf{L}$ türev operatörünü, $\mathbf{y}$ bilinmeyenler vektörü, $\mathbf{f}$ dış etkiler vektörünü temsil etmektedir. Potansiyelliği araştırılacak operatör yapı,

$$\mathbf{P}=\mathbf{Ly}-\mathbf{f} \tag{2.21}$$

dır. Potansiyellik koşulunun matematiksel ifadesi; $\mathbf{P}$ fonksiyonunun $\bar{\mathbf{y}}$ yönüne göre türevinin $\mathbf{y}^*$ yönündeki toplamı, aynı fonksiyonun $\mathbf{y}^*$ yönüne göre türevinin $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki toplamına eşit olmalıdır şeklindedir. Burada, * ve ¯ birbirinden farklı iki yönü göstermekte, $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki Gâteaux türev $\mathbf{dP}(\mathbf{y};\bar{\mathbf{y}})$ ve $\mathbf{y}^*$ yönündeki Gâteaux türev $\mathbf{dP}(\mathbf{y};\mathbf{y}^*)$ biçiminde, $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki iç çarpım $\langle \mathbf{...},\bar{\mathbf{y}}\rangle$ ve $\mathbf{y}^*$ yönündeki iç çarpım $\langle \mathbf{...},\mathbf{y}^*\rangle$ biçiminde gösterilmektedir. Buradan potansiyellik koşulu,

$$\langle \mathrm{d}\mathbf{P}(\mathbf{y};\bar{\mathbf{y}}),\mathbf{y}^*\rangle \equiv \langle \mathrm{d}\mathbf{P}(\mathbf{y};\mathbf{y}^*),\bar{\mathbf{y}}\rangle \tag{2.22}$$

şeklinde gösterilir. Burada köşeli parantezle gösterilen iç çarpımın ve yönsel türevin tanımlanması gerekmektedir. İç çarpım, bir fonksiyon ile başka bir fonksiyon veya değişkenin çarpımının belirli bir aralıktaki integralidir.

$$\langle \mathbf{f}(x),\mathbf{y}^*\rangle=\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{y}^*\mathbf{d}x \tag{2.23}$$

Bu çalışmada fonksiyonel eldesinde kullanılacak olan Gâteaux türevinin matematiksel ifadesi,

$$\mathrm{d}\mathbf{P}(\mathbf{y};\bar{\mathbf{y}})=\mathbf{lim}_{s\to 0}\left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{y}+s\bar{\mathbf{y}})-\mathbf{P}(\mathbf{y})}{s}\right]=\frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{y}})}{1}=\mathbf{P}(\bar{\mathbf{y}}) \tag{2.24}$$

şeklindedir **(Oden ve Reddy, 1976)**. s bir skaler olmak üzere, fonksiyonelin birinci varyasyonu,

$$\delta I(\mathbf{y};\boldsymbol{\eta}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} I(\mathbf{y} + s\mathbf{y})\Big|_{s=0} = \langle \mathbf{P}(\mathbf{y},\mathbf{f}),\mathbf{y} \rangle \qquad \textbf{(2.25)}$$

şeklindedir. İntegrasyon işlemi gerçekleştirildiğinde,

$$I(\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \left[\mathbf{P}(s\mathbf{y},\mathbf{f}),\mathbf{y} \right] \mathrm{d}s \qquad \textbf{(2.26)}$$

şeklinde fonksiyonel elde edilir **(Oden ve Reddy, 1976)**. Mindlin plağında alan denklemlerinden gelen değişkenler $\mathbf{y} = (u_1, u_2, u_3, \Omega_1, \Omega_2, F, H, P, N, Q, K, M, T)$ dir. Bu durumda keyfi doğrultuda ortoropiye sahip Pasternak zeminine oturan Mindlin plağı fonksiyoneli dinamik analize uygun olacak şekilde (2.26) den faydalanılarak,

$$
\begin{aligned}
I(y) &= \left[Q,u_{1,2}\right]+\left[P,u_{1,1}\right]+\left[Q,u_{2,1}\right]+\left[N,u_{2,2}\right]-\frac{1}{2Eh}[P,P]+\frac{\upsilon}{Eh}[N,P]-\frac{1}{2Eh}[N,N]\\
&-\frac{1}{2}(\rho h)\omega^2[u_1,u_1]-\frac{1}{2}(\rho h)\omega^2[u_2,u_2]-\frac{1}{2}(\rho h)\omega^2[u_3,u_3]\\
&-\frac{1}{24}\left(\rho h^3\right)\omega^2[\Omega_1,\Omega_1]-\frac{1}{24}\left(\rho h^3\right)\omega^2[\Omega_2,\Omega_2]\\
&-\frac{1}{2Gh}[Q,Q]+\left[F,u_{3,1}\right]+\left[H,u_{3,2}\right]+\left[F,\Omega_1\right]+\left[H,\Omega_2\right]-\frac{3}{5Gh}[F,F]-\frac{3}{5Gh}[H,H]\\
&-\left[M_{,2},\Omega_2\right]-\left[T_{,1},\Omega_2\right]-\left[K_{,1},\Omega_1\right]-\left[T_{,2},\Omega_1\right]\\
&-\frac{6}{Eh^3}[K,K]+\frac{12\upsilon}{Eh^3}[M,K]-\frac{6}{Eh^3}[M,M]-\frac{6}{Gh^3}[T,T]+\frac{1}{2}k[u_3,u_3]\\
&+\frac{\cos^2\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,1},u_{3,1}\right]+\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,1},u_{3,2}\right]\\
&+\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,2},u_{3,1}\right]+\frac{\sin^2\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,2},u_{3,2}\right]\\
&+\frac{\sin^2\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,1},u_{3,1}\right]-\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,1},u_{3,2}\right]\\
&-\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,2},u_{3,1}\right]+\frac{\cos^2\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,2},u_{3,2}\right]\\
&+\Big\{-\left\langle u_1,(\widehat{Q}+\widehat{P})\right\rangle-\left\langle u_2,(\widehat{Q}+\widehat{N})\right\rangle-\left\langle u_3,(\widehat{F}+\widehat{H})\right\rangle+\left\langle \Omega_1,(K-\widehat{K})\right\rangle+\left\langle \Omega_1,(T-\widehat{T})\right\rangle\\
&+\left\langle \Omega_2,(M-\widehat{M})\right\rangle+\left\langle \Omega_2,(T-\widehat{T})\right\rangle\Big\}_{\sigma_p}\\
&-\Big\{\left[\left(\hat{K}_{,1}+\hat{T}_{,2}\right)+\left(\hat{M}_{,2}+\hat{T}_{,1}\right),u_3\right]+\left[\left(K-\hat{K}\right)+\left(T-\hat{T}\right),u_{3,1}\right]\\
&+\left[\left(M-\hat{M}\right)+\left(T-\hat{T}\right),u_{3,2}\right]\Big\}_{\sigma_p}+\Big\{\left[\left(K_{,1}+T_{,2}\right)+\left(M_{,2}+T_{,1}\right),(u_3-\hat{u}_3)\right]\\
&-\left[(K+T),\hat{u}_{3,1}\right]-\left[(M+T),\hat{u}_{3,2}\right]\Big\}_{\varepsilon_p}\\
&-\left\{G_\xi\cos^2\theta u_{3,1},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon\\
&-\left\{G_\xi\sin^2\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\eta\sin^2\theta u_{3,1},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon+\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta u_{3,1},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon\\
&+\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\eta\cos^2\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon\\
&+\left\{G_\xi\cos^2\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma\\
&+\left\{G_\xi\sin^2\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\eta\sin^2\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma-\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma\\
&-\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\eta\cos^2\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

elde edilmiştir. Burada $-\frac{1}{2}\rho h\omega^2\left[u_i,u_i\right]$ yerine $-\left[f_i,u_i\right]$, $i=1,2,3$ ve $-\frac{1}{24}(\rho h^3)\omega^2\left[\Omega_k,\Omega_k\right]$ yerine $-\left[m_k,\Omega_k\right]$, $k=1,2$ yerleştirildiğinde statik problem çözümüne uygun fonksiyonel.

$$
\begin{aligned}
I(y) &= \left[Q,u_{1,2}\right]+\left[P,u_{1,1}\right]+\left[Q,u_{2,1}\right]+\left[N,u_{2,2}\right]-\frac{1}{2Eh}[P,P]+\frac{\upsilon}{Eh}[N,P]-\frac{1}{2Eh}[N,N] \\
&-[f_1,u_1]-[f_2,u_2]-[f_3,u_3]-\left[m_1,\Omega_1\right]-[m_2,\Omega_2] \\
&-\frac{1}{24}\left(\rho h^3\right)\omega^2[\Omega_1,\Omega_1]-\frac{1}{24}\left(\rho h^3\right)\omega^2[\Omega_2,\Omega_2] \\
&-\frac{1}{2Gh}[Q,Q]+\left[F,u_{3,1}\right]+\left[H,u_{3,2}\right]+[F,\Omega_1]+[H,\Omega_2]-\frac{3}{5Gh}[F,F]-\frac{3}{5Gh}[H,H] \\
&-\left[M_{,2},\Omega_2\right]-\left[T_{,1},\Omega_2\right]-\left[K_{,1},\Omega_1\right]-\left[T_{,2},\Omega_1\right] \\
&-\frac{6}{Eh^3}[K,K]+\frac{12\upsilon}{Eh^3}[M,K]-\frac{6}{Eh^3}[M,M]-\frac{6}{Gh^3}[T,T]+\frac{1}{2}k[u_3,u_3] \\
&+\frac{\cos^2\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,1},u_{3,1}\right]+\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,1},u_{3,2}\right] \\
&+\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,2},u_{3,1}\right]+\frac{\sin^2\theta}{2}G_\xi\left[u_{3,2},u_{3,2}\right] \\
&+\frac{\sin^2\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,1},u_{3,1}\right]-\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,1},u_{3,2}\right] \\
&-\frac{\cos\theta\sin\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,2},u_{3,1}\right]+\frac{\cos^2\theta}{2}G_\eta\left[u_{3,2},u_{3,2}\right] \\
&+\Big\{-\left\langle u_1,(\hat{Q}+\hat{P})\right\rangle-\left\langle u_2,(\hat{Q}+\widehat{N})\right\rangle-\left\langle u_3,(\widehat{F}+\widehat{H})\right\rangle+\left\langle \Omega_1,(K-\widehat{K})\right\rangle+\left\langle \Omega_1,(T-\hat{T})\right\rangle \\
&+\left\langle \Omega_2,(M-\widehat{M})\right\rangle+\left\langle \Omega_2,(T-\hat{T})\right\rangle\Big\}_{\sigma_p} \\
&-\Big\{\Big[\left(\hat{K}_{,1}+\hat{T}_{,2}\right)+\left(\hat{M}_{,2}+\hat{T}_{,1}\right),u_3\Big]+\Big[\left(K-\hat{K}\right)+\left(T-\hat{T}\right),u_{3,1}\Big] \\
&+\Big[\left(M-\hat{M}\right)+\left(T-\hat{T}\right),u_{3,2}\Big]\Big\}_{\sigma_P}+\Big\{\Big[\left(K_{,1}+T_{,2}\right)+\left(M_{,2}+T_{,1}\right),\left(u_3-\hat{u}_3\right)\Big] \\
&-\left[\left(K+T\right),\hat{u}_{3,1}\right]-\left[\left(M+T\right),\hat{u}_{3,2}\right]\Big\}_{\varepsilon_P} \\
&-\left\{G_\xi\cos^2\theta u_{3,1},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon \\
&-\left\{G_\xi\sin^2\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\eta\sin^2\theta u_{3,1},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon+\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta u_{3,1},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon \\
&+\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon-\left\{G_\eta\cos^2\theta u_{3,2},(u_3-\hat{u}_3)\right\}_\varepsilon \\
&+\left\{G_\xi\cos^2\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\xi\cos\theta\sin\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma \\
&+\left\{G_\xi\sin^2\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\eta\sin^2\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma-\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta\hat{u}_{3,1},u_3\right\}_\sigma \\
&-\left\{G_\eta\sin\theta\cos\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma+\left\{G_\eta\cos^2\theta\hat{u}_{3,2},u_3\right\}_\sigma
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

hale gelir. (2.27) ve (2.28) de, alt indis gösterimi $\{...\}_\sigma$ ile $\{...\}_\varepsilon$, sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarını tanımlamaktadır. Ayrıca $(\wedge)$ da bilinen sınır koşullarını temsil eder. Eğer $(\wedge)$ sınır koşulu terimi belli değilse bu terimler düşer, ($\hat{Q}=0$, yada $\hat{u}=0$ gibi)

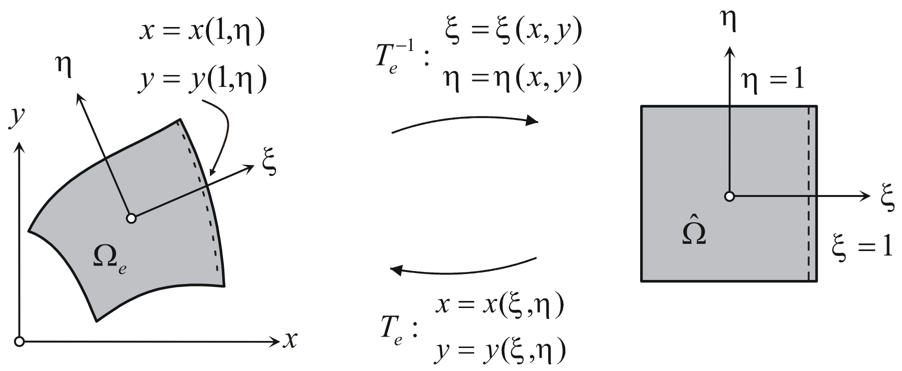
3 SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

3.1 Yöntem

Plak fonksiyonelinde bilinmeyenlerin (iç kuvvetler, yer değiştirmeler ve dönmeler) elde edilebilmesi için fonksiyonelin minimum olma koşulundan faydalanılacaktır. Plakta serbest değişkenler şekil fonksiyonlarıyla plak düğüm noktasındaki bilinmeyenler cinsinden yazıldıktan sonra fonksiyonele yerleştirilir. Daha sonra fonksiyoneli düğüm noktası bilinmeyenlerine göre türetip sıfıra eşitlenerek bir denklem takımı elde edilir. Her bir elemandan elde edilen denklem takımları birleştirilerek sistem matrisi oluşturulacak ve son aşamada denklem takımının çözümüne gidilir.

3.2 İzoparametrik Sonlu Eleman Formülasyonu

Her hangi bir eğrisel (Şekil 3.1) elemanda integrasyon işlemleri (x, y) koordinat takımında yapılmaya kalkışıldığında bu yöntemin yorucu ve verimsizdir. Dahası her işlemin özellikleri (farklı integrasyon sınır koşulları gibi) elemandan elemana değişmek durumundadır. Eğer basit şekilli bir master eleman $\hat{\Omega}$ tanımlayabilir ve herhangi elemana Ω_e tersi bulunan bir dönüşüm tanımlanırsa Ω_e için yapılacak hesaplar $\hat{\Omega}$ üzerinden uygun dönüşüm yapılarak uygulanabilecektir. Bu sayede bütün işlemlerin master eleman üzerinde yapılması sağlanmış olur. Söz konusu dönüşüm, aslında master eleman üzerindeki noktaların her elemana tanımlanan basit bir koordinat dönüşümü veya haritalama ile ilişkilendirilmesinden ibarettir.



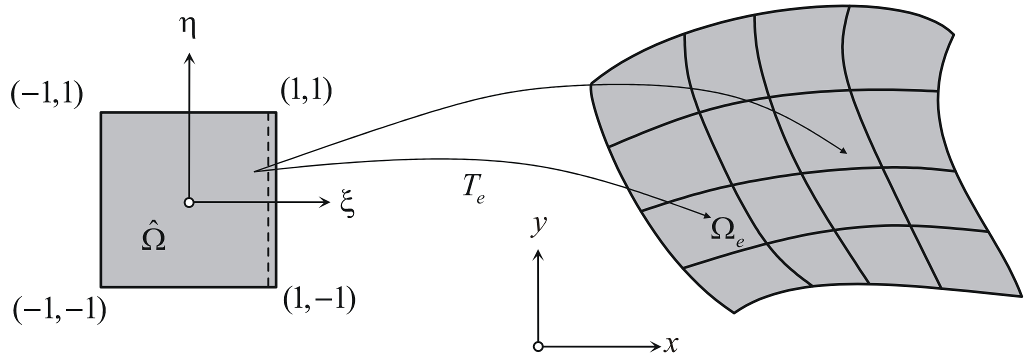
Şekil 3.1: Master eleman koordinat dönüşümleri

$\hat{\Omega}$ Şekil 3.1 de görüldüğü gibi işlemlerin kolaylığı açısından kare olarak seçilir. $\hat{\Omega}$ da işlemleri yapmak üzere ξ ve η koordinatlarında tanımlı (ξ,η) noktaları $-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$ aralığında olacaktır. Bundan sonra yapılan ise T_e koordinat dönüşüm işlemiyle $\hat{\Omega}$ den Ω_e ye haritalamayı gerçekleştirmektir.

$$T_e : \left.\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta) \\ y &= y(\xi,\eta) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Dönüşümün tanımlandığı (3.1), şu şöyle bir örnekle anlaşılabilir; $\hat{\Omega}$ üzerindeki $(1,\eta)$ kümesinin oluşturduğu doğru parçasını ele alalım, (3.1) a göre bu noktalar *x-y* koordinatında $x = x(1,\eta)$, $y = y(1,\eta)$ noktalarını tanımlamakta, bu noktalarda $(x(1,\eta),\ y(1,\eta))$ parametrik olarak bir eğriyi tariflemektedir. Gerçekte, $\hat{\Omega}$ da tüm düşey ve yatay doğrular $\xi = \text{sabit}$, $\eta = \text{sabit}$ olarak *x-y* düzlemine birer eğri olarak yine $\xi = \text{sabit}$, $\eta = \text{sabit}$ olacak şekilde denk gelmektedir (Bakınız Şekil 3.1) Ω_e ye bu anlamda $\hat{\Omega}$ nin T_e haritalaması altındaki görüntü elemanı denilmektedir.

Bu açıklamaların ardından bir master eleman tanımlamanın altındaki esas düşünce şu şekilde açıklanabilir.: E adet elemandan oluşan bir SE ağının oluşturulması E tane $\{T_1, T_2, ..., T_E\}$ şeklindebir dönüşüm serisinin oluşturulması ve her elemanın (Ω_e), $\hat{\Omega}$ nin altında bir görüntüye dönüşmesidir. Bu işlem sembolik olarak Şekil 3.2 de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.2: Eleman ağının haritalama ile oluşturulması

x ve y nin, ξ ve η.ya göre sürekli türetilebilir olduğunu kabul ederek, $\mathrm{d}\xi$ ve $\mathrm{d}\eta$ diferansiyellerinden dx ve dy diferansiyellerine geçiş,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x &= x_{,\xi}\mathrm{d}\xi + x_{,\eta}\mathrm{d}\eta \\ \mathrm{d}y &= y_{,\xi}\mathrm{d}\xi + y_{,\eta}\mathrm{d}\eta \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3.2)}$$

biçiminde tanımlanmakta, matris formunda ise bu dönüşüm,

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}\eta \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.3)}$$

şeklinde verilmektedir. (3.3) de verilen 2×2 boyutundaki kısmi türevler içeren matrise Jacobian matrisi denir ve **J** ile gösterilir.

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.4)}$$

Denklem (3.3) $\hat{\Omega}$ deki doğru diferansiyeli $\mathrm{d}\xi$ ve $\mathrm{d}\eta$ nın x-y düzlemindeki dx ve dy doğru parçalarına doğrusal bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Herhangi bir $(\xi,\eta)\in\hat{\Omega}$ noktasında (3.3) denkleminden $\mathrm{d}\xi$ ve $\mathrm{d}\eta$ yi dx ve dy cinsinden elde etmek mümkünse, ters dönüşüm işlemiyle T_e^{-1} ile de x-y koordinatından ξ-η koordinatındaki noktaya geçiş yapılabilir. Açık olarak (3.3) in dönüştürülebilir olması için gerek ve yeter şart $|\mathbf{J}|\neq 0$ olmasıdır ($(\xi,\eta)\in\hat{\Omega}$ için). Tanım gereği $|\mathbf{J}|$ fonksiyonu, (3.3) dönüşümünden,

$$\left|\mathbf{J}\right| = \det\mathbf{J} = x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi} \tag{3.5}$$

biçiminde yazılır. Şu halde,

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{Bmatrix} = \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\begin{bmatrix} y_{,\eta} & -x_{,\eta} \\ -y_{,\xi} & x_{,\xi} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

yazılablir ve bu durumda Ω_e dan master elemana geri bir haritalama yapılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

yazılıp (3.7) ve (3.6) deki terimler eşitlenirse,

$$\left.\begin{aligned} \xi_{,x} &= \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}y_{,\eta}\,, & \xi_{,y} &= -\frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}x_{,\eta} \\ \eta_{,x} &= -\frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}y_{,\xi}\,, & \eta_{,y} &= \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}x_{,\xi} \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

olur. Eleman içindeki koordinat değişkenleri $x = \sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_j(\xi,\eta)$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_j(\xi,\eta)$ şeklinde ifade edilirler. Burada (x_j, y_j) eleman düğüm noktasının koordinatını, $\hat{N}_j(\xi,\eta)$ ise master elemanda *j* noktası için şekil fonksiyonunu göstermektedir. Buna göre, (3.8) yeniden düzenlenirse,

$$\left.\begin{aligned} \xi_{,x} &= \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_{j,\eta}\,, & \xi_{,y} &= -\frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_{j,\eta} \\ \eta_{,x} &= -\frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_{j,\xi}\,, & \eta_{,y} &= \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_{j,\xi} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

elde edilir. Aynı şekilde Jakobian'in açık ifadesi,

$$\left|\mathbf{J}(\xi,\eta)\right| = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_{j,\xi}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_{j,\eta}\right] - \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_{j,\eta}\right]\left[\sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_{j,\xi}\right] \tag{3.10}$$

şeklindedir.

Şekil fonksiyonlarının türevleri zincir kuralına göre,

$$\left.\begin{aligned} N_{j,x} &= \hat{N}_{j,\xi}\xi_{,x} + \hat{N}_{j,\eta}\eta_{,x} \\ N_{j,y} &= \hat{N}_{j,\xi}\xi_{,y} + \hat{N}_{j,\eta}\eta_{,y} \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

biçimindedir. Böylece koordinatların kısmi türev,

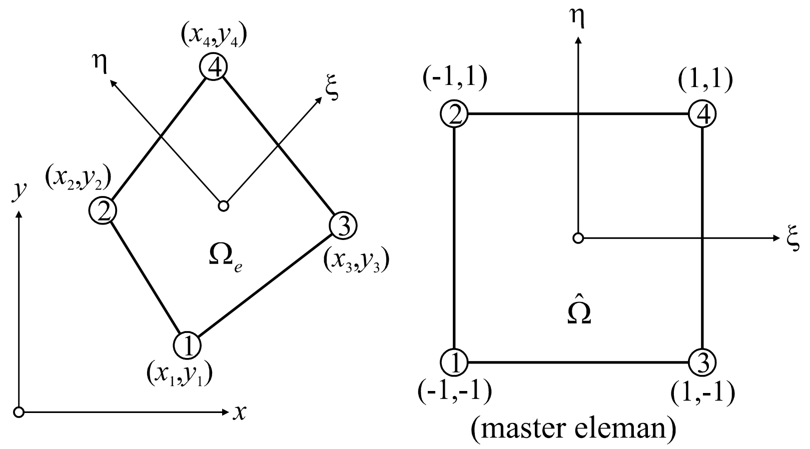
$$\left.\begin{aligned} x_{,\xi} &= \sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_j(\xi,\eta)_{,\xi} \\ x_{,\eta} &= \sum_{j=1}^{n} x_j \hat{N}_j(\xi,\eta)_{,\eta} \\ y_{,\xi} &= \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_j(\xi,\eta)_{,\xi} \\ y_{,\eta} &= \sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_j(\xi,\eta)_{,\eta} \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır.

(3.8) denkleminden $[\xi_{,x} = |\mathbf{J}|^{-1} y_{,\eta}, \xi_{,y} = |\mathbf{J}|^{-1} x_{,\eta}, \eta_{,x} = -|\mathbf{J}|^{-1} y_{,\xi}, \eta_{,y} = |\mathbf{J}|^{-1} x_{,\xi}]$ ve (3.12) denkleminin kullanılmasıyla, (3.11) denklemi,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \frac{1}{|\mathbf{J}(\xi,\eta)|}\left[\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial \xi}\right)\right] \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} &= \frac{1}{|\mathbf{J}(\xi,\eta)|}\left[-\frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \xi}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial \hat{N}_j}{\partial \eta}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial \hat{N}_k}{\partial \xi}\right)\right] \end{aligned}\right\}, (j=1,...,n) \tag{3.13}$$

halini alır. Burada $|\mathbf{J}(\xi,\eta)|$, T_e dönüşümünün Jacobian'idir. Fark edileceği üzere $\partial N_j / \partial x$ *ve* $\partial N_j / \partial y$ kısmi türevleri tamamen master eleman $\hat{\Omega}$ üzerinden hesaplanmaktadır. Bu çalışmada kullanılacak olan dört düğüm noktalı izoparametrik dörtgen sonlu eleman Şekil 3.3 de görülmektedir.



Şekil 3.3: Dört düğüm noktalı izoparametrik dörtgen eleman: ○ düğüm noktaları

Dört düğüm noktalı izoparametrik dörtgen eleman için şekil fonksiyonları,

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{N}_1 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \;, & \hat{N}_3 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \hat{N}_2 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \;, & \hat{N}_4 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

şeklindedir.

3.3 Sınır İntegrallerinin Hesaplanması

(3.4) de verilen Jakobian matrisinin terimleri;

$$\left.\begin{array}{ll} J_{11} = \sum_{j=1}^{4} x_j \hat{N}_{j,\xi}(\xi,\eta) & J_{12} = \sum_{j=1}^{4} x_j \hat{N}_{j,\eta}(\xi,\eta) \\ J_{21} = \sum_{j=1}^{4} y_j \hat{N}_{j,\xi}(\xi,\eta) & J_{22} = \sum_{j=1}^{4} y_j \hat{N}_{j,\eta}(\xi,\eta) \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

olarak açıkça ifade edilebilir. Sınır integrallerinin hesaplanmasında kullanılacak ds diferansiyeli

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\left(x_{,\xi}\mathrm{d}\xi + x_{,\eta}\mathrm{d}\eta\right)^2 + \left(y_{,\xi}\mathrm{d}\xi + y_{,\eta}\mathrm{d}\eta\right)^2} \tag{3.16}$$

olur. Bu diferansiyel sınır integrallerinin hesaplanacağı kenara göre $(\xi = \pm 1, \eta = \pm 1)$ özel ifadelere dönüşür.

$\xi = \pm 1$ sınırı: Burada $\xi =$ sabit olduğu için, $d\xi = 0$ dır. O nedenle,

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s_\eta = \sqrt{\left(x_{,\eta}\mathrm{d}\eta\right)^2 + \left(y_{,\eta}\mathrm{d}\eta\right)^2} = \sqrt{\left(x_{,\eta}\right)^2 + \left(y_{,\eta}\right)^2}\ \mathrm{d}\eta$$

$$= \sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2}\ \mathrm{d}\eta \tag{3.17}$$

şeklinde bir $\mathrm{d}\eta$ diferansiyeline dönüşür. Buna göre şekil fonksiyonlarının çarpımlarından oluşan sınır integralleri aşağıdaki gibi hesaplanırlar.

$$\int_{-1}^{1} \hat{N}_i(\pm 1,\eta)\hat{N}_j(\pm 1,\eta)\, ds_\eta\Big|_{\xi=\pm 1} = \int_{-1}^{1} \hat{N}_i\hat{N}_j\sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2}\ \mathrm{d}\eta \tag{3.18}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \hat{N}_i(\pm 1,\eta)\hat{N}_{j,x}(\pm 1,\eta)\, ds_\eta\Big|_{\xi=\pm 1} = \\ &\int_{-1}^{1} \hat{N}_i \frac{1}{\left|\mathbf{J}(\xi,\eta)\right|}\left\{\hat{N}_{j,\xi}J_{22} - \hat{N}_{j,\eta}J_{21}\right\}\sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2}\ \mathrm{d}\eta\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \hat{N}_i(\pm 1,\eta)\hat{N}_{j,y}(\pm 1,\eta)\, ds_\eta\Big|_{\xi=\pm 1} = \\ &\int_{-1}^{1} \hat{N}_i \frac{1}{\left|\mathbf{J}(\xi,\eta)\right|}\left\{-\hat{N}_{j,\xi}J_{12} + \hat{N}_{j,\eta}J_{11}\right\}\sqrt{J_{12}^2 + J_{22}^2}\ \mathrm{d}\eta\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

η=±1 sınırı: Burada $\eta =$ sabit olduğu için, $\mathrm{d}\eta = 0$ dır. O nedenle;

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}s_\xi = \sqrt{\left(x_{,\xi}\mathrm{d}\xi\right)^2 + \left(y_{,\xi}\mathrm{d}\xi\right)^2} = \sqrt{\left(x_{,\xi}\right)^2 + \left(y_{,\xi}\right)^2}\ \mathrm{d}\xi = \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}\ \mathrm{d}\xi \tag{3.21}$$

şeklinde bir $\mathrm{d}\xi$ diferansiyeline dönüşür. Buna göre şekil fonksiyonlarının çarpımlarından oluşan sınır integralleri aşağıdaki gibi hesaplanırlar.

$$\int_{-1}^{1} \hat{N}_i(\xi,\pm 1)\hat{N}_j(\xi,\pm 1)\ ds_\xi\Big|_{\eta=\pm 1} = \int_{-1}^{1} \hat{N}_i\hat{N}_j\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}\ \mathrm{d}\xi$$

$$\int_{-1}^{1} \hat{N}_i(\xi,\pm 1)\hat{N}_{j,x}(\xi,\pm 1)\ \mathrm{d}s_\xi\Big|_{\eta=\pm 1} = \int_{-1}^{1} \hat{N}_i \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\left\{\hat{N}_{j,\xi}J_{22} - \hat{N}_{j,\eta}J_{21}\right\}\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}\ \mathrm{d}\xi \tag{3.22}$$

$$\int_{-1}^{1} \hat{N}_i(\xi,\pm 1)\hat{N}_{j,y}(\xi,\pm 1)\ ds_\xi\Big|_{\eta=\pm 1} = \int_{-1}^{1} \hat{N}_i \frac{1}{\left|\mathbf{J}\right|}\left\{-\hat{N}_{j,\xi}J_{12} + \hat{\psi}_{j,\eta}J_{11}\right\}\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}\ \mathrm{d}\xi \tag{3.23}$$

3.4 Eleman Matrisinin Oluşturulması

Elde edilen fonksiyoneldeki ana terimlerde serbest değişkenler yerine,

$$
\left.
\begin{array}{llll}
u_1 = \sum_{i=1}^{4} u_{1i}\hat{N}_i \; , & \Omega_2 = \sum_{i=1}^{4} \Omega_{2i}\hat{N}_i \; , & N = \sum_{i=1}^{4} N_i\,\hat{N}_i \; , & T = \sum_{i=1}^{4} T_i\,\hat{N}_i \\
u_2 = \sum_{i=1}^{4} u_{2i}\hat{N}_i \; , & F = \sum_{i=1}^{4} F_i\,\hat{N}_i \; , & Q = \sum_{i=1}^{4} Q_i\,\hat{N}_i & \\
u_3 = \sum_{i=1}^{4} u_{3i}\hat{N}_i \; , & H = \sum_{i=1}^{4} H_i\,\hat{N}_i \; , & K = \sum_{i=1}^{4} K_i\,\hat{N}_i & \\
\Omega_1 = \sum_{i=1}^{4} \Omega_{1i}\hat{N}_i \; , & P = \sum_{i=1}^{4} P_i\,\hat{N}_i \; , & M = \sum_{i=1}^{4} M_i\,\hat{N}_i &
\end{array}
\right\} \tag{3.24}
$$

şeklinde yaklaşım fonksiyonları yazılıp çözüme gidilir. Sonlu eleman matrisinin kurulumu esnasında beş çeşit integral ifadesi mevcuttur. Bunlar,

$$
\left.
\begin{array}{lll}
[\mathbf{k}_1] = \int \hat{N}_i\hat{N}_j \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \; , & [\mathbf{k}_3] = \int \hat{N}_{i,2}\hat{N}_j \mathrm{d}x_1 dx_2 \; , & [\mathbf{k}_5] = \int \hat{N}_{i,2}\hat{N}_{j,2} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\
[\mathbf{k}_2] = \int \hat{N}_{i,1}\hat{N}_j \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \; , & [\mathbf{k}_4] = \int \hat{N}_{i,1}\hat{N}_{j,1} \mathrm{d}x_1 dx_2 \; , & [\mathbf{k}_6] = \int \hat{N}_{i,1}\hat{N}_{j,2} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2
\end{array}
\right\} \tag{3.25}
$$

şeklindedir. Dört düğüm noktalı elemanlar için, (3.25) deki integrallerde, 2×2 lik Gauss şemaları kullanılmıştır. Sonuç olarak, keyfi doğrultuda ortotropiye sahip Pasternak zeminine oturan Mindlin plağı için eleman matrisi,

$$
[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_2]^T & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_3]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_3]^T & [\mathbf{k}_2]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_6] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_2]^T & [\mathbf{k}_3]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_1] & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}_2] & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}_3] \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}_3] & -[\mathbf{k}_2] \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_2] & [\mathbf{k}_1]^T & \mathbf{0} & \gamma[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{k}_3] & \mathbf{0} & [k_1]^T & \mathbf{0} & \gamma[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
[\mathbf{k}_2] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \beta[\mathbf{k}_1] & \theta[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & [\mathbf{k}_3] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varsigma[\mathbf{k}_1]^T & \beta[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
[\mathbf{k}_3] & [\mathbf{k}_2] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}_2]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \alpha[\mathbf{k}_1] & \varphi[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}_3]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \varphi[\mathbf{k}_1]^T & \alpha[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -[\mathbf{k}_3]^T & -[\mathbf{k}_2]^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Psi[\mathbf{k}_1]
\end{bmatrix} \tag{3.26}
$$

olur. Burada,

$$\left.\begin{aligned}[\mathbf{k}_6] &= k[\mathbf{k}_1] \\ &\quad + G_\xi\left\{\cos^2\theta[\mathbf{k}_4] + \cos\theta\sin\theta[\mathbf{k}_6] + \cos\theta\sin\theta[\mathbf{k}_6]^T + \sin^2\theta[\mathbf{k}_5]\right\} \\ &\quad + G_\eta\left\{\sin^2\theta[\mathbf{k}_4] - \cos\theta\sin\theta[\mathbf{k}_6] - \cos\theta\sin\theta[\mathbf{k}_6]^T + \cos^2\theta[\mathbf{k}_5]\right\}\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

dır. Ayrıca, katsayılar,

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = -\frac{6}{5Gh}, \lambda = -\frac{1}{Gh}, \Psi = -\frac{12}{Gh^3} \\ &\beta = -\frac{1}{Eh}, \alpha = -\frac{12}{Eh^3} \\ &\varsigma = \frac{\upsilon}{Eh}, \varphi = \frac{12\upsilon}{Eh^3}\end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

dır.

3.5 Yayılı Kütle Matrisi

Dönel eylemsizlik etkisinin de göz önüne alınacağı yayılı kütle matrisi Mindlin plak elemanında geometrik serbestliklerin u_3, Ω_1, Ω_2 olması durumu için;

$$[\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} \rho h[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{12}\rho h^3[\mathbf{k}_1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{12}\rho h^3[\mathbf{k}_1] \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

biçimindedir.

Plak-zemin etkileşiminin serbest titreşim frekansları $[\mathbf{k}] - \omega^2[\mathbf{m}] = 0$ özdeğer probleminin çözülmesi ile elde edilir. Burada ω sistemin açısal doğal titreşim frekansıdır. Karışık sonlu eleman formülasyonunda bu denklem takımı,

$$\left(\begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ [\mathbf{k}_{12}] & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{m}] \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}\} \\ \{\mathbf{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{0}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{Bmatrix} \tag{3.30}$$

yapısındadır. Burada $\{\mathbf{f}\}=\{\mathbf{K} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{T} \quad \mathbf{F} \quad \mathbf{H}\}^{\mathrm{T}}$, kuvvet ve moment türü bilinmeyenleri, $\{\mathbf{w}\}=\{u_3 \quad \Omega_1 \quad \Omega_2\}$ yer değiştirme ve dönme türü bilinmeyenleri içeren vektörlerdir. Denklem takımından $\{\mathbf{f}\}$ nin yok edilmesi ile,

$$\left[\mathbf{k}^{*}\right]=\left[\mathbf{k}_{22}\right]-\left[\mathbf{k}_{12}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{k}_{11}\right]^{-1}\left[\mathbf{k}_{12}\right] \qquad \textbf{(3.31)}$$

elde edilir. Burada $\left[\mathbf{k}^{*}\right]$ kondense sistem matrisidir. Problemde zemin etkisinin olmadığı durumlarda $\left[\mathbf{k}_{22}\right]=[\mathbf{0}]$ olur.

4 SAYISAL SONUÇLAR

4.1 Giriş

Mindlin plak elemanını doğrulamak için önce zeminsiz kare plakta düzgün yayılı yük altında statik çözüm yapılacak ve sonuçlar literatürle karşılaştırılacak. İkinci örnekte yine zeminsiz dört tarafı serbest kare plakta bu defa serbest titreşim problemi incelenecek, hesaplanan en küçük üç frekans değeri doğrulama amacıyla literatürle karşılaştırılacak. Üçüncü örnekte serbest titreşim problemi bu kez zeminli kare plakta doğrulandıktan sonra özgün çözümlere geçilecek. Özgün çözümlemede zemin ortamının plak eksen takımından farklı bir doğrultuda ortotrop olduğu varsayılacak, doğrultu değişimine bağlı olarak frekans ve modların değişimleri incelenecek. Plakta sınır koşulları şu harflerle sembolize edilecektir:

S: Basit mesnet

C: Ankastre mesnet

F: Serbest kenar

Buna göre dikdörtgen plak için sınır koşulları,

SSSS : Dört kenar basit mesnetli plak,

CCCC : Dört kenar ankastre mesnetli plak,

SCSC : Karşılıklı iki kenarı basit, diğer kenarları ankastre mesnetli plak,

SFSF : Karşılıklı iki kenarı basit mesnetli, diğer kenarları serbest plak,

FFFF : Dört kenarı serbest plak.

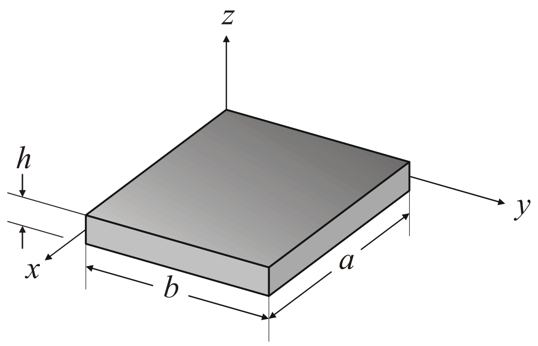
4.2 Mindlin Elemanının Doğrulanması

ÖRNEK 1. Zeminsiz, SCSC, SFSF sınır koşulları için kare plakta statik analiz

Burada dört düğüm noktalı Mindlin plak sonlu elemanının doğrulanması için SCSC, ve SFSF sınır koşullarına sahip Lévy plaklarında yayılı yük altında yapılan sayısal çözüm literatürle karşılaştırılmıştır. Çift simetri nedeniyle sadece çeyrek plakta çözüm aranmıştır. Kare plakta:

Elastisite modülü	:	$E = 20\text{GPa}$
Poisson oranı	:	$\upsilon = 0.3$
Düzgün yayılı yük	:	$q_0 = 100\text{kN/m}^2$
Genişlik	:	$a = b = 8\text{m}$
Kalınlık	:	$h = 1.6\text{m}$ ve $h/a = 0.2$
Plak rijitliği	:	$D = Eh^3/[12(1-\upsilon^2)]$

dır (Bakınız Şekil 4.1). SFSF, SCSC sınır koşulları için yapılan çözümler, çökmede $\overline{w} = wD/(q_0 a^4)$, momentlerde $\overline{M} = M/(q_0 a^2)$ ve kesme kuvvetinde $\overline{H} = H/(q_0 a)$ biçiminde boyutsuzlaştırılarak Tablo 4.1, Tablo 4.2' de **Lee ve Ark., (2002)** deki kesin sonuçlarla karşılaştırılmıştır. SFSF sınır koşulunda 16×16 eleman ağı için % hatalar $\overline{w}$ de % 0.4, $\overline{K}$ de % 1.2, $\overline{M}$ de % 0.8, $\overline{H}$ de 0.8, ve SCSC sınır koşulunda 16×16 eleman ağı için % hatalar $\overline{w}$ de % 0.2, $\overline{K}$ de % 0.3, $\overline{M}$ de % 0, $\overline{H}$ de % 2.3 olp belirtilen sınır koşullarında mühendislik açısından gerekli yakınsaklığın sağlandığı görülmüştür. Ayrıca yakınsamayı görmek için çeyrek plakta eleman ağları 6×6, 8×8, 10×10, 12×12, 16×16 için çökme, eğilme momentleri ve kesme kuvveti için çizilen grafikler SFSF sınır koşulu için Şekil 4.2–4.5 te, SCSC sınır koşulu için Şekil 4.6–4.9 da sunulmuştur.



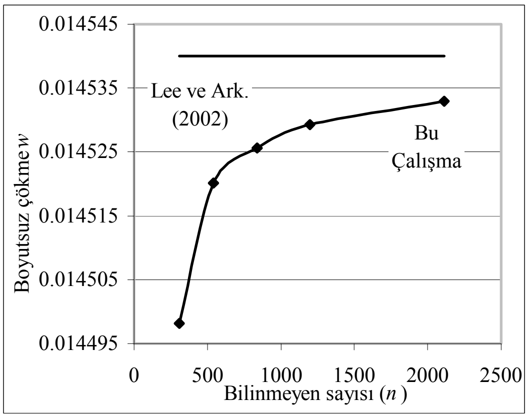
Şekil 4.1: Plak koordinat takımı ve plak boyutları

Tablo 4.1: SFSF çeyrek Lévy plağının çözümü. $\bar{H} = H/(q_0 a)$ kenar ortasında (a/2,b), $\bar{w} = wD/(q_0 a^4)$, $\bar{K} = K/(q_0 a^2)$, $\bar{M} = M/(q_0 a^2)$ plak ortasında (a/2,b/2), hesaplandı, n bilinmeyen sayısıdır

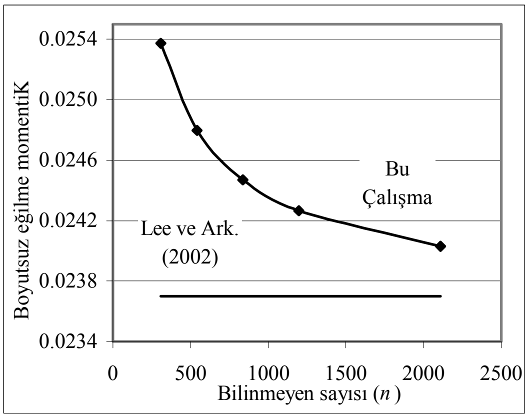
	$\bar{w}\times10^{-6}$	$\bar{K}\times10^{-4}$	$\bar{M}\times10^{-4}$	$\bar{H}\times10^{-3}$	n
Lee ve Ark. (2002)	14540	237	1230	457	
(6×6)	14498	253	1227	455	310
(8×8)	14520	247	1228	458	542
(10×10)	14526	244	1229	459	838
(12×12)	14529	242	1229	460	1198
(16×16)	14533	240	1229	461	2110

Tablo 4.2: SCSC çeyrek Lévy plağının çözümü. $\bar{H} = H/(q_0 a)$ kenar ortasında (a/2,b), $\bar{w} = wD/(q_0 a^4)$, $\bar{K} = K/(q_0 a^2)$, $\bar{M} = M/(q_0 a^2)$ plak ortasında (a/2,b/2), hesaplandı, n bilinmeyen sayısıdır

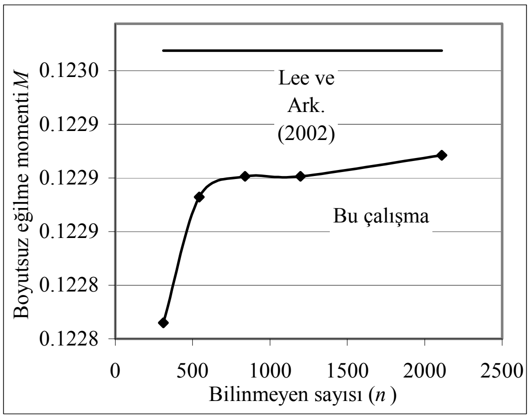
	$\bar{w}\times10^{-6}$	$\bar{K}\times10^{-4}$	$\bar{M}\times10^{-4}$	$\bar{H}\times10^{-3}$	n
Lee ve Ark. (2002)	3021	331	292	251	
(6×6)	3082	346	295	262	312
(8×8)	3056	339	293	260	544
(10×10)	3043	336	293	258	840
(12×12)	3036	334	292	258	1200
(16×16)	3029	332	292	257	2112



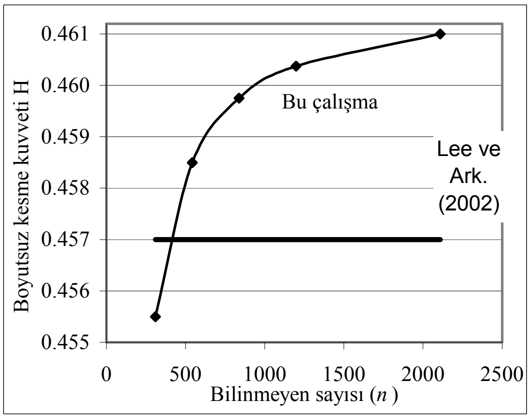
Şekil 4.2: SFSF sınır koşullu plakta $\bar{w} = wD/(q_0 a^4)$ de yakınsaklık



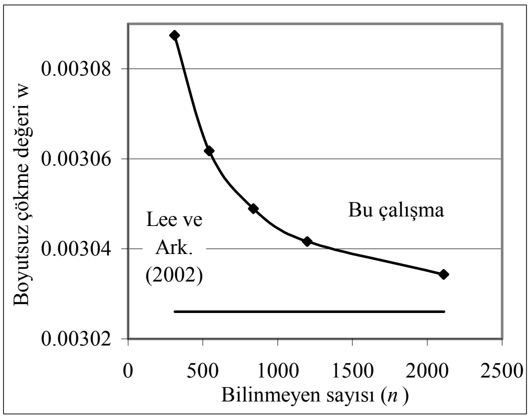
Şekil 4.3: SFSF sınır koşullu plakta $\bar{K} = K/(q_0 a^2)$ de yakınsaklık



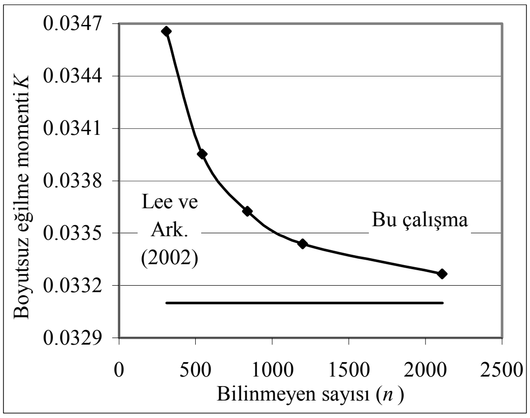
Şekil 4.4 SFSF mesnetli plakta $\bar{M} = M/(q_0 a^2)$ de yakınsaklık



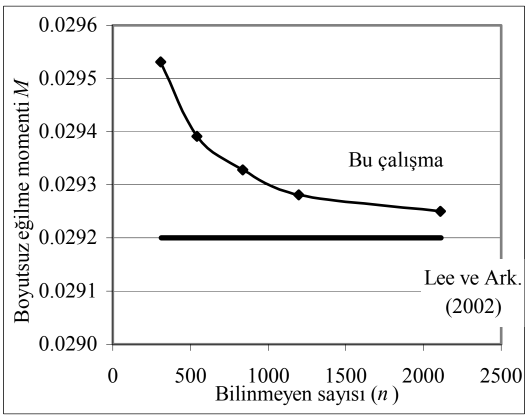
Şekil 4.5 SFSF mesnetli plakta $\bar{H} = H/(q_0 a^2)$ de yakınsaklık



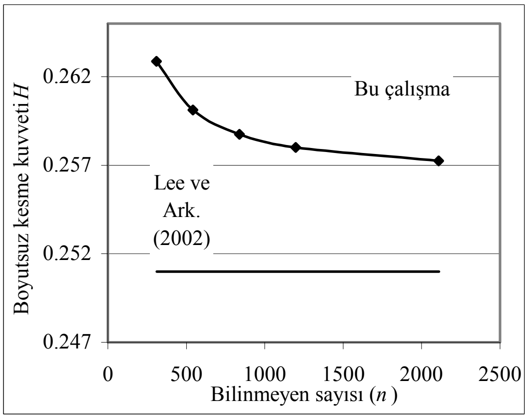
Şekil 4.6: SCSC mesnetli plakta $\bar{w} = wD/(q_0 a^4)$ de yakınsaklık



Şekil 4.7: SCSC mesnetli plakta $\bar{K} = K/(q_0 a^2)$ de yakınsaklık



Şekil 4.8: SCSC mesnetli plakta $\bar{M} = M/(q_0 a^2)$ de yakınsaklık



Şekil 4.9: SCSC mesnetli plakta $\bar{H} = H/(q_0 a^2)$ de yakınsaklık

ÖRNEK 2: Zeminsiz, FFFF sınır koşullu kare plakta dinamik analiz

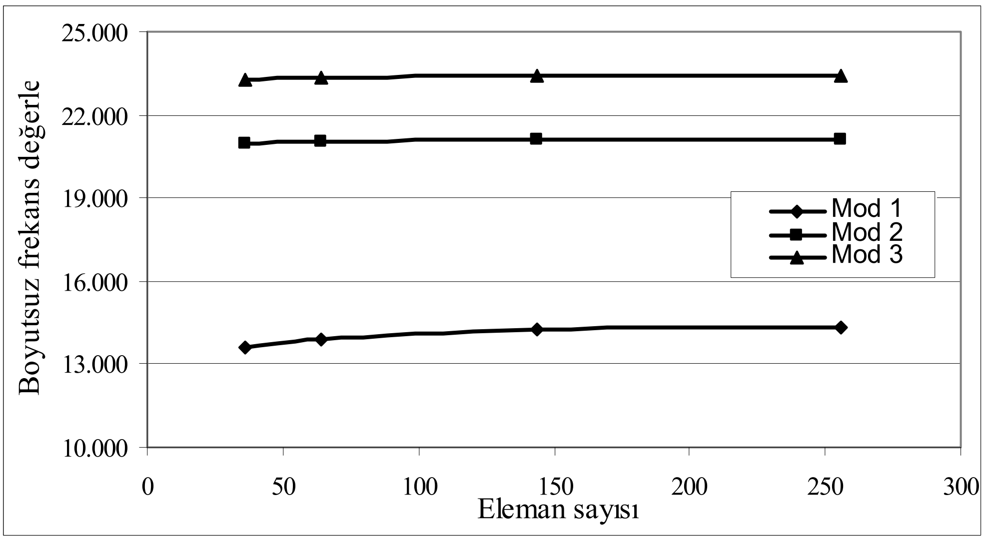
Bu örnekte zeminsiz ve dört tarafı serbest (FFFF) kare plağın serbest titreşimi incelenecektir. Plakta;

Elastisite modülü	:	$E = 20\text{GPa}$
Poisson oranı	:	$\upsilon = 0.15$
Genişlik	:	$a = 10\text{m}$
Kalınlık	:	$h = 0.15\text{m}$ ve $h/a = 0.015$
Plak rijitliği	:	$D = Eh^3/[12(1-\upsilon^2)]$

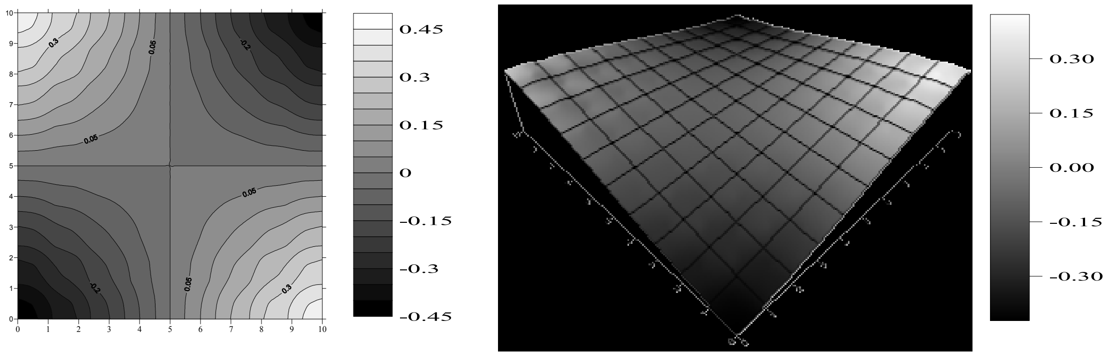
değerleri kullanılmıştır. İlk üç moda ait boyutsuz açısal frekans değerlerinin **Leissa (1969)** ile karşılaştırılması Tablo 4.3'te verilmiş olup, bunların yakınsama eğrileri için Şekil 4.10 dan yararlanılabilir. Şekil 4.11-4.13 de bu frekans değerlerine ait gelen mod şekilleri ile bunlara ait eş yükselti eğrileri görülmektedir.

Tablo 4.3: FFFF sınır koşullu kare plakta boyutsuz frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

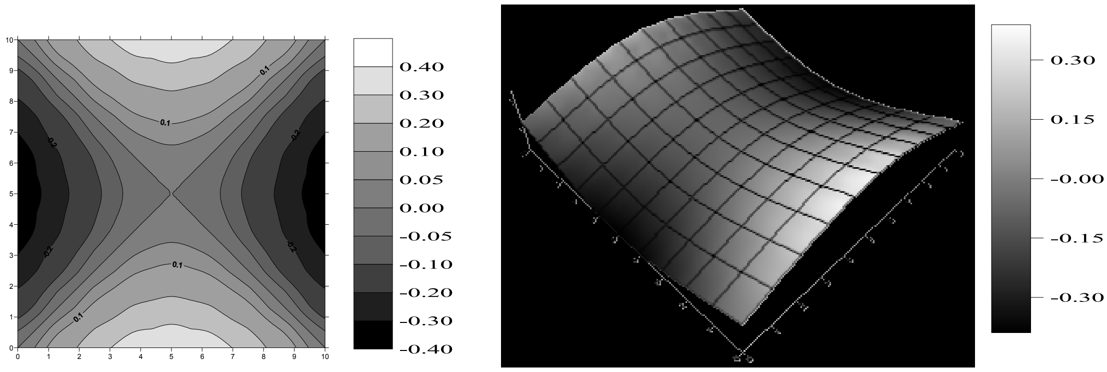
Mod numarası	(6×6)	(8×8)	(12×12)	(16×16)	Leissa 1969
1	13.577	13.917	14.221	14.358	13.473
2	20.991	21.059	21.083	21.088	19.596
3	23.260	23.358	23.394	23.402	24.270



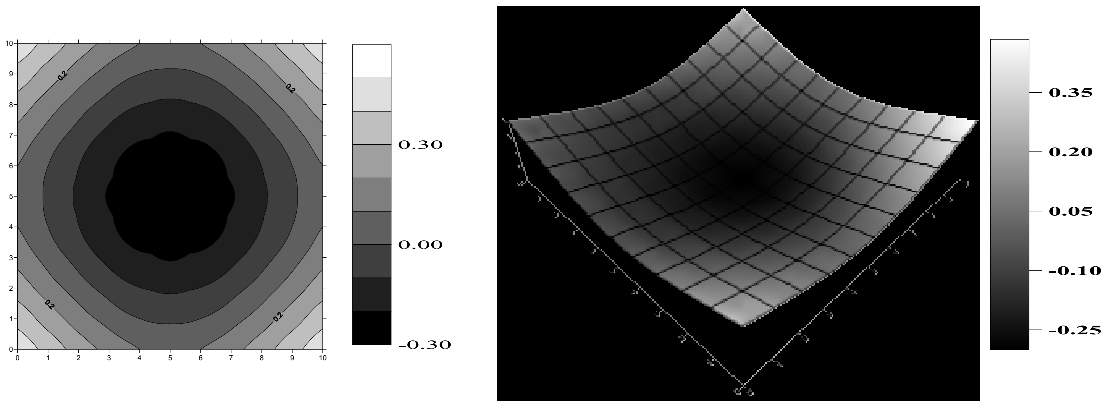
Şekil 4.10: 6×6, 8×8, 12×12, 16×16 eleman ağlarıyla FFFF sınır şartlı kare plakta ilk üç moda ait boyutsuz frekans değerleri $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$



Şekil 4.11: FFFF sınır şartlı plakta Mod 1 için eşyükselti eğrileri ve mod şekli



Şekil 4.12: FFFF sınır şartlı plakta Mod 2 için eşyükselti eğrileri ve mod şekli



Şekil 4.13: FFFF sınır şartlı plakta Mod 3 için eşyükselti eğrileri ve mod şekli

ÖRNEK 3 : İzotrop zeminli, SSSS ve CCCC mesnetli kare plakta dinamik analiz

Zeminle etkileşim halindeki plakta titreşim probleminin inceleneceği bu örnekte zemin etkisini de içerisinde gözeten Mindlin plağı eleman matrisi ile yayılı kütle matrisini doğrulanacaktır. Kare plakta;

Elastisite modülü	:	$E = 25\text{GPa}$
Poisson oranı	:	$\upsilon = 0.3$
Genişlik	:	$a = 10\text{m}$
Kalınlık	:	$h/a = 0.1$ ve $h/a = 0.2$
Plak rijitliği	:	$D = Eh^3/[12(1-\upsilon^2)]$

dir. Boyutsuzlaştırılmış açısal frekans $\hat{\omega} = (\omega a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D}$ dır. Zemin parametreleri k ve G de $\Phi_1 = ka^4/D$ ve $\Phi_2 = Ga^2/D$ biçiminde boyutsuzlaştırılmıştır.

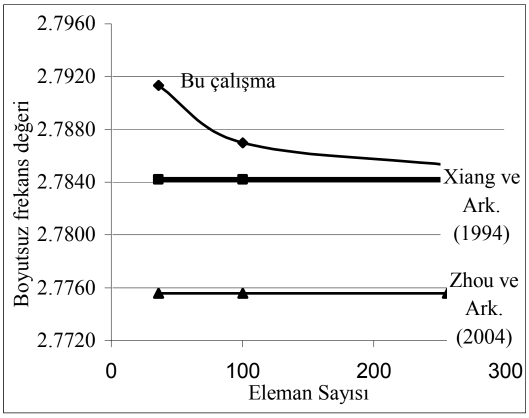
SSSS mesnetli plakta çözümler yapılmış ve bu sınır şartı için kesin özümün verildiği **Xiang ve *ark.* (1994)** ile karşılaştırılmıştır(Bakınız Tablo 4.4). 16×16 eleman ağı kullanılarak $h/a = 0.1$ ve zemin parametreleri $\Phi_1 = 2\times10^3, \Phi_2 = 10$ için plakta $\hat{\omega}_{1,1}$, $\hat{\omega}_{1,2}$, $\hat{\omega}_{2,1}$, $\hat{\omega}_{2,2}$ frekanslarındaki % hatalar sırasıyla $\%0.039$, $\%0.081$ ve $\%0.063$ olduğu görülmüştür. Şekil 4.14 ten Şekil 4.22 e kadarda $\hat{\omega}_{1,1}$, $\hat{\omega}_{1,2}$, $\hat{\omega}_{2,1}$, $\hat{\omega}_{2,2}$ frekanslarının değişen eleman ağıyla birlikte nasıl yakınsadığı gösterilmektedir.

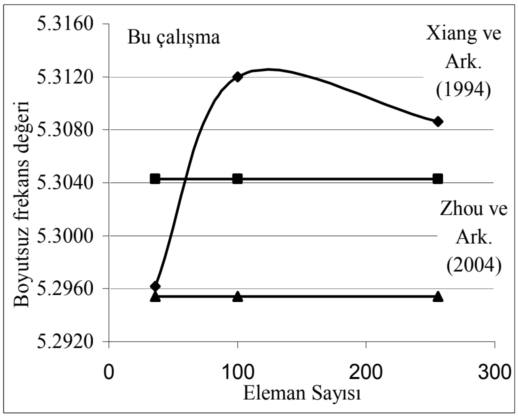
CCCC mesnetli plak çözümleri, Ritz yöntemini kullanarak yüksek dereceden polinomlarla problemi elastisite kuramına göre çözen **Zhou ve *ark.* (2004)** ile bu çalışma sonuçlarının uyumlu olduğu görülmektedir. Söz konusu çalışmada, plak alan denklemleri plak ortalama düzlemi için çıkarılmış olan Mindlin kuramının çok kalın plaklar üç boyutlu cisme yaklaştığından Mindlin çözümü gerçek çözümden uzaklaşmaktadır. Sözü edilen durum bu çalışmada da gözlenmiştir.

Tablo 4.4: SSSS sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

h/a	Φ_1	Φ_2	Yöntem		$\hat{\omega}_{1,1}$	$\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$	$\hat{\omega}_{2,2}$
0.1	2×10^2	10	Bu çalışma	6×6 ağ	2.7913	5.2962	7.6889
				10×10 ağ	2.7870	5.3120	7.7349
				16×16 ağ	2.7853	5.3086	7.7336
			Xiang ve *ark*. (1994)		2.7842	5.3043	7.7287
			Zhou ve *ark*. (2004)		2.7756	5.2954	7.7279
	10^3	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.9855	6.0008	8.1843
				10×10 ağ	3.9825	6.0146	8.2274
				16×16 ağ	3.9813	6.0116	8.2261
			Xiang ve *ark*. (1994)		3.9805	6.0078	8.2214
			Zhou ve *ark*. (2004)		3.9566	5.9757	8.1954

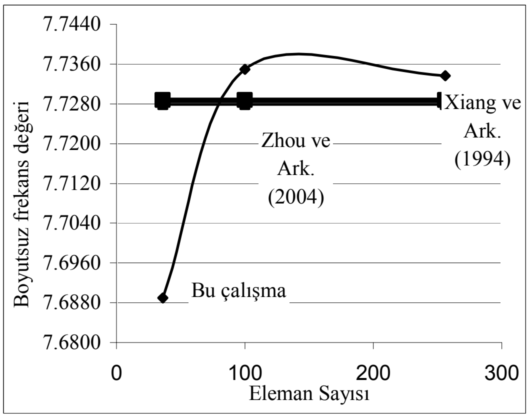
h/a	Φ_1	Φ_2	Yöntem		$\hat{\omega}_{1,1}$	$\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$	$\hat{\omega}_{1,3}, \hat{\omega}_{3,1}$
0.2	10^3	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.8619	5.4121	7.6901
				10×10 ağ	3.8587	5.4134	7.8991
				16×16 ağ	3.8575	5.4086	7.9044
			Xiang ve *ark*. (1994)		3.8567	5.4043	7.8938
			Zhou ve *ark*. (2004)		3.7111	5.2285	7.7191
	10^5	10	Bu çalışma	6×6 ağ	17.9894	20.0520	22.6516
				10×10 ağ	17.9905	20.0874	22.5936
				16×16 ağ	17.9906	20.0915	21.9535
			Xiang ve *ark*. (1994)		17.9910	20.0920	21.9550
			Zhou ve *ark*. (2004)		4.6127	7.2934	10.3140

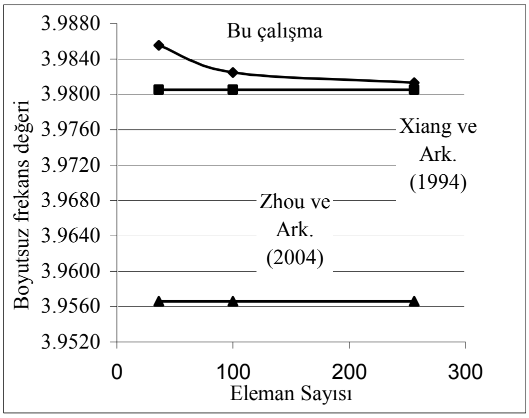




Şekil 4.14: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.1$ kalınlıklı plakta Φ_1=200, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,1}$ için yakınsaklık eğrisi

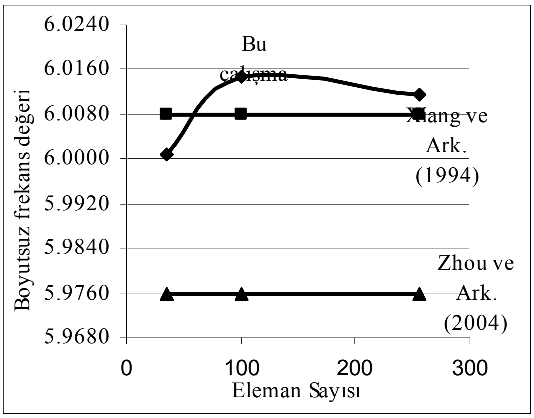
Şekil 4.15: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=200, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$ için yakınsaklık eğrisi

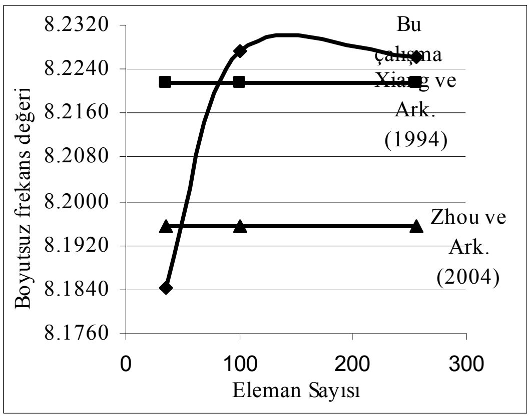




Şekil 4.16: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=200, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{2,2}$ için yakınsaklık eğrisi

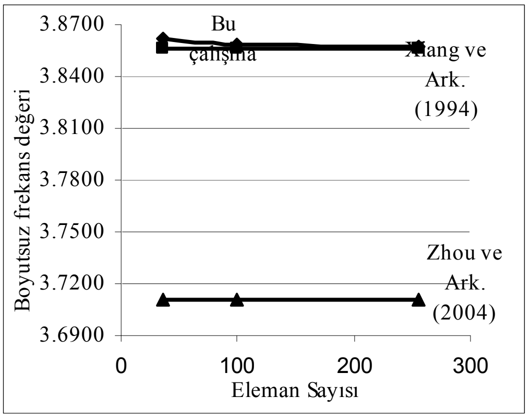
Şekil 4.17: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=1000, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,1}$ için yakınsaklık eğrisi



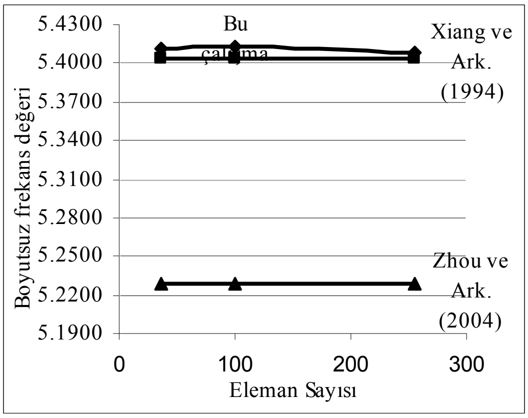


Şekil 4.18: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=1000, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$ için yakınsaklık eğrisi

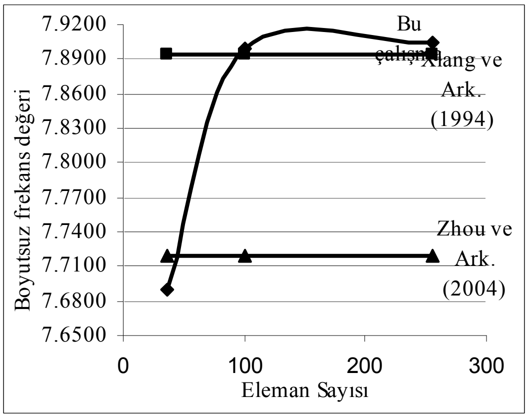
Şekil 4.19: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=1000, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{2,2}, \hat{\omega}_{2,2}$ için yakınsaklık eğrisi



Şekil 4.20: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.2$ plakta Φ_1=1000, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,1}$ için yakınsaklık eğrisi



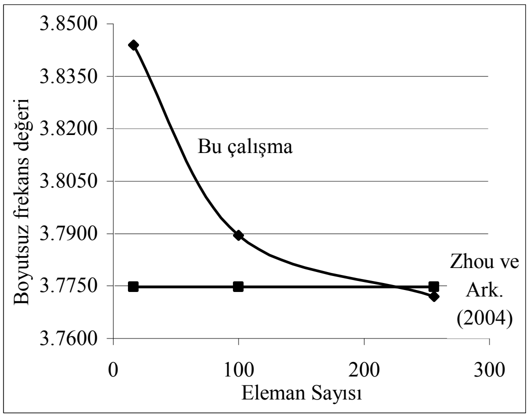
Şekil 4.21: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.2$ plakta Φ_1=1000, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$ için yakınsaklık eğrisi



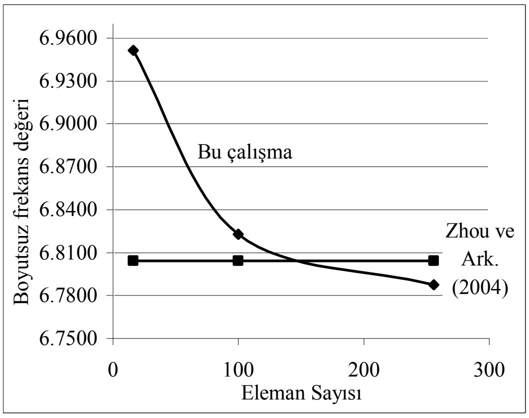
Şekil 4.22: SSSS sınır şartlı $h/a = 0.2$ plakta Φ_1=1000, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,3}$, $\hat{\omega}_{3,1}$ için yakınsaklık eğrisi

Tablo 4.5: CCCC sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

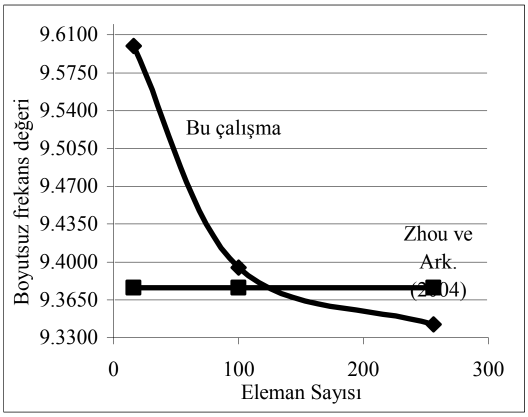
h/a	Φ_1	Φ_2	Yöntem		$\hat{\omega}_{1,1}$	$\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$	$\hat{\omega}_{2,2}$
0.1	10^2	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.8439	6.9515	9.5996
				10×10 ağ	3.7895	6.8229	9.3949
				16×16 ağ	3.7721	6.7875	9.3423
			Zhou ve *ark*. (2004)		3.7748	6.8041	9.3762
	10^3	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.9855	6.0008	8.1843
				10×10 ağ	3.9825	6.0146	8.2274
				16×16 ağ	3.9813	6.0116	8.2261
			Zhou ve *ark*. (2004)		4.8164	7.4134	9.8160



Şekil 4.23: CCCC sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=100, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,1}$ için yakınsaklık eğrisi



Şekil 4.24: CCCC sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=100, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$ için yakınsaklık eğrisi



Şekil 4.25: CCCC sınır şartlı $h/a = 0.1$ plakta Φ_1=100, Φ_2=10 zemin parametrelerinde $\hat{\omega}_{2,2}$ için yakınsaklık eğrisi

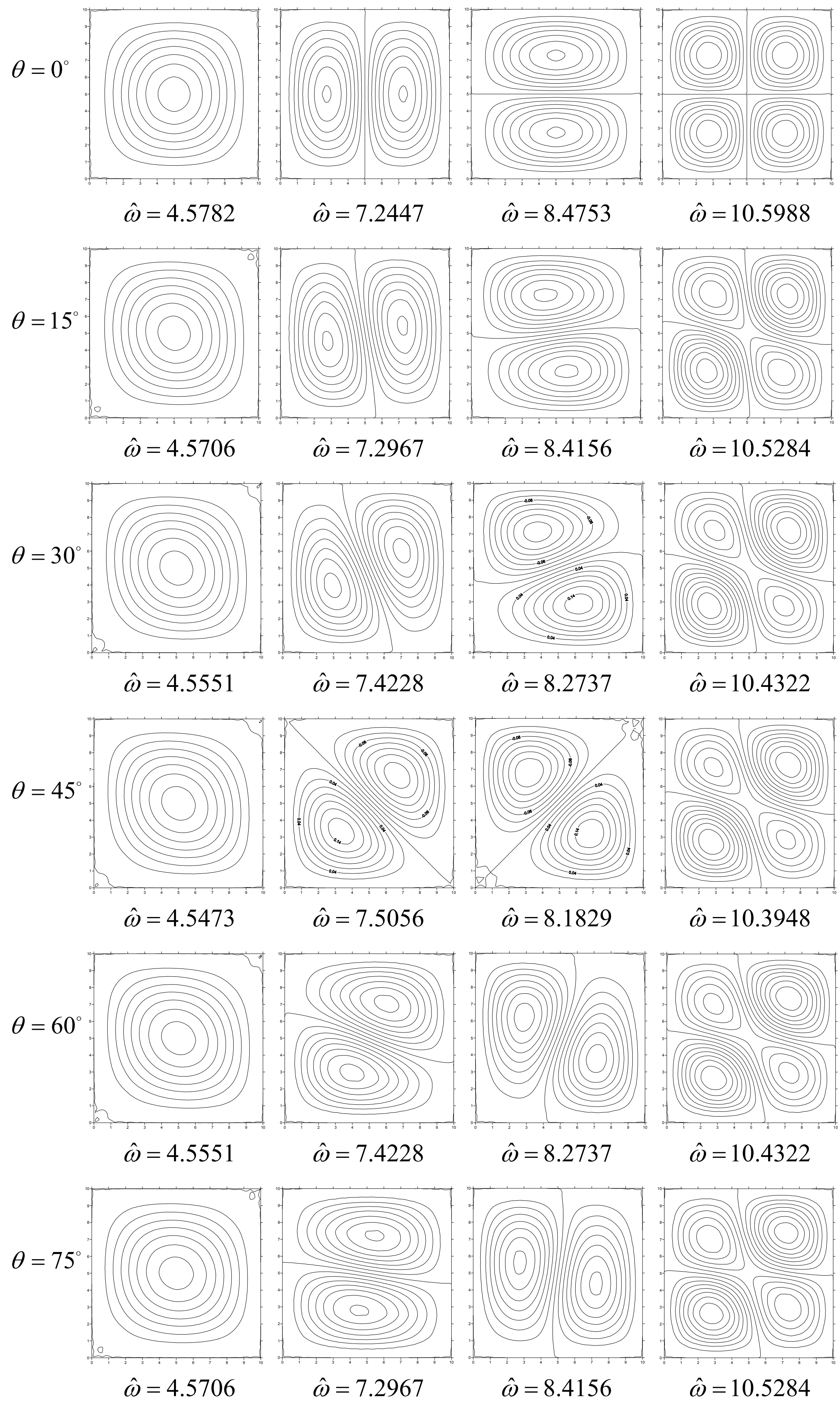
4.3 Özgün Çözümler

ÖRNEK 4: Keyfi doğrultuda ortotrop zeminle etkileşim halindeki kare plakta dinamik analiz

Özgün çözümlerin yapılacağı bu örnekte zemin ortotropisinin plak eksenlerinden farklı olarak keyfi doğrultularda olması hali göz önüne alınmıştır. Hesaplar Örnek 2 de yapılan yakınsaklık değerlendirmesi sonuçlarına dayanılarak 16×16 eleman ağında gerçekleştirilmiştir. Yapılan çözümlerde SSSS, CCCC, SCSC mesnet koşullarında plak boyutsuz serbest titreşim frekansları ($\hat{\omega} = (\omega a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D}$) ile bunlara ait mod şekilleri grafikler halinde sunulmuştur. Hesaplarda;

Elastisite modülü	:	$E = 25\text{GPa}$
Poisson oranı	:	$\upsilon = 0.3$
Genişlik	:	$a = 10\text{m}$
Kalınlık	:	$h = 1\text{m}$ ve $h/a = 0.1$
Plak rijitliği	:	$D = Eh^3/[12(1-\upsilon^2)]$
Zemin sabitleri	:	$\Phi_1 = 100$, $\Phi_{2(\xi)} = 10$, $\Phi_{2(\eta)} = 70$

değerleri kullanılmıştır. Burada (ξ), (η) alt indisleri ilgili kayma modülünün ortotropi eksenini göstermektedir.



Şekil 4.26: CCCC mesnetli plakta boyutsuz frekans değerleri ve mod şekilleri

Tablo 4.6: Ortotrop zemine oturan CCCC sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

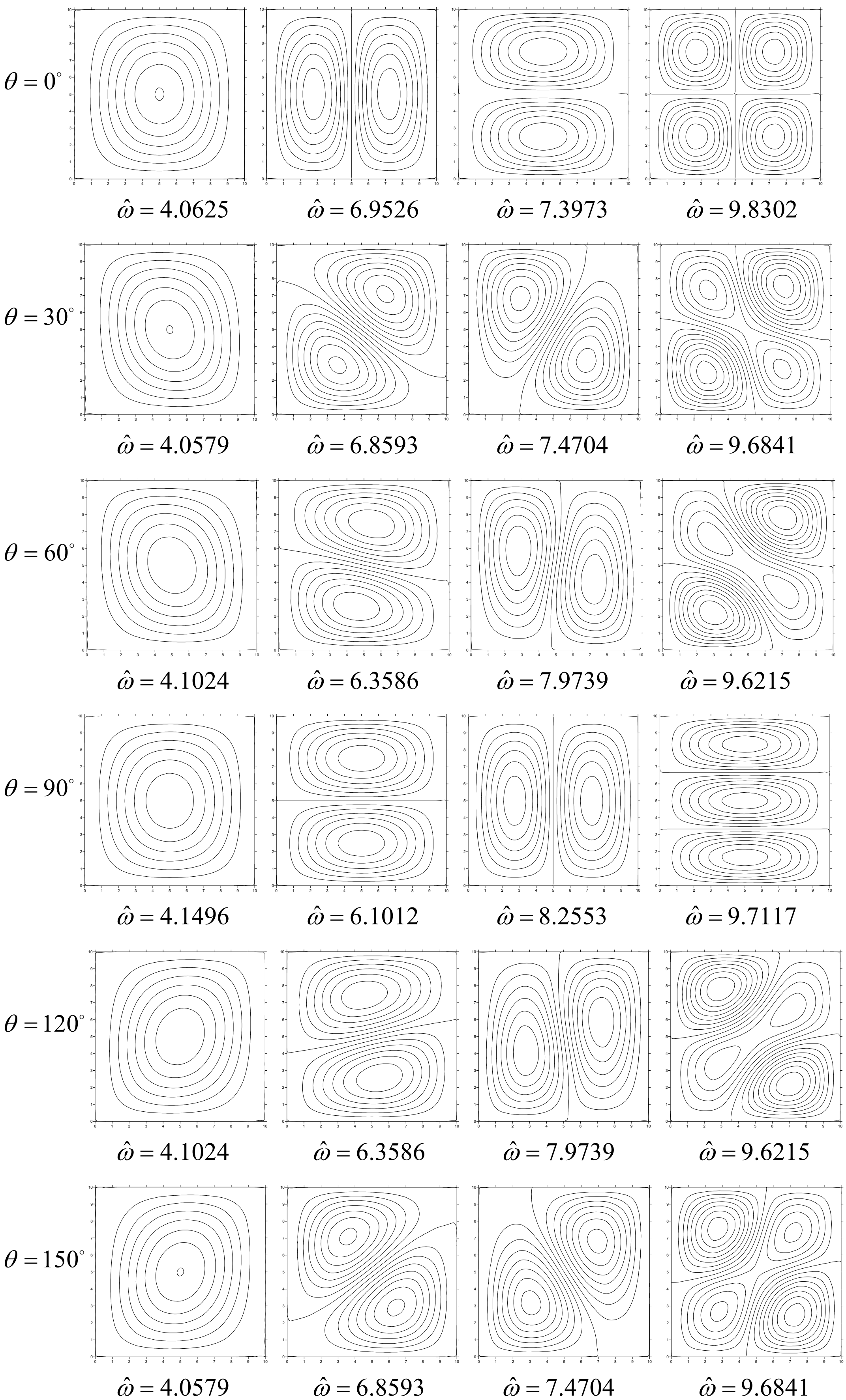
θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Mod 1	4.5782	4.5706	4.5551	4.5473	4.5551	4.5706	4.5782
Mod 2	7.2448	7.2968	7.4228	7.5056	7.4228	7.2968	7.2448
Mod 3	8.4754	8.4156	8.2737	8.1830	8.2737	8.4156	8.4754
Mod 4	10.5988	10.5284	10.4323	10.3948	10.4323	10.5284	10.5988
Mod 5	11.2388	11.4219	11.8307	12.2261	11.8307	11.4219	11.2388
Mod 6	13.2810	13.1606	12.8309	12.4641	12.8309	13.1606	13.2810
Mod 7	14.0166	14.0001	13.9793	13.9745	13.9793	14.0001	14.0166
Mod 8	15.0828	15.0506	14.9799	14.9417	14.9799	15.0506	15.0828
Mod 9	16.0314	16.2371	16.7664	17.3932	16.7664	16.2371	16.0314
Mod 10	18.0272	17.8671	17.6970	17.4953	17.6970	17.8671	18.0272

Tablo 4.7: Ortotrop zemine oturan SCSC sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Mod 1	4.0625	4.0596	4.0580	4.0714	4.1024	4.1355	4.1497
Mod 2	6.9526	6.9577	6.8593	6.6188	6.3586	6.1694	6.1012
Mod 3	7.3974	7.3856	7.4704	7.7050	7.9740	8.1791	8.2553
Mod 4	9.8303	9.7774	9.6842	9.6255	9.6216	9.6627	9.7117
Mod 5	11.0743	11.2419	11.4170	10.9443	10.4518	10.0676	9.8968
Mod 6	11.9076	11.7828	11.6764	12.1861	12.6763	12.9173	12.9198
Mod 7	13.5154	13.4331	13.2615	13.0847	12.9599	13.0251	13.1512
Mod 8	14.0002	14.0399	14.1285	14.2663	14.4390	14.5809	14.4412
Mod 9	15.9305	16.1330	16.6114	15.9489	15.2354	14.6746	14.6480
Mod 10	17.2441	17.1040	16.6769	16.8226	16.8271	16.9458	17.0973

Tablo 4.8: Ortotrop zemine oturan SSSS sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Mod 1	3.5716	3.5616	3.5413	3.5310	3.5413	3.5616	3.5716
Mod 2	5.7530	5.8207	5.9895	6.1075	5.9895	5.8207	5.7530
Mod 3	7.1451	7.0716	6.8915	6.7678	6.8915	7.0716	7.1451
Mod 4	9.0773	8.9905	8.8897	8.8529	8.8897	8.9905	9.0773
Mod 5	9.5259	9.7388	10.1921	10.6600	10.1921	9.7388	9.5259
Mod 6	11.7673	11.6350	11.2704	10.8333	11.2704	11.6350	11.7673
Mod 7	12.3922	12.3767	12.3633	12.3644	12.3633	12.3767	12.3922
Mod 8	13.5439	13.5073	13.4237	13.3776	13.4237	13.5073	13.5439
Mod 9	14.3389	14.5580	15.1249	15.8173	15.1249	14.5580	14.3389
Mod 10	16.4937	16.3091	16.1287	15.8801	16.1287	16.3091	16.4937



Şekil 4.27: SCSC mesnetli plakta boyutsuz frekans değerleri ve mod şekilleri

5 SONUÇLAR

Bu çalışmada, nispeten kalın plaklar için geliştirilmiş Mindlin kuramı ile Pasternak zemini arasındaki etkileşim dinamik açıdan incelenmiştir. Özgün kısım ise Pasternak zeminin keyfi doğrultuda ortotropiye sahip olmasıdır. Çözüm için mühendislik problemlerinde sıklıkla tercih edilen sonlu eleman yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla Gâteaux diferansiyelinden faydalanılarak plak alan denklemleri içine keyfi doğrultuda ortotropiye sahip zemin etkileri de katılmış hal için karışık sonlu eleman formülasyonuna uygun bir özgün fonksiyonel elde edilmiştir.

Karışık sonlu elemanda Mindlin plağı için değişkenler $(u_1, u_2, u_3, \Omega_1, \Omega_2, F, H, P, N, Q, K, M, T)$ dir. Fonksiyonelde birinci mertebeden büyük türevli ifade olmadığından C^0 sürekliliğine sahip izoparametrik sonlu eleman kullanılmıştır. Mevcut eleman dört düğüm noktalı dörtgen izoparametrik elemandır. Gerekli hesap işlemleri master eleman üzerinden sayısal integrasyonla 2×2 ve 4×4 Gauss şemaları kullanılarak gerçekleştirilmiştir 4 düğüm noktalı elemanda, her bir düğüm noktasında 13 bilinmeyen olduğundan, toplam bilinmeyen sayısı 52 dir. Dinamik çözümlerde yayılı kütle matrisi kullanılmıştır. Kütle matrisi dönel eylemsizlik momenti terimleri de içermektedir. Yalnız dinamik analiz için, sistem matrisinde, eleman matrisinde kuvvet ve moment tipi büyüklüklerden yer değiştirme ve dönme tipi büyüklüklere bir kondensasyon işlemi yapıldıktan sonra özdeğer ve özvektör hesabına geçilmiştir.

Eleman matrisinden sistem matrisinde geçildiğinde oldukça büyük denklem takımları çıkmakta ve matematiksel çözümler bilgisayar teknolojisi kullanımını zorunlu hale getirmektedir. Bu sebeple söz konusu problem çözümleri için Fortran programlama dilinde geliştirilmiş bir program kullanılmıştır.

Çözümleme kısmında ilk olarak geliştirilen elemanın doğrulanması amaçlanmı ve önce zeminsiz plakta yayılı yük altında statik çözüm yapılmış, bazı çökme moment ve kesme kuvveti değerleri literatürle karşılaştırılmıştır. Kare plakta yapılan çözümler problemin simetrisi sebebiyle çeyrek plak üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Burada SCSC ve SFSF sınır koşulları altında $h/a = 0.2$ plak kalınlık oranında çözümler yapılmış ve sonuçlar Lee ve ark. (2002) ile karşılaştırıldığında yeterli yakınsaklığın sağlandığı görülmüştür. Sonuçlar tablolar halinde verilmiş ve değişen eleman ağına göre ayrıca yakınsamaların nasıl olduğu grafikler halinde sunulmuştur (Bakınız Tablo 4.1-4.2 ve Şekil 4.2-4.9). İkinci olarak dört tarafı serbest (FFFF sınır koşullu) zeminsiz kare plağın serbest titreşim problemi üzerinde durulmuştur. Burada yapılan çözümde zeminsiz hal için eleman matrisi ve kütle matrisinin doğrulanması amaçlanmıştır. Bu çözümde en küçük üç serbest titreşim frekans değeri literatürle **(Leissa 1969)** karşılaştırılmış ve sonuçların yakın değerde olduğu görülmüştür (Bakınız Tablo 4.3). Üçüncü örnekte bu kez zemine oturan nispeten kalın kare plakta ($h/a = 0.1,\ h/a = 0.2$) titreşim problemi SSSS ve CCCC sınır koşulları için farklı semin parametreleri değerlerinde çözülüp literatür karşılaştırılması yapılmıştır. SSSS sınır şartlı Mindlin plağı için kesin çözüm sunan **Xiang ve *ark.* (1994)** ile bu çalışmadan elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında sonuçların nerdeyse üst üste düştüğü görülmüştür. Örnek olarak 16×16 eleman ağında $h/a = 0.1$ plak kalınlığında $\Phi_1 = 2 \times 10^3, \Phi_2 = 10$ zemin parametresinde $\hat{\omega}_{1,1}$ boyutsuz frekansı için hata oranı % 0.039, $\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$ boyutsuz frekansı için hata oranı % 0.081 ve $\hat{\omega}_{2,2}$ boyutsuz frekansı için hata oranı % 0.063 olarak bulunmuştur. Yine aynı örnekteki sonuçlar **Zhou ve *ark.* (2004)** nın üç boyutlu elastisite teorisine dayanan çözümleriyle karşılaştırılmış sonuçların yeter yakınlıkta olduğu gözlenmiştir. Bundan sonra özgün çözümlere geçilmiş yine kare plakta 16×16 eleman ağında SSSS, CCCC, SCSC sınır koşulları için farklı ototropi eksenlerine sahip zeminler için çözümler yapılmıştır. Ortotropi ekseninin plak eksenine göre dönmesiyle birlikte açısal frekans değerlerinin nasıl değiştiği, ve beklendiği üzere mod şekillerinin bu eksen dönüşüne göre nasıl hareket ettiği incelenmiş, grafikler ve tablolar halinde sunulmuştur (Bakınız Şekil 4.26-4.27, Tablo 4.6-4.8).

KAYNAKLAR

Akbarov, S.D., Kocatürk, T. (1997). On the bending problems of Anisotropic (Orthotropic) plates resting on elastic foundations that react in compression only, *Int. J. Solids Structures*, **34**, 3673-3689.

Aköz, A.Y., Omurtag, M.H., ve Doğruoğlu, A.N. (1991). "The Mixed Finite Element Formulation for Three Dimensional Bars", *Int. J. Solids Structures,* **28**, 225-234.

Al-Hosani, K. (2001). A non singular fundamental solution for boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation under generalized loading, *Computers & Structures*, **79**, 2767-2780.

Altman, W., ve Neto E. L., (1989). Stability of annular sectors and plates subjected to follower loads based on a mixed finite element formulation, *Computers & Structures*, **31**(6), 833-840.

Azizian, G.A. ve Dawe, D.J. (1985). Geometrically nonlinear analysis of rectangular Mindlin plates using the finite strip method, *Computers & Structures*, **21**(3), 423-436.

Benson, P.R. ve Hinton, E. (1976). A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems, *Int. J. Numer. Mets. Engng.,* **10**, 665-678.

Bergan, P.G. ve Wang, X. (1984). Quadrilateral plate bending elements with shear deformations, *Computers ans Structures,* **19**, 25-34.

Cheung, Y.K., Chakrabarti, S. (1972). Free vibration of thik, layered rectangular pates by a finite layer method, *Journal of Sound and Vibration*, **12**, 187-199.

Chucheepsakul, S., Chinnaboon, B. (2003). Plates on two parameter elastic foundations with nonlinear boundary conditions by the boundary element method, *Computers & Structures*, **81**, 2739-2748.

Cooke, D.W., Levinson, M (1983). Thick rectangular plates-II, the generalised Lévy solution, *International Journal of Mechanical Sciences*, **25**, 207-215.

Çelik, T., (2003). Tekillik içeren Reissner plaklarının sonlu eleman çözümünde geçiş elemanları kullanılarak ağ sıklaştırması, *İTÜ Yüksek Lisans Tezi.*

Daloğlu, A.T., ve Vallabhan, C.V.G. (2000). Values of K for slabs on Winkler foundation, *Jurnal of Geotechnical and Geoenviromental Engng.*, **126**(5), 463-471.

Dawe, D.J., ve Roufeil, O.L. (1982). Buckling of rectangular Mindlin plates, *Computers & Structures*, **15**(4), 461-471.

Dawe, D.J., ve Roufeil, O.L. (1980). Rayleigh–Ritz vibration analysis of Mindlinplates, *Journal of Sound and Vibration*, **69**, 345-359.

Dawe, D.J. (1978). Finite strip models for vibration of Mindlin plates, *Journal of Sound and Vibration*, **59**, 441-452.

Doğruoğlu, A.N., Omurtag, M.H., Kadıoğlu, F. (1999). Elastik zemin-plak etkileşiminde serbest titreşim ve stabilite analizi için karışık sonlu eleman formülasyonu, *İMO Teknik Dergi,* yazı 134.

Dong, Y.F., Wu, C.C., Teixeria de Freitas, J.A. (1993). The hybrid stress model for Mindlin-Reissner plates based on a stress optimization condition, *Computers and Structures,* **46**, 877-897.

Eratlı, N., Aköz, A.Y. (1997). The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations, *Computers & Structures,* **65**(4), 515-529.

Eratlı, N., Aköz, A.Y. (2002). Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element, *Structural Engineering and Mechanics,* **13**, 277-298.

Filonenko-Borodich, M. M. (1940). *Some approximate theories of the elastic foundation*, (in Russian), Uchenyie Zapiski Moscovskogo Gosudarstuennogo Universiteta Mechanika*,* **46**, 3-18.

Irie, T., Yamada, G., Aomura, S. (1979). *Free vibration of Mindlin annular plate of varying thickness,* Journal of Sound and Vibration, **66 (2)**, 187-197.

Hinton, E., Huang, H.C. (1986). Shear forces and twisting moments in plates using Mindlin elements.ation. *Engineering Computation,* **3**, 129-142.

Huang, H.C., Hinton, E. (1984). A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation. *Engineering Computation,* **1**, 369-379.

Huang, M.H., Thambiratnam, D.P. (2001). Analysis of plate resting on elastic supports and elastic foundation by finite strip method, *Computers & Structures,* **79**, 2547-2557.

Hui-Shen Shen, (2000). Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner-Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations, *Engineering Structures*, **22**, 847-856.

Kant, T., Hinton, E., (1980). Numerical anlysis of rectangular Mindlin plates by segmentation method, *Vibration of Plates*. NASA SP 160. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office

Lam, K.Y., Wang, C.M., He, X.Q. (2000). Canonical exact solutions for Levy-plates on two-parameter foundation using Green's functions, *Engineering Structures*, **(22)**, 364-378.

Leissa, A.W. (1969). *Vibration of Plates*. NASA SP 160. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office.

Lee, K.H., Lim, G.T., Wang, C.M. (2002). Thick Lévy plates re-visited. *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 127-144.

Luo Ji-Wei (1982). A hybrid/mixed model finite element analysis for buckling of moderately thick plates, *Computers & Structures*, **15**, 359-364.

Matsunaga, H. (2000). Vibration and stability of thick plates on elastic foundations, *Journal of Engineering Mechanics - ASCE,* **126 (1)**, 27–34.

Mindlin, R.D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Transactions of the ASME, *Journal of Applied Mechanics, ASME,* **18**, 1031–1036.

Mizusawa, T., Kajita, T., ve Naruoka, M. (1980). Vibration and buckling analysis of plates of abruptly varying stiffness, *Computers & Structures*, **12**, 689-693.

Nelson, R.B., Lorch, D.R. 1974. Arefined theory for laminated orthotropic plates. Transactions of the ASME**,** *Journal of Applied Mechanics,* **41**, 177-183.

Oden, J.T., Reddy, J.N. (1976). *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer Verlag.

Omurtag, M.H., ve Aköz, A.Y. (1992). Mixed finite element formulation of eccentrically stiffened cylindrical shells, *Computers & Structures*, **42**(5), 751-768.

Omurtag, M.H., ve Aköz, A.Y. (1994). Hyperbolic paraboloid shell analysis via mixed finite element formulation, *International Journal of Numerical Methodsin Engineering*, **37**, 3037-3056.

Omurtag, M.H., ve Aköz, A.Y. (1995). Isoparametric mixed finite element formulation of orthotropic cylindrical shells, *Computers & Structures*, **55**(5), 915-924.

Omurtag, M.H., ve Kadıoğlu, F. (1998). Free vibration analysis of orthotropic plates resting on pasternak foundation by mixed finite element formulation, *Computers & Structures*, **67**, 253-265.

Omurtag, M.H., Özütök, A., Aköz, A.Y. ve Özçelikörs, Y. (1997). Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential, *International Journalof Numerical Methodsin Engineering*, **40**, 295-317.

Özçelikörs, Y., Omurtag, M.H., Demir, H. (1997). Analysis of orthotropic plate-foundation interaction by mixed finite element formulation using Gateaux differential, *Computers & Structures,* **62**, 93-106.

Panc, V. (1975). *Theories of Elastic Plates*, Noordhoff International Publishing.

Pasternak, P.L. (1954). *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow (in Russian).

Rashed, Y.F., Aliabadi, M.H., Brebbia, C.A. (1999). A boundary element formulation for a Reissner plate on a Pasternak foundation, *Computers & Structures,* **70**, 515-532.

Reddy, J.N. (1999). *Theory and Analysis of Elastic Plates,* Taylor & Francis, Philadelphia.

Reissner, E. (1945). The effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, 69-77.

Sadecka, L., (2000). A finite/infinite element analysis of thick plate on a layered foundation, *Computers & Structures*, **76**, 603-610.

Setoodeh, A.R., Karami, G. (2003). Static free vibration and buckling analysis of anisotropic thick laminated composite plates on distributed and point elastic supports using a 3-D layer-wise FEM, *Engineering Structures,* **26**, 211-220.

Shen, H.S., Yang, J., Zhang, L. (2001). Free and forced vibration of Reissner-Mindlin plates with free edges on elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration,* **244** (2), 299-320.

Srinivas, S., Rao, C.V.J., Rao, A.K. (1970). An exact analysis of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, **12** (2), 187-199.Analysis of plates on elastic foundations, *Dissertation*, Texas Tech. University.

Straughan, W.T. (1990). Analysis of plates on elastic foundations, *Dissertation*, Texas Tech. University.

Subramanian, P. (1999). Finite element analysis of thick homogeneous plates, *Computers & Structures*, **71**, 469-480.

Tabarrok, B., Fenton, R.G. ve Elsaie, A.M. (1974). Application of a refined plate bending element to buckling problems, *Computers & Structures*, **4**, 1313-1321.

Teo, T.M., Liew, K.M. (2002). Differential cubarature method for analysis of shear deformable rectangular plates on Pasternak foundations. *International Journal of Mechanical Sciences,* **44,** 1179-1194.

Timeshenko, S. ve Krieger, S. W. (1959). *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company.,79-88,41-42

Vallabhan, C.V.G. ve Das, Y.C. (1988). Parametric study of beams on elastic foundations. *J. Engng. Mech. Div., ASCE* **114**(2), 2072-2082.

Vlasov, Z.V. (1949). *Structural Mechanics of thin walled three dimensional systems*, (in Russian), Stroizdat.

Vlasov, Z.V. ve Leont'ev, N.N. (1966). *Beams, plates and shells on elastic foundations,* (in Russian), Fizmatgiz, Moscow, USSR, 1960, Translated from Russian, Israel Program for Scientific Translation, Jarusalem, Israel.

Wang, C.M., Lim G.T., Lee,K.H., (1999). Relationships between Kirchhoff and Mindlin bending solutions for Lévy plates, *Journal of Applied Mechanics*, **66**, 541-545.

Washizu, K. (1968). Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, Oxford, UK.

Weller, T. (1981). Combined effects of in-plane boundary conditions and stiffening on buckling of eccentrically stringer-stiffened cylindrical panels, *Computers & Structures*, **14**(5-6), 427-442.

Xiang, Y., Wang, C.M., Kitipornchai, S. (1994). Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak Foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*, **36**(4), 311-316.

Yu, L., Shen, H.S., Huo, X.P. (2007). Dynamic responses of Reissner-Mindlin plates with free edges resting on tensionless elastic foundations. *Journal of Sound and Vibration,* **299,** 212-228.

Yuan, F.G., Miller, R.E. (1992). Bending solutions of sectorial Mindlin plates from Kirchhoff plates. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* **126** (4)**,** 367-372.

Yuan, F.G., Miller, R.E. (1992). Improved rectangular element for shear deformable plates. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* **118,** 312-328.

Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H., Au, F.T.K. (2004). Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation, *International Journal of Numerical Methods in Engineering,* **59,** 1313-1334.

ÖZGEÇMİŞ

Akif KUTLU, 1982 yılında Ankara'da dünyaya geldi. Ankara Anadolu Lisesi'nden 2000 tarihinde mezun oldu ve aynı yıl İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi'nde lisans eğitimine başladı. 2005 yılında Lisans eğitimini tamamlayıp aynı sene İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği Programı'na kayıt oldu. 25 Aralık 2005 tarihinde İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Mekanik A.B.D. da araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Bu görevini halen sürdürmektedir.